

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées (SFA)
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs applications

Présentée par :
Jules Tindzogho Ntsiri

Étude de quelques liens entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires

Directeur(s) de Thèse :
Olivier Frécon

Soutenue le 25 juin 2013 devant le jury

Jury :

Président	Gregory Cherlin	Professor, Rutgers University, USA
Rapporteur	Gregory Cherlin	Professor, Rutgers University, USA
Rapporteur	Franck-Olaf Wagner	Professeur des Universités, Université de Lyon 1
Membre	Olivier Frécon	Maître de conférences, Université de Poitiers
Membre	Abderrazak Bouaziz	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	Tuna Altinel	Maître de conférences, Université de Lyon 1

Pour citer cette thèse :

Jules Tindzogho Ntsiri. *Étude de quelques liens entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs applications . Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur Internet <<http://theses.univ-poitiers.fr>>

UNIVERSITÉ DE POITIERS

THÈSE

pour l'obtention du grade de
Docteur de l'Université de Poitiers
(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 07 Août 2006)

École Doctorale : Sciences et Ingénierie de l'Information et des Mathématiques (S2IM)

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par:

Jules Tindzogho Ntsiri

**Étude de quelques liens entre les groupes de rang de
Morley fini et les groupes algébriques linéaires.**

Directeur de thèse : **Olivier Frécon**

Soutenue le 25 Juin 2013
devant la Commission d'Examen

Jury

Frank O. Wagner	Professeur, Université de Lyon,	Rapporteur
Gregory Cherlin	Professeur, Rutgers University,	Rapporteur
Abderrazak Bouaziz	Professeur, Université de Poitiers,	Examineur
Tuna Altinel	MCF habilité, Université de Lyon,	Examineur
Olivier Frécon	MCF habilité, Université de Poitiers,	Directeur

Dédicaces

Je dédie ce mémoire à ma précieuse grand-mère Simone, à mes très protectrices mamans, à ma famille et à toi Lu.

Remerciements

C'est le lieu ici pour moi d'exprimer toute ma gratitude envers celles et ceux qui m'ont entouré, accompagné, et contribué à l'aboutissement de ces longues années d'étude. Une thèse ce n'est pas seulement les trois années de recherche qui mènent au titre de docteur, mais c'est aussi tout le parcours avant. C'est pourquoi je remercie tout d'abord mes parents pour l'éducation et le soutien qu'ils ont su m'apporter, et aussi le corps enseignant qui m'a conduit aux portes de ces années de thèse.

À présent, je tiens particulièrement à dire un grand merci à Olivier Frécon sans qui la concrétisation de ces travaux n'aurait pas eu lieu. Je lui remercie d'avoir accepté de m'encadrer et m'initier à la recherche, et ce depuis le master 2. Il a été pour moi un formidable encadrant, en juger par sa présence régulière au suivi des travaux, ses conseils, et surtout sa patience. Ce mémoire est sans doute le fruit de cette patience ; je lui en suis très reconnaissant.

C'est pour moi un honneur que Gregory Cherlin et Frank Olaf Wagner acceptent d'être les rapporteurs de cette thèse ; je leur dis merci, ainsi qu'à Abderrazak Bouaziz et Tuna Altinel en leur qualité d'examineur.

Je poursuis en exprimant toute ma sincère reconnaissance à l'Université de Poitiers et au Laboratoire de Mathématiques et Applications pour le cadre d'étude qu'il m'a accordé ces dernières années. Au passage je remercie Pierre Torasso qui a permis mon arrivée au sein de cette université. Je ne saurais assez remercier le personnel ita/iatos du laboratoire : Brigitte Brault, Nathalie Mongin, Benoit Métrot pour ton aide concernant l'outil informatique, Nathalie Marlet et Jocelyne Attab pour le service bibliothécaire (Dieu seul sait combien de fois elles ont été d'une grande gentillesse en gommant mes retards de prêt). Je remercie également Paul Broussouss pour les échanges que nous avons eu, Pol Vanhaecke pour sa sympathie et sa présence parmi les doctorants, et tous les autres membres du laboratoire.

Ces dernières années, je me suis découvert une nouvelle famille au sein de ce laboratoire, je veux parler ici de mes amis doctorants et docteurs ; en commençant par ceux de mon bureau je dis merci à Houssam pour sa gentillesse et bonne humeur, à Brice avec qui j'ai presque tout connu depuis mon arrivée, à Hussein le nouveau venu pour sa sympathie, à Anis, Charlène, Guilnard, Paola, Claire,

Jasmine et Kevin les membres de mon groupes de travail, à Apollinaire, Frédéric, Nadir, Kais les sportifs du vendredi, aux autres, Ali, Florent, Haidy, Caroline. Je dis aussi merci à certains anciens qui m'ont accueilli, je pense à Armel, Paul, Hélène, Caroline, Liu Gong, Le Yang.

Dès mon arrivée en France, j'ai été reçu par des personnes que je tiens ici à remercier, en commençant par Magali Moreau ; la communauté gabonaise n'est pas en reste et au risque d'oublier certains, je lui dis merci dans toute son entiereté.

Enfin je remercie ma famille et mes proches pour leurs encouragements. Je pense à mes frères aînés : Jean-Bosco, Kevin Assambou, Silver, Helby pour leur encouragements...à ma mamie, à mes mères, à mes petites soeurs et petits frères, à mes amis, Kodjo, Christel, Freez...Christian et Aline, Clencia et Rody, Lauriss, Ngoye (l'"abîmage"), Idalina, Marlène, Yan, Chiberth, Joel et Chloé, Yohan et Sity, Lucie et Sam, les Mboudi, Massima, Makaya, Arthur, Lilian, Théo, Mod, Bodel...

Je ne saurai clôre ce rituel de remerciement, sans témoigner tout le bonheur qui est le mien d'être assisté au quotidien par une personne aux qualités exceptionnelles, ma Lulu, je dis un grand merci pour l'équilibre que tu a su apporté dans ma vie.

Table des matières

Dédicaces	iii
Remerciements	v
Table des matières	vii
Introduction	1
1 Outils	5
1.1 Groupes de rang de Morley fini	6
1.1.1 Définitions	6
1.1.2 Propriétés de base	8
1.1.3 Sous-groupes minimaux et Théorèmes d'algébricité	11
1.1.4 Groupes nilpotents et résolubles	13
1.1.5 Sous-groupes de Hall	15
1.1.6 Sous-groupes de Carter	15
1.1.7 Centralisateurs généralisés	16
1.1.8 Pseudo-tores	17
1.2 Groupes algébriques linéaires	18
1.2.1 Groupes algébriques linéaires résolubles	19
1.2.2 Groupes algébriques semi-simples et réductifs	21
2 Unipotence dans les groupes de rang de Morley fini	23
2.1 Unipotence dans les groupes de rang de Morley fini en caractéristique zéro	24
2.1.1 U_K -groupes	25
2.1.2 $\tilde{U}$ -groupes	29
2.2 Théorie des U_τ -groupes	34
2.2.1 Sous-groupes indécomposables	34
2.2.2 U_τ -Groupes	36
2.2.3 U_τ -Groupes homogènes	40
2.2.4 Groupes nilpotents	42
2.2.5 U^* -groupes	46
3 Groupes définissablement linéaires et définissablement affines	49
3.1 Groupes définissablement linéaires	50
3.2 U_K -groupes définissablement linéaires	58

TABLE DES MATIÈRES

3.3	Groupes définissablement affines	60
3.4	Remarques sur le produit de groupes définissablement affines . . .	65
4	K-groupes	67
4.1	Résultats préliminaires	67
4.2	Structures des K -groupes	73
4.3	K -groupes définissablement linéaires	80
4.4	Étude de linéarité des K -groupes	91
4.4.1	Groupes résolubles et définissablement linéaires	92
4.4.2	Une étude de linéarité sur les K -groupes	95
5	Étude de quelques actions sur des groupes abéliens	107
5.1	Autour du Lemme des Trois Corps	107
5.1.1	Vers une généralisation du Lemme des Trois Corps	108
5.1.2	Vers une autre configuration.	113
5.2	Action quasi-simple sur un groupe abélien	116
5.2.1	Preliminaire	116
5.2.2	Une action de $G \cong SL_2(\mathbb{K})$ sur un groupe abélien	119
6	Groupes unipotents en caractéristique positive	125
6.1	Brève étude préliminaire	126
6.2	L'étude de linéarité	127
7	Le groupe d'automorphismes définissables d'un K^*-groupe	131
	Bibliographie	137

Introduction

Du concept général aux K -groupes

Les groupes de rang de Morley fini forment un sujet issu de la logique mathématique et ayant des liens étroits avec la géométrie algébrique. Ils sont munis d'une dimension abstraite appelée *rang de Morley*; un groupe algébrique défini sur un corps algébriquement clos, par exemple, est un groupe de rang de Morley fini, dont le rang de Morley est la dimension de Zariski. De ce fait, les groupes de rang de Morley fini généralisent la notion de groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Cherlin et Zil'ber ont d'ailleurs conjecturé (l'un indépendamment de l'autre) qu'un groupe infini simple de rang de Morley fini est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos : c'est la "Conjecture de Cherlin-Zil'ber" ou *Conjecture d'Algébricité*. Cette conjecture constitue la principale motivation de l'étude des groupes de rang de Morley fini. Elle est cependant menacée par une éventuelle existence des *mauvais groupes*.

Un mauvais groupe est un groupe connexe non résoluble de rang de Morley fini, dont tout sous-groupe définissable connexe et propre est nilpotent. Un mauvais corps est un corps de rang de Morley fini de la forme $\langle K, +, \cdot, T \rangle$ où T est un sous-groupe infini définissable propre du groupe multiplicatif K^* . Ces structures confèrent aux groupes de rang de Morley fini, des propriétés non algébriques. Un groupe de rang de Morley fini qui n'interprète pas de telles pathologies est dit *ordinaire*.

Dans sa démarche en vue de répondre à la Conjecture de Cherlin-Zil'ber, Borovik, s'inspirant de la classification des groupes simples finis, va initier un plan d'attaque essentiellement basé sur un raisonnement inductif; on étudie un contre-exemple minimal à la conjecture : un K^* -groupe simple. Un K^* -groupe est un groupe de rang de Morley fini dont tout sous-groupe définissable propre est un K -groupe. Un K -groupe est un groupe de rang de Morley fini dont toute section infinie définissable et simple est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos. Le traitement inductif des K^* -groupes est donc directement induit de celui des K -groupes. De par ce fait, les K -groupes occupent une place très importante dans la classification des groupes infinis simples de rang de Morley fini, et une partie de cette thèse est consacrée à leur étude (Chapitre 4).

Des K -groupes aux groupes définissablement linéaires

La propriété la plus fondamentale des K -groupes est donnée par le Fait 4.10. Il y est dit que le quotient $H/\sigma(H)$, d'un K -groupe connexe non résoluble H par son radical résoluble $\sigma(H)$ (Définition 1.25) est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples (sans centre) sur des corps algébriquement clos. Si le traitement des K^* -groupes est induit par celui des K -groupes, ce résultat suggère pour le traitement des K -groupes, une analyse des sous-groupes définissables d'un groupe algébrique (simple) linéaire. Des telles études ont été faites par Poizat dans [33], puis par Mustafin dans [32]. Dans le chapitre 3, nous poursuivons ce travail en généralisant certains résultats de [32]. Par ailleurs, on pousse l'analyse dans le contexte du Fait 4.10 en étudiant les sous-groupes définissables d'un produit direct de groupes algébriques linéaires sur des corps de rang de Morley fini ; de tels sous-groupes sont dit *définissablement linéaires*.

L'étude des groupes définissablement linéaires permet d'apporter des informations sur les propriétés des K -groupes. Les sections définissables de tels groupes sont dites *définissablement affines*, et permettent plus aisément que les groupes définissablement linéaires, d'effectuer un traitement inductif.

Des groupes définissablement linéaires aux U_K -groupes

L'étude des groupes définissablement linéaires peut se révéler quelque peu délicate, du fait de la présence de plusieurs corps. L'utilisation des U_K -groupes (Définition 2.13), et particulièrement des U_K -groupes homogènes (Définition 2.22), pour K un corps de rang de Morley fini et de caractéristique zéro constitue un moyen d'étude très efficace.

Contenu de la thèse

Dans le chapitre 1, tout en rappelant les définitions des deux notions de base de notre étude que sont les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires, nous dressons une liste de propriétés et résultats connus les concernant que nous utilisons tout au long de cette thèse. Signalons toutefois que cette liste n'est pas exhaustive car certains résultats connus, du fait de leur utilisation bien précise, ne seront mentionnés que dans les chapitres où ils sont sollicités. Tous les résultats connus sont écrits comme faits, et ceux dont les démonstrations n'ont pas été trouvées ailleurs sont redémontrés.

Dans le chapitre 2, nous poursuivons notre outillage en présentant dans la première section la notion d'unipotence en caractéristique nulle dans les groupes de rang de Morley fini introduite par Burdges et explicitée par les $U_{0,r}$ -groupes. Les faits que nous citons dans ce cas, sont donnés en remplaçant l'opérateur d'origine $U_{0,r}$ au profit de l'opérateur U_K , où K est un corps de rang de Morley fini donné. Bien entendu cela est possible car un U_K -groupe est un $U_{0,r}$ -groupe.

Dans la seconde section, nous donnons une généralisation de cette approche, en définissant une nouvelle notion d'unipotence qui prend en compte toutes les caractéristiques : c'est l'objet de *la théorie des U_τ -groupes*. Il s'agira par la suite de vérifier que certains résultats importants donnés en caractéristique zéro restent valables pour cette nouvelle approche.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des groupes de rang de Morley fini, définissablement linéaires. Les travaux de Mustafin [32] et de Frécon [22], occupent une place importante dans ce chapitre. Une partie de ce qui est fait ici suit ou généralise certains résultats établis par ces derniers. C'est le cas par exemple au théorème 3.20 où nous décrivons la structure du quotient $H/\sigma(H)$, d'un groupe H définissablement linéaire sur des corps de caractéristique nulle, par son radical résoluble ; ou encore à la Proposition 3.25 où nous établissons un résultat de conjugaison des sous-groupes de Borel.

En outre, la décomposition de Jordan que Mustafin généralise aux sous-groupes définissables d'un groupe algébrique linéaire sur un corps de rang de Morley fini et de caractéristique zéro (Fait 3.37), combinée à l'étude des U_K -groupes, permet pour un groupe connexe G de rang de Morley fini et définissablement affine sur des corps de caractéristique nulle, un choix particulier d'une pair (U, V) de groupes définissablement linéaires sur ces mêmes corps telle que $G \simeq U/V$ (Proposition 3.44).

Le chapitre 4 constitue le coeur de cette thèse ; on y traite de l'étude des K -groupes. Dans ce chapitre nous établissons certaines propriétés algébriques des K -groupes. D'autres résultats de structure sur ces groupes sont fournis. Notamment à la Proposition 4.20, où un résultat du même type que le Fait 4.10 est donné et qui dit que le quotient d'un K -groupe connexe non résoluble de rang de Morley fini H par son *radical unipotent* $U(H)$ (Définition 2.31) est isomorphe à un produit central de groupes algébriques simples (sans centre) sur des corps algébriquement clos et d'un groupe abélien connexe. Le théorème 4.35, quant à lui, donne la structure des K -groupes connexes parfaits.

Nous analysons aussi les K -groupes définissablement linéaires. Cette analyse viendra compléter celle effectuée dans le Chapitre 3. Nous montrons que les K -groupes définissablement linéaires sur un corps de rang de Morley fini de caractéristique nulle conservent de nombreuses propriétés algébriques, et en particulier nous montrons dans cette configuration, un analogue du théorème de Levi sur la décomposition d'un groupe algébrique (Théorème 4.47).

Dans la dernière partie du chapitre, nous discutons de la linéarité des K -groupes. Sous certaines hypothèses bien précises, nous conjecturons qu'un K -groupe se décompose en un produit central de groupes définissablement linéaires, les uns sur des corps de caractéristique nulle, les autres sur des corps de caractéristiques non nulles (Conjecture 4.57). Une étude menée autour de cette conjecture va nous amener à rédiger une nouvelle conjecture (Conjecture 4.59), qui si elle est vraie, impliquerait la première. On montre toutefois que ces conjectures sont

vraies dans le cas résoluble (théorèmes 4.60 et 4.61).

Les trois derniers chapitres traitent de sujets indépendants les uns des autres. Le chapitre 5 s'inspire des articles [14] et [15] : dans un univers de rang de Morley fini, nous étudions une action définissable et non triviale de $G \simeq SL_2(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $p > 0$, sur un groupe abélien V . Dans les articles sus-mentionnés, Cherlin et Deloro se sont intéressés aux cas où le rang de Morley de V est petit. Dans notre étude aucune restriction de genre n'est imposée. Nous montrons que pour T un tore maximal de G , si $C_V(T) = 0$, alors tout sous-groupe T -minimal de V est de rang de Morley $rk(\mathbb{K})$ (Proposition 5.31). Ce résultat a une portée sur la structure V ; en effet, il permet d'avoir une décomposition de V en somme directe de sous-groupe $N(T)$ -minimaux, où $N(T)$ est le normalisateur de T (Théorème 5.34). De plus, chaque sous-groupe $N(T)$ -minimal est muni d'une structure d'espace vectoriel (sur un corps bien précis) sur lequel $N(T)$ agit linéairement.

Dans le chapitre 6, nous nous proposons d'étudier dans quelles conditions le quotient $G/Z(G)$ d'un groupe algébrique linéaire G sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$ de caractéristique non nulle par son centre, est définissablement linéaire dans une structure interprétable du *pur corps* $\mathbb{F}$. Une utilisation des $U_{\mathbb{K}}$ -groupes est également requise pour cette étude.

Nous finissons par un chapitre très court où nous montrons que sous certaines hypothèses, le groupe des automorphismes définissables de certains K^* -groupes simples est interprétable (Théorème 7.4).

Chapitre 1

Outils

Ce premier chapitre est consacré à un rappel de notions que nous utilisons dans cette thèse. Ces notions concernent aussi bien les groupes de rang de Morley fini, que les groupes algébriques linéaires.

Comme références principales, nous utilisons [6] pour les groupe de rang de Morley fini, et [25] pour les groupes algébriques linéaires. Nous prévenons le lecteur que les résultats et théorèmes cités tout au long de cette thèse, et mentionnés comme faits, seront en général fournis sans preuve ; libre au lecteur de se référer aux sources indiquées pour consulter lesdites preuves.

Les notations que nous adopterons sont essentiellement celles utilisées dans le livre [6].

Soit G un groupe ; on désigne par 1 son élément neutre.

Soient $x, y \in G$, on note $x^y = y^{-1}xy$ le conjugué de x par y et $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ le commutateur de x et y ; si A est un sous-ensemble de G , on note x^A l'ensemble $\{x^a : a \in A\}$. Pour X, Y deux sous-ensembles de G , on note $[X, Y]$, le sous-groupe de G engendré par l'ensemble $\{[x, y] : x \in X, y \in Y\}$.

On définit par induction les suites, dérivée $(G^{(n)})_{n \geq 0}$ et centrale descendante $(G^n)_{n \geq 0}$ de G , de la façon qui suit :

$$G^0 = G^{(0)} = G, \quad G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}], \quad G^{n+1} = [G^n, G].$$

On désigne par $G' = G^{(1)} = G^1$ le sous-groupe dérivé de G ; on dit que G est *parfait* si $G = G'$. On note $G^{(\infty)}$, le plus petit sous-groupe par l'inclusion de la série dérivée $(G^{(n)})_{n \geq 0}$ de G ; $G^{(\infty)}$ est un groupe parfait. On dit que G est résoluble (resp. nilpotent) s'il existe un entier n tel que $G^{(n)} = 1$ (resp $G^n = 1$) et si n est le plus petit entier pour cette condition, on dit que G est résoluble (resp. nilpotent) de classe n .

On note $Z_n(G)$ les termes de la suite centrale ascendante de G , définie par induction comme il suit :

$$Z_0(G) = 1, \quad Z_{n+1} = \{g \in G : [g, G] \in Z_n(G)\}.$$

On désigne par $Z(G) = Z_1(G)$ le centre de G . Il existe une limite α de n (α peut être l'infini) pour laquelle $Z_\alpha(G) = Z_{\alpha+1}(G)$ et on note $Z_\infty(G) = Z_\alpha(G)$, c'est l'*hypercentre* de G . Si $G = Z_\infty(G)$, on dit que G est hypercentral.

Si tout élément de G est d'ordre fini inférieur à n , on dit que G est d'*exposant borné*, et si n est le plus petit entier pour cette condition, on dit que G est d'exposant n et on note $\exp(G) = n$.

On dit aussi qu'un élément d'ordre fini de G est de *torsion*. Dans le même sens, on dit qu'un sous-groupe de G est de torsion si tous ses éléments sont de torsion ; il est dit sans torsion s'il ne possède que l'élément neutre comme élément de torsion.

1.1 Groupes de rang de Morley fini

1.1.1 Définitions

La définition originelle des groupes de rang de Morley fini que l'on peut retrouver dans [31] est purement modèle-théorique et utilise une formulation que nous éviterons de reproduire. Ici nous allons plutôt définir un groupe de rang de Morley fini à partir des *structures rangées*, et ce grâce à un théorème de Poizat.

Fait 1.1. - (Poizat, [34]) *Un groupe est rangé si et seulement si il est de rang de Morley fini.*

Il est donc essentiel de rappeler ce que nous entendons par “structure rangée”.

Univers rangée

Un univers est une collection non vide $\mathcal{U}$ d'ensembles dits *$\mathcal{U}$ -interprétables* ou simplement *interprétables*, satisfaisant les axiomes ci-dessous. Une application entre deux ensembles interprétables de $\mathcal{U}$ est dite interprétable si son graphe l'est.

- A1. (*Clôture par opérations booléennes*) Soient $A, B \in \mathcal{U}$, alors les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$ appartiennent également à $\mathcal{U}$.
- A2. (*Clôture par produits*) Soient $A, B \in \mathcal{U}$, alors leur produit cartésien $A \times B \in \mathcal{U}$.
- A3. (*Sous-ensembles finis*) Si $A \in \mathcal{U}$ et $a \in A$, alors $\{a\} \in \mathcal{U}$.
- A4. (*Factorisation*) Si $E(x, y)$ est une relation d'équivalence interprétable sur un ensemble $A \in \mathcal{U}$ (i.e. l'ensemble $E = \{(x, y) \in A^2 : E(x, y)\} \in \mathcal{U}$, alors l'ensemble A/E des classes d'équivalence et la surjection canonique $A \rightarrow A/E$ sont définissables dans interprétables.

Si $\mathcal{L}$ est un langage du premier ordre et $\mathcal{M}$ une $\mathcal{L}$ -structure, on note $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ la famille des ensembles interprétables dans $\mathcal{M}$; c'est un univers. Les ensembles interprétables de $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ sont aussi dits *définissables*. Pour plus de précisions sur ces notions, nous invitons le lecteur à consulter [31] ou [6].

Définition 1.2. – Soit $\mathcal{U}$ un univers, une fonction $rk : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{N}$ est appelée *fonction de rang* si pour tout A et B dans $\mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$, elle satisfait les axiomes suivants :

- B1. (*Monotonie du rang*). $rk(A) \geq n+1$ si et seulement si il existe une infinité de sous-ensembles interprétables non vides de A , deux-à-deux disjoints et de rangs au moins n .
- B2. (*Définissabilité du rang*). Pour toute fonction interprétable $f : A \rightarrow B$, l'ensemble $\{b \in B : rk(f^{-1}(b)) = n\}$ est interprétable pour chaque $n \in \mathbb{N}$.
- B3. (*Additivité du rang*). Pour toute fonction interprétable surjective $f : A \rightarrow B$, si $\forall b \in B, rk(f^{-1}(b)) = n$, alors $rk(A) = rk(B) + n$.
- B4. (*Élimination des quantificateurs infinis*). Pour toute fonction $f : A \rightarrow B$ interprétable, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $b \in B$ $f^{-1}(b)$ soit infini dès qu'il contient m éléments au moins.

Un univers $\mathcal{U}$ qui admet une fonction de rang est dit *rangé*. Dans ce cas la fonction de rang est unique d'après l'axiome B1. Si $\mathcal{M}$ est une $\mathcal{L}$ -structure, on dit que $\mathcal{M}$ est une *structure rangée* si $\mathcal{U}_{\mathcal{L}}(\mathcal{M})$ est un univers rangé.

Une structure définissable dans un univers (ou structure) rangé(e) est rangée. En particulier un groupe (resp. un corps, resp. un anneau), définissable dans une structure rangée est un groupe (resp. un corps, resp. un anneau) rangé. Par ailleurs un groupe G (resp. un corps K) considéré avec sa seule structure de groupe (resp. de corps) est dit *pur groupe* (resp. *pur corps*).

Considérons le pur corps algébriquement clos K ; un résultat de Tarski ([6, Fait 3.6]) permet de dire que les ensembles définissables dans le pur corps K sont les ensembles constructibles sur K . Rappelons qu'un ensemble *constructible* sur K est une combinaison booléenne de fermés de Zariski. Un autre résultat de Poizat sur l'*élimination des imaginaires* ([6, Fait 3.7]) permet de conclure que la famille des ensembles constructibles sur K , noté $\mathcal{U}(K)$ est un univers ; et le fait qu'il soit rangé se démontre en géométrie algébrique (cf. [25]) et dans ce cas la fonction de rang correspond à la dimension de Zariski. Cet exemple permet d'établir le lien entre les groupes algébriques et les groupes de rang de Morley fini. Rappelons que la motivation principale de l'étude des groupes de rang de Morley fini est d'apporter une réponse à la conjecture de Cherlin-Zil'ber.

Conjecture 1.3. – Un groupe simple infini de rang de Morley fini est algébrique sur un corps algébriquement clos.

Toutefois, tout groupe de rang de Morley fini n'est pas algébrique. Il suffit par exemple de considérer le produit direct de deux groupes algébriques sur des corps algébriquement clos de caractéristiques différentes, qui est un groupe rangé sans être algébrique.

À partir de maintenant et ce jusqu'à la fin de ce mémoire, nous admettons qu'une structure rangée est une structure de rang de Morley fini dont le rang de Morley est sa fonction de rang notée rk .

Fait 1.4. - (Macintyre, [30]) *Un corps infini de rang de Morley fini est algébriquement clos.*

Fait 1.5. - [4, Lemme 4.3] *Un corps de rang de Morley fini n'admet pas de sous-anneau infini définissable et propre.*

Fait 1.6. - (Cherlin, [13]) *Un anneau infini intègre de rang de Morley fini est un corps algébriquement clos.*

1.1.2 Propriétés de base

rang et degré de Morley

Fixons $\mathcal{M}$ une structure de rang de Morley fini. Par convention nous posons $rk(\emptyset) = -1$.

Fait 1.7. - [6, Lemmes 4.8, 4.9, 4.10] *Si A et B sont deux ensembles définissables non vides de $\mathcal{M}$. Alors :*

- (i) $rk(A) \geq 1$ si et seulement si A est infini. En d'autres termes un ensemble définissable de rang zéro est fini.
- (ii) Si $A \subseteq B$ alors $rk(A) \leq rk(B)$.
- (ii) $rk(A \cup B) = \max(rk(A), rk(B))$.

Un ensemble définissable non vide A est de *degré de Morley* 1 si pour tout sous-ensemble définissable B de A on a $rk(B) < rk(A)$ ou $rk(A \setminus B) < rk(A)$. On dira que A est de degré de Morley d si A est l'union disjointe de d sous-ensembles définissables de degré de Morley 1 et de même rang $rk(A)$, et on notera $deg(A) = d$. En particulier, le degré d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

Fait 1.8. - [6, Lemmes 4.14, 4.15, 4.16]

- (i) *Tout ensemble définissable non vide a un degré.*
- (ii) *Soient A et B deux ensembles définissables. Supposons que $rk(A) > rk(B)$. Alors $deg(A \cup B) = deg(A)$.*
- (iii) *Soit $f : A \rightarrow B$ une bijection définissable entre deux ensembles définissables A et B . Alors $rk(A) = rk(B)$ et $deg(A) = deg(B)$.*

Le fait suivant donne le rang et le degré du produit cartésien de deux ensembles définissables.

Fait 1.9. - [6, Lemme 4.18, Proposition 4.20] *Soient A et B deux ensembles définissables non vides. Alors $rk(A \times B) = rk(A) + rk(B)$ et $deg(A \times B) = deg(A)deg(B)$.*

Le Fait 1.9 combiné à l'axiome B3 permet de dire que si on considère l'ensemble des cosets à gauche (resp. à droite) G/H d'un sous-groupe définissable H d'un groupe de rang de Morley fini G , alors $rk(G) = rk(G/H) + rk(H)$: c'est l'égalité de Lascar.

Fait 1.10. - [6, Lemme 5.1] Soient G un groupe de rang de Morley fini et $K \leq H$ des sous-groupes définissables de G . Alors

- (i) $[H : K] = \infty$ si et seulement si $rk(K) < rk(H)$.
- (ii) $[H : K] < \infty$ si et seulement si $rk(K) = rk(H)$; et dans ce cas on a $deg(H) = [H : K]deg(K)$.
- (iii) $H = K$ si et seulement si $rk(H) = rk(K)$ et $deg(H) = deg(K)$.

Condition de chaîne descendante et connexité

On dit qu'un groupe G satisfait la *condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables* si toute chaîne descendante de sous-groupes définissables est stationnaire.

Fait 1.11. - [6, Théorème 5.2] Un groupe de rang de Morley fini satisfait la condition de chaîne descendante sur ses sous-groupes définissables.

Ce résultat permet d'affirmer que l'intersection d'une infinité de sous-groupes définissables est toujours définissable. C'est une propriété équivalente à celle donnée par la noetherienneté, pour l'intersection des sous-groupes fermés d'une variété algébrique.

Ainsi, si X est un sous-ensemble d'un groupe G de rang de Morley fini, alors son centralisateur $C_G(X)$ est définissable et on a $C_G(X) = C_G(x_1, \dots, x_n)$ pour des éléments $x_1, \dots, x_n \in G$. En particulier un groupe de rang de Morley fini satisfait la condition de chaîne descendante sur les centralisateurs.

Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable de G . L'intersection des sous-groupes définissables d'indice fini de H noté H° , est appelée *composante connexe* de H . On dit que H est connexe si $H = H^\circ$. D'après la condition de chaîne descendantes sur les sous-groupes définissables, H° est un sous-groupe définissable et d'indice fini dans H . D'après le Fait 1.10(ii) on a $rk(H) = rk(H^\circ)$. La composante connexe d'un groupe fini G est son élément neutre.

Un sous-groupe H d'un groupe G est *caractéristique* dans G s'il est stable par tout automorphisme de G . Si G est de rang de Morley fini et H est définissable, on dit que H est *définissablement caractéristique* dans G si H est stable par tout automorphisme définissable de G .

Fait 1.12. - [6, Lemmes 5.7, 5.8] Le sous-groupe H° est définissablement caractéristique et d'indice fini dans H .

Soient G un groupe de rang de Morley fini, S un sous-groupe définissable de G et X un ensemble définissable. On dit que S agit *définissablement* sur X si l'application $(s, x) \rightarrow sx$ est une application définissable de $S \times X$ dans X .

Fait 1.13. - [6, Lemme 5.9] *Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini et X un ensemble fini. supposons que G agit définissablement sur X . Alors G agit trivialement sur X , i.e $hx = x$ pour tout $h \in G$ et $x \in X$.*

Fait 1.14. - (Cherlin, [11]) *Un groupe de rang de Morley fini G est connexe si et seulement si $\deg(G) = 1$.*

Les groupes divisibles et infinis simples, de rang de Morley fini sont connexes.

Fait 1.15. - [6, Exercice 11] *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable normal de G . Alors $(G/H)^\circ = G^\circ H/H$. De plus, si H et G/H sont connexes, alors G l'est aussi.*

Le Fait 1.15 permet de dire que l'image d'un groupe connexe par un morphisme définissable est connexe.

Fait 1.16. - [6, Exercice 10] *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors G° contient tous les sous-groupes définissables connexes de G .*

Ce résultat permet en particulier de dire que les groupes additif K_+ et multiplicatif K^* d'un corps infini K de rang de Morley fini sont connexes. En effet, le groupe additif de K est stable par multiplication des éléments non nuls de K . Il vient d'après les Faits 1.15 et 1.16 que sa composante connexe $(K_+)^\circ$ est un idéal du corps K . Comme K est infini, on en déduit que cet idéal est K_+ , et donc K_+ est connexe. Le Fait 1.14 permet de conclure que le groupe multiplicatif K^* est aussi connexe.

Theorème des Indécomposables de Zilber et conséquences

Un sous-ensemble définissable X de G est dit *indécomposable* si pour tout sous-groupe définissable Q de G tel que $X \subseteq g_1Q \sqcup \dots \sqcup g_nQ$, il existe i tel que $X \subseteq g_iQ$. En particulier, un sous-groupe définissable de G est indécomposable si et seulement si il est connexe.

Le Fait 1.17 est l'un des plus importants sur l'étude des groupes de rang de Morley fini, il est dû à Zilber : c'est le *Théorème des indécomposables* de Zil'ber.

Fait 1.17. - (Zil'ber, [6, Théorème 5.26]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini, I un ensemble et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles indécomposables de G . Si chaque H_i contient l'élément neutre de G , alors le groupe H engendré par les H_i pour tout $i \in I$ est définissable et connexe. De plus, il existe un m -uplet $i_1, \dots, i_m$ de I tel que $H = A_{i_1} \dots A_{i_m}$ pour $m < 2^{rk(G)+1} - 2$.*

Les faits qui suivent sont des conséquences du Théorème des Indécomposables de Zil'ber.

Fait 1.18. - [6, Corollaire 5.29] *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors le groupe engendré par un ensemble de sous-groupes définissables et connexes de G est définissable et connexe, et c'est le produit d'un nombre fini d'entre eux.*

Fait 1.19. - [6, Corollaire 5.29] *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable connexe de G . Soit $X \subseteq G$ un sous-ensemble de G . Alors le sous-groupe $[H, X]$ est définissable et connexe.*

Fait 1.20. - [6, Corollaire 5.32] *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors les sous-groupes G^n et $G^{(n)}$ sont définissables pour tout n .*

Clôture définissable

Soient G un groupe de rang de Morley fini et $X \subseteq G$ un sous-ensemble de G . On appelle *clôture définissable* de X et on note $d(X)$ l'intersection des sous-groupes définissables de G contenant X . Par la condition de chaîne descendante $d(X)$ est définissable. Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ on note $d(x_1, \dots, x_n)$ plutôt que $d(\{x_1, \dots, x_n\})$. Aussi, on notera $d(X, Y)$ pour $d(X \cup Y)$ avec X et Y deux sous-ensembles de G .

Fait 1.21. - [6, Lemmes 5.35, 5.36, 5.37] *Soit G un groupe de rang de Morley fini.*

- (i) *Si les éléments de X commutent entre eux, alors $d(X)$ est abélien.*
- (ii) *Si $A \leq B \leq G$ et A est d'indice fini dans B , alors $d(A)$ est d'indice fini dans $d(B)$. De plus si $A \triangleleft B$, alors $d(A) \triangleleft d(B)$ et $d(B) = d(A)B$.*
- (iii) *Si $B \triangleleft G$ est définissable et si $B \subseteq X \subseteq G$, alors $d(X/B) = d(X)/B$.*
- (iv) *Si $A, B \leq G$, alors $[d(A), d(B)] \leq d([A, B])$.*

Fait 1.22. - [6, Corollaire 5.38] *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Si $H \leq G$ est résoluble (resp. nilpotent) de classe n , alors $d(H)$ est résoluble (resp. nilpotent) de classe exactement n .*

1.1.3 Sous-groupes minimaux et Théorèmes d'algébricité

Un sous-groupe A d'un groupe G de rang de Morley fini est dit *S -minimal*, pour S un sous-ensemble de G , si A est infini, définissable, normalisé par S et minimal pour ces conditions.

Soit G un groupe de rang de Morley fini. Le fait suivant indique que les sous-groupes normaux minimaux de G , lorsqu'il en existe, sont définissables.

Fait 1.23. - (Belegradek, [5]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini.*

- (i) *Les sous-groupes normaux minimaux de G , s'il en existe, sont définissables.*
- (ii) *Si $1 \neq H \triangleleft G$ est infini et $H \cap G^\circ \not\leq Z(G)^\circ$, alors H contient un sous-groupe G -minimal de G .*

Il s'ensuit qu'un groupe normal minimal d'un groupe de rang de Morley fini G est soit fini, soit G -minimal.

Fait 1.24. - [6, Proposition 7.7] *Soit A un sous-groupe G -minimal d'un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors soit A est abélien, soit $Z(A)$ est fini et $A/Z(A)$ est simple.*

Définition 1.25. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. On définit $\sigma(G)$ comme étant le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes résolubles normaux de G . On appelle $\sigma(G)$ le *radical résoluble* de G .

Fait 1.26. - (Belegradek, [5]) *Soit G un groupe rang de Morley fini. Alors son radical résoluble $\sigma(G)$ est définissable et résoluble.*

Remarque 1.27. – Soient G un groupe de rang de Morley fini et N un sous-groupe définissable normal résoluble, alors $\sigma(G/N) = \sigma(G)/N$.

Soit G un groupe de rang de Morley fini. On note $S(G)$ le sous-groupe de G engendré par ses sous-groupes normaux minimaux. Alors $S(G)$ est un sous-groupe caractéristique de G . Cependant il n'est toujours pas définissable. Il suffit de considérer le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ dont le socle est $\bigoplus_p \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

Fait 1.28. - [6, Théorème 7.8] *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Supposons que $\sigma(G) = 1$. Alors $S(G)$ est un sous-groupe définissable de G . De plus, $S(G)$ est une somme directe finie de sous-groupes simples G -minimaux.*

Fait 1.29. - (Poizat, [34, Corollaire 3.3]) *Soit $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini et de caractéristique zéro. Alors $\mathbb{K}_+$ n'admet pas de sous-groupe définissable propre.*

Notation 1.30. – Dans ce qui va suivre, pour deux objets définissables A et B , l'écriture " $A \cong^{def} B$ " signifie que A et B sont définissablement isomorphes.

Fait 1.31. - (Zil'ber, [6, Théorème 9.1]) *Soit $G = A \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini, où A et H sont deux sous-groupes définissables infinis et abéliens tels que A est H -minimal. Supposons que $C_H(A) = 1$. Alors G interprète un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ tel que $A \cong^{def} \mathbb{K}_+$ et $H \cong^{def} T$, pour T un sous-groupe définissable de $\mathbb{K}^*$. De plus*

$$G \cong^{def} \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in T, a \in \mathbb{K} \right\};$$

et il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{K} = T + \dots + T$ (l fois).

Fait 1.32. - [6, Théorème 9.4] Soient $G = A \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini où

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n,$$

H est abélien et définissable, chaque A_i est abélien et H -minimal. Supposons de plus que $C_H(A) = 1$ et $H/C_H(A_i)$ est infini pour tout i . Alors l'anneau d'endomorphismes $R = \mathbb{Z}(H)/\text{ann}_{\mathbb{Z}(H)}(A)$ est interprétable dans G et isomorphe à une somme directe de corps algébriquement clos. Plus précisément :

Soit $M_i = \text{ann}_R(A_i)$ et définissons la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$:

$$i \sim j \Leftrightarrow M_i = M_j.$$

Soient $[i] = \{j_1, \dots, j_{n_i}\}$ la classe de i et $M_{[i]} = M_{j_1}$, $K_{[i]} = R/M_{[i]}$, $B_{[i]} = \bigoplus_{j \in [i]} A_j$. Nous avons $R \cong \bigoplus_{[i]} K_{[i]}$, $H \leq R^*$, $A_i \cong (K_{[i]})_+$, $G \leq A \rtimes R^* \cong \bigoplus_{[i]} B_{[i]} \rtimes K_{[i]}^*$ et

$$B_{[i]} \rtimes K_{[i]}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{j_1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{j_i} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta \end{pmatrix} : a_{j_k} \in A_{j_k} \cong K_{[i]}, \beta \in K_{[i]}^* \right\}.$$

Fait 1.33. - (Wagner, [26]) Dans un univers de rang de Morley fini, considérons les objets définissables suivants : un groupe abélien A sans torsion, un groupe infini S et une action de S sur A tels que A soit S -minimal. Alors il existe un sous-groupe $A_1 \leq A$ et un corps $\mathbb{K}$ tels que $A_1 \cong \mathbb{K}_+$ définissablement, et S s'injecte définissablement dans $GL_m(\mathbb{K})$ pour m un entier strictement positif.

1.1.4 Groupes nilpotents et résolubles

Cette sous-section donne quelques résultats basiques concernant les groupes résolubles et nilpotents de rang de Morley fini.

Fait 1.34. - [6, Théorème 9.8] Soit $A \rtimes G$ un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini, où A est abélien définissable, G est définissable et connexe. Si un sous-groupe B de A est G -minimal ou G' -minimal, alors G' centralise B .

Fait 1.35. - (Nesin, [28, Lemme 17]) Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini, résoluble de classe 2 et sans centre. Soient $x \in G'$ et R l'anneau des endomorphismes de G' engendré par un complémentaire T de G' dans G . Alors $R/\text{ann}(x)$ est un anneau interprétable.

Définition 1.36. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. On appelle sous-groupe de Borel de G , tout sous-groupe définissable connexe résoluble maximal de G .

Fait 1.37. - [6, Lemme 6.1] Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si $Z(G)$ est fini, alors $G/Z(G)$ est sans centre.

Fait 1.38. - [6, Lemme 6.2] *Soit G un groupe infini nilpotent de rang de Morley fini. Alors $Z(G)$ est infini.*

Fait 1.39. - [6, Lemme 6.3] *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Si $H < G$ est un sous-groupe définissable d'indice infini, alors $N_G(H)/H$ est infini.*

Fait 1.40. - (Reineke, [6, Théorème 6.4]) *Dans un groupe de rang de Morley fini, un sous-groupe infini définissable minimal A est abélien. De plus, soit A est divisible soit A est un p -groupe abélien élémentaire pour p un entier premier.*

Ce qui est aussi important à retenir dans le Fait 1.40 c'est qu'un groupe infini de rang de Morley fini possède des sous-groupes infinis minimaux [6, Corollaire 6.5].

Fait 1.41. - (Macintyre, [29], [6, Théorème 6.7]) *Soit G un groupe abélien de rang de Morley fini. Alors $G = D \oplus B$ où D est un sous-groupe divisible, et B un sous-groupe d'exposant borné.*

Fait 1.42. - [6, Corollaire 6.11] *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors $G = N \oplus U$ où U est la torsion de G et N un sous-groupe divisible sans torsion.*

Notation 1.43. – Soient G un groupe, et A et B deux sous-groupes de G . On dit que G est le produit central de A et B si $G = AB$ et si A et B se centralise, et on note $G = A * B$.

Fait 1.44. - [6, Corollaire 6.12] *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors G est le produit central $G = D * C$ et $D = T \times N$ où*

- (i) D est définissable connexe caractéristique et divisible,
- (ii) C est définissable caractéristique et d'exposant borné,
- (iii) N est un sous-groupe divisible sans torsion de D , et
- (iii) la torsion T de D est abélienne, divisible et centrale dans G

De plus si G connexe, alors C peut être choisi connexe et caractéristique.

En particulier un groupe nilpotent connexe de rang de Morley fini ayant un nombre fini d'éléments d'ordre fini est divisible.

Définition 1.45. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. On appelle *sous-groupe de Fitting* de G et on note $F(G)$, le sous-groupe engendré par tous les sous-groupes nilpotent normaux de G .

Fait 1.46. - (Nesin, [27]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors son sous-groupe de Fitting $F(G)$ est définissable et résoluble.*

Fait 1.47. - (Nesin, [28], [6, Théorème 9.21]) *Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Alors $G/F(G)^\circ$ (et donc aussi $G/F(G)$) est un groupe abélien divisible.*

Fait 1.48. - [6, Corollary 9.9] *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors G' est nilpotent.*

Fait 1.49. - [36, page 129] *Si un groupe G a un sous-groupe normal et nilpotent H tel que G/H' soit nilpotent, alors G est nilpotent.*

1.1.5 Sous-groupes de Hall

Soient G un groupe et π un ensemble de nombres premiers. Un sous-groupe H de G est π -sous-groupe de Hall de G si H est un π -sous-groupe maximal de G . Si $\pi = \{p\}$ où p est un entier premier, alors on dit que H est un p -sous-groupe de Sylow de G .

Fait 1.50. - [7], [6, Théorème 9.29] *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors les π -sous-groupes de Hall de G sont connexes pour tout ensemble d'entiers premiers π .*

Le résultat suivant établit la conjugaison des sous-groupes de Hall dans les groupes de rang de Morley résolubles.

Fait 1.51. - [6, Théorème 9.35] *Soit π un ensemble d'entiers premiers. Alors deux quelconque π -sous-groupes de Hall d'un groupe résoluble G de rang de Morley fini sont conjugués.*

Fait 1.52. - [1] *Soient G un groupe résoluble de rang de Morley fini, $N \triangleleft G$, et H un π -sous-groupe de Hall de G pour π un ensemble d'entiers premiers. Alors*

- (i) *$H \cap N$ est un π -sous-groupe de Hall de N , et les π -sous-groupes de Hall de N sont de cette forme ;*
- (ii) *Si N est définissable, alors HN/N est un π -sous-groupe de Hall de G/N et tous les π -sous-groupes de Hall de G/N sont de cette forme.*

1.1.6 Sous-groupes de Carter

Définition 1.53. – Un sous-groupe C d'un groupe de rang de Morley fini est dit sous-groupe de Carter s'il est connexe nilpotent définissable et d'indice fini dans son normalisateur.

Un sous-groupe de Carter peut être vu comme un analogue dans les groupes de rang de Morley fini, au sous-groupe de Cartan d'un groupe algébrique, qui lui est la composante connexe du centralisateur d'un tore maximal. L'existence des sous-groupes de Carter a été dans un premier temps prouvée dans tout groupe résoluble de rang de Morley fini [38]. Ce dernier article concerne une classe bien plus large de groupes de rang de Morley fini. Le Fait 1.54 assure l'existence des sous-groupes de Carter dans tout groupe de rang de Moley fini.

Fait 1.54. - (Frécon et Jaligot, [19]) *Tout groupe de rang de Morley fini a un sous-groupe de Carter.*

Contrairement aux sous-groupes de Cartan, la conjugaison des sous-groupes de Carter n'a pas encore été prouvée dans tout groupe de rang de Morley fini. Cependant le théorème suivant assure déjà cette propriété dans tout groupe résoluble de rang de Morley fini.

Fait 1.55. - (Wagner, [38]) *Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Alors G a un sous-groupe de Carter C et deux tels sous-groupes sont conjugués. De plus, si G a un sous-groupe définissable normal L tel que G/L est nilpotent, alors $G = LC$.*

D'autre part la conjugaison des sous-groupes de Carter est établie dans les K^* -groupes de rang de morley fini (Définition 4.2).

Fait 1.56. - (Frécon, [21, Théorème 1.2]) *Les sous-groupes de Carter sont conjugués dans tout K^* -groupe de rang de Morley fini.*

Fait 1.57. - [23, Corollaire 7.7] *Soient G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble de classe 2 et C un sous-groupe de Carter de G . Alors il existe un entier k tel que $G = G^k \rtimes C$.*

1.1.7 Centralisateurs généralisés

Définition 1.58. – Soient G un groupe et H un sous-groupe de G . Le centralisateur généralisé $E_H(g)$ d'un élément $g \in N_G(H)$ est l'union $E_H(g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (ad_g)^{-n}(1)$ où ad_g désigne l'application

$$\begin{aligned} ad_g &: H \rightarrow H \\ x &\mapsto [x, g] \end{aligned}$$

Le centralisateur généralisé $E_H(A)$ d'un sous-ensemble A de $N_G(H)$ est l'intersection des $E_H(a)$ pour $a \in A$.

Fait 1.59. - (Frécon, [23, Proposition 5.16]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et g un élément de G . Alors $E_G(g)$ est un sous-groupe définissable connexe de G et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(ad_g)^k(E_G(g)) = 1$.*

Fait 1.60. - [23, Corollaire 5.17] *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-ensemble qui engendre un sous-groupe localement nilpotent. Alors $E_G(H) = E_G(d(H))$ est un sous-groupe définissable et connexe et H est contenu dans $F(E_G(H))$. En particulier $d(H)$ est nilpotent et l'ensemble des sous-groupes nilpotents de G est inductif.*

Fait 1.61. - (Frécon, [23, Théorème 1.1]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe résoluble et H un sous-groupe nilpotent. Alors $E_G(H)$ contient un sous-groupe de carter de G .*

1.1.8 Pseudo-tores

Un *tore décent* est un groupe abélien divisible de rang de Morley fini qui est égal à la clôture définissable de sa torsion.

Les tores décents ont été définis par G. Cherlin et peuvent être présentés comme les analogues, dans les groupes de rang de Morley fini, des tores algébriques.

D'après le Fait 1.21, il vient que :

Corollaire 1.62. – *Tout quotient d'un tore décent est un tore décent.*

Définition 1.63. – Un groupe abélien divisible T de rang de Morley fini est appelé *pseudo-tore* si aucun quotient définissable de T n'est définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_+$, pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable.

Un tore décent est donc un pseudo-tore. L'étude des pseudo-tores est concentrée dans [20]. Le Fait 1.64 assure la conjugaison des pseudo-tores dans les groupes de rang de Morley fini.

Fait 1.64. - (Frécon, [20]) *Les pseudo-tores maximaux d'un groupe G de rang de Morley fini sont conjugués dans G .*

Les résultats ci-après sont extraits de [20].

Fait 1.65. - [20, Corollaire 2.13] *Soient G un groupe de rang de Morley fini, N un sous-groupe normal définissable de G et T un pseudo-tore maximal de G . Alors TN/N est un pseudo-tore maximal de G/N et tout pseudo-tore de G/N est de cette forme.*

Fait 1.66. - [20, Corollaire 2.8] *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors G a un unique pseudo-tore maximal.*

Fait 1.67. - [20, Corollaire 2.10] *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors chaque pseudo-tore de G est contenu dans un sous-groupe de Carter de G .*

Le Fait 1.68 donne la rigidité des pseudo-tores dans les groupes de rang de Morley fini.

Fait 1.68. - [20, Proposition 2.7] *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini agissant par conjugaison sur un pseudo-tore T . Alors G centralise T .*

Corollaire 1.69. – *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini et H un sous-groupe normal nilpotent de G . Alors tout pseudo-tore de H est central dans G . De plus si G est de centre fini et H est divisible, alors H est sans torsion.*

PREUVE – D'après le Fait 1.66, le groupe H a un unique pseudo-tore maximal T . Alors T est normal dans G . On déduit Comme G d'après le Fait 1.68 que $T \leq Z(G)$. Ainsi si $Z(G)$ est fini, alors $T = 1$ par connexité de T . En particulier, si H est divisible, alors H est sans torsion. $\square$

1.2 Groupes algébriques linéaires

Pour l'étude des groupes de rang de Morley fini définissablement linéaires qui sera traitée plus tard, il convient dans un premier temps de rappeler quelques définitions et propriétés sur les groupes algébriques linéaires.

Un groupe algébrique linéaire ou “affine” sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$ est un ensemble de zéros d'un système d'équations polynomiales sur $\mathbb{F}$ appelé fermé de Zariski, muni d'une structure de groupe dont le produit et l'inverse sont toutes des applications rationnelles sur $\mathbb{F}$. Pour plus de précisions concernant cette définition, le lecteur peut se référer à [25].

Il convient toutefois de noter qu'un groupe algébrique G , linéaire sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$ est un groupe de rang de Morley fini ; le rang de Morley étant la dimension de Zariski, se référer à [34] pour plus de détails. Ainsi, un sous-groupe fermé de G peut être vu comme un sous-groupe définissable dans sa structure algébrique. Les groupes de rang de Morley fini généralisent de ce fait la notion de groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Ici tous les groupes algébriques linéaires seront toujours considérés définis sur un corps algébriquement clos.

Fait 1.70. - [25, Corollaire 8.2] *Soient G un groupe algébrique, H un sous-groupe fermé. Alors $N_G(H)$ et $C_G(H)$ sont des sous-groupes fermés, de même $C_G(x)$ pour tout $x \in G$.*

Fait 1.71. - [25, Théorème 11.5] *Soient G un groupe algébrique linéaire, et H un sous-groupe fermé normal de G . Alors G/H est un groupe algébrique linéaire.*

Il est important de préciser que la “connexité” considérée dans cette sous-section correspond à la connexité prise dans la structure algébrique.

Fait 1.72. - [25, Théorème 20.5] *Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique arbitraire. A isomorphisme algébrique près, les groupes $\mathbb{K}_+$ et $\mathbb{K}^*$, sont les seuls groupes algébriques linéaires connexes de dimension un sur $\mathbb{K}$.*

Fait 1.73. - [25, Exercice 11, P.101] *Un groupe algébrique unipotent de dimension un sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{K}_+$.*

PREUVE – Soit G un groupe algébrique unipotent de dimension un, sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. Alors d'après le Fait 1.72, G est isomorphe, soit à $\mathbb{K}_+$, soit à $\mathbb{K}^*$. Or $\mathbb{K}_+$ est unipotent et $\mathbb{K}^*$ est un tore, d'où G est isomorphe à $\mathbb{K}_+$. $\square$

Tous les groupes algébriques mentionnés dans toute la suite de cette section seront considérés linéaires.

