

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM
(Poitiers)
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :
Appolinaire Abourou Ella

Étude des solutions stationnaires d'un modèle de champs de phase cristallin

Directeur(s) de Thèse :
Arnaud Rougirel

Soutenue le 19 septembre 2013 devant le jury

Jury :

Président	Danielle Hilhorst	Directeur de recherche CNRS, Université de Paris-Sud
Rapporteur	Mariana Haragus	Professeur des Universités, Université de Franche-Comté
Rapporteur	Edgar Knobloch	Professor, University of Berkeley
Membre	Hassan Emamirad	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	Mokhtar Kirane	Professeur des Universités, Université de La Rochelle
Membre	Morgan Pierre	Maître de conférences, Université de Poitiers

Pour citer cette thèse :

Appolinaire Abourou Ella. *Étude des solutions stationnaires d'un modèle de champs de phase cristallin* [En ligne].
Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur Internet
<<http://theses.univ-poitiers.fr>>

THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National-Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale **Sciences et Ingénierie pour l'Information et Mathématiques**

Secteur de Recherche: **Mathématiques et leurs Interactions**

présentée par

Appolinaire ABOUROU ELLA

**Etude des Solutions Stationnaires d'un Modèle de Champs
de Phase Cristallin**

Directeur de thèse : **Arnaud ROUGIREL**

Soutenue le 19 Septembre 2013

devant la Commission d'Examen

Jury

M. HARAGUS	Professeur, Université de Franche-Comté	Rapporteur
E. KNOBLOCH	Professeur, University of Berkeley	Rapporteur
H. EMAMIRAD	Professeur Emérite, Université de Poitiers	Examinateur
D. HILHORST	Directeur de Recherches CNRS, Université de Paris-Sud	Examinateur
M. KIRANE	Professeur, Université de la Rochelle	Examinateur
M. PIERRE	Maître de Conférence Habilité, Université de Poitiers	Examinateur

Table des matières

Table des matières	i
Remerciements	iii
Notations principales	1
Introduction	3
0.1 Physique du modèle de champs de phase cristallin	3
0.1.1 Motivations physiques	3
0.1.2 Dérivation du modèle de champs de phase cristallin	4
0.2 Mathématique du modèle de champs de phase cristallin	4
0.2.1 Présentation des résultats	5
0.2.2 Plan général de la thèse	7
1 Résultats antérieurs et méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt	9
1.1 Rappel des résultats antérieurs de Pierre et Rougirel	9
1.1.1 Analyse du cas du noyau de dimension 2	11
1.2 Méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt (MRLS)	12
1.2.1 Théorème des Fonctions Implicites (TFI)	12
1.2.2 Théorème de réduction de Lyapunov-Schmidt (MRLS)	14
1.2.3 Méthode des multi-paramètres	16
1.2.4 Méthode du polygone de Newton	17
2 Etude des solutions stationnaires bifurquantes avec $\dim Ker L(\cdot, \epsilon) = 1$	21
2.1 Cadre fonctionnel et équations	21
2.2 Analyse spectrale et notations	22
2.3 Théorème de bifurcation avec $\dim Ker L(\cdot, \epsilon) = 1$	24
2.3.1 Projection sur $R(L(\cdot, \epsilon_*))$	25
2.3.2 Projection sur $Ker(L(\cdot, \epsilon_*))$	27
2.3.3 Théorème de bifurcation	28
2.4 Etude du signe de $\ddot{e}(0)$	32
2.4.1 Quelques calculs préliminaires	33
2.4.2 Signe de $\ddot{e}(0)$ pour $\epsilon > 1/\lambda_k$	34
2.4.3 Signe de $\ddot{e}(0)$ pour $\epsilon < 1/\lambda_k$	36
2.5 Théorème de synthèse et diagrammes de bifurcation	40
2.5.1 Diagrammes de bifurcations suivant les valeurs de r	42
3 Etude des solutions stationnaires bifurquantes avec $\dim Ker L(\cdot, \delta) = 2$	47
3.1 Motivations et hypothèses	47
3.2 Existence des solutions par utilisation des symétries	50
3.3 Existence des solutions par des multi-paramètres	53
3.3.1 Projection sur $R(L(\cdot, \delta_*))$	54
3.3.2 Projection sur $Ker(L(\cdot, \delta_*))$	55

3.3.3	Théorème de bifurcation par les multi-paramètres	56
3.4	Etude des signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$	67
3.4.1	Etude du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$	67
3.4.2	Etude du signe de $\ddot{M}(0)$	71
3.4.3	Etude des variations du rapport $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}$ en fonction de α	77
3.5	Comparaison des énergies de la solution bifurquante par rapport à la solution constante	81
4	Stabilité linéaire des solutions bifurquantes avec $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 2$	91
4.1	Cadre fonctionnel et préliminaires	91
4.2	Description du principe de stabilité réduite linéaire	96
4.3	Théorème de stabilité des solutions bifurquantes	100
4.3.1	Quelques résultats préliminaires	100
4.3.2	Résultat principal de stabilité linéaire	102
4.4	Stabilité des solutions bifurquantes	110
4.4.1	Tests numériques	117
5	Etude des solutions bifurquantes : Cas particulier $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$	127
5.1	Analyse spectrale de $L(\cdot, \delta_*)$ pour $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$	127
5.1.1	Résultats préliminaires	129
5.2	Existence des branches de solutions pour $k_* = 2k_{**}$	130
5.3	Stabilité des solutions bifurquantes pour $k_* = 2k_{**}$	133
5.4	Existence des solutions non triviales pour $k_* = 3k_{**}$	137
5.5	Un résultat de stabilité linéaire pour $k_* = 3k_{**}$	138
	Conclusion	143
	Bibliographie	145

Remerciements

S'il y a un exercice dans lequel je n'excelle pas, c'est bien sûr celui de l'art des remerciements. Toutefois, à l'issue de la rédaction de ces années de dur travail, je suis convaincu que la thèse est loin d'être une tâche individuelle. Ainsi, s'il me venait de remercier chacun de vous à la hauteur de l'aide qu'il ait pu m'apporter, je pense que je ferais autant de pages que les lignes qui constituent ce rapport. Mais, soyez sûrs d'une chose, je n'oublie personne. Car à travers vos conseils, j'ai appris que *avoir du courage, c'est aussi avoir de l'ambition*.

Je tiens d'abord à remercier, mon directeur de thèse Arnaud Rougirel, pour avoir accepté de diriger cette thèse, avec tant de patience et de rigueur. Je lui exprime toute ma reconnaissance, pour les idées enrichissantes suite à nos multiples rencontres.

Aux professeurs Mariana Haragus et Edgar Knobloch. Je leur adresse mes vifs remerciements, pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce manuscrit. Vos remarques scientifiques m'ont permis de mieux cerner certaines parties de mon travail. Je remercie également Hassan Emamirad, Morgan Pierre, Mokhtar Kirane, Danielle Hilhorst, pour l'honneur qu'ils me font d'être les membres du jury de cette thèse.

Mes remerciements vont chaleureusement à tous les membres du LMA de Poitiers, en particulier au professeur Pierre Torasso, Directeur Adjoint de ED S2IM, pour son accueil aimable et les financements de mes déplacements à l'étranger, au professeur Pol Vanhaecke, Directeur du Laboratoire, pour son aide financière qui a permis mon inscription en thèse. J'en profite, pour adresser un merci spécial à l'école doctorale S2IM, pour les séminaires thématiques et les multiples formations professionnalisantes.

Je tiens à remercier le personnel ITA/IATOSS du département et du laboratoire : Jocelyne Attab, Nathalie Marlet, Brigitte Brault, Nathalie Mongin et Benoît Métrot, pour la documentation scientifique, les démarches administratives, l'aide informatique, et surtout pour leur disponibilité.

Je n'oublie pas les personnes qui m'ont donné la force de faire cette thèse. Je pense à tous mes professeurs de l'Université des Sciences et Techniques de Masuku (USTM). Aux professeurs Alain Miranville et Hassan Emamirad. Je leur dis un grand merci pour leurs cours sur les EDP, en classe de Master 2. Et aussi à Pierre Morgan pour sa disponibilité.

j'exprime toute ma gratitude à mon pays le Gabon, pour le financement de toutes ces années d'étude. J'espère en retour te servir le plus dignement possible. A l'occasion, j'en profite pour remercier la communauté gabonaise de Poitiers, et son association AGP, pour l'ambiance du Bled qu'elle nous fait souvent revivre aux travers de ses multiples activités. Je n'oublie pas, pour autant, l'association NGOUNE des étudiants de Bitam, et tous ses membres pour leurs soutiens constants.

Une pensée amicale à tous les doctorants (nouveaux et anciens). Je ne m'aventurerai pas à citer les noms, de peur d'oublier quelqu'un. Mais chacun de vous sait combien de fois il a contribué à la réalisation de ce travail (séminaires des doctorants, conseils et autres).

Aux sportifs du labo, nos rencontres de foot et de basket me manqueront. Je vous souhaite, à tous, une bonne continuation.

Florent, Kais, Armelle, Hélène, Nadia, Louise, le Big Sam, Sammy, Batoul, Ali, Monsieur Daniel, Guillaume, Samuel, Abdou, Venant Zue (x-men), Coeutice, Dramé, Diemer, Franck Denard, Archille, Alphonse, Roma, Djibril, Natacha, Eyi, Lynda, Marine, Gessie, Celine, Angela, Jules, Brice, Fabrice, Lilian, Nadir... et ceux que j'oublie. De par votre amitié, cette thèse est aussi un peu la vôtre.

Je ne saurai finir sans remercier les personnes incontournables de ma vie. Je pense particulièrement à mes mères, mon défunt père, mes frères et soeurs. Je n'aurai jamais assez de mots pour vous remercier. A défaut, sachez que, tout ce que j'ai fait de bien dans cette thèse, je l'ai fait pour vous. Enfin, s'il y a bien une idée qui rassemble une pensée qui n'est pas toute neuve, c'est que quelque soit ton parcours, tu rencontres aussi bien de belles épreuves que de personnes biens. Morelle, sache que tu as toujours su m'apporter le souffle nécessaire, dans les moments où tu sentais que j'étouffais. Et à ce prix, je te remercie du fond du coeur.

Notations principales

PFC Phase Field Crystal Model (modèle de champs de phase cristallin).

MRLS Méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt.

\mathbb{R} Espace des nombres réels.

$\text{Vect}(S)$ Ensemble engendré par S .

$\mathcal{O}(y)$ Fonction dominée par y .

$\text{Ker}L$ Noyau d'un opérateur borné L .

$R(L)$ Image de d'un opérateur borné L .

$\dim(S)$ Dimension de l'ensemble fini S .

$\text{sign}(f)$ Signe d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

E, Z Espaces de Banach.

\mathbb{R}^d Espace euclidien de dimension d .

Ω Domaine borné régulier de \mathbb{R}^d .

$\partial\Omega$ Frontière du domaine Ω .

$C(E; Z)$ Fonctions continues de E dans Z .

$C^k(E; Z)$ Fonctions C^k -différentiables de E dans Z .

$\mathcal{L}(E; Z)$ Ensemble des opérateurs bornés de E dans Z .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Le crochet de dualité.

$L^p(\Omega)$ Espace de Lebesgue.

$L^2(\Omega)$ Espace de Lebesgue pour $p = 2$.

$\| \cdot \|_E$ Norme sur l'espace E .

$\| \cdot \|$ Norme sur l'espace $L^2(\Omega)$.

(\cdot, \cdot) Produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega)$.

$W^{k,p}(\Omega)$ Espace de Sobolev.

$H^k(\Omega)$ Espace de Sobolev pour $p = 2$.

Δ Opérateur laplacien.

$\dot{v} = \frac{dv}{dy}$ Dérivée de v par rapport à un paramètre y .

$D_v F$ Différentielle de la fonctionnelle F par rapport à v .

$\partial_{xx\dots x} v = v^{(k)}$ Dérivée de v , k fois par rapport à la variable spatiale x .

Introduction

Les surfaces en mouvement sont un élément essentiel de notre environnement naturel et technologique. Leur description mathématique est pourtant loin d'être triviale, surtout quand il s'agit de surfaces libres telles que les interfaces entre des fluides, ou entre deux phases thermodynamiques distinctes, ou encore des membranes déformables en biologie. La difficulté essentielle vient du fait que de telles surfaces développent souvent des formes extrêmement complexes et façonnées par la dynamique, comme par exemple lors de la croissance des grains [1] ou lors de la formation de microstructures.

La méthode du champs de phase a émergé récemment comme un outil élégant et universel pour traiter ce genre de problèmes. Ses origines se trouvent dans la thermodynamique hors d'équilibre et la dynamique des transitions de phases. Son principe est de décrire l'état local de la matière à l'aide d'un ou plusieurs champs de phase qui peuvent être assimilés à des paramètres d'ordre. Le point clé est que, ces champs prennent des valeurs bien déterminées lors de l'évolution du système dynamique et qu'ils varient entre ces valeurs de manière continue à travers des interfaces diffuses.

Les applications les plus poussées de la méthode du champ de phase se font en science des matériaux (voir par exemples [2], [3], [4], [5], [6], [7]). D'ailleurs, certains modèles de champs de phase ont fait l'objet de plusieurs recherches mathématiques ces dernières années, et les résultats obtenus se sont avérés satisfaisants, aussi bien sur le plan théorique que pratique. Nous pouvons citer, entre autres, le modèle de Cahn-Hilliard [8] et Allen-Cahn pour leurs multiples utilisations dans les simulations des mouvements moléculaires, des décompositions spinodales... En effet, le champs de phase est en train de devenir la "méthode standard" de simulation pour la dynamique à l'échelle mésoscopique (l'échelle des microstructures), au même titre que l'est déjà la dynamique moléculaire à l'échelle microscopique.

0.1 Physique du modèle de champs de phase cristallin

Notons que depuis 2002, une nouvelle technique, introduite par K.R. Elder et appelée "Champs de Phase Cristallin" (Phase Field Crystal, en anglais) a vu le jour (voir [1], [9], [3], [4], [5], [6], [7]...) Basée également sur un formalisme continu, cette nouvelle méthode se distingue très sensiblement des méthodes de champs de phase "traditionnelles" et a connu un grand succès auprès de nombreux spécialistes physiciens.

0.1.1 Motivations physiques

Selon [10], la modélisation des matériaux est une tâche qui peut être réalisée par des simulations de la dynamique moléculaire. Cela conduit à la résolution des équations couplées de mouvement pour calculer la position de chaque particule, à chaque étape. Le coût de ce calcul est très élevé, surtout quand on cherche à considérer des phénomènes qui mettent en jeu un nombre important de particules. De plus, seul les échelles de temps atomiques courts peuvent être atteintes. Cependant, il y a des cas, où il est utile de tenir

compte des matériaux à l'échelle de longueur atomique, pouvant aller jusqu'à la diffusion. Une approche, par exemple qui pourrait être adoptée, pour la résolution de tels problèmes, est le modèle de champs de phase cristallin. Ce modèle (voir [1]) se veut intermédiaire entre les modèles atomiques (dynamique moléculaire) et les modèles continus classiques (équation de Cahn-Hilliard). Avec un avantage qu'il peut être utilisé pour capturer les défauts dynamiques et les dislocations dans les cristaux [9], la dynamique des interactions entre les grains, et même, l'élasticité non linéaire. Mais, malgré cela, il est montré (voir [1]) que la méthode de champs de phase cristallin présente des défauts. D'abord, il elle a été construite pour des domaines très petits, et en plus, il ne réussit pas toujours à établir une distinction, entre la détente élastique et des échelles de temps de diffusion [11].

0.1.2 Dérivation du modèle de champs de phase cristallin

Le modèle de champs de phase cristallin est une théorie de la fonctionnelle de densité dynamique (Density Functional Theory ou DFT en anglais) donnant une description simple de la solidification cristalline. Il représente l'état local de la matière par un champs de phase moyenné en temps, qui est uniforme dans la phase liquide et périodique dans la phase cristalline. Il est basé sur une fonctionnelle de l'énergie libre qui peut être déduite [1] de la théorie de Ramakrishnan et Yussouff [12]. Après certaines simplifications on arrive à une fonctionnelle de l'énergie libre du type Brazowskii en 1975 et Swift-Hohenberg en 1977 [13]. Ainsi une équation conservatrice du mouvement est adoptée pour décrire l'évolution du paramètre d'ordre. Selon [1], l'équation simplifiée, sans dimension du modèle est donnée par

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 [(\nabla^2 + 1)^2 \psi + r\psi + \psi^3] \quad (1)$$

où r est un paramètre négatif (que l'on peut typiquement assimiler à la température), ψ la densité (ou le paramètre d'ordre) et ∇ désigne le gradient ou l'opérateur nabla. La fonctionnelle de l'énergie libre associée à (1) est

$$E(\psi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \psi (\nabla^2 + 1)^2 \psi - r \left(-\frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{4} \psi^4 \right) dx \quad (2)$$

où Ω est un domaine de l'espace des phases. Cependant, le rapport entre la théorie de la fonctionnelle de densité dynamique (Density Functional Theory en anglais) et le modèle de champs de phase cristallin a été abordé en détail par V. Teeffelen et bien d'autres (voir [14]). Au cours de ces dernières années, le modèle de champs de phase cristallin a été utilisé pour comprendre une large gamme de phénomènes tels que l'élasticité et la croissance des grains [15], l'anisotropie de l'énergie libre d'interface [16], [17], le taux de croissance des grains [18], la croissance dendritique [9], [19], [20], la formation glaciaire [4], la fusion durant les dislocations et la croissance des grains [3], [7], et le polymorphisme [18]. Bien que le modèle de champs de phase cristallin (PFC) ait une approche microscopique, il a un avantage sur les autres techniques microscopiques telles que les simulations dynamiques moléculaires, en ce sens que l'évolution temporelle du système peut être étudié sur de plus grandes échelles de temps.

0.2 Mathématique du modèle de champs de phase cristallin

Dans la construction des modèles phénoménologiques, la compréhension physique ou la connaissance empirique est souvent utilisée pour mettre au point une description mathématique appropriée. De même, lorsqu'on étudie les modèles mathématiques qui dérivent de la physique, on considère, généralement ces modèles avec des conditions aux bords naturels, telles

que les conditions aux bords de Neumann et des conditions aux bords périodiques. L'utilisation de telles conditions est très importante, car dans le premier cas les solutions des problèmes qui en découlent, présentent automatiquement des symétries. En outre, dans le second cas, on peut étendre ces solutions à l'espace tout entier. C'est l'une des raisons qui nous pousserons à étudier, les solutions stationnaires du problème (1) avec des conditions aux bords de Neumann. Considérée en dimension 1 d'espace, la description mathématique de l'équation (1) est donnée par :

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_{xx}(\partial_{xx}^2 u + 2\partial_{xx} u + f(u)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty) \\ u^{(1)} = u^{(3)} = u^{(5)} = 0 & \partial\Omega \times (0, +\infty) \\ u(0) = u_0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3)$$

où $f(u) = (1+r)u + u^3$ est la dérivée du potentiel, $\Omega = (0, l)$ (avec $l > 0$) le domaine occupé par le matériau, u le paramètre d'ordre, et r un paramètre négatif. Cette équation possède une dynamique très riche, et peut être vue comme une version conservative de l'équation de Swift-Hohenberg (voir [21], [22], [23]), dont des résultats sur l'existence globale et l'unicité de solutions, sur la convergence vers une solution stationnaire [24], sur l'existence d'attracteurs ([25], [26]) et sur l'existence de solutions stationnaires [?] sont disponibles. Concernant la version conservative (3), malgré les multiples travaux (voir [27] ([28], [29], [30])), son analyse mathématique pose toujours de nombreux problèmes. Par exemple, une particularité de (3), vient du fait que toute constante réelle M est une solution stationnaire. Ceci porte à 3 le nombre de paramètres du problème de bifurcation, mettant en jeu (r, l ou $\epsilon = 1/l^2$, et M), ce qui complique considérablement ce type d'étude. En plus, il est montré que si on minimise E avec la contrainte de masse imposée, peut également obtenir d'autres solutions. D'où, il est naturel de s'intéresser aux éventuelles bifurcations des solutions stationnaires de (3).

0.2.1 Présentation des résultats

Après un changement approprié de variables qui ramène l'étude dans le domaine $\Omega = (0, 1)$, il résulte que, les solutions stationnaires de (3) vérifient l'équation suivante :

$$\epsilon^2 \partial_{xx}^2 v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f(v + M) = \int_{\Omega} f(v + M) dx \quad \text{dans } x \in \Omega, \quad (4)$$

où $M = \int_{\Omega} u_0(x) dx$, et $\epsilon = 1/l^2$. Cette équation est écrite sous la forme suivante :

$$F(v, \epsilon, M, r) = 0. \quad (5)$$

En nous plaçant dans un espace de Hilbert bien choisi, l'opérateur $L(\cdot, \epsilon, M, r)$, obtenu en linéarisant (4) est auto-adjoint, avec résolvante compacte. Et les points de bifurcations correspondent alors aux valeurs des paramètres pour lesquelles le noyau de $L(\cdot, \epsilon, M, r)$ est non trivial. Des résultats antérieurs de Pierre et Rougirel montrent que, selon les valeurs des paramètres, la dimension de ce noyau est égale à 1 ou égale à 2 (voir la proposition ci-après).

Soient

$$\epsilon_k = \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_k} \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon}_k = \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_k} \quad (6)$$

où $p := 1 - f'(M)$ et $\lambda_k = (k\pi)^2$.

Proposition 0.2.1 ([30])

Soit $M \in \mathbb{R}$, $p := 1 - f'(M)$, $\lambda_k = (k\pi)^2$ et $\epsilon > 0$.

(i) Si $p \in \{0\} \cup [1, \infty)$ et il existe $k \geq 1$ tel que $\epsilon = \epsilon_k$ alors

$$\dim \text{Ker} L(\cdot, \epsilon, M, r) = 1.$$

(ii) Si $0 < p < 1$ et il existe $k \geq 1$ tel que $\epsilon = \epsilon_k$ alors

- si $p \in \left\{ p_{k,k'} \mid k' = 1, \dots, k-1 \right\}$ alors

$$\dim \text{Ker} L(\cdot, \epsilon, M, r) = 2,$$

- si $p \notin \left\{ p_{k,k'} \mid k' = 1, \dots, k-1 \right\}$ alors

$$\text{Ker} L(\cdot, \epsilon, M, r) = 1$$

(iii) Dans d'autres cas $\dim \text{Ker} L(\cdot, \epsilon, M, r) = 0$.

Dans leurs travaux, notamment, Pierre et Rougirel ont étudié l'existence des branches de solutions stationnaires, lorsque le noyau de $L(\cdot, \epsilon, M, r)$ est de dimension 1. Le but principal de cette thèse est de prouver ce résultat dans le cas, plus compliqué, du noyau bidimensionnel.

Dans un premier temps, nous abordons la question d'existence des solutions stationnaires par le cas le plus simple, lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est de dimension 1. Partant d'une approche différente, basée sur la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, l'analyse nous permet de retrouver les résultats antérieurs de Pierre et Rougirel. En outre, nous fournissons un théorème résumant, selon les valeurs du paramètre négatif r , une étude complète des variations de courbes de solutions. Cette étude est complétée par plusieurs diagrammes de bifurcations.

Dans un deuxième temps, nous étudions l'existence des courbes de solutions, lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est bidimensionnel. Ce cas difficile, sur lequel sont basés les principaux résultats de cette thèse est abordé par un résultat particulier. En effet, en s'appuyant sur les symétries du problème, nous parvenons à prouver l'existence des courbes de solutions dans chacune des directions des deux vecteurs qui engendrent le noyau. Le cas général, en revanche, nécessite une paramétrisation astucieuse des solutions lors de l'application de la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt, ainsi que l'utilisation des deux paramètres de bifurcations. L'existence des courbes bifurquantes est ainsi prouvée dans le Théorème 3.2.1, selon la direction choisie. Ce théorème central de la thèse complète les résultats utilisant les symétries. Un commentaire est fait à cet effet, dans la Section 3.3. Puis, on étudie des variations des branches de solutions. Une comparaison de leurs énergies par rapport aux solutions constantes est également fournie.

Dans le Chapitre 4, on donne un résultat de stabilité des solutions obtenues avec un noyau de dimension 2. Cette étude s'appuie sur un principe de stabilité linéaire réduite, et permet d'identifier des régions des paramètres dans lesquelles les solutions bifurquantes sont stables. Des exemples numérique corrobore ce résultat.

Afin de traiter la question d'existence dans toute son intégralité. Deux résultats traitant les cas raisonnants qui n'entrent pas dans le cadre du Chapitres 3 sont fournis dans le Chapitre 5.

0.2.2 Plan général de la thèse

Cette thèse est composée de 5 chapitres, une conclusion et une introduction.

Le Chapitre 1 a pour objectif de rappeler, d'une part, l'essentiel des résultats antérieurs, de Pierre et Rougirel. Ces rappels nous permettrons d'établir des comparaisons avec des résultats que nous obtiendrons. D'autre part, il rappelle les outils de la théorie classique de bifurcation que nous utiliserons tout au long de ce document.

Le Chapitre 2 traite la question de l'existence de courbes de solutions, lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est unidimensionnel. Ainsi, après avoir défini le cadre fonctionnel et donner les hypothèses dans la Section 2.1, nous prouvons le théorème principale, dans la Section 2.3. Les études des variations des branches ainsi que les diagrammes qui en découlent sont respectivement données dans les Sections 2.4 et 2.5.

Le Chapitre 3 est consacré à l'études des branches de solutions bifurquantes lorsque le noyau est bidimensionnel. Nous commençons par donner les hypothèses, en fonction des données du problème dans la Section 3.1. Les Section 3.2, 3.3 donnent les Théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.3.1 relatifs à l'existence des branches de solutions bifurquantes. Une étude des variations des branches et de de comparaisons des énergies est menée respectivement dans les Sections 3.4 et 3.5.

Le Chapitre 4 montre la stabilité linéaires des solutions bifurquantes données par le théorème 3.3.1. Ce résultat est établi par l'utilisation d'un principe de stabilité linéaire réduite, que nous rappelons dans la Section 4.1. La Section 4.2, et la section 4.3 sont respectivement consacrées à la preuve du Théorème principal du chapitre, et à l'étude du signe des valeurs propre perturbées. Tout à la fin du chapitre nous donnons quelques exemples numériques de solutions bifurquantes stables suivant les valeurs des paramètres.

Dans le **Chapitre 5**, nous regardons le deux cas résonants qui n'entre pas dans le cadre des Chapitres 3 et 4. Après un bref rappel des hypothèses et le cadre fonctionnel, dans la Section 5.1, nous donnons les résultats d'existences dans les Sections 5.2 et 5.3. Concernant le premier cas, un résultat de stabilité linéaire est fourni dans la Section 5.3.

Le rapport est compété par une **Introduction** et une **Conclusion**.

Chapitre 1

Résultats antérieurs et méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt

L'objectif de ce chapitre est de donner une brève description de la théorie de la bifurcation et des rappels des résultats antérieurs de Pierre et Rougier.

1.1 Rappel des résultats antérieurs de Pierre et Rougier

Soit

$$\epsilon_{k_*} := \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_{k_*}}, \quad \bar{\epsilon}_{k_*} := \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_{k_*}}. \quad (1.1)$$

On rappelle que le but de leur travail était d'étudier les solutions stationnaires du problème suivant :

$$\epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v + \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx) = 0$$

On pose

$$\varphi_k = \cos(k\pi \cdot) \quad \text{et} \quad \mu_k = (\epsilon \lambda_k - 1)^2 - p \quad (1.2)$$

les vecteurs et valeurs propres de l'opérateur linéarisé

$$L(v, \epsilon) = \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v. \quad (1.3)$$

Alors on a le théorème suivant

Théorème 1.1.1 ([30])

Soit $\epsilon_* > 0$. On suppose que $\epsilon_* \in \{\epsilon_{k_*}, \bar{\epsilon}_{k_*}\}$ pour un $k_* \geq 1$, avec $\text{Ker} L(\cdot, \epsilon_*) = \text{Vect} \{\varphi_{k_*}\}$. Alors, il existe localement une unique branche de solution non triviale de (??) passant par $(0, \epsilon_*)$. De plus, si

$$(\epsilon_* \lambda_{2k_*} - 1)^2 + f'(M) \neq \frac{f''(M)^2}{f'''(M)}, \quad (1.4)$$

alors ces solutions satisfont

$$v = \pm \left(\frac{2}{\ddot{\epsilon}(0)} (\epsilon - \epsilon_*) \right)^{1/2} \varphi_{k_*} + \mathcal{O}(|\epsilon - \epsilon_*|^{1/2}) \quad \text{dans } \dot{V}_0, \quad (1.5)$$

où

$$\ddot{\epsilon}(0) := \frac{\epsilon_*/8}{\epsilon_* \lambda_{k_*} - f'(M)} \left(\frac{f''(M)^2}{(\epsilon_* \lambda_{2k_*} - 1)^2 + f'(M)} - f'''(M) \right). \quad (1.6)$$

Ce théorème, dont nous fournirons une autre preuve dans le chapitre 2, est l'un des résultats principaux de [30] consacré à l'étude mathématique du modèle de champs de phase cristallin lorsque le noyau de l'opérateur $L(\cdot, \epsilon)$ est de dimension 1. En effet, non seulement il donne l'existence des branches de solutions au voisinage du point de bifurcation, mais, il donne aussi une approximation exacte de la solution non triviale, en fonction des données du problème, pourvu qu'on reste proche du point de bifurcation.

Définition 1.1.1

Sous les hypothèses du théorème précédent, on dira que la bifurcation donnée par (1.5) est convexe au point $(0, \epsilon_)$ si,*

$$\ddot{\epsilon}(0) \left(\frac{\epsilon_{k_*} + \bar{\epsilon}_{k_*}}{2} - \epsilon_* \right) > 0.$$

Si cette quantité est négative, la branche est concave au point $(0, \epsilon_)$.*

Soit p_0 , le nombre définie par

$$p_0 = \left(\frac{-4 + \sqrt{10M^2 + 1}}{5} \right)^2. \tag{1.7}$$

Alors on a le deuxième résultat suivant.

Théorème 1.1.2 ([30])

Sous les hypothèses du Théorème 0.3.1, la concavité au point $(0, \epsilon_)$ de la branche bifurquante est décrite comme suit :*

- Si $\epsilon = \epsilon_{k_*}$ alors
 - si $M^2 \leq 3/2$ alors elle convexe,
 - si $M^2 > 3/2$ alors,
 - si $p < p_0$ alors la branche est concave,
 - si $p > p_0$ alors elle est convexe.
- Si $0 < p < 1$ et $\epsilon_* = \bar{\epsilon}_{k_*}$ alors
 - si $M^2 \geq 3/2$ alors
 - si $p < 9/25$ alors la branche est concave,
 - si $p > 9/25$ alors elle est convexe,
 - si $M^2 < 3/2$ alors,
 - si $p \in (p_0, 9/25)$ alors la branche est concave,
 - si $p \notin [9/25, 9/25]$ alors elle est convexe,

Ce théorème constitue le second résultat important de [30] et permet de connaître le sens de concavité de la branche de solutions (1.5), au voisinage de tout point de bifurcation (dans le sens de la Définition 1.1.1). Cependant, comme p_0 (voir (1.7)) dépend de la masse M , alors l'énoncé ci-dessus nécessite que ce dernier paramètre soit fixé. Ce qui porte, en tout, le nombre de paramètres fixés à trois, car k_* et r le sont déjà. Afin de réduire ce nombre, nous donnerons, dans le Chapitre 2, une version plus détaillé du théorème précédent, sans pour autant faire d'hypothèse de fixation sur la masse M (voir Théorème 2.5.1). Cela aura un intérêt conséquent, car grâce à cette réduction nous serons en mesure de fournir des diagrammes de phases dans le plan $(\epsilon, 3M^2)$ (c'est-à-dire, dans le plan des paramètres).

1.1.1 Analyse du cas du noyau de dimension 2

Nous énonçons maintenant le théorème consacré à l'analyse des solutions stationnaires quand le noyau bidimensionnel. Pour ce faire nous rappelons les hypothèses de [30] qui rendent ce résultat possible.

Soit $p \in (0, 1)$, $1 \leq k_{**} < k_*$ et $\epsilon_* > 0$ tels que

$$\epsilon_* \lambda_* := 1 + \sqrt{p} \quad \text{et} \quad \epsilon_* \lambda_{**} := 1 - \sqrt{p}. \quad (1.8)$$

Nous posons

$$\varphi_* = \varphi_{k_*}, \quad \varphi_{**} = \varphi_{k_{**}}, \quad \lambda_* = \lambda_{k_*}, \quad \lambda_{**} = \lambda_{k_{**}}$$

où $\lambda_k = (k\pi)^2$ et $\varphi_k = \cos(k\pi \cdot)$. Alors

$$\ker L(\cdot, \epsilon_*) = \langle \varphi_*, \varphi_{**} \rangle. \quad (1.9)$$

De plus nous supposons que

$$k_* \neq 2k_{**}, \quad k_* \neq 3k_{**}. \quad (1.10)$$

Théorème 1.1.3 ([30])

Sous les hypothèses (1.8)-(1.9), $(0, \epsilon_*)$ est un point de bifurcation pour (??) et il existe une branche $(v_*(\cdot), \epsilon(\cdot))$ de solution non triviale passant par $(0, \epsilon_*)$. De plus, si

$$P(\epsilon_* \lambda_{2k_*}) \neq f''/f'''(M) \quad (1.11)$$

alors ces solutions satisfont

$$v_*(\epsilon) \simeq \pm \sqrt{\frac{2}{\ddot{\epsilon}_*(0)}} (\epsilon - \epsilon_*) \varphi_* \quad \text{dans } \dot{V}_0, \quad (1.12)$$

où

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*/8}{\epsilon_* \lambda_{k_*} - f'(M)} \left(\frac{f''(M)^2}{P(\epsilon_* \lambda_{2k_*})} - f'''(M) \right). \quad (1.13)$$

et $\epsilon \sim \epsilon_*$ est tel que $\ddot{\epsilon}_*(0)(\epsilon - \epsilon_* > 0)$. En plus, si $k_* \neq 2k_{**}$, $k_* \neq 3k_{**}$ et

$$P(\epsilon_* \lambda_{2k_{**}}) \neq f''/f'''(M) \quad (1.14)$$

alors il existe une autre branche de solutions non triviale à travers $(0, \epsilon_*)$ satisfaisant

$$v_{**}(\epsilon) \simeq \pm \sqrt{\frac{2}{\ddot{\epsilon}_{**}(0)}} (\epsilon - \epsilon_*) \varphi_{**} \quad \text{dans } \dot{V}_0, \quad (1.15)$$

où

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*/8}{\epsilon_* \lambda_{k_{**}} - f'(M)} \left(\frac{f''(M)^2}{P(\epsilon_* \lambda_{2k_{**}})} - f'''(M) \right), \quad (1.16)$$

et $\ddot{\epsilon}_{**}(0)(\epsilon - \epsilon_*) > 0$.

Ce théorème, moins important que les deux premiers et plus délicat à démontrer, est en quelque sorte, le leitmotiv de cette thèse, dont l'objectif est de traiter la question des solutions stationnaires bifurquantes lorsque le noyau de l'opérateur $L(\cdot, \epsilon_*)$ est engendré par deux vecteurs. En effet, dans [30], hormis le cas où $\frac{k_*}{k_{**}} \notin \mathbb{N}$, la question n'est pas entièrement traitée. Car les auteurs utilisent un argument de réduction spatiale qui les ramène au Théorème 0.3.1. En revanche, dans le cas contraire, les choses sont plus

complexes, car en plus de la Méthode de Lyapunov-Schmidt (voir Chapitre 1), ils sont contraints de faire appel à la Méthode du Polygone de Newton (voir également Chapitre 1) afin de conclure. Pour contourner ce dernier argument, nous utiliserons la Méthode des Multi-paramètres, dont l'idée est de choisir autant de paramètres du problème que la dimension du noyau. Ce qui nous permettra, grâce au théorème des fonctions implicites de conclure de manière plus directe.

1.2 Méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt (MRLS)

La théorie des bifurcations étudie la structure des solutions pour des équations non-linéaires définies dans des espaces de Banach et dépendant d'un paramètre. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(Z, \|\cdot\|_Z)$ sont des espaces de Banach réels, $D(= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{R}^2)$, $(x_0, \lambda_0) \in E \times D$ et $F : U \times V \rightarrow Z$ (où $U \subset E$ et $V \subset D$ sont des ouverts) un opérateur tel que $F(x_0, \lambda_0) = 0$, on veut déterminer toutes les solutions de

$$F(x, \lambda) = 0, \tag{1.17}$$

dans un voisinage de (x_0, λ_0) . En mécanique des fluides (voir par exemples [31], [32]) comme dans d'autres domaines de la science d'ailleurs, la théorie de la bifurcation tente d'expliquer les mécanismes de transitions vers des régimes complexes. La technique utilisée consistant à réduire le problème (1.17) à un système de petites dimensions, sur une variété centrale et à en déterminer la structure par des arguments de symétrie et de forme normale (voir [33], [34] et [35]). On obtient ainsi un système d'équation dont la difficulté première réside en l'élaboration des méthodes spécifiques permettant, d'une part de déterminer pour quelles valeurs des paramètres cette bifurcation a lieu et d'autre part, de calculer les coefficients de ce dernier système ("étude non linéaire"). D'un point de vue mathématique, l'analyse de la bifurcation permet d'étudier aisément le comportement qualitatif des systèmes d'équations différentielles. De plus, elle permet de détecter des valeurs des paramètres pour lesquelles le comportement asymptotique du système change qualitativement. Ce sont des valeurs de bifurcations. Il est également possible d'identifier quel changement advient : c'est la nature de la bifurcation. L'importance de la bifurcation pour les sciences a poussé plusieurs auteurs à proposer des techniques de résolutions qui sont directement liées à cette théorie. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [36], [37], [33], [34], [38]...

D'un point de vue géométrique, une bifurcation peut correspondre à la "collision" de deux objets (attracteurs, points répulsifs ou points selles) ou de deux variétés. Ainsi, la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation "globale", alors que la collision de deux objets donne lieu à une bifurcation locale. Cependant, un premier résultat dans le sens de résoudre (1.17) est donné par le "Théorème des Fonctions Implicites".

1.2.1 Théorème des Fonctions Implicites (TFI)

Le théorème des fonctions implicites est l'un des outils analytiques locaux les plus importants pour la recherche des solutions des problèmes non linéaires de la forme (1.17).

Définition 1.2.1

Soit $T : \Omega \subset E \rightarrow Z$ (où E et Z sont des espaces de Banach) un opérateur défini sur un ouvert Ω de E et soit $x_0 \in \Omega$. On dit que T est Fréchet différentiable en x_0 si et seulement si il existe une application linéaire continue $A : E \rightarrow Z$ telle que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|T(x) - T(x_0) - A(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0.$$

Proposition 1.2.1

L'application linéaire continue A donnée dans la Définition 1.2.1 est unique et on l'identifie à $T'(x_0)$. En d'autres termes $A = T'(x_0)$.

Définition 1.2.2

Soient E et Z deux espaces de Banach. Un opérateur $T : E \rightarrow Z$ est de classe C^1 si T est Fréchet différentiable et $T' : E \rightarrow \mathcal{L}(E, Z)$ est continu.

Définition 1.2.3

Soient E_1, E_2 et Z des espaces de Banach, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $T : E_1 \times E_2 \rightarrow Z$. Les dérivées partielles de T en (a_1, a_2)

$$D_{x_1}T(a_1, a_2) : E_1 \rightarrow Z, \quad D_{x_2}T(a_1, a_2) : E_2 \rightarrow Z,$$

sont, respectivement, les dérivées de Fréchet des applications $T(\cdot, a_2) : E_1 \rightarrow Z$ en a_1 et $T(a_1, \cdot) : E_2 \rightarrow Z$ en a_2 . On note

$$D_{x_1}T(a_1, a_2) := T(\cdot, a_2)'(a_1), \quad D_{x_2}T(a_1, a_2) := T(a_1, \cdot)'(a_2).$$

Proposition 1.2.2 ([37])

Soient E_1, E_2 et Z des espaces de Banach, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $T : E_1 \times E_2 \rightarrow Z$.

- (i) Si T est Fréchet différentiable en $x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ alors les dérivées partielles de T en (x_1, x_2) existent et on a

$$T'(x)(h) = D_{x_1}T(x)(h_1) + D_{x_2}T(x)(h_2) \quad \forall h = (h_1, h_2) \in E_1 \times E_2.$$

- (ii) T est une classe C^1 si et seulement si les dérivées partielles existent et sont continues en tout point de $E_1 \times E_2$.

Théorème 1.2.1 (Théorèmes des Fonctions Implicites [37])

On suppose que (1.17) a une solution triviale $(x_0, \lambda_0) \in U \times V \subset E \times D$ tel que la différentielle (au sens de Fréchet) de F par rapport à x au point (x_0, λ_0) est bijective :

$$F(x_0, \lambda_0) = 0, \tag{1.18}$$

$$D_x F(x_0, \lambda_0) : E \rightarrow Z \text{ est continue et son inverse est borné.}$$

On suppose également que F et $D_x F$ sont continues :

$$F \in C(U \times V, Z), \tag{1.19}$$

$$D_x F \in C(U \times V, \mathcal{L}(E, Z))$$

Alors il existe un voisinage $U_1 \times V_1$ dans $U \times V$ de (x_0, λ_0) et une application $g : V_1 \rightarrow U_1 \subset E$ tel que

$$g(\lambda_0) = x_0, \tag{1.20}$$

$$F(g(\lambda), \lambda) = 0 \text{ pour tout } \lambda \in V_1.$$

En plus, g est continue sur V_1 :

$$g \in C(V_1, E). \tag{1.21}$$

Finalement, chaque solution de (1.17) dans $U_1 \times V_1$ est de la forme $(g(\lambda), \lambda)$.

Remarque 1.2.1

Si $G \in C^k(U \times V, Z)$, alors $g \in C^k(V_1, U_1)$ (voir toujours [37]).

Théorème 1.2.2 (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit U un sous-ensemble de E (= espace de Banach) fermé et convexe et $g : U \mapsto U$ une application continue telle que $g(U)$ est relativement compact. Alors g possède un point fixe. Plus généralement, si U est un compact convexe alors toute fonction continue de U sur U possède un point fixe.

On considère, à nouveau le problème (1.17) et G l'application $U \times V \subset E \times D \rightarrow E$ tel que

$$F(x_0, \lambda_0) = 0. \tag{1.22}$$

On peut obtenir un résultat d'existence locale de solutions de l'équation (1.17) au voisinage de λ_0 de deux façons :

1. En supposant que F est de classe C^1 et que $D_x F(x_0, \lambda_0)$ est un isomorphisme de E dans E . Par le théorème des fonctions implicites, il existe une courbe unique de solutions de (1.17) paramétrée par λ dans un voisinage de λ_0 ;
2. En supposant que $F(x, \lambda) = x - \lambda K(x)$ où $K : E \rightarrow E$ est compact. Le théorème du point fixe de Schauder montre l'existence de solutions de (1.17) pour λ proche de λ_0 .

Lorsque les hypothèses citées ci-dessus ne sont pas satisfaites il est souvent possible de retrouver les résultats souhaités en utilisant d'autres méthodes. L'une des plus connues est la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt qui sera beaucoup utilisée dans les analyses que nous mènerons dans cette thèse. Pour plus de détails sur les méthodes de la théorie classique de bifurcations le lecteur consulte les références suivantes [38], [39], [40], [41], [36]

1.2.2 Théorème de réduction de Lyapunov-Schmidt (MRLS)

La Méthode de Réduction de Lyapunov-Schmidt (MRLS), comme son nom l'indique, permet de réduire les problèmes du type (1.17) à un problème de dimension finie (Pour plus de détails nous renvoyons le lecteur aux références [36] et [37]).

Théorème 1.2.3 (Alternative de Fredholm [42], [37])

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach, $L \in \mathcal{L}(E, E)$ un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. Alors

- (i) $\text{Ker}(L - \lambda Id) = \{0\}$ si et seulement si $\text{Img}(L - \lambda Id) = E$,
- (ii) $\text{Img}(L - \lambda Id) = [\text{Ker}(L^* - \lambda Id)]^\perp$,
- (iii) $\text{Ker}(L - \lambda Id)$ est de dimension finie et $\text{Img}(L - \lambda Id)$ est fermé,
- (iv) la suite $\text{Ker}((L - \lambda Id)^n)$ est croissante et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}((L - \lambda Id)^n) = \text{Ker}((L - \lambda Id)^p)$ pour tout $n \geq p$. Le plus petit des p satisfaisant cette propriété est appelé multiplicité algébrique de λ .

Définition 1.2.4

Une application continue $F : U \rightarrow Z$, où $U \subset E$ est un ouvert et où E, Z sont des espaces de Banach, est un opérateur non linéaire de Fredholm si elle est différentiable sur U et si $\forall x \in U$, $DF(x)$ remplit les conditions suivantes :

- (i) $\dim N(DF(x)) < \infty$ ($N = \text{noyau}$),
 - (ii) $\text{codim} R(DF(x)) < \infty$ ($R = \text{rang}$),
 - (iii) $R(DF(x))$ est fermé dans Z .
- L'entier $\dim N(DF(x)) - \text{codim} R(DF(x))$ est appelé "l'indice de Fredholm" de $DF(x)$.

Nous considérons maintenant $F : U \times V \longrightarrow Z$, $U \subset E$, $V \subset D$, où

$$\begin{aligned} F(x_0, \lambda_0) &= 0 \text{ pour } (x_0, \lambda_0) \in U \times V, \\ F &\in C^1(U \times V, Z), \\ D_x F &\in C(U \times V, \mathcal{L}(E, Z)). \end{aligned} \tag{1.23}$$

On suppose que pour $\lambda = \lambda_0 \in D$ (= espace des paramètres, en général \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2), l'application F est un opérateur non linéaire de Fredholm par rapport à x , c'est-à-dire $F(\cdot, \lambda_0) : U \longrightarrow Z$ satisfait la définition 1.3.1. D'où il existe des compléments dans les espaces de Banach E et Z tels que :

$$\begin{aligned} E &= N(D_x F(x_0, \lambda_0)) \oplus E_0 \\ Z &= R(D_x F(x_0, \lambda_0)) \oplus Z_0 \end{aligned} \tag{1.24}$$

(voir [43], p.553). En particulier, on peut faire remarquer que les espaces N et Z_0 , définis ci-dessus, sont de dimensions finies. D'où les décompositions ci-dessus, définissent, de manière triviale, les projections suivantes :

$$\begin{aligned} P : E &\rightarrow N, \text{ le long de } E_0 \ (N = N(D_x F(x_0, \lambda_0))), \\ Q : Z &\rightarrow Z_0, \text{ le long de } R \ (R = R(D_x F(x_0, \lambda_0))), \end{aligned} \tag{1.25}$$

et x peut se décomposer de manière unique comme suit

$$x = v + w, \text{ où } v \in N \text{ et } w \in E_0. \tag{1.26}$$

Par le Théorème du Graphe Fermé (voir [44]), les projections P et Q sont bornées (ou continues). Alors le théorème suivant tient.

Théorème 1.2.4 ([36])

Il existe un voisinage ouvert $U_2 \times V_2$ de (x_0, λ_0) dans $U \times V \subset E \times D$ tel que le problème

$$F(x, \lambda) = 0 \text{ pour } (x, \lambda) \in U_2 \times V_2 \tag{1.27}$$

est équivalent au problème de dimension finie

$$\begin{aligned} \Phi(v, \lambda) &= 0 \text{ pour } (v, \lambda) \in \tilde{U}_2 \times V_2 \subset N \times D \\ \Phi : \tilde{U}_2 \times V_2 &\longrightarrow Z_0 \text{ est continue} \\ \text{et } \Phi(v_0, \lambda_0) &= 0, \ (v_0, \lambda_0) \in \tilde{U}_2 \times V_2. \end{aligned} \tag{1.28}$$

La fonction Φ , appelée fonction de bifurcation, est donnée par :

$$\Phi(\lambda, v) = QF(v + \psi(v, \lambda), \lambda) \tag{1.29}$$

où $w = \psi(v, \lambda)$ est donnée par le théorème des fonctions implicites.

Preuve. Le problème (1.27) est évidemment équivalent au système

$$\begin{cases} QF(Px + (I - P)x, \lambda) = 0, \\ (I - Q)F(Px + (I - P)x, \lambda) = 0, \end{cases} \tag{1.30}$$

où nous posons $Px = v \in N$ et $(I - P)x = w \in E_0$. En suite nous définissons

$$\begin{cases} G : \tilde{U}_2 \times W_2 \times V_2 \longrightarrow Z \text{ par} \\ G(v, w, \lambda) \equiv (I - Q)F(v + w, \lambda), \text{ où } v_0 = Px_0 \in \tilde{U}_2 \subset N, \\ w_0 = (I - P)x_0 \in W_2 \subset E_0, \\ \text{et } \tilde{U}_2, W_2 \text{ sont des voisinages tels que } \tilde{U}_2 + W_2 \subset U \subset X. \end{cases} \tag{1.31}$$

On a $G(v_0, w_0, \lambda_0) = 0$ et par le choix des espaces, $D_w G(v_0, w_0, \lambda_0) = (I - Q)D_x F(x_0, \lambda_0) : E_0 \rightarrow R(D_x F(x_0, \lambda_0))$ est bijective. L'application du Théorème des Fonctions implicites (voir théorème 1.2.1) fournit

$$\left\{ \begin{array}{l} G(v, w, \lambda) = 0 \text{ pour } (v, w, \lambda) \in \tilde{U}_2 \times W_2 \times V_2 \text{ est équivalent à} \\ w = \psi(v, \lambda) \text{ pour } \psi : \tilde{U}_2 \times V_2 \rightarrow W_2 \subset E_0 \text{ tel que} \\ \psi(v_0, \lambda_0) = w_0. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

L'insertion de la fonction ψ dans la première équation de (1.30) donne

$$\Phi(v, \lambda) = QF(v + \psi(v, \lambda), \lambda) = 0. \quad (1.33)$$

Le Théorème des Fonctions Implicites prouve la continuité de ψ . \square

Remarque 1.2.2

L'espace des paramètres D sera généralement \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 dans cette thèse, mais il peut aussi être \mathbb{R}^n ($n > 2$) dans d'autres problèmes.

La Méthode de Lyapunov-Schmidt, résumée dans le théorème 1.3.1 décrit la réduction du problème (1.27) (qui est de dimension infinie) à un problème ayant autant de dimension que le noyau de $D_x F(x_0, \lambda_0)$. Avant de fermer cette section nous rappelons une méthode appelée Polygone de Newton qui est souvent utilisée dans les bifurcations dégénérées et qui nous sera d'une grande utilité pour montrer la stabilité des solutions bifurquantes.

1.2.3 Méthode des multi-paramètres

Une façon naturelle de surmonter les difficultés d'une dégénérescence à un noyau de dimension très grand est la condition que l'application F dépende d'autant de paramètres que la dimension du noyau de l'opérateur linéarisé.

Nous considérons $F : U \times V \rightarrow Z$, où $0 \in U \subset E$ et $\lambda_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ et nous supposons que

$$\begin{aligned} F(0, \lambda) &= 0 \text{ pour tout } \lambda \in V, \\ \dim N(D_x F(0, \lambda_0)) &= \text{codim} R(D_x F(0, \lambda_0)) = n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Pour la suite, nous supposons que :

$$D_{x\lambda}^2 F \in C(U \times V, \mathcal{L}(E, Z)) \quad (1.35)$$

Comme $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(E, Z)) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times E, Z)$ alors $D_{x\lambda}^2 F(0, \lambda_0)x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Z)$ est représenté par n vecteurs $D_{x\lambda_i}^2 F(0, \lambda_0)x \in Z, i = 1, \dots, n$ pour $x \in E$.

L'hypothèse transversale qui assure souvent l'existence des solutions dans le cas du noyau de dimension 1 est généralisée comme suit :

$$\begin{aligned} &\text{Il existe un vecteur } \hat{v}_0 \in N(D_x F(0, \lambda_0)), \|\hat{v}_0\|_X = 1, \\ &\text{tel que le complémentaire } Z_0 \text{ de } R(D_x F(0, \lambda_0)) \\ &\text{est engendré par les vecteurs } D_{x\lambda_i}^2 F(0, \lambda_0)\hat{v}_0, i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Soit Z_0 le complémentaire de $R(D_x F(0, \lambda_0))$ dans Z . Quand la projection $Q : Z \rightarrow Z_0$ le long de $R(D_x F(0, \lambda_0))$ est donnée par

$$Qz = \sum_{k=1}^n \langle z, \hat{v}_k' \rangle \hat{v}_k^* \quad (1.37)$$

alors l'hypothèse (1.36) est équivalent à dire que

$$\text{la matrice } \left(\langle D_{x\lambda_i}^2 F(0, \lambda_0) \hat{v}_0, \hat{v}'_k \rangle \right)_{i,k=1,\dots,n} \text{ est inversible.} \quad (1.38)$$

Ensuite, nous suivons les étapes de la preuve du théorème 1.2.3. La méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt fournit le problème de dimension n ,

$$\Phi(v, \lambda) = 0, \quad (v, \lambda) \sim (0, \lambda_0) \in N \times \mathbb{R}^n. \quad (1.39)$$

En posant $v = y\hat{v}_0$, nous obtenons les solutions non triviales en résolvant

$$\tilde{\Phi}(y, \lambda) = \int_0^1 D_v \Phi(yt\hat{v}_0, \lambda) \hat{v}_0 dt = 0 \quad \forall y \in (-\tau, \tau). \quad (1.40)$$

Comme $\Phi(0, \lambda_0) = 0$ et que

$$D_\lambda \tilde{\Phi}(0, \lambda_0) = Q D_{x\lambda}^2 F(0, \lambda_0) \hat{v}_0 \quad (1.41)$$

est inversible par (1.36), alors le Théorème des fonctions implicites donne la courbe de solutions continûment différentiable suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(y, \lambda(s)) &= 0, \quad y \in (-\tau, \tau), \quad \lambda(0) = \lambda_0 \\ \Phi(y\hat{v}_0, \lambda(s)) &= y\tilde{\Phi}(y, \lambda(s)) = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 1.2.5 ([36])

Sous les hypothèses (1.34)-(1.36), l'équation $F(x, \lambda) = 0$ possède une courbe continûment différentiable de solution

$$\{(x(y), \lambda(y)) \mid y \in (-\tau, \tau)\} \subset E \times \mathbb{R}^n \quad (1.43)$$

tels que $(x(0), \lambda(0)) = (0, \lambda_0)$ et $\dot{x} = \hat{v}_0$.

1.2.4 Méthode du polygone de Newton

La "Méthode du polygone de Newton" est un outil de substitution du Théorème des Fonctions Implicites lorsque l'hypothèse de la bijection n'est pas vérifiée. Elle est indispensable pour étudier les bifurcations dégénérées. Plus précisément, il s'agit de chercher, au voisinage d'une solution triviale $(0, 0)$, les solutions de l'équation (1.27), en faisant la supposition suivante :

F est analytique dans un voisinage $U \times V$ de $(0, 0)$ et $F(0, 0) = 0$, c'est-à-dire

$$F(x, \lambda) = \sum_{j,k} c_{jk} x^k \lambda^j, \quad \text{où } c_{jk} \in \mathbb{R} \text{ et la convergence tient dans } U \times V. \quad (1.44)$$

Puisque $F(0, 0) = 0$, alors on en déduit que $c_{00} = 0$ et par la suite, on cherche les solutions non triviales de $F(x, \lambda) = 0$ passant par $(0, 0)$. Pour cela nous marquons les puissances j de λ sur les ordonnées et les puissances k de x sur les abscisses et on place tous les points (k, j) qui satisfont la condition $c_{jk} \neq 0$, dans un plan (voir Figure (1.1)).

Quelques remarques importantes

- Si $c_{jk} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}_0, k = 0, \dots, k_0 - 1$, c'est-à-dire, si les coefficients non nuls existent seulement, qu'à partir du rang k_0 , alors nous pouvons diviser par x^{k_0} et pour la nouvelle équation, nous trouvons le plus petit point $(0, j_0)$ sur l'axe des ordonnées.
- Si $k_0 = 0$ alors $j_0 \geq 1$ car $c_{00} = 0$.
- Si $k_0 \leq 0$, nous avons la courbe solution $\{(0, \lambda)\}$ et si $j_0 = 0$ c'est l'unique courbe passant par $(0, 0)$.

On suppose désormais que $j_0 \geq 1$. Ensuite, seuls les coefficients c_{jk} avec $0 \leq j \leq j_0 - 1, k \geq 1$, nous intéresserons. Toutefois on fait remarquer que si de tels coefficients sont tous nuls, alors on peut diviser par λ^{j_0} et $\{(x, 0)\}$ est la seule solution passant par $(0, 0)$. Sinon, on trouve les coefficients $c_{jk} \neq 0$ avec $0 \leq j \leq j_0 - 1$ et on peut supposer qu'il existe un plus petit $k_n \geq 1$ tel que $c_{0k_n} \neq 0$. On remarquera que, si $j_n > 0$, alors on a l'existence de la courbe solution $\{(x, 0)\}$.

Maintenant, nous nous mettons dans la situation où il y a un plus petit point $(0, j_0), j_0 \geq 1$ sur l'axe des ordonnées et un plus petit point $(k_n, 0), k_n \geq 1$ sur l'axe des abscisses. Alors

le polygone formant l'enveloppe convexe de tous les points (k, j) tels que $c_{jk} \neq 0$ et $jk_n + j_0k \leq j_0k_n$ est appelé le "polygone de Newton".

Il relie les points $(k_\nu, j_\nu), \nu = 0 \dots n, j_0 > j_1 > \dots > j_n = 0, 0 = k_0 < k_1 < \dots < k_n$ et $c_{jk} = 0$ si (k, j) est en dessous d'une droite passant par deux points consécutifs (k_ν, j_ν) . On pose $c_{j_\nu k_\nu} = c_\nu \neq 0$ pour $\nu = 0, \dots, n$, alors (1.44) est réécrite comme

$$F(x, \lambda) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu x^{k_\nu} \lambda^{j_\nu} + R(x, \lambda), \quad \text{où } R \text{ contient le reste des termes.} \quad (1.45)$$

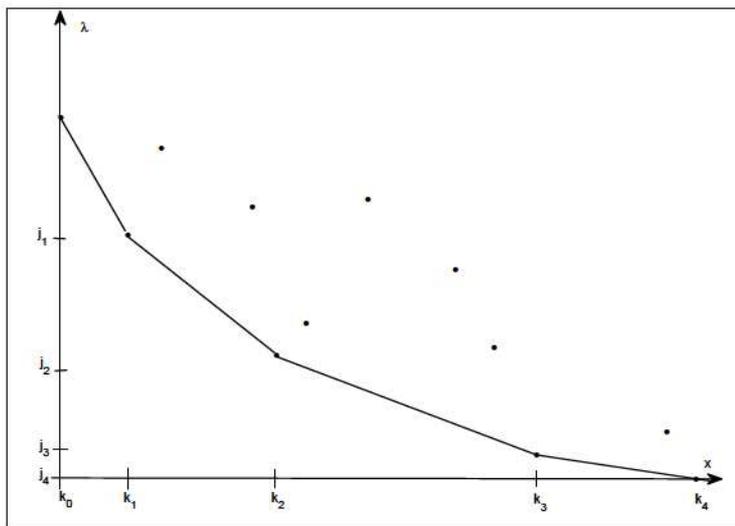


FIGURE 1.1 – Graphique du polygone de Newton.

Soit $-\frac{1}{\gamma}$ un des coefficients directeurs des droites formant le polygone de Newton. Alors tous les $r + 1$ points $(k_l, j_l) \dots (k_{l+r}, j_{l+r})$, appartenant à la droite de coefficients directeur $-\frac{1}{\gamma}$, vérifient

$$\gamma j_l + k_l = \dots = \gamma j_{l+r} + k_{l+r} = \sigma. \quad (1.46)$$

En faisant la substitution

$$\lambda = x^\gamma \tilde{\lambda} \quad \text{dans (1.45),} \quad (1.47)$$

on obtient pour $(x, \tilde{\lambda})$ l'équation

$$x^\sigma \left(\sum_{\rho=0}^r c_{l+\rho} \tilde{\lambda}^{j_{l+\rho}} + R_1(x, \tilde{\lambda}) \right) = 0 \quad (1.48)$$

D'autre part, si on suppose que $\tilde{\lambda}_0$ est une racine, de multiplicité 1, du polynôme P_γ suivant

$$P_\gamma(\tilde{\lambda}) = \sum_{\rho=0}^r c_{l+\rho} \tilde{\lambda}^{j_{l+\rho}}. \quad (1.49)$$

Alors comme $R_1(0, \tilde{\lambda}) = 0$, on trouve par le Théorème des Fonctions Implicite (voir théorème 1.2.1) que la courbe solution de $F(x, \lambda) = 0$ proche de $(0, 0)$, est donnée par

$$\left\{ \left(x, x^\gamma \left(\tilde{\lambda}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right) \right) \mid 0 \leq x \leq \gamma_2 \right\} \quad (1.50)$$

Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [36]. Nous terminerons la description du polygone de Newton par un exemple.

Exemple 1.2.1

Soit à résoudre au voisinage de $(0, 0)$ l'équation, à deux variables suivante

$$F(x, \lambda) = \lambda^2 - x^2 \lambda + x^3 \lambda + x^5 + x^6 = 0. \quad (1.51)$$

Le polygone de Newton associé à l'équation ci-dessus est donné par la figure (1.2)

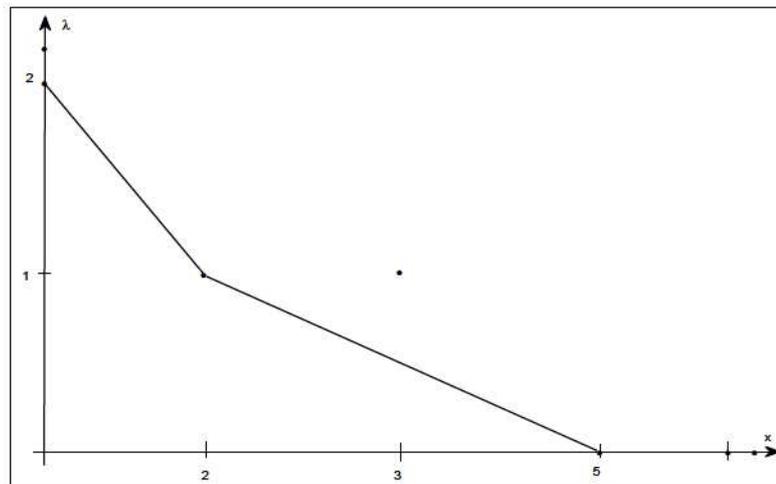


FIGURE 1.2 – Le polygone de Newton associé à (1.51).

Comme on peut le voir, l'enveloppe convexe du polygone de Newton, ci-dessus est délimité par deux droites, que nous noterons par $D_{-1/2}$ et $D_{-1/3}$, et dont les coefficients directeurs sont respectivement donnés par $-1/2$ et $-1/3$. Par l'utilisation de $D_{-1/2}$, nous faisons

$$\lambda = \tilde{\lambda}x^2 \quad \text{dans (1.51)} \quad (1.52)$$

et on obtient,

$$\begin{aligned} x^4 \left(\tilde{\lambda}^2 - \tilde{\lambda} + \tilde{\lambda}x + x^2 \right) &= 0 \\ x^4 \left(\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} - 1) + R(x, \tilde{\lambda}) \right) &= 0. \end{aligned}$$

comme $R(\tilde{\lambda}, 0) = 0 \quad \forall \tilde{\lambda}$, alors on trouve que les courbes solutions de (1.51), proche de $(0, 0)$ sont données par

$$\{(x, x^2 + \mathcal{O}((x^3))) \mid -\tau \leq x \leq \tau\} \quad (1.53)$$

et

$$\{(x, \mathcal{O}((x^3))) \mid -\tau_1 \leq x \leq \tau_1\}. \quad (1.54)$$

Les autres courbes solutions sont obtenues en utilisant $D_{-1/3}$.

Chapitre 2

Etude des solutions stationnaires bifurquantes avec $\dim \text{Ker} L(\cdot, \epsilon) = 1$

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude du problème par le cas simple du noyau de dimension 1. Cette étude est menée grâce à une approche développée par Kielhöfer dans [36]. Les résultats obtenus permettent d'établir des comparaisons avec le travail antérieur de Pierre et Rougirel. L'étude théorique est complétée par des diagrammes de bifurcations illustrant les différentes orientations des courbes de solutions non triviales au voisinage de chaque point de bifurcation.

2.1 Cadre fonctionnel et équations

Soient $\Omega = (0, 1)$, $\epsilon > 0$, $x \in \Omega$ et r un paramètre réel négatif. Nous définissons

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto (1 + r)u + u^3. \quad (2.1)$$

$$W_0 = \{u \in H^2(\Omega) \mid \partial_x u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega\},$$

$$V_0 = \{u \in H^4(\Omega) \mid \partial_x u = \partial_{xxx} u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\},$$

$$\dot{L}^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v dx = 0\},$$

$$\dot{V}_0 = V_0 \cap \dot{L}^2(\Omega), \quad \dot{W}_0 = W_0 \cap \dot{L}^2(\Omega).$$

Soit $u(x, 0) = u_0(x)$, une donnée initiale. L'équation de champ de phase cristallin avec les conditions homogènes de Neumann s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \partial_{xx} (\epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u)), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \partial_x u = \partial_{xxx} u = \partial_{xxxx} u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(\cdot, 0) = u_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Proposition 2.1.1 (conservation de la masse)

Toute solution u de (2.2) vérifie la loi de conservation de masse

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0 dx. \quad (2.3)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) dx = \epsilon \int_{\Omega} \partial_x (\epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u)) \cdot \partial_x(1) dx \\ &\quad + [\partial_x (\epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u))]_0^1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

En posant $M = \int_{\Omega} u_0(x) dx$, on rappelle que le but est d'étudier les solutions bifurquantes du problème stationnaire suivant

$$u \in M + \dot{V}_0, \quad \epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u) = \int_{\Omega} f(u) dx \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (2.4)$$

Nous introduisons pour ce faire, une nouvelle fonction v définie par $u = M + v$, et en utilisant l'expansion de Taylor de la fonction $f(M + v)$ à l'ordre 3, nous obtenons le problème suivant :

$$\begin{cases} v \in \dot{V}_0, & \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v + \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) \\ & + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \end{cases} \quad (2.5)$$

Dans la suite nous posons F la fonction définie par :

$$F(v, \epsilon, M) = \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v + \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx).$$

La division de F en deux parties, nous permet de définir l'opérateur suivant

$$L(\cdot, \epsilon, M) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v \quad (2.6)$$

et

$$N(\cdot, \epsilon, M) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx). \quad (2.7)$$

Dans tout ce chapitre, l'unique paramètre de bifurcation est ϵ . Alors, pour simplifier les écritures, au lieu de $L(\cdot, \epsilon, M)$ on écrira désormais $L(\cdot, \epsilon)$. Et on fera pareil pour le reste des notations.

Cela étant fait, on peut maintenant regarder F de la manière suivante

$$F : \dot{V}_0 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto F(v, \epsilon) = L(v, \epsilon) + N(v).$$

Ainsi, au lieu de (2.5) on est désormais conduit à étudier le problème de bifurcation suivant :

$$v \in \dot{V}_0, \quad \epsilon > 0 \quad F(v, \epsilon, M) = 0 \quad \text{dans } \dot{L}^2(\Omega). \quad (2.8)$$

2.2 Analyse spectrale et notations

Cette section est consacrée à l'étude des valeurs propres de l'opérateur $L(\cdot, \epsilon)$ défini en (2.6). Autrement dit, il s'agit de résoudre le problème spectral suivant

$$\begin{cases} L(\varphi, \epsilon) = \lambda \varphi, & \text{dans } L^2(\Omega) \\ \varphi \in \dot{V}_0 \setminus \{0\}, & \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Par utilisation de (2.1), nous posons

$$p := 1 - f'(M) \quad \text{et} \quad \lambda_k := (k\pi)^2, \quad k = 1, 2, 3... \quad (2.10)$$

La proposition suivante tient.

Proposition 2.2.1

Soit $\epsilon > 0$ et $p = 1 - f'(M)$. Le spectre de $L(\cdot, \epsilon)$ est donné par

$$\mu_k = (\epsilon\lambda_k - 1)^2 - p, \quad k = 1, 2, 3... \quad (2.11)$$

où $\lambda_k = (k\pi)^2$. Et les vecteurs propres associés sont

$$\varphi_k := \cos(k\pi \cdot), \quad k = 1, 2, 3... \quad (2.12)$$

De plus, $L(\cdot, \epsilon)$ est auto-adjoint, c'est-à-dire que

$$\int_0^1 L(v, \epsilon)w dx = \int_0^1 wL(v, \epsilon) dx \quad \forall v, w \in \dot{V}_0. \quad (2.13)$$

Preuve. La preuve est basée sur la résolution de l'équation ordinaire suivante

$$\begin{cases} -\partial_{xx}\varphi = \lambda\varphi, & \text{dans } L^2(\Omega) \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Comme (2.14) est une équation ordinaire du second ordre, alors la solution réelle et générale est donnée sous la forme :

$$A_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \text{où } A_1, A_2 \text{ sont des constantes réelles.}$$

En utilisant les conditions homogènes de Neumann, nous trouvons que

$$\varphi_k(x) = A \cos(k\pi x), \quad k = 1, 2, 3...$$

Ou, plus simplement

$$\varphi_k(x) = \cos(k\pi x), \quad n = 1, 2, 3...$$

Car A_1 est non nulle. Nous déduisons ainsi le spectre de $L(\cdot, \epsilon)$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} L(\varphi_k, \epsilon) &= \epsilon^2 \varphi_k^{(4)} + 2\epsilon \varphi_k^{(2)} + f'(M)\varphi_k \\ &= \epsilon^2 \lambda_k^2 \varphi_k - 2\epsilon \lambda_k \varphi_k + f'(M)\varphi_k \\ &= [(\epsilon\lambda_k - 1)^2 - p] \varphi_k. \end{aligned}$$

On prouve (4.131) par les intégrations par parties. En effet, soit v et w dans \dot{V}_0 , en utilisant la définition (2.6), on trouve que

$$\begin{aligned} \int_0^1 L(v, \epsilon)w dx &= \epsilon^2 \int_0^1 v^{(4)}w dx + 2\epsilon \int_0^1 v^{(2)}w dx + f'(M) \int_0^1 vw dx \\ &= \epsilon^2 \int_0^1 v^{(2)}w^{(2)} dx + 2\epsilon \int_0^1 vw^{(2)} dx + f'(M) \int_0^1 vw dx \\ &= \epsilon^2 \int_0^1 vw^{(4)} dx + 2\epsilon \int_0^1 vw^{(2)} dx + f'(M) \int_0^1 vw dx \\ &= \int_0^1 vL(w, \epsilon) dx. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 2.2.1

Comme $\left\{ \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$ est une base orthonormée dans $L^2(\Omega)$, et que la suite $(\mu_k)_{k \geq 1}$ des valeurs propres tend vers $+\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$, alors $L(\cdot, \epsilon)$ admet au moins une résolvante compacte.

Posons, pour $k \geq 1$ et $p = 1 - f'(M) \geq 0$,

$$\epsilon_k := \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_k} \quad \text{et} \quad \bar{\epsilon}_k := \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_k}. \quad (2.15)$$

On rappelle qu'une description complète du noyau de $L(\cdot, \epsilon)$ est donnée dans la Proposition 0.3.1. En effet, dans cette proposition, Pierre et Rougirel fournissent les conditions sur les paramètres du problème pour avoir un noyau de dimension 1.

2.3 Théorème de bifurcation avec $\dim Ker L(\cdot, \epsilon) = 1$

Pour prouver le théorème principale de ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes :

(H1) (2.16) Soient $k_* \in \mathbb{N}^*$ et $r < 0$ fixés.

(H2) (2.17) Soient $\epsilon > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $(\epsilon \lambda_{k_*} - 1)^2 + r + 3M^2 = 0$.
 On pose $p = -3M^2 - r$.

(H3) (2.18) De plus, on suppose que $p > 0$ et $\dim Ker L(\cdot, \epsilon) = 1$.

Pour simplifier les notations, on pose

$$\epsilon = \epsilon_*, \quad \varphi_* = \varphi_{k_*}, \quad \text{et} \quad \lambda_* = \lambda_{k_*}. \quad (2.19)$$

où $\epsilon \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_{k_*}}, \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_{k_*}} \right\}$. Une masse M correspondant à ϵ_* sera notée M_* .

Remarque 2.3.1

Soit k_* et r fixés, si nous posons

$$X := 3M^2 = -(\epsilon \lambda_{k_*} - 1)^2 - r.$$

Alors l'ensemble des points (ϵ, X) , forment une parabole dont le sommet est $S(1/\lambda_*, -r)$.
 De plus

- si $\epsilon > 1/\lambda_*$, alors $\epsilon = \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_*}$,
- si $\epsilon < 1/\lambda_*$, alors $\epsilon = \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_*}$.

Excepté l'étude du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ qui sera faite dans la Sous section 2.4, tous les résultats de bifurcation que nous obtiendrons dans la suite sont aussi bien vrais pour $\epsilon_* = \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_*}$

que pour $\epsilon_* = \frac{1-\sqrt{p}}{\lambda_*}$. Et comme, $L(\cdot, \epsilon_*)$ est auto-adjoint avec résolvant compact, alors les espaces $\dot{L}^2(\Omega)$ et \dot{V}_0 ont les décompositions suivantes :

$$\dot{L}^2(\Omega) = \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*) \oplus R(L(\cdot, \epsilon_*)), \quad (2.20)$$

et

$$\dot{V}_0 = \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*) \oplus \left(R(L(\cdot, \epsilon_*)) \cap \dot{V}_0 \right), \quad (2.21)$$

où

$$\text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*) = \text{Vect}(\varphi_*) \quad \text{et} \quad R(L(\cdot, \epsilon_*)) = \text{l'image de } L(\cdot, \epsilon_*).$$

Ces décompositions en retour définissent de manière naturelle les projections continues suivantes

$$P : \dot{L}^2(\Omega) \longrightarrow \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*) \quad \text{et} \quad Q = I - P : \dot{L}^2(\Omega) \longrightarrow R(L(\cdot, \epsilon_*))$$

où

$$Pv := 2(v, \varphi_*)\varphi_*, \quad \forall v \in \dot{L}^2(\Omega). \quad (2.22)$$

Ici, (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, la solution v peut se décomposer de manière unique, comme suit

$$v = Pv + (I - P)v = \varphi + w \quad \text{avec} \quad \varphi \in \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*), \quad \text{et} \quad w \in \left(R(L(\cdot, \epsilon_*)) \cap \dot{V}_0 \right). \quad (2.23)$$

Les solutions de (2.8) sont alors données par le système suivant :

$$\begin{cases} PF(\varphi + w, \epsilon) = P(L(\varphi + w, \epsilon) + N(\varphi + w)) = 0, & \varphi \in \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*) \\ QF(\varphi + w, \epsilon) = Q(L(\varphi + w, \epsilon) + N(\varphi + w)) = 0, & w \in \left(R(L(\cdot, \epsilon_*)) \cap \dot{V}_0 \right) \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3.1 Projection sur $R(L(\cdot, \epsilon_*))$

D'après (2.24) la projection du problème (2.8) sur l'image de $L(\cdot, \epsilon_*)$ fournit l'équation suivante :

$$QF(\varphi + w, \epsilon) = QL(w, \epsilon) + QN(\varphi + w, \epsilon) = 0. \quad (2.25)$$

En utilisant (voir Chapitre 1) la méthode de Lyapunov-Schmidt et le théorème des fonctions implicites, pour (φ, w, ϵ) proche de $(0, 0, \epsilon_*)$, on trouve que la solution de (2.25) est donnée par

$$\begin{cases} w := w(\varphi, \epsilon), \quad \forall (\varphi, \epsilon) \in U \times V \subset \text{Ker}(L(\cdot, \epsilon_*)) \times \mathbb{R} \\ w(0, \epsilon_*) = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

où $U \times V$ est un voisinage ouvert de $(0, \epsilon_*)$ dans $\text{Ker}(L(\cdot, \epsilon_*)) \times \mathbb{R}$. De plus, w a la même régularité que F , et est définie sur $U \times V$ à valeurs dans $R(L(\cdot, \epsilon_*))$. Et comme, c'est également l'unique solution locale de (2.25) alors w vérifie aussi

$$w(0, \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon \sim \epsilon_*. \quad (2.27)$$

On notera par $I_{\text{Ker}(L(\cdot, \epsilon_*))}$ l'opérateur identité du noyau $\text{Ker}(L(\cdot, \epsilon_*))$.

Corollaire 2.3.1

Sous les hypothèses (2.16)-(2.18) et les décompositions spatiales (2.20)-(2.21) , on a

$$D_\varphi w(0, \epsilon_*) = 0. \quad (2.28)$$

Preuve. Par utilisation de (2.25), on a

$$\begin{aligned} D_\varphi QF(\varphi + w(\varphi, \epsilon), \epsilon) &= QD_v F(\varphi + w, \epsilon)(I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w) \\ &= QD_v F(\varphi + w, \epsilon)I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + QD_v F(\varphi + w, \epsilon)D_\varphi w \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour $(\varphi, \epsilon) = (0, \epsilon_*)$, on trouve que

$$QD_v F(0, \epsilon_*) \cdot I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} \equiv 0 \quad \text{car} \quad I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} \quad \text{est à valeurs dans le noyau.}$$

D'où $D_\varphi w(0, \epsilon_*) = 0$ car $QD_v F(0, \epsilon_*) : \dot{L}^2(\Omega) \rightarrow R(L(\cdot, \epsilon_*))$ est inversible. \square

Pour des besoins ultérieurs, nous calculons $D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*]$.

Proposition 2.3.1

Soit $p = 1 - f'(M)$. Alors sous les hypothèses (2.16)-(2.18), on a

$$D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*] = -f''(M) \frac{1}{2\mu_{2k_*}} \varphi_{2k_*}, \quad (2.29)$$

où $\mu_{2k_*} = (\epsilon_* \lambda_{2k_*} - 1)^2 - p$.

Preuve. En différentiant (2.25) deux fois par rapport à φ , il vient que $D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*]$ est solution de l'équation suivante

$$QL(D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*], \epsilon_*) + Qf''(M)(\varphi_*^2 - \int_\Omega \varphi_*^2) = 0 \quad \text{dans} \quad \dot{L}^2(\Omega).$$

Mais comme $\varphi_*^2 - \int_\Omega \varphi_*^2 \in R(L(\cdot, \epsilon_*))$. Donc on peut réécrire l'équation précédente, plus simplement comme

$$L(D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*], \epsilon_*) + f''(M)(\varphi_*^2 - \int_\Omega \varphi_*^2) = 0 \quad \text{dans} \quad R(L(\cdot, \epsilon_*)).$$

En testant l'équation ci-dessus avec φ_k , et en utilisant le fait que

$$D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*] \in R(L(\cdot, \epsilon_*)),$$

nous obtenons

$$\int_\Omega \varphi_k L(D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*], \epsilon_*) dx = -f''(M) \int_\Omega \varphi_k (\varphi_*^2 - \int_\Omega \varphi_*^2) dx.$$

Ou encore, comme

$$\varphi_*^2 = \frac{1}{2} \varphi_{2k_*} + \frac{1}{2}$$

$$\int_\Omega \mu_k(\epsilon_*) \varphi_k D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*] dx = -f''(M) \int_\Omega \varphi_k \left(\left(\frac{1}{2} \varphi_{2k_*} + \frac{1}{2} \right) - \int_\Omega \left(\frac{1}{2} \varphi_{2k_*} + \frac{1}{2} \right) \right) dx$$

car $L(\cdot, \epsilon_*)$ est auto adjoint (voir (2.6)). Et pour finir, nous faisons une identification de termes grâce à l'égalité suivante

$$\int_\Omega \varphi_k D_\varphi^2 w(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*] dx = -f''(M) \int_\Omega \frac{1}{2\mu_k(\epsilon_*)} \varphi_k \varphi_{2k_*} dx.$$

\square

2.3.2 Projection sur $\text{Ker}(L(\cdot, \epsilon_*))$

Nous définissons, d'après (2.24) et (2.26) la fonction $\tilde{\Phi}$ par

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = PF(\varphi + w(\varphi, \epsilon), \epsilon) = PL(\varphi + w(\varphi, \epsilon), \epsilon) + PN(\varphi + w(\varphi, \epsilon), \epsilon). \quad (2.30)$$

Par l'utilisation de (2.27), nous déduisons que

$$\tilde{\Phi}(0, \epsilon) = 0, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Cette égalité permet d'écrire la relation suivante

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t\varphi, \epsilon) dt = \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(t\varphi, \epsilon) \varphi dt. \quad (2.31)$$

De plus, en posant

$$\varphi = y\varphi_*, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad (2.32)$$

il en résulte que

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_*, \epsilon) = y \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_*, \epsilon) \varphi_* dt = y\Phi(y, \epsilon) \quad (2.33)$$

où

$$\Phi(y, \epsilon) = \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_*, \epsilon) \varphi_* dt. \quad (2.34)$$

Finalement, les solutions non triviales du problème (2.24), ou plutôt du problème suivant

$$\varphi \in \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*), \quad \epsilon > 0, \quad \tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = 0,$$

sont obtenues par la résolution de ce nouveau problème

$$y \in \mathbb{R}, \quad \epsilon > 0, \quad \Phi(y, \epsilon) = 0, \quad \text{dans } \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*). \quad (2.35)$$

Remarque 2.3.2

Puisque $w = w(\varphi, \epsilon)$ est complètement connue par la donnée de φ et ϵ (voir (2.26)), alors toutes les solutions bifurquantes du problème (2.8) sont obtenues en résolvant l'équation (2.35). Ce qui nous permet de restreindre notre étude à un problème de dimension finie.