1.2.1 Groupes algébriques linéaires résolubles

Dans cette sous-section, il sera essentiellement question dans un premier temps de rappeler la structure des groupes algébriques linéaires résolubles, puis de donner quelques propriétés relatives aux sous-groupes de Borel.

Rappelons la décomposition de Jordan : si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$, et si x est un élément de G , on a $x = x_u x_s$ où x_u et x_s sont deux éléments de G qui commutent, x_u est unipotent et x_s est semi-simple. Il y a unicité de cette décomposition de x [25, Lemme 15.1 B]. Rappelons aussi qu'un élément *semi-simple* de G , est un élément diagonalisable où G est vu comme sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F})$, pour un certain entier positif n .

Soit G un groupe algébrique linéaire. L'ensemble de ses éléments unipotents sera noté G_u , et l'ensemble de ses éléments semi-simples sera noté G_s . Les ensembles G_s et G_u ne sont pas nécessairement de sous-groupes de G . Par contre G_u est un ensemble fermé, alors que G_s ne l'est généralement pas.

Fait 1.74. - [25, Proposition 19.2] *Soit G un groupe algébrique résoluble connexe. Alors G est nilpotent si et seulement si G_s est un sous-groupe, et dans ce cas G_s est fermé, et on a $G = G_u \times G_s$.*

Définition 1.75. - Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$. Un *tore* de G est un sous-groupe fermé de G algébriquement isomorphe à $(\mathbb{F}^*)^m$ pour un certain entier $m \geq 1$.

En particulier si G est un groupe algébrique nilpotent connexe, alors G_s est l'unique tore maximal de G .

Le Fait 1.76 donne la rigidité des tores dans les groupes algébriques linéaires.

Fait 1.76. - [25, Corollaire 16.3] *Soit G un groupe algébrique connexe et T un tore normal dans G . Alors T est central dans G .*

Fait 1.77. - [25, Théorème] *Soit G un groupe algébrique résoluble connexe. Alors G_u est un sous-groupe normal fermé connexe de G contenant G' . De plus les tores maximaux de G sont conjugués et si T est un tore maximal, alors $G = G_u \rtimes T$.*

Fait 1.78. - [25, Corollaire 19.3] *Soit G un groupe algébrique résoluble connexe. Alors chaque élément semi-simple (resp. unipotent) de G est contenu dans un tore maximal (resp. sous-groupe unipotent connexe maximal).*

Fait 1.79. - *Soient G un groupe algébrique résoluble connexe et H un sous-groupe de G formé d'éléments semi-simples. Alors H est contenu dans un tore de G .*

PREUVE – On procède par induction sur la dimension de G . Comme G est résoluble connexe, on a $G = G_u \rtimes T$ où T est un tore maximal. Alors $H' \leq G' \leq G_u$

et on a $H' = 1$. Donc H est abélien. Si $H \leq Z(G)$, alors $H \leq C_G(T)$, et TH est formé d'éléments semi-simples d'après la décomposition de Jordan. Or $G = G_u \rtimes T$, donc on a $H \leq T$. On peut donc supposer $H \not\leq Z(G)$. Soit $h \in H$ tel que $C_G(h) < G$, alors on a $H \leq C_G(h)$ car H abélien. Par induction, H est contenu dans un tore S de $C_G(h)^\circ$ qui est aussi un tore de G . On conclut. $\square$

Définition 1.80. – Soit G un groupe algébrique linéaire sur un corps algébriquement clos. Un *sous-groupe de Borel* de G est un sous-groupe fermé résoluble connexe maximal de G .

Le Fait 1.81 établit la conjugaison des sous-groupes de Borel dans les groupes algébriques linéaires.

Fait 1.81. - [25, Théorème 21.3] *Les sous-groupes de Borel d'un groupe algébrique linéaire G sont conjugués.*

Fait 1.82. - [25, Corollaire 21.3.A] *Les tores maximaux de G (resp. les sous-groupes unipotents connexes maximaux) sont aussi ceux de sous-groupes de Borel, et sont tous conjugués.*

Fait 1.83. - [25, Proposition 21.4 B] *Soient G un groupe algébrique connexe et B un sous-groupe de Borel de G . Si B est nilpotent, alors $G = B$.*

Fait 1.84. - [25, Corollaire 22.2 B] *Soit G un groupe algébrique connexe, alors $Z(G) = Z(B)$ pour tout sous-groupe de Borel B de G .*

Fait 1.85. - [25, Exercice 1 p.142] *Soit H un groupe algébrique connexe. Alors $Z(H)_s$ est l'intersection de tous les tores maximaux de H .*

PREUVE – D'après le Fait 1.84 on a $Z(H)_s = Z(B)_s$ où B est un sous-groupe de Borel de H . Alors d'après les Faits 1.78 et 1.82, tout élément de semi-simple de $Z(H)$ est contenu dans un tore maximal de G , et par conjugaison de ceux-ci, on en déduit que $Z(H)_s$ est contenu dans tout tore maximal de H . Inversement, considérons I l'intersection des tores maximaux de H . Alors I est un sous-groupe normal de H . Soit $B = U \rtimes T$ un sous-groupe de Borel de H où T est un tore maximal de H . Comme I est normal dans H , alors $[B, I] \leq U \cap T = 1$ et on a $I \leq Z(B) = Z(H)$; on conclut. $\square$

Fait 1.86. - [25, Théorème 23.1] *Soit G un groupe algébrique connexe. Alors $B = N_G(B)$ pour tout B sous-groupe de Borel de G .*

Nous essaierons dans la suite de généraliser certains de ces résultats aux K -groupes connexes (Définition 4.1).

1.2.2 Groupes algébriques semi-simples et réductifs

Définition 1.87. – Soit L un groupe algébrique linéaire. On appelle *radical résoluble* (resp. *unipotent*) de L , le plus grand sous-groupe normal fermé connexe résoluble (resp. unipotent) de L et on le note $R(L)$ (resp. $R_u(L)$).

Un groupe algébrique linéaire connexe L est dit *semi-simple* (resp. *réductif*) si $L \neq 1$ et $R(L) = 1$ (resp. $R_u(L) = 1$).

Remarque 1.88. –

1. Tout groupe semi-simple est réductif.
2. Pour tout groupe algébrique linéaire L , le quotient $L/R(L)$ (resp. $L/R_u(L)$) est semi-simple (resp. réductif).
3. Si L est un groupe algébrique linéaire semi-simple, alors $L' = L$.

Fait 1.89. - [25, Lemme 19.5] Soit L un groupe algébrique réductif. Alors $R(L) = Z(L)^\circ$ est un tore.

Fait 1.90. - [25, Théorème 30.2] Soit L un groupe algébrique linéaire. Alors il existe un sous-groupe réductif R_L de L tel que $L = R_u(L) \rtimes R_L$ où $R_u(L)$ est le radical unipotent de L . De plus, le sous-groupe R_L est appelé sous-groupe de Levi, il est unique à conjugaison près.

Remarque 1.91. – D'après cette décomposition, on peut constater que L' n'admet pas de tore normal non trivial. En effet, comme $L = R_u(L) \rtimes R_L$, alors L' est un sous-groupe de $R_u(L) \rtimes R'_L$, et si T est un tore normal de L' , alors T est un tore normal de R'_L . Or R'_L est semi-simple, on conclut alors.

Si L est un groupe algébrique réductif, alors on peut dire grâce au Fait 1.88 et à la Remarque 1.91 que L' est un groupe algébrique semi-simple. En particulier on a la décomposition suivante

$$L = S_1 * \dots * S_n * Z(L)^\circ$$

avec $S_1, \dots, S_n$ des groupes algébriques quasi-simples et $Z(L)^\circ$ un tore.

Définition 1.92. – On dit qu'un groupe algébrique G est *simple* si G n'admet pas de sous-groupe fermé normal connexe propre non trivial.

Pour la suite, un groupe algébrique simple "au sens algébrique" sera dit *quasi-simple*, et simple s'il l'est en tant que groupe abstrait.

Fait 1.93. - [25, Corollaire 27.5] Soit G un groupe algébrique semi-simple, alors G se décompose sous la forme d'un produit central $G = G_1 * \dots * G_n$, où les G_i sont des sous-groupes algébrique quasi-simples.

Fait 1.94. - Soit G un groupe algébrique réductif. Alors G est engendré par ses tores maximaux.

PREUVE – D’après le fait 1.89 et la remarque 1.88, $G/Z(G)^\circ$ est semi-simple et se décompose donc en un produit central de sous-groupes algébriques quasi-simples. Comme $Z(G)^\circ$ est un tore normal de G , il est contenu dans tout tore maximal de G . En particulier, un tore maximal de $G/Z(G)^\circ$ est de la forme $T/Z(G)^\circ$ où T est un tore maximal de G . On peut donc supposer que $Z(G)^\circ = 1$ et G est un groupe algébrique semi-simple. Si H est le sous-groupe de G engendré par les tores de G , alors H est fermé, connexe et normal dans G . De plus, G/H n’a pas de tore non trivial, donc G/H est nilpotent (Faits 1.77 et 1.83). Or G étant semi-simple, on a $G' = G$ et $G/H = G'H/H$, ce qui donne $G = H$; d’où le résultat. $\square$

Fait 1.95. - *Soient G un groupe algébrique connexe et H un sous-groupe quelconque de G . Alors $[G, H]$ est engendré par les unipotents.*

PREUVE – En effet, quitte à quotienter G par le sous-groupe de $[G, H]$ engendré par les unipotents, on peut supposer que $[G, H]$ est un tore. Alors $[G, H]$ est un tore normal de G contenu dans G' , et d’après la Remarque 1.91, on conclut. $\square$

Corollaire 1.96. – *Soit H un groupe connexe algébrique linéaire. Alors le sous-groupe $[F(H), H]$ est unipotent.*

PREUVE – Comme $[F(H), H]$ est nilpotent, on conclut d’après la Fait 1.95. $\square$

Finissons ces rappels avec un outil de raisonnement que nous aurons à utiliser fréquemment, à savoir “l’argument de Frattini”.

Contexte : Soient un groupe G , et H un sous-groupe de G . Supposons que H admet la propriété de conjugaison sur une famille de sous-groupes $(A_i)_{i \in I}$ stable par les automorphismes intérieurs de G . Alors $G = HN_G(A_i)$ pour tout i : on dira qu’on applique *l’argument de Frattini*.

Chapitre 2

Unipotence dans les groupes de rang de Morley fini

Il est connu que l'unipotence et la semi-simplicité sont des concepts fondamentaux dans l'étude des groupes algébriques linéaires. Plus particulièrement, les notions de tore maximal et de radical unipotent sont essentielles à l'analyse des groupes algébriques. Dans le contexte des groupes de rang de Morley fini, et en vue d'apporter des réponses à la conjecture de Cherlin-Zil'ber dans une moindre mesure, certains travaux ont été menés dans l'optique de fournir des analogues à ces notions algébriques. Si un sous-groupe *de Carter* peut se présenter de façon assez satisfaisante comme un analogue au tore maximal algébrique, il est encore difficile de définir une approche intrinsèque du radical unipotent ou tout simplement d'un sous-groupe unipotent dans les groupes de rang de Morley fini. Toutefois, plusieurs propositions ont été avancées, chacune présentant ses avantages.

En effet la première approche de l'unipotence dans les groupes de rang de Morley fini nous est due à Altseimer et Berkman à travers les notions de *quasiunipotence*, et en particulier de sous-groupes *p-unipotents*, pour p un nombre entier premier.

Définition 2.1. – Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Un sous-groupe *p-unipotent* de G est un p -sous-groupe définissable connexe et d'exposant borné.

La quasiunipotence se révèle être une bonne approche de l'unipotence dans les groupes de rang de Morley fini. Le problème de cette approche est qu'elle ne prend pas en compte la caractéristique nulle, car les groupes p -unipotents définissent l'unipotence en caractéristique p positive. C'est ainsi qu'intervient l'unipotence de Burdges, explicitée par les notions de $U_{0,r}$ -groupes et de U_0 -groupes (Définition 2.13) : c'est la *0-unipotence*, ou unipotence en “caractéristique zéro”. Pour cela, Burdges commence par définir la notion de groupes abéliens *indécomposables* sur les groupes abéliens de rang de Morley fini (Définition 2.2).

Cependant la 0-unipotence présente une limite : elle ne se conserve pas par passage aux sous-groupes définissables propres. Pour remédier à cela, Frécon va

introduire dans [17], une notion d’“homogénéité” sur ces groupes au travers des $U_{0,r}$ -groupes homogènes (Définition 2.22). Puis de là, sera définie une nouvelle forme d’unipotence explicitée par la notion de U -groupe (Définition 2.31). Il est connu que le sous-groupe dérivé d’un groupe algébrique résoluble connexe est un groupe unipotent. Justement, l’intérêt de cette notion de U -groupe est qu’elle fournit un analogue à ce résultat dans les groupes de rang de Morley fini. D’ailleurs un groupe de rang de Morley fini G possède un plus grand U -sous-groupe $U(G)$ normal (Fait 2.37) que l’on va considérer comme le radical unipotent de G par rapport cette nouvelle unipotence. Cependant cette notion d’unipotence en caractéristique zéro se heurte à l’existence probable de mauvais groupes comme en témoigne le Fait 2.24.

Dans la première section de ce chapitre nous donnerons un rappel de notions et résultats sur l’unipotence en caractéristique zéro dans les groupes de rang de Morley fini, puis en établirons quelques autres. Mais tout ceci sera fait en utilisant l’opérateur d’unipotence U_K où K est un corps de rang de Morley fini de caractéristique zéro. Bien entendu il sera justifié que cet opérateur satisfait les propriétés de l’opérateur d’unipotence $U_{0,r}$ introduit par Burdges. L’intérêt de cette initiative réside bien sûr dans l’existence d’un corps interprétable de caractéristique zéro, et cela sera utile pour l’étude des groupes définissablement linéaires sur des corps de caractéristique zéro développée dans le Chapitre 3.

Dans la seconde section, nous définirons une nouvelle forme d’unipotence dans les groupes de rang de Morley fini qui intègre aussi bien la caractéristique nulle que positive. L’objectif de cette démarche, nous le faisons remarquer, a été d’apporter une réponse quant à la généralisation des travaux de Frécon sur la classifications des groupes algébriques abstraitement isomorphes en caractéristique zéro [18]. Cette approche sera basée sur une nouvelle définition, plus générale, de sous-groupe indécomposable. Nous définirons ainsi une nouvelle notion, celle de U_τ -groupes (Définition 2.53), où τ peut être vu comme un représentant d’une classe d’équivalence pour une relation d’équivalence définie sur des sous-groupes indécomposables, d’où « la théorie des U_τ -groupes ». Enfin, nous réécrirons quelques résultats établies par l’unipotence en caractéristique zéro donnés dans la section 2.1. Les démonstrations de ces résultats seront le plus souvent calquées sur celles fournies en caractéristique zéro.

2.1 Unipotence dans les groupes de rang de Morley fini en caractéristique zéro

Dans cette section nous rappelons quelques notions d’unipotence dans les groupes de rang de Morley fini “en caractéristique zéro” traitées par Burdges dans [8] et [9], et Frécon dans [17] principalement, qui seront utiles pour la suite de la thèse.

2.1.1 U_K -groupes

Groupes abéliens indécomposables

Définition 2.2. – Un groupe abélien connexe A de rang de Morley fini est dit *indécomposable* s'il ne peut s'écrire comme la somme de deux sous-groupes définissables propres.

Exemple 2.3. –

1. Les sous-groupes infinis minimaux de rang de Morley fini sont indécomposables.
2. Pour K un corps infini de rang de Morley fini et de caractéristique zéro, le groupe additif K_+ est indécomposable.

Fait 2.4. - (Burdges, [8, Lemme 2.4]) *Tout groupe connexe abélien G de rang de Morley fini est engendré par des sous-groupes indécomposables.*

Définition 2.5. – Pour tout groupe abélien connexe A de rang de Morley fini, le *radical* $J(A)$ de A est le plus grand sous-groupe définissable propre sans sous-groupe définissable propre B tel que $A = J(A)B$.

En particulier, si A est un groupe abélien indécomposable alors $J(A)$ est l'unique sous-groupe définissable connexe maximal propre de A , et si A est de rang de Morley 1, alors $J(A) = 1$. De plus on définit $J(1) = 1$.

Les deux faits suivants donnent le Push-Forward et le Pull-Back sur les groupes abéliens indécomposables.

Fait 2.6. - [8, Lemme 2.9] *Soient G un groupe de rang de Morley fini, A un sous-groupe abélien indécomposable de G et $f : G \rightarrow H$ un morphisme définissable. Alors $f(A)$ est un indécomposable de H et $J(f(A)) = f(J(A))$.*

Fait 2.7. - (Frécon, [20, Lemme 2.2]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable normal de G . Si $\overline{B}$ est un sous-groupe abélien indécomposable divisible de G/H , alors il existe un sous-groupe indécomposable A de G tel que $\overline{B} = AH/H$.*

Les résultats qui suivent sont une contribution de Cherlin, et concourent à généraliser le Fait 2.4.

Lemme 2.8. – (Cherlin) *Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini. Supposons que pour tout p , tout sous-groupe p -unipotent de G est abélien. Alors G est engendré par des sous-groupes abéliens indécomposables.*

Notons que Baudisch a construit des groupes p -unipotents de classe 2 tel que tout sous-groupe abélien connexe est central.

Nous donnerons la preuve du Lemme 2.8 plus bas, nous commençons d'abord par donner un corollaire.

Les conditions du lemme s'appliquent si G est nilpotent et divisible. Nous pouvons conforter cette remarque par ce qui suit.

Lemme 2.9. – (Cherlin) *Soit G un groupe résoluble p -divisible de rang de Morley fini. Alors G ne contient pas de sous-groupe p -unipotent non trivial.*

PREUVE – On procède par induction sur le rang de Morley.

Montrons que $U_p(G)$, le sous-groupe engendré par les sous-groupes p -unipotents de G , est trivial. Supposons le contraire. Soit $A \leq Z(U_p(G))$ un sous-groupe définissable connexe minimal non trivial de G . Par induction sur le rang, on a $U_p(G/A) = 1$, donc $A = U_p(G)$ est G -minimal.

Comme $G/C_G(A)$ s'injecte définissablement dans le groupe multiplicatif d'un corps de caractéristique p (Fait 1.31), alors $G/C_G(A)$ ne contient pas d'élément d'ordre p . Il s'ensuit que $C_G(A)$ est p -divisible. Ainsi on peut supposer que $A = U_p(G)$ est central dans G . Nous avons la factorisation [4, Proposition 9.4]

$$G = U_p(G) * H$$

où H est un sous-groupe connexe maximal dont toute section abélien définissable et connexe est p -divisible. Soit p^n l'exposant de $U_p(G)$. Alors toutes les puissances p^n -ièmes des éléments de G sont dans H . Mais $H \cap U_p(G)$ est fini, donc cela contredit la p -divisibilité. $\square$

Corollaire 2.10. – *Soit G un groupe résoluble divisible de rang de Morley fini. Alors G est engendré par ses sous-groupes abéliens indécomposables.*

PREUVE DU LEMME 2.8– On procède par induction sur le rang de Morley.

Soit A un sous-groupe minimal normal connexe non trivial de G . Par hypothèse d'induction, G est engendré par les sous-groupes définissables B tels que B/A est un groupe abélien indécomposable.

Ainsi on peut supposer que G/A est abélien indécomposable. Soit $J \leq G$ la préimage dans G de $J(G/A)$. Par induction, J est engendré par ses sous-groupes abéliens indécomposables. Supposons d'abord que dans une extension élémentaire de G , il n'y a pas d'élément g d'ordre infini modulo J . Soit $A_g = Z(C_G(g))$. Par maximalité de J , on a $G = JA_g$. Il s'ensuit qu'il existe un élément $g' \in G$ avec les mêmes propriétés : $G = JA_{g'}$. Alors $G = JA_{g'}^\circ$ et $A_{g'}^\circ$ est abélien, ce qui prouve notre assertion.

On peut donc supposer que G/J est d'exposant borné. Si $C_G(A) < G$, alors $C_G(A)^\circ \leq J$. Dans $G/C_G(A)$, l'image de G modulo l'image de J est un groupe d'exposant borné. Comme $G/C_G(A)$ s'injecte définissablement dans le groupe multiplicatif d'un corps, il vient que J est d'indice fini dans G , ce qui constitue une contradiction.

Ainsi $A \leq Z(G)$. Comme G/A est abélien, le groupe G est nilpotent. Alors $G = U_p(G) * D$, avec D un sous-groupe p -divisible, et comme $U_p(G) = 1$ par hypothèse, alors G est p -divisible. Ainsi G/J est p -divisible, et d'exposant borné, donc trivial. Là encore nous avons une contradiction. $\square$

$U_{0,r}$ -groupes et U_K -groupes

Étant donné un groupe abélien A , on définit le rang de Morley *pré-réduit* de A comme étant la valeur :

$$\bar{r}(A) := rk(A/J(A))$$

Un groupe abélien indécomposable A tel que $A/J(A)$ est sans torsion est appelé *0-indécomposable*.

Définition 2.11. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. Pour tout $r \geq 1$, on définit le sous-groupe

$$U_{0,r}(G) = \langle A \leq G \mid A \text{ est 0-indécomposable, } \bar{r}(A) = r \rangle$$

On dit que G est $U_{0,r}$ -groupe si $G = U_{0,r}(G)$. Posons $\bar{r}_0(G) = \max\{r \mid U_{0,r}(G) \neq 1\}$ et $U_0(G) = U_{0,\bar{r}_0}(G)$. On dit que G est un U_0 -groupe si $G = U_0(G)$.

Soit A un 0-indécomposable. Si on a $\bar{r}(A) = r$, alors on dit que A est un $U_{0,r}$ -indécomposable.

Fait 2.12. - Soit A un groupe indécomposable abélien divisible. Alors soit A est un pseudo-tore, soit $A/J(A)$ est définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_+$, pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro.

PREUVE – Si A n'est pas un pseudo-tore, alors il existe un sous-groupe définissable B tel que $A/B \cong^{def} \mathbb{K}_+$ pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable. Comme A est divisible, alors $\mathbb{K}_+$ est divisible et $\mathbb{K}$ est de caractéristique zéro. En particulier, $\mathbb{K}_+$ est sans torsion et donc A/B aussi. Il s'ensuit que B est divisible, et donc connexe. En particulier on a $B \leq J(A)$ et $J(A)/B$ est un sous-groupe définissable propre de A/B . D'après le Fait 1.29 $A/B \cong^{def} \mathbb{K}_+$ n'a pas de sous-groupe définissable propre non trivial, alors on a $J(A)/B = 1$, autrement dit $B = J(A)$. On conclut. $\square$

Définition 2.13. – Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro, on définit le groupe

$$U_K(G) = \langle A \leq G \mid A \text{ 0-indécomposable et } A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+ \rangle.$$

On dit que G est un U_K -groupe si $G = U_K(G)$.

Pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro fixé, un 0-indécomposable A tel que $A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+$ sera dit U_K -indécomposable.

Exemple 2.14. –

1. Si $\mathbb{F}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, un groupe algébrique unipotent U sur $\mathbb{F}$ est un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe dans un langage induit par celui du pur corps $\mathbb{F}$. Les $U_{\mathbb{F}}$ -sous-groupes indécomposables dans ce cas sont les sous-groupes $d(u)$ pour $u \in U$, et on a $d(u) \cong^{def} \mathbb{F}_+$ définissablement dès que $u \neq 1$.
2. Un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$ est un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe car étant engendré par ses éléments unipotents.

Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Posons $rk(\mathbb{K}) = r$. Alors un $U_{\mathbb{K}}$ -indécomposable est en particulier un $U_{0,r}$ -indécomposable. Ainsi, un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de G est aussi un $U_{0,r}$ -sous-groupe.

Le Fait 2.15 donne le Push-forward et le Pull-back des $U_{\mathbb{K}}$ -groupes.

Fait 2.15. - [8, Lemme 2.11] *Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme définissable entre deux groupes de rang de Morley fini. Alors pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle,*

- (i) (Push forward) $f(U_{\mathbb{K}}(G)) \leq U_{\mathbb{K}}(f(G))$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe.
- (ii) (Pull back) Si $U_{\mathbb{K}}(H) \leq f(G)$ alors $f(U_{\mathbb{K}}(G)) = U_{\mathbb{K}}(H)$.

Le Fait 2.16 est très important pour la suite car il donne une structuration des groupes nilpotent de rang de Morley fini qui vient compléter celle établie au Fait 1.44.

Fait 2.16. - (Frécon, Burdges [21, Fait 3.10]) *Soient G un groupe nilpotent divisible de rang de Morley fini, et T son pseudo-tore maximal. Alors G interprète des corps $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique zéro, tels que*

$$G = T * U_{\mathbb{K}_1}(G) * \dots * U_{\mathbb{K}_n}(G).$$

$U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes de Sylow

La notion de $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow sera principalement utilisé dans la preuve du Théorème 4.47.

Définition 2.17. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. Un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de G est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe nilpotent maximal.

Fait 2.18. - (Burdges, Frécon [9, Lemme 5.2]) *Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique nulle. Alors les $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes de Sylow de G sont exactement les $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes nilpotents S tels que $U_{\mathbb{K}}(N_G(S)) = S$.*

Fait 2.19. - (Burdges, Frécon [9, Théorème 5.5]) *Soient G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique nulle. Alors tous les $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes de Sylow de G sont conjugués.*

Fait 2.20. - (Burdges, Frécon [9, Théorème 5.7]) Soient G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini et Q un sous-groupe de Carter de G . Alors, pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, $U_{\mathbb{K}}(G')U_{\mathbb{K}}(Q)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de G , et tout $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de G est de cette forme.

Fait 2.21. - Soient G un groupe de rang de Morley fini, N un sous-groupe définissable résoluble et normal de G , et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique nulle. Si S est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de G , alors SN/N est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de G/N .

PREUVE – Comme $(SN)^{\circ}$ est un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini contenant S , alors d'après le Fait 2.19 et en utilisant l'argument de Frattini, on a $N_G((SN)^{\circ}) = N_G(SN^{\circ}) = N_G(S)N^{\circ}$. Or $N_G(S)N^{\circ}$ est contenu dans $N_G(SN)$ et $N_G(SN)$ est contenu dans $N_G((SN)^{\circ})$, donc $N_G(SN) = N_G(S)N^{\circ} = N_G(S)N$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} U_{\mathbb{K}}(N_{G/N}(SN/N)) &= U_{\mathbb{K}}(N_G(SN)/N) \\ &= U_{\mathbb{K}}(N_G(S)N/N) \\ &= U_{\mathbb{K}}(N_G(S))N/N \\ &= SN/N \end{aligned}$$

□

2.1.2 $\tilde{U}$ -groupes

C'est à partir de cette sous-section que les notions essentielles d'unipotence, fondamentales à notre étude, seront développées.

Définition 2.22. – Un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe dont tous les sous-groupes définissables connexes sont des $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes.

Fait 2.23. - (Frécon, [17, Lemme 3.4]) Une extension d'un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène par un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

On rappelle qu'un *mauvais groupe* est un groupe connexe non-résoluble de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes propres définissables connexes sont nilpotents.

Fait 2.24. - [17, Proposition 3.8] Un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène est soit nilpotent soit contient un mauvais groupe. En particulier, un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène résoluble est nilpotent.

On sait qu'un groupe algébrique unipotent sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle est sans torsion. Le Fait 2.25 assure cette propriété pour les $U_{\mathbb{K}}$ -groupes homogènes n'admettant pas de mauvais groupes.

Fait 2.25. - [17, Corollaire 3.9] *Un U_K -groupe homogène qui ne contient pas de mauvais groupe est sans torsion.*

Ainsi pour les groupes de rang de Morley fini dont aucune section définissable n'est un mauvais groupe à l'exemple des K -groupes, un U_K -sous-groupe homogène sera toujours nilpotent et sans torsion et même sans pseudo-tore non trivial.

Le Fait 2.26 aura pour utilité de comprendre l'intersection des U_K -groupes homogènes.

Fait 2.26. - ([21, Corollaire 2.8]) *Soit K et L deux corps de rang de Morley fini de caractéristique zéro. Alors K et L sont définissablement isomorphes si et seulement si leurs groupes additifs K_+ et L_+ sont définissablement isomorphes.*

Le Fait 2.27 est une conséquence du Fait 2.25 et sera très utilisé par la suite.

Fait 2.27. - (voir [17, Corollaire 3.12]) *Soient K et L deux sous-groupes définissables d'un groupe G de rang de Morley fini tels que K est un U_K -groupe homogène et L est un U_L -groupe homogène, pour K et L deux corps interprétables non isomorphes de caractéristique zéro. Alors $K \cap L$ est fini. De plus si G ne contient pas de mauvais groupe, alors $K \cap L = 1$.*

PREUVE – Si le groupe $(K \cap L)^\circ$ est non trivial, on prend un sous-groupe infini minimal définissable A dans $(K \cap L)^\circ$. Alors $A \cong^{def} K_+$ et $A \cong^{def} L_+$; d'après le Fait 2.26, on conclut. $\square$

Lemme 2.28. – *Dans une structure de rang de Morley, on considère des corps interprétables $K_1, \dots, K_n$ de caractéristique zéro tels que $K_i \not\cong K_j$ pour tout $i \neq j$ et U_i un U_{K_i} -groupe homogène pour $i = 1, \dots, n$. Alors tout sous-groupe définissable connexe U de $U_1 \times \dots \times U_n$ est de la forme $U = (U \cap U_1) \times \dots \times (U \cap U_n)$.*

PREUVE – On peut supposer que pour $i = 1, \dots, n$, la projection de U sur U_i est égale à U_i . En particulier, $U \cap U_i$ est normal dans $U_1 \times \dots \times U_n$. Quitte à quotienter $U_1 \times \dots \times U_n$ par $(U \cap U_1) \times \dots \times (U \cap U_n)$, on peut supposer que $U \cap U_i = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Supposons que $U \neq 1$, alors U est infini. Soit A un sous-groupe définissable infini minimal de U . Alors il existe i_0 tel que $p_{i_0}(A) \neq 1$ où p_{i_0} est la projection sur U_{i_0} . De plus comme $A \cap U_{i_0} = 1$, il existe un j_0 différent de i_0 tel que $p_{j_0}(A) \neq 1$. Par minimalité de A , on a $A \simeq p_{i_0}(A) \cong^{def} (K_{i_0})_+$ car $p_{i_0}(A)$ est un $U_{K_{i_0}}$ -groupe, et $A \simeq p_{j_0}(A) \cong^{def} (K_{j_0})_+$ car $p_{j_0}(A)$ est un $U_{K_{j_0}}$ -groupe. Donc on a $(K_{i_0})_+ \cong^{def} (K_{j_0})_+$; ce qui absurde. Alors $U = 1$ et on conclut. $\square$

Fait 2.29. - (Frécon, [17, Théorème 4.11]) *Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini et K un corps interprétable de caractéristique nulle. Supposons que G agit définissablement et par conjugaison sur un U_K -groupe nilpotent H . Alors $[G, H]$ est un U_K -groupe homogène.*

Lemme 2.30. – Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini et de centre fini n'admettant pas de mauvais groupes. Soit $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique nulle. Alors tout $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe homogène.

PREUVE – Soit H un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G . Comme $Z(G)$ est fini, alors H est sans pseudo-tore normal non trivial. En particulier, H est sans torsion et pour tous ses sous-groupes indécomposables A , il y a un corps interprétable $\mathbb{L}$ tel que A est un $U_{\mathbb{L}}$ -indécomposable. Soit $\mathbb{L}$ un autre corps interprétable de caractéristique nulle. D'après le Fait 2.29, $[G, U_{\mathbb{L}}(H)]$ est un $U_{\mathbb{L}}$ -sous-groupe homogène et $[G, H]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe homogène. En particulier, $[G, U_{\mathbb{K}}(H)]$ est à la fois un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène et un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène. Si $\mathbb{L} \not\cong \mathbb{K}$, alors d'après le Fait 2.27 on a $[G, U_{\mathbb{L}}(H)] = 1$, d'où $U_{\mathbb{L}}(H) \leq Z(G)$. Comme $Z(G)$ est fini il vient que $U_{\mathbb{L}}(H) = 1$. D'après le Fait 2.16, on en déduit que tout sous-groupe définissable de H est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe. On conclut. $\square$

Définition 2.31. – Soit G un groupe de rang de Morley fini, on note $\tilde{U}(G)$ le sous-groupe engendré par tous les $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes homogènes normaux de G , pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, et par ses sous-groupes définissables connexe normaux d'exposant borné. On dit que G est un $\tilde{U}$ -groupe si $G = \tilde{U}(G)$.

Remarquons que cette notation est différente de celle donnée dans [17] ; c'est le nouveau radical unipotent pour l'unipotence définie à partir des opérateur $U_{\mathbb{K}}$. C'est une notation empruntée de [21]. Par ailleurs, comme $\tilde{U}(G) \leq U(G)$, alors les résultats obtenus sur les U -groupes restent valables pour les $\tilde{U}$ -groupes.

Fait 2.32. - [17, Proposition 5.3] *Un $\tilde{U}$ -groupe est soit nilpotent, soit contient un mauvais groupe. En particulier, dans tout groupe résoluble de rang de Morley fini G , $\tilde{U}(G)$ est nilpotent.*

Remarque 2.33. – Un $\tilde{U}$ -groupe sera donc toujours nilpotent dans le contexte des K -groupes.

Le Fait 2.34 donne une décomposition des $\tilde{U}$ -groupes et sera également très utilisé dans la suite de la thèse.

Fait 2.34. - (Frécon, [17, Théorème 5.3]) *Soit G un $\tilde{U}$ -groupe. Alors G a la décomposition suivante :*

$$G = B * U_{\mathbb{K}_1}(G) * \dots * U_{\mathbb{K}_n}(G)$$

pour $\mathbb{K}_i$ des corps interprétables de caractéristique zéro, et

- (i) B est un sous-groupe définissable connexe définissablement caractéristique d'exposant borné ;
- (i) $U_{\mathbb{K}_i}(G)$ est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène pour tout $i = 1, \dots, n$;

(iii) $U_{\mathbb{K}}(G) \cap U_{\mathbb{L}}(G) = 1$ pour tous corps interprétables $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ de caractéristique zéro tels que $\mathbb{K}_+ \not\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_+$.

En particulier, si G ne contient pas de mauvais groupe, alors

$$G = B \times U_{\mathbb{K}_1}(G) \times \dots \times U_{\mathbb{K}_n}(G)$$

.

Remarque 2.35. – D’après les Faits 2.34 et 2.37, une section G -minimale d’un $\tilde{U}$ -groupe G est soit d’exposant borné, soit un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe homogène pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique nulle.

Fait 2.36. - [17, Corollaire 5.6] *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors $\tilde{U}(G)$ est le plus grand $\tilde{U}$ -sous-groupe normal de G . De plus, si G est nilpotent, alors $\tilde{U}(G)$ est le plus grand $\tilde{U}$ -sous-groupe de G .*

Fait 2.37. - [17, Corollaire 5.8]

- (i) *Tout quotient d’un $\tilde{U}$ -groupe est un $\tilde{U}$ -groupe*
- (ii) *Tout sous-groupe connexe définissable d’un $\tilde{U}$ -groupe est un $\tilde{U}$ -groupe.*

Fait 2.38. - [17, Proposition 5.7] *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors G est un $\tilde{U}$ -groupe si et seulement si :*

- (i) *Il existe un sous-groupe définissable connexe B de G d’exposant borné et tel que UB/VB est fini pour toute section abélienne de torsion U/V de G avec V définissable ;*
- (ii) *Pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$, $U_{\mathbb{K}}(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe homogène.*

Fait 2.39. - (Frécon, [17, Théorème 6.10]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Supposons que G agit définissablement et par conjugaison sur un groupe résoluble connexe H de rang de Morley fini. Alors $[G, H]$ est un $\tilde{U}$ -groupe.*

En particulier, pour tout groupe G résoluble connexe de rang de Morley fini, G' est un $\tilde{U}$ -groupe.

Fait 2.40. - [17, Théorème 6.20] *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors $F(G)/Z(G)$ est un $\tilde{U}$ -groupe.*

Nous obtenons le même résultat pour les groupes de rang de Morley fini connexes et sans sous-groupe infini d’exposant borné.

Proposition 2.41. – *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Supposons que le sous-groupe de Fitting $F(G)$ de G n’admet pas de sous-groupe infini d’exposant borné. Alors*

- (i) *$F(G)/Z(G)$ est sans torsion et sans pseudo-tore non trivial.*
- (ii) *$F(G)/Z(G)$ est un $\tilde{U}$ -groupe.*

En particulier, si G est sans centre, alors $F(G)$ est un $\tilde{U}$ -groupe.

PREUVE – On peut supposer $F(G) \neq Z(G)$. D'après le Fait 1.66, le groupe nilpotent $F(G)/Z(G)$ a un unique pseudo-tore maximal et d'après le Fait 1.65, celui-ci est de la forme $TZ(G)/Z(G)$ où T est le pseudo-tore maximal de $F(G)$. Comme T est définissablement caractéristique dans $F(G)$, il vient que T est normal dans G et d'après la rigidité des pseudo-tore maximaux (Fait 1.68), T est central dans G . Ainsi $F(G)/Z(G)$ est sans pseudo-tore non trivial. En particulier le groupe $F(G)^\circ Z(G)/Z(G)$ est sans torsion et d'après le Fait 1.42 on a $F(G)/Z(G) = F(G)^\circ Z(G)/Z(G) \oplus F/Z(G)$, où $F/Z(G)$ est un sous-groupe fini caractéristique de $F(G)/Z(G)$ et donc G -normal. Alors par connexité de G , on a $[F, G] \leq Z(G)$. Pour tout $g \in G$ l'application

$$\begin{aligned} \gamma_g &: F \rightarrow Z(G) \\ x &\mapsto [x, g] \end{aligned}$$

est un morphisme définissable dont le noyau $C_F(g)$ contient $Z(G)$. En particulier, $F/Z(G)$ se surjecte définissablement sur $F/C_F(g)$ et $\text{Im} \gamma_g$ est un sous-groupe fini d'ordre divisant $|F/Z(G)| = n$. Posons $E := \langle z \in Z(G) : z^n = 1 \rangle$. Comme $F(G)$ est sans sous-groupe infini d'exposant borné, alors E est un sous-groupe fini contenant $\text{Im} \gamma_g$ pour tout $g \in G$. Comme $[F, G] = \langle \text{Im} \gamma_g : g \in G \rangle$, on obtient $[F, G] \leq E$. Enfin comme E est fini et $[F, G]$ est connexe, on a $[F, G] = 1$, i.e. $F \leq Z(G)$, d'où le point (i). Montrons maintenant que $F(G)/Z(G)$ est un $\tilde{U}$ -groupe.

Comme $F(G)/Z(G)$ est sans torsion, alors d'après le Fait 2.38, il suffit de montrer que $U_{\mathbb{K}}(F(G)/Z(G))$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène pour tout corps $\mathbb{K}$ interprétable. Supposons le contraire. Soit $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro tel que $U_{\mathbb{K}}(F(G)/Z(G))$ ne soit pas un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. Mais d'après le Push forwards (Fait 2.15(i)), on a

$$U_{\mathbb{K}}(F(G)/Z(G)) = U_{\mathbb{K}}(F(G))Z(G)/Z(G) \cong^{def} U_{\mathbb{K}}(F(G))/U_{\mathbb{K}}(F(G)) \cap Z(G),$$

alors d'après le Fait 2.12, il existe un indécomposable $A/(U_{\mathbb{K}}(F(G)) \cap Z(G))$ et un corps interprétable $\mathbb{L}$ de caractéristique zéro non isomorphe à $\mathbb{K}$ tel que tel que $A/(U_{\mathbb{K}}(F(G)) \cap Z(G))$ soit un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe. Puis d'après le Fait 2.7, on obtient un sous-groupe indécomposable A_0 de $U_{\mathbb{K}}(F(G))$ non contenu dans $Z(G)$ tel que A_0 soit un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe. En particulier A_0 est un sous-groupe de $U_{\mathbb{L}}(U_{\mathbb{K}}(F(G)))$. Mais d'après le Fait 2.29, $[G, U_{\mathbb{L}}(U_{\mathbb{K}}(F(G)))]$ est un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène, et $[G, U_{\mathbb{K}}(F(G))]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. Étant un sous-groupe connexe de $[G, U_{\mathbb{K}}(F(G))]$, $[G, U_{\mathbb{L}}(U_{\mathbb{K}}(F(G)))]$ est donc à la fois un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène et un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène. Alors d'après les Faits 2.27 et 2.25, $[G, U_{\mathbb{L}}(U_{\mathbb{K}}(F(G)))]$ est trivial et on a $U_{\mathbb{L}}(U_{\mathbb{K}}(F(G))) \leq Z(G)$; ce qui est impossible car cela impliquerait $A_0 \leq Z(G)$. Donc $U_{\mathbb{K}}(F(G))$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$ et on conclut. $\square$

2.2 Théorie des U_τ -groupes

Dans cette section nous présentons *la théorie des U_τ -groupes* comme étant une nouvelle approche de l'unipotence dans les groupes de rang de Morley fini. Cette approche a l'avantage d'être valable aussi bien en caractéristique nulle que positive. En effet nous montrons que si $\tau = \mathbb{K}_+$ pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro, alors on retrouve la notion de $U_{\mathbb{K}}$ -groupe définie dans la première section de ce chapitre (Lemme 2.54). Notre travail ici est donc de vérifier que certains résultats basiques établis pour les $U_{0,r}$ -groupes dans [8], [9], [10] et principalement dans [17], restent valables pour les U_τ -groupes.

2.2.1 Sous-groupes indécomposables

Nous donnons une nouvelle définition de groupe indécomposable plus générale que celle donnée dans la première section de ce chapitre. Pour éviter toute confusion, les groupes indécomposables définis dans la première section seront dans cette section appelés *B-indécomposables* ou tout simplement “groupes abéliens indécomposables”.

Définition 2.42. – Un groupe connexe A de rang de Morley fini est dit *indécomposable* s'il ne peut être engendré par deux sous-groupes définissables propres, i.e. $A \neq \langle B_1, B_2 \rangle$, pour B_1 et B_2 deux sous-groupes définissables propres de A .

Remarque 2.43. – Un groupe B -indécomposable infini est un indécomposable.

Lemme 2.44. – Soit A un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors A est indécomposable si et seulement si $J(A)$ est strictement inclu dans A (i.e. $A \neq J(A)$)

PREUVE – Si A est indécomposable alors $J(A)$ est strictement inclu dans A par définition de l'indécomposabilité. Supposons maintenant que $A \neq J(A)$. Alors $A/J(A)$ est un infini minimal, donc abélien et connexe. Si $A = \langle B_1, B_2 \rangle$ avec B_i , $i = 1, 2$, sous-groupes définissables propres de A , alors $B_i J(A)/J(A)$ est fini par minimalité de $A/J(A)$. Il s'ensuit que $\langle B_1, B_2 \rangle J(A)/J(A)$ est aussi fini car $A/J(A)$ est abélien, ce qui contredit $A \neq J(A)$. $\square$

Lemme 2.45. – Soit A un groupe indécomposable de rang de Morley fini. Alors $A/J(A)$ est un groupe abélien. De plus si $A/J(A)$ est divisible, alors A est un groupe B -indécomposable divisible.

PREUVE – Le groupe quotient $A/J(A)$ est infini minimal, et donc abélien d'après le Fait 1.40. Ainsi, $A/J(A)$ est soit un groupe divisible, soit un groupe d'exposant borné. Si $A/J(A)$ est divisible, alors d'après le Fait 2.7, A est un B -indécomposable (au sens de Burdges) divisible. $\square$

La Proposition 2.46 généralise le Fait 2.4.

Proposition 2.46. – *Tout groupe connexe G de rang de Morley fini est engendré par des sous-groupes indécomposables.*

PREUVE – On peut supposer $G \neq 1$. Soit A_1 un sous-groupe définissable infini minimal de G , alors A_1 est indécomposable, de même l'est A_1^g pour tout $g \in G$. Posons $V_1 = \langle A_1^g; g \in G \rangle$. Alors V_1 est un sous-groupe définissable connexe normal de G . Si $G = V_1$, c'est fini. Sinon considérons le groupe infini G/V_1 de rang de Morley fini, et B_2/V_1 un sous-groupe définissable infini minimal de G/V_1 . Soit A_2 un sous-groupe infini définissable de G , minimal pour la condition $A_2 V_1 / V_1 = B_2 / V_1$. Alors A_2 est un sous-groupe indécomposable par minimalité de B_2 / V_1 . Posons $V_2 = \langle V_1, A_2^g; g \in G \rangle$. Alors V_2 est un sous-groupe définissable connexe normal de G . Si $G = V_2$, c'est fini, sinon on considère le groupe infini de rang de Morley fini G/V_2 et on continue le procédé. On obtient alors une suite croissante de sous-groupes définissables connexes V_i de G , et comme G est de rang de Morley fini, il va exister n tel que $V_n = G$. $\square$

Nous donnons le Push-forward sur ces groupes indécomposables.

Lemme 2.47. – (Push-forward des indécomposables) *Soient G un groupe de rang de Morley fini et N un sous-groupe normal définissable de G . Si A est un sous-groupe indécomposable de G , alors AN/N est un sous-groupe indécomposable de G/N et on a $J(AN/N) = J(A)N/N$.*

PREUVE – On peut supposer $A \not\leq N$. En particulier $A \neq 1$ et $J(A) < A$ d'après le Lemme 2.44. Montrons que AN/N est indécomposable. Supposons que $AN/N = \langle B_1, B_2 \rangle$, avec B_i sous-groupe définissable propre de AN/N . Soient C_1 et C_2 des sous-groupes définissables propres de A tels que $B_1 = C_1 N / N$ et $B_2 = C_2 N / N$. Alors $AN/N = \langle C_1, C_2 \rangle N / N$ et on a $AN = \langle C_1, C_2 \rangle N$. Il s'ensuit que $A = A \cap \langle C_1, C_2 \rangle N = \langle C_1, C_2 \rangle (A \cap N)$. Comme A est indécomposable, alors $A = A \cap N$, c'est à dire $A \leq N$. Ce qui est impossible car contraire au choix de A . Ainsi AN/N est indécomposable.

Montrons que $J(AN/N) = J(A)N/N$. On a

$$\begin{aligned} J(A)N/N &= \langle B < A \mid B \text{ connexe définissable} \rangle N/N \\ &= \langle BN/N \mid B < A \text{ connexe définissable} \rangle \end{aligned}$$

Montrons que $BN/N \neq AN/N$ pour tout $B < A$ définissable. Supposons que $BN/N = AN/N$, alors on a $BN = AN$. En particulier A est contenu dans BN , et on a $A = B(A \cap N)$. Comme A est indécomposable et $B \neq A$, on a $A = A \cap N$ et A est contenu dans N , ce qui constitue une contradiction. Donc $AN/N \neq BN/N$ et alors $J(A)N/N \leq J(AN/N)$. Comme AN/N est indécomposable alors $J(AN/N) < AN/N$ d'après le Lemme 2.44. Posons $J/N := J(AN/N)$. Comme $J(A)N/N \leq J(AN/N)$, alors $J(A) \leq J$, et donc $J(A) \leq J \cap A$. Donc soit

$(J \cap A)^\circ = J(A)$, soit $(J \cap A)^\circ = A$. Si $(J \cap A)^\circ = J(A)$ alors

$$\begin{aligned} J(A)N/N &= (J \cap A)^\circ N/N \\ &= ((J \cap A)N/N)^\circ \\ &= (J \cap AN/N)^\circ \\ &= (J/N)^\circ \quad \text{car } J/N < AN/N \\ &= J/N \end{aligned}$$

c'est à dire $J(A)N/N = J(AN/N)$ et on a le résultat. Si $(J \cap A)^\circ = A$, alors $A \leq J$ et on $AN/N \leq J/N$; ce qui est impossible car on a $J/N = J(f(A)) < AN/N$. On conclut. $\square$

Il vient d'après le lemme précédent que pour tout groupe indécomposable A , on a $J(A/J(A)) = 1$.

Donnons à présent le Pull-back sur les groupes indécomposables.

Lemme 2.48. – (Pull-back indécomposable) *Soient G et N comme dans le Lemme 2.57. Si $\bar{B}$ est un sous-groupe indécomposable de G/N , alors il existe un sous-groupe indécomposable A de G tel que $\bar{B} = AN/N$.*

PREUVE – Soit $B \leq G$ tel que $\bar{B} = B/N$. Alors $B/N = (B/N)^\circ = B^\circ N/N$. Soit A un sous-groupe définissable connexe de G tel que $AN/N = B/N$ maximal pour cette condition. Soit $U < A$ un sous-groupe définissable connexe propre de A . Alors on a $UN/N < B/N$ par maximalité de A , et on obtient

$$UN/N \leq J(B/N) < B/N = AN/N$$

Ce qui implique

$$J(A)N/N < AN/N$$

et on a $J(A) < A$. Donc A est indécomposable d'après le Lemme 2.44. $\square$

Remarque 2.49. – Si le sous-groupe indécomposable $\bar{B}$ du Lemme 2.48 est un B -indécomposable, alors le sous-groupe indécomposable A n'est pas nécessairement un B -indécomposable (voir le Fait 2.7).

2.2.2 U_τ -Groupes

Les τ -indécomposables

Dans un univers de rang de Morley fini $\mathcal{U}$, définissons la relation $\approx$ sur l'ensemble des groupes définissables. Soient H et G deux groupes définissables dans $\mathcal{U}$, on pose $H \approx G$ si et seulement si il existe un sous-groupe fini $I \triangleleft H$ et un sous-groupe fini $J \triangleleft G$ tels que $H/I \cong^{def} G/J$.

Lemme 2.50. – *La relation $\approx$ est une relation d'équivalence.*

PREUVE – La réflexivité et la symétrie étant évidentes, montrons donc la transitivité. Soient G, H, F trois groupes définissables dans $\mathcal{U}$ tels que $G \approx F$ et $F \approx H$. Alors on a :

$$G/K \cong^{def} F/L \quad \text{et} \quad F/M \cong^{def} H/N$$

où L et M des sous-groupes normaux finis de F , et K, N sont des sous-groupes normaux finis de G et H respectivement. Notons γ et χ les isomorphismes définissables de G/K dans F/L et de F/M dans H/N respectivement. Comme L et M sont finis, alors ML/L et ML sont finis. Il vient que $\gamma^{-1}(ML/L)$ est un sous-groupe normal fini de G/K et on a :

$$\frac{G/K}{A/K} \cong^{def} \frac{F/L}{ML/L}$$

Ce qui implique $G/A \cong^{def} F/ML$ où $A/K = \gamma^{-1}(ML/L)$ et A est un sous-groupe normal fini de G . De même $\chi(LM/M)$ est un sous-groupe normal fini de H/N et on a :

$$\frac{F/M}{LM/M} \cong^{def} \frac{H/N}{B/N}.$$

Ce qui donne $F/LM \cong^{def} H/B$ où $B/N = \chi(LM/M)$ et B est un sous-groupe normal fini de H . On obtient $G/A \cong^{def} F/ML \cong^{def} H/B$, d'où $G \approx H$. $\square$

Notation 2.51. – Pour G un groupe de rang de Morley fini, on désignera par τ un représentant d'une classe d'équivalence de la famille $\{A : A \text{ indécomposable de } G \text{ tel que } J(A) = 1\}$ modulo la relation $\approx$.

Définition 2.52. – On dit qu'un sous-groupe indécomposable A de G est un τ -indécomposable, si $A/J(A) \approx \tau$.

Les U_τ -groupes

Définition 2.53. – Soient G un groupe de rang de Morley fini et τ un sous-groupe définissable indécomposable de G tel que $J(\tau) = 1$. On définit le groupe

$$U_\tau(G) = \langle A \leq G \mid A \text{ } \tau\text{-indécomposable} \rangle.$$

On dit que G est un U_τ -groupe si $G = U_\tau(G)$.

Lemme 2.54. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. Soient A un sous-groupe indécomposable de G et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Alors $A/J(A) \approx \mathbb{K}_+$ si et seulement si $A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Dans ce cas, A est un 0-indécomposable.

PREUVE – Il suffit de montrer que si $A/J(A) \approx \mathbb{K}_+$ alors $A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Comme $A/J(A) \approx \mathbb{K}_+$, alors il existe un sous-groupe définissable normal F de A tel que $F/J(A)$ est fini et $A/F \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Par connexité de $A/J(A)$ et comme $\mathbb{K}_+$ est abélien, il vient que $A/J(A)$ est abélien. De plus comme $\mathbb{K}_+$ est de caractéristique zéro, alors le groupe indécomposable $A/J(A)$ est divisible (Fait 1.44). De plus, par connexité de A et d’après le Fait 1.41, le groupe $A/J(A)$ est sans torsion. On en déduit que $A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+$ et en particulier A est un 0-indécomposable.