Définition 2.3.1

Φ sera appelée fonction de bifurcation dans toute la suite.

Corollaire 2.3.2

Sous les hypothèses (2.16)-(2.18) on a

$$\Phi(0, \epsilon_*) = 0. \quad (2.36)$$

Preuve. De (2.30)-(2.34) on a

$$\begin{aligned} \Phi(0, \epsilon_*) &= \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) \varphi_* dt \\ &= PL(\varphi_* + D_\varphi w(0, \epsilon_*) \varphi_*, \epsilon_*), \quad \text{par la définition (2.30)} \\ &= PL(\varphi_*, \epsilon_*) + PL(D_\varphi w(0, \epsilon_*) \varphi_*, \epsilon_*) \\ &= 0 \quad \text{car } \varphi_* \in \text{Ker}L(\cdot, \epsilon_*) \quad \text{et } D_\varphi w(0, \epsilon_*) \varphi_* = 0. \end{aligned}$$

□

Définition 2.3.2

On dira que $(0, \epsilon_*)$ est un point de bifurcation du problème (2.5), si il existe une suite de solutions non triviales $(v(y), \epsilon(y))_{-\tau \leq y \leq \tau}$ du problème (2.8) dans un voisinage de $(0, \epsilon_*)$ telle que $(v(0), \epsilon(0)) = (0, \epsilon_*)$.

2.3.3 Théorème de bifurcation

Dans cette section nous nous intéressons aux solutions non triviales du problème (2.35) (ou de manière équivalente, aux solutions bifurquantes du problème (2.8)), c'est-à-dire les solutions obtenues pour $y \neq 0$. Pour ce faire, on donne d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.3.1

Sous les hypothèses (2.16)-(2.18),

$$D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) = D_{\varphi\epsilon} \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) \varphi_* = \begin{cases} 2 \frac{p + \sqrt{p}}{\epsilon_*} \varphi_*, & \text{si } \epsilon_* = \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_*}, \\ 2 \frac{p - \sqrt{p}}{\epsilon_*} \varphi_*, & \text{si } \epsilon_* = \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_*}, \end{cases} \quad (2.37)$$

est un vecteur non nul.

Preuve. D'une part, on a d'après (2.34),

$$\begin{aligned} D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) &= \int_0^1 \left(D_{\varphi\epsilon} \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) \varphi_* \right) dt \\ &= D_{\varphi\epsilon} \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) \varphi_*. \end{aligned}$$

D'autre part, (2.30) et (2.6) donnent

$$\begin{aligned} D_{\varphi\epsilon} \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) \varphi_* &= D_\epsilon L(\varphi_*, \epsilon) |_{\epsilon=\epsilon_*} \\ &= 2\epsilon_* \varphi_*'''' + 2\varphi_*'' \\ &= 2 [\epsilon_* (\lambda_*^2 \varphi_*) - (\lambda_* \varphi_*)] \\ &= 2 (\epsilon_* \lambda_*^2 - \lambda_*) \varphi_* \\ &= 2 \frac{\epsilon_* \lambda_* - f'(M)}{\epsilon_*} \varphi_* \end{aligned}$$

car $\epsilon_*^2 \lambda_*^2 - 2\epsilon_* \lambda_* + f'(M) = 0$ (voir hypothèses (2.16)-(2.18) et la définition (2.10)). En utilisant alors ce qui précède, on en déduit que

$$D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) \text{ est non nul si et seulement si } \frac{\epsilon_* \lambda_* - f'(M)}{\epsilon_*} \neq 0. \quad (2.38)$$

Or

$$\epsilon_* \lambda_* - f'(M) = \begin{cases} p + \sqrt{p}, & \text{si } \epsilon_* = \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_*}, \\ p - \sqrt{p}, & \text{si } \epsilon_* = \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_*}, \end{cases}$$

est non nulle par l'hypothèse (2.18). D'où le résultat. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème général de notre analyse.

Théorème 2.3.1 (Théorème de bifurcation)

Sous les hypothèses (2.16)-(2.18), alors

- $(0, \epsilon_*)$ est un point de bifurcation de (2.5).
- Il existe $\tau > 0$ et une unique courbe au moins de classe C^2 au voisinage de $(0, \epsilon_*)$

$$\{(v(y), \epsilon(y)) \mid y \in (-\tau, \tau) \text{ et } (v(0), \epsilon(0)) = (0, \epsilon_*)\}, \quad (2.39)$$

telle que $F(v(y), \epsilon(y)) = 0, \forall y \in (-\tau, \tau)$ et $\frac{dv}{dy} \Big|_{y=0} = \dot{v}(0) = \varphi_*$.

- La dérivée seconde du paramètre de bifurcation ϵ est donnée par :

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*}{8(\epsilon_* \lambda_* - f'(M))} \left(\frac{f''(M)^2}{(\epsilon_* \lambda_{2k_*} - 1)^2 - p} - f'''(M) \right) \quad (2.40)$$

où

$$\epsilon_* \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_*}, \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_*} \right\}.$$

Avant de prouver le théorème précédent, nous donnons les propriétés du couple solutions $(v(y), \epsilon(y))$ dans le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.3

Sous les hypothèses du Théorème 2.3.1, la solutions v et le paramètre solution ϵ , satisfont

$$v = \pm \left(\frac{2}{\ddot{\epsilon}(0)} (\epsilon - \epsilon_*) \right)^{1/2} \varphi_* + \mathcal{O}((\epsilon - \epsilon_*)^2) \text{ dans } \dot{V}_0. \quad (2.41)$$

et

$$\epsilon(y) = \epsilon_* + \frac{\ddot{\epsilon}(0)}{2} y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (2.42)$$

Preuve. (Théorème 2.3.1)

Il est question ici de trouver les couples non triviaux $(y, \epsilon) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ du problème (2.35) vérifiant

$$\Phi(y, \epsilon) = 0,$$

où Φ est donnée par

$$\Phi(y, \epsilon) := \int_0^1 D_v \tilde{\Phi}(ty\varphi_*, \epsilon) \varphi_* dt$$

et

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = PF(\varphi + w(\varphi, \epsilon), \epsilon).$$

En effet, d'après le Corollaire 2.3.2, $(0, \epsilon_*)$ est une solution triviale du problème (2.35). De plus, selon le Lemme 2.3.1, la différentielle de Φ par rapport à ϵ au point $(0, \epsilon_*)$ est non inversible. Donc d'après le théorème des fonctions implicites, on déduit que les solutions non triviales du système suivant

$$\begin{cases} \Phi(y, \epsilon) = 0 & (y, \epsilon) \in \mathbb{R}^* \times (0, +\infty) \\ \Phi(0, \epsilon_*) = 0, \end{cases} \quad (2.43)$$

vérifient

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon(y) \\ \Phi(y, \epsilon(y)) = 0, \forall y \in (-\tau, \tau). \end{cases} \quad (2.44)$$

En utilisant la relation (2.33), on obtient que

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_*, \epsilon(y)) = y\Phi(y, \epsilon(y)) = y \cdot 0 = 0.$$

Et de même

$$\begin{aligned} F(v(y), \epsilon(y)) &= (I - P)F(y\varphi_* + w(y\varphi_*, \epsilon(y)), \epsilon(y)) + PF(y\varphi_* + w(y\varphi_*, \epsilon(y)), \epsilon(y)) \\ &= (I - P)F(y\varphi_* + w(y\varphi_*, \epsilon(y)), \epsilon(y)) + \tilde{\Phi}(y\varphi_*, \epsilon(y)) \\ &= 0 + \tilde{\Phi}(y\varphi_*, \epsilon(y)) \quad \text{d'après (2.26)} \\ &= 0 \quad \text{d'après (2.30)}. \end{aligned}$$

De ce fait, on conclut que $(y\varphi_*, \epsilon(y))$ est une suite de solutions non triviales de (2.30) et que de manière équivalente $(v(y), \epsilon(y))$ est une suite de solutions non triviales de (2.8). D'où $(0, \epsilon_*)$ est un point de bifurcation de (2.5) (dans le sens de la Définition 2.3.2).

Il reste juste à montrer le dernier point du théorème. En effet, ϵ est au moins deux fois dérivable par rapport à y (régularité due au théorème des fonctions implicites). Donc nous pouvons dériver, sans problème, la relation (2.44). Dans un premier temps, on a le résultat suivant

$$\dot{\epsilon}(0) = 0. \quad (2.45)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\Phi(y, \epsilon(y)) \Big|_{y=0} &= D_y\Phi(y, \epsilon(y)) + D_\epsilon\Phi(y, \epsilon(y))\dot{\epsilon}(y) \Big|_{y=0} \\ &= D_y\Phi(0, \epsilon_*) + D_\epsilon\Phi(0, \epsilon_*)\dot{\epsilon}(0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Or par l'utilisation de (2.34) et (2.30), on a

$$\begin{aligned} D_y\Phi(y, \epsilon_*) \Big|_{y=0} &= \int_0^1 D_y(D_\varphi\tilde{\Phi}(t\varphi_*, \epsilon_*)\varphi_*)dt \Big|_{y=0} \\ &= \int_0^1 D_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Phi}(t\varphi_*, \epsilon_*)[\varphi_*, t\varphi_*]dt \Big|_{y=0} \\ &= \frac{1}{2}D_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Phi}(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*] \\ &= \frac{1}{2}PD_{vv}^2F(0, \epsilon_*)[\varphi_*, \varphi_*] \\ &= \frac{1}{2}f''(M)P(\varphi_*^2 - \int_0^1 \varphi_*^2 dx) \\ &= 0 \quad \text{car } \varphi_*^2 - \int_0^1 \varphi_*^2 dx \in R(L(\cdot, \epsilon_*)). \end{aligned}$$

Comme d'après le Lemme 2.3.1, l'opérateur $D_\epsilon\Phi(0, \epsilon_*)$ est inversible, alors le résultat est donné par (2.46).

On passe maintenant au calcul de $\ddot{\epsilon}(0)$. Pour ce faire, nous procédons de façon analogue au calcul de $\dot{\epsilon}(0)$. C'est-à-dire, nous dérivons (2.44) deux fois par rapport à y .

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2}\Phi(y, \epsilon(y)) \Big|_{y=0} &= \frac{d}{dy}(D_y\Phi(y, \epsilon) + D_\epsilon\Phi(y, \epsilon)\dot{\epsilon}(y)) \Big|_{y=0} \\ &= D_{yy}^2\Phi(y, \epsilon) + 2D_{y\epsilon}^2\Phi(y, \epsilon)\dot{\epsilon}(y) + D_{\epsilon\epsilon}^2\Phi(y, \epsilon)[\dot{\epsilon}(y), \dot{\epsilon}(y)] + D_\epsilon\Phi(y, \epsilon)\ddot{\epsilon}(y) \Big|_{y=0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme d'après ce qui précède, $\dot{\epsilon}(0) = 0$ lorsque $y = 0$, il vient que

$$D_{yy}^2 \Phi(0, \epsilon_*) + D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) \cdot \ddot{\epsilon}(0) = 0. \quad (2.47)$$

Cette égalité nous amène au calcul de $D_{yy}^2 \Phi(0, \epsilon_*)$, car l'expression $D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*)$ est donnée par le Lemme 2.3.1.

Sous les hypothèses (2.16)-(2.18), on a

$$D_{yy}^2 \Phi(0, \epsilon_*) = \frac{1}{3} PD_{vvv}^3 F(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*, \varphi_*] + PD_{vv}^2 F(0, \epsilon_*) [\varphi_*, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*]]. \quad (2.48)$$

En effet, partant des égalités (2.30)-(2.31) d'une part, et (2.34) d'autre part, on trouve que

$$D_{yy}^2 \Phi(y, \epsilon) = \int_0^1 t^2 D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(ty\varphi_*, \epsilon) [\varphi_*, \varphi_*, \varphi_*] dt. \quad (2.49)$$

Cela donne, en prenant $y = 0$,

$$D_{yy}^2 \Phi(0, \epsilon_*) = \frac{1}{3} D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*, \varphi_*]. \quad (2.50)$$

D'autre part, la différentielle de (2.30) par rapport à φ donne, dans un premier temps

$$D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = PD_v F(v, \epsilon) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w(\varphi, \epsilon)),$$

et

$$D_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = PD_{vv}^2 F(v, \epsilon) [I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w(\varphi, \epsilon), I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w(\varphi, \epsilon)] \\ + PD_v F(v, \epsilon) D_{\varphi\varphi} w(\varphi, \epsilon).$$

Dans un deuxième temps, elle donne

$$D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(\varphi, \epsilon) = D_\varphi [PD_{vv}^2 F(v, \epsilon) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w)] \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w) \\ + 2PD_{vv}^2 F(v, \epsilon) [I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w, D_{\varphi\varphi}^2 w] + PD_v F(v, \epsilon) \cdot D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w \\ = PD_{vvv}^3 F(v, \epsilon) [I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w, I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w, I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w] \\ + PD_{vv}^2 F(v, \epsilon) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w) \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w \\ + 2PD_{vv}^2 F(v, \epsilon) [I_{Ker(L(\cdot, \epsilon_*))} + D_\varphi w, D_{\varphi\varphi}^2 w] + D_v F(v, \epsilon) \cdot D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w$$

En faisant $(\varphi, \epsilon) = (0, \epsilon_*)$ dans l'expression ci-dessus, il vient, grâce à (2.28), que

$$D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(0, \epsilon_*) = PD_{vvv}^3 F(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*, \varphi_*] + 3PD_{vv}^2 F(0, \epsilon_*) [\varphi_*, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*]]. \quad (2.51)$$

La substitution de (2.51) dans (2.50) donne (2.48). Par ailleurs, de (2.47), il résulte que

$$D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) \cdot \ddot{\epsilon}(0) = -\frac{1}{3} (PD_{vvv}^3 F(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*, \varphi_*] + 3PD_{vv}^2 F(0, \epsilon_*) [\varphi_*, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*]]).$$

Une utilisation de F , donne la formulation suivante

$$D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) \cdot \ddot{\epsilon}(0) = -\frac{f'''(M)}{3} P \left(\varphi_*^3 - \int_0^1 \varphi_*^3 dx \right) - f''(M) P \left(\varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*] - \int_0^1 \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*] dx \right) \quad (2.52)$$

où $D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*]$ est donnée par (2.29).

Enfin par (2.1) et la Proposition 2.3.1, on peut voir que

$$P(\varphi_*^3 - \int_0^1 \varphi_*^3 dx) = \frac{3}{4} \varphi_*. \quad (2.53)$$

et

$$P \left(\varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*] - \int_0^1 \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \epsilon_*) [\varphi_*, \varphi_*] dx \right) = -\frac{f''(M)}{4\mu_{2k_*}} \varphi_*. \quad (2.54)$$

où $\mu_{2k_*} = (\epsilon_* \lambda_{2k_*} - 1)^2 - p$. Et comme selon le Lemme 2.3.1,

$$D_\epsilon \Phi(0, \epsilon_*) = 2 \frac{\epsilon_* \lambda_* - f'(M)}{\epsilon_*} \varphi_*$$

alors (2.40) est déduite de (2.52) d'une part et de (2.53) et (2.54) d'autre part. Cela achève la preuve du théorème. \square

Le Théorème 2.3.1 fournit l'existence des solutions non triviales du problème (2.5) lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est unidimensionnel. Le Corollaire 2.3.3 donne quelques unes de leurs propriétés au voisinage du point de bifurcation $(0, \epsilon_*)$. Par comparaison avec le Théorème 1.1.1 établi par Pierre et Rougirel dans [30], on peut voir que nous avons trouvé exactement les mêmes résultats bien que nous sommes partis des approches différentes. Ce fait nous conduit à l'étude du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$, qui d'une part constitue le deuxième résultat important de [30] et d'autre part permet de connaître les variations de branches de solutions dans le sens de (2.41).

2.4 Etude du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$

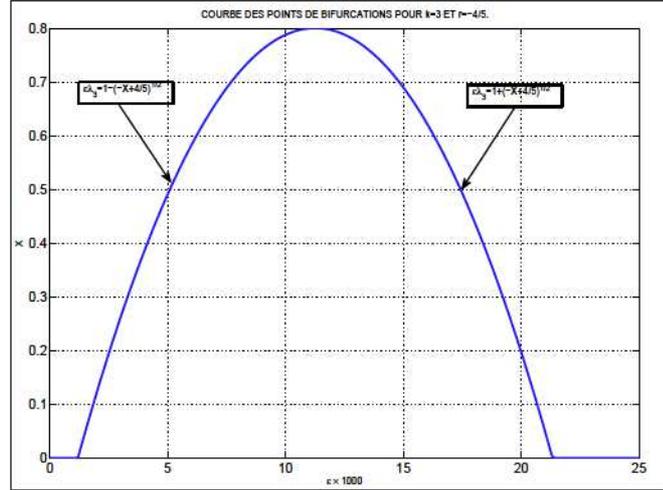
Dans cette section, on étudie les variations de branches de solutions au voisinage de tout point de bifurcation $(0, \epsilon)$. On rappelle que, selon le Théorème 2.3.1, cette étude passe par la connaissance du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ donnée ci-après

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon}{8(\epsilon_* \lambda_k - f'(M))} \left(\frac{f''(M)^2}{(\epsilon_* \lambda_{2k} - 1)^2 - p} - f'''(M) \right), \quad (2.55)$$

où k, r, ϵ et M vérifient les hypothèses (2.16)-(2.18). La particularité essentielle ici est que, le paramètre de bifurcation ϵ , en lequel on obtient une bifurcation peut être interprété grâce à l'hypothèse (2.17) comme étant l'abscisse dans le plan (ϵ, X) où $X = 3M^2$, des points appartenant à la parabole de sommet $(1/\lambda_k, r)$ et d'équation

$$X = -(\epsilon \lambda_k - 1)^2 - r, \quad \epsilon > 0, k \in \mathbb{N}^*, \quad (2.56)$$

Nous avons représenté l'ensemble de tous ces points sur un graphique, en fixant $k = 3$ et $r = -4/5$. (voir figure ci-dessous).


 FIGURE 2.1 – le graphe des points de bifurcation pour $k = 3$ et $r = -4/5$.

Posons

$$Y := \sqrt{p} \quad \text{et} \quad X := 3M^2. \quad (2.57)$$

Ces deux variables sont liées par la relation $p = -r - 3M^2$ (voir hypothèse (2.17)). La proposition suivante donne leurs ensembles de définitions.

Proposition 2.4.1

Soient $p = -r - 3M^2$ et X, Y donnés par (2.57).

- $p = -r - X \in]0, -r[\Leftrightarrow Y \in]0, \sqrt{-r}[\Leftrightarrow X \in [0, -r[$.
- $p = -r - X \in]0, -r[\cap]0, 1[\Leftrightarrow Y \in]0, \sqrt{-r}[\cap]0, 1[\Leftrightarrow X \in [0, -r[\cap]-1 - r, -r[$.

Plus précisément, le dernier point donne

$$\begin{cases} Y \in]0, \sqrt{-r}[& \text{si } -r < 1, \\ \text{ou} & \\ Y \in]0, 1[& \text{si } -r \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X \in [0, -r[& \text{si } -r < 1, \\ \text{ou} & \\ X \in]-r - 1, -r[& \text{si } -r \geq 1. \end{cases} \quad (2.58)$$

Preuve. Puisque $Y = \sqrt{-r - X}$ et $X = 3M^2$, alors la preuve consiste simplement à trouver les intervalles d'appartenance de X et Y suivant les valeurs de r . \square

Avant de continuer, nous donnons quelques résultats préliminaires que nous utiliserons dans la suite.

2.4.1 Quelques calculs préliminaires

Soient k, r, ϵ et M satisfaisant les hypothèses (2.16)-(2.18). Les égalités relatives au paramètre $p = \sqrt{-r - 3M^2}$.

$$\begin{cases} (\epsilon_k \lambda_{2k} - 1)^2 - p = (4(1 + \sqrt{p}) - 1)^2 - p = 9 + 24\sqrt{p} + 15p, \\ (\bar{\epsilon}_k \lambda_{2k} - 1)^2 - p = (4(1 - \sqrt{p}) - 1)^2 - p = 9 - 24\sqrt{p} + 15p. \end{cases} \quad (2.59)$$

et

$$\begin{cases} \epsilon_k \lambda_k - f'(M) = 1 + \sqrt{p} - f'(M) = 1 + \sqrt{p} + p - 1 = p + \sqrt{p}, \\ \bar{\epsilon}_k \lambda_k - f'(M) = 1 - \sqrt{p} - f'(M) = 1 - \sqrt{p} + p - 1 = p - \sqrt{p}. \end{cases} \quad (2.60)$$

où $f(s) = (1 + r)s + s^3$.

On donne également une version des égalités ci-dessus en fonction de Y .

$$\begin{cases} (\epsilon_k \lambda_{2k} - 1)^2 - p = 9 + 24Y + 15Y^2, \\ (\bar{\epsilon}_k \lambda_{2k} - 1)^2 - p = 9 - 24Y + 15Y^2. \end{cases} \quad (2.61)$$

et

$$\begin{cases} \epsilon_k \lambda_k - f'(M) = Y^2 + Y, \\ \bar{\epsilon}_k \lambda_k - f'(M) = Y^2 - Y. \end{cases} \quad (2.62)$$

Dans la suite, nous ferons deux études distinctes du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$. Car l'expression (2.55) change, selon que $\epsilon > 1/\lambda_k$ et $\epsilon < 1/\lambda_k$. On se souviendra que $1/\lambda_k$ est l'abscisse du sommet de la parabole (2.56) des points de bifurcations, pour un k fixé.

2.4.2 Signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ pour $\epsilon > 1/\lambda_k$

Nous commençons cette étude par une proposition.

Proposition 2.4.2

Soient ϵ, k, r, M fixés et vérifiant (2.16)-(2.18). Si $\epsilon > 1/\lambda_k$ alors

$$\epsilon = \frac{1+Y}{\lambda_k} \quad \text{et} \quad \ddot{\epsilon}(0) = \frac{-3}{4\lambda_k Y} \left[\frac{\frac{17}{3}Y^2 + 8Y + \frac{2}{3}r + 3}{5Y^2 + 8Y + 3} \right]. \quad (2.63)$$

Preuve. La première assertion vient de l'hypothèse (2.16). Ceci étant, la seconde assertion est obtenue par une utilisation de l'expression (2.55) d'une part, et des formules (2.61) et (2.62) d'autre part. \square

Remarque 2.4.1

Si $3M^2 \rightarrow 0$ alors $Y \rightarrow \sqrt{-r}$ et donc,

$$\lim_{Y \rightarrow \sqrt{-r}} \ddot{\epsilon}(0) = \frac{-3}{4\lambda_k \sqrt{-r}} < 0. \quad (2.64)$$

Nous posons h , la fonction quadratique, dépendant du paramètre r et définie par

$$h(Y) = \frac{17}{3}Y^2 + 8Y + \frac{2}{3}r + 3, \quad (2.65)$$

et dont le discriminant réduit est,

$$d(r) = \frac{1}{9}(-34r - 9). \quad (2.66)$$

Comme les signes de h et $\ddot{\epsilon}(0)$ sont opposés (voir (2.63)), il vient alors l'analyse suivante

1. si $\frac{2}{3}r + 3 \geq 0 \iff -r \leq 9/2$, alors $h(Y) > 0, \forall Y > 0$ et donc $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
2. si $\frac{2}{3}r + 3 < 0 \iff -r > 9/2$, alors pour donner le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$, nous devons étudier la fonction h , car son signe n'est plus constant.

Proposition 2.4.3

Soit $-r > 9/2$, la fonction h admet une unique racine, $Y_0(r) > 0$ telle que :

- $\forall Y \leq Y_0(r) \implies h(Y) \leq 0$,
- $\forall Y > Y_0(r) \implies h(Y) > 0$.

De façon explicite, $Y_0(r)$ est définie par :

$$Y_0(r) := \frac{1}{17} (-12 + \sqrt{-34r - 9}). \quad (2.67)$$

Preuve.

– Pour $-r > \frac{9}{2}$, alors $d(r)$ est positif et par conséquent les racines de h sont :

$$\frac{1}{17} (-12 - \sqrt{-34r - 9}) \quad \text{et} \quad \frac{1}{17} (-12 + \sqrt{-34r - 9}).$$

La seule racine positive est :

$$Y_0(r) := \frac{1}{17} (-12 + \sqrt{-34r - 9}).$$

En effet, pour $-r > 9/2$,

$$\begin{aligned} Y_0(r) > 0 &\Leftrightarrow -12 + \sqrt{-34r - 9} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{-34r - 9} > 12 \\ &\Leftrightarrow -34r - 9 > 144 \\ &\Leftrightarrow -r > 9/2. \end{aligned}$$

Cela est vrai par hypothèse et nous permet de conclure que $Y_0(r) > 0, \forall -r > 9/2$, alors

- si $Y > Y_0(r)$ alors $h(Y) > 0$,
- si $Y \leq Y_0(r)$ alors $h(Y) \leq 0$.

□

Remarque 2.4.2

En utilisant la définition (2.57), on trouve que la valeur X correspondant à Y_0 est donnée par

$$X_0(r) := - \left(\frac{-12 + \sqrt{-34r - 9}}{17} \right)^2 - r. \quad (2.68)$$

Puisque les signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et h sont opposés, comme nous l'avions déjà fait remarquer plus haut, alors il résulte de la proposition précédente le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.1

Soient $-r > 9/2$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon > 1/\lambda_k$ vérifiant (2.16)-(2.18) et $Y_0(r)$ donnée par (2.67). Alors,

1. si $Y > Y_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
2. si $Y < Y_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$.

2.4.3 Signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ pour $\epsilon < 1\lambda_k$

Comme dans le cas de l'étude précédente, nous commençons cette analyse par une proposition.

Proposition 2.4.4

Soit ϵ, k, r, M fixés et vérifiant (2.16)-(2.18). Si $\epsilon < 1/\lambda_k$ alors $Y \neq 1$, $Y \neq \frac{3}{5}$ et

$$\epsilon = \frac{1-Y}{\lambda_k} \quad \text{et} \quad \ddot{\epsilon}(0) = \frac{3}{4\lambda_k Y} \left[\frac{\frac{17}{3}Y^2 - 8Y + \frac{2}{3}r + 3}{5(Y-1)(Y-\frac{3}{5})} \right], \quad (2.69)$$

où $Y = \sqrt{-3M^2 - r}$.

Preuve. Elle est due à la formule (2.55) et aux égalités (2.61) et (2.62). \square

Afin d'éliminer certains cas dans les analyses ultérieures, on donne le résultat suivant.

Proposition 2.4.5

Soit $-r, k$ fixés et $Y = \sqrt{-r}$, alors, on a

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{3}{4\lambda_k \sqrt{-r}} > 0. \quad (2.70)$$

Preuve. Pour $Y = \sqrt{-r}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{17}{3}Y^2 - 8Y + \frac{2}{3}r + 3 &= 5Y^2 - 8Y + 3 \\ &= 5(Y-1)(Y-3/5). \end{aligned}$$

La conclusion est ensuite triviale. \square

Pour la suite, nous définissons g la fonction quadratique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par :

$$g(Y) = \frac{17}{3}Y^2 - 8Y + \frac{2}{3}r + 3. \quad (2.71)$$

On remarquera que le discriminant réduit de $g(Y) = 0$ est donné par (2.66). Par ailleurs, nous pouvons voir par (2.69) que le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ dépend de celui de g .

Proposition 2.4.6

Si $-r \geq 9/2$ alors

$$g(Y) < 0, \quad \forall 0 < Y < 1. \quad (2.72)$$

Preuve. Si $\frac{2}{3}r + 3 \leq 0 \Leftrightarrow -r \geq 9/2$, alors d'après la Proposition 2.4.1, $Y \in]0, 1[$. Et donc,

$$\begin{aligned} 0 < Y < 1 &\implies Y^2 < Y \\ &\implies \frac{17}{3}Y^2 - 8Y < -\frac{7}{3}Y \\ &\implies g(Y) < -\frac{7}{3}Y + \frac{2}{3}r + 3 < 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

Par le résultat précédent, le corollaire suivant tient.

Corollaire 2.4.2

Si $-r \geq 9/2$ alors $Y \in]0, 1[$ et

1. si $Y > 3/5$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$,
2. si $Y < 3/5$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

Preuve. C'est une conséquence de la Proposition 2.4.6 et de la Proposition 2.4.1. \square

En revanche, si $-r < 9/2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}r + 3 > 0$, nous voyons que le signe de g n'est plus constant. En plus, on a

1. si $-r \in [1, 9/2[$ alors $Y \in]0, 1[$,
2. si $-r \in]0, 1[$ alors $Y \in]0, \sqrt{-r}[$.

Signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ pour $-r \in [1, 9/2[$ et $Y \in]0, 1[$

Ici, nous étudions le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ donnée par (2.69), lorsque $-r \in [1, 9/2[$ et $Y \in]0, 1[$.

Proposition 2.4.7

Si $-r \in [1, 9/2[$ alors g admet $Y_1(r)$ comme unique racine dans $]0, 1[$. De plus

- si $Y \leq Y_1(r)$, alors $g(Y) \geq 0$,
- si $Y > Y_1(r)$, alors $g(Y) < 0$.

De façon explicite, $Y_1(r)$ est égale à

$$Y_1(r) = \frac{1}{17} (12 - \sqrt{-34r - 9}). \quad (2.73)$$

Preuve. Pour $-r \in [1, 9/2[$, le discriminant $d(r)$ (voir (2.66)) est strictement positif et par conséquent g admet deux racines $Y_1(r)$ et $Y_2(r)$ données par :

$$Y_1(r) := \frac{1}{17} (12 - \sqrt{-34r - 9}) \quad \text{et} \quad Y_2(r) := \frac{1}{17} (12 + \sqrt{-34r - 9}). \quad (2.74)$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $Y_1 \in]0, 1[$ et $Y_2 \notin]0, 1[$.

Comme la racine $Y_2(r)$ est positive, il reste juste à la comparer à 1. En effet,

$$\begin{aligned} Y_2(r) \geq 1 &\Leftrightarrow 12 + \sqrt{-34r - 9} \geq 17 \\ &\Leftrightarrow -r \geq 1, \end{aligned}$$

Donc $Y_2(r) \notin]0, 1[$.

En ce qui concerne Y_1 , nous vérifions d'abord la positivité. En effet,

$$\begin{aligned} Y_1(r) > 0 &\Leftrightarrow 12 - \sqrt{-34r - 9} > 0 \\ &\Leftrightarrow -34r - 9 < 144 \\ &\Leftrightarrow -r < 9/2, \end{aligned}$$

cela est vrai. Sa comparaison avec 1 donne

$$\begin{aligned} Y_1(r) < 1 &\Leftrightarrow 12 - \sqrt{-34r - 9} < 17 \\ &\Leftrightarrow -\sqrt{-34r - 9} < 5, \end{aligned}$$

cela est toujours vrai. Donc $Y_1(r) \in]0, 1[$. \square

Remarque 2.4.3

En utilisant la définition (2.57), on trouve que la valeur X correspondant à Y_1 est donnée par

$$X_1(r) := - \left(\frac{-12 - \sqrt{-34r - 9}}{17} \right)^2 - r = X_0(r) \quad (2.75)$$

Pour donner la conclusion de cette partie, nous devons étudier les positions relatives de $Y_1(r)$ par rapport à la valeur critique $Y = 3/5$.

Proposition 2.4.8

Si $-r \in [1, 9/2[$, alors $Y_1(r) < 3/5$.

Preuve. Pour $-r \in [1, 9/2[$, on a ;

$$\begin{aligned} Y_1(r) < 3/5 &\Leftrightarrow -\sqrt{-9 - 34r} < -9/5, \\ &\Leftrightarrow -r > 9/25. \end{aligned}$$

Comme $9/25 < 1$ alors la relation ci-dessus est également vraie pour $-r \in [1, 9/2[$. Et d'où le résultat. \square

Par les deux propositions précédentes, nous sommes maintenant en mesure de donner le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ pour $-r \in [1, 9/2[$.

Corollaire 2.4.3

Si $-r \in [1, 9/2[$ alors $Y \in]0, 1[$ et

1. si $0 < Y \leq Y_1(r)$, alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$
2. si $Y_1(r) < Y < 3/5$, alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
3. si $3/5 < Y < 1$, alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Preuve. C'est simplement une conséquence de la Proposition 2.4.7 et la Proposition 2.4.8. \square

Signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ pour $-r \in]0, 1[$ et $Y \in]0, \sqrt{-r}[$

Dans cette partie, l'analyse est plus complexe, car les cas changent suivant les valeurs du paramètre r . On rappelle que le cas $Y = \sqrt{-r}$ a été traité dans la proposition 2.4.5.

Proposition 2.4.9

Sous les hypothèses de la proposition 2.4.4, si $-r \in]0, 9/34[$ alors

$$\ddot{\epsilon}(0) > 0. \quad (2.76)$$

Preuve.

Si $-r \in]0, 9/34[$ alors $d(r) < 0$ (voir (2.66)) et par suite $g(Y) > 0$. De plus

$$-r < 9/34 \Rightarrow -r < 9/25 \Rightarrow 0 < Y < 3/5,$$

donc $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Si $-r = 9/34$ alors $d(r) = 0$ et $g(Y) = \frac{17}{3}(Y - 12/17)^2 \geq 0$. Or

$$0 < Y < \sqrt{9/34} < 12/17 \quad \text{et} \quad \sqrt{9/34} < 3/5.$$

Donc $\ddot{\epsilon}(0) > 0$. □

Pour la suite, nous devons d'abord étudier les positions relatives de $Y_1(r)$ et $Y_2(r)$, données en (2.79), par rapport à la borne $\sqrt{-r}$.

Proposition 2.4.10

Pour $-r \in]9/34, 1[$, les racines $Y_1(r)$ et $Y_2(r)$ satisfont les points suivants :

- si $-r \in]9/34, 9/25[$ alors $Y_1(r) > \sqrt{-r}$,
- si $-r \in]9/25, 1[$ alors $Y_1(r) < \sqrt{-r}$,
- $\forall -r \in]9/34, 1[$ alors $Y_2(r) > \sqrt{-r}$.

Preuve. Par (2.79) et pour tout $-r \in]9/34, 1[$ nous rappelons que les expressions respectives de Y_1 et Y_2 sont données par :

$$Y_1(r) = \frac{1}{17} (12 - \sqrt{-34r - 9}) \quad \text{et} \quad Y_2(r) = \frac{1}{17} (12 + \sqrt{-34r - 9}). \quad (2.77)$$

Preuve du dernier point :

$$\begin{aligned} Y_2(r) < \sqrt{-r} &\Leftrightarrow \frac{1}{17^2} (12 + \sqrt{-34r - 9})^2 < -r \\ &\Leftrightarrow 45 + 16\sqrt{-34r - 9} - 5(-34r - 9) < 0 \\ &\Leftrightarrow 5Z^2 - 16Z - 45 > 0. \end{aligned}$$

où $Z := \sqrt{-34r - 9}$. Or

$$5Z^2 - 16Z - 45 = 5(Z + 9/5)(Z - 5)$$

et comme $9/34 < -r < 1$, alors $Z \in]0, 5[$. Par conséquent $0 < Z < 5 \Leftrightarrow 9/34 < -r < 1$, et d'après (2.82) on conclut que $Y_2(r) > \sqrt{-r}$.

Preuve des 2 premiers points :

Comme $Y_1(r) \geq 0$ sur $]9/34, 1[$, il vient

$$\begin{aligned} Y_1(r) < \sqrt{-r} &\Leftrightarrow \frac{1}{17^2} (12 - \sqrt{-34r - 9})^2 < -r \\ &\Leftrightarrow 45 - 16\sqrt{-34r - 9} - 5(-34r - 9) < 0 \\ &\Leftrightarrow 5Z^2 + 16Z - 45 > 0. \end{aligned}$$

où $Z := \sqrt{-34r - 9}$. Cependant

$$5Z^2 + 16Z - 45$$

est un polynôme du second degré et de discriminant réduit 17^2 . D'où

$$5Z^2 + 16Z - 45 = 5(Z - 9/5)(Z + 5)$$

puisque $9/5 \in]0, 5[$, alors par utilisation de (2.83),

$$5 > Z > 9/5 \Leftrightarrow 1 > -r > 9/25 \implies Y_1(r) < \sqrt{-r},$$

$$0 < Z < 9/5 \Leftrightarrow 9/34 < -r < 9/25 \implies Y_1(r) > \sqrt{-r}.$$

D'où le résultat. \square

Proposition 2.4.11

Si $-r \in]9/34, 1[$ alors $Y_1(r)$ satisfait les points suivants :

- si $-r \in]9/34, 9/25[$ alors $Y_1(r) > 3/5$,
- si $-r \in]9/25, 1[$ alors $Y_1(r) < 3/5$.

Preuve. Pour $-r \in]9/34, 1[$

$$\begin{aligned} Y_1(r) < 3/5 &\Leftrightarrow -\sqrt{-9 - 34r} < -9/5, \\ &\Leftrightarrow -r > 9/25. \end{aligned}$$

Et on peut conclure car $9/25 \in]9/34, 1[$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de donner le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ pour $-r \in]9/34, 1[$.

Corollaire 2.4.4

Si $-r \in]9/34, 1[$, alors il résulte que

1. si $-r \in]9/34, 9/25[$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$,
2. si $-r \in]9/25, 1[$ alors
 - 2.1 si $0 < Y \leq Y_1(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$,
 - 2.2 si $Y_1(r) < Y < 3/5$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
 - 2.3 si $3/5 < Y$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Remarque 2.4.4

Notre analyse n'est pas suffisante pour conclure dans le cas où $\ddot{\epsilon}(0) = 0$. En d'autres mots, dans le cas où

$$Y \in \{Y_0(r), Y_1(r)\}. \tag{2.78}$$

2.5 Théorème de synthèse et diagrammes de bifurcation

Dans cette section nous donnons deux versions de la synthèse du signe $\ddot{\epsilon}(0)$. La première est faite en fonction de la variable Y . La deuxième version, beaucoup plus utile que la première est effectuée en fonction de X . Et, l'utilité dont nous parlons ici est simplement due au fait que tous les diagrammes de bifurcations que nous donnons plus bas sont représentés dans le plan (ϵ, X) , avec $X = 3M^2$.

Proposition 2.5.1

Soit k, r fixés et ϵ, M vérifiant les hypothèses (2.17)-(2.18).

1. si $-r \leq 9/2$ alors $Y \in]0, \sqrt{-r}]$ et

1.1 si $\epsilon > 1/\lambda_k$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,

1.2 si $\epsilon < 1/\lambda_k$ alors,

1.2.1 si $-r \in]0, 9/25[$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$,

1.2.2 si $-r \in]9/25, 1[\cup]1, 9/2[$ alors $Y_1(r) \in]0, 1[\cap]0, \sqrt{-r}[$,

- si $0 < Y < Y_1(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$,
- si $Y_1(r) < Y < 3/5$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
- si $3/5 < Y$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

2. Si $-r > 9/2$ alors $Y \in]0, 1[$ et

2.1 si $\epsilon > 1/\lambda_k$ alors $Y_0(r) \in]0, 1[$

- si $Y > Y_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
- si $Y \leq Y_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$,

2.2 si $\epsilon < 1/\lambda_k$

- si $0 < Y < 3/5$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
- si $3/5 < Y < 1$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Nous énonçons maintenant la synthèse du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ en fonction de X . Mais, pour cela, on doit préciser certaines propriétés de Y et X . En effet, on sait que les deux variables sont liées par la relation

$$Y = \sqrt{-X - r}. \quad (2.79)$$

Nous notons par $X_0(r)$ la valeur commune de X correspondant à Y_1 et Y_2 . On rappelle que

- si $-r \in]9/34, 9/2[$

$$Y_1(r) := \frac{1}{17} (12 - \sqrt{-34r - 9}),$$

- si $-r \geq 9/2$ alors

$$Y_0(r) := \frac{1}{17} (-12 + \sqrt{-34r - 9}),$$

En utilisant la relation (2.79), la valeur X_0 est explicitement donnée par

$$X_0(r) := - \left(\frac{-12 + \sqrt{-34r - 9}}{17} \right)^2 - r. \quad (2.80)$$

Théorème 2.5.1

Soit k, r fixés et ϵ, M vérifiant les hypothèses (2.17)-(2.18).

1. si $-r \leq 9/2$ alors $X \in]0, -r]$ et
 - 1.1 si $\epsilon > 1/\lambda_k$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
 - 1.2 si $\epsilon < 1/\lambda_k$ alors,
 - 1.2.1 si $-r \in]0, 9/25[$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$,
 - 1.2.2 si $-r \in]9/25, 1[\cup]1, 9/2[$ alors $X_0(r) \in]-r - 9/25, -r[$,
 - si $X_0(r) \leq X < -r$ alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$,
 - si $-r - 9/25 < X < X_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
 - si $X < -r - 9/25$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.
2. Si $-r > 9/2$ alors $X \in]-r - 1, -r[$ et
 - 2.1 si $\epsilon > 1/\lambda_k$ alors $X_0(r) \in]0, -r[$
 - si $X < X_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
 - si $X \geq X_0(r)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) \geq 0$,
 - 2.2 si $\epsilon < 1/\lambda_k$
 - si $-r - 9/25 < X < -r$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
 - si $-r - 1 < X < -r - 9/25$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Preuve. Elle est due à la Proposition 2.5.1. □

Contrairement au Théorème 1.2.1, des travaux antérieurs de Pierre et Rougirel où la synthèse du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ avait poussé les auteurs à fixer M . Le Théorème 2.5.1 ci-dessus apporte quelques améliorations intéressantes. Car le paramètre M n'est plus fixé, et cela permet de donner les variations de la courbe

$$y \mapsto \epsilon(y) = \epsilon + \frac{\ddot{\epsilon}(0)}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3), \quad (2.81)$$

au voisinage de tout point (ϵ, X) (c'est-à-dire, au voisinage de tout point de bifurcation) vérifiant

$$X = -(\epsilon\lambda_k - 1)^2 - r, \quad (2.82)$$

pourvu que k et r soient fixés. Ce fait avantageux nous a permis de connaître la nature des bifurcations des branches solutions au voisinage de chaque point de bifurcation $(0, \epsilon)$.

2.5.1 Diagrammes de bifurcations suivant les valeurs de r

Le but ici est de donner les variations de (2.81), au voisinage de tout ϵ , correspondant à un point de bifurcation $(0, \epsilon)$. Cependant, on sait que les résultats donnés dans le Théorème 2.3.1 sont locaux. De ce fait, pour réaliser des diagrammes de bifurcations, on se donne k_* et r , et ensuite, on se place sur un point de bifurcation $(0, \epsilon_*)$ (où encore $(\epsilon_*, 3M_*^2)$) particulier. L'hypothèse (2.17) permet de voir que

1. Si $\epsilon_* > \lambda_{k_*}$ alors $\epsilon_* = \frac{1 + \sqrt{-r - 3M_*^2}}{\lambda_{k_*}}$.
2. Si $\epsilon_* < \lambda_{k_*}$ alors $\epsilon_* = \frac{1 - \sqrt{-r - 3M_*^2}}{\lambda_{k_*}}$.

Cela étant faite, nous écrivons la perturbation de ϵ_* comme suit

$$\epsilon(y) = \epsilon_* + \frac{\ddot{\epsilon}(0)}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3) \quad (2.83)$$

où $\ddot{\epsilon}(0)$ est donnée par (2.63) (ou (2.69)). Ce développement montre que au voisinage du point de bifurcation $(0, \epsilon_*)$, nous nous attendons à avoir soit une bifurcation sous critique, soit une bifurcation sur critique (ou simplement de type Pichfork) suivant le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$.

Pour bien décrire ce phénomène, nous avons choisi de représenter dans un même plan, l'ensemble des points de bifurcations $(\epsilon, X = 3M^2)$ (courbe bleue) et l'ensemble des points $(\tilde{\epsilon}, X)$ où $\tilde{\epsilon}$ est donné plus bas (pour un ϵ_* donné). Il est important, de souligner que $\tilde{\epsilon}$ désigne la perturbation du paramètre de bifurcation ϵ par $\ddot{\epsilon}(0)$. Dans toutes les figures, l'ensemble des points de perturbation $(\tilde{\epsilon}, X)$ sera de couleur verte lorsque $\epsilon < 1/(3\pi)^2$ et de couleur rouge lorsque $\epsilon > 1/(3\pi)^2$. Pour des besoins pratiques, nous définissons $\tilde{\epsilon}_*$ de la manière suivante

$$\tilde{\epsilon} = \begin{cases} -10, & \text{si } \ddot{\epsilon}(0) \leq -10 \\ \epsilon_* + \ddot{\epsilon}(0), & \text{si } -10 < \ddot{\epsilon}(0) < 10 \\ 10, & \text{si } \ddot{\epsilon}(0) \geq 10. \end{cases} \quad (2.84)$$

Définition 2.5.1

Soit $(\epsilon, 3M^2)$ un point appartenant à la parabole d'équation (2.82) et $\epsilon > 1/\lambda_k$. On dira que la bifurcation est de type sur-critique lorsque la courbe rouge sera à l'extérieur de la courbe bleue, et sous critique lorsqu'elle sera à l'intérieur.

Définition 2.5.2

Soit $(\epsilon, 3M^2)$ un point appartenant à la parabole d'équation (2.82) et $\epsilon < 1/\lambda_k$. On dira que la bifurcation est de type sur-critique lorsque la courbe verte sera à l'intérieur de la courbe bleue, et sous critique lorsqu'elle sera à l'extérieur.

Les figures suivantes, illustrent les différentes situations que nous avons étudiées en fonction du paramètre fixé r (voir Théorème 2.5.1). Pour la réalisation de toutes les figures, nous avons pris $k = 3$, et comme les résultats sont obtenues pour de très petites valeurs de ϵ (à peu près de $1/(k\pi)^2 \simeq 11.25810^{-3}$), nous avons donc changé ϵ en $10^3 \times \epsilon$ sur l'axe des abscisses afin de rendre les graphiques plus lisibles.

Dans la figure 2.2 (où on a pris $r = -9/20$), nous pouvons voir que, dans la partie droite (c'est-à-dire $\epsilon > 1/\lambda_k$) qui correspond à la situation $\epsilon = \epsilon_k$, la courbe rouge reste constamment à l'intérieur de la courbe bleue pour tout $X = 3M^2 \in [0, 9/20[$. En réalité cela veut dire que le signe de $\ddot{\epsilon}(0)$ demeure constant pour $X = 3M^2$ fixé dans $[0, 9/20[$. Ce qui est conforme au Théorème 2.5.1, cas 1.1. Du point de vue analytique, nous dirons que les branches de solutions obtenues dans le Théorème 2.3.1, gardent une même orientation au voisinage des points de bifurcations. Aussi, selon la Définition 2.5.1, on peut simplement dire qu'on a une bifurcation sous critique pour tout $X = 3M^2 \in [0, 9/20[$ et $\epsilon > 1/\lambda_k$. En revanche, dans la partie gauche ($\epsilon < 1/\lambda_k$), correspondant à la situation $\epsilon = \bar{\epsilon}_k$, nous voyons que pour $X \in [0, 0.09[\cup [X_0(-9/20) \simeq 0.138, 9/20[$ la courbe verte est à l'intérieur de la courbe bleue (bifurcation super critique selon la définition 2.5.2) et pour $X \in [0.09, 0.138]$ elle est à l'extérieur (bifurcation sous critique). Ce double changement

d'orientation de la courbe verte est conforme au résultat du Théorème 2.5.1, cas 1.2.2. Car $\ddot{\epsilon}(0)$ change deux fois de signes suivant les intervalles de la variable X . Analytiquement, nous dirons que les branches de solutions bifurquantes, changent d'orientation suivant que $X \in [0, 0.09[\cup [X_0(-9/20) \simeq 0.138, 9/20[$ ou $X \in [0.09, 0.138]$.

Selon le Théorème 2.5.1, on peut remarquer qu'il ne reste que deux situations possibles pouvant se produire. Ces situations sont décrites par les diagrammes de phases donnés par la figure 2.3 et la figure 2.4. En effet, dans la figure 2.3, (où on a pris $r = -9/30$), la courbe verte et la courbe rouge ne changent pas de sens d'orientation pour tout X et respectivement dans les deux cas $\epsilon < 1/\lambda_k$ et $\epsilon > 1/\lambda_k$. Ce qui, une fois de plus est conforme aux résultats théoriques trouvés dans le Théorème 2.5.1, cas 1.1 et cas 1.2.1. Par contre, dans la figure 2.4 (où $r = -12$), nous observons un seul changement d'orientation dans les deux situations. Plus précisément, lorsque ($\epsilon > 1/\lambda_k$), la courbe rouge est à l'intérieur de la courbe bleue pour tout $X \leq X_0(-12)$ et à l'extérieur dans le cas contraire. De même, lorsque $\epsilon < 1/\lambda_k$ la courbe verte est l'intérieur de la courbe rouge pour tout $X < 12 - 9/25$, et à l'extérieur dans le cas contraire. Ce qui correspond, du point de vue analytique à un seul changement d'orientation des branches de solutions dans les deux situations (voir cas 2.1 et cas 2.2).

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que dans les figures 2.2 et 2.4 les changements d'orientation de la courbe verte ne se font pas toujours de la même manière. Dans certains cas, nous avons des changements continus, et dans d'autres cas, ils sont discontinus. Par exemple dans la figure 2.2 le phénomène de changement continu apparaît lorsque la courbe verte passe de l'extérieur à l'intérieur de la courbe bleue et dans la figure 2.4 lorsque la courbe rouge passe de l'intérieur à l'extérieur de la courbe bleue. En fait, ces points de changements d'orientation continus correspondent aux points $X_0(r)$ définis par (??) qui est, selon l'étude théorique, le point d'annulation de la fonction $\ddot{\epsilon}(0)$. Cependant, notre analyse ne nous permet pas de donner des orientations des solutions bifurquantes en ces points. Par contre le phénomène de changement discontinu n'est observable ici que pour $\epsilon < 1/\lambda_k$ (courbe verte). Et pour comprendre ce phénomène, il faut retourner à l'expression (2.69). En effet, dans cette expression, $\ddot{\epsilon}(0)$ admet $\frac{3}{5}$ comme point critique, en lequel elle n'est pas continue. Plus tard, on verra que ce point correspond à un noyau de dimension 2, et qu'il n'est pas un cas isolé. Bien entendu, si nous posons

$$X_k := X = -(\epsilon\lambda_k - 1)^2 - r, \quad (2.85)$$

pour $k > 1$ et $r < 0$ fixés. et

$$X_{k'} := -(\epsilon\lambda_{k'} - 1)^2 - r, \text{ avec } 1 \leq k' < k. \quad (2.86)$$

D'un point de vue graphique, pour $r < 0$ et k fixés, ces points de bifurcation qui donnent un noyau de dimension 2 sont des points d'intersections de la parabole X_k avec toutes les autres paraboles $X_{k'}$ tel que $1 \leq k' < k$. Il est clair que les hypothèses qui ont rendu notre étude possible ne peuvent plus être valides dans ce cas (voir Proposition 2.2.2). Pour y remédier nous utiliserons dans le prochain chapitre la méthode des espaces symétriques, lorsque la réduction du noyau sera possible, et la méthode des multiparamètres dans le cas contraire. Les figures 3.1 et 3.2 donnent une idée sur certains de ces points de bifurcations où le noyau est de dimension 2.

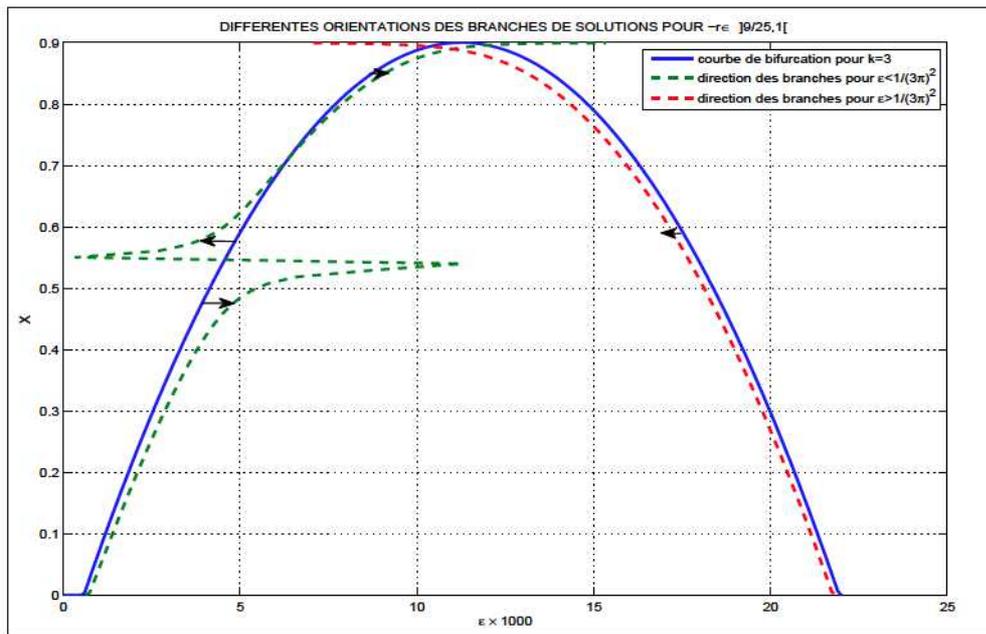


FIGURE 2.2 – Direction des branches solutions pour $-r \in]9/25, 1[$.

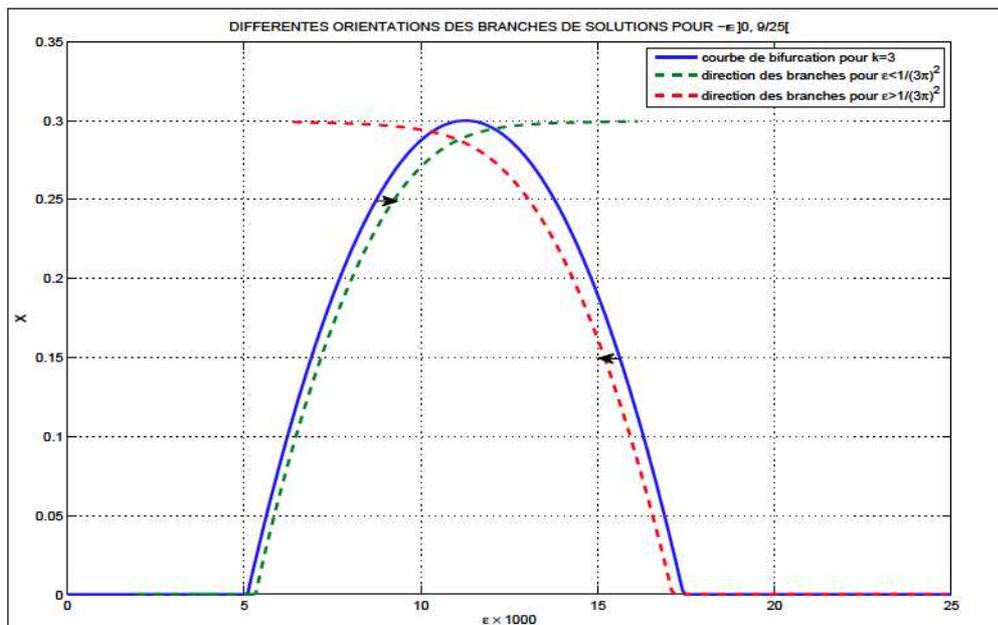


FIGURE 2.3 – Direction des branches solutions pour $-r \in]0, 9/25[$.

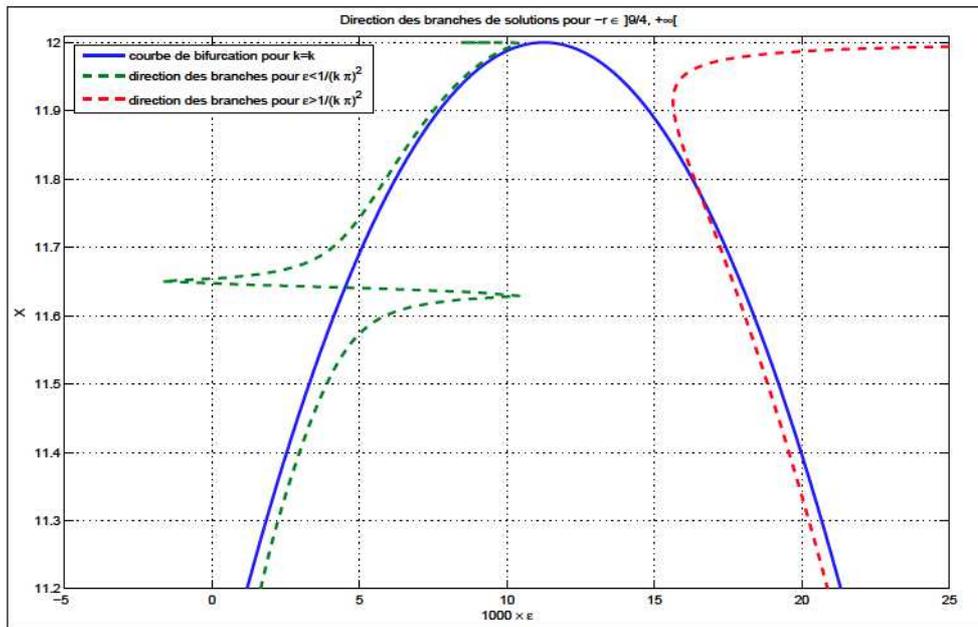


FIGURE 2.4 – Direction des branches solutions pour $-r \in]9/2, +\infty[$

Le Théorème 2.3.1 détermine si la bifurcation est sur-critique ou sous-critique pour chaque point de bifurcation situé sur une parabole donnée. Les graphiques ci-dessus illustrent les différents cas possibles. Remarquons qu'il n'y a que trois profils essentiellement distincts. Le Théorème 2.3.1 permet donc une classification de la famille de paraboles (paramétrées par $r < 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$). Les trois classes (ou profils) possibles sont illustrées par les figures Fig 2.2, 2.3 et 2.4. Et cela constitue une avancée par rapport aux travaux antérieurs consacrés à ce sujet.

Chapitre 3

Etude des solutions stationnaires bifurquantes avec $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta) = 2$

Ce chapitre couvre la majeure partie des recherches effectuées dans cette thèse. En effet, ici nous prouvons l'existence des branches de solutions non triviales lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est bidimensionnel. Cette étude qui aurait pu être un cas particulier du Chapitre 2 nécessite une paramétrisation astucieuse, pour l'application de la méthode de Lyapunov-Schmidt, et la prise en compte des paramètres qui seront impliqués dans la résolution. Une étude des variations des branches bifurquantes et un résultat de comparaison des énergies complètent le chapitre.

3.1 Motivations et hypothèses

Dans leurs travaux antérieurs consacrés à l'étude des solutions stationnaires du modèle de champs de phase cristallin [30], Pierre et Rougirel avaient déjà commencé à regarder la question de l'existence des solutions bifurquantes avec un noyau bidimensionnel (voir Théorème 1.1.3). Mais, très vite, ils ont été confrontés à un problème de dimension. Car, en théorie classique de bifurcations il est bien connu que plus la dimension du noyau est grand moins il existe de méthodes adéquates permettant de calculer les branches de solutions bifurquantes. Cette complication les a poussé à particulariser certaines données du problème, mais ne les avaient pas permis de conclure. D'où, nous nous donnons l'objectif ici de prouver le cas général et aussi, d'étudier des éventuelles branches de solutions qui y sont obtenues.

Avant de continuer, nous rappellerons brièvement le problème à étudier, et le cadre fonctionnel, dans lequel nous allons travailler.

Soient $\Omega = (0, 1)$, $\epsilon > 0$, $x \in \Omega$ et r un paramètre réel négatif. Nous définissons

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto (1 + r)u + u^3. \quad (3.1)$$

$$V_0 = \{u \in H^4(\Omega) \mid \partial_x u = \partial_{xxx} u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\},$$

$$\dot{L}^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v dx = 0\},$$

$$\dot{V}_0 = V_0 \cap \dot{L}^2(\Omega)$$

En plus des définitions, ci-dessus, on pose

$$\delta = (\epsilon, M) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

car M sera considérée, comme un paramètre de bifurcation plus tard.

Soit $u(x, 0) = u_0(x)$, une donnée initiale. Le problème d'évolution du modèle de champs de phase cristallin, en dimension 1 d'espace, avec les conditions homogènes de Neumann s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \partial_{xx} (\epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u)), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \partial_x u = \partial_{xxx} u = \partial_{xxxx} u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Le but est de prouver l'existence de solutions bifurquantes stationnaires du problème suivant

$$u \in M + \dot{V}_0, \quad \epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u) = \int_{\Omega} f(u) dx \quad \text{dans } L^2(\Omega), \quad (3.4)$$

où $M = \int_{\Omega} u_0(x) dx$.

Nous introduisons, pour ce faire, une nouvelle fonction v définie par $u = M + v$. Et, en utilisant l'expansion de Taylor de la fonction $f(M + v)$ à l'ordre 3 nous obtenons le problème

$$\begin{cases} v \in \dot{V}_0, \quad \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v + \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) \\ \quad + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases} \quad (3.5)$$

Dans la suite, nous diviserons le membre de gauche de l'équation (3.5) en deux parties. A savoir,

$$L(\cdot, \delta) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v \quad (3.6)$$

et

$$N(\cdot, \delta) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx). \quad (3.7)$$

Finalement nous définissons

$$F : \dot{V}_0 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad (v, \delta) \mapsto F(v, \delta) = L(v, \delta) + N(v, \delta).$$

Alors, au lieu de (3.5), nous sommes désormais conduits à étudier le problème de bifurcation qui consiste à trouver v et δ tels que

$$v \in \dot{V}_0, \quad \delta = (\epsilon, M) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad F(v, \delta) = 0 \quad \text{dans } \dot{L}^2(\Omega). \quad (3.8)$$

En plus, par la Proposition 2.2.1 (voir Chapitre 2), on sait que l'opérateur $L(\cdot, \delta)$ admet dans $L^2(\Omega)$, une base orthogonale de vecteurs propres,

$$\varphi_k = \cos(k\pi \cdot), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Pour des valeurs propres

$$\mu_k = (\epsilon \lambda_k - 1)^2 - p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

On rappelle que

$$p = 1 - f'(M) \quad \text{et} \quad \lambda_k = (k\pi)^2. \quad (3.11)$$

Nous formulons maintenant, les hypothèses, grâce auxquelles, nous mènerons les analyses de ce chapitre.

$$(H4) \quad \text{Soient } 1 \leq k_{**} < k_* \text{ et } r < 0 \text{ fixés.} \quad (3.12)$$

$$(H5) \quad \text{Soient } \epsilon > 0 \text{ et } M \in \mathbb{R}^* \text{ vérifiant} \\ (\epsilon \lambda_{k_*} - 1)^2 + r + 3M^2 = (\epsilon \lambda_{k_{**}} - 1)^2 + r + 3M^2 = 0. \text{ On pose } p = -3M^2 - r. \quad (3.13)$$

$$(H6) \quad \text{De plus, on suppose que } 0 < p < 1 \text{ et } \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) = \text{Vect}(\varphi_{k_*}, \varphi_{k_{**}}). \quad (3.14)$$

Grâce à l'hypothèse (3.13), le paramètre p vérifie

$$\sqrt{p} = \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} \quad \text{où } \theta := \frac{k_*}{k_{**}}. \quad (3.15)$$

Pour simplifier les écritures dans la suite, on adoptera les notations suivantes

$$\varphi_{k_*} = \varphi_*, \varphi_{k_{**}} = \varphi_{**}, \lambda_{k_*} = \lambda_* \text{ et } \lambda_{k_{**}} = \lambda_{**}. \quad (3.16)$$

Remarque 3.1.1

Si k_* , k_{**} , r , ϵ_* et $X_* = 3M_*^2$ vérifient les hypothèses (3.12)-(3.14) alors, on peut voir graphiquement que $(\epsilon_*, 3M_*^2)$ (ou $\delta_* = (\epsilon_*, M_*)$) est le point d'intersection de deux paraboles, dont les équations sont :

$$X = -(\epsilon \lambda_{k_*} - 1)^2 - r, \quad (3.17)$$

et

$$X = -(\epsilon \lambda_{k_{**}} - 1)^2 - r. \quad (3.18)$$

avec $X = 3M^2$. (voir figures 3.1 et 3.2, pour $k_* = 3$ et $k_{**} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

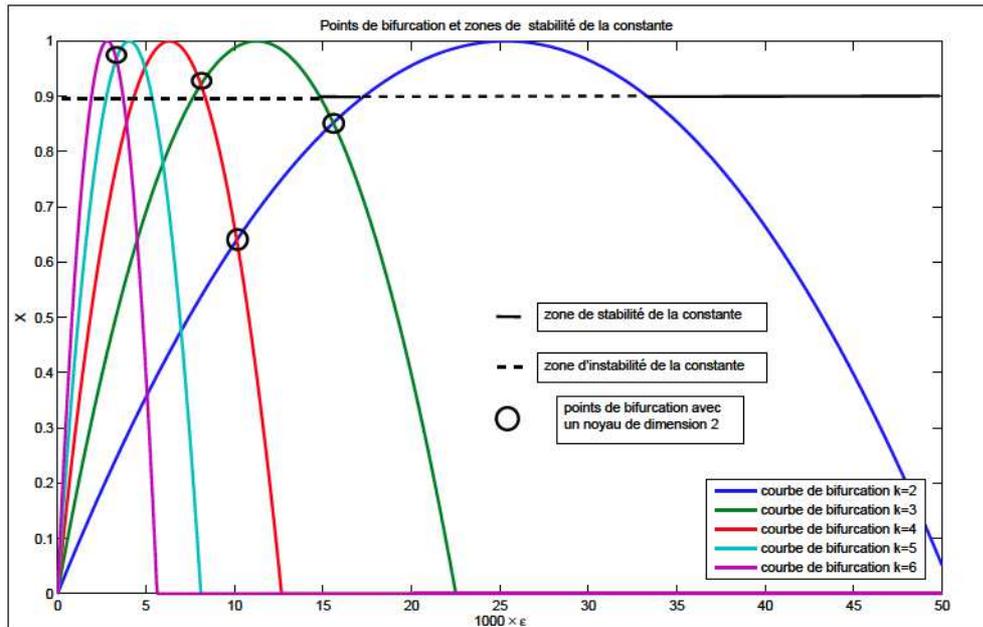


FIGURE 3.1 – Points de bifurcation avec un noyau de dimension 2

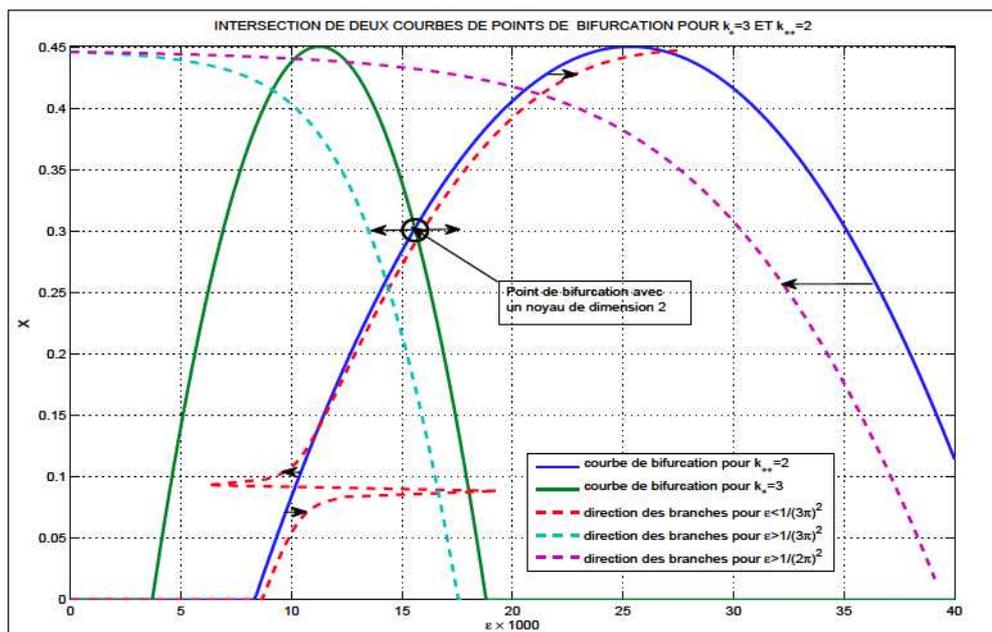


FIGURE 3.2 – Point de bifurcation avec $dimKerL(\cdot, \delta) = 2$ et direction des branches quand $dimKerL(\cdot, \delta) = 1$

Notons que, l'utilisation des symétries d'un problème, dans la recherche des branches de solutions bifurquantes est une méthode qui s'avère souvent efficace en dimension $n \geq 2$. Car elles permettent souvent, dans bien des cas, de réduire la dimension du noyau de $L(\cdot, \delta)$ (voir [33] et [34], [45], [46]). Outre cela, elles permettent, parfois aussi, d'obtenir certains résultats satisfaisants en dimension 1 d'espace. Comme nous allons le voir, dans la prochaine section.

3.2 Existence des solutions par utilisation des symétries

L'idée, ici, consiste à utiliser les symétries des deux vecteurs propres φ_{k_*} et $\varphi_{k_{**}}$ qui engendrent le noyau de $L(\cdot, \delta_*)$, afin de faire passer sa dimension de 2 à 1. Pour appliquer cette technique, nous procéderons comme dans [30], lorsque les auteurs montrent le caractère symétrique des solutions bifurquantes du problème (3.5). En plus, nous définissons $Tu \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, pour tout $u \in L^2(\Omega)$ comme une fonction périodique de période 2 telle que $T(u) = u$ dans Ω et

$$T(u)(x) = u(2 - x) \quad \text{pour presque tout } x \in [1, 2]. \quad (3.19)$$

On remarquera, par ailleurs, que $T(\varphi_k) = \cos(k\pi \cdot)$, $k \geq 1$. Plus précisément, l'idée est de restreindre l'analyse de bifurcation, soit à l'espace ne contenant que des fonctions $2/k_*$ -périodiques, ou encore à l'espace ne contenant que des fonctions $2/k_{**}$ -périodiques. Pour cela, nous introduisons, pour tout nombre positif η , les espaces suivants

$$\begin{aligned} \dot{V}_{0,\eta} &= \left\{ v \in \dot{V}_0 \mid Tv \text{ est } \eta\text{-périodique} \right\}, \\ \dot{L}^2_\eta(\Omega) &= \left\{ v \in \dot{L}^2(\Omega) \mid Tv \text{ est } \eta\text{-périodique} \right\}. \end{aligned}$$

Soit k_{**} un entier naturel fixé. Il est clair que

$$\left\{ \frac{\varphi_{mk_{**}}}{\|\varphi_{mk_{**}}\|} \mid m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \subset \dot{V}_{0,2/k_{**}}$$

est une base spectrale dans $\dot{L}_{2/k_{**}}^2(\Omega)$ pour l'opérateur $L(\cdot, \delta_*)$.

Dans toute cette partie, M n'est pas considérée comme un paramètre de bifurcation. Et donc, la bifurcation se fera uniquement en fonction de ϵ , comme dans le chapitre 2.

Proposition 3.2.1

Soient k_* , k_{**} satisfaisant (3.12)-(3.14), et $\theta = \frac{k_*}{k_{**}} \notin \mathbb{N}$. Si $L(\cdot, \delta_*)$ est vu comme un opérateur de $\dot{V}_{0,2/k_{**}}$ dans $\dot{L}_{2/k_{**}}^2(\Omega)$ alors

$$\text{Ker}L(\cdot, \delta_*) = \text{Vect}(\varphi_{k_{**}}). \quad (3.20)$$

Preuve. la preuve est triviale car

$$\begin{aligned} \varphi_* \in \dot{V}_{0,2/k_{**}} &\Leftrightarrow T(\varphi_*) \text{ est } 2/k_{**} - \text{périodique} \\ &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k_* = mk_{**} \end{aligned}$$

En effet,

\Rightarrow) $T(\varphi_*)$ est $2/k_{**}$ – périodique si

$$\begin{aligned} \cos(k_*\pi x) &= \cos(k_*\pi(x - 2/k_{**})) \\ &= \cos(k_*\pi x - 2\pi \frac{k_*}{k_{**}}) \end{aligned}$$

En faisant $x = 0$, il vient de ce qui précède que $1 = \cos(2\pi \frac{k_*}{k_{**}})$. D'où l'existence d'un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $k_* = mk_{**}$.

\Leftarrow) triviale. Mais cela est faux par hypothèse. D'où le résultat. □

En particulier, si nous regardons $L(\cdot, \delta_*)$ comme un opérateur de $\dot{V}_{0,2/k_{**}}$ dans $\dot{L}_{2/k_{**}}^2(\Omega)$, on obtient les décompositions spatiales suivantes

$$\dot{L}_{2/k_{**}}^2(\Omega) = R(L(\cdot, \delta_*)) \oplus \text{ker}L(\cdot, \delta_*) \quad (3.21)$$

et

$$\dot{V}_{0,2/k_{**}} = \left(R(L(\cdot, \delta_*)) \cap \dot{V}_{0,2/k_{**}} \right) \oplus \text{ker}L(\cdot, \delta_*). \quad (3.22)$$

En argumentant comme dans le chapitre 2 (ou plus précisément comme dans la section 2.3), il vient le résultat suivant

Théorème 3.2.1

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (3.12)-(3.14) et $\theta = \frac{k_*}{k_{**}} \notin \mathbb{N}$ alors

- $(0, \delta_*)$ est un point de bifurcation de (3.8)
- Il existe localement une unique courbe, au moins de classe C^2 au voisinage de $(0, \epsilon_*)$

$$\{(v(y), \epsilon(y)) \mid y \in (-\tau, \tau), \tau > 0 \text{ et } (v(0), \epsilon(0)) = (0, \epsilon_*)\} \subset \dot{V}_{0,2/k_{**}} \times (0, +\infty), \quad (3.23)$$

telle que $F(v(y), \epsilon(y)) = 0, \forall y \in (-\tau, \tau)$ et $\dot{\varphi}(0) = \varphi_{**}$.

De plus

$$\dot{\epsilon}(0) = 0. \quad (3.24)$$

et

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*}{8(\epsilon_*\lambda_{**} - f'(M))} \left(\frac{f''(M)^2}{(\epsilon_*\lambda_{2k_{**}} - 1)^2 - p} - f'''(M) \right). \quad (3.25)$$

Preuve. La démonstration est identique à celle du Théorème 2.3.1. \square

De façon analogue, nous montrons, dans le théorème qui va suivre, qu'il existe aussi une unique branche de solutions bifurquantes dans $\dot{V}_{0,2/k_*} \times (0, +\infty)$, proche de $(0, \delta_*)$, lorsque nous regardons $L(\cdot, \delta_*)$ comme un opérateur de $\dot{V}_{0,2/k_*}$ dans $\dot{L}_{2/k_*}^2(\Omega)$. La seule particularité importante ici est que θ est quelconque dans \mathbb{Q} .

Théorème 3.2.2

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (3.12)-(3.14) et $\theta = \frac{k_*}{k_{**}} > 1$. Si $L(\cdot, \delta_*)$ est vu comme un opérateur de $\dot{V}_{0,2/k_*}$ dans $\dot{L}_{2/k_*}^2(\Omega)$ alors

- $(0, \epsilon_*)$ est un point de bifurcation de (3.8)
- Il existe localement une unique courbe, au moins de classe C^2 au voisinage de $(0, \epsilon_*)$ et définie par

$$\{(v(y), \epsilon(y)) \mid y \in (-\tau, \tau), \tau > 0 \text{ et } (v(0), \epsilon(0)) = (0, \epsilon_*)\} \subset \dot{V}_{0,2/k_*} \times (0, +\infty), \quad (3.26)$$

telle que $F(v(y), \epsilon(y)) = 0, \forall y \in (-\tau, \tau)$ et $\dot{\varphi}(0) = \varphi_*$.

De plus

$$\dot{\epsilon}(0) = 0. \quad (3.27)$$

et

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*}{8(\epsilon_* \lambda_* - f'(M))} \left(\frac{f''(M)^2}{(\epsilon_* \lambda_{2k_*} - 1)^2 - p} - f'''(M) \right). \quad (3.28)$$

La démonstration de ce théorème repose sur la Proposition 3.2.2 ci-après, car le reste est identique au Théorème 2.3.1.

Proposition 3.2.2

Soient k_* , k_{**} satisfaisant (3.12)-(3.14), et $\theta = \frac{k_*}{k_{**}} > 1$. Si $L(\cdot, \delta_*)$ est vu comme un opérateur de $\dot{V}_{0,2/k_*}$ dans $\dot{L}_{2/k_*}^2(\Omega)$ alors

$$\text{Ker}L(\cdot, \delta_*) = \text{Vect}(\varphi_*). \quad (3.29)$$

Preuve. la preuve est triviale car

$$\begin{aligned} \varphi_{**} \in \dot{V}_{0,2/k_*} &\Leftrightarrow T(\varphi_{**}) \text{ est } 2/k_* - \text{périodique} \\ &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } k_{**} = mk_* \end{aligned}$$

ce qui est absurde car $k_* > k_{**}$. D'où le résultat. \square

Remarque 3.2.1

La proposition précédente est vraie pour $\theta > 1$. De fait, il résulte que la réduction du noyau est toujours possible pour $\eta = 2/k_*$. En revanche, pour $\eta = 2/k_{**}$ nous avons besoin de plus de restrictions (comme par exemple $\theta > 1$ et $\theta \notin \mathbb{N}$) pour espérer avoir une réduction.

En conclusion, nous dirons que la technique des symétries nous a permis de trouver les branches de solutions bifurquantes dans la direction de φ_* , pour $\theta > 1$ et dans la direction de φ_{**} pour $\theta \notin \mathbb{N}$. Ce phénomène est illustré dans la figure 3.2 pour $\theta = \frac{3}{2}$. Néanmoins, il est important de remarquer que, si $\theta \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire $k_* = mk_{**}$ pour $m > 1$) alors, l'utilisation des symétries ne peut plus nous permettre de faire la réduction du noyau, du moins pour $\eta = 2/k_{**}$, car la fonction propre $\varphi_* = \varphi_{mk_{**}}$ ne peut être isolée de l'espace $\dot{V}_{0,2/k_{**}}$, au moyen de la seule symétrie T . Afin d'établir l'existence des solutions dans le cas général, utiliserons, en plus de la méthode de Lyapunov-Schmidt, la méthode des multi-paramètres (voir Chapitre 1 ou [36], pour plus de détail).