Définition 2.55. – Soient G un groupe de rang de Morley fini et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique arbitraire, on définit :

$$U_{\mathbb{K}}(G) = \langle A \mid A \text{ indécomposable et } A/J(A) \approx \mathbb{K}_+ \rangle$$

On dira que G est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe si $G = U_{\mathbb{K}}(G)$.

Remarque 2.56. – Il n’y aucune ambiguïté ou de confusion dans les notations car si $\mathbb{K}$ est de caractéristique zéro, on retrouve la notion de $U_{\mathbb{K}}$ -groupe définie dans la première section et ce grâce au Lemme 2.54.

C’est donc une notion plus générale de $U_{\mathbb{K}}$ -groupe qu’on vient de définir et qui prend en compte la caractéristique nulle et positive. D’ailleurs, c’est cette dernière notion qui sera utilisée dans le chapitre 6.

Pour $\tau = \mathbb{K}_+$, un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe est un U_{τ} -groupe. Dans ce qui suit, nous allons donc étendre certaines propriétés établies sur les $U_{\mathbb{K}}$ -groupes ($\mathbb{K}$ de caractéristique zéro) aux U_{τ} -groupes ; le but étant d’avoir les même propriétés dans les deux caractéristiques.

Établissons le push forward sur cette classe de groupe.

Lemme 2.57. – (Push forward) Soient G un groupe de rang de Morley fini et N un sous-groupe définissable normal de G , on considère la surjection canonique $f : G \rightarrow G/N$. Si A est un τ -indécomposable, alors $f(A)$ est un τ -indécomposable. En particulier $f(U_{\tau}(G)) \leq U_{\tau}(f(G))$.

PREUVE – On peut supposer $A \not\leq N$, c’est-à-dire $f(A) \neq 1$. D’après le Lemme 2.47 $f(A)$ est un groupe indécomposable et $f(J(A)) = J(f(A))$, montrons donc $f(A)/f(J(A)) \approx A/J(A)$. On a

$$\frac{AN/N}{J(A)N/N} \cong^{def} \frac{AN}{J(A)N} = \frac{A}{A \cap J(A)N} = \frac{A}{J(A)(A \cap N)}$$

Si $A = J(A)(A \cap N)$, alors comme A est indécomposable on a $A = A \cap N$ d’après le Lemme 2.44. Il vient que $A \leq N$, ce qui est exclu. D’où $A \neq J(A)(A \cap N)$, et par minimalité de $A/J(A)$, $J(A)(A \cap N)/J(A)$ est fini. Comme

$$\frac{AN/N}{J(A)N/N} \cong^{def} \frac{A}{J(A)(A \cap N)} \cong^{def} \frac{A/J(A)}{J(A)(A \cap N)/J(A)}$$

on conclut que $f(A)/f(J(A)) \cong_{def} \frac{AN/N}{J(A)N/N} \approx A/J(A)$. $\square$

Le Lemme 2.58 donne le Pull-back sur les U_τ -groupes.

Lemme 2.58. – (Pull back) Soient G, N et τ comme dans le Lemme 2.57. Alors on a

$$U_\tau(G/N) = U_\tau(G)N/N.$$

PREUVE – Se déduit directement du Lemme 2.48. $\square$

U_τ -groupes et nilpotence

La proposition qui suit est un analogue au Fait 2.16.

Proposition 2.59. – Soit G un groupe connexe nilpotent de rang de Morley fini. Alors il existe des groupes indécomposables $\tau_1, \dots, \tau_n$ avec $J(\tau_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$ tels que

$$G = U_{\tau_1}(G) * \dots * U_{\tau_n}(G).$$

En fait, pour tous indécomposables τ, τ' tels que $\tau \not\approx \tau'$, on a

$$[U_\tau(G), U_{\tau'}(G)] = 1.$$

PREUVE – 1) Montrons d'abord qu'il existe des groupes indécomposables τ_i avec $J(\tau_i) = 1$ et tels que $G = U_{\tau_1}(G) \dots U_{\tau_n}(G)$. On peut supposer $G \neq 1$. Alors d'après le Lemme 2.46 et le théorème des indécomposables de Zil'ber (Fait 1.17) il existe des sous-groupes indécomposables $A_1, \dots, A_n$ de G tels que $G = A_1 \dots A_n$. Posons $\tau_i = A_i/J(A_i)$. Alors $J(\tau_i) = 1$ et $A_i \leq U_{\tau_i}(G)$ pour tout i ; et on a

$$G = U_{\tau_1}(G) \dots U_{\tau_n}(G)$$

2) Supposons $\tau_i \not\approx \tau_j$ pour tout $i \neq j$, et montrons que $[U_{\tau_i}(G), U_{\tau_j}(G)] = 1$. On procède par induction sur $rk(G)$. Soit A un sous-groupe G -minimal de $Z(G)$. Par induction on a $[U_{\tau_i}(G/A), U_{\tau_j}(G/A)] = 1$. Mais d'après le Corollaire 2.57 on a

$$[U_{\tau_i}(G/A), U_{\tau_j}(G/A)] = [U_{\tau_i}(G)A/A, U_{\tau_j}(G)A/A] = [U_{\tau_i}(G), U_{\tau_j}(G)]A/A,$$

alors $[U_{\tau_i}(G), U_{\tau_j}(G)] \leq A \leq Z(G)$. Soit $u \in U_{\tau_i}(G)$ ne centralisant pas $U_{\tau_j}(G)$, alors l'application

$$\begin{aligned} ad_u : U_{\tau_j}(G) &\rightarrow A \\ v &\mapsto [u, v] \end{aligned}$$

est un morphisme surjectif définissable non trivial et on a

$$\frac{U_{\tau_j}(G)}{ker ad_u} \cong_{def} ad_u(U_{\tau_j}(G))$$

Comme $ad_u(U_{\tau_j}(G))$ est central dans G , alors par G -minimalité de A on a

$$U_{\tau_j}(G)/ker(ad_u) \cong_{def} A,$$

et A est un U_{τ_j} -groupe d'après le Corollaire 2.58. De même on montre que A est un U_{τ_i} -groupe. Comme A est G -minimal abélien alors $J(A) = 1$. En particulier A est indécomposable d'après le Lemme 2.44. Ceci prouve que $A \approx \tau_i$ et $A \approx \tau_j$, contredisant ainsi $\tau_i \not\approx \tau_j$; on conclut. $\square$

Corollaire 2.60. – *Soient G un groupe résoluble de rang de Morley fini, S un sous-ensemble de G et H un U_τ -groupe nilpotent normal dans G . Alors $[H, S]$ est un U_τ -groupe.*

PREUVE – On peut considérer $S = \{s\}$ et on pose $Y = U_\tau([H, s])$. Montrons par induction sur la classe de nilpotence de H que $Y \triangleleft H$. Si H est abélien, c'est évident. On peut donc supposer que H est non abélien. Par induction, $YZ(H)/Z(H) \triangleleft H/Z(H)$, et donc $Y \triangleleft H$. On considère l'application définissable surjective

$$\begin{aligned} f : H/Y &\rightarrow [H, s]/Y \\ x &\mapsto [x, s] \end{aligned}$$

Montrons que f est un morphisme. Comme H est connexe nilpotent et normal dans G , alors le groupe $[H, s]/Y$ est connexe et nilpotent, et d'après la Proposition 2.59, on a

$$\frac{[H, s]}{Y} = U_{\tau_1} \left(\frac{[H, s]}{Y} \right) * \dots * U_{\tau_n} \left(\frac{[H, s]}{Y} \right),$$

pour des groupes indécomposables $\tau_1, \dots, \tau_n$ tels que $J(\tau_i) = 1$. De plus, d'après le Corollaire 2.58 on a $U_\tau([H, s]/Y) = 1$. On peut donc supposer $\tau_i \not\approx \tau$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Comme H est un U_τ -groupe, alors d'après le Lemme 2.57, H/Y est aussi un U_τ -groupe et d'après la Proposition 2.59 on a

$$U_{\tau_i} \left(\frac{[H, s]}{Y} \right) \leq U_{\tau_i} \left(\frac{H}{Y} \right) \leq C_{H/Y} \left(U_\tau \left(\frac{H}{Y} \right) \right) = Z(H/Y)$$

c'est à dire H/Y centralise $[H, s]/Y$. Alors f est un morphisme surjectif. Ainsi $[H, s]/Y$ est un U_τ -groupe d'après le Lemme 2.57, et comme $U_\tau([H, s]/Y)$ est trivial, on obtient le résultat. $\square$

Corollaire 2.61. – *Soit G un U_τ -groupe nilpotent de rang de Morley fini, alors G' est un U_τ -groupe.*

2.2.3 U_τ -Groupes homogènes

Définition 2.62. – Un U_τ -groupe homogène est un U_τ -groupe dont tous les sous-groupes définissables connexes sont des U_τ -sous-groupes.

Remarque 2.63. – Les sous-groupes connexes d'un U_τ -groupe homogène sont des U_τ -groupes homogènes.

Lemme 2.64. – *Un quotient définissable d'un U_τ -groupe homogène est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – Soient G un U_τ -groupe homogène et H un sous-groupe normal définissable de G , d'après le Lemme 2.57 G/H est un U_τ -groupe. Soit K un sous-groupe de G tel que K/H soit un sous-groupe définissable connexe de G/H . En particulier K° est un U_τ -groupe puisque G est un U_τ -groupe homogène. Ainsi $K/H = K^\circ H/H$ est un U_τ -groupe d'après le Lemme 2.57. $\square$

Lemme 2.65. – *Toute extension d'un U_τ -groupe homogène par un U_τ -groupe homogène est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – Soit G un groupe de rang de Morley fini et H un U_τ -sous-groupe homogène normal de G tel que G/H soit un U_τ -groupe homogène ; montrons que G est un U_τ -groupe homogène. Comme G/H est un U_τ -groupe (homogène) alors G est un U_τ -groupe d'après le Lemme 2.58. Soit L un sous-groupe définissable connexe de G . Alors $LH/H \cong L/L \cap H$ est un sous-groupe définissable connexe de G/H et donc un U_τ -groupe. D'après le Lemme 2.58, il vient

$$L = U_\tau(L)(L \cap H) = U_\tau(L)(L \cap H)^\circ$$

Mais $(L \cap H)^\circ$ est un sous-groupe définissable connexe de H , alors $(L \cap H)^\circ$ est un U_τ -sous-groupe de L . On en déduit que $(L \cap H)^\circ \leq U_\tau(L)$ et on a $L = U_\tau(L)$. $\square$

Corollaire 2.66. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini possédant deux U_τ -sous-groupes homogènes A et B tels que $G = AB$. Supposons que A est normal dans G , alors G est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – $G/A = AB/A \cong B/A \cap B$ est un U_τ -groupe homogène d'après le Lemme 2.64, et comme A est un U_τ -groupe homogène, alors G l'est aussi d'après le Lemme 2.65. $\square$

Lemme 2.67. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H et K deux sous-groupes définissables de G . On suppose que H est un U_τ -groupe homogène et K un $U_{\tau'}$ -groupe homogène avec $\tau \not\approx \tau'$. Alors $H \cap K$ est fini.*

PREUVE – Le sous-groupe $(H \cap K)^\circ$ de H et K est un sous-groupe définissable et connexe, donc est à la fois un U_τ -groupe et un $U_{\tau'}$ -groupe. Si $(H \cap K)^\circ \neq 1$, alors il existe un sous-groupe indécomposable A de $(H \cap K)^\circ$ tel que $A/J(A) \approx \tau$ et $A/J(A) \approx \tau'$, ainsi par transitivité de $\approx$, on a $\tau \approx \tau'$, ce qui est exclu. D'où $(H \cap K)^\circ = 1$, c'est à dire $H \cap K$ fini. $\square$

Il est naturel ici de s'interroger sur la nilpotence des U_τ -groupes homogènes.

Lemme 2.68. – *Un U_τ -groupe homogène est soit nilpotent, soit contient un mauvais groupe. En particulier, un U_τ -groupe homogène résoluble est nilpotent.*

PREUVE – Soit H un U_τ -groupe homogène. Supposons que H n'est pas nilpotent. Soit F un sous-groupe définissable connexe non-résoluble de H et minimal pour ces conditions ; montrons que F est un mauvais groupe. Il suffit pour cela de montrer que tout sous-groupe de Borel de F est nilpotent.

Soit B un sous-groupe de Borel de F . D'après le Fait 1.47, le groupe $B/F(B)^\circ$ est abélien divisible. Si B n'est pas nilpotent, alors le groupe quotient $B/F(B)^\circ$ est infini. Soit $A/F(B)^\circ$ un sous-groupe définissable infini minimal de $B/F(B)^\circ$. Alors $A/F(B)^\circ$ est un τ -indécomposable abélien divisible et d'après le Fait 2.12, soit $A/F(B)^\circ$ est un pseudo-tore, soit $A/F(B)^\circ \cong^{def} \mathbb{K}_+$ pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Si $A/F(B)^\circ \cong \mathbb{K}_+$, alors on peut prendre $\tau = \mathbb{K}_+$ et d'après le Fait 2.24, le groupe B est nilpotent ; ce qui est impossible. Donc $A/F(B)^\circ$ est un pseudo-tore et un τ -indécomposable ; en particulier τ est un pseudo-tore et tout sous-groupe indécomposable abélien aussi. Ainsi $F(B)^\circ$ est engendré par des pseudo-tores, et comme il est nilpotent, il est lui même un pseudo-tore (Fait 1.66). Par rigidité des pseudo-tores (Fait 1.68), il vient que $F(B)^\circ$ est central dans B , ce qui entraîne à la contradiction B est nilpotent. On en déduit donc que B est nilpotent et on termine notre preuve. $\square$

2.2.4 Groupes nilpotents

Lemme 2.69. – *Soit G un U_τ -groupe nilpotent, alors $G/Z(G)^\circ$ est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – Comme G est un U_τ -groupe, alors $G/Z(G)^\circ$ est un U_τ -groupe. De plus G est connexe nilpotent, alors d'après la Proposition 2.59 $[G, U_{\tau'}(G)] = [U_\tau(G), U_{\tau'}(G)] = 1$ pour tout groupe indécomposable τ' tel que $\tau \not\approx \tau'$. Alors $U_{\tau'}(G) \leq Z(G)^\circ$ pour tout τ' tel que $\tau \not\approx \tau'$. Soit L un sous-groupe définissable de G tel que $L/Z(G)^\circ$ soit un sous-groupe définissable connexe non trivial de $G/Z(G)^\circ$. Alors L est un groupe connexe et nilpotent de rang de Morley fini et d'après le Lemme 2.59 il existe des groupes indécomposables $\tau_1, \dots, \tau_n$, avec $J(\tau_i) = 1$ pour tout i tels que

$$L = U_{\tau_1}(L) * \dots * U_{\tau_n}(L).$$

En particulier on a $U_{\tau_i}(L) \leq Z(G)^\circ$ pour tout i tel que $\tau \not\approx \tau_i$. Ainsi on obtient $L = U_\tau(L)Z(G)^\circ$, c'est à dire $L/Z(G)^\circ$ est un U_τ -groupe d'après le Corollaire 2.58. On conclut que $G/Z(G)^\circ$ est un U_τ -groupe homogène. $\square$

Proposition 2.70. – *Si G est un U_τ -groupe nilpotent, alors G' est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – Procédons par induction sur le rang de Morley de G . Remarquons que si G est abélien il n'y a rien à démontrer. Supposons donc G non abélien et soit $g \in Z_2(G) \setminus Z(G)$. Alors l'application $\gamma : G \longrightarrow \gamma(G), u \mapsto [g, u]$ est un homomorphisme surjectif de groupes et $\gamma(G) \cong G/C_G(g)$. Or d'après le Lemme 2.69 $G/Z(G)^\circ$ est un U_τ -groupe homogène, alors

$$\gamma(G) \cong \frac{G}{C_G(g)} \cong \frac{G/Z(G)^\circ}{C_G(g)/Z(G)^\circ} \text{ est un } U_\tau\text{-groupe homogène d'après le Lemme 2.64.}$$

Comme $g \in Z_2(G) \setminus Z(G)$ alors $\gamma(G)$ est un sous-groupe infini normal de G et $G/\gamma(G)$ est un U_τ -groupe. Par hypothèse d'induction on a

$$\left(\frac{G}{\gamma(G)} \right)' = \frac{G'\gamma(G)}{\gamma(G)} \text{ est un } U_\tau\text{-groupe homogène}$$

et alors G' est un U_τ -groupe homogène le Lemme 2.65. $\square$

Lemme 2.71. – *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Si G a un U_τ -sous-groupe homogène non trivial, alors $Z(G)^\circ$ aussi.*

PREUVE – Procédons par induction sur la classe de nilpotence de G . On peut supposer G non abélien. Soit U un U_τ -sous-groupe homogène de G . Si $U \cap Z(G) = U$, alors on a rien à démontrer. Supposons $U \cap Z(G) \neq U$. Alors $UZ(G)/Z(G)$ est un U_τ -sous-groupe homogène de $G/Z(G)$ d'après le Lemme 2.64. Alors l'hypothèse d'induction donne un U_τ -sous-groupe homogène $V/Z(G)$ de $Z(G/Z(G))^\circ = Z_2(G)^\circ Z(G)/Z(G)$. Soit $x \in G \setminus C_G(V)$. Alors l'application $\xi : V/Z(G) \rightarrow Z(G), \bar{v} \mapsto [v, x]$ est un morphisme définissable et

$$Im\xi \cong \frac{V/Z(G)}{Ker\xi} \text{ est un } U_\tau\text{-groupe homogène d'après le Lemme 2.64.}$$

Comme $Im\xi \leq Z(G)$, on a le résultat. $\square$

Lemme 2.72. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors*

- (i) *G possède un plus grand U_τ -sous-groupe homogène normal.*
- (ii) *si G est nilpotent, alors G a un plus grand U_τ -sous-groupe homogène.*

PREUVE – Le point (i) découle du Corollaire 2.66, c'est à dire en prenant le U_τ -sous-groupe homogène engendré par tous les U_τ -sous-groupes homogènes normaux de G . Pour (ii), en considérant (i) et le Lemme 2.64, on peut supposer que G n'a pas de U_τ -sous-groupe homogène normal. En particulier, $Z(G)^\circ$ ne contient pas de un U_τ -sous-groupe homogène non trivial, et on a le résultat d'après le Lemme 2.71. $\square$

Proposition 2.73. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et A un U_τ -sous-groupe abélien G -minimal de G . Alors A est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – Soit B un sous-groupe définissable infini minimal de A , alors B est indécomposable et on a $J(B) = 1$. En particulier B est un U_{τ_0} -groupe homogène pour $\tau_0 \approx B$. Par G -minimalité de A on a $A = \langle B^g \mid g \in G \rangle$ et d'après le Corollaire 2.66, A est un U_{τ_0} -groupe homogène. Le lemme 2.67 donne le résultat. $\square$

Théorème 2.74. – *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. On suppose que G agit définissablement et par conjugaison sur un U_τ -groupe nilpotent H . Alors $[G, H]$ est un U_τ -groupe homogène.*

PREUVE – Supposons que G est un contre exemple tel que $G_H = H \rtimes G$ soit de rang de Morley minimal.

1) Montrons que H est abélien et n'a pas de U_τ -sous-groupe homogène non trivial.

D'après le lemme 2.72(ii), H a un plus grand U_τ -sous-groupe homogène A . Si $A \neq 1$, alors $[G, H]A/A$ est un U_τ -sous-groupe homogène de H par minimalité de G_H . Alors $[G, H]$ est un U_τ -sous-groupe homogène d'après le Lemme 2.65, ce qui contredit notre supposition. Donc H n'a pas de U_τ -sous-groupe homogène non trivial, et comme H est un U_τ -groupe nilpotent, alors la Proposition 2.70 donne $H' = 1$, c'est à dire H abélien.

2) Montrons que G est abélien.

D'après le Fait 1.40, $G/C_G(H)^\circ$ a un sous-groupe définissable infini connexe abélien $A/C_G(H)^\circ$. Si $rk(G) \neq rk(A/C_G(H)^\circ)$, alors $[A, H]$ est U_τ -sous-groupe homogène de H par minimalité de G_H . Ce qui implique d'après le point(1) de la preuve que $[A, H] = 1$, c'est à dire $A \leq C_G(H)$. Ce qui est absurde car contraire au choix de $A/C_G(H)^\circ$. Donc $rk(G) = rk(A/C_G(H)^\circ) = rk(A)$ et $rk(C_G(H)^\circ) = 0$. Ce qui donne $G = A$ et $C_G(H)^\circ = 1$, on conclut que G est abélien.

3) Montrons que $[G, H] = H$.

Supposons $[G, H] \neq H$. Comme G est abélien, alors d'après le Corollaire 2.60 le groupe $[G, H]$ est un U_τ -sous-groupe de H . Par minimalité de G_H et d'après le point (1) on a $[G, [G, H]] = 1$. Comme G est abélien, on a bien $G'_H \leq H$, et comme H est abélien, on a $[G_H, H] = [G, H]$ et $[G_H, [G, H]] = [G, [G, H]] = 1$. Donc $[G_H, [G_H, G'_H]] = 1$ et G_H est nilpotent. Il vient

$$[G, H] = [G, U_\tau(H)] \leq [G_H, U_\tau(G_H)] = U_\tau(G_H)' \text{ d'après la Proposition 2.59.}$$

Mais d'après la Proposition 2.70 $U_\tau(G_H)'$ est un U_τ -groupe homogène, alors $[G, H]$ est un U_τ -sous-groupe homogène. Ce qui est impossible, d'où $[G, H] = H$.

4) Montrons que H a un unique sous-groupe G -minimal A et que H/A est un U_τ -groupe homogène.

Soient A et B deux sous-groupes G -minimaux de H . D'après le point (3) et par minimalité de G_H , $H/A = [G, H]A/A$ est un U_τ -groupe homogène. Alors $B/B \cap A \cong BA/A$ est un U_τ -groupe. D'après le Corollaire 2.58 on a $B = U_\tau(B)(A \cap B)$. Si $A \neq B$, alors par G -minimalité de A (resp. B), $A \cap B$ est fini et on a $B = U_\tau(B)$ par connexité de B . Il s'ensuit d'après la Proposition 2.73 que B est un U_τ -sous-groupe homogène de H . Ce qui contredit (1), d'où $A = B$.

5) Montrons que $C_G(A) = C_G(H) = C_G(H/A)$.

Soit $x \in G$, comme H est abélien, l'application $\gamma_x : H \rightarrow H$ définie pour tout $h \in H$ par $\gamma_x(h) = [x, h]$ est un endomorphisme de H . Comme H est un U_τ -groupe, $im(\gamma_x) \cong H/C_H(x)$ est un U_τ -groupe d'après le Corollaire 2.60. De plus

comme G est abélien, G agit par conjugaison sur $\text{im}(\gamma_x)$. Supposons $x \in C_G(A)$. Comme H/A est un U_τ -groupe homogène, alors

$$\frac{H}{C_H(x)} \cong \frac{H/A}{C_H(x)/A} \quad \text{est un } U_\tau - \text{groupe homogène.}$$

Donc $\text{im}(\gamma_x) \cong H/C_H(x)$ est un U_τ -sous-groupe homogène de H et d'après le point (1) on a $\text{im}(\gamma_x) = 1$. Donc $x \in C_G(H)$, d'où l'égalité $C_G(H) = C_G(A)$.

Soit $x \in C_G(H/A)$. Alors $\text{im}(\gamma_x)$ est un sous-groupe de A . Comme $\text{im}(\gamma_x)$ est connexe et normalisé par G , alors soit $\text{im}(\gamma_x) = 1$, soit $\text{im}(\gamma_x) = A$. Si $\text{im}(\gamma_x) = A$, alors d'après la Proposition 2.73 A est un U_τ -sous-groupe homogène de H , ce qui contredit (1). Ainsi $\text{im}(\gamma_x) = 1$, c'est à dire $x \in C_G(H)$, d'où le résultat.

6) Montrons que H/A est G -minimal.

Soit B/A un sous-groupe G -minimal de H/A . Comme H/A est un U_τ -groupe homogène, alors B/A est un U_τ -groupe et on a $B = U_\tau(B)A$ d'après le Lemme 2.58. Comme $U_\tau(B)$ est G -normal, alors $A \leq U_\tau(B)$ par unicité du sous-groupe G -minimal A . Il vient que $B = U_\tau(B)$. Si $H \neq B$, alors par minimalité de G_H , $[G, B]$ est un U_τ -sous-groupe homogène de H et d'après le point (1) on a $[G, B] = 1$. Comme $A \leq B$, on a aussi $[G, A] = 1$ et alors G centralise H d'après (5). Ce qui est absurde car contraire au choix de G et H . Ainsi on obtient $H = B$, et H/A est G -minimal.

7) Montrons la contradiction de notre supposition.

Soit R le sous-anneau de $\text{End}(H)$ engendré par $L = G/C_G(H)$. Alors R est commutatif car G est abélien. Pour tout $u \in R$, $\ker(u)$ et $\text{im}(u)$ sont des sous-groupes définissables et G -normaux de H . En effet, pour tout $g \in G$, on a $\ker(u)^g = \ker(u^g) = \ker(u)$, et de même $\text{im}(u)^g = \text{im}(u)$. Alors d'après les points (4) et (6), soit $\ker(u)^\circ = 1$, soit $\ker(u) = A$, soit $\ker(u) = H$. Si $\ker(u) = A$, alors le Lemme 2.64 et (4) entraînent que $\text{im}(u) \cong H/A$ est un U_τ -sous-groupe homogène de H et $\text{im}(u)$ est un U_τ -sous-groupe homogène de H . Ce qui contredit (1). Alors pour tout $u \in R$, on a soit $\ker(u)^\circ = 1$, soit $\ker(u) = H$.

Si on applique le Fait 1.31 à $A \rtimes L$, alors il existe un entier l tel que pour tout $u \in R$, $u|_A = g_1 + \dots + g_l$, avec $g_i \in L$. Posons $v = g_1 + \dots + g_l \in R$. Alors $\ker(u - v)$ contient A et d'après ce qui précède $\ker(u - v) = H$, c'est à dire $u = v$. Donc tout élément de R peut être écrit sous la forme de la somme de l éléments de L . En particulier R est de rang de Morley fini. De plus nous avons prouvé que pour tout $u, v \in R$, on a $u = v$ si et seulement si $u|_A = v|_A$. Alors $R(A)$, le sous-anneau de $\text{End}(A)$ engendré par L est définissablement isomorphe à R . En particulier $R(A)_+ \cong R_+ \cong A$ d'après le Fait 1.31. De même, comme $C_G(H/A) = C_G(H)$, en appliquant le Fait 1.17 à $H/A \rtimes L$, on montre que $R(H/A)_+ \cong R_+ \cong H/A$. On en déduit que $A \cong H/A$, ce qui contredit (1) et (4). On conclut. $\square$

2.2.5 U^* -groupes

Définition 2.75. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. On note $U^*(G)$, le sous-groupe de G engendré par tous les U_τ -sous-groupe homogène normaux de G pour tout groupe indécomposable τ tel que $J(\tau) = 1$

On dit que G est un U^* -groupe si $G = U^*(G)$.

Remarque 2.76. – Pour G un groupe rang de Morley fini, $U^*(G)$ est un U^* -groupe i.e. $U^*(G) = U^*(U^*(G))$.

Proposition 2.77. – Si G est un U^* -groupe, alors il existe des groupes indécomposables $\tau_1, \dots, \tau_n$ avec $J(\tau_i) = 1$ tels que $G = U_{\tau_1}(G) * \dots * U_{\tau_n}(G)$. De plus, pour tout $i = 1, \dots, n$ $U_{\tau_i}(G)$ un U_{τ_i} -groupe homogène et $U_{\tau_i}(G) \cap U_{\tau_j}(G)$ est fini pour tout $\tau_i \not\approx \tau_j$.

PREUVE – Montrons que $G = U_{\tau_1}(G) * \dots * U_{\tau_n}(G)$ avec $\tau_1, \dots, \tau_n$ des groupes indécomposables tels que $J(\tau_i) = 1$ pour tout i . D'après le Lemme 2.72(i), soit V_i le plus grand U_{τ_i} -sous-groupe homogène normal de G . Alors $G = V_1 \dots V_n$. Soit $s \in \{1, \dots, n\}$. Posons $W_0 = V_s$ et

$$W_k := \langle V_i \mid i \in \{1, \dots, k\} \cup \{s\} \rangle \text{ avec } k = 1, \dots, n.$$

En particulier $W_s = W_{s-1}$. Soit A un sous-groupe indécomposable de G tel que $A/J(A) \approx \tau_s$. Considérons l le plus petit entier tel que $A \leq W_l$. Supposons que $l \neq 0$. Alors

$$A/(A \cap W_{l-1}) \cong AW_{l-1}/W_{l-1} \hookrightarrow W_l/W_{l-1} \cong V_l/V_l \cap W_{l-1}$$

et V_l est un U_{τ_l} -groupe homogène. Ainsi le groupe AW_{l-1}/W_{l-1} est à la fois un τ_s -indécomposable et un τ_l -indécomposable. Comme $W_s = W_{s-1}$, alors $l \neq s$ et on en déduit que AW_{l-1}/W_{l-1} est trivial, c'est à dire $A \leq W_{l-1}$. Ce qui contredit la minimalité de l . Donc $l = 0$ et on a $A \leq W_0 = V_s$. Il s'ensuit que $U_{\tau_s}(G) \leq V_s$ et on a même l'égalité car on a déjà $V_s \leq U_{\tau_s}(G)$. En particulier $U_{\tau_s}(G)$ est homogène.

Le fait que $U_{\tau_i}(G) \cap U_{\tau_j}(G)$ soit fini pour tout $\tau_i \not\approx \tau_j$ découle du Lemme 2.67. Aussi on a $[U_{\tau_i}(G), U_{\tau_j}(G)] \leq U_{\tau_i}(G) \cap U_{\tau_j}(G)$ et par connexité on en déduit que $[U_{\tau_i}(G), U_{\tau_j}(G)] = 1$ pour tout $\tau_i \not\approx \tau_j$. $\square$

Corollaire 2.78. – Soit G un U^* -groupe. Alors $U_\tau(G)$ est un U_τ -groupe homogène pour tout groupe indécomposable τ tel que $J(\tau) = 1$.

Corollaire 2.79. – Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors $U^*(G)$ est le plus grand U^* -sous-groupe normal de G . De plus si G est nilpotent alors $U^*(G)$ est le plus grand U^* -sous-groupe de G .

PREUVE – Soit H un U^* -sous-groupe normal de G . Alors d'après la Proposition 2.77 on a

$$H = U_{\tau_1}(H) * \dots * U_{\tau_n}(H)$$

où $U_{\tau_i}(G)$ est un U_{τ_i} -groupe homogène pour tout i . Comme H est un sous-groupe normal de G , alors $U_{\tau_i}(G)$ l'est aussi pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi $U_{\tau_i}(H) \leq U^*(G)$ pour tout i et on obtient $H \leq U^*(G)$. De plus si G est nilpotent, on conclut par le Lemme 2.72(ii). $\square$

Pour G un groupe de rang de Morley fini, le groupe $U^*(G)$ se présente comme le radical unipotent dans le contexte des U_τ -groupes. De plus, d'après le Lemme 2.68, ce radical est soit nilpotent, soit contient un mauvais groupe. En particulier, si G est résoluble, alors $U^*(G)$ est nilpotent.

Remarque 2.80. – Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors G est un U^* -groupe si et seulement si $U_\tau(G)$ est homogène pour tout groupe indécomposable τ tel que $J(\tau) = 1$.

Corollaire 2.81. –

- (i) Tout quotient définissable d'un U^* -groupe est un U^* -groupe,
- (ii) Tout sous-groupe définissable connexe d'un U^* -groupe est un U^* -groupe.

PREUVE – Supposons G un U^* -groupe. (i) Soit A un sous-groupe définissable normal de G . Alors pour tout groupe indécomposable τ tel que $J(\tau) = 1$ on a $U_\tau(G/A) = U_\tau(G)A/A$. Mais d'après le corollaire 2.78 $U_\tau(G)$ est un U_τ -groupe homogène, alors on en déduit que $U_\tau(G/A)$ est un U_τ -groupe homogène et conclut d'après le Remarque 2.80.

(ii) Soit H un sous-groupe définissable connexe de G . Alors $U_\tau(H) \leq U_\tau(G)$, et donc $U_\tau(H)$ est un U_τ -groupe homogène d'après le Corollaire 2.78 et la Remarque 2.63. On conclut d'après la Remarque 2.80. $\square$

Lemme 2.82. – Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si G agit définissablement par conjugaison sur un groupe connexe nilpotent H , alors $[G, H]$ est un U^* -groupe.

PREUVE – Comme H est connexe nilpotent alors d'après la Proposition 2.59 on a $H = U_{\tau_1}(H) * \dots * U_{\tau_n}(H)$. Ainsi

$$[G, H] = [G, U_{\tau_1}(H)] * \dots * [G, U_{\tau_n}(H)]$$

et d'après le Théorème 2.74 on a $[G, U_{\tau_i}(H)] = U_{\tau_i}([G, H])$ pour tout i . D'après la Remarque 2.80 on conclut. $\square$

Théorème 2.83. – Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors G' est un U^* -groupe.

PREUVE – Soit C un sous-groupe de Carter de G . Alors C' est un U^* -groupe d'après le Lemme 2.82. De même $L = [G, F(G)^\circ]$ est un U^* -groupe. D'après le Fait 1.48 il vient que $G^2 \leq L$, et G/L est nilpotent. Puis d'après le Fait 1.55 on obtient $G = LC$. De plus on a $G'/L = C'L/L$, d'où l'égalité $G' = LC'$. Comme G' est nilpotent, alors d'après le Corollaire 2.79 L et C' sont des sous-groupes de $U^*(G')$ et on a $G' = U^*(G')$. Ainsi G' est un U^* -groupe. $\square$

Corollaire 2.84. – *Soit G un groupe connexe résoluble de rang de Morley fini. Alors il existe des groupes indécomposables $\tau_1, \dots, \tau_n$ avec $J(\tau_i) = 1$ pour tout i tels que*

$$G' = U_{\tau_1}(G') * \dots * U_{\tau_n}(G')$$

De plus $\tilde{U}_{\tau_i}(G') \cap U_{\tau_j}(G')$ est fini pour tout $\tau_i \not\approx \tau_j$.

PREUVE – G' est un U^* -groupe d'après le Théorème 2.83, et on le resultat d'après la Proposition 2.77. $\square$

Chapitre 3

Groupes définissablement linéaires et définissablement affines

Dans ce chapitre nous faisons une étude générale sur les groupes de rang de Morley fini, *définissablement linéaires* (Définition 3.7). Nous commençons par une étude des quotients définissables de ces groupes. Notamment, le quotient par le radical résoluble, le quotient par le sous-groupe de Fitting et le quotient par le centre. Ensuite nous faisons une analyse des U_K -sous-groupes d'un groupe algébrique linéaire sur K où K est un corps de rang de Morley fini et de caractéristique zéro. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous effectuons une étude des groupes définissablement affines.

Commençons ce chapitre par un petit rappel sur les groupes d'automorphismes de groupes de rang de Morley fini engendrés par les unipotents.

Notation 3.1. – Soit un groupe H , alors pour $h \in H$, on définit Int_h comme étant l'automorphisme intérieur donné par h . Autrement dit $Int_h(x) = x^h$. On note $Int(H)$, l'ensemble des automorphismes intérieurs de H .

Si H est un groupe de rang de Morley fini (resp. algébrique), on note $Aut_{def}(H)$ (resp. $Aut_{alg}(H)$), l'ensemble des automorphismes définissables (resp. algébriques) de H .

Fait 3.2. - [6, Théorème 8.4] *Soit $\mathcal{G} = G \rtimes H$ un groupe de rang de Morley fini, où G et H sont des groupes définissables, G est un groupe algébrique simple sur un corps algébriquement clos et H agissant fidèlement sur G . Assimilant H à un sous-groupe de $Aut(G)$, on a $H \leq Int(G)\Gamma$, où Γ est le groupe d'automorphismes de graphes de G relativement au choix d'un tore maximal et d'un sous-groupe de Borel de G .*

Remarque 3.3. – Comme Γ est un groupe fini, si le groupe H du fait 3.2 est connexe, alors H se plonge définissablement dans G .

Fait 3.4. - [18, Fait 4.6] *Soit K un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et soit G un groupe algébrique linéaire sur K . Si G est engendré par ses*

éléments unipotents, alors il existe un groupe algébrique linéaire de la forme $H = G \rtimes A$, où A est un sous-groupe algébrique agissant fidèlement et par conjugaison sur G et tel que, pour tout automorphisme algébrique φ de G , il existe $a \in A$ satisfaisant $\varphi = \text{Int}_a$.

Le Fait 3.4 est assez particulier, car en d'autres termes, il permet de dire que tout groupe d'automorphismes algébriques d'un groupe algébrique unipotent affine sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro est plongé dans un groupe algébrique linéaire.

Le Fait 3.5 permet d'établir une équivalence entre les automorphismes définissables et les automorphismes algébriques d'un groupe algébrique linéaire unipotent ou simple sur un corps de caractéristique zéro.

Fait 3.5. - (Frécon, [18, Lemme 4.7]) *Soient $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini et de caractéristique zéro, et soit G un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}$. Si G est engendré par ses éléments unipotents alors tout automorphisme définissable de G est un automorphisme algébrique.*

Le Fait 3.6 suivant permet d'étendre le Fait 3.4 aux groupes de rang de Morley fini.

Fait 3.6. - (Frécon, [18, Corollaire 4.8]) *Soit G un groupe de rang de Morley fini interprétant un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Supposons que G agit définissablement et fidèlement sur un groupe U algébrique linéaire sur $\mathbb{K}$. Si U est engendré par ses éléments unipotents, alors $U \rtimes G$ est définissablement isomorphe à un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}$.*

3.1 Groupes définissablement linéaires

Définition 3.7. – Un groupe G de rang de Morley fini est dit *définissablement linéaire*, sur un nombre fini de corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$, si G se plonge définissablement dans un groupe de la forme $GL_{m_1}(\mathbb{K}_1) \times \dots \times GL_{m_n}(\mathbb{K}_n)$, pour $m_1, \dots, m_n$ des entiers positifs.

Remarque 3.8. –

1. Les sous-groupes définissables d'un groupe définissablement linéaire sont également définissablement linéaires.
2. Les groupes algébriques linéaires sont naturellement des groupes définissablement linéaires.
3. Le produit $G \times H$ de deux groupes définissablement linéaires G et H est définissablement linéaire.

Le Fait 3.9 est une version de [22, Lemme 4.16].

Fait 3.9. - Soient $(H_i)_i$ une famille de sous-groupes normaux définissables d'un groupe de rang de Morley fini G telle que G/H_i soit définissablement linéaire pour tout i . Alors il existe $i_1, \dots, i_n$ tels que $\cap_i H_i = \cap_{k=1}^{i_n} H_{i_k}$, et $G/(\cap_i H_i)$ se plonge définissablement dans $G/\cap_{i=1}^n H_i \hookrightarrow G/H_1 \times \dots \times G/H_n$.

Pour tout groupe G de rang de Morley fini, le groupe quotient G/G° est un groupe algébrique linéaire sur tout corps car groupe fini. D'après le Fait 3.9, G admet donc un plus petit sous-groupe définissable normal tel que le quotient de G par ce sous-groupe soit définissablement linéaire ; on le note $\bar{W}(G)$.

Dans [32], Mustafin dresse une étude du cas particulier des groupes définissablement linéaires sur un corps de rang de Morley fini, et dont les résultats vont constituer une base utile à notre étude. Tout en les rappelant, nous allons généraliser certains de ces résultats.

Fait 3.10. - (Mustafin, [32, Lemme 1.7]) Soit $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini de caractéristique nulle. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les sous-groupes définissables de $GL_n(\mathbb{K})$ engendrés par des éléments unipotents sont fermés connexes.

Fait 3.11. - [32, Lemme 2.4] Soit G un groupe de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$. Alors le quotient $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

Les Faits 3.12 et 3.13 précisent exactement la structure du groupe quotient $G/\sigma(G)$ selon la caractéristique du corps $\mathbb{K}$.

Fait 3.12. - (Mustafin, [32, Théorème 2.6]) Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique non nulle p . Alors $G/\sigma(G)$ est définissablement isomorphe à un produit direct d'un nombre fini de groupes algébriques simples sur $\mathbb{K}$.

Fait 3.13. - (Mustafin, [32, Théorème 2.9]) Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Alors $G/\sigma(G)$ est produit direct d'un groupe définissable sans unipotents et d'un nombre fini de groupes algébriques simples.

Le fait qui suit découle des Faits 3.12 et 3.13 ci-dessus et donne la conjugaison des sous-groupes de Borel d'un groupe définissablement linéaire sur un corps de caractéristique arbitraire.

Fait 3.14. - [32, Proposition 2.11] Soit G un groupe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique arbitraire. Alors tous les sous-groupes de Borel de G sont conjugués.

Remarque 3.15. – D'après le Fait 3.13 on peut également noter que si un groupe de rang de Morley fini G , définissablement linéaire sur un corps interprétable de caractéristique zéro possède un sous-groupe de Borel nilpotent, alors G est un mauvais groupe.

Dans toute la suite de ce chapitre et sauf mention du contraire, on notera $\overline{G}$ la clôture de Zariski d'un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps et n est un entier.

Remarque 3.16. – Si H est un groupe algébrique linéaire sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$, alors les sous-groupes $\sigma(H)$ et $F(H)$ sont fermés et normaux. D'après le Fait 1.71, on en déduit que les groupes quotients $H/F(H)$ et $H/\sigma(H)$ sont algébriques linéaires sur $\mathbb{F}$.

Le lemme suivant généralise le Fait 3.11.

Lemme 3.17. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur des corps $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. Alors $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.*

PREUVE – Soient $L_1, \dots, L_n$ des groupes algébriques linéaires sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement, tels que G est définissablement isomorphe à un sous-groupe définissable H de $L_1 \times \dots \times L_n$. On peut supposer que pour tout i , L_i est la clôture de Zariski de $p_i(H)$ où p_i est la projection sur L_i parallèlement au produit des L_j pour $j \neq i$. Comme $\sigma(H)$ est résoluble normal dans H , alors $p_i(\sigma(H))$ est résoluble et normal dans $p_i(H)$; donc $\overline{p_i(\sigma(H))}$ est un sous-groupe définissable normal résoluble de L_i et on a $p_i(\sigma(G)) \leq \sigma(L_i)$ pour tout i . On obtient

$$\sigma(H) \leq G \cap (\sigma(L_1) \times \dots \times \sigma(L_n))$$

Or $H \cap (\sigma(L_1) \times \dots \times \sigma(L_n))$ est un sous-groupe résoluble normal de H , donc on a $\sigma(H) = H \cap (\sigma(L_1) \times \dots \times \sigma(L_n))$. Posons $R = (\sigma(L_1) \times \dots \times \sigma(L_n))$. Alors

$$G/\sigma(G) \cong H/\sigma(H) = H/H \cap R \cong HR/R$$

et HR/R est un sous-groupe définissable de $(L_1 \times \dots \times L_n)/R$ et $(L_1 \times \dots \times L_n)/R$ est isomorphe définissablement à $L_1/\sigma(L_1) \times \dots \times L_n/\sigma(L_n)$. D'après la Remarque 3.16 $L_i/\sigma(L_i)$ est algébrique linéaire sur $\mathbb{K}_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On conclut. $\square$

Pour éviter toute confusion, on va utiliser dans le Corollaire 3.19 la notation H° pour désigner la composante irréductible de l'identité ou encore composante Zariski-connexe d'un groupe algébrique H , linéaire sur un corps algébriquement clos.

Fait 3.18. - [32, Lemme 1.1] *Soient $\mathbb{L}$ un corps de rang de Morley fini et G Zariski-clos et Zariski-connexe sur $\mathbb{L}$. Alors G n'a pas de sous-groupe définissable propre d'indice.*

Corollaire 3.19. – *Soient $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini et H un sous-groupe définissable de $GL_n(\mathbb{K})$. Alors on a $\overline{H^\circ} = \overline{H}^{\circ\circ} = \overline{H}^\circ$ où $\overline{H}^\circ$ (resp. H°) est la composante connexe de $\overline{H}$ (resp. H) au sens de groupe de rang de Morley fini.*

PREUVE – Comme tout sous-groupe fermé sur $\mathbb{K}$ est définissable, alors on a $\overline{H}^\circ \leq \overline{H}^{\circ\circ}$. En particulier $\overline{H}^\circ$ est un sous-groupe définissable d'indice fini de $\overline{H}^{\circ\circ}$. D'après le Fait 3.18, on obtient $\overline{H}^{\circ\circ} = \overline{H}^\circ$. D'autre part H° est un sous-groupe de $\overline{H}$; alors on a $\overline{H}^\circ \leq \overline{H}^\circ = \overline{H}^{\circ\circ}$. Comme H/H° est fini, alors $H\overline{H}^\circ/\overline{H}^\circ \cong H/H \cap \overline{H}^\circ$ est fini. Il s'ensuit que $H\overline{H}^\circ$ est fermé et on $\overline{H} = H\overline{H}^\circ$; en particulier $\overline{H}/\overline{H}^\circ$ est fini. On en déduit que $\overline{H}^{\circ\circ}$ est un sous-groupe $\overline{H}^\circ$; d'où on obtient l'égalité $\overline{H}^\circ = \overline{H}^{\circ\circ} = \overline{H}^\circ$. $\square$

Le Corollaire 3.19 est très important dans la mesure où nous n'aurons plus à nous soucier de savoir dans quelle structure, de rang de Morley fini considérée ou algébrique, sera considérée la connexité d'un groupe définissablement linéaire. Autrement dit, étant donné un groupe de rang de Morley fini G , définissablement linéaire sur un corps interprétable donné, les connexités dans la structure de rang de Morley fini dans laquelle G est considéré et algébrique coïncident.

Le Théorème 3.20 est une généralisation du Fait 3.13.

Théorème 3.20. – *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle. Alors*

$$G/\sigma(G) = H_1 \times \dots \times H_n \times C$$

où H_i est définissablement isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples sur $\mathbb{K}_i$ et C est un groupe définissable connexe dont les sous-groupes définissables résolubles et connexes sont abéliens.

PREUVE – Posons $H = G/\sigma(G)$; on peut supposer $H \leq L_1 \times \dots \times L_n$ pour $L_1, \dots, L_n$ des groupes algébriques linéaires sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement. Considérons p_i la projection de H sur L_i parallèlement au produit direct des L_j avec $j \neq i$. Soit H_i le plus grand sous-groupe fermé connexe de $H \cap L_i$. Alors H_i est H -normal et comme $\sigma(H) = 1$, on a $\sigma(H_i) = 1$ et alors H_i est produit direct de groupes algébriques simples sur $\mathbb{K}_i$ d'après le Fait 1.93. Mais H_i est aussi $p_i(H)$ -normal, alors d'après le Fait 3.2 $p_i(H)/C_i$ se plonge définissablement dans $\text{Int}(H_i)$ où $C_i = C_{p_i(H)}(H_i)$. Par connexité de $p_i(H)$, on en déduit que $p_i(H) = H_i C_i$. Mais $H_i \cap C_i \leq Z(H_i) \leq \sigma(H_i)$ est trivial, alors on obtient $p_i(H) = H_i \times C_i$. Comme H est contenu dans $p_1(H) \times \dots \times p_n(H)$, on obtient

$$H = H_1 \times \dots \times H_n \times C$$

où $C = H \cap (C_1 \times \dots \times C_n)$. Aussi, si B est un sous-groupe définissable, résoluble et connexe de $C \leq C_1 \times \dots \times C_n$, alors $p_i(B)$ est un sous-groupe définissable, résoluble et connexe de C_i pour tout i , et on a $B \leq p_1(B) \times \dots \times p_n(B)$. Or d'après le Corollaire 3.19, $p_i(B)$ est un groupe algébrique résoluble connexe de L_i , donc $p_i(B)' \leq \overline{p_i(B)'}$ est formé d'éléments unipotents; d'où $p_i(B)' = 1$, et B est abélien. $\square$

Fait 3.21. - (Frécon, [22, Proposition 4.11]) *Dans tout groupe G de rang de Morley fini, si $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors les sous-groupes de Carter sont conjugués.*

Dans la Proposition 3.25, nous allons étendre ce résultat aux sous-groupes de Borel.

Fait 3.22. - (Poizat, [33]) *Si K un corps de rang de Morley fini et de caractéristique p non nulle, alors tout sous-groupe simple définissable de $GL_n(K)$ est définissablement isomorphe à un groupe algébrique sur K .*

Le lemme suivant donne une généralisation du Fait 3.22 aux groupes définissablement linéaires sur plusieurs corps de caractéristiques non nulles.

Lemme 3.23. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur des corps interprétables de caractéristiques non nulles. Alors tout sous-groupe définissable et simple de G est définissablement isomorphe à un groupe algébrique.*

PREUVE – On peut supposer $G \leq L_1 \times \dots \times L_n$ avec L_i algébrique linéaire sur un corps $\mathbb{K}_i$ de caractéristique non nulle. Considérons p_i la projection de G sur L_i . Soit A un sous-groupe simple définissable de G . Alors il existe un indice i tel que $p_i(A) \neq 1$ et $A \cong^{def} p_i(A)$. Comme $p_i(A)$ est un sous-groupe simple définissable de L_i , alors $p_i(A)$ est définissablement isomorphe à un groupe algébrique sur $\mathbb{K}_i$ d'après le Fait 3.22, donc il en est de même pour A . $\square$

En particulier le Lemme 3.23 dit que G est un K -groupe (Définition 4.1). Ainsi, la structure de $G/\sigma(G)$ est donnée par le Fait 4.10 et les sous-groupes de Borel de G sont conjugués.

Le Fait 3.24 est un analogue à un fait bien connu [32, page 767] que je vais redémontrer, faute de n'avoir pas trouvé de référence pour la preuve

Fait 3.24. - *Soit G un groupe de rang de Morley fini. Alors $N_G(B)^\circ = B$ pour tout sous-groupe de Borel B de G .*

PREUVE – Supposons le contraire. Soit B un sous-groupe de Borel de G tel que $N_G(B)^\circ \neq B$. Alors $N_G(B)^\circ/B$ est un groupe infini de rang de Morley fini. Considérons A/B un sous-groupe infini définissable minimal de $N_G(B)^\circ/B$. Comme A/B est abélien (Fait 1.40), alors A est résoluble et on a $A^\circ \leq B$. Comme A/B est connexe, on en déduit que $A/B = 1$; ce qui est impossible. On conclut. $\square$

C'est en suivant la preuve du Fait 3.21, à une subtilité près, que nous allons prouver notre principal résultat de conjugaison des sous-groupes de Borel.

Proposition 3.25. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire. Alors les sous-groupes de Borel de G sont conjugués.*

PREUVE – On procède par induction sur $rk(G)$ et $deg(\sigma(G))$. On peut supposer G connexe et non résoluble. Soient B_1 et B_2 deux sous-groupes de Borel de G . Alors $B_1\sigma(G)/\sigma(G)$ et $B_2\sigma(G)/\sigma(G)$ sont deux sous-groupes de Borel de $G/\sigma(G)$. Si $\sigma(G)$ est infini, alors par hypothèse d'induction, il existe $g \in G$ tel que $B_1\sigma(G) = B_2^g\sigma(G)$. Comme $B_1\sigma(G)$ est résoluble, on a $B_1 = (B_1\sigma(G))^\circ$. De même on a $B_2^g = (B_2^g\sigma(G))^\circ$. Ainsi, on obtient $B_1 = (B_1\sigma(G))^\circ = (B_2^g\sigma(G))^\circ = B_2^g$, et on en déduit que B_1 et B_2 sont conjugués. On peut donc supposer que $\sigma(G)$ est fini. Si $\sigma(G) \neq 1$ on obtient la même conclusion en appliquant l'induction sur le degré de $\sigma(G)$. Ainsi on a $\sigma(G) = 1$, i.e. G est définissablement linéaire.

Écrivons $G \leq L_1 \times \dots \times L_n$ où L_i est un groupe algébrique linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}_i$. Considérons p_i la projection sur L_i parallèlement au produit des L_k pour $k \neq i$, et posons $G_i = p_i(G)$. En particulier G_i est connexe pour tout i . Comme G n'est pas résoluble, il existe j tel que G_j n'est pas résoluble. Posons $A = G \cap (\times_{i \neq j} G_i)$. Alors $G/A \cong^{def} G_j$ et G/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}_j$. Si $A = 1$, alors on conclut d'après le Fait 3.14. On va donc supposer $A \neq 1$.

Soit B un sous-groupe de Borel de G , montrons que BA/A est un sous-groupe de Borel de G/A . Comme BA/A est résoluble connexe, alors BA/A est contenu dans un sous-groupe de Borel H/A de G/A . Si A est fini, alors H° est résoluble et contient B ; on a donc $H^\circ = B$. On obtient bien que $BA/A = H/A$ et BA/A est un sous-groupe de Borel de G/A . Supposons donc que A est infini. Soit B_A un sous-groupe de Borel de A . Par induction sur le rang de Morley, les sous-groupes de Borel de A sont conjugués, alors en appliquant l'argument de Frattini, on obtient $H = AN_H(B_A)$. D'après le Fait 3.24 et comme $B_A \leq (N_H(B_A)^\circ \cap A)^\circ \leq N_A(B_A)^\circ$, on obtient $B_A = (N_H(B_A)^\circ \cap A)^\circ$ et $(N_H(B_A)^\circ \cap A)^\circ$ est un groupe résoluble. Posons $N = N_H(B_A)^\circ \cap A$. Comme $N_H(B_A)^\circ$ est connexe, il centralise N/N° . Ainsi N est résoluble. Or $H/A \cong N_H(B_A)^\circ/N$ est résoluble, on en déduit que $N_H(B_A)^\circ$ est résoluble et connexe. Donc $N_H(B_A)^\circ$ est contenu dans un sous-groupe de Borel B_2 de H . Par hypothèse d'induction et comme $G/A \cong G_j$ n'est pas résoluble, on a $H < G$ et les sous-groupes de Borel de H sont conjugués. Or B et B_2 sont deux d'entre eux, alors il existe $h \in H$ tel que $B = B_2^h$. On en déduit que $BA/A = B_2A/A = H/A$ et BA/A est un sous-groupe de Borel de G/A .

Soient B_1 et B_2 sont deux sous-groupes de Borel de G , alors B_1A/A et B_2A/A sont deux sous-groupes de Borel de G/A . D'après le Fait 3.14 on a $B_1A = B_2^gA$ pour $g \in G$. En particulier B_1 et B_2^g sont deux sous-groupes de Borel de B_1A . Comme $G/A \cong G_j$ n'est pas résoluble, alors $B_1A < G$ et par induction B_1 et B_2 sont conjugués dans B_1A . On conclut. $\square$

Fait 3.26. - [22, Lemme 4.10] *Si H est un sous-groupe définissable d'un groupe G de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors $H/\sigma(H)$ est définissablement linéaire.*

Le Fait 3.26 nous intéresse dans la mesure où les propriétés de conjugaison des sous-groupes de Carter et des sous-groupes de Borel d'un groupe G de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ soit définissablement linéaire, établies dans le Fait

3.21 et la Proposition 3.25, restent valables pour ses sous-groupes définissables. C'est ce que résume le corollaire suivant :

Corollaire 3.27. – *Si H est un sous-groupe définissable d'un groupe G de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ soit définissablement linéaire. Alors tous les sous-groupes de Carter (resp. de Borel) de H sont conjugués dans H .*

La preuve du lemme suivant suit ce qui est fait dans la troisième partie de la preuve la Proposition 3.25.

Lemme 3.28. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ soit définissablement linéaire, et H sous-groupe définissable normal de G . Si B est un sous-groupe de Borel de G , alors BH/H est sous-groupe de Borel de G/H . De plus, les sous-groupes de Borel de G/H sont de cette forme.*

PREUVE – Comme BH/H est résoluble connexe, alors BH/H est contenu dans un sous-groupe de Borel B_0/H de G/H . Si H est fini, alors B_0° est résoluble et on obtient $B_0^\circ = B$. Donc $BH/H = B_0^\circ H/H = B_0/H$ est un sous-groupe de Borel de G/H . On peut donc supposer que H est infini. Soit B_H un sous-groupe de Borel de H . D'après le Corollaire 3.27, les sous-groupes de Borel de H sont conjugués, alors l'argument de Frattini appliqué à B_0 donne $B_0 = HN_{B_0}(B)$. Le Fait 3.24 dit que $B_H = N_H(B_H)^\circ$; il vient $B_H = (N_{B_0}(B_H)^\circ \cap H)^\circ$ et $(N_{B_0}(B_H)^\circ \cap H)^\circ$ est résoluble. Comme $N_{B_0}(B_H)^\circ$ est connexe, il centralise $(N_{B_0}(B_H)^\circ \cap H)/(N_{B_0}(B_H)^\circ \cap H)^\circ$. Ainsi, $N_{B_0}(B_H)^\circ \cap H$ est résoluble. Or $B_0/H \cong N_{B_0}(B_H)^\circ/(N_{B_0}(B_H)^\circ \cap H)$ est résoluble, alors $N_{B_0}(B_H)^\circ$ est résoluble connexe; en particulier $N_{B_0}(B_H)^\circ$ est contenu dans un sous-groupe de Borel B_1 de B_0 et on a $B_0 = B_1H$. D'après le corollaire 3.27, les sous-groupes de Borel de B_0 sont conjugués; comme B et B_1 sont deux d'entre eux, alors il existe $b \in B_0$ tel que $B = B_1^b$. On en déduit que $BH/H = B_1H/H = B_0/H$, et BH/H est un sous-groupe de Borel de G/H . Par conjugaison des sous-groupes de Borel de G donnée par la Proposition 3.25, on conclut que tout sous-groupe de Borel de G/H est de cette forme. $\square$

Fait 3.29. - (Frécon, [22, Théorème 4.13]) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Si $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire, alors l'intersection des sous-groupes de Carter de G est égale à l'hypercentre de G .*

Lemme 3.30. – *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini tel que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire. Alors $\sigma(G) \leq B$, pour tout sous-groupe de Borel B de G . En particulier $Z(G) \leq Z(B)$.*

PREUVE – Posons $H = G/\sigma(G)^\circ$. Alors on a $\sigma(H) = Z(H) = \sigma(G)/\sigma(G)^\circ$. Donc $H/\sigma(H) \cong G/\sigma(G)$ et $H/\sigma(H)$ est définissablement linéaire. Soit $B/\sigma(G)^\circ$ un sous-groupe de Borel de H . Un tel sous-groupe contient un sous-groupe de Carter de H . Alors B est un sous-groupe de Borel de G et on a $Z(H) \leq B/\sigma(G)^\circ$ d'après le Fait 3.29. On en déduit que $\sigma(G) \leq B$, et d'après la conjugaison des sous-groupes de Borel donnée par la Proposition 3.25, on conclut. $\square$

En dehors du fait que le Lemme 3.30 joue un rôle important dans le Théorème 4.19, il permet de retrouver une propriété des groupes algébriques, à savoir que le radical résoluble d'un groupe algébrique est contenu dans tout sous-groupe de Borel.

Le lemme suivant généralise le Corollaire 1.96 aux groupes définissables linéaires.

Lemme 3.31. – *Dans une structure de rang de Morley fini, si $L_1, \dots, L_n$ sont des groupes algébriques linéaires sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement. Alors pour tout sous-groupe définissable et connexe G de $L_1 \times \dots \times L_n$, chaque projection de $[F(G), G]$ sur L_i parallèlement au produit des L_j pour $j \neq i$, est un groupe unipotent sur $\mathbb{K}_i$. De plus, si tous les corps sont de caractéristique nulle, on a $[F(G), G] = U_1 \times \dots \times U_n$ où U_i est un sous-groupe unipotent de L_i .*

PREUVE – On peut supposer $L_i = \overline{p_i(G)}$ où p_i est la projection sur L_i . Comme dans la preuve du Lemme 3.17, on a

$$F(G) \leq F(L_1) \times \dots \times F(L_n)$$

Alors

$$[F(G), G] \leq [F(L_1), L_1] \times \dots \times [F(L_n), L_n]$$

et d'après le Corollaire 1.96 $[F(L_i), L_i]$ est unipotent sur $\mathbb{K}_i$ pour tout i . En particulier si les corps sont de caractéristique nulle, alors $[F(L_i), L_i]$ est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène pour tout i ; d'après le Lemme 2.28, on conclut sur la forme de $[F(G), G]$. $\square$

Lemme 3.32. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. Alors $G/F(G)$ est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.*

PREUVE – On peut supposer que G est un sous-groupe définissable de $L_1 \times \dots \times L_n$ où $L_1, \dots, L_n$ sont des groupes linéaires sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement. Soit p_i la projection sur L_i parallèlement au produit direct des L_j pour $j \neq i$. On peut supposer chaque L_i est la clôture de Zariski de $p_i(G)$. On obtient $F(G) = G \cap F(L_1) \times \dots \times F(L_n)$. Si on pose $F = F(L_1) \times \dots \times F(L_n)$, on a

$$G/F(G) \cong^{def} GF/F \leq (L_1 \times \dots \times L_n)/F \cong L_1/F(L_1) \times \dots \times L_n/F(L_n)$$

D'après la Remarque 3.16 le groupe $L_i/F(L_i)$ est algébrique linéaire sur $\mathbb{K}_i$ pour tout i ; on conclut. $\square$

Le lemme suivant est de la même veine que les Lemmes 3.17 et 3.32.

Lemme 3.33. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. Alors $G/Z(G)$ est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.*

PREUVE – On suppose que G est un sous-groupe définissable de $L_1 \times \dots \times L_n$, où $L_i = \overline{p_i(G)}$ est un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}_i$ comme dans la preuve précédente. Il suffit de montrer que $Z(G) = G \cap (Z(L_1) \times \dots \times Z(L_n))$.

Pour tout i , $p_i(Z(G))$ est un sous-groupe de $Z(p_i(G))$, donc $p_i(G)$ est contenu dans $C_{L_i}(p_i(Z(G)))$. Comme $C_{L_i}(p_i(Z(G)))$ est fermé, alors on obtient $L_i = \overline{p_i(G)} = C_{L_i}(p_i(Z(G)))$. Donc $p_i(Z(G)) \leq Z(L_i)$ pour tout i et en déduit que $Z(G) = G \cap (Z(L_1) \times \dots \times Z(L_n))$. Ainsi

$$G/Z(G) \cong^{def} GZ(L_1 \times \dots \times L_n)/Z(L_1 \times \dots \times L_n) \hookrightarrow L_1/Z(L_1) \times \dots \times L_n/Z(L_n)$$

et comme $L_i/Z(L_i)$ est algébrique linéaire sur $\mathbb{K}_i$ pour tout i , on conclut. $\square$

3.2 $U_{\mathbb{K}}$ -groupes définissablement linéaires

Dans le Chapitre 2, nous avons donné une approche de l'unipotence en caractéristique nulle dans les groupes de rang de Morley fini, à travers la notion de $U_{\mathbb{K}}$ -groupe, pour $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro. Nous avons vu que les $U_{\mathbb{K}}$ -groupes homogènes sont nilpotents, et donc définissent encore mieux cette notion d'unipotence. Dans le langage de pur corps $\mathbb{F}$, où $\mathbb{F}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, les $U_{\mathbb{F}}$ -indécomposables d'un groupe algébrique G sur $\mathbb{F}$ sont isomorphes à $\mathbb{F}_+$. Ainsi les $U_{\mathbb{F}}$ -sous-groupes nilpotents en sont des sous-groupes unipotents et inversement. Dans un groupe G de rang de Morley fini, ceci n'est toujours pas vérifié. C'est ce qui conduit Frécon à définir pour tout groupe de rang de Morley fini G , le sous-groupe

$$V(G) = \langle J(A) \mid A \text{ indécomposable de } G \rangle.$$

L'utilité de ce sous-groupe sera de fournir un critère d'unipotence algébrique aux $U_{\mathbb{K}}$ -groupes nilpotents, pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. En effet :

Fait 3.34. - (Frécon, [18, Lemme 4.12]) *Soient G un groupe nilpotent de rang de Morley fini, et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro tels que G est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. Alors G est définissablement isomorphe à un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $V(G) = 1$.*

De plus, dans ce cas, G est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

D'après le Fait 3.34, il vient que tout $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe G -minimal abélien A d'un groupe G de rang de Morley fini est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$, pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro ; on a $A \cong^{def} \mathbb{K}_+^n$ pour un entier $n \geq 1$. De plus, si G est résoluble, alors $A \cong^{def} \mathbb{K}_+$ d'après le Théorème de corps de Zil'ber (Fait 1.31).

Remarque 3.35. -

- 1 D'après le Théorème des Indécomposables de Zilber, $V(G)$ est un sous-groupe définissable connexe et caractéristique de G , pour tout groupe G de rang de Morley fini ;

2 D'après le Fait 2.15 on a $V(G/H) = V(G)H/H$, pour tout sous-groupe normal définissable H de G

Fait 3.36. - (Frécon, [18, Proposition 4.9]) *Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini interprétant un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique zéro. Alors G a un plus grand sous-groupe définissable, définissablement isomorphe à un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{F}$.*

Mustafin dans le fait qui suit, donne une généralisation de la décomposition de Jordan aux sous-groupes définissables d'un groupe algébrique linéaire sur un corps de rang de Morley fini et de caractéristique nulle.

Fait 3.37. - (Mustafin, [32, Proposition 1.11]) (Décomposition de Mustafin) *Soient K un corps de rang de Morley fini de caractéristique nulle, et G un sous-groupe définissable de $GL_n(K)$. Alors :*

- (i) *Tout élément g de $GL_n(K)$ est produit, de manière unique, d'un élément g_s semi-simple et d'un élément unipotent g_u qui commutent.*
- (ii) *Si $gh = hg$, alors $(gh)_s = g_s h_s$ et $(gh)_u = g_u h_u$.*
- (iii) *Si $g \in G$, alors $g_s \in G$ et $g_u \in G$.*
- (iv) *Si A est un sous-groupe définissable abélien de G , $A_s = \{g \in A | g = g_s\}$ et $A_u = \{g \in A | g = g_u\}$ sont des sous-groupes définissables de A et on a $A = A_s \times A_u$.*
- (v) *Si f est un homomorphisme définissable de G dans $GL_n(K)$, alors pour tout $g \in G$, $f(g_s) = f(g)_s$ et $f(g_u) = f(g)_u$.*

Remarque 3.38. – Le point (iv) du Fait 3.37 peut être généralisé aux groupes nilpotents. En d'autres termes, si H est un sous-groupe définissable nilpotent de $GL_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps de rang de Morley fini et de caractéristique nulle, alors $H = H_u \times H_s$ avec H_u l'ensemble des éléments unipotents de H et H_s l'ensemble de ses éléments semi-simples.

En effet, on a $\overline{H} = \overline{H}_u \times \overline{H}_s$; donc $H_u = \overline{H}_u \cap H$ et $H_s = \overline{H}_s \cap H$. Aussi, pour tout $h \in H$, on a $h_u \in H$ et $h_s \in H$ d'après le Fait 3.37(iii). Donc on a bien $H = H_u \times H_s$.

Lemme 3.39. – *Soient $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini et de caractéristique nulle. Alors tout U_K -sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, formé d'éléments semi-simples est trivial.*

PREUVE – Il suffit de le montrer pour tout U_K -groupe indécomposable de $GL_n(\mathbb{K})$. Soit A un U_K -sous-groupe indécomposable de $GL_n(\mathbb{K})$ formé d'éléments semi-simples. Alors A s'injecte dans $(\mathbb{K}^*)^r$ pour un entier $r \geq 1$. Notons p , la projection de A sur une copie de $\mathbb{K}^*$. Alors $A/\ker(p) \cong^{def} p(A)$ définissablement et on a

$$rk(A/\ker(p)) \leq rk(\mathbb{K}^*)$$

Si $\ker(p) < A$, alors $\ker(p)^\circ \leq J(A)$ et on a

$$rk(A/\ker(p)) = rk(A/\ker(p)^\circ) \geq rk(A/J(A)) = rk(\mathbb{K})$$

On obtient

$$rk(A/ker(p)) = rk(A/ker(p)^\circ) = rk(\mathbb{K}^*) = rk(\mathbb{K}_+) = rk(A/J(A))$$

d'où $A/ker(p) \cong^{def} \mathbb{K}^*$. En particulier $ker(p)^\circ = J(A)$ et comme $ker(p)/ker(p)^\circ$ est fini et $A/J(A)$ est sans torsion, on a $J(A) = ker(p)$. Ainsi $A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+ \cong^{def} \mathbb{K}^*$, ce qui est absurde. Donc $ker(p) = A$ et $A = 1$. $\square$

Proposition 3.40. – Soit $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini de caractéristique zéro. Soit A un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors A est engendré par ses éléments unipotents. En particulier A est fermé, et si A est nilpotent, alors A est unipotent sur $\mathbb{K}$.

PREUVE – D'après le Lemme 3.39 et le Fait 3.37, tout $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe indécomposable de A est unipotent. On conclut d'après le Fait 3.10. $\square$

Proposition 3.41. – Soient G un groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur des corps interprétables de caractéristique nulle et U un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe nilpotent normal, pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique nulle. Alors le groupe $UZ(G)/Z(G)$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$.

PREUVE – On peut supposer $G \leq L_1 \times \dots \times L_n$, où L_i est un groupe algébrique linéaire sur un corps $\mathbb{K}_i$ de caractéristique zéro. On peut aussi supposer $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}_j$ pour tout $i \neq j$. Considérons p_i , la projection de G sur L_i parallèlement au produit direct des L_j pour $j \neq i$; on peut alors supposer que $L_i = \overline{p_i(G)}$ où $\overline{p_i(G)}$ est la clôture de Zariski de $p_i(G)$. En particulier L_i est connexe d'après le Corollaire 3.19. D'après le Lemme 3.33, le groupe $G/Z(G)$ est définissablement linéaire sur les corps $\mathbb{K}_i$ et d'après la preuve de ce même lemme, il se plonge définissablement dans $L_1/Z(L_1) \times \dots \times L_n/Z(L_n)$. D'après le Fait 2.15 $p_i(U)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent et la décomposition de Mustafin (Remarque 3.38) nous donne $p_i(U) = p_i(U)_u \times p_i(U)_s$. En particulier $p_i(U)_u$ est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène, et le Fait 2.15 affirme que $p_i(U)_u \cong^{def} p_i(U)/p_i(U)_s$ est aussi un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe.

Soit j tel que $\mathbb{K}_j \not\cong \mathbb{K}$. Supposons $p_j(U)_u \neq 1$ et soit A un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe indécomposable de $p_j(U)_u$. Comme $p_j(U)_u$ est un $U_{\mathbb{K}_j}$ -groupe homogène, alors A est un $U_{\mathbb{K}_j}$ -sous-groupe indécomposable et on a $(\mathbb{K}_j)_+ \cong^{def} A/J(A) \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Ce qui est impossible. Donc $p_j(U)_u = 1$ et $p_j(U) = p_j(U)_s$. Comme U est normal dans G , il vient que $\overline{p_j(U)}$ est un tore normal dans L_j . Par rigidité des tores normaux (Fait 1.76), on a $\overline{p_j(U)} \leq Z(L_j)$.

Aussi, si $U \not\leq Z(G)$, alors il existe un unique j tel que $\mathbb{K}_j \cong^{def} \mathbb{K}$ et $UZ(G)/Z(G)$ se plonge définissablement dans $L_j/Z(L_j)$; ce qui montre que $UZ(G)/Z(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On conclut avec la Proposition 3.40. $\square$

3.3 Groupes définissablement affines

Les groupes de rang de Morley fini définissablement affines généralisent la notion de groupes définissablement linéaires : ce sont les sections définissables

des groupes définissablement linéaires. De ce fait ils sont plus maniables que les groupes définissablement linéaires dans les raisonnements par induction.

Définition 3.42. – Un groupe de rang de Morley fini G est dit *définissablement affine* sur des corps $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ (interprétables dans G), s'il est définissablement isomorphe à une section définissable de $H_1 \times \dots \times H_n$, où H_i est un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}_i$.

Remarque 3.43. –

- 1 Toute section définissable d'un groupe définissablement affine est affine.
- 2 Tout groupe définissablement linéaire est définissablement affine.

Si G est définissablement affine, on écrit $G \cong^{def} U/V$ où U est un sous-groupe définissable de $L_1 \times \dots \times L_n$ pour $L_1, \dots, L_n$ des groupes algébriques linéaires sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement. Dans cette section, il est essentiellement question de la caractéristique nulle. Dans ce cas précis, notre principal résultat qui est donné à la Proposition 3.44 va nous fournir un choix particulier des sous-groupes U et V mais aussi des groupes algébriques linéaires L_i .

Proposition 3.44. – Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement affine sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle tels que $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}_j$ pour tout $i \neq j$. Alors il existe des groupes L_i algébriques linéaires connexes sur $\mathbb{K}_i$; un couple (U, V) de sous-groupes définissables de $L_1 \times \dots \times L_n$ avec V normal dans U et U connexe, tels que $G \cong^{def} U/V$ et vérifiant :

- (i) $V \cap L_i$ est sans sous-groupe fermé connexe non trivial; en particulier $V \cap L_i$ est sans unipotents;
- (ii) Si $v \in V$ est tel que $p_i(v)$ soit un élément unipotent non trivial de L_i , où p_i est la projection sur L_i , alors $d(v) \cap L_i = 1$;
- (iii) V est central dans $L_1 \times \dots \times L_n$;
- (iv) $(L_1 \times \dots \times L_n)' \cap V$ est fini.

PREUVE – Comme G est définissablement affine sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$, alors on a $G \cong^{def} U/V$ où V est un sous-groupe définissable normal de U et U est un sous-groupe définissable de $L_1 \times \dots \times L_n$ avec L_i groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}_i$. Comme G est connexe, on a

$$G \cong^{def} U^\circ V/V \cong^{def} U^\circ/U^\circ \cap V$$

et U° est aussi un sous-groupe définissable de $L_1 \times \dots \times L_n$. Quitte à remplacer U par U° et donc V par $U^\circ \cap V$, on peut donc choisir U connexe. Choisissons V de rang de Morley minimal. Soit p_i la projection de U sur L_i parallèlement au produit direct des L_j pour $j \neq i$. Alors prenons $L_i = \overline{p_i(U)}$ la clôture de Zariski de $p_i(U)$. D'après le Corollaire 3.19 L_i est connexe.

Prouvons (i). Supposons que $V \cap L_i$ possède un sous-groupe fermé connexe non trivial, et soit A le plus grand. Alors A est un sous-groupe (algébriquement) caractéristique de $V \cap L_i$ et A est $p_i(U)$ -normal. Comme A est fermé, A est donc

L_i -normal. Ainsi L_i/A est linéaire et U/A est définissablement isomorphe à un sous-groupe de $L_1 \times \dots L_{i-1} \times L_i/A \times L_{i+1} \times \dots \times L_n$. De plus, on a

$$G \cong^{def} U/V \cong^{def} (U/A)/(V/A).$$

Par minimalité de $rk(V)$, on a $rk(A) = 0$ et par connexité de A on obtient $A = 1$. D'après les Faits 3.37 et 3.10 on en déduit que $V \cap L_i$ est formé d'éléments semi-simples.

Prouvons (ii). Écrivons $v = (v_1, \dots, v_n)$. Alors $p_i(v) = v_i \in V \setminus \{1\}$ et on a $d(v_i) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$. De plus, en posant $D = d(v) \cap (L_1 \times \dots \times L_{i-1} \times \{1\} \times L_{i+1} \times \dots \times L_n)$, on a $d(v)/D \cong^{def} d(v_i) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$. Si $d(v) \cap L_i \neq 1$, par minimalité de $d(v)/D \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$ on a $(d(v) \cap L_i)D/D = d(v)/D$, et comme $L_i \cap D = 1$, on obtient

$$d(v) \cap L_i \cong^{def} (d(v) \cap L_i)D/D = d(v)/D \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$$

Ainsi, $d(v) \cap L_i$ est un sous-groupe unipotent de $V \cap L_i$, donc fermé connexe non trivial. Ce qui est impossible d'après le point (i). Donc on a bien $d(v) \cap L_i = 1$.

Prouvons (iii). Soit C un sous-groupe de Carter de V . Comme V est définissablement linéaire, alors d'après le Fait 3.21 ses sous-groupes de Carter sont conjugués et en appliquant l'argument de Frattini on obtient

$$U = N_U(C)V = NV$$

où $N = N_U(C)$. Il vient alors

$$G \simeq U/V = NV/V \simeq N/N \cap V = N \cap U/N \cap V$$

et par minimalité de $rk(V)$, on obtient $V^\circ = (N \cap V)^\circ$. Or $(N \cap V)^\circ = N_V(C)^\circ = C$. On en déduit que V° est nilpotent et on a $V^\circ \leq F(V)$. D'après le Lemme 3.31, $[U, F(V)] \leq [U, F(U)]$ est définissablement linéaire et contenu dans $U_1 \times \dots \times U_n$ avec U_i unipotent sur $\mathbb{K}_i$. D'après le Lemme 2.28 on a

$$[U, F(V)] = ([U, F(V)] \cap U_1) \times \dots \times ([U, F(V)] \cap U_n).$$

De plus, chaque $[U, F(V)] \cap U_i$ est un sous-groupe définissable connexe de $V \cap L_i$ formé d'éléments unipotents, il est donc fermé (Fait 3.10). Ainsi d'après le point (i), $[U, F(V)] \cap U_i = 1$ pour tout i et on a $[U, F(V)] = 1$. En particulier V° centralise U . Comme U est connexe, alors U centralise V/V° et V/V° est abélien. On en déduit que V est nilpotent et on a $V = F(V)$. Ainsi V centralise U . Maintenant $[p_i(U), p_i(V)] = 1$ pour tout i , donc pour tout $v \in p_i(V)$ il vient $p_i(U) \leq C_{L_i}(v)$. Mais $C_{L_i}(v)$ est fermé d'après le Fait 1.70, alors L_i centralise $p_i(V)$ pour tout i . On conclut donc V est central dans $L_1 \times \dots \times L_n$.

Montrons (iv). Supposons que $(L_1 \times \dots \times L_n)' \cap V$ est infini. Alors il existe i tel que $p_i(((L_1 \times \dots \times L_n)' \cap V)^\circ)$ est infini. Posons $H_i = p_i(((L_1 \times \dots \times L_n)' \cap V)^\circ)$. Alors H_i est abélien car V l'est, et d'après le Fait 3.37(iv) on a $H_i = (H_i)_u \times (H_i)_s$. En

particulier $(H_i)_u$ et $(H_i)_s$ sont des sous-groupes connexes. D'après la Remarque 1.91 $L'_i \cap p_i(V)_s$ est fini. Comme $(H_i)_s$ est un sous-groupe connexe de $L'_i \cap p_i(V)_s$, alors $(H_i)_s$ est trivial et on a $H_i = (H_i)_u$. On en déduit que $p_i(((L_1 \times \dots \times L_n)' \cap V)^\circ)$ est unipotent sur $\mathbb{K}_i$ pour tout i . En particulier $p_i(((L_1 \times \dots \times L_n)' \cap V)^\circ)$ est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène pour tout i ; en appliquant le Lemme 2.28, on obtient une contradiction au point (i). $\square$

Corollaire 3.45. – *Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini, définissablement affine sur des corps interprétables de caractéristique zéro. Alors G' est définissablement linéaire.*

De plus, pour tout corps interprétable $\mathbb{F}$ de caractéristique nulle, $U_{\mathbb{F}}(G')$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{F}$.

PREUVE – On fixe des groupes U et V , des corps $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ et des groupes algébriques linéaires $L_1, \dots, L_n$ comme dans la proposition précédente. Comme G est résoluble alors U est résoluble et donc L_i est résoluble aussi. En particulier L'_i est unipotent sur $\mathbb{K}_i$ pour tout i et d'après le Lemme 2.28, on a

$$U' \cap V = (U' \cap V \cap L'_1) \times \dots \times (U' \cap V \cap L'_n)$$

Or d'après le point (ii) de la proposition précédente, on a $V \cap L'_i = 1$ pour tout i . On conclut que $U' \cap V = 1$. Par conséquent, on a

$$G' \cong^{def} U'V/V \cong^{def} U'$$

d'où G' est définissablement linéaire.

Comme G est résoluble connexe, alors G' est un $\tilde{U}$ -groupe d'après le Fait 2.39. En particulier $U_{\mathbb{F}}(G')$ est un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe homogène d'après le Fait 2.34. Comme G' est définissablement isomorphe à U' , alors $U_{\mathbb{F}}(G')$ est isomorphe à un sous-groupe définissable E de U' et d'après le Lemme 2.28 on a

$$E = (E \cap L'_1) \times \dots \times (E \cap L'_n)$$

Comme E est un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe homogène, alors chaque $E \cap L'_i$ est à la fois un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe homogène et un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène. Alors d'après le Fait 2.27 soit $E \cap L'_i = 1$ pour tout i et on a $U_{\mathbb{F}}(G') = 1$, soit il existe un unique indice i tel que $E \cap L'_i \neq 1$ et on a $\mathbb{F} \cong^{def} \mathbb{K}_i$. Dans ce dernier cas, on obtient $E \leq L'_i$, et E est unipotent sur $\mathbb{F} \cong^{def} \mathbb{K}_i$; ce qui achève la preuve. $\square$

Le Corollaire 3.46 généralise le Lemme 3.31 aux groupes définissablement affines connexes.

Corollaire 3.46. – *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement affine sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle. Alors $[F(G), G]$ est définissablement isomorphe à un produit direct de groupes $U_1, \dots, U_n$, unipotents sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement.*

PREUVE – On fixe des groupes U et V donnés par la Proposition 3.44 tels que $G \cong^{def} U/V$. D’après la Proposition 3.44 (iii) on a $V \leq Z(U)$. Alors on a $F(U/V) = F(U)/V$ et

$$[G, F(G)] \cong^{def} [U, F(U)]V/V \cong^{def} [U, F(U)]/[U, F(U)] \cap V$$

Mais d’après le Lemme 3.31 et la Proposition 3.44 (i) on a $[U, F(U)] \cap V = 1$, alors $[G, F(G)] \cong^{def} [U, F(U)]$ et on déduit le résultat du Lemme 3.31. $\square$

Fait 3.47. - [22, Proposition 4.3] *Soit G un groupe de rang de Morley fini dont la composante connexe est définissablement linéaire sur un nombre fini non nul n de corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. Alors G est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.*

La Proposition 3.48 est du même type que le Lemme 3.17.

Proposition 3.48. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini, définissablement affine sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle. Alors $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.*

PREUVE – On peut supposer que G n’est pas résoluble. Supposons que le résultat est vrai pour tout groupe connexe. Alors $G^\circ/\sigma(G^\circ)$ est définissablement linéaire. Or $\sigma(G^\circ) = \sigma(G) \cap G^\circ$, il vient que

$$G^\circ\sigma(G)/\sigma(G) \cong G^\circ/\sigma(G^\circ)$$

et $G^\circ\sigma(G)/\sigma(G)$ est définissablement linéaire. D’après le Fait 3.47, on conclut que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire. On peut donc supposer G connexe.

Comme G est définissablement affine sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle, soient U, V et L_i donnés par la Proposition 3.44. Comme V centralise U , alors $V \leq \sigma(U)$ et on a $\sigma(U/V) = \sigma(U)/V$. Ainsi $G/\sigma(G) \cong U/\sigma(U)$, et d’après le Lemme 3.17, $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. $\square$

La Proposition 3.49 est du même type que le Lemme 3.32.

Proposition 3.49. – *Soit G un groupe de rang de Morley fini, définissablement affine sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle. Alors $G/F(G)$ est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.*

PREUVE – On peut supposer G n’est pas nilpotent. Comme on a $F(G^\circ) = G^\circ \cap F(G)$, il vient $G^\circ F(G)/F(G) \cong G^\circ/F(G^\circ)$ et d’après le Fait 3.47, on peut supposer G connexe.

Comme G est définissablement affine, soient U, V et L_i donnés par la Proposition 3.44. On a $F(U/V) = F(U)/V$ puisque V centralise U . On en déduit que $G/F(G) \cong^{def} U/F(U)$ et d’après le Lemme 3.32, $G/F(G)$ est définissablement linéaire sur les corps $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. $\square$

La Proposition 3.50 est de la même veine que le Lemme 3.33

Proposition 3.50. – Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement affine sur des corps interprétables $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ de caractéristique nulle. Alors $G/Z(G)$ est définissablement linéaire sur ces mêmes corps.

PREUVE – On fixe des groupes U et V , et des groupes algébriques linéaires $L_1, \dots, L_n$ donnés par la Proposition 3.44 ; en particulier Z centralise U . Posons $Z/V = Z(U/V)$, et montrons que $Z = Z(U)$.

Comme V centralise Z , alors Z est nilpotent et on a $Z \leq F(U)$. Comme on a $[Z, U] \leq V \leq Z(L_1 \times \dots \times L_n)$, on obtient avec le Lemme 3.31 :

$$[Z, U] \leq Z(L_1)_u \times \dots \times Z(L_n)_u$$

Puis d'après le Lemme 2.28 on a

$$[Z, U] = ([Z, U] \cap Z(L_1)_u) \times \dots \times ([Z, U] \cap Z(L_n)_u)$$

Or d'après la Proposition 3.44 (ii), $[Z, U] \cap Z(L_i)_u = 1$ pour tout i , donc $[Z, U] = 1$ et on a $Z = Z(U)$. Ainsi on a $G/Z(G) \cong^{def} U/Z(U)$ et d'après le Lemme 3.33, le groupe $G/Z(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. $\square$

3.4 Remarques sur le produit de groupes définissablement affines

Dans cette section, nous analysons les produits de groupes définissablement affines.

Il est clair que le produit direct de groupes définissablement linéaires est aussi définissablement linéaire. De ce fait, le produit direct de deux sous-groupes définissablement affines H et K d'un groupe G de rang de Morley fini est également définissablement linéaire. En effet, si on pose $H \cong U_H/V_H$ et $K \cong U_K/V_K$, alors $H \times K \cong U_H \times U_K/V_H \times V_K$ et on conclut.

Dans le Lemme 3.51, nous allons montrer que le produit central deux groupes définissablement affines H et K est aussi définissablement affine.

Lemme 3.51. – Soient G un groupe de rang de Morley fini et H et K deux sous-groupes définissablement affines qui se centralisent. Alors HK est définissablement affine.

PREUVE – L'application

$$\begin{aligned} \varphi : H \times K &\rightarrow HK \\ (h, k) &\mapsto hk \end{aligned}$$

est un morphisme définissable surjectif et $H \times K/\ker(\varphi) \cong HK$. Comme $H \times K$ est définissablement affine, alors $H \times K/\ker(\varphi)$ est définissablement affine et on

conclut. $\square$

En particulier le produit central de groupes définissablement linéaires est définissablement affine. Toutefois, le lemme qui suit permet d'avoir mieux.

Lemme 3.52. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini et G_1, G_2 deux sous-groupes définissablement linéaires sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle. Si $G_1 \cap G_2$ est fini et si G_1 et G_2 se centralisent, alors $G_1 G_2$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.*

PREUVE – On reprend la même démonstration que précédemment, alors on a $G_1 G_2 \cong G_1 \times G_2 / E$ où $E \leq G_1 \cap G_2$ fini. Comme $G_1 \times G_2$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, alors $G_1 \times G_2 / E$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et on conclut. $\square$

Chapitre 4

K -groupes

Définition 4.1. – Un groupe de rang de Morley fini est appelé K -groupe si toutes ses sections simples définissables infinis sont isomorphes à des groupes algébriques sur des corps algébriquement clos.

Définition 4.2. – Un K^* -groupe est un groupe dont toute section propre simple et définissable est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos.

Un contre-exemple minimal à la conjecture d'algébricité de Cherlin-Zilber serait un K^* -groupe qui n'est pas un K -groupe. L'étude des K -groupes est donc importante car elle fournit des informations utiles au raisonnement inductif pour répondre à la conjecture de Cherlin-Zil'ber. Le Fait 4.10 est l'un des résultats basiques, concernant l'étude des K -groupes. C'est un théorème de structure qui peut être vu comme un analogue du Fait 1.93. Il sera également présent dans la plus grande partie des raisonnements que nous aurons à faire dans ce chapitre. Justement l'objet de ce chapitre va consister à fournir des nouvelles informations concernant les K -groupes. Notamment, nous établirons quelques propriétés algébriques aux K -groupes dans la première section, donnerons d'autres résultats de structure sur les K -groupes dans la seconde section, et après avoir donné quelques résultats préliminaires sur les K -groupes définissablement linéaires dans la section 3, nous finirons ce chapitre sur une étude de linéarité.

4.1 Résultats préliminaires

Commençons cette section par un rappel de résultats connus.

Fait 4.3. - (**Frécon, [22, Proposition 4.7]**) *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors $G = LR$, pour deux sous-groupes caractéristiques définissables connexes L et R de G tels que :*

- $\sigma(L)^\circ$ est un $\tilde{U}$ -groupe et L est un K -groupe parfait ;
- tout sous-groupe normal définissable connexe et non résoluble de R a une section définissable simple non algébrique.

De plus, cette décomposition est unique et $L \cap R$ est résoluble.

En particulier, G est un K -groupe connexe si et seulement si le sous-groupe R est résoluble.

Fait 4.4. - [4, Lemme 4.12] *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini et soit H un sous-groupe algébrique normal quasi-simple. Alors $G = H * C_G(H)^\circ$.*

Fait 4.5. - (Altinel et Cherlin, [3, Corollaire 1]) *Soit G un groupe parfait de rang de Morley fini tel que $G/Z(G)$ soit un groupe algébrique quasi-simple. Alors G est un groupe algébrique. En particulier, $Z(G)$ est fini.*

On dit qu'un groupe H est *abélien-par-fini*, s'il possède un sous-groupe normal abélien N tel que le quotient H/N soit fini.

Fait 4.6. - (Poizat, [33, Théorème 3]) *Soient K un corps de rang de Morley fini, de caractéristique nulle et G un sous-groupe simple définissable de $GL_n(K)$ qui ne soit pas un sous-groupe fermé de Zariski, alors G ne contient que des éléments semi-simples et tous ses sous-groupes résolubles sont abéliens-par-finis.*

Corollaire 4.7. – *Soit G un K -groupe simple de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Alors G est définissablement isomorphe à un groupe algébrique sur $\mathbb{K}$.*

PREUVE – Comme G est un K -groupe simple, alors G est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos $\mathbb{F}$. En particulier, ses sous-groupes de Borel ne sont pas abéliens-par-finis. Comme G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, on en déduit d'après le Fait 4.6 que G est définissablement isomorphe à un groupe algébrique sur $\mathbb{K}$. $\square$

Fait 4.8. - (Wolf, [40, Théorème 8.9.27]) *Soit H un groupe algébrique linéaire simple (sans centre) sur un corps algébriquement clos $\mathbb{L}$ de caractéristique zéro. Alors tout tore maximal de H centralise un vecteur non nul de $\mathbb{L}^n$.*

Corollaire 4.9. – *Soit H un sous-groupe de $GL(V)$ où V est un espace vectoriel de dimension fini sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Supposons que $H = H_1 \times \dots \times H_n$, où les H_i sont des groupes algébriques simples (sans centre). Alors tout tore maximal T de H fixe un vecteur non nul de V .*

PREUVE – Posons $\mathcal{H} = V \rtimes H$, où H agit par multiplication sur V . Soit T_1 un tore maximal de H_1 , alors d'après le Fait 4.8 $C_V(T_1) \neq 1$ et on a le groupe $C_{\mathcal{H}}(T_1) = C_V(T_1) \rtimes (T_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)$. En particulier H_2 agit sur $C_V(T_1)$. Soit T_2 un tore maximal de H_2 , alors il vient de même que $C_V(T_1 \times T_2) = C_{C_V(T_1)}(T_2) \neq 1$ et on a $C_{\mathcal{H}}(T_1 \times T_2) = C_V(T_1 \times T_2) \rtimes (T_1 \times T_2 \times H_3 \times \dots \times H_n)$. Ainsi de suite, on trouve $C_V(T_1 \times \dots \times T_n) \neq 1$, où T_i est un tore maximal de H_i . Comme tout tore maximal de H est de la forme $T_1 \times \dots \times T_n$, on conclut. $\square$

Fait 4.10. - (Altinel, [2]) *Soit G un K -groupe non résoluble connexe de rang de Morley fini. Alors $G/\sigma(G)$ est isomorphe à une somme directe de groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos.*

Pour H un groupe algébrique linéaire, nous savons que le quotient $H/R(H)$ de H par son radical résoluble $R(H)$ est un groupe algébrique semi-simple ; il se décompose donc comme produit central de groupes algébriques quasi-simples (Fait 1.88). Le Fait 4.11 peut être vu comme un analogue de cette propriété dans le contexte des K -groupes.

Fait 4.11. - (Altinel, [2]) *Soit G un K -groupe connexe non résoluble de rang de Morley fini. Alors $G/\sigma(G)^\circ$ est isomorphe à un produit central fini de groupes algébriques quasi-simples sur des corps algébriquement clos.*

Les résultats qui suivent donnent d'autres propriétés algébriques aux K -groupes de rang de Morley fini.

Le Lemme 4.12 est un analogue du Fait 1.83.

Lemme 4.12. - *Soient G un K -groupe connexe de rang de Morley fini et B un sous-groupe de Borel de G . Si B est nilpotent, alors $G = B$.*

PREUVE – On peut supposer que G est non résoluble. D'après le Fait 4.10 on a

$$G/\sigma(G) \cong S_1 \times \dots \times S_n$$

pour $S_1, \dots, S_n$ des groupes algébriques simples. D'après les Lemmes 3.28 et 3.30 les sous-groupes de Borel de $G/\sigma(G)$ sont de la forme $B/\sigma(G)$ où B un sous-groupe de Borel de G . Soit B un sous-groupe de Borel de G . Comme $B/\sigma(G)$ est un sous-groupe de Borel de $G/\sigma(G)$, on a

$$B/\sigma(G) \cong B_1 \times \dots \times B_n$$

où B_i est un sous-groupe de Borel de S_i . Comme B est nilpotent, alors B_i est nilpotent pour tout i . Or d'après le Fait 1.83 on a $S_i = B_i$ pour tout i , on en déduit que $B = \sigma(G)$, ce qui est impossible. $\square$

Remarque 4.13. – D'après la Remarque 3.15, il n'est malheureusement pas possible en l'état actuel de nos connaissances d'étendre le Lemme 4.12 aux groupes de rang de Morley fini définissablement linéaires en toute généralité, et ce à cause de l'existence possible de mauvais groupes.

La Proposition 4.14 est un analogue du Théorème du Normalisateur donné par le Fait 1.86.

Proposition 4.14. - *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini. Alors $N_G(B) = B$ pour tout sous-groupe de Borel B de G .*

PREUVE – On peut supposer G non résoluble. On a $G/\sigma(G) \cong S_1 \times \dots \times S_n$ où les groupes $S_1, \dots, S_n$ sont algébriques simples. Soit B un sous-groupe de Borel de G . Alors $B/\sigma(G)$ est un Borel de $G/\sigma(G)$ (Lemmes 3.28 et 3.30) et on a $B/\sigma(G) \cong B_1 \times \dots \times B_n$ où B_i est un sous-groupe de Borel de S_i ; il s'ensuit

$$N_{G/\sigma(G)}(B/\sigma(G)) \cong N_{S_1}(B_1) \times \dots \times N_{S_n}(B_n).$$

D'après le Fait 1.86 on a $N_{S_i}(B_i) = B_i$ pour tout i , donc $N_{G/\sigma(G)}(B/\sigma(G)) = B/\sigma(G)$. Mais $N_{G/\sigma(G)}(B/\sigma(G)) = N_G(B)/\sigma(G)$, donc on a bien $N_G(B) = B$. $\square$

Si G est un sous-groupe définissable et connexe de $GL_n(\mathbb{K})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini et de caractéristique zéro, alors d'après le Fait 3.13 on a $G/\sigma(G) = G_1 \times \dots \times G_n \times C$ où $G_1, \dots, G_n$ sont des groupes algébriques simples sur $\mathbb{K}$ et C un groupe connexe sans unipotents. En particulier C est un mauvais groupe; et si C est simple, on a $N_C(T) = T$ pour tout sous-groupe de Borel T de C [6, Théorème 13.3]. Alors la Proposition 4.14 reste vraie pour le groupe G , si C est simple. Par contre, le manque d'informations sur le groupe C ne permet pas de généraliser la Proposition 4.14.

Lemme 4.15. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini. Alors on a $Z(B) \leq \sigma(G)$ pour tout sous-groupe de Borel B de G .*

PREUVE – On peut supposer G non résoluble. Soit B un sous-groupe de Borel de G , alors $B/\sigma(G)$ est un sous-groupe de Borel de $G/\sigma(G)$ (Lemmes 3.28 et 3.30). De plus on a

$$B/\sigma(G) \cong B_1 \times \dots \times B_n$$

pour $B_1, \dots, B_n$ des sous-groupes de Borel de $S_1, \dots, S_n$ respectivement, et $S_1, \dots, S_n$ des groupes algébriques simples (Fait 4.10). En particulier on a

$$Z(B/\sigma(G)) \cong Z(B_1) \times \dots \times Z(B_n).$$

D'après le Fait 1.84 on a $Z(B_i) = Z(S_i) = 1$ pour tout i , d'où $Z(B/\sigma(G))$ est trivial. On en déduit que $Z(B) \leq \sigma(G)$. $\square$

Lemme 4.16. – *Dans un univers de rang de Morley fini, on considère un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, et G un groupe non abélien, algébrique connexe sur $\mathbb{K}$. Si G s'injecte définissablement dans un groupe H algébrique sur un corps interprétable $\mathbb{F}$ de caractéristique zéro, alors $\mathbb{K} \cong^{def} \mathbb{F}$.*

PREUVE – Soit B un sous-groupe de Borel de G . D'après le Fait 1.83, B est non abélien. Aussi B' étant unipotent sur $\mathbb{K}$, c'est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène non trivial. Considérons γ l'injection de G dans H , alors $\gamma(B')$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène (fait 2.15). D'autre part, $\gamma(B)$ est un sous-groupe résoluble et connexe de H , alors $\gamma(B)' = \gamma(B')$ est un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe homogène non trivial. Donc $\gamma(B')$ est à la fois un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène et un $U_{\mathbb{F}}$ -groupe homogène. D'après le Fait 2.27, on en déduit que $\mathbb{K} \cong^{def} \mathbb{F}$. $\square$

Notation 4.17. – Pour tout groupe connexe G de rang de Morley fini, on note $\tilde{K}(G)$ l'intersection des sous-groupes définissables normaux H de G tel que le quotient G/H est un $\tilde{U}$ -groupe.

Fait 4.18. - [21, Lemme 3.23] *Soit G un groupe connexe de rang de Morley fini. Alors $\tilde{K}(G)$ est le plus petit sous-groupe définissable normal de G tel que $G/\tilde{K}(G)$ est un $\tilde{U}$ -groupe.*

Nous terminons cette section par le Théorème 4.19 qui permet d'établir aux K -groupes sans sous-groupe infini d'exposant borné une propriété bien connue des groupes algébriques linéaires donnée par le Fait 1.84.

Théorème 4.19. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini sans sous-groupe infini d'exposant borné. Alors $Z(G) = Z(B)$ pour tout sous-groupe de Borel B de G .*

PREUVE – D'après les Lemmes 3.30 et 4.15 on a

$$Z(B) \leq \sigma(G) \leq B$$

pour tout sous-groupe de Borel B de G . En particulier, on a $Z(B) \leq Z(\sigma(G))$. Posons $Z_\sigma = Z(\sigma(G))$. Comme $\sigma(G)$ est un sous-groupe de $C_G(Z_\sigma)$, il vient d'après le Fait 4.10 que $G/C_G(Z_\sigma)$ est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples ; écrivons :

$$G/C_G(Z_\sigma) \cong G_1 \times \dots \times G_n$$

où $G_1, \dots, G_n$ sont des groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos $K_1, \dots, K_n$ de caractéristique nulle. D'après Lemme 3.28, $BC_G(Z_\sigma)/C_G(Z_\sigma)$ est un sous-groupe de Borel de $G/C_G(Z_\sigma)$ et on a

$$BC_G(Z_\sigma)/C_G(Z_\sigma) \cong B_1 \times \dots \times B_n$$

où $B_1, \dots, B_n$ sont des sous-groupes de Borel de $G_1, \dots, G_n$ respectivement. Comme G_i agit par conjugaison sur Z_σ , on peut poser $Z_i = Z_\sigma/C_{Z_\sigma}(G_i)$.

(i) *Montons que $C_{Z_i}(G_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Soit $\bar{x} \in C_{Z_i}(G_i)$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \gamma &: G_i \rightarrow C_{Z_\sigma}(G_i) \\ u &\mapsto [x, u] \end{aligned} ,$$

est un morphisme définissable de groupes. Mais $C_{Z_\sigma}(G_i)$ est abélien et $G_i/\ker(\gamma)$ est isomorphe à un sous-groupe définissable de $C_{Z_\sigma}(G_i)$, alors comme G_i est simple, on a $G_i = \ker(\gamma)$. Donc on a $x \in C_{Z_\sigma}(G_i)$ et $C_{Z_i}(G_i) = 1$.

(ii) *Montrons que Z_i est connexe et sans torsion.*

Comme G est sans sous-groupe infini d'exposant borné, il en est de même pour Z_σ . Soit T le pseudo-tore maximal de Z_σ , alors G_i centralise T et on a

$T \leq C_{Z_\sigma}(G_i) = 1$. En particulier, Z_i est sans pseudo-tore non trivial et Z_i° est sans torsion. On obtient

$$Z_i = Z_i^\circ \times F$$

où F est un sous-groupe fini caractéristique. Donc F est centralisé par G_i et on a $F \leq C_{Z_i}(G_i) = 1$. Ainsi, $Z_i = Z_i^\circ$, et on conclut que Z_i est connexe et sans torsion.

(iii) *Montrons que Z_i est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène.*

Comme le groupe Z_σ° est abélien connexe, il est contenu dans tout sous-groupe de Borel B_0 de $Z_\sigma \rtimes G_i$, et on a $Z_\sigma^\circ \leq F(B_0)$. Mais d'après le fait 2.40, le quotient $F(B_0)/Z(B_0)$ est un $\tilde{U}$ -groupe, alors $Z_\sigma^\circ/Z_\sigma^\circ \cap Z(B_0)$ est un $\tilde{U}$ -groupe (Fait 2.37) et on a $\tilde{K}(Z_\sigma^\circ) \leq Z(B_0)$ (Fait 4.18). Comme G_i est engendré par ses sous-groupes de Borel, c'est aussi le cas de $Z_\sigma^\circ \rtimes G_i$, et comme $\tilde{K}(Z_\sigma^\circ)$ est normal dans $Z_\sigma \rtimes G_i$ on en déduit que $\tilde{K}(Z_\sigma^\circ)$ centralise $Z_\sigma^\circ \rtimes G_i$. Par conséquent $\tilde{K}(Z_\sigma^\circ)$ est un sous-groupe de $C_{Z_\sigma}(G_i)$ et d'après les Faits 4.18 et 2.37(i) $Z_i = Z_\sigma^\circ C_{Z_\sigma}(G_i)/C_{Z_\sigma}(G_i)$ est un $\tilde{U}$ -groupe. D'après le Fait 2.34, on a

$$Z_i = U_{\mathbb{F}_1}(Z_i) \times \dots \times U_{\mathbb{F}_m}(Z_i)$$

pour $\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_n$ des corps interprétables de caractéristique zéro et $U_{\mathbb{F}_i}(Z_i)$ homogène pour tout i . Pour $j = 1, \dots, n$, soit A_j un sous-groupe G_i -minimal de $U_{\mathbb{F}_j}(Z_i)$. Alors A_j est abélien car $U_{\mathbb{F}_j}(Z_i)$ l'est, et d'après le Fait 1.33 on a $A_j \cong^{def} (\mathbb{F}_j)_+^r$ pour un entier $r \geq 1$. Comme G_i agit sur A_j , alors G_i est définissablement linéaire sur $\mathbb{F}_j$ (Fait 3.6) et d'après le Lemme 4.16, on a $\mathbb{K}_i \cong^{def} \mathbb{F}_j$. On conclut que Z_i est un $\mathbb{K}_i$ -groupe homogène.

(iv) *Montrons que $C_{Z_\sigma}(G_i) = C_{Z_\sigma}(B_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.*

Supposons $C_{Z_\sigma}(G_i) \neq C_{Z_\sigma}(B_i)$. Alors $C_{Z_\sigma}(B_i)/C_{Z_\sigma}(G_i)$ est un sous-groupe infini de Z_i puisque Z_i est sans torsion. Considérons M , un sous-groupe infini minimal de $C_{Z_\sigma}(B_i)/C_{Z_\sigma}(G_i)$. Comme Z_i est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène, on a $M \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+^r$. Posons $H = \langle M^g : g \in G \rangle$. Alors on a $H \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+^r$, pour un entier $r \geq 1$. Aussi, G_i agit sur H , et d'après le Fait 3.6, le groupe $H \rtimes G_i$ est algébrique sur $\mathbb{K}_i$. Comme $C_H(G_i) \leq C_{Z_i}(G_i) = 1$, on a $Z(H \rtimes G_i) = 1$. D'après le Fait 1.84, il vient que $Z(B_H)$ est trivial pour tout sous-groupe de Borel B_H de $H \rtimes G_i$. Mais M centralise B_i , alors M centralise $H \rtimes B_i$, et comme $H \rtimes B_i$ est un sous-groupe de Borel de $H \rtimes G_i$, alors on a $M \leq Z(H \rtimes G_i) = 1$. Ce qui est impossible, donc $C_{Z_\sigma}(G_i) = C_{Z_\sigma}(B_i)$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

(v) *Conclusion.*

Comme $Z(G) \leq Z_\sigma \leq G$, on a $C_{Z_\sigma}(G) = Z(G)$. De même on a $C_{Z_\sigma}(B) = Z(B)$. Mais

$$C_{Z_\sigma}(G) = C_{Z_\sigma}(G/C_G(Z_\sigma)) = \bigcap_{i=1}^n C_{Z_\sigma}(G_i)$$

et

$$C_{Z_\sigma}(B) = C_{Z_\sigma}(BC_G(Z_\sigma)/C_G(Z_\sigma)) = \bigcap_{i=1}^n C_{Z_\sigma}(B_i),$$

alors comme $C_{Z_\sigma}(G_i) = C_{Z_\sigma}(B_i)$ pour tout i , on a $C_{Z_\sigma}(B) = C_{Z_\sigma}(G)$ c'est-à-dire $Z(G) = Z(B)$. $\square$

En particulier, le Théorème 4.19 reste vrai pour tout K -groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur un corp interprétable de caractéristique nulle.