3.3 Existence des solutions par des multi-paramètres

Cette section est consacrée au calcul des branches de solutions non triviales du problème (3.8) lorsque $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 2$. Pour parvenir à notre fin, nous utiliserons la méthode des multi-paramètres, qui consiste, à faire impliquer, dans la résolution du problème, autant de paramètres que la dimension du noyau. Et cela explique, l'importance de considérer $\delta = (\epsilon, M)$ comme paramètre de bifurcation. En plus de cela, nous faisons l'hypothèse suivant

$$\theta = \frac{k_*}{k_{**}} \notin \{2, 3\}. \quad (3.30)$$

Nous traiterons ces deux cas dans le Chapitre 5. Pour revenir, au cas général qui nous concerne, il faut signaler que, outre l'utilisation de la méthode des multi-paramètres, notre principal outil, pour conduire les analyses, reste encore, la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt (voir Chapitre 1). Ainsi, en dépit de quelques changements formels, la démarche de fond demeurera analogue à celle qui a été réalisée dans le Chapitre 2. En prime, comme $\left\{ \frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|} \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ est une base spectrale dans $\dot{L}^2(\Omega)$, on a

$$\dot{L}^2(\Omega) = \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) \oplus R(L(\cdot, \delta_*)) \quad (3.31)$$

et

$$\dot{V}_0 = \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) \oplus \left(R(L(\cdot, \delta_*)) \cap \dot{V}_0 \right). \quad (3.32)$$

Où, selon des hypothèses (3.12)-(3.14),

$$\text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = \text{Vect}(\varphi_*, \varphi_{**}). \quad (3.33)$$

Ces décompositions, en retour, définissent de manière naturelle les projections continues suivantes

$$P : \dot{L}^2(\Omega) \longrightarrow \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) \quad \text{et} \quad Q = I - P : \dot{L}^2(\Omega) \longrightarrow R(L(\cdot, \delta_*))$$

où

$$Pv := 2(v, \varphi_*)\varphi_* + 2(v, \varphi_{**})\varphi_{**}, \quad \forall v \in \dot{L}^2(\Omega). \quad (3.34)$$

Ici, (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. D'où, on peut écrire la solution v sous la forme suivante

$$v = Pv + (I - P)v = \varphi + w \quad \text{avec} \quad \varphi \in \text{Ker} L(\cdot, \delta_*), \quad \text{et} \quad w \in \left(R(L(\cdot, \delta_*)) \cap \dot{V}_0 \right). \quad (3.35)$$

De ce fait, il résulte que les solutions du problème (3.8) sont données par le système suivant

$$\begin{cases} PF(\varphi + w, \delta) = P(L(\varphi, \delta) + N(\varphi + w, \delta)) = 0 \\ QF(\varphi + w, \delta) = Q(L(w, \delta) + N(\varphi + w, \delta)) = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Soit φ_0 un vecteur de $\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)$, vérifiant que

$$\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**} \quad \text{avec} \quad \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta \neq 0. \quad (3.37)$$

Autrement dit, φ_0 n'est ni colinéaire à φ_* , ni colinéaire à φ_{**} . Ensuite, on suppose que α et β satisfont

$$\text{(H7)} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (\text{c'est-à-dire} \quad \|\varphi_0\|^2 = \frac{1}{2}). \quad (3.38)$$

Enfin, pour tout $\varphi \in KerL(\cdot, \delta_*)$, tel que $\|\varphi\|^2 = \frac{|y|}{2}$ avec $y \in \mathbb{R}$, nous posons,

$$\varphi = y\varphi_0 \quad y \in \mathbb{R}. \quad (3.39)$$

Cette substitution est faite, pour faciliter l'application de la méthode de réduction, et la technique des multi-paramètres, sur lesquelles reposent les analyses que nous mènerons plus tard. La compréhension de ce qui précède, peut se traduire en des termes suivants :

Soit un vecteur φ_0 non colinéaire aux vecteurs de base φ_* et φ_{**} . Peut-on trouver des branches de solutions bifurquantes dans la direction φ_0 ?

C'est précisément, à cette question que nous allons tenter de répondre dans la suite. De plus, on considèrera que chaque vecteur $\varphi \in KerL(\cdot, \delta_*)$ est de la forme (3.39). En revanche, l'hypothèse (3.38) sera utile, pour l'étude des variations des branches.

3.3.1 Projection sur $R(L(\cdot, \delta_*))$

D'après (3.36), la projection du problème (3.8) sur l'image de $L(\cdot, \delta_*)$ nous fournit l'équation suivante :

$$QL(w, \delta) + QN(\varphi + w, \delta) = 0. \quad (3.40)$$

Ainsi, par l'utilisation du théorème des fonctions implicites (voir Chapitre 1) et pour (v, w, δ) proche de $(0, 0, \delta_*)$, la relation (3.40) est équivalente à

$$\begin{cases} w := w(\varphi, \delta), \quad \forall (\varphi, \delta) \in U \times V \subset Ker(L(\cdot, \delta_*)) \times \mathbb{R}^2 \\ w(0, \delta_*) = 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

où $U \times V$ est un voisinage ouvert de $(0, \delta_*)$. De plus w a la même régularité que F et est définie d'un voisinage de $(0, \delta_*)$ à valeurs dans $R(L(\cdot, \delta_*))$. Aussi, puisqu'elle est l'unique solution locale de (3.40) alors w vérifie

$$w(0, \delta) = 0, \quad \forall \delta \sim \delta_*. \quad (3.42)$$

Nous posons

$$I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} = \text{l'opérateur identité sur } Ker(L(\cdot, \delta_*)). \quad (3.43)$$

Corollaire 3.3.1

Sous les hypothèses (3.12)-(3.14) et les décompositions spatiales (3.31)-(3.32) on a

$$D_\varphi w(0, \delta_*) = 0. \quad (3.44)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} D_\varphi QF(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) &= QD_v F(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta)(I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_\varphi w(\varphi, \delta)) \\ &= QD_v F(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta)I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} \\ &\quad + QD_v F(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta)D_\varphi w(\varphi, \delta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il résulte que, pour $(\varphi, \delta) = (0, \delta_*)$

$$QD_v F(0, \delta_*)D_\varphi w(0, \delta_*) = 0 \text{ car } QD_v F(0, \delta_*)I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} = 0.$$

D'où $D_\varphi w(0, \delta_*) = 0$ car $QD_v F(0, \delta_*) : \dot{L}^2(\Omega) \longrightarrow R(L(\cdot, \delta_*))$ est inversible. \square

Pour des besoins ultérieurs nous calculons $D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0]$.

Proposition 3.3.1 ([30])

Sous les hypothèses (3.12)-(3.14), $\frac{k_*}{k_{**}} \neq 2$ et $\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il résulte que,

$$D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 \cdot \varphi_0 = x_{2k_*}\varphi_{2k_*} + x_{k_*+k_{**}}\varphi_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}}\varphi_{k_*-k_{**}} + x_{2k_{**}}\varphi_{2k_{**}} \quad (3.45)$$

où

$$\begin{aligned} x_{2k_*} &= -f''(M)\frac{\alpha^2}{2\mu_{2k_*}} & x_{k_*+k_{**}} &= -f''(M)\frac{\alpha\beta}{\mu_{k_*+k_{**}}} \\ x_{k_*-k_{**}} &= -f''(M)\frac{\alpha\beta}{\mu_{k_*-k_{**}}} & x_{2k_{**}} &= -f''(M)\frac{\beta^2}{2\mu_{2k_{**}}}, \end{aligned}$$

et

$$\mu_j = (\epsilon_*\lambda_j - 1)^2 - p$$

pour $j = 2k_*$, $k_* + k_{**}$, $k_* - k_{**}$, $2k_{**}$ et $\lambda_j = (j\pi)^2$.

Preuve. En différentiant (3.40) deux fois par rapport à φ et en appliquant le résultat à φ_0 il s'ensuit que $D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0]$ est solution de l'équation suivante

$$QL(D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0], \delta_*) + Qf''(M)(\varphi_0^2 - \int_{\Omega} \varphi_0^2 dx) = 0 \quad \text{dans } \dot{L}^2(\Omega),$$

et puisque $k_* \neq 2k_{**}$, alors

$$\varphi_0^2 - \int_{\Omega} \varphi_0^2 dx = \frac{\alpha^2}{2}\varphi_{2k_*} + \alpha\beta\varphi_{k_*+k_{**}} + \alpha\beta\varphi_{k_*-k_{**}} + \frac{\beta^2}{2}\varphi_{2k_{**}} \in R(L(\cdot, \delta_*))$$

d'où on a simplement,

$$L(D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0], \delta_*) + f''(M)(\varphi_0^2 - \int_{\Omega} \varphi_0^2 dx) = 0.$$

En testant l'équation ci-dessus avec φ_k , on obtient

$$\int_0^1 D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0]L(\varphi_k, \delta_*)dx + f''(M) \int_0^1 (\varphi_0^2 - \int_0^1 \varphi_0^2 dx)\varphi_k dx = 0$$

car $L(\cdot, \delta_*)$ est auto-adjoint. Et par suite, on a

$$\int_0^1 D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0]\mu_k\varphi_k dx + f''(M) \int_0^1 (\varphi_0^2 - \int_0^1 \varphi_0^2 dx)\varphi_k dx = 0$$

ou encore

$$\int_0^1 D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0]\mu_k\varphi_k dx = -f''(M) \int_0^1 \left(\frac{\alpha^2}{2}\varphi_{2k_*} + \alpha\beta\varphi_{k_*+k_{**}} + \alpha\beta\varphi_{k_*-k_{**}} + \frac{\beta^2}{2}\varphi_{2k_{**}}\right)\varphi_k dx.$$

On obtient le résultat en faisant une identification termes. \square

3.3.2 Projection sur $Ker(L(\cdot, \delta_*))$

Les relations (3.36) et (3.43) permettent de définir $\tilde{\Phi}$ par

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PF(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) = PL(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) + PN(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta). \quad (3.46)$$

De plus, d'après (3.42) et le fait que $\tilde{\Phi}$ est nulle par définition (voir (3.36)), on a

$$\tilde{\Phi}(0, \delta) = 0, \quad \forall \delta \in V \subset (0, +\infty[\times\mathbb{R}^*. \quad (3.47)$$

Ce qui permet d'écrire $\tilde{\Phi}$ de la manière suivante

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t\varphi, \delta) dt = \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(t\varphi, \delta) \varphi dt. \quad (3.48)$$

Puisque nous cherchons des solutions de la forme $\varphi = y\varphi_0$ (voir (3.39)), il résulte que

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta) = y \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta) \varphi_0 dt = y\Phi(y, \delta), \quad (3.49)$$

avec

$$\Phi(y, \delta) = \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta) \varphi_0 dt. \quad (3.50)$$

Donc, les solutions non triviales du problème (3.8), sont désormais, obtenues par le nouveau problème de bifurcation suivant

$$y \in \mathbb{R}, \quad \delta \sim \delta_*, \quad \Phi(y, \delta) = 0 \quad \text{dans} \quad KerL(\cdot, \delta_*). \quad (3.51)$$

Corollaire 3.3.2

Sous les hypothèses (3.12)-(3.14) et la décomposition spatiale (3.31) on a,

$$\Phi(0, \delta_*) = 0. \quad (3.52)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \Phi(0, \delta_*) &= \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0 dt \\ &= PL(I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_\varphi w(0, \delta_*), \delta_*) \varphi_0 \\ &= PL(I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))}, \delta_*) \varphi_0 + PL(D_\varphi w(0, \delta_*), \delta_*) \varphi_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Car $\varphi_0 \in Ker(L(\cdot, \delta_*))$ et $D_\varphi w(0, \delta_*) \varphi_0 = 0$ (voir (3.44)). □

3.3.3 Théorème de bifurcation par les multi-paramètres

En théorie de la bifurcation, la méthode des multi-paramètres consiste à faire impliquer, dans la recherche de branches de solutions, autant de paramètres que la dimension du noyau de l'opérateur qui gouverne l'évolution du système. C'est pour cette raison, précisément, que nous avons choisi, dans ce chapitre, de considérer deux paramètres de bifurcations, à savoir : ϵ et M (ou $\delta = (\epsilon, M)$). De plus, on prendra $Vect(\varphi_*, \varphi_{**})$ comme une base orthonormée de $KerL(0, \delta_*)$. Autrement dit,

$$\forall \varphi \in Ker(L(\cdot, \delta_*)) \Leftrightarrow \varphi = 2(\varphi, \varphi_*)\varphi_* + 2(\varphi, \varphi_{**})\varphi_{**}. \quad (3.53)$$

Cette expression, nous permettra de simplifier les écritures des coefficients de la représentation matricielle $A_{\alpha, \beta}$, de l'opérateur $D_\delta \Phi(0, \delta_*) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, Ker(L(\cdot, \delta_*)))$, définie ci-après. En outre, on prendra

$$e_{\mathbb{R}^2} := \left(\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right); \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right) \right)$$

comme la base canonique de \mathbb{R}^2 .

Dans les bases définies ci-dessus, on donne la représentation matricielle de l'opérateur $D_\delta \tilde{\Phi}(0, \delta_*)$ par

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 2 \left(D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_* \right) & 2 \left(D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_* \right) \\ 2 \left(D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_{**} \right) & 2 \left(D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_{**} \right) \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

et on a le lemme suivant.

Lemme 3.3.1

Soient k_*, k_{**}, δ_* satisfaisant (3.12)-(3.14). La matrice $A_{\alpha, \beta}$, explicitement donnée par

$$A_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 2\alpha \frac{\epsilon_* \lambda_* - f'(M_*)}{\epsilon_*} & \alpha f''(M_*) \\ 2\beta \frac{\epsilon_* \lambda_{**} - f'(M_*)}{\epsilon_*} & \beta f''(M_*) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

est inversible.

Preuve. Nous commençons la preuve de ce lemme par le calcul des coefficients de la matrice $A_{\alpha, \beta}$ donnée en (3.54). Pour ce faire, il suffit de déterminer les composantes des vecteurs

$$D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0 \quad \text{et} \quad D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0 \quad (3.56)$$

dans la base $e_{\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))}$.

D'une part, la définition (3.50) de $\tilde{\Phi}$, donne

$$\begin{aligned} D_\delta \tilde{\Phi}(0, \delta_*) &= \int_0^1 \left[D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0 \right] dt \\ &= \left[D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0 \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, en différentiant $\tilde{\Phi}$ par rapport à φ (voir (3.46)), on obtient

$$D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PL(I + D_\varphi w, \delta) + PD_v N(\varphi + w, \delta)(I + D_\varphi w). \quad (3.57)$$

La différentiation du résultat ci-dessus par rapport à δ donne

$$\begin{aligned} D_{\varphi \delta} \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) \varphi_0 &= PD_\delta L(\cdot, \delta)(I + D_\varphi w) \varphi_0 + PL(D_{\varphi \delta} w, \delta) \varphi_0 \\ &\quad + PD_{vv}^2 N(\varphi + w, \delta)(\varphi_0 + D_\varphi w \varphi_0) \cdot D_\delta w \\ &\quad + PD_{v\delta} N(\varphi + w, \delta)(I + D_\varphi w) \varphi_0 + PD_v N(\varphi + w, \delta)(D_{\varphi \delta} w) \varphi_0 \\ &= \left[D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) \varphi_0, D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) \varphi_0 \right]. \end{aligned}$$

En appliquant le résultat à $(\varphi, \delta) = (0, \delta_*)$, et en utilisant le fait que

$$D_v N(0, \delta) = 0, \quad D_{v\delta}^2 N(0, \delta_*) = 0 \quad \text{et} \quad D_\delta w(0, \delta) = 0 \quad \forall \delta \in \mathbb{R}^2 \quad (3.58)$$

(voir (3.7) et (3.42)), il vient que

$$\begin{aligned} D_{\varphi \delta} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0 &= PD_\delta L(\cdot, \delta)(I + D_\varphi w) \varphi_0 |_{\delta=\delta_*} \\ &= PD_\delta L(\varphi_0, \delta) |_{\delta=\delta_*} \quad \text{car} \quad D_\varphi w(\varphi_0, \delta_*) = 0 \\ &= [PD_\epsilon L(\varphi_0, \delta) |_{\delta=\delta_*}, PD_M L(\varphi_0, \delta) |_{\delta=\delta_*}]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Cette dernière égalité nous permet de déduire que

$$\begin{aligned}
 D_{\varphi\epsilon}\tilde{\Phi}(0, \delta_*)\varphi_0 &= PD_\epsilon L(\varphi_0, \delta) |_{\delta=\delta_*} \\
 &= P\left(2\epsilon_*\varphi_0'''' + 2\varphi_0''\right) \\
 &= 2\left[\epsilon_*\left(\alpha\lambda_*^2\varphi_* + \beta\lambda_{**}^2\varphi_{**}\right) - \left(\alpha\lambda_*\varphi_* + \beta\lambda_{**}\varphi_{**}\right)\right] \\
 &= 2\alpha\left(\epsilon_*\lambda_*^2 - \lambda_*\right)\varphi_* + 2\beta\left(\epsilon_*\lambda_{**}^2 - \lambda_{**}\right)\varphi_{**} \\
 &= 2\alpha\frac{\epsilon_*\lambda_* - f'(M_*)}{\epsilon_*}\varphi_* + 2\beta\frac{\epsilon_*\lambda_{**} - f'(M_*)}{\epsilon_*}\varphi_{**} \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

car $\epsilon_*^2\lambda_*^2 - 2\epsilon_*\lambda_* + f'(M_*) = 0$ et $\epsilon_*^2\lambda_{**}^2 - 2\epsilon_*\lambda_{**} + f'(M_*) = 0$. (voir hypothèse (3.14)). De même, on obtient

$$\begin{aligned}
 D_{\varphi M}\tilde{\Phi}(0, \delta_*)\varphi_0 &= PD_M L(\varphi_0, \delta) |_{\delta=\delta_*} \\
 &= \alpha f''(M_*)\varphi_* + \beta f''(M_*)\varphi_{**}. \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

Les résultats (3.60) et (3.61) donnent les coefficients de $A_{\alpha,\beta}$. Il reste à montrer son caractère inversible. En effet, le déterminant de $A_{\alpha,\beta}$ que l'on notera $D_{\alpha,\beta}$ est donné par

$$D_{\alpha,\beta} = \frac{2\alpha\beta}{\epsilon_*}(\sqrt{p} + p - p + \sqrt{p})f''(M_*) = 4\frac{\alpha\beta\sqrt{p}}{\epsilon_*}f''(M_*). \tag{3.62}$$

Comme selon l'hypothèse (3.13), le paramètre M_* est non nul. Donc, il résulte que

$$D_{\alpha,\beta} \neq 0 \iff \alpha \neq 0 \quad \text{et} \quad \beta \neq 0. \tag{3.63}$$

Et, cela est vérifié (voir (3.37)). Donc $A_{\alpha,\beta}$ est inversible. \square

Nous sommes maintenant en mesure de donner le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.3.1 (Bifurcation)

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (3.12)-(3.14). Alors,

- $(0, \delta_*)$ est un point de bifurcation de (3.8).
- Il existe $\tau > 0$ et une unique courbe au moins de classe C^2 dans un voisinage de $(0, \delta_*)$ par,

$$\{(v(y), \delta(y)) \mid y \in (-\tau, \tau) \quad \text{et} \quad (v(0), \delta(0)) = (0, \delta_*)\}, \tag{3.64}$$

telle que $F(v(y), \delta(y)) = 0$, $\forall y \in (-\tau, \tau)$ et $\dot{v}(0) = \varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$.

De plus, si (3.30) et (3.38) sont satisfaites, alors

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}}\left(A(\theta^2, M_*^2)\alpha^2 + B(\theta^2, M_*^2)\right), \tag{3.65}$$

$$\ddot{M}(0) = \frac{1}{8M_*}\left(C(\theta^2, M_*^2)\alpha^2 + D(\theta^2, M_*^2)\right). \tag{3.66}$$

Avec

$$\begin{cases} A(\theta^2, M_*^2) = 2 + M_*^2 \frac{(\theta^2 + 1)^2 (-2\theta^4 + 61\theta^2 - 2)}{\theta^2 (4\theta^2 - 1) (\theta^2 - 4)} \\ B(\theta^2, M_*^2) = -1 + M_*^2 \frac{(\theta^2 + 1)^2 (4\theta^2 - 61)}{2 (4\theta^2 - 1) (\theta^2 - 4)}. \end{cases} \tag{3.67}$$

et

$$\begin{cases} C(\theta^2, M_*^2) = -2\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} + M_*^2 \frac{(\theta^2 + 1)(\theta^2 - 1)(4\theta^4 - 57\theta^2 + 4)}{\theta^2(4\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)} \\ D(\theta^2, M_*^2) = -2\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2 + 1} + M_*^2 \frac{(\theta^2 + 1)(-4\theta^4 + \theta^2 - 60)}{(4\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)}. \end{cases} \quad (3.68)$$

Avant de continuer, il est nécessaire, de faire quelques commentaires, et de donner des conséquences immédiates. En effet, le Théorème 3.3.1, donne l'existence des branches de solutions non triviales, du problème (3.5), lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est bidimensionnel. Et cela, pourvu que les hypothèses posées, soient respectées. Ce résultat compliqué, qui avait déjà été abordé dans [30], est établi, ici, de manière générale et plus directe. En plus, il présente un intérêt important, en ce sens que l'on peut établir une connexion avec les Théorème 3.2.1 et 3.2.2, de la Section 3.2. Car, si on fait tendre α vers 0 (respectivement β vers 0) dans (3.37), alors, tout le problème revient à chercher des branches bifurquantes de solutions, dans la direction de φ_* (ou φ_{**}). Et, on peut montrer, par exemple par utilisation du système (3.89), qu'on a exactement les résultats (3.25) et (3.28). Un avantage, non négligeable, que nous pouvons également signaler est que des expressions $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$ sont quadratiques en α . Cela, sera très utile dans l'étude des variations des branches de solutions.

Corollaire 3.3.3

Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1, la solutions v et des paramètres solutions ϵ et M satisfont

$$v = \pm \left(\frac{2}{\ddot{\epsilon}(0)}(\epsilon - \epsilon_*) \right)^{1/2} \varphi_* + \mathcal{O}((\epsilon - \epsilon_*)^2) \quad \text{dans } \dot{V}_0. \quad (3.69)$$

$$\epsilon(y) = \epsilon_* + \frac{\ddot{\epsilon}(0)}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (3.70)$$

et

$$M(y) = M_* + \frac{\ddot{M}(0)}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (3.71)$$

Preuve. (Théorème 3.3.1)

Nous prouvons seulement l'assertion (3.64). Le reste de la preuve fera l'objet d'une proposition qui sera donnée plus tard. En effet, il s'agit, ici, de trouver des solutions non triviales du problème (3.51) consistant à trouver y et δ tels que,

$$y \in \mathbb{R}, \quad \delta \sim \delta_*, \quad \Phi(y, \delta) = 0.$$

Or grâce au Corollaire 3.3.2, on peut voir que $(0, \delta_*)$ est une solution particulière de ce problème. Et comme $D_\delta \Phi(0, \delta_*)$ est inversible (voir Lemme 3.3.1), alors le théorème des fonctions implicites permet de dire que, les solutions du problème suivant

$$\begin{cases} \Phi(y, \delta) = 0, \quad y \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \delta \sim \delta_* \\ \Phi(0, \delta_*) = 0 \end{cases}$$

vérifient,

$$\begin{cases} \delta = \delta(y) \quad \text{et} \quad \delta(0) = \delta_* \\ \Phi(y, \delta(y)) = 0, \quad \forall y \in (-\tau, \tau) \end{cases} \quad (3.72)$$

De plus, par (3.49), on déduit que

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y)) = y\Phi(y, \delta(y)) = y \cdot 0 = 0 \quad \forall y \in (-\tau, \tau).$$

Donc $(y\varphi_0, \delta(y))$ sont solutions de (3.46). Et finalement, de (3.36) on trouve que

$$\begin{aligned} F(v(y), \delta(y)) &= PF(y\varphi_0 + w(y), \delta(y)) + (I - P)F(y\varphi_0 + w(y), \delta(y)) \quad \forall y \in (-\tau, \tau) \\ &= \tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y)) + 0 \text{ car } w(y) \text{ est l'unique solution de (3.40)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où (3.64). De ce dernier résultat, on conclut que $(0, \delta_*)$ est un point de bifurcation du problème (3.8), dans le sens de la Définition 2.3.2 du Chapitre 2. \square

Pour compléter la preuve du Théorème 3.3.1, on va donner une proposition relative aux calculs de $\ddot{\epsilon}(0)$ et de $\ddot{M}(0)$. Pour ce faire, nous posons

$$a := \frac{3\alpha^3}{4} + \frac{3\alpha\beta^2}{2}, \quad b := \frac{3\beta^3}{4} + \frac{3\beta\alpha^2}{2}, \quad (3.73)$$

$$c := -\frac{f''(M_*)\alpha^3}{4\mu_{2k_*}} - \frac{f''(M_*)\alpha\beta^2}{2\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{f''(M)\alpha\beta^2}{2\mu_{k_*-k_{**}}}, \quad (3.74)$$

et

$$d := -\frac{f''(M_*)\beta^3}{4\mu_{2k_{**}}} - \frac{f''(M_*)\beta\alpha^2}{2\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{f''(M_*)\beta\alpha^2}{2\mu_{k_*-k_{**}}}, \quad (3.75)$$

où

$$\mu_j = (\epsilon_*\lambda_j - 1)^2 - p, \quad j = 2k_*, \quad k_* + k_{**}, \quad k_* - k_{**}, \quad 2k_{**} \quad \text{et} \quad \lambda_j = (j\pi)^2. \quad (3.76)$$

Proposition 3.3.2

Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1 alors

$$\dot{\epsilon}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{M}(0) = 0. \quad (3.77)$$

De plus, si (3.30) est satisfaite, alors

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*}{4\sqrt{p}} \left[-\frac{2a}{\alpha} - \frac{f''(M_*)c}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{f''(M_*)d}{\beta} \right], \quad (3.78)$$

et

$$\ddot{M}(0) = \frac{1}{f''(M_*)} \left[\frac{a(\sqrt{p}-1)}{\alpha} + \frac{f''(M_*)(\sqrt{p}-1)c}{2\alpha} - \frac{(\sqrt{p}+1)b}{\beta} - \frac{f''(M_*)(\sqrt{p}+1)d}{2\beta} \right] \quad (3.79)$$

où a, b, c et d sont données par (3.73)-(3.75).

Preuve. Sous les hypothèses du Théorème 3.3.1, le couple $(y, \delta(y))$ est solution de (3.51) si et seulement si

$$\Phi(y, \delta(y)) = 0 \quad \forall y \in (-\tau, \tau). \quad (3.80)$$

En dérivant (3.80) une fois, par rapport à y on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\Phi(y, \delta(y)) \Big|_{y=0} &= D_y\Phi(y, \delta(y)) + D_\delta\Phi(y, \delta(y))\dot{\delta}(y) \Big|_{y=0} \\ &= D_y\Phi(0, \delta_*) + D_\delta\Phi(0, \delta_*)\dot{\delta}(0) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

D'autre part, par l'utilisation de (3.46) et (3.50), on obtient

$$\begin{aligned}
 D_y \Phi(y, \delta_*) \Big|_{y=0} &= \int_0^1 D_y (D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta_*)\varphi_0) dt \Big|_{y=0} \\
 &= \int_0^1 D_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta_*)[\varphi_0, t\varphi_0] dt \Big|_{y=0} \\
 &= \frac{1}{2} D_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Phi}(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0] \\
 &= \frac{1}{2} P D_{\varphi\varphi}^2 F(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0] \\
 &= \frac{1}{2} f''(M_*) P (\varphi_0^2 - \int_0^1 \varphi_0^2 dx) \\
 &= 0 \quad \text{car par hypothèse } k_* \neq 2k_{**} \quad \text{et } \varphi_0^2 - \int_0^1 \varphi_0^2 dx \in \text{Ker} L(\cdot, \delta_*).
 \end{aligned}$$

Ainsi par (3.81), et en faisant usage de la matrice $A_{\alpha, \beta}$, nous déduisons que

$$D_\delta \Phi(0, \delta_*) \cdot \dot{\delta}(0) = 0 \Leftrightarrow A_{\alpha\beta} \dot{\delta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\dot{\delta}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } A_{\alpha\beta} \text{ est inversible.}$$

Et comme $\dot{\delta}(0) = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}(0) \\ \dot{M}(0) \end{pmatrix}$, alors on obtient (3.77).

Pour calculer $\ddot{\delta}(0)$ (ou encore $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$) nous dérivons la relation (3.80), deux fois, par rapport à y . D'une part, on obtient,

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dy^2} \Phi(y, \delta(y)) \Big|_{y=0} &= \frac{d}{dy} (D_y \Phi(y, \delta) + D_\delta \Phi(y, \delta) \cdot \dot{\delta}(y)) \\
 &= D_{yy}^2 \Phi(y, \delta) + 2D_{y\delta}^2 \Phi(y, \delta) \cdot \dot{\delta}(y) + D_{\delta\delta}^2 \Phi(y, \delta) \cdot \dot{\delta}(y) \dot{\delta}(y) + D_\delta \Phi(y, \delta) \cdot \ddot{\delta}(y) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

Comme $\dot{\delta}(0) = 0$ pour $y = 0$, alors la relation ci-dessus devient

$$D_{yy}^2 \Phi(0, \delta_*) + D_\delta \Phi(0, \delta_*) \cdot \ddot{\delta}(0) = 0. \tag{3.82}$$

Pour conclure, nous devons calculer $D_{yy}^2 \Phi(0, \delta_*)$. En effet, d'après (3.50), on a

$$D_{yy}^2 \Phi(y, \delta_*) = \int_0^1 t^2 D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0] dt,$$

en $y = 0$, ce résultat devient

$$D_{yy}^2 \Phi(0, \delta_*) = \frac{1}{3} D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0]. \tag{3.83}$$

Or, en utilisant la définition (3.46), on obtient premièrement

$$D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = P D_v F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))} + D_\varphi w).$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
 D_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) &= P D_{vv}^2 F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))} + D_\varphi w) \cdot (I_{\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))} + D_\varphi w) \\
 &\quad + P D_v F(\varphi + w, \delta) D_{\varphi\varphi}^2 w.
 \end{aligned}$$

Et enfin

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) &= D_{\varphi} [PD_{vv}^2 F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w)] \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \\ &\quad + 2PD_{vv}^2 F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w \\ &\quad + PD_v F(\varphi + w, \delta) \cdot D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w. \end{aligned}$$

Que l'on peut encore écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) &= PD_{vvv}^3 F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \\ &\quad + PD_{vv}^2 F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w \\ &\quad + 2PD_{vv}^2 F(\varphi + w, \delta) \cdot (I_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} + D_{\varphi} w) \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w + PD_v F(\varphi + w, \delta) \cdot D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w. \end{aligned}$$

Pour $(\varphi, \delta) = (0, \delta_*)$ on trouve, grâce à (3.42) et au Corollaire 3.3.1, que

$$D_{\varphi\varphi\varphi}^3 \tilde{\Phi}(0, \delta_*) = PD_{vvv}^3 F(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0] + 3PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[\varphi_0, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)[\varphi_0, \varphi_0]]. \quad (3.84)$$

D'où, au regard de (3.83) on obtient,

$$D_{yy}^2 \Phi(0, \delta_*) = \frac{1}{3} [PD_{vvv}^3 F(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0] + 3PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[\varphi_0, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)[\varphi_0, \varphi_0]].$$

Alors, de (3.82) il résulte que

$$D_{\delta} \Phi(0, \delta_*) \cdot \ddot{\delta}(0) = -\frac{1}{3} [PD_{vvv}^3 F(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0, \varphi_0] + 3PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[\varphi_0, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)[\varphi_0, \varphi_0]]. \quad (3.85)$$

Ou encore, par utilisation de la forme explicite de F (voir (3.8))

$$\begin{aligned} D_{\delta} \Phi(0, \delta_*) \cdot \ddot{\delta}(0) &= -\frac{1}{3} P(f'''(M)(\varphi_0^3 - \int_0^1 \varphi_0^3 dx) \\ &\quad - P(f''(M)(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)[\varphi_0, \varphi_0] - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)[\varphi_0, \varphi_0] dx)). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Par ailleurs, en utilisant la Proposition 3.3.1 et l'hypothèse (3.30), on trouve, par calcul directe que

$$P(\varphi_0^3 - \int_0^1 \varphi_0^3 dx) = \left(\frac{3\alpha^3}{4} + \frac{3\alpha\beta^2}{2}\right)\varphi_* + \left(\frac{3\beta^3}{4} + \frac{3\beta\alpha^2}{2}\right)\varphi_{**} := a\varphi_* + b\varphi_{**} \quad (3.87)$$

et

$$\begin{aligned} &P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)\varphi_0 \cdot \varphi_0 - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0)\varphi_0 \cdot \varphi_0 dx) = \\ &\left(-\frac{f''(M_*)\alpha^3}{4\mu_{2k_*}} - \frac{f''(M_*)\alpha\beta^2}{2\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{f''(M_*)\alpha\beta^2}{2\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \varphi_* + \left(-\frac{f''(M)\beta^3}{4\mu_{2k_{**}}} - \frac{f''(M_*)\beta\alpha^2}{2\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{f''(M_*)\beta\alpha^2}{2\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \varphi_{**} \end{aligned}$$

ou encore

$$P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0) \varphi_0 \cdot \varphi_0 - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_0) \varphi_0 \cdot \varphi_0 dx) := c\varphi_* + d\varphi_{**}. \quad (3.88)$$

Comme $A_{\alpha, \beta}$ est la représentation matricielle de $D_\delta \Phi(0, \delta_*)$ (voir Lemme 3.3.1) alors de (3.86) il découle le système d'inconnues $(\ddot{\epsilon}(0), \ddot{M}(0))$, suivant :

$$\begin{cases} \frac{2\alpha(\epsilon_* \lambda_* - f'(M_*))}{\epsilon_*} \ddot{\epsilon}(0) + \alpha f''(M_*) \ddot{M}(0) = -1/3 f'''(M_*) a - f''(M_*) c \\ \frac{2\beta(\epsilon_* \lambda_{**} - f'(M_*))}{\epsilon_*} \ddot{\epsilon}(0) + \beta f''(M_*) \ddot{M}(0) = -1/3 f'''(M_*) b - f''(M_*) d. \end{cases} \quad (3.89)$$

Puisque, selon des hypothèses (3.12)-(3.14) et la définition (3.1) de f , on a

$$f'''(M_*) = 6, \quad \epsilon_* \lambda_* = 1 + \sqrt{p} \quad \text{et} \quad \epsilon_* \lambda_{**} = 1 - \sqrt{p}. \quad (3.90)$$

Alors, si on multiplie la première équation du système (3.89) par β et la seconde équation par $-\alpha$, on obtient

$$\frac{2\alpha\beta(\epsilon_* \lambda_* - \epsilon_* \lambda_{**})}{\epsilon_*} \ddot{\epsilon}(0) = 1/3 f'''(M_*) (\alpha b - \beta a) + f''(M_*) (\alpha d - \beta c).$$

Et, de l'égalité (3.90), on tire,

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}(0) &= \frac{\epsilon_*}{4\alpha\beta\sqrt{p}} \left(2(\alpha b - \beta a) + f''(M_*) (\alpha d - \beta c) \right), \\ &= \frac{\epsilon_*}{4\sqrt{p}} \left[-\frac{2a}{\alpha} - \frac{f''(M_*)c}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{f''(M_*)d}{\beta} \right]. \end{aligned}$$

Le remplacement de $\ddot{\epsilon}(0)$ dans la seconde équation du système (3.89), donne

$$\begin{aligned} \ddot{M}(0) &= \frac{1}{\beta f''(M_*)} \left[-\frac{2\beta(\epsilon_* \lambda_{**} - f'(M_*))}{\epsilon_*} \ddot{\epsilon}(0) - \frac{1}{3} f'''(M_*) b - f''(M_*) d \right] \\ &= \frac{1}{\beta f''(M_*)} \left[-\frac{2\beta(p - \sqrt{p})}{\epsilon_*} \ddot{\epsilon}(0) - 2b - f''(M_*) d \right] \\ &= \frac{1}{\beta f''(M_*)} \left[\frac{2\beta(\sqrt{p} - p)}{\epsilon_*} \left[\frac{\epsilon_*}{4\alpha\beta\sqrt{p}} \left(2(\alpha b - \beta a) + f''(M_*) (\alpha d - \beta c) \right) \right] - 2b - f''(M_*) d \right] \\ &= \frac{1}{\beta f''(M_*)} \left[(1 - \sqrt{p}) \left[b - \frac{\beta}{\alpha} a + \frac{f''(M_*)d}{2} - \frac{\beta f''(M_*)c}{2\alpha} \right] - 2b - f''(M_*) d \right] \\ &= \frac{1}{f''(M_*)} \left[\frac{a(\sqrt{p} - 1)}{\alpha} + \frac{f''(M_*)(\sqrt{p} - 1)c}{2\alpha} - \frac{(\sqrt{p} + 1)b}{\beta} - \frac{f''(M_*)(\sqrt{p} + 1)d}{2\beta} \right]. \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la Proposition 3.3.2. \square

Pour avoir les résultats (3.67) et (3.68), nous considérons le paramètre p sous la forme suivante

$$\sqrt{p} = \frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} \quad \text{voir} \quad (3.15),$$

Bien entendu, on suppose que θ satisfait l'hypothèse (3.30). En remplaçant a, b, c et d par (3.73)-(3.75), et en tenant compte de (3.38), il vient que

$$\begin{aligned} \ddot{\epsilon}(0) &= \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} \left[2 + \frac{f''(M_*)^2}{3} \left(\frac{1}{2\mu_{2k_*}} - \frac{2}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{2}{\mu_{k_*-k_{**}}} + \frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} \right) \right] \alpha^2 \\ &\quad + \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} \left[-1 + \frac{f''(M_*)^2}{3} \left(-\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$:= \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} [A\alpha^2 + B].$$

Avec

$$A = 2 + \frac{f''(M_*)^2}{3} \left(\frac{1}{2\mu_{2k_*}} - \frac{2}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{2}{\mu_{k_*-k_{**}}} + \frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} \right),$$

et

$$B = -1 + \frac{f''(M_*)^2}{3} \left(-\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right).$$

Cependant pour $p = \frac{(\theta^2 - 1)^2}{(\theta^2 + 1)^2}$, on a d'après (3.76)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{2k_*} = (4\theta^2(1 - \sqrt{p}) - 1)^2 - p = 12\theta^2 \frac{4\theta^2 - 1}{(\theta^2 + 1)^2} \\ \mu_{2k_{**}} = (4(1 - \sqrt{p}) - 1)^2 - p = -12 \frac{\theta^2 - 4}{(\theta^2 + 1)^2} \\ \mu_{k_*+k_{**}} = ((\theta + 1)^2(1 - \sqrt{p}) - 1)^2 - p = \frac{4\theta(2\theta + 1)(\theta + 2)}{(\theta^2 + 1)^2} \\ \mu_{k_*-k_{**}} = ((\theta - 1)^2(1 - \sqrt{p}) - 1)^2 - p = -\frac{4\theta(2\theta - 1)(\theta - 2)}{(\theta^2 + 1)^2}. \end{array} \right.$$

D'où

$$\begin{aligned} A &= 2 + \frac{f''(M_*)^2}{3} \left(\frac{1}{2\mu_{2k_*}} - \frac{2}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{2}{\mu_{k_*-k_{**}}} + \frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} \right) \\ &= 2 + \frac{f''(M_*)^2(\theta^2 + 1)^2}{6} \left[\frac{1}{12\theta^2(4\theta^2 - 1)} - \frac{1}{12(\theta^2 - 4)} - \frac{1}{\theta(2\theta + 1)(\theta + 2)} + \frac{1}{\theta(2\theta - 1)(\theta - 2)} \right] \\ &= 2 + \frac{f''(M_*)^2(\theta^2 + 1)^2}{6} \left[\frac{-4\theta^4 + 122\theta^2 - 4}{12\theta^2(\theta^2 - 4)(4\theta^2 - 1)} \right] \\ &= 2 + M_*^2(\theta^2 + 1)^2 \left[\frac{-2\theta^4 + 61\theta^2 - 2}{\theta^2(\theta^2 - 4)(4\theta^2 - 1)} \right], \quad \text{car } f''(M_*) = 6M_*. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B &= -1 + \frac{f''(M_*)^2}{3} \left(-\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ &= -1 + \frac{f''(M_*)^2(\theta^2 + 1)^2}{12} \left[\frac{1}{6(\theta^2 - 4)} + \frac{1}{\theta(2\theta + 1)(\theta + 2)} - \frac{1}{\theta(2\theta - 1)(\theta - 2)} \right] \\ &= -1 + \frac{f''(M_*)^2(\theta^2 + 1)^2}{12} \left[\frac{4\theta^2 - 61}{6(\theta^2 - 4)(4\theta^2 - 1)} \right] \\ &= -1 + \frac{M_*^2(\theta^2 + 1)^2}{2} \left[\frac{4\theta^2 - 61}{(\theta^2 - 4)(4\theta^2 - 1)} \right] \quad \text{car } f''(M_*) = 6M_*. \end{aligned}$$

Par analogie, le calcul de $\ddot{M}(0)$ est donné comme suit

$$\begin{aligned} \ddot{M}(0) &= \frac{3}{4f''(M_*)} \left[-2\sqrt{p} - \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}-1) \left(\frac{1}{2\mu_{2k_*}} - \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \right] \alpha^2 \\ &\quad + \frac{3}{4f''(M_*)} \left[\frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}+1) \left(-\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \right] \alpha^2 \\ &\quad + \frac{3}{4f''(M_*)} \left[\sqrt{p}-3 - \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}-1) \left(\frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{3}{4f''(M_*)} \left[\frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}+1) \frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} \right]. \\ &:= \frac{3}{4f''(M_*)} [C\alpha^2 + D]. \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned} C &= -2\sqrt{p} - \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}-1) \left(\frac{1}{2\mu_{2k_*}} - \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ &\quad + \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}+1) \left(-\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{p}-3 - \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}-1) \left(\frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ &\quad + \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}+1) \frac{1}{2\mu_{2k_{**}}}. \end{aligned}$$

Comme $p = \frac{(\theta^2 - 1)^2}{(\theta^2 + 1)^2}$ alors on obtient

$$\begin{aligned} C &= -2\sqrt{p} - \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}-1) \left(\frac{1}{2\mu_{2k_*}} - \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ &\quad + \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p}+1) \left(-\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ &= -2\frac{\theta^2-1}{\theta^2+1} + f''(M_*)^2 \frac{\theta^2+1}{6} \left(\frac{1}{6\theta^2(4\theta^2-4)} - \frac{1}{\theta(2\theta+1)(\theta+2)} + \frac{1}{\theta(2\theta-1)(\theta-2)} \right) \\ &\quad + f''(M_*)^2 \frac{\theta^2(\theta^2+1)}{6} \left(\frac{1}{6(\theta^2-4)} + \frac{1}{\theta(2\theta+1)(\theta+2)} - \frac{1}{\theta(2\theta-1)(\theta-2)} \right) \\ &= -2\frac{\theta^2-1}{\theta^2+1} + f''(M_*)^2 \frac{\theta^2+1}{6} \left(\frac{61\theta^2-4}{6\theta^2(4\theta^2-1)(\theta^2-4)} \right) \\ &\quad + f''(M_*)^2 \frac{\theta^2(\theta^2+1)}{6} \left(\frac{4\theta^3-61\theta}{6\theta(\theta^2-4)(4\theta^2-1)} \right) \\ &= -2\frac{\theta^2-1}{\theta^2+1} + f''(M_*)^2 \left(\frac{\theta^2+1}{6} \right) \left(\frac{4\theta^6-61\theta^4+61\theta^2-4}{6\theta^2(4\theta^2-1)(\theta^2-4)} \right) \end{aligned}$$

$$= -2\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2 + 1} + M_*^2(\theta^2 + 1)\frac{(\theta^2 - 1)(4\theta^4 - 57\theta^2 + 4)}{\theta^2(4\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)},$$

et

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{p} - 3 - \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p} - 1) \left(\frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} + \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ &\quad + \frac{f''(M_*)^2}{3}(\sqrt{p} + 1)\frac{1}{2\mu_{2k_{**}}} \\ &= -2\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2 + 1} + f''(M_*)^2\frac{(\theta^2 + 1)}{6} \left(\frac{-10}{(4\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)} \right) \\ &\quad - f''(M_*)^2\frac{(\theta^2 + 1)}{6}\frac{\theta^2}{6(\theta^2 - 4)} \\ &= -2\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2 + 1} + f''(M_*)^2\frac{(\theta^2 + 1)}{6} \left(\frac{-4\theta^4 + \theta^2 - 60}{6(4\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)} \right) \\ &= -2\frac{\theta^2 + 2}{\theta^2 + 1} + M_*^2(\theta^2 + 1) \left(\frac{-4\theta^4 + \theta^2 - 60}{(4\theta^2 - 1)(\theta^2 - 4)} \right). \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat donné dans le Théorème 3.3.1, il suffit de remplacer A et B dans $\ddot{\epsilon}(0)$ et C et D dans $\ddot{M}(0)$.