4.2 Structures des K -groupes

Les principaux résultats de structure sur les K -groupes sont donnés par les Faits 4.10 et 4.11. Dans cette sous-section nous allons en donner quelques autres.

On sait, étant donné un groupe algébrique H , que le quotient $H/R_u(H)$, de H par son radical unipotent $R_u(H)$, est produit central d'un nombre fini de groupes algébriques quasi-simples par un tore. La Proposition 4.20 peut être considérée comme un analogue de cette propriété dans le contexte des K -groupes.

Proposition 4.20. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini. Posons $U = \tilde{U}(G)$. Alors*

$$G/U \cong S_1 * \dots * S_n * \sigma(G)^\circ/U$$

où $S_1, \dots, S_n$ sont des groupes algébriques quasi-simples et le groupe $\sigma(G)^\circ/U$ est abélien. De plus, $[G, \sigma(G)]$ est un $\tilde{U}$ -groupe.

PREUVE – On peut supposer G non résoluble. Le Fait 4.3 donne $G = L\sigma(G)^\circ$, où L est un sous-groupe connexe définissablement caractéristique, et $\sigma(L)^\circ$ est un $\tilde{U}$ -groupe. Alors on a $[L, \sigma(G)^\circ] \leq \sigma(L)^\circ \leq U$ et

$$G/U = LU/U * \sigma(G)^\circ/U.$$

De plus $\sigma(G)^\circ/U$ est abélien d'après le Fait 2.39. Il reste donc à montrer que LU/U est isomorphe à un produit central de groupes algébriques quasi-simples.

Posons $V = \tilde{U}(L) = \sigma(L)^\circ$. Comme $\sigma(L)/V$ est fini, alors L centralise $\sigma(L)/V$. Comme L/V est parfait et $L/\sigma(L)$ est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples, on en déduit que L/V est isomorphe à un produit central de groupe algébriques quasi-simples. Puisque V est un sous-groupe de U , il vient que LU/U est isomorphe à un produit central de groupes algébriques quasi-simples $S_1, \dots, S_n$.

En particulier, on a

$$\sigma(G/U) \cong \sigma(S_1) * \dots * \sigma(S_n) * \sigma(G)^\circ/U$$

avec $\sigma(S_1), \dots, \sigma(S_n)$ finis centraux. Comme $\sigma(G)^\circ/U$ est abélien, il vient que $\sigma(G)/U$ est centralisé par G et on a $[G, \sigma(G)] \leq U$. $\square$

Remarque 4.21. – Soit H un K -groupe connexe de rang de Morley fini. Si $\tilde{U}(H) = 1$, alors d'après la Proposition 4.20 on a $H = H_1 * \dots * H_n * \sigma(H)^\circ$ où les H_i sont des groupes quasi-simples sur des corps algébriquement clos et $\sigma(H)^\circ$ est abélien.

Définition 4.22. – Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini. On dit que G est K -réductif si $\tilde{U}(G) = 1$.

Le Corollaire 4.23 est un analogue du Fait 1.89.

Corollaire 4.23. – Soit G un groupe de rang de Morley fini K -réductif, alors on a $Z(G)^\circ = \sigma(G)^\circ$.

PREUVE – Comme G est K -réductif, alors $\tilde{U}(G) = 1$ et d'après la Proposition 4.20, on a $G = G_1 * \dots * G_n * \sigma(G)^\circ$ et $\sigma(G)^\circ$ est abélien, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 4.24. – Soit G un groupe de rang de Morley fini K -réductif. Alors on a $G' = H_1 * \dots * H_n$ avec $H_1, \dots, H_n$ des groupes algébriques quasi-simples sur des corps algébriquement clos.

PREUVE – Ceci suit directement de la Proposition 4.20. $\square$

Corollaire 4.25. – Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini. Alors G' ne contient aucun pseudo-tore normal et non trivial de G .

PREUVE – Soit T un pseudo-tore normal de G contenu dans G' . D'après la Proposition 4.20, le quotient $G' \tilde{U}(G) / \tilde{U}(G)$ est produit central de groupes algébriques quasi-simples. Alors on a $T \leq \tilde{U}(G)$ et le Fait 2.34 dit que T est trivial. $\square$

Proposition 4.26. – Soient G un K -groupe connexe de rang de Morley fini et sans sous-groupe infini d'exposant borné, et A un sous-groupe abélien G -minimal. Supposons $C \cap A = 1$, pour C un sous-groupe de Carter de G . Alors $G/C_G(A)$ n'est pas isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples.

PREUVE – On considère que G est un contre-exemple de rang de Morley minimal. Par G -minimalité de A et d'après le Fait 2.16, soit A est un pseudo-tore, soit A est un U_K -groupe pour K un corps interprétable de caractéristique zéro. Si A est un pseudo-tore, alors d'après le Fait 1.68, A est central dans G et on a $A \leq C$; ce qui est impossible. Donc A est un U_K -groupe et d'après le Fait 3.34 on a $A \cong^{def} \mathbb{K}_+^n$ pour un entier n . Il s'ensuit que $G/C_G(A)$ est définissablement isomorphe à un sous-groupe S de $GL_n(\mathbb{K})$. Comme G est un K -groupe, alors d'après le Corollaire 4.7, le groupe S est définissablement isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples sur K .

Posons $H = A \rtimes G/C_G(A)$ où $G/C_G(A)$ agit par conjugaison sur A . Alors il y a un isomorphisme définissable γ de H dans $\mathbb{K}^n \rtimes S$ où $S \leq GL_n(\mathbb{K})$ agit naturellement sur $\mathbb{K}^n$, et tel que $\gamma(A) = \mathbb{K}^n$ et $\gamma(G/C_G(A)) = S$. Soit C un sous-groupe de Carter de G , alors $CC_G(A)/C_G(A)$ est un sous-groupe de Carter de $G/C_G(A)$.

Posons $C_A = CC_G(A)/C_G(A)$; montrons que C_A est un sous-groupe de Carter de H . Soit $x \in N_H(C_A)$; alors $x = wg$, avec $w \in A$ et $g \in G/C_G(A)$. Pour tout $c \in C_A$, on a $[g, c] \in G/C_G(A)$, et comme $[x, c] = [w, c]^g [g, c] \in C_A \subseteq G/C_G(A)$ et $[w, c] \in A \triangleleft H$, alors $[w, c]^g \in A \cap G/C_G(A) = 1$ et on a $[w, c] = 1$. Donc C_A centralise w , et on en déduit que C centralise w . Ainsi C centralise $d(w)$. Si $w \neq 1$, alors $d(w)$ est un sous-groupe connexe non trivial de A car A sans torsion, et on a $d(w) \leq A \cap C_G(C)^\circ \leq C_G(A) \cap C = 1$; ce qui est absurde. Donc $w = 1$ et x appartient à $G/C_G(A)$. Ainsi on a $N_H(C_A) \leq N_{G/C_G(A)}(C_A)$ et on conclut que C_A est un sous-groupe de Carter de H .

Comme $T = \gamma(C_A)$ est un sous-groupe de Carter de S , c'est un tore maximal de S car S est un produit de groupes algébriques simples. Le Corollaire 4.9 montre que T n'est pas un sous-groupe de Carter de $\mathbb{K}^n \rtimes S$; ce qui contredit le paragraphe précédent. $\square$

L'exemple suivant montre que la condition $C \cap A = 1$ de la Proposition 4.26 est nécessaire.

Exemple 4.27. – Considérons le pur groupe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & s & t \\ c & d & u & v \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, s, t, u, v) \in \mathbb{C}^8, ad - bc = 1 \right\}.$$

Alors il existe un morphisme surjectif de $G/Z(G)$ dans $PSL_2(\mathbb{C})$. Notons $\mathcal{N}$ le noyau de ce morphisme et posons $\mathcal{G} = G/Z(G)$; alors $\mathcal{N} = NZ(G)/Z(G)$ où

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & s & t \\ 0 & 1 & u & v \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (s, t, u, v) \in \mathbb{C}^4 \right\}$$

et $\mathcal{N}$ est un sous-groupe abélien normal connexe de $\mathcal{G}$. Comme un sous-groupe de Carter $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$ est l'image d'un groupe de la forme

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & s & t \\ 0 & a & u & v \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, s, t, u, v) \in \mathbb{C}^5, a^2 = 1 \right\}$$

alors on a $\mathcal{N} \cap \mathcal{C} \neq 1$ et $\mathcal{G}/\mathcal{N} \cong PSL_2(\mathbb{C})$; $\mathcal{N}$ est l'unique sous-groupe G -minimal de $\mathcal{G}$.

Lemme 4.28. – Soit G un K -groupe de rang de Morley fini. Supposons que G est le produit central avec intersection fini de deux sous-groupes définissables connexes G_1 et G_2 . Alors tout sous-groupe de Carter de G_1 (resp. G_2) est de la forme $C \cap G_1$ (resp. $C \cap G_2$), où C est un sous-groupe de Carter de G , et on a $C = (C \cap G_1) * (C \cap G_2)$.

PREUVE – Posons $I = G_1 \cap G_2$. Alors I est un sous-groupe central de G et on a $G/I = G_1/I \times G_2/I$. Soit C un sous-groupe de Carter de G . D'après le Fait 3.29, I est un sous-groupe de C ; donc C/I est un sous-groupe de Carter de G/I . Soient C_1/I et C_2/I les projections de C/I sur G_1/I et G_2/I respectivement. En particulier C_1/I et C_2/I sont connexes et $C_1/I \times C_2/I$ est un groupe nilpotent connexe. Comme on a $N_{C_1/I \times C_2/I}(C/I)^\circ \leq N_{G/I}(C/I)^\circ = C/I$, alors d'après la condition du normalisateur on obtient $C/I = C_1/I \times C_2/I$. En particulier C_1/I et C_2/I sont des sous-groupes de Carter de G_1/I et G_2/I respectivement. L'égalité $C/I = C_1/I \times C_2/I$ donne aussi $C_1/I = (G_1 \cap C)/I$ et $C_2/I = (G_2 \cap C)/I$. Comme $I \leq Z(G)$, on en déduit que $(C \cap G_1)^\circ$ et $(C \cap G_2)^\circ$ sont des sous-groupes de Carter de G_1 et G_2 respectivement. Or $I \leq Z(G_1)$ (resp. $I \leq Z(G_2)$), donc le Fait 3.29 donne $I \leq (C \cap G_1)^\circ$ (resp. $I \leq (C \cap G_2)^\circ$), d'où la connexité de $C \cap G_1$ et $C \cap G_2$. Ainsi $C \cap G_1$ (resp. $C \cap G_2$) est un sous-groupe de Carter de G_1 (resp. G_2). La conclusion suit du Fait 3.21. $\square$

Lemme 4.29. – *Soient G un groupe de rang de Morley fini, H un sous-groupe définissable normal sans torsion et K un sous-groupe définissable connexe tels que KH/H est un groupe algébrique quasi-simple. Si K centralise les sections G -minimales de H , alors $K^{(\infty)}$ est un groupe algébrique quasi-simple et $H \cap K^{(\infty)} = 1$.*

PREUVE – Comme $KH/H \cong K^{(\infty)}/(K^{(\infty)} \cap H)$, il vient d'après le Fait 4.5 que $K^{(\infty)}/D$ est un groupe algébrique quasi-simple et $(K^{(\infty)} \cap H)/D$ est fini avec $D = [K^{(\infty)}, K^{(\infty)} \cap H]$. Comme H est sans torsion, on a $D = K^{(\infty)} \cap H = [K^{(\infty)}, K^{(\infty)} \cap H]$. Supposons que $D \neq 1$. Soit $(A_i)_{i \geq 0}$ une suite de sous-groupes définissables de H telle que $A_0 = 1$ et A_{i+1}/A_i est G -minimal. Considérons m le plus grand entier tel que $D \not\leq A_m$. Alors D est contenu dans A_{m+1} , et comme $K^{(\infty)} \leq K$ centralise les sections G -minimales de H , il vient que $K^{(\infty)}$ centralise $D/D \cap A_m$. On obtient $D = [K^{(\infty)}, K^{(\infty)} \cap H] \leq D \cap A_m < D$, ce qui est absurde. Donc $D = K^{(\infty)} \cap H = 1$ et $K^{(\infty)}$ est algébrique quasi-simple. $\square$

Lemme 4.30. – *Soit G un K -groupe connexe et parfait de rang de Morley fini. Alors on a $[G, \sigma(G)^\circ] = \sigma(G)^\circ$; en particulier $\sigma(G)^\circ$ est un $\tilde{U}$ -groupe.*

PREUVE – On rappelle que $[G, \sigma(G)]$ est un $\tilde{U}$ -groupe d'après la Proposition 4.20. Quitte à quotienter G par $[G, \sigma(G)^\circ]$, on peut supposer $\sigma(G)^\circ$ est contenu dans $Z(G)$. Le Fait 4.11 permet d'écrire $G/\sigma(G)^\circ = G_1/\sigma(G)^\circ * \dots * G_n/\sigma(G)^\circ$ où $G_1/\sigma(G)^\circ, \dots, G_n/\sigma(G)^\circ$ sont isomorphes à des groupes algébriques quasi-simples, alors d'après le Fait 4.5, chaque groupe $G_i^{(\infty)}$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple et $G_i^{(\infty)} \cap \sigma(G)^\circ$ est fini. Comme $G_i^{(\infty)} \sigma(G)^\circ / \sigma(G)^\circ = G_i / \sigma(G)^\circ$, alors le quotient $G / (G_1^{(\infty)} * \dots * G_n^{(\infty)})$ est résoluble, d'où on a $G = G_1^{(\infty)} * \dots * G_n^{(\infty)}$. Ainsi $\sigma(G)$ est fini et le résultat suit. $\square$

Fait 4.31. - (Cherlin et Deloro, [14, Lemme 1.7]) *Dans un univers de rang de Morley fini, on considère les objets définissables suivants : un groupe algébrique réductif G , un groupe nilpotent V et une action de G sur V . Soit U un sous-groupe nilpotent de G , alors $V \rtimes U$ est nilpotent.*

Fait 4.32. - (Cherlin et Deloro, [14, Lemme 1.8]) Dans un univers de rang de Morley fini, on considère les objets définissables suivants : un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique p , un groupe algébrique quasi-simple H sur $\mathbb{F}$, un groupe abélien W , et une action non triviale de H sur W pour laquelle W est H -minimal. Alors W est sans torsion si $p = 0$, et d'exposant p si $p > 0$.

Le Lemme 4.33 est une sorte de généralisation du Fait 4.32.

Lemme 4.33. - Dans un univers de rang de Morley fini, on considère les objets définissables suivants : des corps $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$, $G \cong G_1 * \dots * G_n$ avec $G_1, \dots, G_n$ des groupes algébriques quasi-simples sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement, un groupe abélien V et une action de G sur V telle que V est G -minimal. Si chaque G_i agit non trivialement sur V , alors tous les corps $\mathbb{K}_i$ sont de caractéristique p , où $p = 0$ si V est divisible, et p est l'exposant de V sinon. De plus, si $p = 0$, alors tous les $\mathbb{K}_i$ sont définissablement isomorphes et V est un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe.

PREUVE – Soit U_i un sous-groupe unipotent maximal de G_i ; le Fait 4.31 nous dit que $V \rtimes U_i$ est unipotent. Si la caractéristique de $\mathbb{K}_i$ n'est pas p , alors U_i centralise V (Fait 1.44), donc $C_{G_i}(V)$ est un sous-groupe normal infini de G_i et comme G_i est quasi-simple, on en déduit qu'il centralise V ; ce qui est une contradiction. Ceci prouve le Lemme. $\square$

Proposition 4.34. – Soit G un K -groupe connexe parfait de rang de Morley fini.

- a) Si $G/\sigma(G)^\circ$ est algébrique sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, alors $\sigma(G)^\circ$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.
- b) Si $G/\sigma(G)$ est produit direct de groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos de caractéristiques non nulles, alors $\sigma(G)$ est d'exposant borné.

PREUVE – a) Pour ce point, on procède par induction sur $rk(G)$. On peut supposer $\sigma(G)^\circ \neq 1$. Soit A un sous-groupe G -minimal de $\sigma(G)^\circ$. Alors A est abélien et par induction, $\sigma(G)^\circ/A$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. Comme G est parfait, alors d'après le Lemme 4.30 $[G, \sigma(G)^\circ] = \sigma(G)^\circ$ et on a $\sigma(G)^\circ = \tilde{U}(G)$. Si $\sigma(G)^\circ \neq A$, alors $U_{\mathbb{K}}(\sigma(G)^\circ)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène non trivial puisque $\sigma(G)^\circ/A$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. Quitte à choisir A dans $U_{\mathbb{K}}(\sigma(G)^\circ)$, on peut supposer que A est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène; ce qui entraîne à conclure que $\sigma(G)^\circ$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène d'après le Fait 2.23. On peut donc supposer $A = \sigma(G)^\circ$. Maintenant, on considère le groupe $A \rtimes G/A$ où G/A agit sur A par conjugaison. Le Lemme 4.33 montre que A est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. Comme c'est un $\tilde{U}$ -groupe, il est homogène.

b) Comme $\sigma(G)/\sigma(G)^\circ$ est fini, il suffit de montrer que $\sigma(G)^\circ$ est d'exposant borné. Comme G est parfait, alors $\sigma(G)^\circ$ est un $\tilde{U}$ -groupe (Lemme 4.30) et d'après le Fait 2.34 on a $\sigma(G)^\circ = D \times B$, où D et B sont deux sous-groupes caractéristiques, D est sans torsion et B d'exposant borné. De plus, le Lemme 4.30 donne $[G, \sigma(G)^\circ] = \sigma(G)^\circ$ et on obtient $D = [G, D]$. Supposons $D \neq 1$. Soit $N \triangleleft D$, un sous-groupe définissable tel que D/N soit G -minimal. Alors $G/\sigma(G)^\circ$ agit sur

D/N car $\sigma(G)^\circ$ centralise D/N . Comme $[G, D] = D$, alors $G/\sigma(G)^\circ$ ne centralise pas D/N et d'après le Lemme 4.33, il vient que le groupe quotient D/N est d'exposant borné ; ce qui est absurde car D est sans torsion. Donc on a $D = 1$ et $\sigma(G)^\circ$ est d'exposant borné. $\square$

Le Théorème 4.35 donne la structure des K -groupes parfaits connexes de rang de Morley fini.

Théorème 4.35. – *Soit G un K -groupe connexe parfait de rang de Morley fini. Alors G se décompose en un produit central avec intersections finis*

$$G = G_1 * \dots * G_n * B$$

de groupes définissables $G_1, \dots, G_n$ et B tels que $G_i/\sigma(G_i)$ est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et B tel que $B/\sigma(B)$ est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos de caractéristiques non nulles.

PREUVE – On considère G un contre-exemple de rang minimal. Si G possède un sous-groupe G -minimal non abélien A , alors A est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple et d'après le Fait 4.4 on a $G = A * C_G(A)^\circ$. Par hypothèse d'induction appliquée à $C_G(A)^\circ$, on conclut. On peut donc supposer que G n'admet pas de sous-groupe G -minimal non abélien.

Comme G est parfait, alors d'après le Lemme 4.30 $\sigma(G)^\circ$ est un $\tilde{U}$ -groupe. Supposons que $\sigma(G)^\circ$ est d'exposant borné. D'après le Fait 4.11 on peut écrire

$$G/\sigma(G)^\circ = H_1/\sigma(G)^\circ * \dots * H_l/\sigma(G)^\circ$$

où $H_i/\sigma(G)^\circ$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple sur un corps $\mathbb{K}_i$. Pour i tel que $\mathbb{K}_i$ est de caractéristique nulle, posons $\sigma_i = \sigma(H_i^{(\infty)})^\circ$. Comme σ_i/σ'_i est abélien, alors $H_i^{(\infty)}/\sigma_i$ agit sur σ_i/σ'_i . Mais $H_i^{(\infty)}/\sigma_i$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple sur $\mathbb{K}_i$ et σ_i/σ'_i est d'exposant borné, alors d'après le Lemme 4.33 $H_i^{(\infty)}/\sigma_i$ centralise σ_i/σ'_i . Il s'ensuit que $H_i^{(\infty)}/\sigma'_i$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple sur $\mathbb{K}_i$ et σ_i/σ'_i est fini (Fait 4.5). Comme σ_i est résoluble connexe, on obtient $\sigma_i = \sigma'_i = 1$. On en déduit que $H_i^{(\infty)}$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple. En particulier, $H_i^{(\infty)}$ est un sous-groupe G -minimal non abélien de G , ce qui est impossible. On en conclut que tous les corps $\mathbb{K}_i$ sont de caractéristique non nulle. En posant $G = B$, on obtient le résultat ; ce qui contredit le choix de G . Ainsi $\sigma(G)^\circ$ n'est pas d'exposant borné. D'après le Fait 2.34, on en déduit qu'il existe un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro tel que $U = U_{\mathbb{K}}(\sigma(G)^\circ)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène non trivial. Par induction on a

$$G/U = S_1/U * \dots * S_n/U * B/U,$$

avec $S_1/U, \dots, S_n/U$ et B/U correspondant aux groupes $G_1, \dots, G_n$ et B de l'énoncé. En particulier, $S_i^{(\infty)}/\sigma(S_i^{(\infty)}) \cong S_i/\sigma(S_i)$ est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

Soit M/N une section G -minimale de U . Alors d'après le Fait 1.33 le groupe quotient $G/C_G(M/N)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Puisque $\sigma(G)^\circ$ est nilpotent, alors $\sigma(G)^\circ$ est contenu dans $C_G(M/N)$ et $G/C_G(M/N)$ est isomorphe à un produit central de groupes algébriques sur $\mathbb{K}$ d'après le Corollaire 4.7. Par ailleurs, on a

$$B/\sigma(B)^\circ = B_1/\sigma(B)^\circ * \dots * B_m/\sigma(B)^\circ$$

où $B_1/\sigma(B)^\circ, \dots, B_m/\sigma(B)^\circ$ sont isomorphes à des groupes algébriques quasi-simples sur des corps algébriquement clos de caractéristiques non nulles. Aussi, on peut dire que les B_i sont des sous-groupes de $C_G(M/N)$ (Lemme 4.33). Comme $\sigma(B)^\circ$ est un $\tilde{U}$ -groupe et $\sigma(B)^\circ/U$ est d'exposant borné, on a $\sigma(B)^\circ = U \times B_0$ où B_0 est un sous-groupe d'exposant borné. Posons $\overline{B}_i = B_i/B_0$ et $\overline{U} = UB_0/B_0$. Comme $\overline{B}_i/\overline{U} \cong^{def} B_i/\sigma(B)^\circ$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple, alors d'après le Lemme 4.29, le groupe $\overline{B}_i^{(\infty)}$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple et $\overline{B}_i^{(\infty)}$ centralise $\overline{U}$, puisque B_i centralise les sections G -minimales de U . On obtient $B/B_0 = (\overline{B}_1^{(\infty)} * \dots * \overline{B}_m^{(\infty)}) \times \overline{U}$ car $\overline{U}$ sans torsion. Il s'ensuit que $(B_1^{(\infty)} \dots B_m^{(\infty)} B_0) \cap U$ est un sous-groupe de U d'exposant borné, donc il est trivial et on a

$$B = (B_1^{(\infty)} \dots B_m^{(\infty)} B_0) \times U = D \times U$$

avec $D = B_1^{(\infty)} \dots B_m^{(\infty)} B_0$.

Pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $[S_i, D] \leq U$; donc pour $g \in S_i$ et $u, v \in D$, on a

$$[uv, g] = [u, g]^v [v, g] = [u, g][v, g]$$

car D centralise U . Alors pour $g \in S_i$, l'application

$$\begin{array}{ccc} \gamma_g & : & D \rightarrow [S_i, D] \\ & & u \mapsto [u, g] \end{array},$$

est un morphisme définissable surjectif. En particulier $D/\ker(\gamma_g)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, donc sans torsion. Si $D \neq \ker(\gamma_g)$, alors on a $U_{\mathbb{K}}(D) \neq 1$ par Pull-back sur les $U_{\mathbb{K}}$ -groupes (Fait 2.15). En particulier $D \cap U \neq 1$, ce qui est impossible. Donc on a $D = \ker(\gamma_g)$ et $[S_i, D] = 1$. Comme G est un groupe parfait, on obtient $G = (S_1^{(\infty)} \dots S_n^{(\infty)}) * D$. Considérons $\mathbb{L}_i$ un corps tel que $S_i/\sigma(S_i)^\circ$ est isomorphe à un groupe algébrique sur $\mathbb{L}_i$. D'après la Proposition 4.34, $\sigma(S_i^{(\infty)})^\circ$ est un $U_{\mathbb{L}_i}$ -groupe homogène. Quitte à assembler les S_i pour lesquels les quotients $S_i/\sigma(S_i)^\circ$ sont isomorphes à des groupes algébriques sur un même corps, on peut supposer $\mathbb{L}_i \not\cong \mathbb{L}_j$ pour tout $i \neq j$. En particulier $\sigma(S_i^{(\infty)})^\circ \cap \sigma(S_j^{(\infty)})^\circ = 1$ pour tout $i \neq j$ (Fait 2.27), et on a

$$[S_i^{(\infty)}, S_j^{(\infty)}] \leq U \cap S_i^{(\infty)} \cap S_j^{(\infty)} \leq \sigma(S_i^{(\infty)})^\circ \cap \sigma(S_j^{(\infty)})^\circ = 1.$$

De plus

$$(S_i^{(\infty)} \cap S_j^{(\infty)})^\circ \leq (S_i \cap S_j)^\circ \cap S_i^{(\infty)} \cap S_j^{(\infty)} \leq U \cap S_i^{(\infty)} \cap S_j^{(\infty)} = 1,$$

et

$$(S_i^{(\infty)} \cap D)^\circ \leq (S_i \cap D)^\circ \leq U \cap D = 1.$$

On conclut que $G = S_1^{(\infty)} * \dots * S_n^{(\infty)} * D$ avec intersections finis, et $D/\sigma(D)$ est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos de caractéristiques non nulles. $\square$

4.3 K -groupes définissablement linéaires

L'étude faite dans cette section vient compléter celle effectuée dans le Chapitre 3. En effet, les K -groupes de rang de Morley fini ont la particularité de ne pas admettre de mauvaises sections définissables, et de ce fait évitent certaines limitations liées à l'existence de ces dernières. Cette particularité va donc nous permettre ici d'obtenir avec les K -groupes plus que ce qui est fait dans le chapitre précédent ; notre principal résultat dans ce sens est le Théorème 4.47 qui peut être vu comme un analogue du Théorème de Levi. Ce théorème permettra en outre d'établir d'autres propriétés algébriques bien connues, aux K -groupes connexes définissablement linéaires sur des corps de caractéristique nulle (Corollaires 4.48 et 4.49).

Lemme 4.36. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini définissablement affine sur des corps interprétables de caractéristique zéro. Alors le groupe définissablement linéaire U donné par la Proposition 3.44 est un K -groupe.*

PREUVE – Rappelons que la Proposition 3.44 donne $G \cong^{def} U/V$, où U est définissablement linéaire et V est central dans U . Soit A/B une section définissable simple de U . Si A est un sous-groupe de V , alors $A = B$. On peut donc supposer que A n'est pas un sous-groupe de V . Alors $(A \cap V)B/B$ est un sous-groupe normal propre de A/B . Ainsi $A \cap V$ est contenu dans B car A/B est simple, et alors on a $AV/BV \cong^{def} A/B$. Mais AV/BV est isomorphe à une section définissable simple de G et G est un K -groupe, alors AV/BV est isomorphe à un groupe algébrique ; on conclut. $\square$

Proposition 4.37. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini définissablement affine sur des corps interprétables de caractéristique zéro. Supposons que G possède un U_K -sous-groupe homogène normal H , pour K un corps interprétable de caractéristique nulle et tel que G/H soit définissablement linéaire sur K . Alors $p_i(U)$ est abélien pour tout i tel que $K_i \not\cong K$, où K_i, p_i et U sont comme dans la Proposition 3.44.*

PREUVE – Soient V le sous-groupe de U donné par la Proposition 3.44, et B un sous-groupe de Borel de U . D'après le Lemme 3.28 $p_i(B)$ est un sous-groupe de Borel de $p_i(U)$. Comme p_i est un morphisme, on a $p_i(B') = p_i(B)'$ et comme $p_i(B)$ est un sous-groupe résoluble connexe, alors $p_i(B)'$ est un U_{K_i} -groupe homogène. Il s'ensuit que $B'/B' \cap \text{Ker}(p_i)$ est un U_{K_i} -groupe homogène.

Soit E/V l'image de H dans U/V . Alors BE/E est un sous-groupe de Borel de $U/E \cong^{def} G/H$, et BE/E est résoluble connexe et définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$; donc $B'E/E$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. Mais $E/V \cong^{def} H$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, alors $B'V/V$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène (pull-back). On en déduit que $B'V/(B' \cap \ker(p_i))V$ est à la fois un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène et un $U_{\mathbb{K}_i}$ -groupe homogène. Par conséquent, si $\mathbb{K} \not\cong \mathbb{K}_i$, alors d'après le Fait 2.27 le groupe $B'V/(B' \cap \ker(p_i))V$ est trivial et on a $B' = (B' \cap \ker(p_i))(V \cap B')$. D'après la Proposition 3.44(iv), l'intersection $B' \cap V$ est fini et comme B' est connexe on a $B' = B' \cap \ker(p_i)$. Ainsi on a $p_i(B') = p_i(B)' = 1$ et $p_i(B)$ est abélien. Comme U est un K -groupe (Lemme 4.36), il vient d'après le Lemme 4.12 que $p_i(U)$ est abélien pour tout i tel que $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}$. $\square$

Corollaire 4.38. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini définissablement affine sur des corps interprétables de caractéristique zéro. Supposons que G possède un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe homogène H tel que G/H soit définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Alors les groupes quotients $G/\sigma(G)$, $G/F(G)$ et $G/Z(G)$ sont définissablement linéaires sur $\mathbb{K}$.*

PREUVE – Il suffit de le montrer pour $G/Z(G)$ et cela reste vrai pour les autres groupes quotients d'après le Fait 3.11 et le Lemme 3.32. Reprenons les notations de la Proposition 3.44; on a $G \cong^{def} U/V$ où $U \leq L_1 \times \dots \times L_n$, $V \leq Z(U)$ et $L_i = \overline{p_i(U)}$ est un groupe algébrique linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}_i$ de caractéristique zéro tels que $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}_j$ dès que $i \neq j$. D'après la Proposition 4.37 L_i est abélien pour tout i tel que $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}$; donc si G n'est pas abélien, $G/Z(G)$ est définissablement isomorphe à un sous-groupe de $L_k/Z(L_k)$ pour un certain k tel que $\mathbb{K}_k \cong^{def} \mathbb{K}$, et $G/Z(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. $\square$

Lemme 4.39. – *Soient H un K -groupe connexe de rang de Morley fini et $\mathbb{F}$ un corps interprétable de caractéristique zéro tels que H est un sous-groupe définissable de $GL_n(\mathbb{K})$ pour un entier positif n . Si H est formé d'éléments semi-simples, alors H est contenu dans un tore.*

PREUVE – Si H est résoluble alors on conclut d'après le Fait 1.79. On peut donc supposer H non résoluble. D'après le Fait 3.11 $H/\sigma(H)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{F}$. Comme $H/\sigma(H)$ est isomorphe à un produit direct de groupe algébriques simples, alors c'est un $U_{\mathbb{F}}$ -group engendrés par des unipotents. Comme H est formé d'éléments semi-simples, on en déduit que $H/\sigma(H) = 1$, ce qui est impossible. $\square$

Lemme 4.40. – *Soit H un K -groupe connexe de rang de Morley fini. Si H est un sous-groupe définissable de $GL_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K}$ est un corps interprétable de caractéristique nulle, alors H' est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}$; en particulier H' est fermé.*

PREUVE – Soit $\overline{H}$ la clôture de Zariski de H relativement à $\mathbb{K}$. Alors $\overline{H} = U \rtimes R$ où U est le radical unipotent de $\overline{H}$ et R un sous-groupe réductif. En particulier

U est un U_K -groupe homogène et on a :

$$R = S_1 * \dots * S_m * T$$

où $S_1, \dots, S_m$ sont des groupes algébriques quasi-simples et T un tore. On a

$$R' = S_1 * \dots * S_m$$

et R' est un U_K -groupe car chaque S_i est engendré par ses éléments unipotents.

Posons $R_H = UH \cap R$. Alors on a $UH = U \rtimes R_H$, $HU/U \cong R_H$ et $\overline{R_H} = R$. D'après le Corollaire 3.40, $U_K(R_H)$ est sous-groupe fermé normal de R_H , il est donc normalisé par on a R . On en déduit que $U_K(R_H)$ est un produit de certains sous-groupes S_i . Le groupe quotient $R_H/U_K(R_H)$ étant sans unipotents, alors il est formé d'éléments semi-simples et d'après le Lemme 4.39, $R/U_K(R_H)$ est un tore. Ainsi on obtient l'égalité $U_K(R_H) = S_1 * \dots * S_m$, et alors on a $R'_H = R' = U_K(R_H)$. Donc R'_H est un U_K -groupe, de même $H'U/U$ est un U_K -groupe. Enfin, comme U est un U_K -groupe homogène, on conclut d'après le Fait 2.15 que H' est un U_K -groupe. De plus, comme H' est engendré par des éléments unipotents, alors H' est fermé. $\square$

Lemme 4.41. – *Soit H un K -groupe connexe algébrique sur un corps $\mathbb{F}$ de caractéristique zéro et engendré par les unipotents. Alors tout sous-groupe définissable connexe normal N de H est engendré par des unipotents. En particulier N est fermé.*

PREUVE – Soit N_0 le sous-groupe de N engendré par les unipotents. Alors N_0 est un sous-groupe fermé normal de H et H/N_0 est algébrique linéaire sur $\mathbb{F}$ (Fait 1.71). En particulier, N/N_0 est formé d'éléments semi-simples. Comme N est connexe, alors d'après le Lemme 4.39, le groupe N/N_0 est contenu dans le tore normal $\overline{N}/N_0$ de H/N_0 . De plus, comme H est connexe, alors d'après la rigidité des tores on a $N/N_0 \leq \overline{N}/N_0 \leq Z(H/N_0)_s$. Posons $T/N_0 = Z(H/N_0)_s^\circ$. Comme H est engendré par les unipotents, alors H/H' est engendré par les unipotents et H/H' est un groupe abélien unipotent. Il s'ensuit que $H/H'N_0$ est unipotent. Mais $H/H'N_0 \cong^{def} (H/N_0)/(H'N_0/N_0)$, alors comme T/N_0 est formé d'éléments semi-simples, son image dans $H/H'N_0$ est triviale et on a $T/N_0 \leq H'N_0/N_0$. D'après la Remarque 1.91 T/N_0 est un groupe connexe fini. On en déduit que $T = N_0$ et $N = N_0$. $\square$

Lemme 4.42. – *Dans une structure de rang de Morley fini, on considère $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ des corps interprétables de caractéristique nulle et tels que $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}_j$ pour tout $i \neq j$, des groupes algébriques $L_1, \dots, L_n$ linéaires sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement, et H un sous-groupe définissable et connexe de $L_1 \times \dots \times L_n$. Si pour tout i la projection $p_i(H)$ de H sur L_i parallèlement au produit direct des L_j pour $j \neq i$, est engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}_i$, alors*

$$H = p_1(H) \times \dots \times p_n(H).$$

PREUVE – Il suffit de montrer qu'on a $p_i(H) \leq H$ pour tout i . Procédons par l'absurde. Soit i tel qu'on ait $p_i(H) \not\leq H$ avec $rk(\mathbb{K}_i)$ maximal pour cette condition. Soit $u \in p_i(H) \setminus \{1\}$ un élément unipotent; alors $d(u) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$ d'après le Fait 1.29. Soit $x \in H$ tel que $u = p_i(x)$, on a

$$d(u) \cong^{def} d(x)/(ker(p_i) \cap d(x)) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+.$$

D'après le Fait 2.7, il existe un indécomposable B de $d(x)$ tel que

$$d(x) = B(ker(p_i) \cap d(x)) \quad \text{et} \quad B/(B \cap ker(p_i)) \simeq (\mathbb{K}_i)_+$$

En particulier, $J(B) = B \cap ker(p_i)$ et il existe $y \in B$ tel que $p_i(x) = p_i(y)$.

Pour tout $j \neq i$ tel que $rk(\mathbb{K}_j) \leq rk(\mathbb{K}_i)$, montrons par l'absurde que $p_j(B)$ est trivial. Posons $B_j = p_j(B)$. Comme B est un groupe indécomposable abélien, alors B_j est un sous-groupe abélien de L_j et d'après la décomposition de Mustafin (Fait 3.37(iv)), on a $B_j = (B_j)_u \times (B_j)_s$. Par indécomposabilité de B_j soit $B_j = (B_j)_u$, soit $B_j = (B_j)_s$. Si $B_j = (B_j)_u$, alors on a $B_j \cong^{def} (\mathbb{K}_j)_+$, et on en déduit que $J(B) = B \cap ker(p_j)$, et ainsi $(\mathbb{K}_j)_+ \cong^{def} B/J(B) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$; ce qui est impossible. Alors $B_j = (B_j)_s$ et on a $B_j \hookrightarrow (\mathbb{K}_j^*)^r$ pour un certain entier r . Dans ce cas, on a un morphisme définissable non trivial γ de B dans $\mathbb{K}_j^*$. En particulier $ker(\gamma)^\circ$ est un sous-groupe de $J(B)$, et comme $B/J(B) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$ est sans torsion, on a $ker(\gamma) \leq J(B)$. Il vient dès lors que $rk(B/J(B)) \leq rk(B/ker(\gamma))$. Mais $B/ker(\gamma)$ est définissablement isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{K}_j^*$, alors on a

$$rk(\mathbb{K}_i) = rk(B/J(B)) \leq rk(B/ker(\gamma)) \leq rk(\mathbb{K}_j)$$

Comme $rk(\mathbb{K}_j) \leq rk(\mathbb{K}_i)$, on obtient l'égalité

$$rk(B/J(B)) = rk(B/ker(\gamma)) = rk(\mathbb{K}_i) = rk(\mathbb{K}_j)$$

d'où $ker(\gamma) = J(B)$ et on a

$$B/ker(\gamma) = B/J(B) \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+ \cong^{def} \mathbb{K}_j^*.$$

Ce qui est impossible car $\mathbb{K}_j^*$ a de la torsion mais pas $(\mathbb{K}_i)_+$. On conclut que $B_j = p_j(B) = 1$ pour tout $j \neq i$ tel que $rk(\mathbb{K}_j) \leq rk(\mathbb{K}_i)$.

Comme $y \in H \leq p_1(H) \times \dots \times p_n(H)$, on a $y = p_i(x)p_{j_1}(y) \dots p_{j_m}(y)$, avec $j_1, \dots, j_m$ tels que $rk(\mathbb{K}_{j_l}) > rk(\mathbb{K}_i)$ pour tout $l = 1, \dots, m$. Comme $p_{j_l}(y) \in H$ pour tout $l = 1, \dots, m$ et $y \in H$, on a $u = p_i(x) \in H$ et on en déduit que tous les éléments unipotents de $p_i(H)$ sont contenus dans H . Comme $p_i(H)$ est engendré par les unipotents, il vient $p_i(H)$ est contenu dans H ; ce qui contredit le choix de i . $\square$

Nous verrons plus tard que si en plus H est K -groupe, les sous-groupes $p_i(H)$ sont définissablement caractéristiques (Corollaire 4.46).

Corollaire 4.43. – Dans une structure de rang de Morley fini, on considère $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ des corps interprétables de caractéristique zéro tels que $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{K}_j$ pour tout $i \neq j$, des groupes algébriques $L_1, \dots, L_n$ linéaires sur $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ respectivement, et H un K -sous-groupe définissable connexe de $L_1 \times \dots \times L_n$. Alors $H' = (H' \cap L_1) \times \dots (H' \cap L_n)$.

PREUVE – Pour tout $i = 1, \dots, n$, soit p_i la projection de H sur L_i parallèlement au produit direct des L_j pour $j \neq i$. D'après le Lemme 4.40, $p_i(H)'$ est engendré par des unipotent sur $\mathbb{K}_i$. Comme $p_i(H)' = p_i(H')$, on en déduit d'après le Lemme 4.42 que $H' = p_1(H') \times \dots \times p_n(H')$. En particulier $p_i(H') \leq H' \cap L_i$, et on conclut sur la forme voulue de H' . $\square$

Corollaire 4.44. – Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur $\mathbb{K}_1$ (resp. sur $\mathbb{K}_2$), pour $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ deux corps interprétables de caractéristique nulle et tels que $\mathbb{K}_1 \not\cong \mathbb{K}_2$. Alors G est abélien.

PREUVE – Comme G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$), alors il existe une injection α_1 (resp. α_2) de G sur un groupe L_1 (resp. L_2) linéaire sur $\mathbb{K}_1$ (resp. $\mathbb{K}_2$). Considérons l'injection définissable

$$\begin{aligned} \alpha &: G \rightarrow L_1 \times L_2 \\ h &\mapsto (\alpha_1(h), \alpha_2(h)) \end{aligned}$$

Soit $x \in \alpha(G) \cap L_1$. Alors $x = (\alpha_1(h), \alpha_2(h))$ avec $\alpha_2(h) = 1$. Comme α_2 est injectif, on a $h = 1$. Donc $x = 1$ et $\alpha(G) \cap L_1 = 1$. De même, on montre que $\alpha(G) \cap L_2 = 1$. D'après le Corollaire 4.43, on a

$$\alpha(G)' = (\alpha(G)' \cap L_1) \times (\alpha(G)' \cap L_2) \leq (\alpha(G) \cap L_1) \times (\alpha(G) \cap L_2) = 1.$$

Donc G est abélien. $\square$

Corollaire 4.45. – Soient H un K -groupe connexe de rang de Morley fini, et $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ deux corps interprétables de caractéristique zéro non isomorphes. Si H est définissablement isomorphe à un groupe algébrique linéaire engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}_1$, et définissablement isomorphe à un autre groupe algébrique linéaire engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}_2$, alors $H = 1$.

PREUVE – En reprenant les notations de la preuve du Corollaire 4.44, les injections $\alpha_1(H)$ et $\alpha_2(H)$ sont engendrées par les unipotents. D'après le Lemme 4.42, on a $H \cong (\alpha(H) \cap L_1) \times (\alpha(H) \cap L_2) = 1$. $\square$

Corollaire 4.46. – Sous les hypothèses du Lemme 4.42, supposons de plus que H est un K -groupe. Alors les sous-groupes $p_i(H)$ sont définissablement caractéristiques dans H .

PREUVE – Reprenons les notations du Lemme 4.42. Comme les $p_i(H)$ sont engendrés par les unipotents, ils sont fermés et on peut supposer $H = L_1 \times \dots \times L_n$ et L_i engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}_i$. Soit β un automorphisme définissable de H .

Si $\beta(L_i) \neq L_i$, alors il existe $j \neq i$ tel que $p_j(\beta(L_i)) \neq 1$. Posons $P_j = p_j(\beta(L_i))$. Comme L_i est normal dans H , alors P_j est normal dans L_j et d'après le Lemme 4.41 P_j est un sous-groupe fermé de L_j engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}_j$. Comme $P_j \cong^{def} L_i/S$ pour S un sous-groupe définissable normal de L_i , alors d'après le Lemme 4.41 S° est fermé, donc S aussi, d'où L_i/S est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}_i$ et engendré par les unipotents. Donc $P_j = 1$ d'après le Corollaire 4.45, ce qui est absurde. Ainsi on a $\beta(L_i) = L_i$. $\square$

Le Théorème 4.47 donne pour les K -groupes définissablement linéaires sur un corps de caractéristique zéro, un analogue à la décomposition de Levi, mentionnée par le Fait 1.90.

Théorème 4.47. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini, définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Soit U le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G . Alors U a un complémentaire dans G , et deux complémentaires de U sont conjugués.*

PREUVE – On procède par induction sur $rk(U)$. On peut donc supposer $U \neq 1$.

Soit A un sous-groupe G -minimal de U . Alors U/A est $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G/A . Si U_0/A est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G/A , on a $U \leq U_0$ et U_0 est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal de G . Comme U_0/A est nilpotent et A est abélien, alors U_0 est résoluble. Si S est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de U_0 , alors d'après le Fait 2.21, SA/A est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe de Sylow de U_0/A , donc on obtient $U_0 = AS$. Mais U est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe nilpotent normal de U_0 , donc $A \leq U \leq S$ et on a $U_0 = S$. Donc U_0 est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G . Par maximalité de U on a $U_0 = U$ et on en déduit que U/A est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G/A . Par hypothèse d'induction, on obtient $G/A = U/A \rtimes R/A$, où R/A est un complémentaire de U/A dans G/A , et deux complémentaires de U/A sont conjugués.

a) Si $A < U$, on a $R < G$. Soit A_0/A est un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de R/A , alors $U/A \rtimes A_0/A$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe résoluble. Or U/A et A_0/A sont des $U_{\mathbb{K}}$ -groupes nilpotents, alors par conjugaison des $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupes de Sylow dans UA_0/A et comme U/A est normal dans UA_0/A , le quotient UA_0/A est nilpotent. Par maximalité de U/A , il vient que $UA_0/A = U/A$, d'où A_0 est un sous-groupe de U . Comme $U \cap R$ est contenu dans A , on a $A_0 = A$ et A est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de R . Par hypothèse d'induction, A a un complémentaire Q dans R et on a $G = U \rtimes Q$. Donc Q est aussi un complémentaire de U dans H . Si Q_1 et Q_2 sont deux complémentaires de U dans G , alors Q_1A/A et Q_2A/A sont deux complémentaires de U/A dans G/A . Donc Q_1A/A et Q_2A/A sont conjugués à R/A et on peut supposer $Q_1A = Q_2A = R$. Comme $Q_1 \cap A = Q_2 \cap A = 1$, alors Q_1 et Q_2 sont conjugués dans R , ils le sont donc aussi dans G .

b) Supposons $A = U$. En particulier U est abélien. Supposons ici que G est un sous-groupe définissable d'un groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{K}$. Soit G^+ le groupe engendré par les éléments unipotents de G . Alors d'après le Fait 3.10, G^+ est un sous-groupe fermé normal de G et G/G^+ est formé d'éléments semi-simples.

Comme G est un K -groupe connexe, alors G/G^+ est abélien et contenu dans un tore (Lemme 4.39). Soit $R_u(G^+)$ le radical unipotent de G^+ ; on a $U = R_u(G^+)$, et d'après le Fait 1.90 on a $G^+ = U \rtimes H$ où H est un complémentaire de U dans G^+ , unique à conjugaison près. En appliquant l'argument de Frattini, il vient $G = G^+ N_G(H) = U N_G(H)^\circ$.

- Si $H = 1$, alors $G^+ = U$ et U est abélien. Comme G/U est abélien, alors G est résoluble. De plus G/U est contenu dans un tore algébrique T_1/U de $\overline{G}/U$, où $\overline{G}$ est la clôture de Zariski de G , et on a $T_1 = U \rtimes T$ où T est un tore maximal de T_1 . On obtient $G = U \rtimes (G \cap T)$ et $G \cap T$ est un complémentaire de U dans G . Si H_1 et H_2 sont deux complémentaires de U dans G , alors H_1 et H_2 sont formés d'éléments semi-simples car U contient tous les éléments unipotents de T_1 . Donc d'après le Lemme 1.79, les groupes H_1 et H_2 sont contenus dans des tores maximaux de T_1 . Mais les tores maximaux de T_1 sont conjugués par les éléments de U , et comme T est un tore maximal de T_1 , on a $H_1 = G \cap T^{u_1} = (G \cap T)^{u_1}$ et $H_2 = G \cap T^{u_2} = (G \cap T)^{u_2}$ avec $u_1, u_2 \in U$. Alors H_1 et H_2 sont conjugués dans G .

- Si $1 \neq H \triangleleft G$, alors G/H est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ puisque H est un sous-groupe fermé de G^+ . Soit V/H le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G/H . Alors d'après la Proposition 3.40, V/H est engendré par des éléments unipotents et on a $V \leq G^+ = U \rtimes H$. Mais UH/H est un sous-groupe de V/H , alors on a $V = G^+ = U \rtimes H$. L'hypothèse d'induction donne $G/H = G^+/H \rtimes C/H = UH/H \rtimes C/H$ où C/H est un complémentaire de G^+/H , et les complémentaires de G^+/H dans G/H sont conjugués. En particulier on a $G = UC$, et comme $U \cap C = U \cap H = 1$, on a $G = U \rtimes C$ et C est un complémentaire de U dans G . Si C_1 et C_2 sont deux complémentaires de U dans G , alors $C_1 \cap G^+$ et $C_2 \cap G^+$ sont deux complémentaires de U dans G^+ , et par conjugaison de ces derniers, on peut supposer $C_1 \cap G^+ = H = C_2 \cap G^+$. Alors C_1/H et C_2/H sont deux complémentaires de G^+/H dans G/H , ils sont donc conjugués. On conclut que C_1 et C_2 sont conjugués.

- Si maintenant H est un sous-groupe non trivial et non normal de G , alors $G = U \rtimes N_G(H)^\circ$ et $N_G(H)^\circ$ est un complémentaire de U dans G . Si R_1 et R_2 sont deux complémentaires de U dans G , alors $R_1 \cap G^+$ et $R_2 \cap G^+$ sont deux complémentaires de U dans G^+ . Par conjugaison des complémentaires de U dans G^+ , on peut supposer $R_1 \cap G^+ = H = R_2 \cap G^+$ et on a $R_1 = N_G(H)^\circ = R_2$. $\square$

Le Corollaire 4.48 donne une version d'une propriété bien connue des groupes algébriques (Fait 1.77), aux groupes connexes résolubles de rang de Morley fini définissablement linéaires sur un corps interprétable de caractéristique nulle.

Corollaire 4.48. – *Soient $\mathbb{K}$ un corps de rang de Morley fini de caractéristique zéro, et G un sous-groupe définissable connexe et résoluble de $GL_n(\mathbb{K})$ pour un entier positif n . Alors $G = U \rtimes T$, où U est le plus grand sous-groupe unipotent de G , et T un sous-groupe connexe abélien formé d'éléments semi-simples et unique à conjugaison près.*

PREUVE – D'après le Théorème 4.47, on a $G = U \rtimes T$ où U est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G et T un sous-groupe connexe de G unique à conjugaison près. En particulier U est le plus grand sous-groupe normal unipotent de G (Proposition 3.40), et T n'admet pas de $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal. Soit $\mathcal{G}$ la clôture de Zariski de G . Alors $\mathcal{G}$ est un groupe algébrique résoluble, et connexe d'après le Corollaire 3.19. En utilisant le Fait 1.77, on écrit $\mathcal{G} = \mathcal{G}_u \rtimes S$ où S est un tore maximal de $\mathcal{G}$. Il s'ensuit que $U = \mathcal{G}_u \cap G$ et U est l'ensemble des éléments unipotents de G . On en déduit que U est le plus grand sous-groupe unipotent de G et T est formé d'éléments semi-simples. Le Fait 1.79 permet de conclure que T est abélien. $\square$

Corollaire 4.49. – *Soient R un K -groupe connexe de rang de Morley fini et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro tels que R est un sous-groupe définissable de $GL_n(\mathbb{K})$. Si R ne possède pas de $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent non trivial, alors on a*

$$R = S_1 * \dots * S_n * \sigma(R)^\circ$$

où $S_1, \dots, S_n$ sont des groupes algébriques quasi-simples sur $\mathbb{K}$, et $\sigma(R)^\circ$ est abélien et formé d'éléments semi-simples.

PREUVE – Si R est résoluble, alors on conclut d'après le Corollaire 4.48. On peut donc supposer R non résoluble. D'après le Fait 4.11 on a

$$R/\sigma(R)^\circ = S_1/\sigma(R)^\circ * \dots * S_n/\sigma(R)^\circ$$

avec $S_1/\sigma(R)^\circ, \dots, S_n/\sigma(R)^\circ$ isomorphes à des groupes algébriques quasi-simples. En particulier S_i est connexe et on a $S_i^{(\infty)}/(S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ) \cong S_i/\sigma(R)^\circ$; de plus $R = S_1^{(\infty)} \dots S_n^{(\infty)} \sigma(R)^\circ$. D'après le Lemme 4.42, le groupe $(S_i^{(\infty)})'$ est engendré par des unipotents, et comme $[S_i^{(\infty)}, S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ]$ est un sous-groupe définissable connexe normal de $(S_i^{(\infty)})'$, alors d'après le Lemme 4.41, il est aussi engendré par des unipotents. Mais d'après le Corollaire 4.48, le groupe $\sigma(R)^\circ$ est abélien et formé d'éléments semi-simples, alors $[S_i^{(\infty)}, S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ]$ qui est un sous-groupe de $\sigma(R)^\circ$, est unipotent et formé d'éléments semi-simples; donc $[S_i^{(\infty)}, S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ]$ est trivial. D'après le Fait 4.5, il vient que $S_i^{(\infty)}$ est algébrique quasi-simple et $S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ$ est fini. De plus, le Fait 4.6 précise que $S_i^{(\infty)}$ est algébrique sur $\mathbb{K}$. Enfin, comme on a $[S_i^{(\infty)}, S_j^{(\infty)}] \leq S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ$ et $S_i^{(\infty)} \cap \sigma(R)^\circ$ est fini, alors on a $[S_i^{(\infty)}, S_j^{(\infty)}]$ est trivial par connexité de $S_i^{(\infty)}$. De même $[S_i^{(\infty)}, \sigma(R)^\circ] = 1$; on en déduit la décomposition $R = S_1^{(\infty)} * \dots * S_n^{(\infty)} * \sigma(R)^\circ$. $\square$

Si G est un K -groupe connexe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, il est intéressant de se poser la question de savoir si $\tilde{U}(G)$ est égal au sous-groupe U donné par le Théorème 4.47. On sait que U est un sous-groupe de $\tilde{U}(G)$ et d'après la décomposition de Mustafin on a $\tilde{U}(G) = U \times T$ où T est un sous-groupe définissable connexe abélien. Se poser cette

question revient à se demander si T est trivial. Cela n'est possible que si tous les corps de caractéristique zéro interprétés par G sont définissablement isomorphes à K ; ce que l'on ne saurait dire en toute généralité.

Proposition 4.50. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini définissablement linéaire sur des corps interprétables de caractéristique zéro. Alors on a les possibilités suivantes :*

- (a) *soit G est nilpotent ;*
- (b) *soit $G = F(G)R$ pour R un sous-groupe définissable connexe propre ;*
- (c) *soit $F(G)$ est fini.*

PREUVE – PREUVE – On procède par induction sur $rk(G)$. On peut supposer G non nilpotent et $F(G)$ infini. Montrons que $G = F(G)R$ pour R un sous-groupe définissable connexe propre.

Si G est résoluble, alors $G = F(G)C$ où C est un sous-groupe de Carter de G (Fait 1.55). Donc en prenant $R = C$ c'est fini. On peut donc supposer que G est non résoluble.

Si $F(G)^\circ$ est un sous-groupe propre de $\sigma(G)^\circ$, alors $\sigma(G)^\circ = F(G)^\circ C_\sigma$, où C_σ est un sous-groupe de Carter de $\sigma(G)$. Ensuite, en utilisant l'argument de Frattini, on a $G = N_G(C_\sigma)\sigma(G)^\circ = F(G)N_G(C_\sigma)^\circ$ et $N_G(C_\sigma)^\circ$ est un sous-groupe propre de G . Quitte à prendre $R = N_G(C_\sigma)^\circ$, on a le résultat. On peut donc supposer $F(G)^\circ = \sigma(G)^\circ$. D'après le Fait 4.11, on a

$$G/F(G)^\circ = G_1/F(G)^\circ * \dots * G_m/F(G)^\circ,$$

où $G_i/F(G)^\circ$, pour $i = 1, \dots, m$, est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple. En particulier, $G_i^{(\infty)}$ est un sous-groupe parfait et connexe de G et

$$G_i/F(G)^\circ = G_i^{(\infty)}F(G)^\circ/F(G)^\circ \cong G_i^{(\infty)}/G_i^{(\infty)} \cap F(G)^\circ.$$

Si $F(G)^\circ = Z(G)^\circ$, alors on a $G_i^{(\infty)} \cap F(G)^\circ \leq Z(G_i^{(\infty)})$ et $G_i^{(\infty)}/Z(G_i^{(\infty)})$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple. D'après le Fait 4.5, il s'ensuit que $G_i^{(\infty)}$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple et $Z(G_i^{(\infty)}) = F(G_i^{(\infty)})$ est fini. Posons $R = G_1^{(\infty)} * \dots * G_m^{(\infty)}$; alors $G = F(G)R$ et R est un groupe définissable connexe. De plus, comme $F(R) = F(G_1^{(\infty)}) * \dots * F(G_m^{(\infty)})$ est fini, alors R est un sous-groupe propre de G . On peut donc supposer que $Z(G)^\circ$ est un sous-groupe propre de $F(G)^\circ$.

Comme G est définissablement linéaire, on peut supposer $G \leq L_1 \times \dots \times L_n$ où L_i est un groupe algébrique linéaire sur un corps de caractéristique nulle. D'après le Lemme 3.31 et le Lemme 4.42, on a

$$[F(G), G] = p_1([F(G), G]) \times \dots \times p_n([F(G), G])$$

et pour $i = 1, \dots, n$, $p_i([F(G), G])$ est un sous-groupe définissablement caractéristique de $[F(G), G]$ (Corollaire 4.46). Comme $[F(G), G] \neq 1$, alors il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $p_i([F(G), G]) \neq 1$. Supposons $p_1([F(G), G]) \neq 1$, et soit A

un sous-groupe G -minimal de $p_1([F(G), G])$. Alors A est un sous-groupe abélien unipotent et L_1/A est algébrique linéaire. Donc G/A se plonge définissablement dans $L_1/A \times L_2 \times \dots \times L_n$ et G/A est définissablement linéaire. Comme G est non résoluble, alors G/A n'est pas nilpotent. Il vient par hypothèse d'induction que soit $F(G/A)$ est fini, soit on a $G/A = F(G/A)R/A$ pour R un sous-groupe définissable connexe propre de G . Posons $F/A = F(G/A)$. Alors F est résoluble et on a

$$F^\circ = \sigma(G)^\circ = F(G)^\circ.$$

Si $G/A = F(G/A)R/A$, alors on a $G = FR = F^\circ R = F(G)R$ et c'est fini. Supposons donc que $F(G/A)$ est fini. En particulier $A = F^\circ = F(G)^\circ = \sigma(G)^\circ$ et $F(G)^\circ$ est G -minimal. Soit B un sous-groupe G -minimal de G distinct de $F(G)^\circ$. Alors d'après le Fait 1.24, B est quasi-simple et d'après le Fait 4.4 on obtient $G = B * C_G(B)^\circ$. Comme $F(G)^\circ = A$ est unipotent, $F(G)^\circ$ est sans torsion et on a $F(G)^\circ \leq C_G(B)^\circ < G$. En particulier on a $F(G)^\circ = F(C_G(B))^\circ$. Il vient par hypothèse d'induction que soit $C_G(B)^\circ$ est nilpotent, soit $C_G(B)^\circ = F(G)R_0$ pour R_0 définissable connexe propre. Si $C_G(B)^\circ$ est nilpotent, alors $C_G(B)^\circ = F(G)^\circ$ et on a $G = B * F(G)$, on conclut en prenant $R = B$. On peut donc supposer $C_G(B)^\circ = F(G)R_0$, et on a $G = F(G)(BR_0)$; il suffit alors de montrer que BR_0 est propre dans G . Si $G = BR_0$, alors on a $C_G(B)^\circ = C_G(B)^\circ \cap (BR_0) = R_0(C_G(B)^\circ \cap B)$, et comme $C_G(B)^\circ \cap B$ est fini, on obtient $C_G(B)^\circ = R_0$; ce qui est impossible. Donc BR_0 est un sous-groupe propre de G , alors quitte à prendre $R = BR_0$, on a le résultat. On peut donc supposer que $A = F(G)^\circ$ est l'unique sous-groupe G -minimal de G .

Comme G est non nilpotent, alors G' est non trivial et d'après le Corollaire 4.43 on a $G' = (G' \cap L_1) \times \dots \times (G' \cap L_n)$ et chaque $G' \cap L_i$ est engendré par les unipotents. Par unicité de A on en déduit que $G' = G' \cap L_1$ et G' est fermé (Fait 3.10). Le Fait 1.90 donne $G' = U \rtimes S$, où $U = R_u(G')$ est le radical unipotent de G' et S un sous-groupe réductif unique à conjugaison près. Comme A est un sous-groupe unipotent de G' , il vient que $A = U = F(G')^\circ$. En appliquant l'argument de Frattini, on obtient

$$G = G' N_G(S)^\circ = F(G) N_G(S)^\circ.$$

Montrons que $N_G(S)^\circ$ est un sous-groupe propre de G . Si $N_G(S)^\circ = G$, alors S est un sous-groupe normal de G et par unicité de A on obtient $S = 1$ et $G' = A$ est abélien. Comme G est non résoluble, ceci n'est pas possible. Donc $N_G(S)^\circ$ est un sous-groupe propre de G et on conclut. $\square$

Proposition 4.51. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini sans sous-groupe infini d'exposant borné. Alors $G/F(G)$ est définissablement linéaire sur des corps interprétables de caractéristique zéro.*

PREUVE – Soit H l'intersection des centralisateurs dans G des sections G -minimales U/V de $F(G)$ telles que $Z(G) \leq V$. En particulier, $F(G)$ est un sous-groupe de H . Montrons que G/H est définissablement linéaire.

Si $F(G) = Z(G)$ alors $G = H$ et on conclut. On peut donc supposer $F(G)$ est différent de $Z(G)$. Alors d'après la Proposition 2.41, $F(G)/Z(G)$ est un $\tilde{U}$ -groupe. Soit U/V une section G -minimale de $F(G)$ telle que $Z(G) \leq V$, alors U/V est en particulier une section connexe de $F(G)$. D'après la Remarque 2.35, la section U/V est un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène, pour $\mathbb{L}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Alors d'après le Fait 3.34, la section U/V est définissablement isomorphe à un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{L}$. Plus précisément, on a $U/V \cong^{def} \mathbb{L}_+^s$, pour un entier $s \geq 1$, car U/V est une section abélienne. Il s'ensuit que $G/C_G(U/V)$ est définissablement linéaire. D'autre part, la condition de chaîne descendante dans les groupes de rang de Morley fini donne $H = \bigcap_i^n C_G(U_i/V_i)$ où les U_i/V_i sont des sections G -minimales de $F(G)$ telles que $Z(G) \leq V_i$. Ainsi, G/H s'injecte définissablement dans le produit $G/C_G(U_1/V_1) \times \dots \times G/C_G(U_n/V_n)$, et comme chaque $G/C_G(U_i/V_i)$ est définissablement linéaire, alors G/H est définissablement linéaire.

Soit R le plus petit sous-groupe normal définissable de G contenant $F(G)$ et tel que G/R est définissablement linéaire. Alors R est en particulier un sous-groupe de H . Supposons que $G/F(G)$ n'est pas définissablement linéaire, alors on a $R \neq F(G)$. Soit $A/F(G)$ un sous-groupe non trivial de $R/F(G)$, G -normal et minimal pour ces conditions. Considérons $(B_i)_{i \geq 1}$, une suite croissante de sous-groupes définissables connexes de $F(G)$ contenant $Z(G)$ et telle que $B_1/Z(G)$ et B_{i+1}/B_i pour tout $i \geq 1$, soient des sections G -minimales de $F(G)$. Comme $F(G)$ est de rang de Morley fini, alors il existe un entier $m \geq 1$ tel que $B_m = F(G)^\circ$.

- Si $A/F(G)$ est une section abélienne, alors A' est un sous-groupe de $F(G)$ et comme G centralise $F(G)/F(G)^\circ$, on a $A^2 \leq F(G)^\circ$. Ainsi, comme A est un sous-groupe de H on a $A^3 \leq B_{m-1}$, et ainsi de suite on obtient $A^{m+2} \leq Z(G)$. Donc A est un sous-groupe normal nilpotent et on a $A = F(G)$; ce qui contredit $A/F(G) \neq 1$.

- Si $A/F(G)$ est une section finie, alors elle est centralisée par G ; donc $A/F(G)$ est abélien et on conclut d'après le point précédent.

- Maintenant on peut supposer que $A/F(G)$ est une section infinie simple donc algébrique car G est un K -groupe. Alors $(G/F(G))/C_{G/F(G)}(A/F(G))$ est définissablement linéaire et on a $R/F(G) \leq C_{G/F(G)}(A/F(G))$. Ce qui implique $A/F(G)$ est une section abélienne car incluse dans $R/F(G)$. Cette contradiction finit la preuve. $\square$

Proposition 4.52. – *Soient G un K -groupe connexe de rang de Morley fini et F un sous-groupe fini normal de G . Si G/F est définissablement linéaire sur un corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, alors G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.*

PREUVE – On procède par induction sur $rk(G)$. On peut supposer F , le plus petit sous-groupe définissable normal de G tel que G/F soit définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Comme F est fini et G est connexe, alors F est central dans G .

Montrons que F est un sous-groupe de $\sigma(G)^\circ$. D'après le Fait 4.11, on a

$$G/\sigma(G)^\circ \cong G_1 * \dots * G_n$$

pour $G_1, \dots, G_n$ des groupes algébriques quasi-simples sur des corps algébriquement clos $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$. Comme $\sigma(G/F) = \sigma(G)/F$, alors $G/\sigma(G) \cong (G/F)/\sigma(G/F)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.11). Or $G/\sigma(G)$ est isomorphe au produit direct $G_1/Z(G_1) \times \dots \times G_n/Z(G_n)$, donc $G_i/Z(G_i)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Mais $G_i/Z(G_i)$ est un groupe algébrique simple sur $\mathbb{K}_i$, alors on a $\mathbb{K} \cong^{def} \mathbb{K}_i$ d'après le Lemme 4.16. Il s'ensuit que $G/\sigma(G)^\circ \cong G_1 * \dots * G_n$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Par minimalité de F , on en déduit que F est un sous-groupe de $\sigma(G)^\circ$.

D'après le Théorème 4.47, écrivons $G/F = U/F \rtimes R/F$ où U/F est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G/F . On a $U = U^\circ \times F$ et $U^\circ \cong^{def} U/F$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$. Aussi, on a $G = UR = U^\circ R$, et comme $U^\circ \cap R$ est un sous-groupe de $U \cap R = F$ fini, alors $U^\circ \cap R = 1$ car U° est sans torsion, et on obtient $G = U^\circ \rtimes R$. Si $U^\circ \neq 1$, alors l'hypothèse d'induction s'applique à R , et $R \cong^{def} G/U^\circ$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Par minimalité de F , on a $F \leq U^\circ$, et comme U° est sans torsion, on en déduit que $F = 1$ et G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On peut donc supposer $U^\circ = 1$. On va supposer de plus que G/F est un sous-groupe définissable de $GL_m(\mathbb{K})$. Alors le Corollaire 4.49 donne

$$G/F = S_1/F * \dots * S_n/F * \sigma(G)^\circ/F$$

où $S_1/F, \dots, S_n/F$ sont des groupes algébriques quasi-simples sur $\mathbb{K}$ et $\sigma(G)^\circ/F$ est abélien et formé d'éléments semi-simples. Comme F est central, alors les $S_i^{(\infty)}$ sont algébriques quasi-simples sur $\mathbb{K}$ (Fait 4.5) ; de plus, on a $G = S_1^{(\infty)} * \dots * S_n^{(\infty)} * \sigma(G)^\circ$.

Montrons que $\sigma(G)^\circ$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Comme le groupe $\sigma(G)^\circ/F$ est connexe et formé d'éléments, il est contenu dans un tore et est donc abélien divisible. Par finitude de F , il s'ensuit que $\sigma(G)^\circ$ est aussi abélien et divisible. Posons $r = |F|$; l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \sigma(G)^\circ & \rightarrow & \sigma(G)^\circ \\ a & \mapsto & a^r \end{array},$$

est un morphisme définissable surjectif et de noyau N fini. De plus, F est contenu dans N . Donc $\sigma(G)^\circ/N \cong \sigma(G)^\circ$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Le lemme 3.52 permet de conclure que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. $\square$

4.4 Étude de linéarité des K -groupes

Dans toute cette section, nous travaillons sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.53. – Pour tout un anneau local R de rang de Morley fini tel que le corps interprétable $\mathbb{K} = R/J(R)$ est de caractéristique nulle et $J(R) \cong^{def} \mathbb{K}_+$, si T est un sous-groupe définissable connexe de R^* vérifiant $T \cap (1 + J(R)) = 1$, alors T n'engendre pas R .

Par exemple si on considérons le pur anneau,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} t & a \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid t, a \in \mathbb{L} \right\}$$

où $\mathbb{L}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro ; si (R, T) est structure de rang de Morley fini où T est un sous-groupe de R^* , alors cette hypothèse implique que soit $T \cap (1 + J(R))$ est non trivial, soit $R = J(R) \oplus S$, où S est le sous-anneau de R engendré par T . Dans ce dernier cas, S est isomorphe au corps $\mathbb{K}$ interprété par $R/J(R)$, et il existe un isomorphisme f entre R et l'anneau

$$\left\{ \begin{pmatrix} s & b \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid s, b \in \mathbb{K} \right\}$$

défini de la façon suivante : pour tout $r = x + y \in R$, avec $x \in J(R)$ et $y \in S$, on a

$$f(r) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(y) \\ 0 & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

où β un isomorphisme entre S et $\mathbb{K}$, et α un isomorphisme entre $J(R)$ et $\mathbb{K}_+$.

4.4.1 Groupes résolubles et définissablement linéaires

Lemme 4.54. – Soit $G = V \rtimes T$ un groupe de rang de Morley fini, où V et T sont deux sous-groupes définissables connexes et abéliens. Supposons que V admet un sous-groupe G -minimal A tel que $V/A \cong A \cong \mathbb{K}_+$ définissablement, où $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro tel que $U_{\mathbb{K}}(T) = 1$. Si $[G, V] = V$, alors $V \cong \mathbb{K}_+ \times \mathbb{K}_+$ définissablement.

PREUVE – Quitte à remplacer T par $T/C_T(V)$ on peut supposer $C_T(V) = 1$. D'après le Fait 1.57, on a $G = G^k \rtimes C$, pour $k \in \mathbb{N}$ et C un sous-groupe de Carter de G . Comme T est abélien et $[G, V] = V$, on a $G^k = G' = V$. Il s'ensuit que $C_V(T) = V \cap Z(G) \leq V \cap C = 1$, et alors G est un groupe résoluble de classe 2, connexe et sans centre.

Soit R l'anneau des endomorphismes de V engendré par T . Comme T est un groupe abélien, alors R est un anneau commutatif. Soient $x \in V \setminus A$ et $r \in \text{ann}(x)$; alors $d(x)$ est un sous-groupe de $\ker(r)$. Si $d(x) \cap A = 0$, alors $V = A \oplus d(x) \cong^{def} \mathbb{K}_+ \times \mathbb{K}_+$ et on conclut. Supposons donc que A est un sous-groupe de $d(x)$, on a $V = d(x)$. Alors $r = 0$ et $\text{ann}(x) = 0$. D'après le Fait 1.35, on en déduit que R est interprétable. De plus comme A et V/A sont T -minimaux, on obtient $R/\text{ann}(A) \cong R/\text{ann}(V/A) \cong \mathbb{K}$ (Fait 1.31). En particulier, $I_0 = \text{ann}(A)$ et $I_1 = \text{ann}(V/A)$ sont des idéaux maximaux de R . Soit $r \in I_1$. Si $\ker(r) \cap A = 0$, alors $V = A \oplus \ker(r) \cong^{def} \mathbb{K}_+ \times \mathbb{K}_+$ et on conclut. On peut donc supposer que A est un sous-groupe de $\ker(r)$. Alors $r \in \text{ann}(A) = I_0$ et on a $I_1 \subseteq I_0$. Par maximalité de I_1 , on obtient $I_0 = I_1 = I$.

Soit $r \in I$. Alors r induit un morphisme de V/A dans A . Or $A \cong^{def} V/A \cong^{def} \mathbb{K}_+$ et l'ensemble des endomorphismes définissables de $\mathbb{K}_+$ est définissablement

isomorphe à $\mathbb{K}_+$, alors I est définissablement isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{K}_+$. En particulier I est soit trivial, soit $I \cong^{def} \mathbb{K}_+$.

Soit J un idéal propre non nul de R . Supposons que I n'est pas contenu dans J . Par maximalité de I , on a $R = I + J$. Aussi on a $I \cap J = 0$ car I est identifié à un sous-groupe de $\mathbb{K}_+$ qui est minimal. Soit $(i, j) \in I \times J$ tel que $1 = i + j$. Alors $1 = 1^2 = i^2 + j^2 + 2ij = j^2 \in J$ car $ij \in I \cap J = 0$ et $i^2 = 0$, ce qui est impossible car J est propre dans R . Donc $I = J$ et on en déduit que I est l'unique idéal propre non nul de R , d'où $I = J(R)$. En particulier R est un anneau local.

Par ailleurs, pour $a, b \in J(R)$ on a $(1+a)(1+b) = 1+a+b$. Alors $1+I$ est un sous-groupe définissable de R^* définissablement isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{K}_+$. Comme $U_{\mathbb{K}}(T) \neq 1$, on en déduit que $T \cap (1+J(R)) = 1$, puis en appliquant l'hypothèse 4.53, il vient que $J(R) = 0$ et R est un corps.

Soit $v \in V \setminus A$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & (R, +) \rightarrow V \\ & & r \mapsto r(v) \end{array}$$

est un morphisme injectif (Fait 1.29) et $\varphi(R) = v^R$ est un sous-groupe de V isomorphe à $(R, +) \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Mais on a $v \in v^R \setminus A$, alors $v^R \cap A = 0$ et on en déduit que $V = A \oplus v^R \cong^{def} \mathbb{K}_+ \times \mathbb{K}_+$. $\square$

Proposition 4.55. – Soit $G = V \rtimes H$ un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini et sans sous-groupe infini d'exposant borné, où V est un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène pour $\mathbb{L}$ un corps interprétable de caractéristique zéro, tel que $[V, G] = V$, et H un sous-groupe nilpotent tel que $U_{\mathbb{L}}(H) = 1$. Alors V est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$.

PREUVE – On procède par induction sur $rk(V)$. On peut supposer $V \neq 1$. Pour tout corps interprétable $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, $[U_{\mathbb{K}}(G'), V]$ est à la fois un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène et $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène (Fait 2.29). Alors d'après le Fait 2.27, $U_{\mathbb{K}}(G')$ centralise V pour tout $\mathbb{K} \not\cong \mathbb{L}$. Comme H est nilpotent connexe, alors H' est un $\tilde{U}$ -groupe (Fait 2.39) et comme G est sans sous-groupe d'exposant borné, le Fait 2.34 donne

$$H' = U_{\mathbb{K}_1}(H') \times \dots \times U_{\mathbb{K}_n}(H')$$

pour $\mathbb{K}_1, \dots, \mathbb{K}_n$ des corps interprétables de caractéristique zéro. Ainsi comme $U_{\mathbb{L}}(H') = 1$ et $[U_{\mathbb{K}_i}(H'), V] = 1$ pour tout $\mathbb{K}_i \not\cong \mathbb{L}$, on en déduit que H' centralise V . Quitte à remplacer H par $H/C_H(V)$ on peut supposer $C_H(V) = 1$ et H abélien.

Si V est G -minimal, on conclut d'après le Fait 1.31. On peut donc supposer que V n'est pas G -minimal. Soit A un sous-groupe G -minimal de V . Alors A est abélien et A est définissablement isomorphe à $\mathbb{L}_+$. Par hypothèse d'induction appliquée à $V/A \rtimes H$, il vient que V/A est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. Soit B un autre sous-groupe G -minimal de G . Alors V/B est aussi définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$, et donc le produit

direct $V/A \times V/B$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. Comme $V/(A \cap B)$ s'injecte définissablement dans $V/A \times V/B$, alors $V/(A \cap B)$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. Si $A \neq B$, alors $A \cap B = 1$ par minimalité de $A \cong^{def} \mathbb{L}_+$ et on conclut que V est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. On peut donc supposer que A est l'unique sous-groupe G -minimal de V .

Si V n'est pas abélien, alors A est un sous-groupe de V' et V/V' est définissablement isomorphe à un groupe unipotent abélien sur $\mathbb{L}$. En particulier V/V' est un $\mathbb{L}$ -espace vectoriel. Mais le groupe $H/C_H(V/V')$ est abélien, alors il agit sur V/V' comme groupe de matrices triangulaires supérieures sur $\mathbb{L}$. Comme $U_{\mathbb{L}}(H) = 1$, alors $H/C_H(V/V')$ est diagonalisable. Ensuite on a la décomposition

$$V/V' = V_1/V' \oplus \dots \oplus V_n/V'$$

où chaque V_i/V' est un sous-espace vectoriel de dimension un normalisé par H . En particulier chaque groupe V_i/V' est définissablement isomorphe à $\mathbb{L}_+$. Posons $W_i = [\dots[[V_i, G], G]\dots, G]$. En particulier on a $[W_i, G] = W_i$. Soit V_0 le plus grand sous-groupe définissable de V , définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. Un tel sous-groupe existe d'après le Fait 3.36. Si $n \geq 2$, alors on applique l'hypothèse d'induction à $W_i \rtimes H$ pour tout i et W_i est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. Donc W_i est contenu dans V_0 pour tout i . Comme $[V, G] = V$, on a $[V_i/V', G] = V_i/V'$ et $V_i = W_i V'$ pour tout i et on en déduit que $V = V_0 V'$; ce qui implique $V = V_0$ car V est nilpotent. On peut donc supposer V/V' est définissablement isomorphe à $\mathbb{L}_+$. En particulier V/V' est un groupe abélien indécomposable. D'après le Fait 2.7 il existe un sous-groupe indécomposable I de V tel que $V/V' = IV'/V'$. Alors $V = I$ et V est abélien. Ce qui est absurde car contraire au choix de V . On en déduit que V est abélien. Alors V/A est un groupe abélien définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{L}$. En particulier V/A est un $\mathbb{L}$ -espace vectoriel. En appliquant à V/A le même raisonnement que précédemment, on en déduit que V/A et $\mathbb{L}_+$ sont définissablement isomorphes. D'après le Lemme 4.54 on conclut. $\square$

Théorème 4.56. – *Soient G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini sans sous-groupe infini d'exposant borné et $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Si G est engendré par des sous-groupes définissablement isomorphes à $\mathbb{K}_+$, alors G est un groupe définissablement linéaire (pas nécessairement sur $\mathbb{K}$).*

PREUVE – On procède par induction sur $rk(G)$. Si G est nilpotent alors on conclut par le Fait 3.36. On peut donc supposer que G n'est pas nilpotent. Comme G/G' est abélien, il vient que G/G' est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$. Soit A un sous-groupe G -minimal de G' . Alors A est abélien et on a $A \cong^{def} \mathbb{L}_+$ pour $\mathbb{L}$ un corps interprétable de caractéristique zéro (Faits 2.34, 2.37 et 3.34); en particulier A est minimal. Par hypothèse d'induction, on peut supposer que A est l'unique sous-groupe G -minimal de G' . Alors d'après les Faits 2.38 et 2.39 on en déduit que G' est un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène. De plus, si $\mathbb{L} \cong^{def} \mathbb{K}$

alors G est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, donc nilpotent ; ce qui est exclu. Donc on a $\mathbb{L} \not\cong \mathbb{K}$ et en particulier $I \cap G' = 1$ pour tout sous-groupe I tel que $I \cong^{def} \mathbb{K}_+$.

Soit I un sous-groupe de G tel que $I \cong^{def} \mathbb{K}_+$. D'après le Fait 1.59 $E_G(I)$ est un sous-groupe définissable connexe et d'après le Fait 1.60 on a $I \leq F(E_G(I))$. Il vient que $I \leq U_{\mathbb{K}}(F(E_G(I)))$ et d'après le Fait 2.29 $[U_{\mathbb{K}}(F(E_G(I))), E_G(I)]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. Ainsi on a $[U_{\mathbb{K}}(F(E_G(I))), E_G(I)] \leq U_{\mathbb{K}}(G') = 1$ et $I \leq U_{\mathbb{K}}(F(E_G(I))) \leq Z(E_G(I))$. Mais d'après le Fait 1.61 $E_G(I)$ contient un sous-groupe de Carter C de G , alors on a $I \leq Z(E_G(I)) \leq C$ et $U_{\mathbb{K}}(C) \neq 1$.

Comme G est engendré par des sous-groupes définissablement isomorphes à $\mathbb{K}_+$, on a $G = \langle I_1, \dots, I_n \rangle$ pour $I_i \cong^{def} \mathbb{K}_+$, donc $I_i \cap G' = 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un sous-groupe de Carter C_i de G tel que $I_i \leq Z(E_G(I_i)) \leq C_i$. Comme les sous-groupes de Carter de G sont conjugués, alors il existe $x_i \in G$ tel que $I_i^{x_i} \leq C$ pour tout i . Comme G/G' est abélien, on a $I_i G' = I_i^{x_i} G'$ et on obtient

$$G = \langle I_1^{x_1}, \dots, I_n^{x_n} \rangle G' = G' U$$

où $U = \langle I_1^{x_1}, \dots, I_n^{x_n} \rangle$. En particulier U est un sous-groupe définissable de C définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$; donc U est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, d'où on a $G = G' \rtimes U$.

Comme $G/[G, G']$ est un groupe nilpotent, alors $G/[G, G']$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$. En particulier $G'/[G, G']$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. Or G' est un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène et $\mathbb{L} \not\cong \mathbb{K}$, alors le groupe $G'/[G, G']$ est trivial et on obtient $G' = [G, G']$. D'après la Proposition 4.55, on en déduit que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{L}$. $\square$

4.4.2 Une étude de linéarité sur les K -groupes

Il s'agit ici de discuter de la conjecture suivante :

Conjecture 4.57. – *Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini tel que $F(G)^\circ$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Supposons que G possède un sous-groupe de Carter C tel que $C \cap A = 1$ pour tout sous-groupe $A \triangleleft G$ définissable connexe abélien. Alors*

$$G = S_1 * \dots * S_n * G_0$$

où G_0 est un sous-groupe définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et $S_1, \dots, S_n$ sont isomorphes à des groupes algébriques quasi-simples sur d'autres corps.

Pour expliquer la nécessité de l'hypothèse $C \cap A = 1$ dans l'énoncé ci-dessus, nous pouvons toujours reprendre l'exemple 4.27. Considérons $G, \mathcal{G}, \mathcal{N}$ et $\mathbb{K}$ comme dans cet exemple. Alors $\mathcal{G}/\mathcal{N} \cong PSL_2(\mathbb{K})$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{N} \neq 1$ pour tout sous-groupe de Carter $\mathcal{C}$ de $\mathcal{G}$. En particulier $\mathcal{N}$ est l'unique sous-groupe G -minimal de $\mathcal{G}$. Donc l'énoncé de la Conjecture 4.57 voudrait que $\mathcal{G}$ soit définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$; ce qui n'est pas le cas.

Nous allons ramener la Conjecture 4.57 à la conjecture ci-dessous.

Conjecture 4.58. – Soit G un K -groupe connexe de rang de Morley fini tel que $[G, \sigma(G)^\circ]$ est un U_K -groupe pour K un corps interprétable de caractéristique zéro. Supposons que G possède un sous-groupe de Carter C définissablement linéaire sur K et que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur K . Alors G est définissablement linéaire sur K .

Une tentative de réponse à la Conjecture 4.57

Ici on suppose que la Conjecture 4.58 est vrai, et on montre que la Conjecture 4.57 l'est aussi. Pour ce faire, on considère G un groupe vérifiant les hypothèses de la Conjecture 4.57 et on procède par induction sur $rk(G)$ et $deg(Z(G))$. On peut déjà dire que G n'est pas nilpotent. Ce travail sera divisé en trois étapes :

1) On peut supposer $Z(G) = 1$, et $F(G)$ est un U_K -groupe homogène.

Comme C contient $Z(G)^\circ$, alors $Z(G)$ est fini. En particulier, $F(G)^\circ$ est un U_K -groupe homogène d'après le Lemme 2.30. Supposons $Z(G) \neq 1$. Notons que C contient $Z(G)$ (Fait 3.29) et que $C/Z(G)$ est un sous-groupe de Carter de $G/Z(G)$. Aussi $F(G/Z(G))^\circ = F(G)^\circ Z(G)/Z(G)$ est un U_K -groupe. Soit $A \triangleleft G$ un sous-groupe définissable connexe contenant $Z(G)$ et tel que $A/Z(G)$ est abélien. Alors A est abélien et on a $C/Z(G) \cap A/Z(G) = (C \cap A)/Z(G) = 1$. Comme $Z(G/Z(G)) = 1$ puisque $Z(G)$ est fini (Fait 1.37), alors par hypothèse d'induction, on a

$$G/Z(G) = G_0/Z(G) * S_1/Z(G) * \dots * S_n/Z(G),$$

où $G_0/Z(G)$ est un groupe définissablement linéaire sur K et $S_1/Z(G), \dots, S_n/Z(G)$ sont des groupes algébriques quasi-simples sur d'autres corps. Comme $S_i/Z(G)$ est isomorphe à $S_i^{(\infty)}/S_i^{(\infty)} \cap Z(G)$, alors d'après le Fait 4.5, le groupe $S_i^{(\infty)}$ est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple. Aussi, $[G_0, S_i^{(\infty)}]$ est un sous-groupe connexe de $Z(G)$, donc $[G_0, S_i^{(\infty)}] = 1$ pour tout i ; de même $[S_i^{(\infty)}, S_j^{(\infty)}]$ est trivial pour tout $i \neq j$. On en déduit que

$$G = G_0 * S_1^{(\infty)} * \dots * S_n^{(\infty)}.$$

Supposons que G_0 soit un sous-groupe propre de G . D'après le Lemme 4.28, tout sous-groupe de Carter de G_0 est contenu dans un sous-groupe de Carter de G . De plus comme $F(G)^\circ$ est un U_K -groupe homogène, $F(G_0)^\circ$ est un U_K -groupe. Enfin, comme un sous-groupe normal dans G_0 est normal dans G , il vient par hypothèse d'induction que G_0 satisfait la Conjecture 4.57, et donc G aussi. On peut donc supposer que $G = G_0$ et $G/Z(G)$ est définissablement linéaire sur K . Comme $Z(G)$ est fini, on en déduit d'après la Proposition 4.52, que G est définissablement linéaire sur K . On peut donc supposer que $Z(G)$ est trivial.

Comme $F(G)^\circ$ est un U_K -groupe homogène, il est sans torsion, et on a $F(G) = F(G)^\circ \times F$ pour F un sous-groupe fini et caractéristique dans $F(G)$. Alors F est normal dans G et donc central. On en déduit que $F = 1$ et $F(G)$ est un U_K -groupe homogène.

2) On peut supposer que G n'admet pas de sous-groupe G -minimal non abélien.

Soit A un sous-groupe G -minimal de G . Si A est non abélien, alors d'après les Faits 1.24 et 4.5, le groupe A est algébrique simple et d'après le Fait 4.4 on a $G = A \times C_G(A)$. En particulier $C_G(A)$ est un sous-groupe définissable connexe propre de G . D'après le Lemme 4.28, tout sous-groupe de Carter de $C_G(A)$ est contenu dans un sous-groupe de Carter de G . De plus, comme un sous-groupe normal dans $C_G(A)$ est normal dans G , alors par hypothèse d'induction $C_G(A)$ satisfait la Conjecture 4.57, et donc G aussi. On peut donc supposer que les sous-groupes G -minimaux de G sont tous abéliens.

3) Montrons que G satisfait les hypothèses de la Conjecture 4.58.

- D'après la Proposition 4.20 $[G, \sigma(G)^\circ]$ est un $\tilde{U}$ -groupe, donc $[G, \sigma(G)^\circ]$ est sous-groupe de $F(G)$; comme $F(G)$ est un U_K -groupe homogène, alors $[G, \sigma(G)]$ est un U_K -groupe.

- Montrons que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

Soit A/B une section G -minimale de $F(G)$; alors on a $A/B \cong^{def} \mathbb{K}_+$ d'après le Fait 3.34. Il s'ensuit que $G/C_G(A/B)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Soit Z le centralisateur des sections G -minimales de $F(G)$; alors $F(G)$ est un sous-groupe de Z et d'après le Fait 3.9, le groupe quotient G/Z est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Soit $(A_i)_{i \geq 0}$ une suite croissante de sous-groupes définissables connexes de $F(G)$ telle que $A_0 = 1$ et A_{i+1}/A_i est G -minimal. Comme $F(G)$ est définissable connexe, il existe un entier n tel que $F(G) = A_n$. Mais $F(G)$ est un sous-groupe de Z , alors $A_1 \leq Z(Z)$ et on a $A_n = F(G) \leq Z_n(Z) \leq F(Z)$. Comme $F(Z)$ est un sous-groupe de $F(G)$, on obtient $F(G) = F(Z) = Z_n(Z)$. De plus, on a $Z_k(Z) \leq F(Z)$ pour tout k , alors $Z_\infty(Z) \leq F(Z)$ et on obtient $F(G) = F(Z) = Z_\infty(Z) = Z_n(Z)$. Comme on a $[Z, \sigma(Z)] \leq [G, \sigma(G)] \leq F(G) = Z_n(Z)$, alors $\sigma(Z)$ est un groupe nilpotent et on a $F(G) = \sigma(Z)$. Ainsi $Z/F(G)$ est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples (Fait 4.10); écrivons

$$Z/F(G) = Z_1/F(G) \times \dots \times Z_m/F(G)$$

avec $Z_i/F(G)$ isomorphe à un groupe algébrique simple. Si $Z \neq F(G)$, on peut supposer $Z_1/F(G)$ non trivial. Comme Z centralise les sections G -minimales de $F(G)$, il vient d'après le Lemme 4.29 que $Z_1^{(\infty)}$ est isomorphe à un groupe algébrique simple. En particulier $Z_1^{(\infty)}$ est un sous-groupe G -minimal non abélien de G , ce qui est exclu par le point 2). On en déduit que $Z = F(G)$ et $G/F(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. D'après le Lemme 3.11, il vient également que $G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

- Soit C un sous-groupe de Carter de G . Montrons que C est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

Soit U le plus grand sous-groupe définissable de $F(G)$, définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$ donné par le Fait 3.36. En particulier U

est normal dans G et alors $G/C_G(U)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Posons $C_0 = C \cap F(G) \cap C_G(U)$. Comme $G/F(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, il vient que C/C_0 est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.9). Supposons $C_0 \neq 1$. Alors C_0 est infini car $F(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, donc sans torsion. Soit C_1 un sous-groupe définissable infini minimal de C_0 . Alors on a $C_1 \cong^{def} \mathbb{K}_+$ et $C_1 \leq U \cap C_G(U) = Z(U)$. Il s'ensuit que $C_1 \leq Z(U) \cap C = 1$, ce qui est absurde. Ainsi $C_0 = 1$ et C est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

Il vient que G satisfait les hypothèses de la Conjecture 4.58, donc G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$; on conclut.

Une tentative de réponse à la Conjecture 4.58

Soit G un contre-exemple à la Conjecture 4.58 dans le sens où toute section définissable U/V de rang strictement inférieur à $rk(G)$ ou de degré de $Z(U/V)$ strictement inférieur à $deg(Z(G))$, vérifiant les hypothèses de cette conjecture la satisfait. Alors G n'est pas nilpotent et d'après la Proposition 4.20 $[G, \sigma(G)^\circ]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

1) *On montre que G n'admet pas de sous-groupe G -minimal non abélien.*

Soit A un sous-groupe G -minimal de G . Si A n'est pas abélien, alors d'après les Faits 1.24 et 4.4, A est quasi-simple et on a $G = A * C_G(A)^\circ$. Comme $[G, \sigma(G)^\circ]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, alors $[C_G(A)^\circ, \sigma(C_G(A)^\circ)^\circ]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. De plus, d'après le Lemme 4.28, tout sous-groupe de Carter de $C_G(A)^\circ$ est contenu dans un sous-groupe de Carter de G . Il vient par induction que $C_G(A)^\circ$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. D'autre part, comme $Z(A) = A \cap Z(G) = A \cap \sigma(G)$, alors $A/Z(A)$ est isomorphe à un sous-groupe normal de $G/\sigma(G)$ et on en déduit que $A/Z(A)$ est isomorphe à un groupe algébrique simple sur $\mathbb{K}$ d'après le Corollaire 4.7. D'après le Fait 4.5, A est isomorphe à un groupe algébrique sur $\mathbb{K}$; le Lemme 3.52 permet de conclure que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On peut donc supposer que tous les sous-groupes G -minimaux de G sont abéliens.

2) *On montre que G possède un unique $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe G -minimal A et que G/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.*

Supposons que G ne possède pas de $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe G -minimal. Alors $\sigma(G)^\circ$ est central puisque $[G, \sigma(G)^\circ]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe normal de G . Mais d'après le Fait 4.10 on a

$$G/\sigma(G) = S_1/\sigma(G) \times \dots \times S_n/\sigma(G),$$

avec $S_1/\sigma(G), \dots, S_n/\sigma(G)$ isomorphes à des groupes algébriques simples. Comme G n'est pas nilpotent on a $G \neq \sigma(G)$ et d'après le Fait 4.5, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $S_i^{(\infty)}$ soit un sous-groupe simple G -normal, donc G -minimal non abélien; ce qui est exclu par le point 1). On en déduit que G possède un $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe G -minimal A .

Comme A est un U_K -sous-groupe G -minimal abélien de G , on $A \cong^{def} \mathbb{K}_+^m$ d'après le Fait 3.34. En particulier $A \cap C$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$, donc fermé, et CA/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Comme $[G/A, \sigma(G)^\circ/A]$ est un U_K -groupe, il vient par induction que G/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Soit B un autre U_K -sous-groupe G -minimal de G . Alors G/B est aussi définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Il s'ensuit que $G/(A \cap B)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (fait 3.9). Si $A \cap B$ est fini, alors G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ d'après la proposition 4.52. On en déduit que A est l'unique U_K -sous-groupe G -minimal.

3) *On montre que $F(G)^\circ$ est un U_K -groupe homogène. En particulier A est l'unique sous-groupe G -minimal de G .*

Supposons que $F(G)^\circ$ n'est pas un U_K -groupe homogène. Alors, soit il existe un corps interprétable $\mathbb{L} \not\cong \mathbb{K}$ de caractéristique zéro tel que $U_{\mathbb{L}}(F(G)^\circ) \neq 1$, soit $F(G)^\circ$ a un pseudo-tore non trivial. Dans le premier cas, comme $[G, U_{\mathbb{L}}(F(G)^\circ)]$ est contenu dans $[G, \sigma(G)^\circ]$, alors $[G, U_{\mathbb{L}}(F(G)^\circ)]$ est à la fois un U_K -groupe homogène et un $U_{\mathbb{L}}$ -groupe homogène. Il vient que $U_{\mathbb{L}}(F(G)^\circ)$ est un sous-groupe non trivial de $Z(G)$ d'après le Fait 2.27. Dans le deuxième cas, on a $T_0 \leq Z(G)$, pour T_0 un pseudo-tore non trivial de $F(G)^\circ$. Dans tous les cas il vient que $Z(G)$, et donc C , contient un sous-groupe infini définissable connexe B qui n'est pas un U_K -groupe. Comme C est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, on a $C = U_K(C) \times T$ où T est un sous-groupe définissable abélien connexe (Théorème 4.47). En particulier B est un sous-groupe de T . Rappelons que G/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, où A est l'unique U_K -sous-groupe G -minimal de G . On identifie G/A à un sous-groupe définissable de $GL_n(\mathbb{K})$. Soit Z/A le sous-groupe de $Z(G/A)^\circ$ formé d'éléments semi-simples. Alors B est contenu dans Z et Z/A est non trivial car A est un U_K -groupe homogène. De plus, Z est résoluble connexe car A est abélien connexe. On a $Z/A \leq Z(G/A)^\circ \leq CA/A = U_K(C)A/A \times TA/A$, et alors $Z/A \leq TA/A$. On obtient $Z = (T \cap Z)A$. D'après le Lemme 3.33, le quotient $(G/A)/Z(G/A)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et d'après la Proposition 4.52, il vient que $(G/A)/Z(G/A)^\circ$ définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Comme $Z/A = (TA/A) \cap Z(G/A)^\circ$, alors $(TA/A)/(Z/A)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Mais $(TA/A)/(Z/A) \cong^{def} T/(T \cap Z)$, alors $T/(T \cap Z)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

Posons $E = E_Z(T \cap Z)$; on a $E = E \cap Z = (T \cap Z)(E \cap A)$. Comme Z est résoluble et connexe, alors on a $T \cap Z \leq F(E)$ (Fait 1.60). De plus, A est abélien et normalisé par E , alors on a aussi $E \cap A \leq F(E)$, d'où E est nilpotent. D'après le Fait 1.61, on en déduit que E est un sous-groupe de Carter de Z . Mais Z est normal dans G , alors l'argument de Frattini et la conjugaison des sous-groupes de Carter dans Z donne $G = ZN_G(E) = (T \cap Z)AN_G(E) = AN_G(E)$. Si $A \cap N_G(E) = 1$, alors on a $G = A \rtimes N_G(E)$. Comme A est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$, alors $G/C_{N_G(E)}(A) \cong^{def} A \rtimes N_G(E)/C_{N_G(E)}(A)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.5). On en déduit que $G = G/(A \cap$

$C_{N_G(E)}(A)$) est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.9). On peut donc supposer $A \cap N_G(E) \neq 1$. Mais $A \cap N_G(E)$ est normal dans G , alors par G -minimalité de A , on a $A \leq N_G(E)$ et E est normalisé par G . En particulier E est normal dans Z et on a $E = Z$, i.e. Z est nilpotent. Comme $U_{\mathbb{K}}(T \cap Z) = 1$, on a $Z = (T \cap Z) \times A$; en particulier $T \cap Z$ est normal dans G .

Comme on a $C/(T \cap Z) \cong^{def} T/(T \cap Z) \times U_{\mathbb{K}}(C)$, alors $C/(T \cap Z)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ puisque $T/T \cap Z$ et $U_{\mathbb{K}}(C)$ le sont aussi. De plus $[G/(T \cap Z), \sigma(G)/(T \cap Z)^{\circ}] = [G, \sigma(G)^{\circ}](T \cap Z)/(T \cap Z)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. On en déduit par induction que $G/(T \cap Z)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On conclut que $G = G/(A \cap T \cap Z)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On peut donc supposer que $F(G)^{\circ}$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

4) *On montre que $Z(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène. En particulier $F(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.*

Comme $F(G)^{\circ}$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, alors $Z(G)^{\circ}$ est sans torsion et on a $Z(G) = Z(G)^{\circ} \times F$ pour F un sous-groupe fini. En particulier, $Z(G/F) = Z(G)/F$ est connexe et sans torsion. Supposons $F \neq 1$. Notons que C contient $Z(G)$ (Fait 3.29), donc C contient F . Comme C est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et F est fini, alors C/F est un sous-groupe de Carter de G/F , définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. De plus, $[G/\sigma(G/F)^{\circ}] = [G, \sigma(G)^{\circ}]F/F$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe et $(G/F)/\sigma(G/F) \cong^{def} G/\sigma(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Comme $1 = \deg(Z(G/F)) < \deg(Z(G))$, il vient par induction que G/F est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Comme F est fini, on conclut d'après la proposition 4.52 que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On peut donc supposer $F = 1$ et $Z(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

Comme $F(G)^{\circ}$ est sans torsion, on a $F(G) = F(G)^{\circ} \times F_0$, pour F_0 un sous-groupe fini et caractéristique dans G . Alors F est normal dans G , et comme G est connexe on a $F \leq Z(G)$; on en déduit que F est trivial car $Z(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, donc sans torsion, d'où $F(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

5) *On montre que pour tout sous-groupe définissable connexe H de G , $[H, \sigma(H)]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe et $H/\sigma(H)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.*

Comme le groupe G/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, identifions le à un sous-groupe définissable de $GL_n(\mathbb{K})$. Notons $\overline{HA/A}$ la clôture de Zariski de HA/A . Alors $\overline{HA/A}$ est un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{K}$ et d'après le Fait 1.95, il vient que $[\overline{HA/A}, \sigma(\overline{HA/A})]$ est un groupe résoluble engendré par les unipotents sur $\mathbb{K}$. Alors $[HA/A, \sigma(\overline{HA/A})]$ est unipotent sur $\mathbb{K}$, donc $[HA/A, \sigma(HA/A)] = [H, \sigma(H)]A/A$ est $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. Comme A est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe, il vient que $[H, \sigma(H)]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe. D'autre part, comme $(HA/A)/\sigma(HA/A) \cong H/\sigma(H)$, alors d'après le Fait 3.11, on en déduit que $H/\sigma(H)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

6) *On montre que tout sous-groupe définissable connexe et propre de G est dé-*

finissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

a) Supposons que G n'est pas résoluble. Soient H un sous-groupe définissable connexe propre de G et C_0 un sous-groupe de Carter de H . Soient B un sous-groupe de Borel de G contenant C_0 et C_B un sous-groupe de Carter de B . Alors C_B est aussi un sous-groupe de Carter de G , et par conjugaison des sous-groupes de Carter dans G , C_B est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. D'après le point 5), il vient par induction que B est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On en déduit que C_0 est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. D'après le point 5) et par induction, on conclut que H est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.

b) Supposons maintenant G non résoluble. Soient H un sous-groupe définissable connexe propre de G qui n'est pas définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, et C_H un sous-groupe de Carter de H . Alors C_H n'est pas définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ d'après le point 5). Mais $E_G(C_H)$ contient un sous-groupe de Carter de G (Fait 1.61), donc si $E_G(C_H)$ est propre dans G , l'hypothèse d'induction dit que $E_G(C_H)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Dans ce cas C_H est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et donc H aussi ; ce qui est absurde. Donc $G = E_G(C_H)$ et C_H est contenu dans $F(G)$ d'après le Fait 1.60. Alors on a $C_H \leq F(G) \cap H \leq F(H)$ et on en déduit que $H = C_H$ et H est un sous-groupe de $F(G)$. Ceci montre que tout sous-groupe définissable propre et connexe de G qui n'est pas définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, s'il en existe, est contenu dans $F(G)$.

Comme G est résoluble, alors on a $A \simeq \mathbb{K}_+$. De plus, comme G n'est pas nilpotent, $G/F(G)'$ ne l'est pas non plus (Fait 1.49). Comme $G = F(G)C$, alors on a $U_{\mathbb{K}}(G/F(G)) = U_{\mathbb{K}}(C)F(G)/F(G)$ (Fait 2.15) et on obtient $U_{\mathbb{K}}(G) = U_{\mathbb{K}}(C)F(G)$. Mais $U_{\mathbb{K}}(C)$ et $F(G)$ sont des $U_{\mathbb{K}}$ -groupes homogènes, alors d'après le Fait 2.23 leur produit $U_{\mathbb{K}}(C)F(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, donc nilpotent. On en déduit que $U_{\mathbb{K}}(G) = F(G)$ et on a

$$G = F(G)C = F(G) \rtimes T,$$

où T est le complémentaire de $U_{\mathbb{K}}(C)$ dans C (Théorème 4.47).

Si $F(G)$ n'est pas abélien, alors A est un sous-groupe de $F(G)'$ et $F(G)'/A$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$, donc fermé (Proposition 3.40). Il vient que $G/F(G)'$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. En particulier, $F(G)/F(G)'$ est isomorphe à un groupe abélien unipotent sur $\mathbb{K}$. Ainsi $F(G)/F(G)'$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, nécessairement de dimension $d \geq 2$ car $F(G)' \neq 1$. Notons que pour tout sous-groupe B de $F(G)$, définissable G -normal et contenant $F(G)'$, le groupe quotient G/B est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, et ceci, du fait que $F(G)/F(G)'$ est isomorphe à un groupe unipotent. Considérons un tel sous-groupe B tel que $F(G)/B$ soit de dimension 2 et regardons le groupe $F(G)/B \rtimes T/C_T(F(G)/B)$ où $F(G)/B \cong \mathbb{K}_+^2$. Posons $\mathcal{T} = T/C_T(F(G)/B)$; alors d'après le Fait 3.5, $\mathcal{T}$ peut être vu comme un sous-groupe définissable de $GL_2(\mathbb{K})$. De plus, comme $U_{\mathbb{K}}(T) = 1$, alors $U_{\mathbb{K}}(\mathcal{T}) = 1$ et donc $\mathcal{T}$ est formé d'éléments semi-simples sur $\mathbb{K}$. On en déduit que $\mathcal{T}$ est diagonalisable, i.e. $\mathcal{T}$ se plonge définissablement

nissablement dans $(\mathbb{K}^*)^2$. Il s'ensuit la décomposition

$$F(G)/B = U_1/B \oplus U_2/B$$

où U_1/B et U_2/B sont des $\mathbb{K}$ -sous-espaces vectoriels de dimension un, normalisés par $\mathcal{T}$; en particulier on a $U_i/B \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Comme $U_i T$ est un sous-groupe définissable connexe propre de G qui n'est pas contenu $F(G)$, alors il est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. En particulier, U_i est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$ (Proposition 3.40). On en déduit que $F(G) = U_1 U_2$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ d'après le Fait 3.10; ce qui permet de dire, d'après le premier paragraphe de ce point, que tout sous-groupe définissable connexe propre de G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. On peut donc supposer $F(G)' = 1$ et $F(G)$ abélien.