Pour simplifier les écritures dans la suite, on pose

$$x = \theta^2. \quad (3.91)$$

Ainsi, on regardera désormais $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$ sous les formes suivantes

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} (A\alpha^2 + B), \quad (3.92)$$

et

$$\ddot{M}(0) = \frac{1}{8M_*} (C\alpha^2 + D). \quad (3.93)$$

Avec

$$\begin{cases} A := A(x, M_*^2) = 2 + M_*^2 \frac{(x+1)^2(-2x^2 + 61x - 2)}{x(4x-1)(x-4)} \\ B := B(x, M_*^2) = -1 + M_*^2 \frac{(x+1)^2(4x-61)}{2(4x-1)(x-4)} \end{cases} \quad (3.94)$$

et

$$\begin{cases} C := C(x, M_*^2) = -2\frac{x-1}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(x-1)(4x^2 - 57x + 4)}{x(4x-1)(x-4)} \\ D := D(x, M_*^2) = -2\frac{x+2}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(-4x^2 + x - 60)}{(4x-1)(x-4)}. \end{cases} \quad (3.95)$$

L'objectif maintenant du travail qui va suivre est d'étudier les variations des branches de solutions bifurquantes. En effet, on sait que, cette étude passe par la détermination des signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$.

Remarque 3.3.1

De (3.92) et (3.93), nous pouvons voir que $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$ sont des fonctions paires de la variable $\alpha \in (-1, 1)$. De ce fait, il s'ensuit que

$$\begin{cases} \ddot{\epsilon}(0) \in \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} [\min(B, A + B), \max(B, A + B)] \\ \ddot{M}(0) \in \frac{1}{8M_*} [\min(D, C + D), \max(D, C + D)]. \end{cases} \quad (3.96)$$

Cette remarque, bien qu'importante, ne permet pas de connaître les signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$, car les valeurs limites dépendent des paramètres θ (ou p) et M_* du problème (3.5).

3.4 Etude des signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$

Le défi que nous souhaitons relever, ici est d'étudier les signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$ respectivement données par (3.92) et (3.93). A travers cette étude nous pourrions comme dans le Chapitre 2 tirer des informations précises sur des variations de branches de bifurcation données par le Théorème 3.3.1. Mais, la dépendance en θ (ou p) et M_* , des valeurs A , B , C et D rend cette étude complexe. Pour y remédier, nous étudierons comme dans la Remarque 3.3.1 les valeurs aux limites de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$.

3.4.1 Etude du signe de $\ddot{\epsilon}(0)$

Le but, dans cette partie, est de donner un résultat relatif au signe de $\ddot{\epsilon}(0)$. Pour ce faire, nous posons

$$A + B = 1 + M_*^2 \frac{(x + 1)^2 (61x - 4)}{2x(4x - 1)(x - 4)}, \quad (3.97)$$

et

$$B = -1 + M_*^2 \frac{(x + 1)^2 (4x - 61)}{2(4x - 1)(x - 4)}. \quad (3.98)$$

Soient, maintenant B_0 et $(A + B)_0$ les fonctions définies par :

$$B_0 :]1, +\infty[\setminus \{61/4\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto B_0(x) \quad \text{et} \quad (A + B)_0 :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (A + B)_0(x)$$

où

$$B_0(x) = \frac{2(x - 4)(4x - 1)}{(x + 1)^2(4x - 61)}, \quad (3.99)$$

et

$$(A + B)_0(x) = \frac{2x(4x - 1)(-x + 4)}{(x + 1)^2(61x - 4)}. \quad (3.100)$$

Il découle de ce qui précède, les lemmes suivants :

Lemme 3.4.1

Soit B_0 la fonction donnée par (3.99). Il vient que,

- si $x \in]1, 4[\cup]61/4, \infty[$ alors
 - . si $M_*^2 > B_0(x)$ alors $B > 0$,
 - . si $M_*^2 < B_0(x)$ alors $B < 0$.
- Si $x \in]4, 61/4[$ alors $B_0(x) \leq 0$ et $B < 0$.

Preuve. Nous rappelons que B est donnée par

$$B = -1 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (4x-61)}{2(4x-1)(x-4)}.$$

En utilisant (3.99), nous obtenons

$$B = 0 \iff M_*^2 = B_0(x) = \frac{2(x-4)(4x-1)}{(x+1)^2(4x-61)}. \quad (3.101)$$

Or pour $x > 1$, on a

$$\text{sign} B_0(x) = \text{sign} \left(\frac{x-4}{4x-61} \right), \quad \forall x \in]1, +\infty[\setminus \{61/4\}. \quad (3.102)$$

D'où, il vient que

- si $x \in]1, 4[\cup]61/4, \infty[$ alors $B_0(x) > 0$ et par (3.101), on a

$$M_*^2 < B_0(x) \iff B < 0,$$

- si $x \in]4, 61/4[$ alors $B_0(x) < 0$. De même, par (3.101), on trouve que

$$M_*^2 > B_0(x) \implies B > 0.$$

Cela achève la preuve du lemme. □

Lemme 3.4.2

Soit $(A+B)_0$ la fonction donnée par (3.100). Il vient que,

- si $x \in]4, +\infty[$ alors $(A+B)_0(x) < 0$ et $A+B > 0$
- si $x \in]1, 4[$ alors $(A+B)_0(x) > 0$. De plus
 - . si $M_*^2 > (A+B)_0(x)$ alors $A+B < 0$,
 - . si $M_*^2 < (A+B)_0(x)$ alors $A+B > 0$.

Preuve. Nous rappelons que l'expression de $A+B$ est donnée par

$$A+B = 1 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (61x-4)}{2x(4x-1)(x-4)}.$$

En utilisant (3.100), on obtient

$$A+B = 0 \iff M_*^2 = (A+B)_0(x) = \frac{2x(4x-1)(-x+4)}{(x+1)^2(61x-4)}. \quad (3.103)$$

Mais pour tout $x > 1$

$$\text{sign}(A+B)_0(x) = \text{sign}(-x+4). \quad (3.104)$$

D'où

- . si $x < 4$ alors $(A+B)_0 > 0$ et en utilisant (3.103), il vient que

$$M_*^2 < (A+B)_0(x) \iff A+B > 0,$$

. si $x > 4$ alors $(A + B)_0 < 0$ et

$$M_*^2 > (A + B)_0(x) \Rightarrow A + B > 0.$$

D'où le résultat. □

Lemme 3.4.3

Pour tout $x \in]1, 4[$ on a :

$$B_0(x) > (A + B)_0(x). \quad (3.105)$$

Preuve. D'après (3.99) et (3.100), on a :

$$(B_0 - (A + B)_0)(x) = \frac{2(4x - 1)(4x^2 - 4)(x - 4)}{(x + 1)^2(4x - 61)(61x - 4)}. \quad (3.106)$$

Comme $61x - 4$ et $4x^2 - 4$ sont strictement positives pour $x > 1$, il vient que,

$$\text{sign}(B_0 - (A + B)_0)(x) = \text{sign} \left[\frac{x - 4}{4x - 61} \right].$$

Mais

$$\frac{x - 4}{4x - 61} > 0, \forall x \in]1, 4[.$$

Alors on en déduit que

$$(B_0 - (A + B)_0)(x) > 0, \quad \forall x \in]1, 4[.$$

□

Pour la suite on pose,

$$\alpha_0 = \sqrt{\left| \frac{B}{A} \right|}, \quad (3.107)$$

et on a le théorème suivant.

Théorème 3.4.1

Soient k_* , k_{**} , p , (ϵ_*, M_*) satisfaisant (3.12) -(3.14) , $x \notin \{4, 9\}$, $\alpha \in]0, 1[$, et B_0 et $(A + B)_0$ données respectivement par (3.99) et (3.100). Alors

1. si $x \in]1, 4[$ alors B_0 et $(A + B)_0$ sont positives. De plus

(a) si $M_*^2 < (A + B)_0$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) < 0$,

- $\alpha > \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) > 0$.

(b) si $(A + B)_0(x) \leq M_*^2 \leq B_0(x)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

(c) si $M_*^2 > B_0(x)$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) > 0$,

- $\alpha > \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) < 0$.

2. Si $x \in]4, 61/4[$, alors B_0 et $(A + B)_0$ sont négatives, $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) < 0$,

- $\alpha > \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) > 0$.

3. Si $x \in]61/4, +\infty[$, alors B_0 est positive et $(A + B)_0$ est négative. De plus

(a) si $M_*^2 < B_0(x)$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) < 0$,

- $\alpha > \alpha_0 \implies \ddot{\epsilon}(0) > 0$.

(b) si $M_*^2 \geq B_0(x)$ alors $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Preuve. La preuve du Théorème 3.4.1 est donnée par les Lemmes 3.4.1 , 3.4.2 et 3.4.3. □

Avant de fermer cette partie, nous donnons certaines valeurs particulières des fonctions B et $A + B$

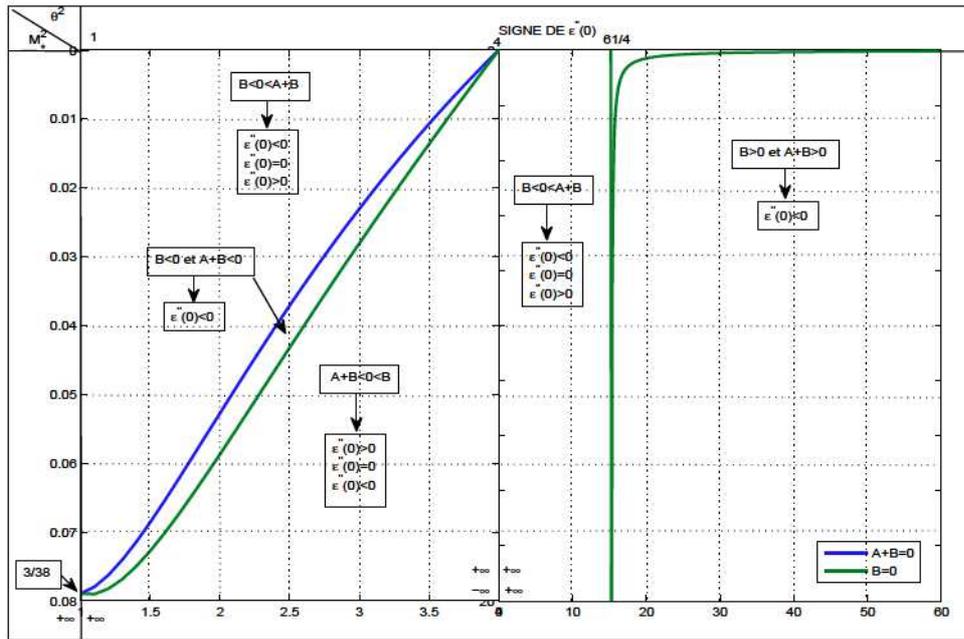
Valeurs particulière de B et B_0

- $B \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 4^+$
- $B \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 4^-$
- $\lim_{x \rightarrow 1} B = -1 + \frac{38}{3}M^2$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} B = +\infty$
- $x \rightarrow 1 \implies B_0(x) \rightarrow \frac{3}{38}$ et $B_0(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Valeurs particulières de $A + B$

- $A + B \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 4^-$,
- $A + B \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow 4^+$,
- quand $x \rightarrow +\infty$ alors $A + B \rightarrow 1 + \frac{61M_*^2}{8}$,
- quand $x = 1$ alors $A + B = 1 - \frac{38M_*^2}{3}$.

Ce faisant, nous pouvons regrouper tous les résultats ci-dessus, dans le tableau suivant.


 FIGURE 3.3 – Signe de $\ddot{\epsilon}(0)$

3.4.2 Etude du signe de $\ddot{M}(0)$

Comme dans le cas de $\ddot{\epsilon}(0)$, le but ici, est d'étudier le signe de $\ddot{M}(0)$. Pour cela, nous posons,

$$D = -2\frac{x+2}{x+1} + M^2 \frac{(x+1)(-4x^2+x-60)}{(4x-1)(x-4)}, \quad (3.108)$$

et

$$C + D = -2\frac{2x+1}{x+1} + M^2 \frac{(x+1)(-60x^2+x-4)}{x(4x-1)(x-4)}. \quad (3.109)$$

Soient D_0 et $(C + D)_0$ les fonctions définies par :

$$D_0 :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto D_0(x) \quad \text{et} \quad (C + D)_0 :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (C + D)_0(x),$$

avec

$$D_0(x) = 2\frac{(x+2)(x-4)(4x-1)}{(x+1)^2(-4x^2+x-60)}, \quad (3.110)$$

et

$$(C + D)_0(x) = 2\frac{x(2x+1)(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2(-60x^2+x-4)}. \quad (3.111)$$

Il vient la Proposition immédiate suivante.

Proposition 3.4.1

Pour tout $x \in]1, 4[$, on a

$$D_0(x) > (C + D)_0(x). \quad (3.112)$$

Preuve. Par les définitions de (3.110) et (3.111) on a :

$$(D_0 - (C + D)_0)(x) = 2\frac{(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{8x^4 - 58x^3 + 58x - 8}{(-60x^2 + x - 4)(-4x^2 + x - 60)} \right]. \quad (3.113)$$

Or, trivialement, pour $x \in]1, 4[$,

$$(-60x^2 + x - 4)(-4x^2 + x - 60) > 0.$$

D'où

$$\text{sign}(D_0 - (C + D)_0)(x) = \text{sign}((x - 4)(8x^4 - 58x^3 + 58x - 8)). \quad (3.114)$$

Il suffit alors de connaître le signe de h , donnée ci-dessous, pour conclure.

$$h(x) := 8x^4 - 58x^3 + 58x - 8 = 2(x^2 - 1)(4x^2 - 29x + 4), \quad \forall x \in]1, 4[.$$

Or $x \mapsto 4x^2 - 29x + 4$ est négative sur $]1, 4[$, alors on conclut que h aussi l'est et on obtient le résultat par (3.114). \square

Avant d'énoncer le résultat relatif au signe de $\ddot{M}(0)$, nous avons besoin de deux lemmes. Le premier donnant le signe de D_0 , et le second, le signe de $(C + D)_0$.

Lemme 3.4.4

Soit D_0 la fonction définie par (3.110),

- si $x \in]1, 4[$ alors $D_0(x) > 0$. De plus
 - . si $M_*^2 > D_0(x)$ alors $D > 0$
 - . si $M_*^2 < D_0(x)$ alors $D < 0$.
- Si $x \in]4, +\infty[$ alors $D_0(x) < 0$ et $D < 0$.

Preuve. On rappelle que

$$D = -2\frac{x+2}{x+1} + M^2\frac{(x+1)(-4x^2+x-60)}{(4x-1)(x-4)}.$$

En utilisant D_0 donnée par (3.110), on a,

$$D = 0 \iff M_*^2 = D_0(x) = 2\frac{(x+2)(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2(-4x^2+x-60)}. \quad (3.115)$$

Cependant, l'expression de D_0 donne

$$\text{sign}D_0(x) = \text{sign}(-x+4) \quad \forall x \in]1, +\infty[. \quad (3.116)$$

Donc

- si $x \in]1, 4[$ alors $D_0(x) > 0$, et d'après (3.115)

$$M_*^2 < D_0(x) \iff D < 0.$$

- si $x \in]4, +\infty[$ alors $D_0(x) < 0$ et

$$M_*^2 > D_0(x) \implies D < 0.$$

\square

Lemme 3.4.5

Soit $(C + D)_0$ la fonction définie par (3.111),

- si $x \in]1, 4[$ alors $(C + D)_0(x) > 0$. De plus

. si $M_*^2 > (C + D)_0(x)$ alors $C + D > 0$,

. si $M_*^2 < (C + D)_0(x)$ alors $C + D < 0$.

- Si $x \in]4, +\infty[$ alors $(C + D)_0(x) < 0$ et donc $C + D < 0$.

Preuve. Nous rappelons que $C + D$ est donnée par

$$C + D = -2\frac{2x + 1}{x + 1} + M_*^2 \frac{(x + 1)(-60x^2 + x - 4)}{x(4x - 1)(x - 4)}. \quad (3.117)$$

En utilisant la fonction $(C + D)_0$, il vient,

$$C + D = 0 \iff M_*^2 = (C + D)_0(x) = 2\frac{x(2x + 1)(4x - 1)(x - 4)}{(x + 1)^2(-60x^2 + x - 4)}. \quad (3.118)$$

Cependant, pour $x \in]1, +\infty[$ on a,

$$\text{sign}(C + D)_0(x) = \text{sign}(-x + 4). \quad (3.119)$$

car, pour $x > 1$, la fonction $x \mapsto -60x^2 + x - 4$ est strictement négative. Ainsi

- . si $x \in]1, 4[$ alors $(C + D)_0(x) > 0$, et d'après (3.118), on a

$$M_*^2 < (C + D)_0(x) \iff C + D < 0.$$

- . Si $x \in]4, +\infty[$ alors $(C + D)_0(x) < 0$, et on a

$$M_*^2 > (C + D)_0(x) \implies C + D < 0.$$

D'où le résultat. □

En posant

$$\alpha_1 = \sqrt{\left| \frac{D}{C} \right|}, \quad (3.120)$$

le signe de $\ddot{M}(0)$ est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.4.2

Soient k_* , k_{**} , p , (ϵ_*, M_*) satisfaisant (3.12) -(3.14), $x \notin \{4, 9\}$, $\alpha \in]0, 1[$, D_0 et $(C + D)_0$ données respectivement par (3.110) et (3.111). Alors

1. Si $x \in]1, 4[$ alors D_0 et $(C + D)_0$ sont positives. De plus

(a) si $M_*^2 \leq (C + D)_0(x)$ alors $\ddot{M}(0) < 0$.

(b) si $(C + D)_0(x) < M_*^2 < D_0(x)$ alors $\alpha_1 \in (0, 1)$ et

- si $\alpha < \alpha_1$ alors $\ddot{M}(0) < 0$,
- si $\alpha > \alpha_1$ alors $\ddot{M}(0) > 0$.

(c) si $M_*^2 \geq D_0(x)$ alors $\ddot{M}(0) > 0$.

2. Si $x \in]4, +\infty[$, alors $\ddot{M}(0) < 0$.

Preuve. La preuve du Théorème 3.4.1 est donnée par les Lemmes 3.4.4 et 3.4.5, et la Proposition 3.4.1. \square

Nous donnons, dans la suite, quelques valeurs particulières de D et $C + D$.

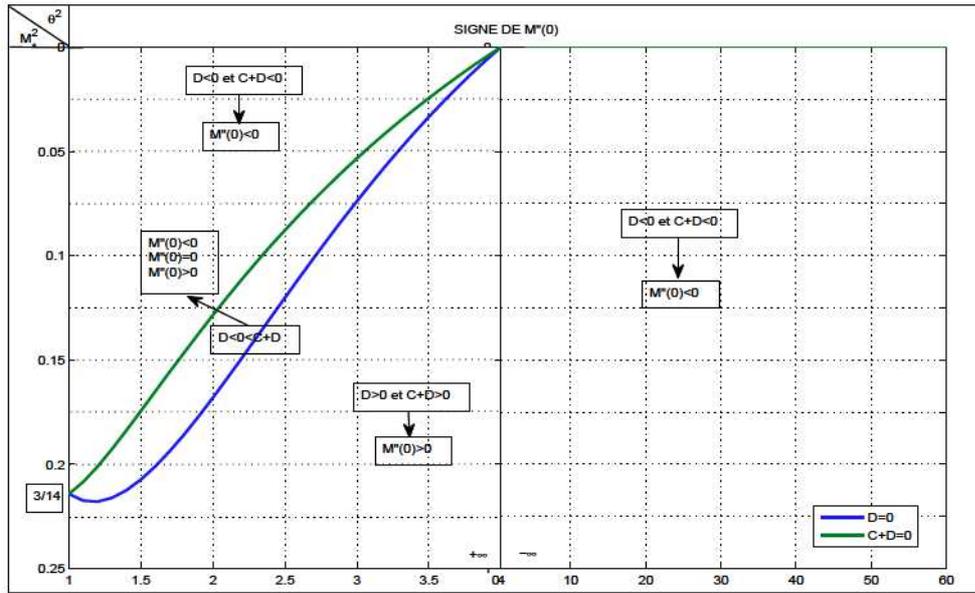
Valeurs particulières de D

- Si $x \rightarrow 1$ alors $D = -9 + 42M_*^2$,
 - . si $M_*^2 = 9/42$ alors $D = 0$,
 - . si $M_*^2 \rightarrow +\infty$ alors $D \rightarrow +\infty$.
- Si $x \rightarrow +\infty$ alors $D \rightarrow -\infty$.
- Si $x \rightarrow 4^-$ alors $D \rightarrow +\infty$.
- Si $x \rightarrow 4^+$ alors $D \rightarrow -\infty$.

Valeurs particulières de $C + D$

- Si $x \rightarrow 1$ alors $(C + D) = -9 + 58M_*^2$ et
 - si $M_*^2 = 9/58$ alors $C + D = 0$,
 - si $M_*^2 \rightarrow +\infty$ alors $C + D \rightarrow +\infty$.
- Si $x \rightarrow +\infty$ alors $C + D \rightarrow -12 - 75M_*^2$ et
 - si $M_*^2 \rightarrow +\infty$ alors $C + D \rightarrow -\infty$
- si $x \rightarrow 4^-$ alors $C + D \rightarrow +\infty$,
- si $x \rightarrow 4^+$ alors $C + D \rightarrow -\infty$.

De ce fait, nous pouvons regrouper, comme nous l'avons fait dans la section précédente, les résultats du Théorème 3.4.2, dans un tableau ci-dessous.


 FIGURE 3.4 – Signe de $\ddot{M}(0)$

En posant

$$\alpha_{**} = \min(\alpha_0, \alpha_1) \text{ et } \alpha_* = \max(\alpha_0, \alpha_1). \quad (3.121)$$

et le rapport,

$$\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}. \quad (3.122)$$

Une conséquence immédiate, des deux théorèmes précédents est décrit comme suit

Corollaire 3.4.1

Soient k_* , k_{**} , p , (ϵ_*, M_*) satisfaisant (3.12) -(3.14), $x \notin \{4, 9\}$, $\alpha \in]0, 1[$, B_0 , $(A + B)_0$, D_0 et $(C + D)_0$ données respectivement par (3.99), (3.100), (3.110) et (3.111). Alors,

1. si $x \in]1, 4[$ alors $0 \leq (A + B)_0 \leq B_0 \leq (C + D)_0 \leq D_0$. De plus

(a) si $M_*^2 < (A + B)_0(x)$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$

- $\alpha > \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

(b) Si $(A + B)_0(x) < M_*^2 < B_0(x)$ alors $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

(c) Si $B_0(x) < M_*^2 < (C + D)_0(x)$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$,

- $\alpha > \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

(d) Si $(C + D)_0(x) < M_*^2 < D_0(x)$ alors $\alpha_0, \alpha_1 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_{**} \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$
- $\alpha_{**} < \alpha < \alpha_* \implies \begin{cases} \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0 & \text{et } \ddot{\epsilon}(0) > 0 \text{ si } \alpha_0 = \alpha_*, \\ \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0 & \text{et } \ddot{\epsilon}(0) < 0 \text{ si } \alpha_0 = \alpha_{**} \end{cases}$
- $\alpha > \alpha_* \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

(e) Si $M_*^2 > D_0(x)$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$
- $\alpha > \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

2. Si $x \in]4, 61/4[$, alors $(A+B)_0, B_0, (C+D)_0$ et D_0 sont négatives. Alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ on a

- $\alpha < \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$,
- $\alpha > \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

3. Si $x \in]61/4, +\infty[$, alors B_0 est positive et $(A+B)_0, (C+D)_0$ et D_0 sont négatives. De plus

(a) si $M_*^2 < B_0(x)$ alors $\alpha_0 \in]0, 1[$ et

- $\alpha < \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) < 0$
- $\alpha > \alpha_0 \implies \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$

(b) Si $M_*^2 > B_0(x)$ alors $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

Preuve. La preuve est déduite des Théorème 3.4.1 et 3.4.2. Toutefois nous devons montrer l'assertion suivante

$$(C+D)_0(x) > B_0(x) \quad \forall x \in]1, 4[. \quad (3.123)$$

Pour cela, nous posons

$$h(x) = ((C+D)_0 - B_0)(x).$$

Et en utilisant les définitions (3.99) et (3.110) on obtient

$$h(x) = \frac{2(x-4)(4x-1)}{(x+1)^2} \left[\frac{8x^3 - 58x^2 - 62x + 4}{(-60x^2 + x - 4)(4x - 61)} \right].$$

Cependant, $(-60x^2 + x - 4)(4x - 61)$ est strictement positif et $x - 4$ négative, sur $]1, 4[$ alors on en déduit que

$$\text{sign}(h(x)) = \text{sign}((x-4)(8x^3 - 58x^2 - 62x + 4)) \quad \forall x \in]1, 4[. \quad (3.124)$$

En factorisant $s(x) = 8x^3 - 58x^2 - 62x + 4$, on obtient

$$s(x) = 2(x+1)(4x^2 - 33x + 2).$$

Or $x \mapsto 4x^2 - 33x + 2$ est négative sur $]1, 4[$, donc la fonction s l'est aussi. D'où on conclut que h est négative sur $]1, 4[$ et que par suite, $(C + D)_0(x) > B_0(x) \quad \forall x \in]1, 4[$. \square

Nous résumons les résultats du corollaire précédent dans le tableau ci-dessous.

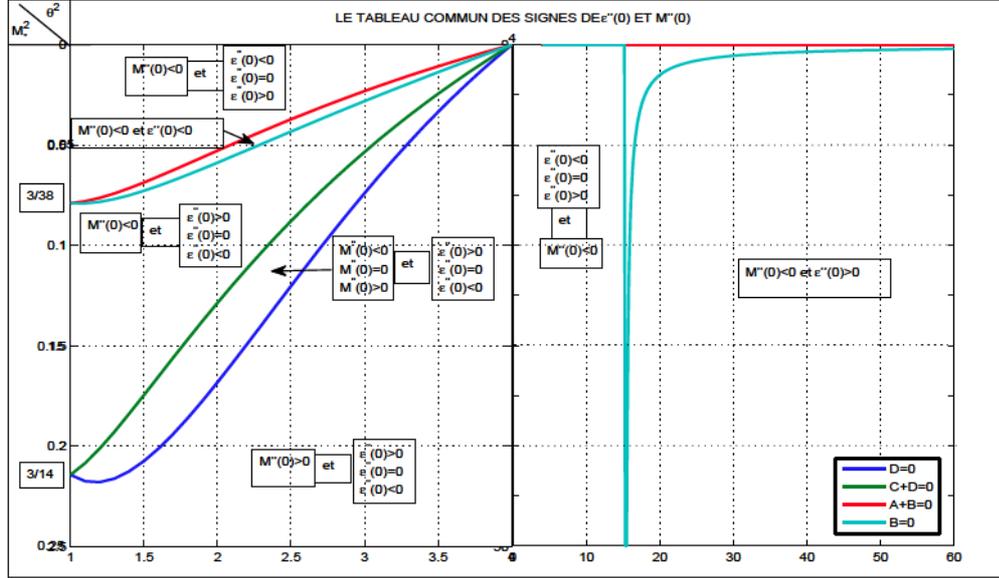


FIGURE 3.5 – Signes de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$

En utilisant les expansions (3.70) et (3.71), on peut voir que, les paramètres solutions (ϵ, M) sont liés par

$$X = X_* + 6M_* \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} (\epsilon - \epsilon_*) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon > \epsilon_* & \text{si } \ddot{\epsilon}(0) > 0 \\ \epsilon < \epsilon_* & \text{si } \ddot{\epsilon}(0) < 0 \end{cases} \quad (3.125)$$

Comme cette demi-droite est tangente à la branche de solutions, alors il est nécessaire d'en étudier les variations dans l'espace des paramètres (ϵ, X) avec $X = 3M^2$. On notera que nous avons choisi de travailler dans cet espace afin de simplifier les représentations graphiques.

3.4.3 Etude des variations du rapport $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}$ en fonction de α

On sait que l'étude des variations des branches de solutions, passe par celles les variations paramètres de bifurcations. Autrement dit, il suffit de connaître les variations des demi-tangentes (3.125) pour conclure. Mais, comme on peut le voir, cette étude, elle même est déduite de l'analyse du rapport $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}$ en fonction de $\alpha \in (0, 1)$.

Posons, pour $\ddot{\epsilon}(0) \neq 0$ (c'est-à-dire $\alpha \neq \alpha_0 = \sqrt{|\frac{B}{A}|}$ voir (3.107)),

$$\tan \Psi_\alpha = 6M_* \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} = \frac{2\sqrt{p}}{\epsilon_*} \left[\frac{C\alpha^2 + D}{A\alpha^2 + B} \right], \quad \forall \alpha \neq \alpha_0, \quad (3.126)$$

où Ψ_α est l'angle formé par la demi-droite d'équation (3.125) et l'axe des abscisses du plan (ϵ, X) . De cette définition, nous pouvons voir que $\tan \Psi_\alpha$ est α dérivable sur $]0, 1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\frac{d(\tan \Psi_\alpha)}{d\alpha} = \frac{2\sqrt{p}}{\epsilon_*} \left[\frac{2\alpha(BC - AD)}{(A\alpha^2 + B)^2} \right], \quad \forall \alpha \neq \alpha_0. \quad (3.127)$$

Ce qui nous amène à la relation suivante

$$\text{sign} \frac{d(\tan \Psi_\alpha)}{d\alpha} = \text{sign}(BC - AD), \quad \forall \alpha \in]0, 1[. \quad (3.128)$$

En retour, nous sommes conduits à l'étude du signe de $BC - AD$. Mais avant, nous rappelons que, pour M_* non nul et x donnée par (3.91), on a

$$\begin{cases} A = 2 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (-2x^2 + 61x - 2)}{x(4x-1)(x-4)} \\ B = -1 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (4x-61)}{2(4x-1)(x-4)}, \end{cases} \quad (3.129)$$

et

$$\begin{cases} C = -2 \frac{x-1}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(x-1)(4x^2 - 57x + 4)}{x(4x-1)(x-4)} \\ D = -2 \frac{x+2}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(-4x^2 + x - 60)}{(4x-1)(x-4)}. \end{cases} \quad (3.130)$$

Il résulte alors que

$$\begin{aligned} BC = 2 \frac{x-1}{x+1} + 2M_*^2(x+1) \left[\frac{-4x^3 + 63x^2 - 61x + 2}{x(4x-1)(x-4)} \right] \\ + M_*^4(x+1)^3 \left[\frac{16x^4 - 488x^3 + 3965x^2 - 3737x + 244}{2x(4x-1)^2(x-4)^2} \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} AD = -4 \frac{x+2}{x+1} + 2M_*^2(x+1) \left[\frac{-2x^3 - 56x^2 - 180x + 4}{x(4x-1)(x-4)} \right] \\ + M_*^4(x+1)^3 \left[\frac{8x^4 - 246x^3 + 189x^2 - 3662x + 120}{x(4x-1)^2(x-4)^2} \right]. \end{aligned}$$

En faisant un réarrangement de termes, on trouve que la différence $BC - AD$ est une fonction quadratique de la variable M_*^2 comme suit,

$$BC - AD = 2 \left[3 + \frac{(x+1)^2 b_1(x)}{x(4x-1)(x-4)} M_*^2 + \frac{(x+1)^4 b_2(x)}{4x^2(4x-1)^2(x-4)^2} M_*^4 \right] \quad (3.131)$$

où les fonctions

$$b_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto b_1(x) \quad \text{et} \quad b_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto b_2(x),$$

sont définies par

$$b_1(x) = -2x^2 + 121x - 2, \quad (3.132)$$

et

$$b_2(x) = x(4x^2 + 3583x + 4). \quad (3.133)$$

Le discriminant, noté d_M , de l'équation

$$BC - AD = 0 \quad (3.134)$$

est donné par

$$d_M = \frac{(x+1)^4}{x^2(x-4)^2(4x-1)^2} [b_1(x)^2 - 3b_2(x)]. \quad (3.135)$$

En utilisant les définitions b_1 et b_2 , il s'en suit que

$$d_M = \frac{(x+1)^4}{x^2(x-4)^2(4x-1)^2} [(-2x^2 - 121x + 2)^2 - 3x(4x^2 + 3583x + 4)]$$

ou encore

$$d_M = \frac{(x+1)^4}{x^2(x-4)^2(4x-1)^2} [4(x^4 - 124x^3 + 975x^2 - 124x + 1)]. \quad (3.136)$$

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x)$, définie par

$$h(x) = 4(x^4 - 124x^3 + 975x^2 - 124x + 1) = b_1(x)^2 - 3b_2(x). \quad (3.137)$$

Comme $BC - AD$ dépend des signes de b_1 , b_2 et h , il est donc utile de donner la proposition suivante.

Proposition 3.4.2

Les fonction b_1 , b_2 et h , respectivement données par (3.132), (3.133) et (3.137), sont positives sur $]1, 4[$.

Preuve. Par (3.133) on voit clairement que b_2 est trivialement positive sur $]1, 4[$. Donc, il reste juste à montrer la positivité de b_1 et h . En effet, par (3.132), on a

$$\begin{aligned} b_1(x) &= -2\left(x - \frac{121 + 15\sqrt{65}}{4}\right)\left(x - \frac{121 - 15\sqrt{65}}{4}\right) \\ &> 0 \quad \forall x \in]1, 4[. \end{aligned}$$

D'où on conclut quant à la positivité de b_1 sur $]1, 4[$. En revanche, pour montrer la positivité de h sur $]1, 4[$, on pose

$$s(x) = x^4 - 124x^3 + 975x^2 - 124x + 1.$$

Comme s est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} , alors on a

$$s^{(1)}(x) = 4x^3 - 372x^2 + 1950x - 124, \quad s^{(2)}(x) = 12x^2 - 744x + 1950 \quad \text{et} \quad s^{(3)}(x) = 24x - 744.$$

Puisque $s^{(3)}(x) < 0 \quad \forall x \in]1, 4[$ et $s^{(2)}(1) = 1218$ et $s^{(2)}(4) = -834$, alors il existe $x_0 \in]1, 4[$ tel que

- $x \in]1, x_0[\implies s^{(2)}(x) > 0 \implies s^{(1)}$ est croissante.
- $x \in]x_0, 4[\implies s^{(2)}(x) < 0 \implies s^{(1)}$ est décroissante.

Or $s^{(1)}(1) = 1458$ et $s^{(1)}(4) = 1980$, d'où on en déduit que $s^{(1)}(x) > 0 \forall x \in]1, 4[$. Et cela, en retour, permet d'affirmer que la fonction s est croissante sur $]1, 4[$. Comme $s(1) = 229$, alors on conclut que s est positive sur $]1, 4[$. Ce qui permet également de conclure sur la positivité de h . Car $h = 4s$. \square

Nous posons, pour tout $x \in]1, 4[$

$$J_1(x) = \frac{2x(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{-b_1(x) + \sqrt{h(x)}}{b_2(x)} \right], \quad (3.138)$$

et

$$J_2(x) = \frac{2x(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{-b_1(x) - \sqrt{h(x)}}{b_2(x)} \right]. \quad (3.139)$$

Le théorème relatif au variation de $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}$ s'énonce alors, comme suit.

Théorème 3.4.3

Soient $\alpha \in]0, 1[$, J_1 et J_2 les fonctions réelles, respectivement données par (3.138) et (3.139). Si $x \in]1, 4[$, alors J_1 et J_2 sont strictement positives. De plus,

- Si $M_*^2 \in]J_1(x), J_2(x)[$, alors $\tan \Psi_\alpha$ décroît avec α ,
- Si $M_*^2 \in]0, J_1(x)[\cup]J_2(x), +\infty[$, alors $\tan \Psi_\alpha$ croît avec α .

Preuve. D'après la proposition 3.4.2, les fonctions b_1 , b_2 et h sont positives sur $]1, 4[$. Ce qui implique, d'après (3.136), que d_M est strictement positif. Et par conséquent, la différence $BC - AD$ peut se mettre sous la forme suivante

$$(BC - AD)(x, M_*) = \frac{(x+1)^4 b_2(x)}{2x^2(4x-1)^2(x-4)^2} (M_*^2 - J_1(x))(M_*^2 - J_2(x)). \quad (3.140)$$

Où J_1 et J_2 sont données par (3.138) et (3.139).

Il reste juste à démontrer que J_1 et J_2 sont positives sur $]1, 4[$. En effet,

$$\begin{aligned} J_1(x) > 0 &\Leftrightarrow -b_1(x) + \sqrt{h(x)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{h(x)} < b_1(x) \quad \text{car } b_1(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow -3b_2(x) < 0 \quad \text{car } h(x) = b_1(x)^2 - 3b_2(x) \end{aligned}$$

cela est toujours vrai car $b_2(x) > 0$ sur $]1, 4[$ (cf. proposition 3.4.2). Et comme, $J_2(x) > J_1(x)$ sur $]1, 4[$ alors on conclut que J_2 est aussi positive sur $]1, 4[$. Cela, achève la preuve du théorème. \square

Certaines valeurs particulières

Pour $\ddot{\epsilon}(0) \neq 0$, nous rappelons que

$$\tan \Psi_\alpha = 6M_* \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} = \frac{2\sqrt{p}}{\epsilon_*} \left[\frac{C\alpha^2 + D}{A\alpha^2 + B} \right], \quad \forall \alpha \neq \alpha_0. \quad (3.141)$$

De la définition ci-dessus et du théorème précédent, nous déduisons les limites suivantes

- $\alpha \rightarrow 0 \implies \tan \Psi_\alpha \rightarrow \frac{2D\sqrt{p}}{\epsilon_* B}$

3.5. COMPARAISON DES ÉNERGIES DE LA SOLUTION BIFURQUANTE PAR RAPPORT À LA SOLUTION CONSTANTE

- $\alpha \rightarrow 1 \implies \tan \Psi_\alpha \rightarrow \frac{2\sqrt{p}}{\epsilon_*} \left[\frac{C+D}{A+B} \right]$.

Si, de plus, on suppose que $\alpha_0 \in (0, 1)$ alors

- $\alpha \rightarrow \alpha_0$ et $\alpha < \alpha_0 \implies \tan \Psi_\alpha \rightarrow -\infty \times \text{sign}(BC - AD)$
- $\alpha \rightarrow \alpha_0$ et $\alpha > \alpha_0 \implies \tan \Psi_\alpha \rightarrow +\infty \times \text{sign}(BC - AD)$.

En résumé, nous avons pu étudier les variations du rapport $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}$ ou plus précisément les différentes orientations de la demi-droite (3.125). Ce résultat, très intéressant nous permet de connaître les différentes directions des branches de solutions. Aussi, d'un point de vue pratique, on peut l'utiliser pour affiner les choix des valeurs des paramètres suivant les directions souhaitées. Enfin, nous faisons remarquer que le théorème précédent peut facilement être généralisable sur $]1, +\infty[$, et a une connexion directe avec la stabilité linéaire que nous regarderons dans le Chapitre 4.

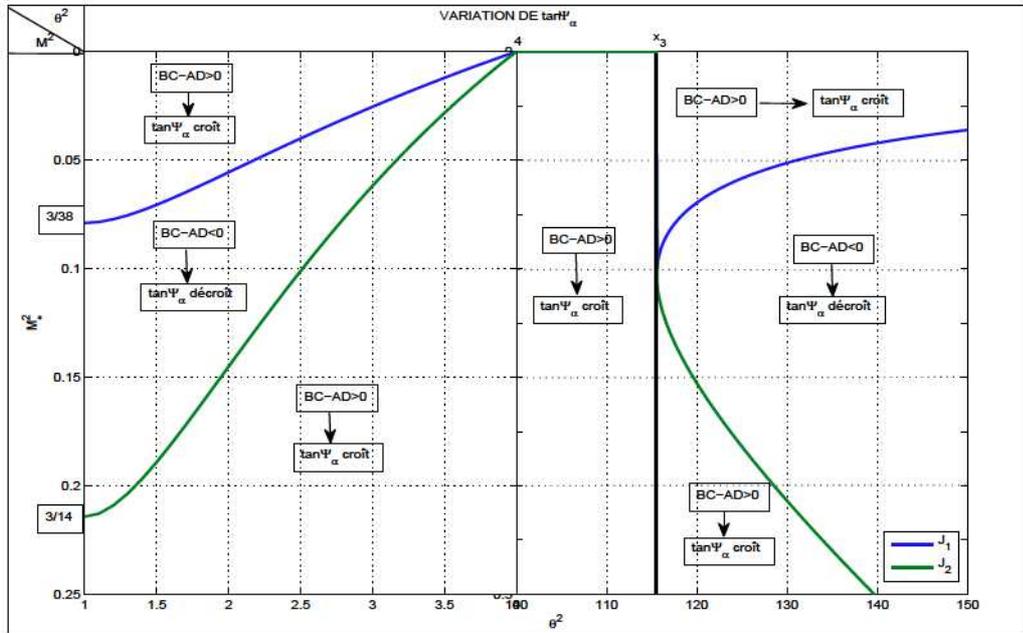


FIGURE 3.6 – variations de $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)}$ pour $x \in]1, +\infty[$

3.5 Comparaison des énergies de la solution bifurquante par rapport à la solution constante

L'étude des variations de $\tan \Psi$, effectuée dans la section précédente, permet de savoir exactement dans quel quadrant du plan $(\epsilon, X = 3M^2)$ quand les paramètres solutions $(\epsilon(y), M(y))$ varient. Ainsi, il est intéressant de comparer l'énergie de la solution bifurquante par rapport à celle de la constante, suivant que nous soyons dans un quadrant ou dans un autre. Pour mener cette étude, nous rappelons que, pour $u = M + v \in M + \dot{V}$, la fonctionnelle de l'énergie libre associée à l'équation (3.3) est donnée par

$$E : L^2(0, 1) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (u, \epsilon) \mapsto \int_0^1 \frac{1}{2}(\epsilon u_{xx} + u)^2 + \frac{r}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 dx. \quad (3.142)$$

Donc, pour être précis, il s'agit d'étudier les variations de l'énergie de la solution bifurquante $E(M + v, \epsilon)$ par rapport à l'énergie de la solution triviale $E(M, \epsilon)$. Or, d'après le théorème 3.3.1, chaque solution u est développable au voisinage du point de bifurcation, comme suit,

$$\begin{cases} u(y) = M(y) + v(y) = M(y) + y\varphi_0 + w(y) = M(y) + y\varphi_0 + \frac{1}{2}\ddot{w}(0, \delta_*)y^2 + O(y^3) \\ u(0) = M_* \end{cases} \quad (3.143)$$

Car on se rappellera que $v(y) = y\varphi_0 + w(y\varphi_0, \delta(y))$ (voir (3.35)) et que d'après le corollaire 3.3.1 et la relation (3.44), le vecteur w est développable de la manière suivante

$$w(y) = w(y\varphi_0, \delta(y)) = \frac{1}{2}\ddot{w}(0, \delta_*)y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (3.144)$$

Pour mener à bien cette comparaison, nous définissons pour y proche de 0, la fonction S par

$$S(y) = E(M(y) + v(y), \epsilon(y)) - E(M(y), \epsilon(y)) = \hat{E}(v(y), \epsilon(y), M(y)). \quad (3.145)$$

Remarque 3.5.1

1) $E(M(y), \epsilon(y))$ ne dépend pas de $\epsilon(y)$ (voir (3.142)).

2) $S(0) = 0$, car $E(M(0) + v(0), \epsilon(0)) = E(M(0), \epsilon(0)) = E(M_*, \epsilon_*)$.

On rappelle également que pour $\theta^2 = x \in]1, 4[$, les expressions de $\ddot{\epsilon}(0)$ et $\ddot{M}(0)$ sont données (voir théorème 3.3.1)

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} (A\alpha^2 + B) \quad (3.146)$$

et

$$\ddot{M}(0) = \frac{1}{8M_*} (C\alpha^2 + D). \quad (3.147)$$

Où A, B, C et D sont données par

$$\begin{cases} A(x, M_*^2) = 2 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (-2x^2 + 61x - 2)}{x(4x-1)(x-4)} \\ B(x, M_*^2) = -1 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (4x-61)}{2(4x-1)(x-4)}, \end{cases} \quad (3.148)$$

et

$$\begin{cases} C(x, M_*^2) = -2\frac{x-1}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(x-1)(4x^2 - 57x + 4)}{x(4x-1)(x-4)} \\ D(x, M_*^2) = -2\frac{x+2}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(-4x^2 + x - 60)}{(4x-1)(x-4)}. \end{cases} \quad (3.149)$$

Il vient le théorème suivant.

Théorème 3.5.1

Soient k_* , k_{**} , p , (ϵ_*, M_*) satisfaisant (3.12) -(3.14), $x \in]1, 4[$ et $\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Alors la fonction S vérifie que, pour y proche de 0,

$$\text{sign} \frac{d}{dy} S(y) = \text{sign} G(\alpha)y \quad (3.150)$$

avec $G : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto G(\alpha)$ telle que

$$G(\alpha) = \frac{\ddot{\epsilon}(0) (2\sqrt{p}\alpha^2 - \sqrt{p} + p)}{2\epsilon_*} + \frac{3M_*\ddot{M}(0)}{2}. \quad (3.151)$$

De plus,

1) Si $\ddot{M}(0) > 0$ alors

1.1) si $\ddot{\epsilon}(0) > 0$ et $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*}$ alors $S(y) > 0$ et $E(M + v, \epsilon) > E(M, \epsilon)$,

1.2) si $\ddot{\epsilon}(0) < 0$ et $-\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*}$ alors $S(y) > 0$ et $E(M + v, \epsilon) > E(M, \epsilon)$.

2) Si $\ddot{M}(0) < 0$ alors

2.1) si $\ddot{\epsilon}(0) > 0$ et $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < -\frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*}$ alors $S(y) < 0$ et $E(M + v, \epsilon) < E(M, \epsilon)$,

2.2) si $\ddot{\epsilon}(0) < 0$ et $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*}$ alors $S(y) < 0$ et $E(M + v, \epsilon) < E(M, \epsilon)$.

3) Si $\ddot{\epsilon}(0) > 0$ et $-\frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*} < \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*}$ alors il existe $\tau(\alpha) \in]0, 1[$ dépendant de α tel que

3.1) si $\alpha < \sqrt{\tau(\alpha)}$ alors $S(y) < 0$ et $E(M + v, \epsilon) < E(M, \epsilon)$,

3.2) si $\alpha > \sqrt{\tau(\alpha)}$ alors $S(y) > 0$ et $E(M + v, \epsilon) > E(M, \epsilon)$.

4) Si $\ddot{\epsilon}(0) < 0$ et $-\frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*} < -\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < \frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*}$ alors il existe $\tau(\alpha) \in]0, 1[$ dépendant de α tel que

4.1) si $\alpha < \sqrt{\tau(\alpha)}$ alors $S(y) > 0$ et $E(M + v, \epsilon) > E(M, \epsilon)$,

4.2) si $\alpha > \sqrt{\tau(\alpha)}$ alors $S(y) < 0$ et $E(M + v, \epsilon) < E(M, \epsilon)$.

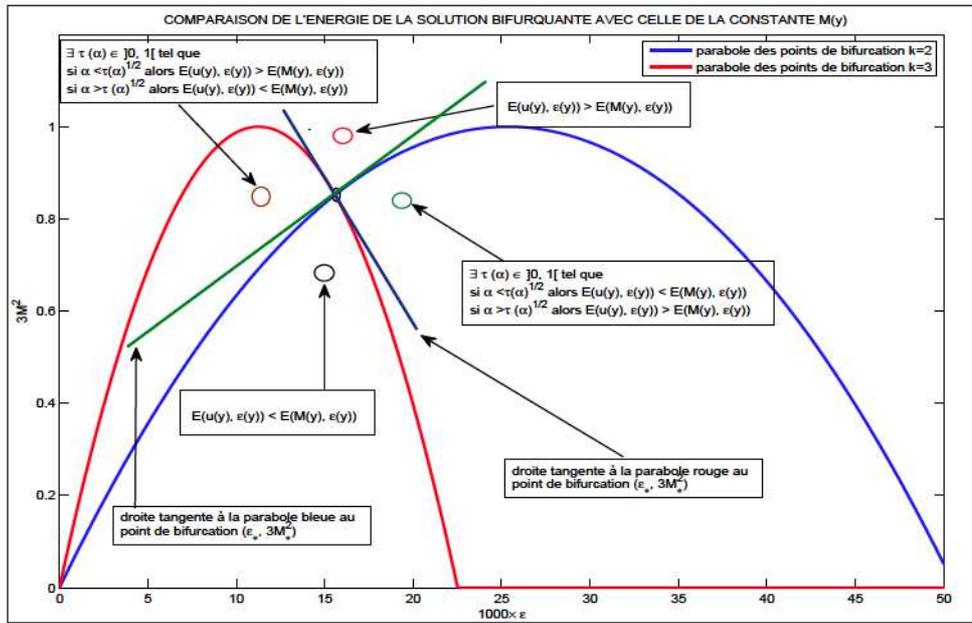


FIGURE 3.7 – Energie de la solution non triviale (ou bifurquante) par rapport à celle de la constante

Preuve. En dérivant la fonction S définie en (3.145), par rapport à y , on obtient

$$\frac{d}{dy}S(y) = D_v \hat{E} \cdot \dot{v} + D_\epsilon \hat{E} \cdot \dot{\epsilon} + D_M \hat{E} \cdot \dot{M}. \quad (3.152)$$

Comme $D_v \hat{E} \cdot \dot{v} = D_u \hat{E} \cdot \dot{v} = 0$ (car $\dot{v} \in \dot{L}^2(0, 1)$), nous avons

$$\frac{d}{dy}S(y) = D_\epsilon \hat{E} \cdot \dot{\epsilon} + D_M \hat{E} \cdot \dot{M}. \quad (3.153)$$

Pour la suite, nous posons, pour y proche de 0,

$$S_1(y) = D_\epsilon \hat{E} \cdot \dot{\epsilon} \quad (3.154)$$

et

$$S_2(y) = D_M \hat{E} \cdot \dot{M}(y). \quad (3.155)$$

Développement de S_1 proche de 0

Par définitions de \hat{E} et S_1

$$\begin{aligned} S_1(y) &= \dot{\epsilon} \int_0^1 \epsilon u_{xx}^2 - u_x^2 dx \\ &= \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon(y)} \int_0^1 (\epsilon^2 u_{xx}^2 - \epsilon u_x^2) dx \\ &= \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon(y)} T_1(y). \end{aligned}$$

Nous allons chercher un développement de T_1 proche de 0. Par définition de $u(y)$ (voir (3.143)) on a trivialement,

$$T_1(0) = \int_0^1 \epsilon_*^2 u_{xx}^2(0) - \epsilon_* u_x^2(0) dx = 0 \quad (3.156)$$

et

$$\dot{T}_1(0) = \int_0^1 2\dot{\epsilon}(0)\epsilon_* u_{xx}^2(0) + 2\epsilon_*^2 \dot{u}_{xx}(0)u_{xx}(0) - \dot{\epsilon}(0)u_x^2(0) - 2\epsilon_* \dot{u}_x(0)u_x(0) dx = 0. \quad (3.157)$$

D'où la nécessité de calculer $\ddot{T}_0(0)$. Pour cela nous dérivons T_1 deux fois par rapport à y et on obtient

$$\begin{aligned} \ddot{T}_1(y) = \int_0^1 & 2(\ddot{\epsilon}\epsilon + \dot{\epsilon}^2)u_{xx}^2 + 8\dot{\epsilon}\epsilon \ddot{u}_{xx}u_{xx} + 2\epsilon^2(\ddot{u}_{xx}u_{xx} + \dot{u}_{xx}^2) \\ & - \ddot{\epsilon}u_x^2 - 4\dot{\epsilon}\ddot{u}_x u_x - 2\epsilon(\ddot{u}_x u_x + \dot{u}_x^2) dx. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Puisque $u_x(0) = u_{xx}(0) = \dot{\epsilon}(0) = 0$, alors

$$\begin{aligned} \ddot{T}_1(0) &= \int_0^1 2\epsilon_*^2 [(\varphi_0)_{xx}]^2 - 2\epsilon_* [(\varphi_0)_x]^2 dx \\ &= \alpha^2(\epsilon_*^2 \lambda_*^2 - \epsilon_* \lambda_*) + \beta^2(\epsilon_*^2 \lambda_{**}^2 - \epsilon_* \lambda_{**}). \end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse (3.13),

$$\epsilon_* \lambda_* = 1 + \sqrt{p} \quad \text{et} \quad \epsilon_* \lambda_{**} = 1 - \sqrt{p}$$

et le fait que

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

on trouve que

$$\ddot{T}_1(0) = 2\alpha^2 \sqrt{p} + (p - \sqrt{p}). \quad (3.159)$$

Ainsi de (3.156)-(3.159), pour y proche de 0 on obtient,

$$T_1(y) = \frac{\ddot{T}_1(0)}{2} y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (3.160)$$

Par ailleurs,

$$\frac{\dot{\epsilon}(y)}{\epsilon(y)} = \frac{\dot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*} y + \mathcal{O}(y^2) \quad (3.161)$$

donc, pour y proche de 0

$$S_1(y) = \frac{\ddot{\epsilon}(0)\ddot{T}_1(0)}{2\epsilon_*} y^3 + \mathcal{O}(y^4) \quad (3.162)$$

où $\ddot{\epsilon}(0)$ est donnée par (3.146).

Développement de S_2 proche de 0

Par définitions de \hat{E} et S_2 , on a

$$\begin{aligned} S_2(y) &= \dot{M} \int_0^1 \epsilon u_{xx} + u + ru + u^3 - M - rM - M^3 dx \\ &= \dot{M} \int_0^1 [f(u(y)) - f(M(y))] dx \quad \text{car} \quad u_x(0) = u_x(1) = 0. \end{aligned}$$

Nous posons pour la suite

$$T_2(y) = \int_0^1 [f(u(y)) - f(M(y))] dx. \quad (3.163)$$

Et nous allons maintenant chercher le développement de T_2 proche de 0. Puisque $u(0) = M_*$ (voir (3.143)) et $f(u) = (1+r)u + u^3$, on a

$$\begin{aligned} T_2(0) &= \int_0^1 [f(u(0)) - f(M_*)] dx \\ &= \int_0^1 [f(M_*) - f(M_*)] dx \quad \text{car } M(0) = M_* \\ &= 0. \end{aligned}$$

En dérivant T_2 une fois par rapport à y , on a également,

$$\dot{T}_2(0) = 0. \quad (3.164)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \dot{T}_2(0) &= \int_0^1 [f'(u(0))\dot{u}(0) - f'(M_*)\dot{M}(0)] dx \\ &= \int_0^1 f'(M_*)\dot{u}(0) dx \quad \text{car } \dot{M}(0) = 0 \quad (\text{cf. proposition 3.3.2}) \\ &= \int_0^1 (1+r)\varphi_0 + 3M_*^2\varphi_0 dx \\ &= 0 \quad \text{car } \int_0^1 \varphi_0 dx = 0. \end{aligned}$$

Par suite, nous trouvons que

$$\ddot{T}_2(0) = 3M_*. \quad (3.165)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \ddot{T}_2(0) &= \int_0^1 [f''(M_*)\dot{u}(0).\dot{u}(0) + f'(M_*)\ddot{u}(0) - f''(M_*)\dot{M}(0).\dot{M}(0) - f'(M_*)\ddot{M}(0)] dx \\ &= \int_0^1 [f''(M_*)\dot{u}(0).\dot{u}(0) + f'(M_*)\ddot{u}(0) - f'(M_*)\ddot{M}(0)] dx \\ &= \int_0^1 6M_*\varphi_0^2 + (1+r)(\ddot{M}(0) + \ddot{w}(0)) + 3M_*^2(\ddot{w}(0) + \ddot{M}(0)) dx \\ &\quad - \int_0^1 (1+r)\ddot{M}(0) + 3M_*^2\ddot{M}(0) dx \\ &= \int_0^1 6M_*\varphi_0^2 + (1+r)\ddot{w}(0) + 3\ddot{w}(0)M_*^2 dx \\ &= 6M_* \int_0^1 \varphi_0^2 dx, \quad \text{car } \ddot{w}(0) \in \dot{L}^2(0,1). \\ &= 3M_*(\alpha^2 + \beta^2). \end{aligned}$$

On conclut avec l'hypothèse $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Bien entendu, nous avons aussi utilisé le fait que $\ddot{u}(0) = \ddot{M}(0) + \ddot{w}(0)$ (voir (3.143)). Ainsi de (3.164)-(3.165), nous déduisons que

$$T_2(y) = \frac{3M_*}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (3.166)$$

Par ailleurs, on a

$$\dot{M} = \ddot{M}(0)y + \mathcal{O}(y). \quad (3.167)$$

Donc pour y proche de 0, on obtient,

$$S_2(y) = \frac{3M_*\ddot{M}(0)}{2}y^3 + \mathcal{O}(y^4) \quad (3.168)$$

en regroupant les résultats (3.162) et (3.168), nous trouvons que

$$\frac{d}{dy}S(y) = \left[\frac{\ddot{\epsilon}(0)\ddot{T}_1(0)}{2\epsilon_*} + \frac{3M_*\ddot{M}(0)}{2} \right] y^3 + \mathcal{O}(y^4). \quad (3.169)$$

Et donc, pour y proche de 0.

$$\text{sign} \frac{d}{dy}S(y) = \text{sign} \left[\frac{\ddot{\epsilon}(0)\ddot{T}_1(0)}{\epsilon_*} + 3M_*\ddot{M}(0) \right] y. \quad (3.170)$$

Pour finir nous posons

$$G(\alpha) = \frac{\ddot{\epsilon}(0)\ddot{T}_1(0)}{2\epsilon_*} + \frac{3M_*\ddot{M}(0)}{2}. \quad (3.171)$$

En remplaçant $\ddot{T}_1(0)$, par son expression correspondante (voir (3.159)), on obtient pour tout $x \in]1, 4[$ et pourvu que $\ddot{\epsilon}(0) \neq 0$,

$$G(\alpha) = \frac{\ddot{\epsilon}(0)}{2\epsilon_*} \left[2\alpha^2\sqrt{p} + p - \sqrt{p} + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} \right] \quad (3.172)$$

ou encore

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*} \left[\alpha^2 + \frac{1}{2} \left(\sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} \right) \right]. \quad (3.173)$$

En posant

$$\tau(\alpha) = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} \right), \quad (3.174)$$

il vient finalement que

$$G(\alpha) = \frac{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*} (\alpha^2 - \tau(\alpha)). \quad (3.175)$$

De ce fait, il résulte que le reste de la preuve consiste simplement à étudier $\tau(\alpha)$ dans $]0, 1[$.

1.1) si $(\ddot{\epsilon}(0) > 0)$ et $\left(\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*} \right)$ alors $\tau(\alpha) < 0$ et donc $G > 0$.

En effet, comme $\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*}$ alors

$$\begin{aligned} \sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} &> \sqrt{p} - 1 + \epsilon_*\lambda_{**} \\ &> \sqrt{p} - 1 + (1 - \sqrt{p}) = 0 \quad \text{car} \quad \epsilon_*\lambda_{**} = 1 - \sqrt{p}. \end{aligned}$$

D'où par (3.174), on a que $\tau(\alpha) < 0$ et on conclut en utilisant (3.175) et le fait que $\ddot{\epsilon}(0) > 0$.

1.2) si $(\ddot{\epsilon}(0) < 0)$ et $\left(-\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*}\right)$ alors $\tau(\alpha) > 1$ et donc $G > 0$.

En effet, comme $-\frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*}$ alors

$$\begin{aligned} -\sqrt{p} + 1 - \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} &> -\sqrt{p} + 1 + \epsilon_*\lambda_* \\ &> -\sqrt{p} + 1 + (1 + \sqrt{p}) = 2 \quad \text{car } \epsilon_*\lambda_* = 1 + \sqrt{p}. \end{aligned}$$

D'où par (3.174), on a que $\tau(\alpha) > 1$ et on conclut en utilisant (3.175) et le fait que $\ddot{\epsilon}(0) < 0$.

Les assertions 2.1) et 2.2) s'obtiennent de façon analogue. Ce qui n'est pas le cas pour le reste des autres assertions.

3) Si $\ddot{\epsilon}(0) > 0$ et $-\frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*} < \frac{\ddot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} < \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*}$ alors $\tau(\alpha) \in]0, 1[$.

En effet, si $\ddot{M}(0) > 0$, alors

$$\begin{aligned} \sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} &< \sqrt{p} - 1 + \epsilon_*\lambda_{**} \\ &< \sqrt{p} - 1 + (1 - \sqrt{p}) = 0 \quad \text{car } \epsilon_*\lambda_{**} = 1 - \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Donc $\tau(\alpha) > 0$. Il reste à montrer que $\tau(\alpha) < 1$. En effet, on suppose que $\tau(\alpha) \geq 1$. D'où

$$\begin{aligned} \tau(\alpha) \geq 1 &\Rightarrow \sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} \leq -2 \\ &\Rightarrow \sqrt{p} + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} \leq -1 \\ &\Rightarrow \sqrt{p} - \lambda_*\epsilon_* < -1 \quad \text{par hypothèse} \\ &\Rightarrow \sqrt{p} - (1 + \sqrt{p}) < -1 \quad \text{car } \epsilon_*\lambda_* = 1 + \sqrt{p} \\ &\Rightarrow -1 < -1 \quad \text{ce qui est absurde. Et donc } \tau(\alpha) < 1. \end{aligned}$$

De même, si $\ddot{M}(0) < 0$, alors

$$\begin{aligned} \sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} &> \sqrt{p} - 1 - \epsilon_*\lambda_* \\ &> \sqrt{p} - 1 - (1 + \sqrt{p}) = -2 \quad \text{car } \epsilon_*\lambda_* = 1 + \sqrt{p}. \end{aligned}$$

Donc $\tau(\alpha) < 1$. Il reste à montrer que $\tau(\alpha) > 0$. En effet, on suppose que $\tau(\alpha) \leq 0$. D'où

$$\begin{aligned} \tau(\alpha) \leq 0 &\Rightarrow \sqrt{p} - 1 + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} \geq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{p} + \frac{3M_*\epsilon_*\ddot{M}(0)}{\sqrt{p}\ddot{\epsilon}(0)} \geq 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{p} + \lambda_{**}\epsilon_* > 1 \quad \text{par hypothèse} \\ &\Rightarrow \sqrt{p} + (1 - \sqrt{p}) > 1 \quad \text{car } \epsilon_*\lambda_{**} = 1 - \sqrt{p} \\ &\Rightarrow 1 > 1 \quad \text{ce qui est absurde. Et donc } \tau(\alpha) > 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut conclure que

3.1) si $\alpha < \sqrt{\tau(\alpha)}$ alors $G(\alpha) < 0$ et $S(y) < 0$.

3.2) si $\alpha > \sqrt{\tau(\alpha)}$ alors $G(\alpha) > 0$ et $S(y) > 0$.

Les assertions 4.1) et 4.2) sont obtenues par analogies.

Ce qui achève la preuve du théorème. □

Remarque 3.5.2

Les assertions 1.1) et 1.2) du théorème précédent peuvent également être prouvées par les estimations suivantes.

- si $\ddot{\epsilon}(0) > 0$ et $\frac{\dot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_{**}\sqrt{p}}{3M_*}$, alors $G > \frac{\ddot{\epsilon}(0)\alpha^2\sqrt{p}}{\epsilon_*}$.
- si $\ddot{\epsilon}(0) < 0$ et $-\frac{\dot{M}(0)}{\ddot{\epsilon}(0)} > \frac{\lambda_*\sqrt{p}}{3M_*}$ alors $G > \frac{\ddot{\epsilon}(0)(\alpha^2 - 1)\sqrt{p}}{\epsilon_*}$.

Chapitre 4

Stabilité linéaire des solutions bifurquantes avec $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 2$

Hormis les problèmes présentant des bifurcations de type Hopf (voir [47]), l'étude de la stabilité (linéaire) des solutions bifurquantes, souvent décrite comme un principe d'échange de stabilité, est loin d'être triviale [48], [36]. D'ailleurs, nous n'avons pas trouvé beaucoup de publications, dans la littérature, traitant concrètement cette question. Surtout lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé est de dimension plus grand que 1. Ainsi, en se basant sur un principe de stabilité réduite, développé par Kielhöfer dans [36], nous avons pu montrer l'existence des ensembles de valeurs des paramètres, pour lesquelles les solutions bifurquantes données par le Théorème 3.3.1 sont stables et respectivement instables. Ces résultats sont appuyés par plusieurs tests numériques, que nous donnons à la fin du chapitre.

4.1 Cadre fonctionnel et préliminaires

Soient $\Omega = (0, 1)$, $\epsilon > 0$, $x \in \Omega$ et r un paramètre réel négatif. Nous définissons

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto (1+r)u + u^3. \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} W_0 &= \{u \in H^2(\Omega) \mid \partial_x u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega\}, \\ V_0 &= \{u \in H^4(\Omega) \mid \partial_x u = \partial_{xxx} u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\}, \\ \dot{L}^2(\Omega) &= \{v \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} v dx = 0\}, \\ \dot{V}_0 &= V_0 \cap \dot{L}^2(\Omega), \quad \dot{W}_0 = W_0 \cap \dot{L}^2(\Omega), \end{aligned}$$

et

$$\delta = (\epsilon, M).$$

Le but, dans ce chapitre est d'étudier la stabilité linéaire des branches de solutions stationnaires données dans le Théorème 3.3.1. Cette stabilité est prouvée pour le problème d'évolution suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = F(v, \delta), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \partial_x u = \partial_{xxx} u = \partial_{xxxx} u = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \quad \text{dans } L^2((0, 1)), \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Où F est donnée par (3.5).

On peut remarquer (4.2) est un problème de Swift-Hohenberg stabilisant (voir [49]). Cette équation et le problème d'évolution d'origine (3.3), pour lequel, nous avons montré l'existence de branches de solutions stationnaires, dans le Théorème 3.3.1, ont le même système gradient dont la fonctionnelle de Lyapunov correspondante est

$$E(u, \epsilon) = \int_0^1 \frac{1}{2}(\epsilon u_{xx} + u)^2 + \frac{r}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4 dx. \quad (4.3)$$

Cela signifie que (voir [50]), si les solutions stationnaires de (4.2) sont isolées alors $u(x, t)$ tend vers ces solutions quand $t \rightarrow +\infty$. Autrement dit, pour tout $x \in \Omega$,

$$u(x, t) \rightarrow v(x) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

où $v(x)$ est solution du problème

$$(v, \delta) \in \dot{V}_0 \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \quad F(v, \delta) = 0. \quad (4.4)$$

On rappelle que F est explicitement définie comme suit :

$$F : \dot{V}_0 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad (v, \delta) \mapsto F(v, \delta) = L(v, \delta) + N(v, \delta).$$

Avec,

$$L(\cdot, \delta) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v \quad (4.5)$$

et

$$N(\cdot, \delta) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx). \quad (4.6)$$

Remarque 4.1.1

Selon la Proposition 2.2.1, l'opérateur $L(\cdot, \delta)$ admet une base orthogonale de vecteurs propres

$$\varphi_k : x \mapsto \cos(k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots$$

dans $\dot{L}(\Omega)$. Son spectre est donné par

$$\mu_k = (\epsilon \lambda_k - 1)^2 - p, \quad \lambda_k = (k\pi)^2, \quad p = 1 - f'(M) = -3M^2 - r, \quad (4.7)$$

Sous les notations (4.7), on donne le résultat trivial suivant.

Proposition 4.1.1

Soit $r < 0$ et $(\epsilon, M) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}_+^*$. On suppose que 0 n'est pas dans le spectre de $L(\cdot, \delta)$ (rappelle que $\delta = (\epsilon, M)$).

- Si $3M^2 > -(\epsilon \lambda_k - 1)^2 - r \quad \forall k \geq 1$, alors la solution triviale $\bar{u} = M$ (ou $v = 0$) est stable (au sens où toutes les valeurs propres $L(\cdot, \delta)$ sont positives).
- S'il existe $j \geq 1$ tel que $3M^2 < -(\epsilon \lambda_j - 1)^2 - r$ alors $\bar{u} = M$ (ou $v = 0$) est instable (au sens où l'une des valeurs propres de $L(\cdot, \delta)$ est négative).

Preuve. La preuve est triviale car il s'agit simplement d'étudier la positivité de la valeur propre

$$\mu_k = (\epsilon \lambda_k - 1)^2 - p, \quad \lambda_k = (k\pi)^2 = -3M^2 - r.$$

□

Enfin, nous rappelons les hypothèses qui ont permis de prouver l'existence des solutions bifurquantes du problème (4.4) (voir Théorème 3.3.1).

$$(H4) \quad \text{Soient } 1 \leq k_{**} < k_* \text{ et } r < 0 \text{ fixés.} \quad (4.8)$$

$$(H5) \quad \text{Soient } \epsilon > 0 \text{ et } M \in \mathbb{R}^* \text{ vérifiant} \\ (\epsilon \lambda_{k_*} - 1)^2 + r + 3M^2 = (\epsilon \lambda_{k_{**}} - 1)^2 + r + 3M^2 = 0. \text{ On pose } p = -3M^2 - r. \quad (4.9)$$

$$(H6) \quad \text{De plus, on suppose que } 0 < p < 1 \text{ et } \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = \langle \varphi_{k_*}, \varphi_{k_{**}} \rangle. \quad (4.10)$$

Si nous posons

$$x = \theta^2 := \left(\frac{k_*}{k_{**}} \right)^2, \quad (4.11)$$

alors, grâce à l'hypothèse (4.9), le paramètre p vérifie

$$\sqrt{p} = \frac{x - 1}{x + 1}. \quad (4.12)$$

Pour simplifier les notations, on posera, comme nous l'avons souvent fait, dans les chapitres précédents

$$\varphi_{k_*} = \varphi_*, \varphi_{k_{**}} = \varphi_{**}, \lambda_{k_*} = \lambda_* \text{ et } \lambda_{k_{**}} = \lambda_{**}. \quad (4.13)$$

Bien que nous soyons intéressés ici, par la stabilité linéaire des solutions données dans le Théorème 3.3.1, il est, tout de même, nécessaire de donner un résultat de la stabilité de la constante (ou la solution triviale). Ainsi, sous les hypothèses (4.8)-(4.10), on a la proposition suivante.

Proposition 4.1.2 (Stabilité neutre de la solution triviale)

Soient $1 \leq k_{**} < k_*$, r , ϵ_* , M_* et $p = -3M_*^2 - r$ satisfaisant (4.8)-(4.10). Dans le plan $(\epsilon, X = 3M^2)$ la condition suivante,

$$\begin{cases} -(\epsilon_* \lambda_{k_*} - 1)^2 - r = -(\epsilon_* \lambda_{k_{**}} - 1)^2 - r \\ -(\epsilon_* \lambda_{k_*} - 1)^2 - r > -(\epsilon_* \lambda_j - 1)^2 - r \end{cases} \quad (4.14)$$

est vérifiée pour tout $j \neq k_*$ et $j \neq k_{**}$ si et seulement si

$$k_{**} = k_* - 1 \quad \text{et} \quad \epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_*-1}}. \quad (4.15)$$

De plus, si on suppose que $\epsilon \in]\frac{1}{\lambda_{k_*}}, \frac{1}{\lambda_{k_{**}}}[$ alors

(i) si $3M^2 > -(\epsilon \lambda_{k_{**}} - 1)^2 - r$ et $\epsilon_* < \epsilon < \frac{1}{\lambda_{k_{**}}}$ alors la solution triviale $\bar{u} = M$ (ou $v = 0$) est stable dans le sens de la Proposition 4.1.1.

(ii) Si $3M^2 > -(\epsilon \lambda_{k_*} - 1)^2 - r$ et $\frac{1}{\lambda_{k_*}} < \epsilon < \epsilon_*$ alors la solution triviale $\bar{u} = M$ (ou $v = 0$) est stable dans le sens de la Proposition 4.1.1.

(iii) Si $3M^2 < -(\epsilon \lambda_{k_{**}} - 1)^2 - r$ la solution triviale $\bar{u} = M$ (ou $v = 0$) est instable.

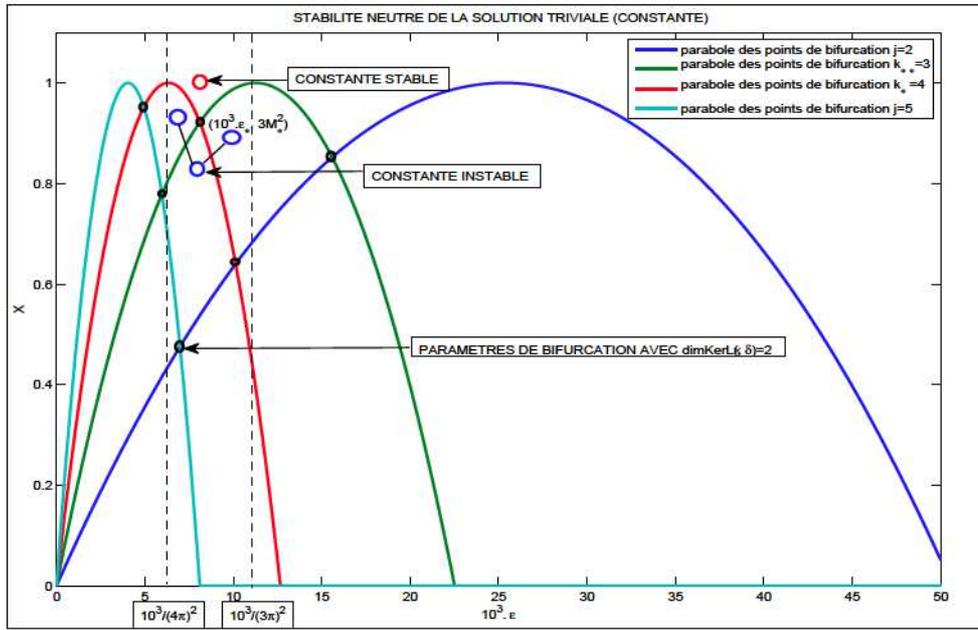


FIGURE 4.1 – stabilité neutre de la constante.

Preuve. On rappelle que $\lambda_j = (j\pi)^2$. De ce fait, on peut voir que

$$(4.14) \Leftrightarrow \begin{cases} \epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_{**}}}, \\ [\epsilon_*(\lambda_{k_*} - \lambda_j)] [\epsilon_*(\lambda_{k_*} + \lambda_j) - 2] < 0, \\ [\epsilon_*(\lambda_{k_{**}} - \lambda_j)] [\epsilon_*(\lambda_{k_{**}} + \lambda_j) - 2] < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

En retour, le système (4.16) fournit

$$\begin{cases} \epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_{**}}}, \\ (\lambda_{k_*} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{k_{**}}) < 0, \\ (\lambda_{k_{**}} - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{k_*}) > 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

D'où

$$\begin{cases} \epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_{**}}} \\ \text{soit } \lambda_{k_*} < \lambda_j \text{ et } \lambda_j > \lambda_{k_{**}} \\ \text{soit } \lambda_{k_*} > \lambda_j \text{ et } \lambda_j < \lambda_{k_{**}}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Il résulte qu'il ne peut exister de $j \neq k_*$ et $j \neq k_{**}$ tel que

$$k_{**} < j < k_*.$$

Par conséquent $k_{**} = k_* - 1$.