Comme $F(G)$ est abélien, alors $F(G)/A$ est abélien et isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$. Donc $F(G)/A$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension d . Si $d \geq 2$, alors en considérant un sous-groupe normal B contenant A et tel que $F(G)/B$ soit de dimension 2, on montre par le même raisonnement que précédemment, que $F(G)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, ce qui permet à nouveau de conclure. Donc on a $d \leq 1$. Si $d = 0$, alors $F(G) = A$ et on obtient $G = AC$. Comme G n'est pas nilpotent on a $A \cap C = 1$ car $A \cong^{def} \mathbb{K}_+$, et on obtient $G = A \rtimes C$. Aussi $C/C_C(A)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.5); d'où $G = G/(A \cap C_C(A))$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.9). Donc $d = 1$ et $F(G)/A \cong^{def} A \cong^{def} \mathbb{K}_+$. D'après le Lemme 4.54 on obtient $F(G) \cong^{def} (\mathbb{K}_+)^2$. Mais $F(G)$ contient tous les sous-groupes définissables connexes propres de G qui ne sont pas définissablement linéaires sur $\mathbb{K}$, on conclut alors que G ne possède pas de tels sous-groupes.

7) On montre que G n'est pas résoluble et G/A est isomorphe à un groupe algébrique simple sur $\mathbb{K}$.

Si G est résoluble, alors $G = F(G)C = F(G) \rtimes T$, où T est le complémentaire abélien de $U_{\mathbb{K}}(C)$ dans C , et $F(G)$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ d'après 6). Alors $F(G)$ est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$ (Proposition 3.40), puis comme $C_T(F(G)) \leq Z(G) \leq F(G)$, on a $C_T(F(G)) = 1$ et on en déduit que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ d'après le Fait 3.5. Ce qui est contraire au choix de G . Donc G est non résoluble.

Comme G/A est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, alors d'après le Théorème 4.47 on a

$$G/A = U/A \rtimes R/A$$

où U/A est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G/A et R/A un sous-groupe définissable de G/A . En particulier, U est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène car A l'est aussi et on a $R = A \rtimes S$ où S est un sous-groupe définissable de R .

Si $U \neq A$, alors U et R sont définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ d'après les points 6) et on a $G = U \rtimes S$. Comme U est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$ (Proposition 3.40), le Fait 3.5 dit que $S/C_S(U)$ est définissablement

linéaire sur $\mathbb{K}$, d'où $G = G/(U \cap C_S(A))$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.9) ; ce qui est contredit le choix de G . Donc on a $A = U$ et A est le plus grand $U_{\mathbb{K}}$ -sous-groupe normal nilpotent de G . Par unicité de A , on a même $A = \tilde{U}(G)$. Ainsi le Corollaire 4.49 donne

$$G/A = G_1/A * \dots * G_n/A * B/A$$

avec $G_1/A, \dots, G_n/A$ isomorphes à des groupes algébriques quasi-simples sur $\mathbb{K}$, et B/A un sous-groupe abélien connexe. Si G/A n'est pas isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple, alors il existe $G_i \neq A$ et $G_i \neq G$; d'après le point 6) G_i est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et d'après le Théorème 4.47 on a $G_i = A \rtimes S_i$ pour S_i un sous-groupe définissable connexe unique à conjugaison près dans G_i . Comme G_i est normalisé par G , l'argument de Frattini donne $G = AN_G(S_i)^\circ$. Par G -minimalité de A , soit $A \cap N_G(S_i)^\circ = 1$, soit A est un sous-groupe de $N_G(S_i)^\circ$. Si A est un sous-groupe de $N_G(S_i)^\circ$, alors S_i est normalisé par G et par unicité de A on a $S_i = 1$; ce qui est impossible. Alors on a $A \cap N_G(S_i)^\circ = 1$ et on obtient $G = A \rtimes N_G(S_i)^\circ$. Comme A est définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$, alors $N_G(S_i)^\circ/C_{N_G(S_i)^\circ}(A)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, d'où $G = G/(A \cap C_{N_G(S_i)^\circ}(A))$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$; ce qui est exclu. Donc G/A est isomorphe à un groupe algébrique quasi-simple sur $\mathbb{K}$; en particulier $Z(G/A)$ est fini.

Posons $Z/A = Z(G/A)$. En particulier G/Z est isomorphe à un groupe algébrique simple sur $\mathbb{K}$. Soient π l'ensemble des entiers premiers et H un π -sous-groupe de Hall de Z . D'après le Fait 1.52 on a $Z = A \rtimes H$. Comme Z est normal dans G , alors l'argument de Frattini donne $G = AN_G(H)^\circ$. Par G -minimalité de A , soit A est un sous-groupe de $N_G(H)^\circ$, soit $A \cap N_G(H)^\circ = 1$. Si $A \cap N_G(H)^\circ = 1$, on obtient $G = A \rtimes N_G(H)^\circ$, d'où $G = G/(A \cap C_{N_G(H)^\circ}(A))$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$; ce qui est contraire au choix de G . Donc A est un sous-groupe de $N_G(H)^\circ$. Alors par unicité de A , il vient que H est central dans G car fini. Mais d'après le point 4) $F(G)$ est sans torsion, alors $H = 1$ et on a $Z = A$. On conclut que le groupe G/A est isomorphe à un groupe algébrique simple sur $\mathbb{K}$.

À ce stade du raisonnement, il paraît difficile d'établir que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Toutefois, en regroupant les informations obtenues dans ce qui précède, la Conjecture 4.58 se réduit finalement à la suivante :

Conjecture 4.59. – *Soit G un K -groupe connexe parfait dont tous les sous-groupes définissables connexes propres sont définissablement linéaires sur $\mathbb{K}$, pour $\mathbb{K}$ est un corps interprétable de caractéristique zéro. Supposons que $G/\sigma(G)$ est algébrique simple sur $\mathbb{K}$ et que $\sigma(G)$ est l'unique sous-groupe G -minimal de G . Alors G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$.*

Le cas résoluble

Nous avons vu dans ce qui précède que sous l'hypothèse 4.53, les Conjectures 4.58 et 4.57 sont vraies dans le cas résoluble. Donc on obtient les théorèmes sui-

vants :

Théorème 4.60. – *Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini tel que G' est un U_K -groupe pour K un corps interprétable de caractéristique zéro. S'il existe un sous-groupe de Carter C de G définissablement linéaire sur K , alors G est définissablement linéaire sur K .*

Théorème 4.61. – *Soit G un groupe résoluble connexe de rang de Morley fini tel que $F(G)^\circ$ est un U_K -groupe pour K un corps interprétable de caractéristique zéro. Supposons qu'il existe un sous-groupe de Carter C de G tel que $C \cap A = 1$ pour tout sous-groupe définissable $A \triangleleft G$ connexe abélien. Alors G est un groupe définissablement linéaire sur K .*

K -groupes parfaits

À présent voyons ce qu'on obtient de la structure des K -groupes connexes parfaits de rang de Morley fini lorsque la Conjecture 4.58 est supposée vraie.

Théorème 4.62. – *Soit G un K -groupe connexe parfait de rang de Morley fini. Supposons qu'il existe un sous-groupe de Carter C de G tel que $C \cap A = 1$, pour tout sous-groupe $A \triangleleft G$ définissable connexe abélien. Alors*

$$G \cong G_1 * \dots * G_n * B,$$

pour $G_1, \dots, G_n$ des groupes définissables connexes et définissablement linéaires sur des corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et B un sous-groupe définissable tel que $\sigma(B)$ est d'exposant borné et $B/\sigma(G)$ est produit direct de groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos de caractéristiques non nulles.

PREUVE – On considère G un contre-exemple de rang de Morley minimal. En suivant ce qui est fait au point (1) de la tentative de réponse à la conjecture 4.58, on peut dire que G n'admet pas de sous-groupe G -minimal non abélien. Comme G est connexe et parfait, le Théorème 4.35 donne

$$G = G_1 * \dots * G_n * B,$$

où $G_1, \dots, G_n$ sont des sous-groupes définissables connexes tels que chaque $G_i/\sigma(G_i)$ est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, et B un sous-groupe définissable tel que $B/\sigma(G)$ est isomorphe à un produit direct de groupes algébriques simples sur des corps algébriquement clos de caractéristiques positives. En particulier, $\sigma(B)$ est d'exposant borné (Proposition 4.34). Si pour tout i , G_i est un sous-groupe propre de G , le Lemme 4.28 permet d'appliquer l'induction et chaque G_i a la forme décrite par l'énoncé de ce théorème. Donc G est aussi de cette forme ; ce qui contredit son choix. Alors il existe i tel que $G = G_i$ et $G/\sigma(G)$ est isomorphe à un groupe algébrique sur un corps interprétable K de caractéristique zéro.

Montrons que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Soit W le plus petit sous-groupe définissable normal de G tel que G/W soit définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. D'après la Proposition 4.52, le sous-groupe W est connexe et est contenu $\sigma(G)^\circ$. Mais d'après la Proposition 4.34 $\sigma(G)^\circ$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène, alors W est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène.

Comme G/W est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$, alors $C/C \cap W$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. Supposons que $C \cap W \neq 1$, alors $C \cap W$ est infini car W est sans torsion. Soit W_0 un sous-groupe définissable infini minimal de $C \cap W$, alors on a $W_0 \cong^{def} \mathbb{K}_+$. Posons $E = \{W_0^g : g \in G\}$. Alors E est un sous-groupe G -normal définissablement isomorphe à un groupe unipotent sur $\mathbb{K}$ (Fait 3.36). Il vient que $G/C_G(E)$ est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$ et par minimalité de W , on a $W \leq C_G(E)$. Comme E est un sous-groupe de W , alors E est abélien et on a $C \cap E = 1$, ce qui est absurde car W_0 est contenu dans $E \cap C$. On en déduit que $C \cap W = 1$ et C est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. La Conjecture 4.58 étant supposée vraie, on conclut que G est définissablement linéaire sur $\mathbb{K}$. $\square$

Chapitre 5

Étude de quelques actions sur des groupes abéliens

Dans ce chapitre nous étudions une action définissable de $SL_2(\mathbb{K})$ sur un groupe abélien connexe V , $\mathbb{K}$ et V étant des objets définissables dans un univers de rang de Morley fini, $\mathbb{K}$ de caractéristique $p > 0$. Cette étude se base sur [14] et [15] et généralise certains résultats de ces travaux.

5.1 Autour du Lemme des Trois Corps

Dans cette section nous tentons de généraliser le fait suivant que nous appelons *Lemme des Trois Corps* :

Fait 5.1. - (Cherlin et Deloro, [14, Lemma 1.11]) *Dans un univers de rang de Morley fini, soient les objets définissables suivants : trois corps infinis $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3$, un groupe connexe T agissant sur les groupes additifs de $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2, \mathbb{L}_3$, et une application $B : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{L}_3$.*

Supposons que pour chaque $i = 1, 2, 3$, $T/C_T(\mathbb{L}_i)$ agit sur $(\mathbb{L}_i, +)$ comme un sous-groupe infini de $\mathbb{L}_i^$. Supposons de plus que $C_T(\mathbb{L}_1)^\circ$ est non trivial dans son action sur $(\mathbb{L}_2, +)$. Si B est bi-additive, i.e. additive par rapport aux deux variables, et globalement T -covariante (dans le sens $B(u, v)^t = B(u^t, v^t)$ pour tout $t \in T$), alors B est identiquement nul, ou induit un isomorphisme définissable entre $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_3$.*

Rappelons d'abord quelques faits.

Fait 5.2. - (Wagner, [39, Corollaire 9]) *Soit $\mathbb{L}$ un corps de rang de Morley fini et de caractéristique $p > 0$. Alors $\mathbb{L}^*$ n'admet pas de section définissable sans torsion.*

Une conséquence de ce résultat est le fait suivant :

Fait 5.3. - (Cherlin et Deloro, [14, Lemma 1.13]) *Dans un univers de rang de Morley fini, soient les objets définissables suivants : deux groupes abéliens infinis*

K et H , et une action fidèle de K sur H telle que H est K -minimal. Supposons que H est d'exposant p et que K contient un q -tore non trivial pour chaque entier premier $q \neq p$. Alors $rk(H) = rk(K)$.

Fait 5.4. - Soit H un groupe abélien connexe de rang de Morley fini qui agit définissablement et fidèlement sur un groupe H -minimal abélien A . Si K est un sous-groupe définissable infini de H ne centralisant pas A , alors A est K -minimal.

PREUVE – D'après le Théorème de corps de Zilber (Fait 1.31), l'action de H sur A engendre un sous-corps interprétable $\mathbb{L}$ de $End(A)$, avec $A \cong^{def} \mathbb{L}_+$, H agissant comme un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{L}$. D'après le Théorème des indécomposables de Zilber (Fait 1.17), le sous-groupe additif $\mathbb{K}$ de $\mathbb{L}$ engendré par K est interprétable ; étant stable par multiplication, c'est un anneau infini intègre de rang de Morley fini, donc un sous-corps de $\mathbb{L}$ (Fait 1.6). Selon le Fait 1.5, on a $\mathbb{K} = \mathbb{L}$, donc A est K -minimal. $\square$

Hypothèses. Dans toute la suite de cette section, on considère dans un univers de rang de Morley fini, les objets définissables suivants : trois corps infinis $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3$ de caractéristique $p > 0$, un groupe abélien connexe infini T qui agit sur les groupes additifs des trois corps et une application $B : \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_3$, bi-additive, globalement T -covariante et non nulle. On suppose que pour chaque $i = 1, 2, 3$, le groupe $T/C_T(\mathbb{K}_i)$ agit sur $(\mathbb{K}_i)_+$ comme un sous-groupe infini de K_i^* .

5.1.1 Vers une généralisation du Lemme des Trois Corps

Puisque $T/C_T(\mathbb{K}_i)$ ($i = 1, 2, 3$) agit sur $(\mathbb{K}_i)_+$ comme un sous-groupe infini définissable de $\mathbb{K}_i^*$, alors $(\mathbb{K}_i)_+$ est $T/C_T(\mathbb{K}_i)$ -minimal d'après le Fait 5.4, donc T -minimal aussi.

Lemme 5.5. – Le groupe additif de $\mathbb{K}_3$ est engendré par les éléments de la forme $B(u, v)$ pour $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$.

PREUVE – Comme B est non nulle, alors il existe $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \setminus (0, 0)$ tel que $B(u, v) \neq 0$. Comme $\mathbb{K}_2$ est connexe, alors pour tout $a \in \mathbb{K}_1 \setminus \{0\}$, $B(a, \mathbb{K}_2)$ est un sous-groupe connexe et non trivial de $\mathbb{K}_3$. Le sous-groupe de $\mathbb{K}_3$ engendré par ses sous-groupes de la forme $B(a, \mathbb{K}_3)$ est donc définissable connexe et non trivial car contenant $B(u, v)$. De plus, par T -covariance de B , ce sous-groupe est invariant par T , donc égal à $\mathbb{K}_3$ par minimalité.

Lemme 5.6. – On a $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) = C_T(\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3) = C_T(\mathbb{K}_3, \mathbb{K}_1) = C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3)$.

PREUVE – Montrons d'abord que $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) \subseteq C_T(\mathbb{K}_3)$. Soit $t \in C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$, alors pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ on a

$$B(u, v)^t = B(u^t, v^t) = B(u, v).$$

Ce qui implique $t \in C_T(B(u, v))$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$. D'après le Lemme 5.5, on en déduit que t centralise $\mathbb{K}_3$. Ainsi on a $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) \subseteq C_T(\mathbb{K}_3)$.

Montrons ensuite que $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_3) \subseteq C_T(\mathbb{K}_2)$. Soit $t \in C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_3)$. Alors pour tout $u \in \mathbb{K}_1, v \in \mathbb{K}_2$, on obtient

$$\begin{aligned} B(u, v^t - v) &= B(u, v^t) - B(u, v) \\ &= B(u^t, v^t) - B(u, v) \quad \text{car } t \in C_T(\mathbb{K}_1) \\ &= B(u, v)^t - B(u, v) \quad \text{par } T\text{-covariance de } B \\ &= B(u, v) - B(u, v) \quad \text{car } t \in C_T(\mathbb{K}_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Si $t \notin C_T(\mathbb{K}_2)$, alors l'image de l'application $v \rightarrow v^t - v$ est T -invariante et non triviale dans $\mathbb{K}_2$, donc elle est égale à $\mathbb{K}_2$. On en déduit que $B(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2) = 0$, ce qui constitue une contradiction. Donc $t \in C_T(\mathbb{K}_3)$ et on a $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_3) \subseteq C_T(\mathbb{K}_2)$. De même, on montre que $C_T(\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3) \subseteq C_T(\mathbb{K}_1)$. Ainsi on obtient $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_3) = C_T(\mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3) = C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3)$. $\square$

Le Théorème 5.7 constitue le résultat majeur de cette sous-section.

Théorème 5.7. – *On suppose que $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3) = 1$; si l'un des $C_T(\mathbb{K}_i)$ est infini, alors les trois corps $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes.*

Comme $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3) = 1$, alors d'après le Lemme 5.6, on a

$$C_T(\mathbb{K}_1)C_T(\mathbb{K}_2)/C_T(\mathbb{K}_2) \cong C_T(\mathbb{K}_1)$$

et

$$C_T(\mathbb{K}_2)C_T(\mathbb{K}_1)/C_T(\mathbb{K}_1) \cong C_T(\mathbb{K}_2).$$

Si $C_T(\mathbb{K}_1)$ et $C_T(\mathbb{K}_2)$ sont infinis, alors le Fait 5.1 donne un isomorphisme définissable entre $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_3$, et entre $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$; on obtient alors le résultat. On peut donc déjà supposer que l'un d'eux est fini, et nous choisissons $C_T(\mathbb{K}_1)$.

Le reste de la preuve du Théorème 5.7 se fera donc suivant deux possibilités : $C_T(\mathbb{K}_2)$ est infini ou $C_T(\mathbb{K}_3)$ est infini. Dans les deux cas, nous allons nous appuyer sur le Fait 5.1 (Lemme des Trois Corps) pour montrer l'isomorphisme entre les trois corps.

Notation 5.8. – On note $\Theta_i = T/C_T(\mathbb{K}_i)$; $\rho_i : \Theta_i \rightarrow \mathbb{K}_i^*$, l'injection de Θ_i dans $\mathbb{K}_i^*$ telle que $\rho_i(\bar{t})x = x^t$ pour tout $\bar{t} = tC_T(\mathbb{K}_i) \in \Theta_i$ et tout $x \in \mathbb{K}_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Cette injection est définissable.

Premier cas : on suppose que $T_2 := C_T(\mathbb{K}_2)^\circ$ est non trivial.

D'après le Lemme 5.6 on a $C_{T_2}(\mathbb{K}_1) = 1$ et comme T_2 est infini, le Fait 5.1 donne un isomorphisme définissable entre $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$. En outre, la preuve du Fait 5.1 nous révèle que $B(u, 1)$ est non nul pour tout $u \in K_1 \setminus \{0\}$ et que l'application

$$\begin{aligned} f_u &: \mathbb{K}_2 \rightarrow \mathbb{K}_3 \\ v &\mapsto B(u, v)B(u, 1)^{-1} \end{aligned}$$

ne dépend pas du choix de $u \in K_1 \setminus \{0\}$; en particulier on a $f_u = f_1$. Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{K}_1 \rightarrow \mathbb{K}_3 \\ u &\mapsto B(u, 1)B(1, 1)^{-1} \end{aligned}$$

Alors f est un morphisme additif définissable non nul. D'après le Théorème de corps de Zilber, on a $\mathbb{K}_1 = \rho_1(\Theta_1) + \dots + \rho_1(\Theta_1)$ (n_1 fois). Alors le produit de deux éléments non nuls de $\mathbb{K}_1$ est une somme finie de produits d'éléments de $\rho_1(\Theta_1)$. Ainsi par additivité de f , pour montrer que f est un morphisme multiplicatif, il suffit de montrer que $f(\rho_1(\bar{t})\rho_1(\bar{s})) = f(\rho_1(\bar{t}))f(\rho_1(\bar{s}))$ pour tous $\bar{t}, \bar{s} \in \Theta_1$. On a

$$\begin{aligned} B(\rho_1(\bar{t})\rho_1(\bar{s}), 1) &= B(\rho_1(\bar{s})^t, 1) \text{ par définition de } \rho_1 \\ &= B(\rho_1(\bar{s}), 1^{t^{-1}})^t \text{ par } T\text{-covariance de } B \\ &= B(\rho_1(\bar{s}), \rho_2(\bar{t}^{-1}))^t \\ &= \rho_3(\bar{t})B(\rho_1(\bar{s}), \rho_2(\bar{t}^{-1})) \\ &= \rho_3(\bar{t})f_{\rho_1(\bar{s})}(\rho_2(\bar{t}^{-1}))B(\rho_1(\bar{s}), 1) \\ &= \rho_3(\bar{t})f_1(\rho_2(\bar{t}^{-1}))B(\rho_1(\bar{s}), 1) \text{ car } f_{\rho_1(\bar{s})} = f_1 \\ &= \rho_3(\bar{t})B(1, \rho_2(\bar{t}^{-1}))B(\rho_1(\bar{s}), 1)/B(1, 1) \\ &= B(1, \rho_2(\bar{t}^{-1}))^t f(\rho_1(\bar{s})) \\ &= B(1^t, \rho_2(\bar{t}^{-1})^t) f(\rho_1(\bar{s})) \\ &= B(\rho_1(\bar{t}), \rho_2(\bar{t})\rho_2(\bar{t}^{-1})) f(\rho_1(\bar{s})) \\ &= B(\rho_1(\bar{t}), 1) f(\rho_1(\bar{s})) \end{aligned}$$

et alors on obtient $f(\rho_1(\bar{t})\rho_1(\bar{s})) = f(\rho_1(\bar{t}))f(\rho_1(\bar{s}))$. Enfin, on a $f(0) = f(0.0) = 0 = f(0)f(0)$ et $f(0.u) = f(u.0) = f(0) = f(0)f(u) = f(u)f(0)$ pour tout $u \in \mathbb{K}_1$. Alors f est un morphisme définissable du corps $\mathbb{K}_1$ dans $\mathbb{K}_3$, et en particulier un morphisme injectif d'anneaux. Mais $\mathbb{K}_3$ est un corps infini de rang de Morley fini, alors d'après le Fait 1.5, il n'admet donc pas de sous-corps infini définissable. Alors f est surjectif, et les corps $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes. Enfin, comme $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes, on conclut que les trois corps $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes. $\square$

Comme B est non nul, dans tout ce qui suit, on considère $u_0 \in K_1 \setminus \{0\}$ et $v_0 \in K_2 \setminus \{0\}$ tels que $B(u_0, v_0) \neq 0$.

Deuxième cas : on suppose que $T_3 := C_T(\mathbb{K}_3)^\circ$ est non trivial

L'application définissable

$$\begin{aligned} \gamma &: T \rightarrow \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3 \\ t &\mapsto (tC_T(\mathbb{K}_1), tC_T(\mathbb{K}_2), tC_T(\mathbb{K}_3)) \end{aligned}$$

est une injection car $C_T(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_3) = 1$. Comme Θ_i s'injecte définissablement dans $\mathbb{K}_i^*$ via ρ_i pour chaque $i = 1, 2, 3$, alors T s'injecte définissablement dans $\mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^* \times \mathbb{K}_3^*$ via l'injection $\rho = (\rho_1 \times \rho_2 \times \rho_3) \circ \gamma$. L'image S de T_3 par cette injection est un sous-ensemble définissable de $\mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^* \times \{1\}$. De plus, si on considère l'action de $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_3$ sur $(\mathbb{K}_i)_+$, pour $i = 1, 2, 3$, définie par

$$u^{(x,y,z)} = \begin{cases} u^x & \text{si } u \in (\mathbb{K}_1)_+ \\ u^y & \text{si } u \in (\mathbb{K}_2)_+ \\ u^z & \text{si } u \in (\mathbb{K}_3)_+ \end{cases} \quad (5.1)$$

alors cette action étend celle de T , et comme B est T -covariante, alors B est S -covariante. Par ailleurs, T_3 est infini et agit définissablement sur $(\mathbb{K}_1)_+$. De plus, d'après le Lemme 5.6 on a $C_{T_3}(\mathbb{K}_1) = 1$, et d'après le Fait 5.4 le groupe $(\mathbb{K}_1)_+$ est T_3 -minimal. Le Théorème de corps de Zilber donne $\mathbb{K}_1 = \rho_1(T_3) + \dots + \rho_1(T_3)$ (m fois).

Pour i et pour tout $(x_1, y_1, 1), \dots, (x_i, y_i, 1)$ dans S , on notera $x_{1,i} := x_1 + \dots + x_i$ et $(y^{-1})_{1,i} := y_1^{-1} + \dots + y_i^{-1}$. Enfin, définissons l'ensemble :

$$X := \bigcup_{i \geq 1} \{(x_{1,i}, (y^{-1})_{1,i}^{-1}, 1) \mid (x_1, y_1, 1), \dots, (x_i, y_i, 1) \in S, (y^{-1})_{1,i} \neq 0\}$$

Alors S est un sous-ensemble de X , et on remarque que X est un ensemble stable par multiplication.

Résultat 5.9. B est X -covariante.

PREUVE – Pour $k = 1, \dots, i$ et $(x_k, y_k, 1) \in S$, posons $s_k = (x_k^{-1}, y_k^{-1}, 1)$. Alors pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ et pour tout $(x_{1,i}, (y^{-1})_{1,i}^{-1}, 1) \in X$, on a $B(u^{(x_{1,i}, (y_{1,i}^{-1})^{-1}, 1)}, v^{(x_{1,i}, (y_{1,i}^{-1})^{-1}, 1)}) = B(u^{x_{1,i}}, v^{(y_{1,i}^{-1})^{-1}})$ et

$$\begin{aligned} B(u^{x_{1,i}}, v^{(y_{1,i}^{-1})^{-1}}) &= B(u^{x_1}, v^{(y_1^{-1})^{-1}}) + \dots + B(u^{x_i}, v^{(y_i^{-1})^{-1}}) \\ &= B(u^{x_1}, v^{(y_1^{-1})^{-1}})^{s_1} + \dots + B(u^{x_i}, v^{(y_i^{-1})^{-1}})^{s_i} \\ &= B((u^{x_1})^{s_1}, (v^{(y_1^{-1})^{-1}})^{s_1}) + \dots + B((u^{x_i})^{s_i}, (v^{(y_i^{-1})^{-1}})^{s_i}) \end{aligned}$$

car B est S -covariante ; ce qui donne par la suite :

$$\begin{aligned} B(u^{x_{1,i}}, v^{(y_{1,i}^{-1})^{-1}}) &= B(u, v^{y_1^{-1}(y_1^{-1})^{-1}}) + \dots + B(u, v^{y_i^{-1}(y_i^{-1})^{-1}}) \\ &= B(u, v^{(y_1^{-1} + \dots + y_i^{-1})(y_1^{-1})^{-1}}) \\ &= B(u, v^{(y^{-1})_{1,i}(y^{-1})_{1,i}^{-1}}) \\ &= B(u, v) \end{aligned}$$

donc B est X -covariante. $\square$

Soit Y le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \times \{1\}$ tel que B est Y -covariante. Alors Y contient X .

Résultat 5.10. *On a $Y \subseteq \mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^* \times \{1\}$.*

PREUVE – Pour tout $x \in \mathbb{K}_1$ (respectivement $y \in \mathbb{K}_2$), B n'est pas $(x, 0, 1)$ -covariant (respectivement $(0, y, 1)$ -covariant). En effet supposons le contraire, alors

$$\begin{aligned} B(u_0, v_0) &= B(u_0, v_0)^{(x, 0, 1)} = B(u_0^x, 0) = 0 \\ B(u_0, v_0) &= B(u_0, v_0)^{(0, y, 1)} = B(0, v_0^y) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui est exclu car $B(u_0, v_0) \neq 0$, donc on a $Y \subseteq \mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^* \times \{1\}$. $\square$

Résultat 5.11. *La projection X_1 de X sur $\mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^*$ est le graphe d'un isomorphisme définissable entre $\mathbb{K}_1^*$ et $\mathbb{K}_2^*$.*

PREUVE – Considérons la projection

$$\begin{aligned} \psi_1 : X_1 &\rightarrow \mathbb{K}_1^* \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

c'est une application définissable. Soient (x, y) et (x, y') dans X_1 , alors on a $B(u, v) = B(u, v)^{(x, y, 1)} = B(u, v)^{(x, y', 1)}$, et $B(u, v) = B(u^x, v^y) = B(u^x, v^{y'})$; donc on obtient $B(u^x, v^{y-y'}) = 0$. Si $y \neq y'$, en prenant $u = u_0^{x^{-1}}$ et $v = v_0^{(y-y')^{-1}}$, on a $B(u_0, v_0) = 0$, ce qui est contraire au choix de u_0 et v_0 . Donc $y = y'$ et ψ_1 est injective. Comme S est un groupe infini que l'on peut considérer contenu dans X_1 , son image ψ_1 est un sous-groupe infini de $\mathbb{K}_1^*$. Il vient d'après le Fait 5.4 et le Théorème de corps de Zilber, que $\mathbb{K}_1 = \psi_1(S) + \dots + \psi_1(S)$ (m fois). Il s'ensuit que la projection ψ_1 est surjective. Aussi, pour tout $(x, y) \in X_1$, il existe $y' \in \mathbb{K}_2^*$ tel que $(x^{-1}, y') \in X_1$; donc $(1, yy') \in X_1$ car X , et donc X_1 , est stable par multiplication, d'où $y' = y^{-1}$ puisque ψ_1 est injective. On en déduit que X_1 est un sous-groupe $\mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^*$. De même, la projection

$$\begin{aligned} \psi_2 : X_1 &\rightarrow \mathbb{K}_2^* \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

est un morphisme injectif définissable. En effet, si $(x, 1) \in \ker(\psi_2)$, alors on a $B(u, v) = B(u, v)^{(x, 1, 1)} = B(u^x, v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$, donc $B(u^{x^{-1}}, v) = 0$. Si $x \neq 1$, alors avec $u = u_0^{(x^{-1})^{-1}}$ et $v = v_0$, on aboutit à une contradiction, d'où $x = 1$.

De ce qui précède, on en déduit que X_1 est le graphe d'un homomorphisme injectif définissable α entre $\mathbb{K}_1^*$ et $\mathbb{K}_2^*$. Comme $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_2$ sont de caractéristique $p > 0$, alors le Fait 5.2 permet de dire α est surjectif, alors on conclut. $\square$

Résultat 5.12. *On a $X = Y$.*

PREUVE – Soient $x \in \mathbb{K}_1^*$ et $y \in \mathbb{K}_2^*$ tels que $(x, y, 1) \in Y$. S'il existe $y_0 \in \mathbb{K}_2^*$ tel que $(x, y_0, 1) \in Y$, alors $y = y_0$. En effet, pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$, on a $B(u, v) = B(u, v)^{(x, y, 1)} = B(u, v)^{(x, y_0, 1)}$, et par Y -covariance de B cela donne $B(u^x, v^y) = B(u^x, v^{y_0})$. Alors par bi-additivité de B , on a

$$B(u^x, v^{(y-y_0)}) = 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2.$$

Si $y - y_0 \neq 0$, alors pour $u = u_0^{x^{-1}}$ et $v = v_0^{(y-y_0)^{-1}}$, il vient que $B(u_0, v_0)$ est nul, ce qui est impossible par choix de u_0, v_0 . Donc on a $y - y_0 = 0$, i.e. $y = y_0$. Mais $x \in \mathbb{K}_1^*$ et d'après le Résultat 5.11, il existe $y_0 \in \mathbb{K}_2^*$ tel que $(x, y_0, 1) \in X \subseteq Y$, alors on conclut d'après ce qui précède. $\square$

Résultat 5.13. *$C_{XT}(\mathbb{K}_1)$ et $C_{XT}(\mathbb{K}_2)$ sont infinis.*

PREUVE – Comme T ne centralise pas $\mathbb{K}_3$, alors T n'est pas contenu dans X . Puisque T est connexe, on en déduit que $T \cap X$ est un sous-groupe d'indice infini dans T . Mais la projection de X sur $\mathbb{K}_i^*$ ($i = 1, 2$) est surjective d'après le résultat 5.11, alors celle de XT sur $\mathbb{K}_i^*$ aussi, donc $C_{XT}(\mathbb{K}_i)$ est infini. $\square$

On peut alors compléter l'analyse du deuxième cas, ce qui complète la preuve du Théorème 5.7.

Résultat 5.14. *Les corps $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes.*

PREUVE – D'après le Résultat 5.11, X est connexe et donc XT est aussi connexe. Ainsi XT est un groupe connexe abélien définissable infini qui agit sur les groupes additifs de $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ respectivement. Nous allons montrer que les hypothèses du Fait 5.1 sont vérifiées par cette action.

Comme T ne centralise aucun des groupes $(\mathbb{K}_1)_+, (\mathbb{K}_2)_+, (\mathbb{K}_3)_+$, alors XT non plus, et donc on peut dire que $XT/C_{XT}(\mathbb{K}_i)$ agit sur $(\mathbb{K}_i)_+$ comme un sous-groupe infini de K_i^* . Il reste à montrer que $C_1 = C_{XT}(\mathbb{K}_1)^\circ$ (resp. $C_2 = C_{XT}(\mathbb{K}_2)^\circ$) agit non trivialement sur $(\mathbb{K}_2)_+$ (resp. $(\mathbb{K}_1)_+$).

Supposons que $C_1 \subseteq C_2$, alors $C_1 \subseteq C_{XT}(B(u, v))$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2$ et ceci par XT -covariance de B . D'après le Lemme 5.5, on en déduit que $C_1 \subseteq C_{XT}(\mathbb{K}_3)$. Alors C_1 est un sous-groupe $\mathbb{K}_1^* \times \mathbb{K}_2^* \times \mathbb{K}_3^*$ qui centralise $\mathbb{K}_1 \times \mathbb{K}_2 \times \mathbb{K}_3$, donc on a $C_1 = 1$; cela contredit le résultat 5.13. Ainsi C_1 ne centralise pas $\mathbb{K}_2$. De même, on montre que C_2 ne centralise pas $\mathbb{K}_1$. Alors en appliquant le Fait 5.1 on a un isomorphisme définissable entre $\mathbb{K}_1$ et $\mathbb{K}_3$, et un isomorphisme définissable entre $\mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$. On conclut alors que les corps $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes. $\square$

5.1.2 Vers une autre configuration.

Dans cette sous-section, on suppose que T est définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_1^*$, en particulier $C_T(\mathbb{K}_1) = 1$, et on montre le résultat suivant :

Proposition 5.15. – *Les groupes $(\mathbb{K}_1)_+$, $(\mathbb{K}_2)_+$ et $(\mathbb{K}_3)_+$ sont tous définissablement isomorphes.*

On considère la notation 5.8. Si l'un des centralisateurs $C_T(\mathbb{K}_i)$ est infini, alors le Théorème 5.7 dit que les corps $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont isomorphes, on conclut. On va donc supposer dans toute la suite de la sous-section que $C_T(\mathbb{K}_2)$ et $C_T(\mathbb{K}_3)$ sont finis.

Lemme 5.16. – *Les groupes multiplicatifs Θ_2 et $\mathbb{K}_2^*$, respectivement Θ_3 et $\mathbb{K}_3^*$, sont définissablement isomorphes.*

PREUVE – Comme T est isomorphe à $\mathbb{K}_1^*$, alors il admet un q -tore non trivial pour tout $q \neq p$, il en est de même pour $\Theta_2 = T/C_T(\mathbb{K}_2)$ car $C_T(\mathbb{K}_2)$ est fini. Comme Θ_2 agit fidèlement sur $\mathbb{K}_2$, alors d'après le Fait 5.3, on a $rk(\Theta_2) = rk(\mathbb{K}_2) = rk(\mathbb{K}_2^*)$. Mais $\Theta_2 \cong^{def} \rho_2(\Theta_2)$, alors on a $rk(\rho_2(\Theta_2)) = rk(\Theta_2) = rk(\mathbb{K}_2^*)$. Ainsi par connexité de $\mathbb{K}_2^*$, on a $\rho_2(\Theta_2) = \mathbb{K}_2^*$, d'où $\Theta_2 \cong^{def} \mathbb{K}_2^*$. On fait de même pour Θ_3 et on a $\Theta_3 = T/C_T(\mathbb{K}_3) \cong^{def} \mathbb{K}_3^*$. $\square$

De ce résultat il vient que :

Lemme 5.17. – *Les groupes multiplicatifs $\mathbb{K}_1^*, \mathbb{K}_2^*$ et $\mathbb{K}_3^*$ sont définissablement isomorphes.*

PREUVE – Comme T et $\mathbb{K}_1^*$ sont définissablement isomorphes, alors ρ_1 est un isomorphisme définissable entre eux. Alors d'après le Lemme 5.16 on a $\mathbb{K}_2^* \cong^{def} \Theta_2 = T/C_T(\mathbb{K}_2) \cong^{def} \mathbb{K}_1^*/\rho_1(C_T(\mathbb{K}_2))$. Mais $\mathbb{K}_1^*/\rho_1(C_T(\mathbb{K}_2))$ est un groupe algébrique multiplicatif connexe de même dimension que $\mathbb{K}_1^*$ car $\rho_1(C_T(\mathbb{K}_2))$ est fini, alors il est définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_1^*$ (Fait 1.72). Alors $\mathbb{K}_1^*$ et $\mathbb{K}_2^*$ sont définissablement isomorphes. De même on obtient que $\mathbb{K}_1^*$ et $\mathbb{K}_3^*$ sont définissablement isomorphes. On en déduit que les groupes $\mathbb{K}_1^*, \mathbb{K}_2^*$ et $\mathbb{K}_3^*$ sont définissablement isomorphes. $\square$

Remarque 5.18. – D'après le Lemme 5.17 on peut dire que les groupes T, Θ_2 et Θ_3 agissent transitivement sur $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ respectivement. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{K}_i, i = 1, 2, 3$, il existe $t \in T$ tel que

$$x = \begin{cases} u_0^t & \text{si } x \in \mathbb{K}_1 \\ v_0^t & \text{si } x \in \mathbb{K}_2 \\ B(u_0, v_0)^t & \text{si } x \in \mathbb{K}_3 \end{cases}$$

Lemme 5.19. – *Soient $\mathbb{L}$ un corps infini de rang de Morley fini et A un sous-groupe définissable et connexe du groupe vectoriel $\mathbb{L}^n$ ($n > 0$). Si A et $\mathbb{L}$ sont de même rang de Morley, alors il existe un sous-groupe fini E de A tel que A/E et $\mathbb{L}$ sont définissablement isomorphes.*

PREUVE – On procède par induction sur n . On peut supposer $n > 1$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{L}^n \setminus \{0\} &\rightarrow (\mathbb{L}^n \setminus \{0\})/\sim = \Lambda \\ x &\mapsto \phi(x) = \mathbb{L}x \end{aligned}$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence sur $\mathbb{L}^n \setminus \{0\}$ définie par

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{L}^* \text{ tel que } x = \lambda y.$$

Alors ϕ est une application définissable et pour tout $w \in \Lambda$, on a $rk(\phi^{-1}(w)) = rk(w) = rk(\mathbb{L})$. Ainsi d'après le troisième axiome de rang, on obtient $rk(\Lambda) = rk(\mathbb{L}^n) - rk(\mathbb{L}) = (n-1)rk(\mathbb{L})$.

Si $n > 2$, alors on a $rk(\Lambda) = (n-1)rk(\mathbb{L}) > rk(\mathbb{L}) = rk(A) \geq rk(\phi(A \setminus \{0\}))$. Ce qui implique $\phi(A \setminus \{0\}) \neq \Lambda$. Donc, il existe $w_0 \in \Lambda$ tel que $\phi(a) \neq w_0$ pour tout $a \in A \setminus \{0\}$. Prenons $V = \phi^{-1}(w_0) \cup \{0\}$. Alors V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}^n$ et $A \cap V = \{0\}$. Ainsi A est isomorphe à un sous-groupe définissable et connexe de $\mathbb{L}^n/V$, et $\mathbb{L}^n/V$ est isomorphe à $\mathbb{L}^{n-1}$. D'après l'hypothèse d'induction, on obtient le résultat. On va donc supposer $n = 2$. En particulier on a $rk(A) = rk(\mathbb{L}) = rk(\Lambda)$. Notons

$$\begin{aligned} B_i : &= \{a \in A \setminus \{0\} \mid rk(\phi^{-1}(\phi(a)) \cap (A \setminus \{0\})) = i\} \\ &= \{a \in A \setminus \{0\} \mid rk(\mathbb{L}a \cap (A \setminus \{0\})) = i\} \end{aligned}$$

On a

$$rk(\phi(B_i)) = rk(B_i) - i \quad \text{pour tout } i \geq 0$$

Comme les B_i recouvrent $A \setminus \{0\}$, on obtient $rk(\phi(A \setminus \{0\})) = \max_{i \geq 0} (rk(B_i) - i)$. Aussi, comme $rk(B_i) \leq rk(A)$ pour tout i , on a $rk(B_i) - i < rk(A)$ pour tout $i \neq 0$. Ainsi, si $rk(B_0) < rk(A)$, alors $rk(\phi(A \setminus \{0\})) < rk(A) = rk(\Lambda)$. Ce qui implique $\phi(A \setminus \{0\}) \neq \Lambda$, et comme on l'a fait précédemment, on obtient le résultat. Supposons donc $rk(B_0) = rk(A)$. Alors il y a une infinité de sous-espaces vectoriels de dimension un de $\mathbb{L}^2$ que A intersecte finiment. Soient V et U deux de ces sous-espaces vectoriels. Alors $\mathbb{L}^2 = U \times V$, et V et U sont des copies de $\mathbb{L}$. Pour tout $a \in A$, on note $f(a)$ la projection de a sur U , et $g(a)$ la projection de a sur V ; alors on a $a = (f(a), g(a))$. Soit l'application définissable

$$\begin{aligned} h : A &\rightarrow U \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Alors h est un morphisme additif définissable, et $\ker h = \{a \in A : f(a) = 0\} = A \cap V$ est fini. Comme $rk(A) = rk(U) = rk(\mathbb{L})$, on a $A/A \cap V \cong^{def} U \cong^{def} \mathbb{L}$. $\square$

PREUVE DE LA PROPOSITION 5.15– Pour tout $x \in \mathbb{K}_2$, on note C_x le noyau du morphisme additif

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{K}_1 &\rightarrow \mathbb{K}_3 \\ u &\mapsto B(u, x) \end{aligned}$$

Alors d'après la condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de $\mathbb{K}_1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{K}_2$ tels que $C = \bigcap_{x \in \mathbb{K}_2} C_x = \bigcap_{i=1}^n C_{x_i}$. Soit $c \in C$, alors pour tout $v \in \mathbb{K}_2$, on a $B(c, v) = 0$. Si $c \neq 0$, alors d'après la

Remarque 5.18, il existe $t \in T$ tel que $u_0 = c^t$. Il vient que

$$\begin{aligned} B(u_0, v_0) &= B(c^t, (v_0^{t^{-1}})^t) \\ &= B(c, v_0^{t^{-1}})^t \text{ par } T\text{-covariance de } B \\ &= 0^t \text{ car } v_0^{t^{-1}} \in \mathbb{K}_2 \\ &= 0 \end{aligned} ,$$

ce qui contredit $B(u_0, v_0) \neq 0$. Alors on a $c = 0$ et $C = \{0\}$. Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{K}_1 &\rightarrow \mathbb{K}_3^n \\ u &\mapsto (f_{x_1}(u), \dots, f_{x_n}(u)) \end{aligned} ,$$

alors χ est un morphisme additif définissable injectif car ayant pour noyau C est trivial. On peut donc supposer que $(\mathbb{K}_1)_+$ est un sous-groupe définissable de $\mathbb{K}_3^n$. D'après le Lemme 5.17 on a $\mathbb{K}_1^* \cong^{def} \mathbb{K}_3^*$, alors $rk(\mathbb{K}_1) = rk(\mathbb{K}_3)$ et d'après le Lemme 5.19, il existe un sous-groupe fini E de $(\mathbb{K}_1)_+$ tel que $(\mathbb{K}_1)_+/E$ est définissablement isomorphe à $(\mathbb{K}_3)_+$. Enfin, comme $(\mathbb{K}_1)_+$ est un groupe algébrique et E est fini, alors on a $(\mathbb{K}_1)_+ \cong^{def} (\mathbb{K}_1)_+/E \cong^{def} (\mathbb{K}_3)_+$. De même, on montre que $(\mathbb{K}_2)_+$ et $(\mathbb{K}_3)_+$ sont définissablement isomorphes. Ainsi, les groupes additifs $(\mathbb{K}_1)_+, (\mathbb{K}_2)_+$ et $(\mathbb{K}_3)_+$ sont définissablement isomorphes. $\square$

Dans ce dernier cas, montrer que les corps $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2$ et $\mathbb{K}_3$ sont définissablement isomorphes semble être hors de portée.

5.2 Action quasi-simple sur un groupe abélien

Deloro a montré dans [15] qu'étant donné un univers de rang de Morley fini, un groupe algébrique $G \cong SL_2(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K}$ est un corps définissable, agissant définissablement et non trivialement sur un groupe abélien connexe de rang de Morley $\leq 2rk(\mathbb{K})$, munit ce dernier d'une structure naturelle de G -module.

Dans cette section il s'agira d'analyser une telle action d'un groupe $G \cong SL_2(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, sur un groupe connexe abélien V de rang de Morley fini quelconque.

5.2.1 Préliminaire

Nous commençons notre étude par un petit préliminaire.

Fait 5.20. - (Cherlin et Deloro, [14, Lemme 1.16]) *Dans un univers de rang de Morley fini, considérons les objets définissables suivants : un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique p non nulle, un sous-groupe connexe T de $\mathbb{K}^*$, un p -groupe abélien A , et une action de T sur A . Alors $A = C_A(T) \oplus [A, T]$. En particulier, si V est connexe, alors $C_V(T) = 0$ si et seulement si $V = [V, T]$.*

Le Fait 5.20 est crucial dans la suite de ce travail, où la condition $C_V(T) = 0$, équivalente à $V = [V, T]$ dans le cas où V est connexe, va jouer à constituer une hypothèse majeure pour l'étude qui sera menée, notamment pour obtenir la décomposition de V en sous-groupes T -minimaux.

Fait 5.21. - (Cherlin et Deloro, [14, Lemme 1.10]) *Dans un univers de rang de Morley fini, soient A, T des groupes infinis abéliens définissables tels que A est T -minimal et T agit fidèlement sur A . Soit K un groupe définissable normalisant A et T . Alors K centralise T .*

Fait 5.22. - ([4, Lemme 4.10]) *Soit H un groupe infini abélien de rang de Morley fini qui agit non trivialement sur un groupe abélien H -minimal A . Alors A ne contient pas de sous-groupe définissable H -normal propre et non trivial.*

Proposition 5.23. – *Dans un univers de rang de Morley fini, soient $\mathbb{F}$ un corps infini définissable de caractéristique $p > 0$, et T un sous-groupe définissable connexe de $\mathbb{F}^*$ qui agit sur un groupe abélien connexe V d'exposant p . Si on suppose $C_V(T) = 0$, alors tout sous-groupe T -minimal de V a un supplémentaire définissable T -invariant.*

PREUVE – On procède par induction sur le rang de Morley de V . On peut supposer $V \neq 0$. Soit V_1 un sous-groupe T -minimal de V . On peut supposer $V \neq V_1$, et alors V/V_1 est un groupe T -invariant infini.

1) Supposons que V/V_1 n'est pas T -minimal. Alors en appliquant l'hypothèse d'induction, on a

$$V/V_1 = V_2/V_1 \oplus V_2^*/V_1 \quad (5.2)$$

où V_2/V_1 est T -minimal et V_2^*/V_1 est T -invariant non trivial. Ensuite, l'hypothèse d'induction appliquée à V_2^* et V_2 donne

$$W_2 = V_1 \oplus V_3 \quad \text{et} \quad V_2^* = V_1 \oplus V_3^* \quad (5.3)$$

avec V_3^* et V_3 , des sous-groupes T -invariants. Il s'ensuit de (5.2) et (5.3) que $V = V_1 \oplus (V_3 \oplus V_3^*)$ avec $V_3 \oplus V_3^*$ T -invariant.

2) Supposons maintenant que V/V_1 est T -minimal. Comme V_1 est T -minimal, alors d'après le Théorème de Corps de Zilber, l'anneau $R/\text{ann}_R(V_1)$ est définissablement isomorphe à un corps algébriquement clos $\mathbb{K}_1$, où R est l'anneau des endomorphismes de V engendré par T .

• Supposons d'abord qu'il existe $r \in \text{ann}_R(V_1) \setminus \text{ann}_R(V/V_1)$. En particulier on a $V_1 \leq \ker(r)$. Comme l'anneau R est commutatif, il laisse invariant les deux idéaux $\ker(r)$ et $\text{im}(r)$. Donc le groupe T normalise les quotients $\ker(r)/V_1$ et $(\text{im}(r) + V_1)/V_1$. Mais d'après le Fait 5.22, T ne laisse invariant aucun sous-groupe propre non trivial de V/V_1 . Comme $r \neq 0$, on a $\ker(r)/V_1 < V/V_1$, d'où $\ker(r) = V_1$. De plus, comme $r \notin \text{ann}_R(V/V_1)$ et $(\text{im}(r) + V_1)/V_1$ est T -invariant, alors on a $\text{im}(r) + V_1 = V$ d'après le Fait 5.22. En particulier, on a

$$\text{rk}(V) = \text{rk}(V_1) + \text{rk}(\text{im}(r)) - \text{rk}(V_1 \cap \text{im}(r)).$$

Par ailleurs, comme $V/\ker(r) \cong^{def} im(r)$, on a

$$rk(V) = rk(\ker(r)) + rk(im(r)) = rk(V_1) + rk(im(r)).$$

Alors $rk(V_1 \cap im(r)) = 0$, et $V_1 \cap im(r) < V_1$. D'après le Fait 5.22, $V_1 \cap im(r) = 0$, donc $V = V_1 \oplus im(r)$ avec $im(r)$ T -invariant.

• On suppose maintenant que l'annihilateur $ann_R(V_1)$ est contenu dans $ann_R(V/V_1)$. Comme $R/ann_R(V_1)$ est un corps, l'idéal $ann_R(V_1)$ est maximal dans R . Mais $ann_R(V/V_1)$ est un idéal propre de R , alors on a $ann_R(V_1) = ann_R(V/V_1)$.

Posons $A = ann_R(V_1) = ann_R(V/V_1)$. Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} f & : & R \rightarrow R \\ r & \mapsto & r^p \end{array}$$

Comme V est d'exposant p , alors R est de caractéristique p . Il vient que f est un morphisme d'anneaux et $im(f)$ est un sous-anneau de R . De plus, comme T est divisible, on a $T \subseteq im(f)$. Comme T engendre R , il vient que $R \subseteq im(f)$ et on a l'égalité $R = im(f)$. Donc f est surjective. En particulier, pour tout $s \in A$, il existe $r \in R$ tel que $s = r^p$. Cette égalité donne $\bar{s} = \bar{r}^p = 0$ dans R/A . Puis comme R/A est un corps, on a $\bar{r} = 0$ et $r \in A = ann_R(V/V_1) = ann_R(V_1)$. Alors on a $r(V) \subseteq V_1$, et $r^2(V) \subseteq r(V_1) = 0$, donc $s = r^p = 0$. Ainsi $A = \{0\}$ et par conséquent R est un corps définissable.

Ainsi V est un espace vectoriel sur R . Donc chaque sous-groupe T -invariant possède un supplémentaire. Puisque V_1 et V/V_1 sont T -minimaux, la dimension de V est 2. En particulier, la dimension est finie, donc tout sous-groupe T -invariant est définissable. $\square$

Corollaire 5.24. – Avec les hypothèses de la Proposition 5.23, si V_0 est un sous-groupe définissable et T -invariant de V (pas nécessairement T -minimal), alors V_0 a un supplémentaire définissable et T -normal dans V . En particulier, on a

$$V = V_0 \oplus V_1 \oplus \dots \oplus V_n$$

avec V_i des sous-groupes T -minimaux de V , pour $i = 1, \dots, n$.

PREUVE – On procède par induction sur le rang de Morley de V . Si V_0 est T -minimal, alors d'après la Proposition 5.23 on a le résultat. Supposons donc que V_0 n'est pas T -minimal et soit V_1 un sous-groupe T -minimal de V_0 . Comme $C_{V_0}(T) \leq C_V(T) = 0$, d'après la Proposition 5.23, on a $V_0 = V_1 \oplus V_1^*$ avec V_1^* un sous-groupe T -invariant de V_0 . En particulier, le quotient V_0/V_1^* est un sous-groupe T -minimal de V/V_1^* . D'après le Fait 5.20, la condition $C_V(T) = 0$ équivaut à $V = [V, T]$, donc c'est hérité par passage au sous-groupe ou au quotient. D'après la Proposition 5.23, il vient

$$V/V_1^* = V_0/V_1^* \oplus V_2/V_1^*$$

avec V_2/V_1^* T -invariant. L'hypothèse d'induction appliquée à V_2 donne

$$V_2 = V_1^* \oplus V_2^*$$

avec V_2^* un sous-groupe T -invariant de V_2 . On obtient $V = V_0 \oplus V_2^*$ et V_2^* est T -invariant. La Proposition 5.23 permet de conclure sur la décomposition de V en somme directe de sous-groupes T -minimaux. $\square$

La condition $C_V(T) = 0$ équivariant à $V = [V, T]$, alors tout sous-groupe T -invariant de V est définissable connexe admet la même décomposition.

Proposition 5.25. – *Dans un univers de rang de Morley fini, soient G un groupe algébrique quasi-simple et non simple sur un corps définissable $\mathbb{F}$ de caractéristique $p > 2$ et T un tore tel que $T \cap Z(G) \neq 1$. On suppose que G agit définissablement et fidèlement sur un groupe abélien G -minimal V . Alors on a $C_V(T) = 0$.*

PREUVE – On peut supposer T de dimension un. Comme $T \cap Z(G) \neq 1$ et comme $C_G(V) = 1$, alors $C_V(T \cap Z(G))$ est un sous-groupe propre de W . Mais $C_V(T \cap Z(G))$ est G -normal, alors par G -minimalité de V , il vient que $C_V(T \cap Z(G))$ est fini. De même $C_V(T)$ est fini car $C_V(T) \leq C_V(T \cap Z(G))$. Mais d'après le Fait 5.20 on a $V = [V, T] \oplus C_V(T)$ et on conclut par connexité de V que $C_V(T) = 0$ et $V = [V, T]$. $\square$

Dans ce cas on obtient une décomposition de V donnée par le Corollaire 5.24.

À présent nous allons énoncer l'exercice [6, exercice 14 p.73] sous forme de fait.

Fait 5.26. – *Soit W un groupe abélien (additif) de rang de Morley fini sans éléments involutifs. Soit u un automorphisme involutif définissable de W , alors on a $W = W^{-u} \oplus W^{+u}$, avec W^{-u} l'ensemble des éléments de W inversés par u , et W^{+u} l'ensemble des éléments de W fixés par u .*

Le Lemme 5.27 nous donne une idée précise de l'action G sur V mentionnée dans la Proposition 5.25.

Lemme 5.27. – *Dans un univers de rang de Morley fini, soient G un groupe algébrique quasi-simple et non simple sur un corps définissable $\mathbb{F}$ de caractéristique $p > 2$. Supposons que G agit définissablement et fidèlement sur un groupe abélien G -minimal V . Alors l'élément involutif central ξ inverse V .*

PREUVE – D'après le Fait 5.26, on a $V = V^{+\xi} \oplus V^{-\xi}$. Mais $V^{+\xi} = C_V(\xi)$ est G -normal. Alors par G -minimalité de V et comme $C_G(V) = 1$, on a $V^{+\xi} = 0$. Donc $V = V^{-\xi}$, c'est-à-dire ξ inverse V . $\square$

5.2.2 Une action de $G \cong SL_2(\mathbb{K})$ sur un groupe abélien

Dans toute cette sous-section, on se place dans un univers de rang de Morley fini ; on considère un corps définissable $\mathbb{K}$ de caractéristique non nulle $p > 0$, un groupe définissable abélien connexe V et une action définissable et non triviale de $G \cong SL_2(\mathbb{K})$ sur V .

Fait 5.28. - ([4, Lemme 11.2]) Soit H un groupe connexe de rang de Morley fini agissant définissablement sur un groupe abélien A . Alors il existe une suite de sous-groupes H -invariants

$$0 = A_0 < A_1 < \dots < A_n = V$$

telle que chaque quotient A_i/A_{i-1} est soit trivial, soit H -irréductible (i.e. n'admettant pas de sous-groupe propre H -invariant non trivial).

La suite définie dans le Fait 5.28 est une *suite de composition* de A relative à H .

Notation 5.29. – Pour la suite, on pose $rk(\mathbb{K}) = a$. Considérons $B = U \rtimes T$, un sous-groupe de Borel de G où T est un tore maximal. En particulier, U et T sont de dimension un et on a $rk(U) = rk(T) = a$.

D'après la Proposition 5.25, si $p > 2$ et si l'action de G sur V est fidèle et V est G -minimal, alors on a $C_V(T) = 0$; ce qui nous donne une propriété de décomposition de V décrite par le Corollaire 5.23.

Dans toute la suite (sauf mention du contraire), en vue de préserver en caractéristique $p = 2$ cette propriété de décomposition, nous allons supposer $V = [V, T]$.

Proposition 5.30. – On a $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, pour $V_1, \dots, V_n$ des sous-groupes T -minimaux de V . De plus, pour $k = 1, \dots, n$, W_{k+1}/W_k est T -minimal et centralisé par U , où $W_k = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$.

PREUVE – Prenons une suite de composition $0 = W_0 < W_1 < \dots < W_n = V$ de V relative à B , où $B = UT$ est un sous-groupe de Borel. Puisque l'hypothèse $V = [V, T]$ passe aux sous-groupes T -invariants, les groupes W_i sont connexes et la chaîne est de longueur finie. En appliquant le Corollaire 5.24, on a une décomposition

$$W_i = W_{i-1} \oplus V_i$$

avec $V_i \cong^{def} W_i/W_{i-1}$ T -invariant et T -minimal ($0 < i \leq n$). Donc $V = \bigoplus_i V_i$ est une décomposition en somme directe de sous-groupes T -minimaux

D'après le Fait 1.34, l'action de U sur chaque W_i/W_{i-1} est triviale. $\square$

Proposition 5.31. – Pour tout sous-groupe T -minimal W de V , on a un isomorphisme définissable entre W et $\mathbb{K}_+$. En particulier, le rang de V est na , où n est la longueur de V comme T -module.

PREUVE – Supposons d'abord que U ne centralise pas W .

Soit $0 = V_0 < V_1 < \dots < V_n = V$ une suite de composition de V comme B -module, $B = UT$ étant un sous-groupe de Borel de G . Selon le Fait 1.34, l'action du radical unipotent U sur les facteurs V_i/V_{i-1} est triviale.

Soit i minimal tel que $W \leq V_i$. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \phi : U \times W &\rightarrow V_i/V_{i-1} \\ (u, v) &\mapsto \overline{[v, u]} \end{aligned}$$

L'application ϕ est T -covariante et l'action de T sur U est celle de $\mathbb{K}^*$ sur $\mathbb{K}_+$. D'ailleurs, l'application ϕ est bi-additive et non triviale d'après le choix de i . Le Théorème de corps de Zilber nous permet de voir cette application comme une application de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}_2$ dans $\mathbb{K}_3$, avec trois corps et une action qui passe à travers les groupes multiplicatifs. Donc on peut faire appel à la Proposition 5.15 pour conclure : $(\mathbb{K})_+ \cong^{def} (\mathbb{K}_2)_+ \cong^{def} (\mathbb{K}_3)_+$, ce qui nous donne le premier point de notre proposition. En particulier

$$a = rk(\mathbb{K}) = rk(W) = rk(V_i/V_{i-1})$$

ce qui donne le deuxième point dans ce cas.

Maintenant, supposons que U centralise W . Notons que l'action de G sur W est non triviale puisque l'hypothèse $V = [V, T]$ passe à W , comme on a vu à plusieurs reprises. Donc si $B^* = U^*T$ est le deuxième sous-groupe de Borel contenant le tore T , alors U^* ne centralise pas W et on retombe dans le premier cas considéré, ce qui complète la preuve. $\square$

Notation 5.32. – Posons $N(T) = N_G(T)$. Soit $\zeta \in N(T)$ un 2-élément (i.e d'ordre une puissance de 2) qui inverse T ; l'ordre de ζ dépend de la valeur de p .

Lemme 5.33. – Soit W un $N(T)$ -sous-module de V . Alors W est $N(T)$ -minimal si et seulement si W est somme directe

$$W = W_0 \oplus W_0^\zeta$$

avec W_0 T -minimal.

PREUVE –

Notons que W n'est pas T -minimal, sinon d'après le Fait 5.21 ζ centralise T .

Supposons que W est $N(T)$ -minimal. Soit W_0 un sous-groupe T -minimal de W . Comme W_0^ζ est T -minimal, alors l'intersection $W_0 \cap W_0^\zeta$ est $\langle T, \zeta \rangle = N(T)$ -normal, et est donc finie par $N(T)$ -minimalité de W . Puisque $C_V(T) = 0$, on en déduit que cette intersection est triviale, d'où W_0 et W_0^ζ sont en somme directe. De plus, on a $V = W_0 \oplus W_0^\zeta$ par minimalité de W . En particulier $rk(W) = 2a$ d'après la Proposition 5.31.

Maintenant si $V = W_0 \oplus W_0^\zeta$ avec W_0 T -minimal, alors $rk(V) = 2a$. Mais d'après le paragraphe précédent, tout sous-groupe $N(T)$ -minimal de W est de même rang $2a$, alors on conclut que W est $N(T)$ -minimal. $\square$

Théorème 5.34. – Le $N(T)$ -module V est somme directe de sous-groupes $N(T)$ -minimaux, ces dernier étant de la forme $W \oplus W^\zeta$, avec W T -minimal.

PREUVE –

On peut supposer $V > 0$ et que V ne soit pas lui-même $N(T)$ -minimal. Soit V_0 un $N(T)$ -sous-module maximal propre de V , donc V/V_0 est $N(T)$ -minimal. Il suffit de décomposer $W = W_0 \oplus V^*$ avec V^* $N(T)$ -minimal.

Puisque V_0 est T -invariant, il possède un supplémentaire définissable V_1 T -invariant (Corollaire 5.24). Soit $V_2 < V_1$ T -minimal, et posons

$$V^* = V_2 \oplus V_2^\zeta$$

le $N(T)$ -sous-module associé à V_2 .

Puisque V_0 est maximal, on a $V_0 + V^* = V$. Comme V^* est $N(T)$ -minimal (Lemme 5.33), non contenu dans V_0 , alors l'intersection $V_0 \cap V^*$ est nécessairement finie, donc T agit trivialement sur cette intersection. Puisque $C_V(T) = 0$, l'intersection est triviale. $\square$

Le Théorème 5.34 donne $V = (V_1 \oplus V_1^\zeta) \oplus \dots \oplus (V_m \oplus V_m^\zeta)$ où m est la moitié de la longueur de V en tant que T -module. D'après le Fait 1.31, on note $\mathbb{K}_i$ le corps interprété par $V_i \rtimes T/C_T(V_i)$ et $\mathbb{K}_i^*$ celui interprété par $V_i^\zeta \rtimes T/C_V(V_i^\zeta)$ pour tout $1 \leq i \leq m$. Comme nous le décrit le Fait 1.32, les corps $\mathbb{K}_i$ et $\mathbb{K}_i^*$ ne sont pas forcément les mêmes. À priori, nous avons ici $2m$ corps interprétables qui peuvent être tous différents à isomorphisme près. Ceci nous empêche d'établir sur V une structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Lemme 5.35. – *L'élément ζ établit un isomorphisme définissable entre les corps $\mathbb{K}_i$ et $\mathbb{K}_i^*$.*

PREUVE – On définit l'action de ζ sur $\mathbb{K}_i$ par $x^\zeta := v^\zeta$, où v est l'élément de V_i correspondant à x donné $V_i \cong^{def} (\mathbb{K}_i)_+$. Ainsi l'application additive bijective

$$\begin{aligned} \phi_\zeta : \mathbb{K}_i &\rightarrow \mathbb{K}_i^\zeta \\ x &\mapsto x^\zeta \end{aligned}$$

permet de munir $\mathbb{K}_i^\zeta$ d'une structure de corps. Pour cela il suffit de voir que ϕ_ζ est multiplicative. Puisque les éléments de $\mathbb{K}_i$ sont des sommes finies de produits d'éléments de $T/C_T(V_i)$, alors pour montrer que ϕ_ζ est multiplicative, il suffit d'établir que $\phi_\zeta(\bar{t}\bar{s}) = \phi_\zeta(\bar{t})\phi_\zeta(\bar{s})$ pour tout $\bar{t}, \bar{s} \in T/C_T(V_i)$. Or

$$\phi_\zeta(\bar{t}) = \bar{t}^\zeta = (t.1)^\zeta = t^\zeta.1 = t^{-1}.1 \quad \text{pour tout } \bar{t} \in T/C_T(V_i).$$

Ainsi, on a $\phi_\zeta(\bar{t}\bar{s}) = \phi_\zeta(\overline{ts}) = (ts)^{-1}.1 = (t^{-1}.1)(s^{-1}.1) = \phi_\zeta(\bar{t})\phi_\zeta(\bar{s})$ et on conclut. En particulier on a $\mathbb{K}_i \cong^{def} \mathbb{K}_i^\zeta$. Enfin, il suffit de noter que $\mathbb{K}_i^\zeta = \mathbb{K}_i^*$ pour conclure sur la preuve. $\square$

Ce lemme permet de réduire le nombre de corps interprétés de moitié, et en particulier d'établir des structures d'espace vectoriel sur les sous-groupes $N(T)$ -minimaux de V .

Définition 5.36. – Un T -sous-module W de V sera dit *dégénéré*, si $C_T(W)^\circ \neq 1$.

Proposition 5.37. – *Soit W un sous-module dégénéré maximal de V et $V = V_1 \oplus V_2$ une décomposition de V en $N(T)$ -sous-modules. Alors $W = (W \cap V_1) \oplus (W \cap V_2)$.*

PREUVE – Quitte à remplacer V par $V_1 + W$ et V_2 par $(V_1 + W) \cap V_2$, on peut supposer $V = V_1 + W$. En particulier on a $V_2 \leq V_1 + W$.

Soit $\Theta = C_V(W)$. Puisque $[\Theta, V] = [\Theta, V_1 + W] = [\Theta, V_1] \leq V_1$, il s'ensuit que

$$[\Theta, V_2] \leq V_1 \cap V_2 = 0.$$

Par maximalité de $W = C_V(\Theta)$, donc $V_2 \leq W$ et on conclut. $\square$

Les T -sous-modules dégénérés de V , s'il en existe de non triviaux, affaiblissent tout espoir de définir explicitement l'action de G sur V .

D'après le Lemme 5.35 on peut déjà dire que chaque $N(T)$ -sous-module minimal de V est un espace vectoriel. L'idéal dans le cas où V est G -minimal, aurait été d'obtenir une structure d'espace vectoriel globale sur V , pour laquelle l'action est linéaire.

Pour l'instant on a des structures d'espace vectoriel sur les modules $N(T)$ -minimaux, avec des corps variables, et avec une action (localement) linéaire de $N(T)$ sur chacun.

Chapitre 6

Groupes unipotents en caractéristique positive

Dans [18], où Frécon donne une classification des groupes algébriques sur des corps algébriquement clos de caractéristique zéro à isomorphisme abstrait près, le Fait 6.1 joue un rôle très important.

Fait 6.1. - (Frécon, [18, Fait 3.6, Théorème 4.3]) *Soit un groupe nilpotent G , algébrique connexe sur $\mathbb{Q}$. Alors $G/Z(G)$ est définissablement linéaire dans un langage enrichi de G .*

En fait, pour être plus précis, le langage enrichi dont il est question dans le fait précédent est *l'ACF-expansion* du pur groupe G que nous ne définissons pas ici ; le lecteur pourra se référer à [18] pour plus de détails si besoin est.

Dans ce chapitre, nous tentons de proposer une version de ce résultat en caractéristique non nulle.

Notons qu'il n'existe pas de méthode générale pour définir un corps algébriquement clos de caractéristique positive à partir de groupes nilpotents de rang de Morley fini. À notre connaissance, les travaux les plus aboutis pouvant permettre l'interprétation d'un corps dans les groupes (algébriques) nilpotents et d'exposants bornés, sont ceux de G. D. Rabinovich [35] et de E. Hrushovski et B. Zilber [24]. Cependant, même ces travaux très difficiles ne se généralisent pas à notre cas.

Ainsi, pour l'étude qui sera faite dans toute la suite de ce chapitre, nous allons supposer qu'un tel corps interprétable existe. Dans une approche plus générale, nous allons étudier les possibilité de linéarité pour le quotient $G/Z(G)$, où G est un U_K -groupe nilpotent de rang de Morley fini et K un corps interprétable de caractéristique non nulle.

Un grand merci à Gregory Cherlin en sa qualité de rapporteur de ce mémoire, pour avoir proposé une meilleure réorganistaion de ce chapitre.

6.1 Brève étude préliminaire

Ici l'opérateur d'unipotence U_K sera considéré dans sa forme générale donnée par la Définition 2.55.

Le Fait 6.2 est une combinaison de deux résultats du livre [25] de J. E. Humphreys.

Fait 6.2. - ([25, Proposition 20.2, Corollaire 20.4]) *Soit $\mathbb{L}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Alors tout groupe algébrique abélien connexe et d'exposant p (donc unipotent) est isomorphe à $\mathbb{L}^n$ pour un entier $n \geq 0$.*

Le lemme suivant s'avère utile pour la manipulation des U_K -groupes.

Lemme 6.3. - (Cherlin) *Soient K un corps algébriquement clos et E un sous-groupe fini de K_+^n . Alors $K_+^n/E \cong_{\text{def}} K_+^n$.*

PREUVE – On peut supposer que la caractéristique p de K est non nulle. Le sous-groupe E de G étant fini, le quotient G/E est algébrique, et en plus d'exposant p . D'après le Fait 6.2, K_+^n/E est isomorphe en tant que groupe algébrique à K_+^d pour un certain entier $d \geq 1$. Par égalité de dimension, il vient que $d = n$, et l'isomorphisme est définissable dans K . $\square$

Corollaire 6.4. – *Soit A un groupe connexe indécomposable de rang de Morley fini et K un corps interprétable tel que $A/J(A) \approx K_+$. Alors un quotient de $A/J(A)$ par un sous-groupe fini est définissablement isomorphe à K_+ .*

Notons cependant que ce corollaire ne permet pas de conclure que $A/J(A) \cong_{\text{def}} K_+$, un fait que nous devons garder à l'esprit dans la suite.

Lemme 6.5. - (Cherlin) *Soit G un groupe de rang de Morley fini qui est produit central d'un nombre fini de sous-groupes G_i tels que $G_i \cap \langle G_j : j \neq i \rangle$ est fini pour chaque i , et chaque G_i admet un sous-groupe normal fini E_i tel que G_i/E_i se plonge définissablement dans un produit K_+^d . Alors G admet un sous-groupe normal fini E tel que G/E se plonge définissablement dans K_+^d .*

PREUVE – Soit N le sous-groupe de G engendré par les sous-groupes centraux $N_i = G_i \cap \langle G_j : j \neq i \rangle$. L'application naturelle $\prod_i (G_i/N_i) \rightarrow G/N$ est surjective. Si $(g_1N, \dots, g_nN)$ appartient au noyau, on a $\prod g_i \in N$. Notons que $N \subseteq \langle G_j : j \neq i \rangle$ pour chaque i . Donc $g_i \in \langle G_j : j \neq i \rangle$ pour chaque i , et le noyau est trivial. Ainsi, G/N est isomorphe à $\prod_i (G_i/N_i)$.

Comme chaque quotient G_i/N_iE_i se plonge définissablement dans $K_+^{d_i}$, alors en passant au sous-groupe $N\langle E_i : \text{pour tout } i \rangle$ on obtient le résultat. $\square$

6.2 L'étude de linéarité

Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini et d'exposant borné interprétant un corps $\mathbb{K}$ tel que G est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe, l'objectif dans ce qui suit est d'analyser les conditions sous lesquelles le quotient $G/Z(G)$ est définissablement linéaire.

Lemme 6.6. – *Soient G un groupe nilpotent de classe 2 et de rang de Morley fini, et $\mathbb{K}$ un corps interprétable infini. Supposons que G' contient un sous-groupe fini E tel que le quotient G'/E se plonge définissablement dans une puissance cartésienne de $\mathbb{K}_+$. Alors $G/Z(G)$ se plonge définissablement dans une puissance cartésienne de $\mathbb{K}_+$.*

PREUVE – Soit $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des sous-groupes normaux définissables N de G tels que $Z(G) \leq N$ et G/N se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$. Alors l'ensemble $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$ est stable par intersection et est non vide car contenant G . Soit $N_{\mathbb{K}}$ l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{N}_{\mathbb{K}}$. Alors $N_{\mathbb{K}} \in \mathcal{N}_{\mathbb{K}}$. Il suffit donc de montrer que $N_{\mathbb{K}} = Z(G)$.

Soit $g \in G$. Considérons l'homomorphisme $\gamma_g : G/E \rightarrow G'/E$ donné par $\gamma_g(\bar{u}) = \overline{[g, u]}$. Soit K_g/E son noyau. Alors G/K_g se plonge définissablement dans G'/E , et donc dans une puissance de $\mathbb{K}_+$. Comme $Z(G)$ est contenu dans K_g , on a $K_g \in \mathcal{N}_{\mathbb{K}}$, et par minimalité de $N_{\mathbb{K}}$ on a $N_{\mathbb{K}} \leq K_g$ pour tout g . Cela donne $[G, N_{\mathbb{K}}] \leq E$. Ainsi $[G, N_{\mathbb{K}}]$ est connexe et fini, donc trivial, et on obtient $N_{\mathbb{K}} \leq Z(G)$. Donc on a $N_{\mathbb{K}} = Z(G)$ comme voulu. $\square$

Lemme 6.7. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent de classe 2 et de rang de Morley fini, avec $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique non nulle. Supposons que $rk(G/Z(G)) = 1$. Alors il existe un sous-groupe fini E de G' tel que G'/E se plonge définissablement dans une puissance $\mathbb{K}_+^d$, et donc $G/Z(G)$ se plonge définissablement dans une puissance $\mathbb{K}_+^n$.*

PREUVE – D'abord, nous affirmons qu'on peut supposer que G est un groupe indécomposable.

Soit A un sous-groupe indécomposable connexe de G non contenu dans $Z(G)$ et tel que $A/J(A) \approx \mathbb{K}_+$. Alors $G = AZ(G)$ et $Z(A) = A \cap Z(G)$ et

$$G/Z(G) \cong A/Z(A).$$

De plus $G' = A'$. Ainsi les hypothèses et les conclusions attendues sont équivalentes pour A et G .

En prenant G indécomposable nous avons $J(G) = Z(G)^\circ$. Comme $G/J(G) \approx \mathbb{K}_+$, alors $G/J(G)$ a un sous-groupe normal fini $E/J(G)$ tel que son quotient par ce sous-groupe est définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_+$ (Corollaire 6.4). On peut supposer $Z(G) \leq E$.

Pour $g \in G \setminus Z(G)$, on considère l'homomorphisme ad_g de $G/Z(G)$ vers $Z(G)$ donné par commutation de g , et soit Γ_g son image. Alors Γ_g est connexe de rang

de Morley 1. Soit $E_g = ad_g(E/Z(G))$ un sous-groupe fini de Γ_g et $\hat{E}_g$ sa préimage dans G . Alors $E \leq \hat{E}_g$ et on a

$$\Gamma_g/E_g \cong^{def} (G/Z(G))/(\hat{E}_g/Z(G)) \cong^{def} \mathbb{K}_+.$$

Comme G' est engendré par un nombre fini de groupes Γ_g , et que ceux-ci sont connexes de rang 1, alors les hypothèses du Lemme 6.5 s'appliquent et notre première assertion est démontrée. Le reste se déduit du Lemme 6.6. $\square$

Corollaire 6.8. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent de rang de Morley, avec $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique non nulle. Supposons que $rk(G) \leq 3$. Alors soit $G/Z(G)$ se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$, soit on a les points suivants :*

- $rk(G) = 3$,
- $rk(Z(G)) = 1$.

PREUVE – Nous pouvons supposer G non abélien. Ainsi $rk(G/Z(G)) \geq 1$, et si $rk(G/Z(G)) = 1$ le lemme précédent s'applique. Alors on prend $rk(G/Z(G)) \geq 2$ et ainsi $rk(G) = 3$ et $rk(Z(G)) = 1$. $\square$

Lemme 6.9. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent de rang de Morley fini, avec $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique non nulle. Supposons que G est de rang de Morley 3 et classe de nilpotence 2, avec $rk(G') = 1$. Alors $G/Z(G)$ se plonge définissablement dans une puissance cartésienne de $\mathbb{K}_+$.*

PREUVE – D'après le lemme précédent on a $rk(Z(G)) = 1$.

Montrons d'abord que G n'est pas un groupe indécomposable. Prenons $g \in G \setminus Z(G)$. Alors l'application induite par commutation de g a une image de rang de Morley 1 et son noyau est de rang 2, i.e. $rk(C_G(g)) = 2$. Si G est indécomposable il vient que $C_G(g)^\circ = J(G)$ pour tout $g \notin Z(G)$. Ainsi on a $J(G) \subseteq Z(G)$ et $rk(J(G)) = 2$, ce qui contredit $rk(Z(G)) = 1$.

Considérons maintenant un sous-groupe indécomposable A de G non contenu dans $Z(G)$ et tel que $A/J(A) \approx \mathbb{K}_+$. Si $rk(A) = 2$, alors A est normal dans G et donc contient $Z(G)^\circ$. Dans ce cas, on a $J(A) = Z(G)^\circ$. Si $rk(A) = 1$, alors $1 = J(A) \leq Z(G)^\circ$. Donc on a $rk(A/J(A)) = 1$ dans les deux cas. Ainsi pour $g \in G \setminus C_G(A)$, la commutation par g induit un morphisme surjectif entre $A/J(A)$ et G' dont le noyau est fini. On en déduit que le quotient de G' par un sous-groupe fini se plonge définissablement dans $\mathbb{K}_+$. D'après le Lemme 6.6, on conclut. $\square$

Lemme 6.10. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent de rang de Morley 3 et $rk(Z(G)) = 1$, où $\mathbb{K}$ est un corps infini de caractéristique non nulle p interprétable dans G . S'il n'existe pas de plongement définissable de $G/Z(G)$ dans une puissance de $\mathbb{K}_+$, alors nous avons les points suivants :*

- G est indécomposable,
- $J(G) = Z_2(G)^\circ$ est central dans $Z_2(G)$,

- G est nilpotent de classe 3.

PREUVE – Posons $G = \langle A_1, \dots, A_n \rangle Z(G)$ avec A_i indécomposable tel que $A_i/J(A_i) \approx \mathbb{K}_+$ et n considéré minimal.

Alors $A_i \not\leq Z(G)$ et $rk(A_i Z(G)) = 2$; par la Condition du Normalisateur $A_i Z(G)$ est normal dans G .

Supposons d'abord $n \geq 2$. Alors $n = 2$ et $rk(A_i) = 1$ pour $i = 1, 2$, et on a $G' \leq Z(G)^\circ$. Ainsi G est de classe 2. D'après le Lemme 6.9 on conclut.

Supposons donc $n = 1$ et posons $A = A_1$. Alors $Z(A) \leq Z(G)$, d'où $Z(G)^\circ = Z(A)^\circ \leq A$ et $G = A$ est indécomposable.

Supposons qu'il existe un élément $g \in Z_2(G) \setminus C_G(J(G))$. Alors $C_G(g) \cap J(G) < J(G)$, si bien que $rk(C_G(g) \cap J(G)) = 1$. D'autre part $[g, G] \leq Z(G)$, alors $rk(C_G(g)) = 2$. Il vient que $C_G(g)$ est normal dans G et $G = J(G)C_G(g)$, ce qui contredit l'indécomposabilité de G . Donc $Z_2(G) \leq C_G(J(G)) < G$, ce qui implique $Z_2(G)^\circ = J(G)$, doù $J(G)$ est central dans $Z_2(G)$.

Il est alors clair que G est de classe de nilpotence 3, et toutes les assertions sont prouvées. $\square$

Lemme 6.11. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe indécomposable nilpotent de rang de Morley fini, avec $\mathbb{K}$ un corps interprétable infini de caractéristique non nulle. Supposons que G satisfait les points suivants*

- $rk(G) = 3$
- $rk(Z_2(G)) = 2$
- $rk(Z(G)) = 1$

Alors on a les points suivants :

- le quotient $G/Z(G)$ est non abélien,
- $G/Z_2(G)$ se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$,
- $G' = J(G) = Z_2(G)^\circ$.

PREUVE – Comme on a $Z_2(G) < G$, le groupe $G/Z(G)$ est un groupe non abélien de rang de Morley 2. Donc en appliquant le Corollaire 6.8 à $G/Z(G)$ il s'ensuit que $G/Z_2(G) \cong^{def} (G/Z(G))/Z(G/Z(G))$ se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$. Ce qui prouve les deux premiers points.

Comme G' est un sous-groupe définissable connexe normal de G et différent de $Z(G)^\circ$, alors G° contient proprement $Z(G)^\circ$, et doit donc être égal à $J(G)$. De même, on montre que $Z_2(G)^\circ = J(G)$. ce qui complète la preuve. $\square$

Corollaire 6.12. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent de rang de Morley fini, avec $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique non nulle. Si $rk(G) \leq 3$ et $G/Z(G)$ est abélien, alors $G/Z(G)$ se plonge définissablement dans une puissance cartésienne de $\mathbb{K}_+$.*

Dans le cas où le quotient $G/Z(G)$ est non abélien de rang de Morley 2, il ne peut être algébrique, et il est naturel de conjecturer que dans cette situation, il ne peut être définissablement linéaire (ou – ce qui est beaucoup moins certain –

qu'un tel groupe n'existe pas).

Il existe des groupes p -unipotents (Définition 2.1) de dimension 2 qui ne se plongent pas dans une puissance cartésienne de $\mathbb{K}_+$ (car d'exposant p^2), mais ils n'apparaissent pas comme des quotients $G/Z(G)$ dans notre context.

Nous concluons avec quelques informations sur certaines sections de G .

Lemme 6.13. – *Soit G un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe nilpotent de rang de Morley fini avec $\mathbb{K}$ un corps interprétable infini de caractéristique non nulle. Si $rk(G) = 3$, $rk(Z_2(G)) = 2$, et $rk(Z(G)) = 1$, alors les sections $G'/Z(G)$ et $Z(G)^\circ$ se plonge définissablement dans une puissance cartésienne de $\mathbb{K}_+$.*

PREUVE – Considérons d'abord $G'/Z(G)$.

Prenons $g \in G \setminus Z_2(G)$ et considérons le morphisme γ_g de $G/Z_2(G)$ vers $G'/Z(G)$ induit par commutation de g . Son image est connexe et non triviale. Donc γ_g est surjective et son noyau est fini. Comme $G/Z_2(G)$ se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$ (Lemme 6.11), alors $G'/Z(G)$ se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$, ce qui prouve notre premier point.

Prenons $g \in G$ ne centralisant pas $G' = Z_2(G)^\circ$, et considérons le morphisme de $G'/Z(G)$ vers $Z(G)^\circ$ induit par commutation de g . Alors son noyau est fini, d'où son image $Z(G)^\circ$ se plonge définissablement dans une puissance de $\mathbb{K}_+$. $\square$

Chapitre 7

Le groupe d'automorphismes définissables d'un K^* -groupe

En suivant un raisonnement proche de celui de Frécon dans la preuve du [18, Fait 4.6], on prouve dans ce chapitre le Théorème 7.4 concernant le groupe d'automorphismes définissables d'un K^* -groupe simple.

Définition 7.1. – Une famille $(X_i)_{i \in I}$ d'ensembles définissables d'un groupe G de rang de Morley fini est dite *uniformément définissable* si $I \subseteq G^m$ pour $m \in \mathbb{N}$ et s'il existe une formule $\varphi(z, t)$ telle pour tout $i \in I$, $X_i = \{x \mid \varphi(x, i)\}$.

Proposition 7.2. – Soit G un groupe algébrique unipotent sur un corps de caractéristique zéro $\mathbb{K}$. Alors l'ensemble des sous-groupes algébriques de G , isomorphes (au sens algébrique) à $\mathbb{K}_+$ est une famille uniformément définissable dans le langage du pur corps $\mathbb{K}$.

PREUVE – On peut supposer $G \neq 1$. Comme G est supposé unipotent, donc affine, sur $\mathbb{K}$, il se plonge définissablement dans $GL_n(\mathbb{K})$, pour $n > 0$. Soit X un ensemble d'éléments unipotents non triviaux de G , tel que tout élément unipotent non trivial de G soit conjugué par $GL_n(\mathbb{K})$, à un unique élément de X . Comme il n'y a qu'un nombre fini de décompositions de Jordan pour les éléments unipotents de $GL_n(\mathbb{K})$, alors X est fini. Ainsi l'ensemble

$$\mathcal{F} = \{d(x)^g \mid (x, g) \in X \times GL_n(\mathbb{K}), x^g \in G\}$$

est une famille uniformément $\mathbb{K}$ -définissable de sous-groupes de G . De plus, tout élément de $\mathcal{F}$ est définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_+$.

Réciproquement, soit A un sous-groupe définissable de G , définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_+$. Pour $u \in A$ et $u \neq 1$, on a $d(u) = A \cong^{def} \mathbb{K}_+$, d'après le Fait 1.29. Ainsi A est un élément de $\mathcal{F}$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 7.3. – Soit H un groupe de rang de Morley fini interprétant un corps de caractéristique zéro $\mathbb{F}$. Supposons que H est définissablement isomorphe à un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{F}$. Alors l'ensemble des sous-groupes de H définissablement isomorphes à $\mathbb{F}_+$ est une famille uniformément définissable.

PREUVE – Considérons $\varphi : H \rightarrow K$ un isomorphisme définissable entre H et un groupe algébrique unipotent K sur $\mathbb{F}$. Comme tout sous-groupe de K définissable dans le pur corps $\mathbb{F}$ est définissable dans H , alors il suffit de montrer une correspondance entre les sous-groupes définissables de H , définissablement isomorphes à $\mathbb{F}_+$ et les sous-groupes fermés de K définissablement isomorphes à $\mathbb{F}_+$.

Soit A un sous-groupe définissable de H définissablement isomorphe à $\mathbb{F}_+$; montrons que $\varphi(A)$ est $\mathbb{F}$ -définissable i.e. fermé sur $\mathbb{F}$. Soit u un élément non trivial de A . Alors d'après le Fait 1.29 on a $d(u) = A$ car $A \cong^{def} \mathbb{F}_+$. De plus $\varphi(u)$ est un élément unipotent non trivial de K . Alors $\overline{\langle \varphi(u) \rangle} \cong \mathbb{F}_+$ d'après le Fait 1.73, où $\overline{\langle \varphi(u) \rangle}$ est la clôture de Zariski de $\langle \varphi(u) \rangle$ et on a

$$\mathbb{F}_+ \cong \overline{\langle \varphi(u) \rangle} \supseteq d(\varphi(u)) \supseteq \varphi(d(u)) = \varphi(A) \cong^{def} \mathbb{F}_+.$$

D'où, $\overline{\langle \varphi(u) \rangle} = \varphi(A)$, i.e. $\varphi(A)$ sous-groupe algébrique de K . On conclut d'après la Proposition 7.2. $\square$

Théorème 7.4. – *Soient G un K^* -groupe simple de rang de Morley fini et C un sous-groupe de Carter de G . On suppose que C admet un sous-groupe A définissablement isomorphe à $\mathbb{K}_+$, pour $\mathbb{K}$ un corps interprétable de caractéristique zéro. Alors le groupe des automorphismes définissables de G est interprétable.*

PREUVE –

Etape 1 : On peut supposer $A \leq Z(C)$ et on a $G = A^{g_1} \dots A^{g_m}$, pour $g_1, \dots, g_m$ dans G .

En effet, comme C est nilpotent, alors $[C, U_{\mathbb{K}}(C)]$ est un $U_{\mathbb{K}}$ -groupe homogène (Fait 2.29). S'il est trivial, alors on a $A \leq U_{\mathbb{K}}(C) \leq Z(C)$. Sinon il contient un sous-groupe C -minimal qu'on peut supposer être A .

Posons $S(A) = \langle A^g \mid g \in G \rangle$. Alors $S(A)$ est un sous-groupe normal définissable de G , et on a $S(A) = A^{g_1} \dots A^{g_m}$. Puisque G est simple, on obtient $G = S(A) = A^{g_1} \dots A^{g_m}$.

Etape 2 : Construction d'une famille uniformément définissable de graphes d'automorphismes définissables de G .

Considérons D un sous-groupe de Carter de $G \times G$, on prend $D = C \times C^g$, pour un certain $g \in G$. En particulier, on a $Z(D) = Z(C) \times Z(C^g)$. Posons

$$U = \langle B \leq Z(D) \mid B \cong^{def} \mathbb{K}_+ \rangle$$

Comme $A \times \{1\} \leq Z(D)$ et $A \times \{1\} \cong^{def} \mathbb{K}_+$, alors $U \neq 1$. Il s'ensuit $U = B_1 \dots B_s$ avec s considéré minimal. De plus, comme $B_{i+1} \cong^{def} \mathbb{K}_+$, on a $B_{i+1} \cap (B_1 \dots B_i) = 1$ pour tout $i = 1, \dots, s-1$. Alors

$$U = B_1 \dots B_s \cong^{def} B_1 \times \dots \times B_s \cong^{def} \mathbb{K}_+^s,$$

autrement dit U est définissablement isomorphe à un groupe algébrique unipotent sur $\mathbb{K}$. Ainsi, d'après la Proposition 7.3, les sous-groupes définissables de U , définissablement isomorphes à $\mathbb{K}_+$ forment une famille uniformément définissable. Considérons

$$\Gamma = \{B \leq Z(D^g) \mid B \cong^{def} \mathbb{K}_+, g \in G \times G\}$$

Puisque les sous-groupes de Carter sont conjugués (Fait 1.56), alors de ce qui précède, Γ est une famille uniformément définissable. D'après le Fait 1.17, il existe un entier k (pris suffisamment grand) tel que le produit $(B_1 \dots B_m)^k$ soit un sous-groupe définissable de $G \times G$, pour tout $B_1, \dots, B_m \in \Gamma$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{U}^* = \{(B_1 \dots B_m)^k \mid B_1, \dots, B_m \text{ dans } \Gamma\},$$

est une famille uniformément définissable de sous-groupes de $G \times G$. Considérons maintenant

$$\mathcal{U} = \{F \in \mathcal{U}^* \mid F \cap (G \times \{1\}) = 1, F \cap (\{1\} \times G) = 1 \text{ et } rk(F) = rk(G)\};$$

alors $\mathcal{U}$ est aussi une famille uniformément définissable de sous-groupes de $G \times G$.

Soit F un élément de $\mathcal{U}$; considérons les projections

$$\begin{array}{ccc} p_1 & : & F \rightarrow G \\ & & (u, v) \mapsto u \end{array},$$

et

$$\begin{array}{ccc} p_2 & : & F \rightarrow G \\ & & (u, v) \mapsto v \end{array}$$

Alors on a $rk(p_i(F)) \leq rk(G)$ pour $i = 1, 2$. Or $F \cap (\{1\} \times G) = F \cap (G \times \{1\}) = 1$, alors les noyaux de ces projections sont triviaux et on a $rk(F) = rk(p_i(F))$, $i = 1, 2$. Puisque $rk(F) = rk(G)$, on a $rk(G) = rk(p_i(F))$ pour $i = 1, 2$. On en déduit que $G = p_i(F)$ par connexité de G , c'est à dire que les projections de F sur G sont surjectives. Ainsi, F est le graphe d'un automorphisme définissable de G . Par conséquent, les éléments de $\mathcal{U}$ sont des graphes d'automorphismes définissables de G .

Etape 3 : On montre que $\mathcal{U}$ est l'ensemble des graphes des automorphismes définissables de G .

Inversement considérons α , un automorphisme définissable de G et Δ_α son graphe. Notons Δ_A , le graphe de la restriction à A de α . Alors Δ_A est un sous-groupe central du sous-groupe de Carter $C \times \alpha(C)$ de $G \times G$ (car A central dans C). De plus, $\Delta_A \cong^{def} \mathbb{K}_+$, alors on a $\Delta_A \in \Gamma$ et $\Delta_A \leq \Delta_\alpha$. Comme $G = A^{g_1} \dots A^{g_m}$, alors $G = (A^{g_1} \dots A^{g_m})^k$ et on a

$$\Delta_\alpha = (\Delta_{A^{g_1}} \dots \Delta_{A^{g_m}})^k.$$

Puisque $\Delta_{A^{g_i}} \in \Gamma$ pour tout $i = 1, \dots, m$, on a $\Delta_\alpha \in \mathcal{U}^*$. Enfin, puisqu'on a $rk(\Delta_\alpha) = rk(G)$, alors $\Delta_\alpha \in \mathcal{U}$. Par conséquent, l'ensemble des automorphismes définissables

de G est uniformément définissable, et on obtient le résultat. $\square$

Précisons toutefois que le théorème précédent est sans espoir en caractéristique $p > 0$, car le groupe d'automorphismes de Frobenius n'est pas interprétable.

Ce qui suit est une amélioration du Théorème 7.4 proposé par Gregory Cherlin. Commençons par un argument général.

Lemme 7.5. – (Cherlin) *Soient G un groupe simple de rang de Morley fini, et H un groupe d'automorphismes définissables de G . Soit A un sous-groupe définissable connexe non trivial de G . Supposons que la famille d'applications*

$$\{\alpha \upharpoonright A \mid \alpha \in H\}$$

de A vers G , est contenue dans une famille uniformément définissable $\mathcal{F}$. Alors le groupe H est contenu dans un groupe interprétable d'automorphismes définissables de G dont l'action sur G est aussi interprétable.

En particulier si H est le groupe de tous les automorphismes définissables de G , alors H est interprétable tout comme son action sur G .

PREUVE – On peut supposer que $\mathcal{F}$ est indexé par un ensemble définissable (sinon, on passe à une famille plus large) ; c'est pourquoi nous disons “est contenue” plutôt que “est”.

Fixons n tel que G est produit de n conjugués de A (Fait 1.17), et posons

$$J = \mathcal{F} \times G^n \times G^n$$

où G^n est une puissance cartésienne de G . Pour $j = (f, \bar{g}, \bar{h}) \in J$, où $\bar{g} = (g_1, \dots, g_n)$ et $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$, soit $\alpha_j(x, y)$ la relation définie par

$$\exists x_1, \dots, x_n \in A \left(\prod_{i=1}^n x_i^{g_i} = x \ \& \ \prod_{i=1}^n f(x_i)^{h_i} = y \right).$$

Soit $J_0 \subseteq J$ l'ensemble d'indices j pour lesquels la relation $\alpha_j(x, y)$ définit un automorphisme de G . Il suffit alors de vérifier

$$H \subseteq \{\alpha_j \mid j \in J_0\}.$$

Soit $\alpha \in H$ et posons $f = \alpha \upharpoonright A$, la restriction de α à A . Fixons $\bar{g} \in G^n$ tel que $G = \prod_{i=1}^n A^{g_i}$ et posons $\bar{h} = \alpha[\bar{g}]$. En prenant $j = (f, \bar{g}, \bar{h})$, nous affirmons que $\alpha_j = \alpha$. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_j(x, y) &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{g_i} = x \ \& \ \prod_{i=1}^n \alpha(x_i)^{\alpha(g_i)} = y \right) \\ &\Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_n \left(\prod_{i=1}^n x_i^{g_i} = x \ \& \ \alpha\left(\prod_{i=1}^n x_i^{g_i}\right) = y \right) \\ &\Leftrightarrow \alpha(x) = y \end{aligned}$$

$\square$

Théorème 7.6. – (Cherlin) Soient G un K^* -groupe simple de rang de Morley fini, et C un sous-groupe de Carter de G . Supposons que $U_K(C) \neq 1$ pour K un corps interprétable de caractéristique zéro. Alors le groupe des automorphismes définissables de G est interprétable dans G , tout comme son action sur G .

PREUVE – Soit $A \leq C$ un sous-groupe définissable, définissablement isomorphe à K_+ , et posons

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{B \leq A \times C \mid B \cong^{def} K_+\} \\ \mathcal{B}_1 &= \{B^{(1,g)} \mid B \in \mathcal{B}, g \in G \text{ (alors } (1, g) \in A \times G)\}\end{aligned}$$

D’après la Proposition 7.3 $\mathcal{B}$ est uniformément définissable, donc $\mathcal{B}_1$ aussi. D’après le lemme précédent, il suffit de montrer que les graphes des restrictions $\alpha \upharpoonright A$, pour α un automorphisme définissable de G , appartiennent à $\mathcal{B}_1$.

Soit $\beta = \alpha \upharpoonright A$ avec α un automorphisme définissable de G . Le graphe de β est définissablement isomorphe à A via la projection. Donc si $\beta(A) \subseteq C$, alors le graphe de β est dans $\mathcal{B}$. Dans le cas général, on a $\beta(A) \subseteq \beta(C)$ et $\beta(C)$ est un sous-groupe de Carter de G , donc conjugué à C (Fait 1.56), ainsi le graphe de β est dans $\mathcal{B}_1$. $\square$

Bibliographie

- [1] T. ALTINEL, G. CHERLIN, L.-J. CORREDOR, AND A. NESIN. A Hall theorem for ω -stable groups. *J. London Math. Soc.* **57** (1998), 385–397.
- [2] T. ALTINEL. Groups of finite Morley rank with strongly embedded subgroups. *J. Algebra* **180** (1996), 778–807.
- [3] T. ALTINEL AND G. CHERLIN. On central extensions of algebraic groups. *J. Symbolic Logic* **64** (1999), 68–74.
- [4] T. ALTINEL AND A.V. BOROVNIK AND G. CHERLIN. *Simple Groups of Finite Morley Rank*. Amer. Math. Soc. 2008.
- [5] O. V. BELEGRADEK. On groups of finite Morley rank. *Abstracts of the Eighth International Congress of Logic, Methodology And Philosophy of science, LMPs'87*, Moscow, USSR, 17–22, August 1987, 100–102
- [6] A.V. BOROVNIK AND A. NESIN. *Groups of Finite Morley Rank*. Oxford University Press, 1994.
- [7] A.V. BOROVNIK AND A. NESIN. Schur-Zassenhaus Theorem Revisited. *J. Symbolic Logic* **59** Mar. 1994, 283–291.
- [8] J. BURDGES. A signalizer functor theorem for groups of finite Morley rank. *J. Algebra* **274** (2003), 215–229.
- [9] J. BURDGES. Sylow theory for $p = 0$ in solvable groups of finite Morley rank. *J Group Theory* **9** (2006), 467–481.
- [10] J. BURDGES. *Simple groupes of finite Morley rank of odd and degenerate type*. Ph.D. thesis. Rutgers University, 2004.
- [11] G. CHERLIN. Groups of small Morley rank. *Ann. Math. Logic* **17**, 1–28, 1979.
- [12] G. CHERLIN. Good tori in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **8**, 613–622, 2005.
- [13] G. CHERLIN. Superstable division rings. *Logic Colloq. 1977*, North-Holland, Amsterdam, 1978, 99–111.
- [14] G. CHERLIN AND A. DELORO. Small representation of SL_2 in the groups of finite Morley rank category. *J. Symbolic Logic* **77** Sept. 2012, 919–933.
- [15] A. DELORO. Actions of groups of finite Morley rank on small abelian groups. *Bull. Symbolic Logic* **15** (2009), pp 70–90.

- [16] O. FRÉCON. Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. *J. Algebra* **229** (2000), 118–152.
- [17] O. FRÉCON. Around unipotence in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **9** (2006), 341–359.
- [18] O. FRÉCON. Algebraic groups up to abstract isomorphism. *Preprint* 2010.
- [19] O. FRÉCON AND E. JALIGOT. The existence of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **8**, 2005, 623–644.
- [20] O. FRÉCON. Pseudo-tori and sub tame groups of finite Morley rank. *J. Group Theory* **12** (2009), 305–315.
- [21] O. FRÉCON. Conjugacy of Carter subgroups in groups of finite Morley rank. *J. Math. Log.* **8** (2008), 41–92.
- [22] O. FRÉCON. Groupes géométriques de rang de Morley fini. *J. Inst. Math. Jussieu* **7** (2008), 751–792.
- [23] O. FRÉCON. Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles. *J. Algebra* **229** (2000), 118–152.
- [24] E. HRUSHOVSKI AND B. ZILBER. Zariski geometries. *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1993), 315–323.
- [25] J.E HUMPHREYS. *Linear algebraic groups*. Springer, New York 1987.
- [26] J. LOVEYS AND F. O. WAGNER. Le Canada semi-dry. *Proc. Amer. Math. Soc* **118** (1993), 217–221.
- [27] A. NESIN. Generalized Fitting subgroups of a group of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic* **56**, No 4 (1991), 1391–1399.
- [28] A. NESIN. On solvable groups of finite Morley rank. *Amer. Math. Soc* **321**, No 2 (1990), 659–690.
- [29] A. MACINTYRE. On ω_1 -categorical theories of abelian groups. *Fund. Math.* **70** (1971), 253–270.
- [30] A. MACINTYRE. On ω_1 -categorical theories of fields. *Fund. Math.* **71** (1971), 1–25.
- [31] D. MARKER. *Model Theory : An introduction*. Springer, New York Berlin 2002.
- [32] Y. MUSTAFIN. Structure des groupes définissables linéaires dans un corps de rang de Morley fini. *J. Algebra* **281** (2000), 118–152.
- [33] B. POIZAT. Quelques modestes remarques à propos d’une conséquence inattendue d’un résultat surprenant de monsieur Frank Olaf Wagner. *J. Symbolic Logic* Vol. 66, No. 4 (Dec., 2001).
- [34] B. POIZAT. *Groupes stables*. Nur Al-mantiq Wal-Ma’rifah, 1987.
- [35] E. D. RABINOVICH. *Definability of a field in sufficiently rich incidence systems*. QMW Maths Notes, 14.

- [36] J. S. ROBINSON. *A Course in the Theory of Groups*. Springer, New york Berlin, 1993.
- [37] F. G. TIMMESFELD . *Abstract root subgroups and simple groups of Lie-type*. Birkhäuser verlag, 2001.
- [38] F. O. WAGNER. Nilpotent complement and Carter subgroups in R-stable-groups. *Arch. Math. Logic* **33** (2004), 753–773.
- [39] F. O. WAGNER. Fields of finite Morley rank. *J. Symbolic Logic*, **66** 703-706, 2001.
- [40] J.A. WOLF. *Spaces of constant curvature*. third edition, Publish or Perish, 1974.
- [41] B. I. ZILBER. Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields. *Colloq. Math.* **48** (1984),173–180

BIBLIOGRAPHIE

Titre : Étude de quelques liens entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires

Résumé

Cette thèse traite essentiellement des liens qui peuvent exister entre les groupes de rang de Morley fini et les groupes algébriques linéaires. En effet, nous y établissons quelques propriétés algébriques aux K -groupes ; d'ailleurs une étude de linéarité sur ces groupes est dressée et permet en particulier d'obtenir une généralisation du théorème de Levi sur la décomposition des groupes algébriques. Ensuite, nous étudions dans un univers de rang de Morley fini, une action définissable et non triviale de $SL_2(\mathbb{K})$ sur un groupe abélien connexe V où $\mathbb{K}$ est un corps définissable de caractéristique non nulle. À cet effet, nous montrons sous une hypothèse particulière, que le rang de Morley $rk(V)$ de V est pair et multiple de $rk(\mathbb{K})$. Enfin, nous analysons sous quelles conditions, étant donné G un groupe algébrique nilpotent sur un corps algébriquement clos de caractéristique non nulle, le quotient $G/Z(G)$ est définissablement linéaire. Par ailleurs, nous montrons sous certaines hypothèses que le groupe des automorphismes définissables d'un K^* -groupe simple est interprétable.

Mots-clés : rang de Morley, K -groupe, K^* -groupe, Théorème de décomposition de Levi, définissable, définissablement linéaire, interprétable.

Title : On links between finite Morley rank and linear algebraic groups

Abstract

This thesis essentially focuses on relationships that may exist between groups of finite Morley rank and linear algebraic groups. Indeed, we establish some algebraic properties to K -groups ; while a linearity study on these groups is drawn and allows in particular to obtain an analogue to Levi decomposition theorem of algebraic groups. Next, in a univers of finite Morley rank, we study a definable nontrivial action of $SL_2(\mathbb{K})$ on an connexe abelian group V , where $\mathbb{K}$ is an definable field of nonzero characteristic. For that purpose, we show under a particular assumption that the Morley rank of V denoted $rk(V)$ is even and multiple of $rk(\mathbb{K})$. Finally, we analyze the conditions under which, given an nilpotent algebraic group G over an algebraically field of nonzero characteristic, the quotient $G/Z(G)$ is definably linear. Besides, we show under certain assymptions that the group of definable automorphism of a simple K^* -group is interpretable.

Keywords : Morley rank, K -group, K^* -group, Levi decomposition theorem, definable, definably linear, interpretable.