Soit $(\epsilon, M) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Pour montrer les assertions (i) et (ii), nous posons

$$c_1 = -(\epsilon\lambda_{k_{**}} - 1)^2 - r \quad \text{et} \quad c_2 = -(\epsilon\lambda_{k_*} - 1)^2 - r,$$

et

$$\begin{cases} c_3 = -(\epsilon\lambda_{k_j} - 1)^2 - r & \forall j > k_*, \\ c_4 = -(\epsilon\lambda_{k_j} - 1)^2 - r & \forall j < k_{**}. \end{cases}$$

Ainsi, la preuve consiste à montrer que pour tout $(\epsilon, 3M^2)$ tel que $\epsilon \in]\frac{1}{\lambda_{k_*}}, \frac{1}{\lambda_{k_{**}}}[$ alors

$$\mu_j = -(\epsilon\lambda_j - 1)^2 - r > 0 \quad \forall j \geq 1.$$

En effet,

- (i) si on suppose que $3M^2 > -(\epsilon\lambda_{k_{**}} - 1)^2 - r$ et $\epsilon_* < \epsilon < \frac{1}{\lambda_{k_{**}}}$ alors on trivialement que $\mu_{k_{**}} > 0$. En plus, comme

$$c_1 - c_2 > 0 \iff \epsilon > \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_{**}}} = \epsilon_* \quad (\text{voir (4.15)}).$$

Ce qui est vrai car par hypothèse $\epsilon > \epsilon_*$. Donc $c_1 > c_2$ et par suite, on obtient que

$$3M^2 > c_2 \quad \text{et} \quad \mu_{k_*} > 0.$$

- Si $j < k_{**}$ alors $\frac{1}{\lambda_{k_{**}}} < \frac{2}{\lambda_{k_{**}} + \lambda_j}$. En plus

$$c_1 - c_4 > 0 \iff \epsilon < \frac{2}{\lambda_{k_{**}} + \lambda_j}.$$

Ce qui est vrai car $\epsilon < \frac{1}{\lambda_{k_{**}}}$. Donc $c_1 > c_4$ et par suite, on obtient que

$$3M^2 > c_4 \quad \text{et} \quad \mu_j > 0 \quad \forall j < k_{**}.$$

- Si $j > k_{**}$ alors $\epsilon_* < \frac{2}{\lambda_{k_{**}} + \lambda_j}$. En plus

$$c_1 - c_3 > 0 \iff \epsilon > \frac{2}{\lambda_{k_{**}} + \lambda_j}.$$

Ce qui est vrai car $\epsilon > \epsilon_*$. Donc $c_1 > c_3$ et par suite, on obtient que

$$3M^2 > c_3 \quad \text{et} \quad \mu_j > 0 \quad \forall j > k_{**}.$$

Donc la solution triviale $\bar{u} = M$ (où $v = 0$) est stable.

- (ii) On suppose maintenant que $3M^2 > -(\epsilon\lambda_{k_*} - 1)^2 - r$ et $\frac{1}{\lambda_{k_*}} < \epsilon < \epsilon_*$. Alors on a trivialement que $\mu_{k_*} > 0$. En plus, comme

$$c_2 - c_1 > 0 \iff \epsilon < \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_{**}}} = \epsilon_* \quad (\text{voir (4.15)}).$$

Ce qui est vrai, car par hypothèse $\epsilon < \epsilon_*$. Donc $c_2 > c_1$ et par suite, on obtient que

$$3M^2 > c_1 \quad \text{et} \quad \mu_{k_{**}} > 0.$$

- Si $j < k_{**}$ (ou $j < k_*$) alors $\epsilon_* < \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_j}$. En plus

$$c_2 - c_4 > 0 \iff \epsilon < \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_j}.$$

Ce qui est vrai car $\epsilon < \epsilon_*$. Donc $c_2 > c_4$ et par suite, on obtient que

$$3M^2 > c_4 \quad \text{et} \quad \mu_j > 0 \quad \forall j < k_*.$$

- Si $j > k_*$ alors $\frac{1}{\lambda_{k_*}} < \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_j}$. En plus

$$c_2 - c_3 > 0 \iff \epsilon > \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_j}.$$

Ce qui est vrai car $\epsilon > \frac{1}{\lambda_{k_*}}$. Donc $c_2 > c_3$ et par suite, on obtient que

$$3M^2 > c_3 \quad \text{et} \quad \mu_j > 0 \quad \forall j > k_*.$$

Donc la solution triviale $\bar{u} = M$ (ou $v = 0$) est stable.

Ce qui termine la démonstration de la proposition. \square

En résumé, la proposition précédente dit que, la solution constante $(0, \delta)$ où (ϵ, M) est stable, si $k_* = k_{**} + 1$. Dans la suite, on travaillera avec cette condition. Autrement dit, dans le plan $(\epsilon, 3M^2)$, des paramètres solutions doivent être au dessus, de toutes les paraboles de points de bifurcations, pour espérer avoir la stabilité.

On rappelle que le résultat de stabilité que nous souhaitons établir dans ce chapitre est basé sur un principe de la stabilité réduite développé par Kihlhofer dans ([36], section I.18). Ainsi, dans la section qui va suivre, nous allons donner une brève description dudit principe.

4.2 Description du principe de stabilité réduite linéaire

Comme son nom l'indique, le principe de stabilité réduite permet de réduire l'étude de la stabilité linéaire des solutions bifurquantes du problème (4.4), données par le Théorème 3.3.1, de \dot{V}_0 au sous espace $KerL(\cdot, \delta_*)$.

Soit $v(y)$ un équilibre de (4.2), c'est-à-dire une solution de (4.4).

Définition 4.2.1

Selon le Principe de stabilité linéaire (de Lyapunov), $v(y)$ est linéairement stable si et seulement si le spectre de $D_v F(v(y), \delta(y))$ est inclus dans \mathbb{R}_+^ .*

Comme $F(\cdot, \delta_*)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 (dans le sens de la Définition 1.3.1), il vient les décompositions suivantes

$$\dot{L}^2(\Omega) = KerL(\cdot, \delta_*) \oplus R(L(\cdot, \delta_*)) \quad (4.19)$$

et

$$\dot{V}_0 = KerL(\cdot, \delta_*) \oplus \left(R(L(\cdot, \delta_*)) \cap \dot{V}_0 \right). \quad (4.20)$$

Lesquelles en retour, définissent les projections suivantes

$$Q : \dot{L}^2(\Omega) \rightarrow R(L(\cdot, \delta_*)) \quad \text{et} \quad P := I - Q \quad (4.21)$$

telles que la solution v puisse s'écrire de manière suivante

$$v = \varphi + w \quad \text{avec} \quad \varphi = Pv. \quad (4.22)$$

De manière explicite P sera vue comme suit

$$Pv := 2(v, \varphi_*)_2 \varphi_* + 2(v, \varphi_{**})_2 \varphi_{**}, \quad \forall v \in \dot{L}^2(\Omega). \quad (4.23)$$

Aussi, nous posons, comme dans le Chapitre 3, $\varphi = y\varphi_0$ avec $\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$.

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \quad (4.24)$$

D'où, grâce aux hypothèses (4.8)-(4.10) et la Méthode de Réduction de Lyapunov-Schmidt (voir Chapitre 3, Sous-section 3.3.2 et Théorème 3.3.1), il résulte que

toutes les solutions du problème (4.4) qui consiste à chercher les solutions bifurquantes au voisinage du point de bifurcation $(0, \delta_*) \in \dot{V}_0 \times \mathbb{R}^2$, sont obtenues en résolvant

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PF(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) = 0 \quad (\varphi, \delta) \in \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

La courbe de solutions obtenue (voir (3.64), chapitre 3) vérifie

$$F(v(y), \delta(y)) = 0, \quad y \in (-\tau, \tau) \text{ voir le théorème 3.3.1.} \quad (4.26)$$

Le principe de stabilité réduite pour les solutions stationnaires est alors formulée comme suit : $v(y) = \varphi(y) + w(\varphi(y), \delta(y))$ et $\varphi(y) = Pv(y)$ qui sont considérées comme des équilibres respectifs du problème $\frac{dv}{dt} = F(v, \delta)$ et du problème réduit $\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{\Phi}(\varphi, \delta)$ ont-elles la même stabilité? En d'autres mots, peut-t-on déduire la stabilité linéaire de $v(y)$ de celle de sa composante $\varphi(y) = Pv(y)$ dans le noyau?

En effet, une réponse à cette question est apportée par Kielhöfer dans [36] en étudiant les valeurs propres des familles d'opérateurs,

$$T(y) := D_v F(v(y), \delta(y)) \quad (4.27)$$

$$K(y) := D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi(y), \delta(y)). \quad (4.28)$$

Bien sûr, il suppose que ces opérateurs dépendent analytiquement de y proche 0. Et, en faisant usage du Polygone de Newton (voir [36], section I.15), il prouve que les séries entières des valeurs propres perturbées de $T(y) := D_v F(v(y), \delta(y))$ et $K(y) := D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi(y), \delta(y))$ ont les mêmes termes dominants non nuls, pourvu que les deux points suivants soient satisfaits

1. $K(y) = y^{n_0} K_{n_0} + \mathcal{O}(y^{n_0+1})$ pour $n_0 \geq 1$
2. 0 est une valeur propre de K_{n_0} de multiplicité au plus 1.

Pour bien décrire ce principe, nous introduisons les notations suivantes

$$\begin{aligned} T_{11}(y) &\equiv PT(y) |_{\text{Ker}L(\cdot, \delta_*)} \in \mathcal{L}(\text{Ker}L(\cdot, \delta_*), \text{Ker}L(\cdot, \delta_*)), \\ T_{12}(y) &\equiv PT(y) |_{R \cap \dot{V}_0} \in \mathcal{L}(R \cap \dot{V}_0, \text{Ker}L(\cdot, \delta_*)), \\ T_{21}(y) &\equiv (I - P)T(y) |_N \in \mathcal{L}(\text{Ker}L(\cdot, \delta_*), R), \\ T_{22}(y) &\equiv (I - P)T(y) |_{R \cap \dot{V}_0} \in \mathcal{L}(R \cap \dot{V}_0, R). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Alors, au vue de (4.19)-(4.20), $T(y) \in \mathcal{L}(\dot{V}_0, \dot{L}^2(\Omega))$ est donné par l'opérateur matriciel

$$T(y) = \begin{pmatrix} T_{11}(y) & T_{12}(y) \\ T_{21}(y) & T_{22}(y) \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Propriétés 4.2.1

Par (4.19)-(4.20), on a

$$\begin{aligned} T_{11}(0) &= 0, \\ T_{12}(0) &= 0, \\ T_{21}(0) &= 0, \\ T_{22}(0) &\text{ est un isomorphisme.} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Remarque 4.2.1

La dernière propriété tient également pour $T_{22}(y)$ quand y est proche de 0. Car, au moyen d'un développement de Taylor à l'ordre 1, on peut facilement voir que

$$T_{22}(y) = T_{22}(0) + \mathcal{O}(y). \quad (4.32)$$

Le problème spectral de $T(y)$ conduit à l'étude de

$$T(y) - \mu I_{\dot{V}_0} = \begin{pmatrix} T_{11}(y) - \mu I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} & T_{12}(y) \\ T_{21}(y) & T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0} \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (4.33)$$

En composant (4.33), à gauche, par l'isomorphisme (pour y et $|\mu|$ très petits)

$$\begin{pmatrix} I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} & -T_{12}(y)(T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0})^{-1} \\ 0 & I_R \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\dot{L}^2(\Omega), \dot{L}^2(\Omega)), \quad (4.34)$$

nous obtenons l'opérateur

$$\begin{pmatrix} T_{11}(y) - \mu I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} - T_{12}(y)(T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0})^{-1}T_{21}(y) & 0 \\ T_{21}(y) & T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0} \end{pmatrix}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

qui est dans $\mathcal{L}(\dot{V}_0, \dot{L}^2(\Omega))$. Par conséquent, les valeurs propres perturbées μ de $T(y)$ satisfont l'équation

$$\det(T_{11}(y) - \mu I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} - T_{12}(y)(T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0})^{-1}T_{21}(y)) = 0 \quad (4.36)$$

Remarque 4.2.2

On observe que l'opérateur $T_{11}(y) - \mu I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} - T_{12}(y)(T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0})^{-1}T_{21}(y)$ est dans $\mathcal{L}(\text{Ker} L(\cdot, \delta_*), \text{Ker} L(\cdot, \delta_*))$, et que selon l'hypothèse (4.10), $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 2$.

Finalement, puisque

$$(T_{22}(y) - \mu I_{R \cap \dot{V}_0})^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^\nu T_{22}(y)^{-\nu-1}, \quad (4.37)$$

l'équation (4.36) est transformée en

$$\begin{aligned} h(y, \mu) &= \det(T_{11}(y) - \mu I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} - T_{12}(y) \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^\nu T_{22}(y)^{-\nu-1} T_{21}(y)) \\ &= \det(T_{11}(y) - \mu I_{\text{Ker} L(\cdot, \delta_*)} - \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^\nu B_\nu(y)) = 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

où

$$B_\nu(y) = T_{12}(y) T_{22}(y)^{\nu-1} T_{21}(y) = \mathcal{O}(y^2). \quad (4.39)$$

La fonction h est analytique dans le sens de ([36], Section I.15.2), ainsi la Méthode du Polygone de Newton (voir [36], Section I.15) donne la courbe solutions de $h(y, \mu) = 0$ passant par $(0, 0)$. On fait remarquer que

$$h(y, \mu) = 0 \quad (4.40)$$

est l'équation caractéristique de $T(y)$. Ensuite, nous construisons l'équation caractéristique pour les valeurs propres de $K(y)$. En effet, nous obtenons de (4.25),

$$D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PD_v F(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta)(I_{KerL(\cdot, \delta_*)} + D_\varphi w(\varphi, \delta)), \quad (4.41)$$

et puisque $(I-P)F(\varphi+w(\varphi, \delta), \delta) \equiv 0$ (cf. Chapitre 3, Section 3.3.1), alors la différentiation par rapport à φ fournit

$$(I - P)D_v F(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta)(I_{KerL(\cdot, \delta_*)} + D_\varphi w(\varphi, \delta)) \equiv 0. \quad (4.42)$$

Pour les solutions

$$\varphi(y) = y\varphi_0 = Pv(y) \quad \text{et} \quad v(y) = y\varphi_0 + w(y\varphi_0, \delta(y)) \quad (4.43)$$

nous tirons, en vue des définitions (4.29),

$$D_\varphi w(y\varphi_0, \delta(y)) = -T_{22}(y)^{-1}T_{21}(y), \quad (4.44)$$

et de (4.41), on obtient

$$K(y) = T_{11}(y) - T_{12}(y)T_{22}(y)^{-1}T_{21}(y). \quad (4.45)$$

L'équation caractéristique pour les valeurs propres de $K(y)$ est alors donnée par

$$g(y, \mu) \equiv \det(T_{11}(y) - \mu I_{KerL(\cdot, \delta_*)} - B_0) = 0. \quad (4.46)$$

Puisque le but est de comparer les solutions de (4.46) et (4.40), alors on a le résultat suivant.

Théorème 4.2.1 ([36], section I.8)

Soit $K(y) = y^{n_0}K_{n_0} + \mathcal{O}(y^{n_0+1})$ pour $n_0 \geq 0$. Si 0 est une valeur propre de $K_{n_0} \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*))$ de multiplicité algébrique au plus 1, alors les développements en séries de toutes les valeurs propres perturbées de $T(y) = D_v F(v(y), \delta(y))$ et toutes les valeurs propres de $K(y) = D_\varphi \tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y))$ ont les mêmes premiers termes dominants. Pour tous, sauf peut être un, ces termes sont donnés par

$$\mu_\rho y^{n_0}, \quad \rho = 1, \dots, r, \quad r \leq n = \dim KerL(\cdot, \delta_*), \quad (4.47)$$

où $\mu_\rho \in \mathbb{R}$ sont des valeurs propres non nuls de la matrice K_{n_0} . Si $\det K(y) \equiv 0$, alors $\mu \equiv 0$ est une valeur propre de $K(y)$ et $T(y)$. Si $\det K(y) = r_l y^l + \mathcal{O}(y^{l+1})$, $l \geq nn_0$, l'un des termes dominants des possibles valeurs propres est

$$\mu_0 y^{l-(n-1)n_0}, \quad \text{où} \quad \mu_0 = r_l \mu_1^{-m_1} \dots \mu_r^{-m_r}. \quad (4.48)$$

Ici, m_ρ est la multiplicité algébrique de μ_ρ , $\rho = 1, \dots, r \leq n - 1$.

Remarque 4.2.3

Dans notre cas $n = \dim KerL(\cdot, \delta_*) = 2$ (voir hypothèse (4.10)). En plus, comme nous le verrons dans la suite, n_0 sera également égale à 2, et 0 ne sera pas valeur propre de

$$K_{n_0} \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*)).$$

Le résultat principal de ce chapitre sera une simple application du théorème précédent.

4.3 Théorème de stabilité des solutions bifurquantes

Pour appliquer le Théorème 4.2.1, aux solutions bifurquantes du problème (4.4), données par le Théorème 3.3.1, nous devons d'abord vérifier que les hypothèses (4.8)-(4.10) sont suffisantes pour satisfaire les conditions exigées. Mais, au préalable, nous commençons par fournir certains résultats préliminaires.

4.3.1 Quelques résultats préliminaires

Soit φ_0 satisfaisant (4.24), nous posons

$$\Theta_1 := P(\varphi_0^2 \cdot \varphi_* - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot \varphi_* dx), \quad (4.49)$$

$$\Theta_2 := P(\varphi_0^2 \cdot \varphi_{**} - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot \varphi_{**} dx), \quad (4.50)$$

$$\Theta_3 := P(\varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 - \int_0^1 \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 dx), \quad (4.51)$$

$$\Theta_4 := P(\varphi_{**} \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 - \int_0^1 \varphi_{**} \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 dx), \quad (4.52)$$

$$\Theta_5 := P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_* - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_* dx), \quad (4.53)$$

$$\Theta_6 := P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_{**}) - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_{**} dx). \quad (4.54)$$

Les deux propositions suivantes tiennent.

Proposition 4.3.1 ([30])

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (4.8)-(4.10) et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ tel que $\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$. Si $k_* \neq 2k_{**}$, alors w (voir (4.22)) vérifie

$$D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 = x_{2k_*} \varphi_{2k_*} + x_{k_*+k_{**}} \varphi_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}} \varphi_{k_*-k_{**}} + x_{2k_{**}} \varphi_{2k_{**}}. \quad (4.55)$$

De même (obtenues par analogie)

$$D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_* = \frac{x_{2k_*}}{\alpha} \varphi_{2k_*} + \frac{x_{k_*+k_{**}}}{2\alpha} \varphi_{k_*+k_{**}} + \frac{x_{k_*-k_{**}}}{2\alpha} \varphi_{k_*-k_{**}}, \quad (4.56)$$

et

$$D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_{**} = \frac{x_{2k_{**}}}{\beta} \varphi_{2k_{**}} + \frac{x_{k_*+k_{**}}}{2\beta} \varphi_{k_*+k_{**}} + \frac{x_{k_*-k_{**}}}{2\beta} \varphi_{k_*-k_{**}}. \quad (4.57)$$

Avec

$$\begin{aligned} x_{2k_*} &= -f''(M) \frac{\alpha^2}{2\mu_{2k_*}} & x_{k_*+k_{**}} &= -f''(M) \frac{\alpha\beta}{\mu_{k_*+k_{**}}}, \\ x_{k_*-k_{**}} &= -f''(M) \frac{\alpha\beta}{\mu_{k_*-k_{**}}} & x_{2k_{**}} &= -f''(M) \frac{\beta^2}{2\mu_{2k_{**}}}, \end{aligned}$$

où

$$\mu_j = (\epsilon_* \lambda_j - 1)^2 - p, \quad j = 2k_*, \quad k_* + k_{**}, \quad k_* - k_{**}, \quad 2k_{**}.$$

Preuve. Elle est donnée par la Proposition 3.3.1. □

Proposition 4.3.2

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (4.8)-(4.10) et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ tel que $\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$. Si $k_* \neq 2k_{**}$ et $k_* \neq 3k_{**}$, alors

$$\Theta_1 = \left(\frac{3\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{2}\right)\varphi_* + \alpha\beta\varphi_{**}, \quad (4.58)$$

$$\Theta_2 = \alpha\beta\varphi_* + \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{3\beta^2}{4}\right)\varphi_{**}, \quad (4.59)$$

$$\Theta_3 = \frac{x_{2k_*}}{2}\varphi_* + \frac{x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}}}{2}\varphi_{**}, \quad (4.60)$$

$$\Theta_4 = \frac{x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}}}{2}\varphi_* + \frac{x_{2k_{**}}}{2}\varphi_{**}, \quad (4.61)$$

$$\Theta_5 = \left[\frac{x_{2k_*}}{2} + \frac{\beta}{4\alpha}(x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}})\right]\varphi_* + \left[\frac{1}{4}(x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}})\right]\varphi_{**}, \quad (4.62)$$

$$\Theta_6 = \left[\frac{1}{4}(x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}})\right]\varphi_* + \left[\frac{x_{2k_{**}}}{2} + \frac{\alpha}{4\beta}(x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}})\right]\varphi_{**}. \quad (4.63)$$

Preuve. On sait que

$$Pv := 2(v, \varphi_*)_2\varphi_* + 2(v, \varphi_{**})_2\varphi_{**}, \quad \forall v \in \dot{L}^2(\Omega), \quad (4.64)$$

or

$$\begin{aligned} \varphi_0^2 \cdot \varphi_* &= (\alpha^2\varphi_*^2 + 2\alpha\beta\varphi_*\varphi_{**} + \beta^2\varphi_{**}^2) \cdot \varphi_* \\ &= \frac{\alpha^2}{2}(1 + \varphi_{2k_*})\varphi_* + \alpha\beta(\varphi_{k_*+k_{**}} + \varphi_{k_*-k_{**}})\varphi_* + \frac{\beta^2}{2}(1 + \varphi_{2k_{**}})\varphi_*, \end{aligned}$$

d'où en tenant compte des hypothèses, et en appliquant P à l'expression ci-dessus, on trouve que

$$\Theta_1 = P(\varphi_0^2 \cdot \varphi_* - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot \varphi_* dx) = \left(\frac{3\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{2}\right)\varphi_* + \alpha\beta\varphi_{**}.$$

Ce qui prouve (4.58).

Le résultat (4.60) est donné en multipliant (4.55) par φ_* . En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 &= \varphi_* \cdot (x_{2k_*}\varphi_{2k_*} + x_{k_*+k_{**}}\varphi_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}}\varphi_{k_*-k_{**}} + x_{2k_{**}}\varphi_{2k_{**}}) \\ &= \frac{x_{2k_*}}{2}(\varphi_{3k_*} + \varphi_*) + \frac{x_{k_*+k_{**}}}{2}(\varphi_{2k_*+k_{**}} + \varphi_{**}) \\ &\quad + \frac{x_{k_*-k_{**}}}{2}(\varphi_{2k_*-k_{**}} + \varphi_{**}) + \frac{x_{2k_{**}}}{2}(\varphi_{2k_{**}+k_*} + \varphi_{2k_{**}-k_*}), \end{aligned}$$

en appliquant P , on trouve que

$$P(\varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 - \int_0^1 \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 dx) = \frac{x_{2k_*}}{2}\varphi_* + \frac{x_{k_*+k_{**}} + x_{k_*-k_{**}}}{2}\varphi_{**}.$$

Nous procédons de la même façon, pour établir (4.62). En effet, la multiplication de (4.56) avec φ_* donne

$$\begin{aligned} \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_* &= (\alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}) \cdot \left(\frac{x_{2k_*}}{\alpha} \varphi_{2k_*} + \frac{x_{k_*+k_{**}}}{2\alpha} \varphi_{k_*+k_{**}} + \frac{x_{k_*-k_{**}}}{2\alpha} \varphi_{k_*-k_{**}} \right) \\ &= \frac{x_{2k_*}}{2} (\varphi_{3k_*} + \varphi_*) + \frac{x_{k_*+k_{**}}}{4} (\varphi_{2k_*+k_{**}} + \varphi_{**}) \\ &\quad + \frac{x_{k_*-k_{**}}}{2} (\varphi_{2k_*-k_{**}} + \varphi_{**}) + \frac{\beta x_{2k_{**}}}{2\alpha} (\varphi_{2k_*+k_{**}} + \varphi_{2k_*-k_{**}}) \\ &\quad + \frac{\beta x_{k_*+k_{**}}}{4\alpha} (\varphi_{k_*+2k_{**}} + \varphi_*) + \frac{\beta x_{k_*-k_{**}}}{4\alpha} (\varphi_{k_*-2k_{**}} + \varphi_*). \end{aligned}$$

L'application de la projection P donne (4.62). Ceci achève la preuve de cette proposition car le reste des résultats s'obtient de façon analogue. \square

Les calculs établis dans les deux propositions précédentes seront utilisés dans les lemmes qui vont précéder le résultat principal.

4.3.2 Résultat principal de stabilité linéaire

Ici, il est question de donner le résultat principal de ce chapitre. Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 4.3.1

Soient $k_* = k_{**} + 1$, $\epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_*-1}}$ satisfaisant (4.8)-(4.10) et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ vérifiant (4.24). Si $k_* \neq 2k_{**}$ et $k_* \neq 3k_{**}$ alors l'opérateur $K(y)$ est développable à l'ordre 2, comme suit,

$$K(y) = y^2 K_2 + \mathcal{O}(y^3) \quad \forall y \in (-\tau, \tau) \quad (4.65)$$

où

$$K_2 = \frac{1}{2} \ddot{K}(0) \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*)) \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

est sa représentation matricielle dans $KerL(\cdot, \delta_*)$. Ici, les coefficients a_{11} , a_{12} , a_{21} et a_{22} sont donnés par ;

$$a_{12} = a_{21} = \alpha\beta \left[6 + f''(M_*)^2 \left(-\frac{1}{\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{1}{\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \right], \quad (4.67)$$

$$\begin{aligned} a_{11} = \frac{3}{2} \alpha^2 + 3 + f''(M_*)^2 \left(-\frac{3\alpha^2}{4\mu_{2k_*}} - \frac{1-\alpha^2}{2\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{1-\alpha^2}{2\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ + \frac{2\ddot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*} (p + \sqrt{p}) + f''(M_*) \ddot{M}(0), \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\begin{aligned} a_{22} = -\frac{3}{2} \alpha^2 + \frac{9}{2} + f''(M_*)^2 \left(-\frac{3(1-\alpha^2)}{4\mu_{2k_{**}}} - \frac{\alpha^2}{2\mu_{k_*+k_{**}}} - \frac{\alpha^2}{2\mu_{k_*-k_{**}}} \right) \\ + \frac{2\ddot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*} (p - \sqrt{p}) + f''(M_*) \ddot{M}(0). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Où, $\mu_j = (\epsilon_* \lambda_j - 1)^2 - p$, avec $j = 2k_*$, $k_* + k_{**}$, $k_* - k_{**}$, $2k_{**}$ et $\lambda_j = (j\pi)^2$.

Preuve. Nous rappelons que, pour $\varphi = y\varphi_0$

$$K(y) := D_\varphi \tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y)) \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*)) \quad (4.70)$$

et

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y)) = PF(y\varphi_0 + w(y\varphi_0, \delta), \delta(y)). \quad (4.71)$$

De fait, il résulte, par l'utilisation de la définition (4.25), que

$$\begin{aligned} K(0) &= D_\varphi \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \\ &= PD_v F(0, \delta_*)(I_{KerL(\cdot, \delta_*)} + D_\varphi w(0, \delta_*)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car

$$PD_v F(0, \delta_*)I_{KerL(\cdot, \delta_*)} = PL(\cdot, \delta_*)I_{KerL(\cdot, \delta_*)} \equiv 0$$

et $D_\varphi w(0, \delta_*) \equiv 0$ (cf. corollaire 3.3.1).

De même, la différenciation de $K(y)$ par rapport à y , en 0, donne,

$$\dot{K}(0) = 0. \quad (4.72)$$

En effet, avec $\varphi = y\varphi_0$ (voir (4.24)), on obtient

$$\begin{aligned} \dot{K}(y) |_{y=0} &= \frac{d}{dy} [PD_v F(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta))] |_{y=0} \\ &= PD_{vv}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)] |_{y=0} \\ &\quad + PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \dot{\delta}] |_{y=0} \\ &\quad + PD_v F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}] |_{y=0}. \end{aligned}$$

Comme $\dot{\delta}(0) = 0$ (cf. Proposition 3.3.2) et $D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), R(L(\cdot, \delta_*)))$, donc

$$\begin{aligned} \dot{K}(0) &= PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[I, \varphi_0] \\ &= f''(M_*)P(\varphi_0 I_{KerL(\cdot, \delta_*)} - \int_0^1 \varphi_0 I_{KerL(\cdot, \delta_*)} dx) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car selon les hypothèses ,

$$\varphi_0 \cdot \varphi_* = \frac{\alpha}{2}(1 + \varphi_{2k_*}) + \frac{\beta}{2}(\varphi_{k_*+k_{**}} + \varphi_{k_*-k_{**}}) \in R(L(\cdot, \delta_*)),$$

et de même

$$\varphi_0 \cdot \varphi_{**} = \frac{\beta}{2}(1 + \varphi_{2k_{**}}) + \frac{\alpha}{2}(\varphi_{k_*+k_{**}} + \varphi_{k_*-k_{**}}) \in R(L(\cdot, \delta_*)).$$

D'où (4.72).

Nous calculons maintenant $\dot{K}(0)$. En dérivant $\dot{K}(y)$ par rapport à y , on obtient,

$$\begin{aligned} \dot{K}(y) |_{y=0} &= \frac{d}{dy}(PD_{vv}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)]) |_{y=0} \\ &\quad + \frac{d}{dy}(PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \dot{\delta}]) |_{y=0} \\ &\quad + \frac{d}{dy}(PD_v F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}]) |_{y=0} \\ &:= Z_1(0) + Z_2(0) + Z_3(0). \end{aligned}$$

Nous cherchons, ensuite, à calculer les trois quantités précédemment définies.

Evaluation de $Z_1(0) = Z_1(y) |_{y=0}$

$$\begin{aligned} Z_1(y) &= \frac{d}{dy}(PD_{vv}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)]) \\ &= \frac{d}{dy}(PD_{vv}^2 F(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta))[\varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)] \\ &\quad + PD_{vv}^2 F(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta))\frac{d}{dy}[\varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)]) \\ &= PD_{vvv}^3 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y), \\ &\quad \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)] \\ &\quad + PD_{vv\delta}^3 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y), \dot{\delta}] \\ &\quad + PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}, \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)] \\ &\quad + PD_{vv}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \\ &\quad D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0\dot{\delta} + D_{\delta\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}\varphi_0 + D_{\delta\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}\dot{\delta} + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}], \end{aligned}$$

comme $w(0, \delta) = 0 \quad \forall \delta$ (voir (3.44) Chapitre 3) et $\dot{\delta}(0) = 0$ (voir Proposition 3.3.2), alors d'après le Corollaire 3.3.1, $(D_\varphi w(0, \delta_*)\varphi_0 = 0)$, il vient que

$$\begin{aligned} Z_1(0) &= PD_{vvv}^3 F(0, \delta_*)[I, \varphi_0, \varphi_0] + PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[D_{\varphi\varphi} w(0, \delta_*)\varphi_0, \varphi_0] \\ &\quad + PD_{v\delta}^2 F(0, \delta_*)[I, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0] \\ &= f'''(M_*)P(\varphi_0^2 \cdot I - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot Idx) + f''(M_*)P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 dx) \\ &\quad + f''(M_*)P(I \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 - \int_0^1 I \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 dx). \end{aligned}$$

Evaluation de $Z_2(0) = Z_2(y) |_{y=0}$

$$\begin{aligned} Z_2(y) &= \frac{d}{dy}(PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \dot{\delta}(y)]) \\ &= \frac{d}{dy}(PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta))\dot{\delta}(y) \\ &\quad + PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta))\frac{d}{dy}\dot{\delta}(y)). \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment et en se rappelant que $\delta = \begin{pmatrix} \epsilon \\ M \end{pmatrix}$, on trouve que

$$\begin{aligned}
 Z_2(0) &= PD_{v\delta}^2 F(0, \delta_*)[I, \ddot{\delta}] \\
 &= [PD_{v\epsilon}^2 F(0, \delta_*), PD_{vM}^2 F(0, \delta_*)] \begin{pmatrix} \ddot{\epsilon}(0) \\ \ddot{M}(0) \end{pmatrix} \\
 &= \left[P(2\epsilon_* \frac{d^4}{dx^4} + 2\frac{d^2}{dx^2}), f''(M_*)P \right] \begin{pmatrix} \ddot{\epsilon}(0) \\ \ddot{M}(0) \end{pmatrix} \\
 &= P(2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_* \frac{d^4}{dx^4} + 2\ddot{\epsilon}(0)\frac{d^2}{dx^2}) + \ddot{M}(0)f''(M_*)P.
 \end{aligned}$$

Evaluation de $Z_3(0) = Z_3(y) |_{y=0}$

$$\begin{aligned}
 Z_3(y) &= \frac{d}{dy}(PD_v F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}]) \\
 &= PD_{vv}^2 F(v, \delta)[\varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)]\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y), D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}] \\
 &\quad + PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}, \dot{\delta}] \\
 &\quad + PD_v F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w(\varphi, \delta)\varphi_0\varphi_0 + D_{\varphi\varphi\delta}^3 w(\varphi, \delta)\varphi_0\dot{\delta} \\
 &\quad + D_{\varphi\varphi\delta}^3 w(\varphi, \delta)\varphi_0\dot{\delta} + D_{\varphi\delta\delta}^3 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}\dot{\delta} + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\ddot{\delta}(y)].
 \end{aligned}$$

En prenant $y = 0$, il vient que

$$\begin{aligned}
 Z_3(0) &= PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[\varphi_0, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0] + PL(\cdot, \delta_*)[D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(0, \delta_*)\ddot{\delta}(0)] \\
 &= PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[\varphi_0, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0] \\
 &= f''(M_*)P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 dx)
 \end{aligned}$$

car

$$D_{\varphi\varphi\varphi}^3 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(0, \delta_*)\ddot{\delta}(0) \in R(L(\cdot, \delta_*)).$$

En regroupant les calculs de $Z_1(0)$, $Z_2(0)$ et $Z_3(0)$, il résulte que

$$\begin{aligned}
\ddot{K}(0) &= PD_{vvv}^3 F(0, \delta_*)[I, \varphi_0, \varphi_0] + 2PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0, \varphi_0] \\
&\quad + PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[I, D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0] + PD_{v\delta}^2 F(0, \delta_*)[I, \ddot{\delta}(0)] \\
&= f'''(M_*)P(\varphi_0^2 \cdot I - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot I dx) + 2f''(M_*)P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0 dx) \\
&\quad + f''(M_*)P(I \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 - \int_0^1 I \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 dx) \\
&\quad + P(2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_* \frac{d^4}{dx^4} + 2\ddot{\epsilon}(0) \frac{d^2}{dx^2}) + \ddot{M}(0)f''(M_*)P.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Puisque $K(0) = 0$ et $\dot{K}(0) = 0$, on conclut que, pour y proche de 0, l'opérateur K est développable comme suite

$$K(y) = \frac{y^2}{2}\ddot{K}(0) + \mathcal{O}(y^3)$$

et pour finir, on pose

$$K_2 = \frac{1}{2}\ddot{K}(0) \quad \text{et} \quad A_2 \quad \text{sa représentation matricielle dans la base } e_{KerL(\cdot, \delta_*)} \tag{4.74}$$

Ce qui permet de conclure sur (4.65). Il reste, maintenant, à calculer les coefficients de A_2 . Pour ce faire, il suffit de calculer les images de φ_* et φ_{**} par

$$\ddot{K}(0) \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*))$$

dans la base $e_{KerL(\cdot, \delta_*)}$. En effet, par l'utilisation de (4.73), on obtient

$$\begin{aligned}
\ddot{K}(0)\varphi_* &= f'''(M_*)P[\varphi_0^2 \cdot \varphi_* - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot \varphi_*] \\
&\quad + 2f''(M_*)P[\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_* - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_*] \\
&\quad + f''(M_*)P[\varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0 - \int_0^1 \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*)\varphi_0\varphi_0] \\
&\quad + P(2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_* \frac{d^4 \varphi_*}{dx^4} + 2\ddot{\epsilon}(0) \frac{d^2 \varphi_*}{dx^2} + \ddot{M}(0)f''(M_*)\varphi_*). \\
&= 6\Theta_1 + 2f''(M_*)\Theta_5 + f''(M_*)\Theta_3 + P(2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_*\varphi_*^{(4)} + 2\ddot{\epsilon}(0)\varphi_*^{(2)} + \ddot{M}(0)f''(M_*)\varphi_*),
\end{aligned}$$

où Θ_1 , Θ_3 et Θ_5 sont données par la Proposition 4.3.2 et $f'''(M_*) = 6$ (voir (4.1)). En plus, selon les hypothèses (4.8)-(4.10), on a

$$\begin{aligned}
P(2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_*\varphi_*^{(4)} + 2\ddot{\epsilon}(0)\varphi_*^{(2)} + \ddot{M}(0)f''(M_*)\varphi_*) &= \left[2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_*\lambda_*^2 - 2\ddot{\epsilon}(0)\lambda_* + \ddot{M}(0)f''(M_*) \right] \varphi_* \\
&= \left[2\ddot{\epsilon}(0) \frac{\epsilon_*^2 \lambda_*^2 - \epsilon_* \lambda_*}{\epsilon_*} + \ddot{M}(0)f''(M_*) \right] \varphi_* \\
&= \left[\frac{2\ddot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*} (p + \sqrt{p}) + \ddot{M}(0)f''(M_*) \right] \varphi_*.
\end{aligned}$$

Alors, en tenons compte de l'hypothèse (4.24) (c'est-à-dire $\beta^2 = 1 - \alpha^2$) et en regroupant les coordonnées de chaque vecteur φ_* et φ_{**} on trouve que

$$\ddot{K}(0)\varphi_* = a_{11}\varphi_* + a_{21}\varphi_{**}. \quad (4.75)$$

De la même manière, on montre que

$$\ddot{K}(0)\varphi_{**} = a_{12}\varphi_* + a_{22}\varphi_{**}, \quad (4.76)$$

à la seule différence que

$$P(2\ddot{\epsilon}(0)\epsilon_*\varphi_{**}^{(4)} + 2\ddot{\epsilon}(0)\varphi_{**}^{(2)} + \ddot{M}(0)f''(M_*)\varphi_{**}) = \left[\frac{2\ddot{\epsilon}(0)}{\epsilon_*}(p - \sqrt{p}) + \ddot{M}(0)f''(M_*) \right] \varphi_{**}.$$

Ici a_{11} , a_{12} , a_{21} et a_{22} sont données par (4.67)-(4.69). Cela achève la preuve du lemme. \square

Remarque 4.3.1

Puisque $\sqrt{p} = \frac{x-1}{x+1}$ (voir (4.12)), alors les coefficients de la matrice A_2 peuvent, également, être exprimés en fonction de x comme suit,

$$a_{11} = \frac{3}{2}\alpha^2 + 3 + f''(M_*)^2 \frac{(x+1)^2}{16x(4x-1)(x-4)} [-(21x-4)\alpha^2 + 20x] + \frac{4x(x-1)\ddot{\epsilon}(0)}{(x+1)^2\epsilon_*} + f''(M_*)\ddot{M}(0), \quad (4.77)$$

$$a_{22} = -\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{9}{2} + f''(M_*)^2 \frac{(x+1)^2}{16(4x-1)(x-4)} [(-4x+21)\alpha^2 + 4x-1] - \frac{4(x-1)\ddot{\epsilon}(0)}{(x+1)^2\epsilon_*} + f''(M_*)\ddot{M}(0), \quad (4.78)$$

et

$$a_{12} = a_{21} = \alpha\beta \left[6 + f''(M_*)^2 \frac{5(x+1)^2}{2(4x-1)(x-4)} \right]. \quad (4.79)$$

Ce sont ces dernières formes qui seront utilisées dans la suite.

Le lemme qui va suivre traite les valeurs propres de A_2 .

Lemme 4.3.2

Sous les hypothèses du Lemme 4.3.1, le spectre de la matrice $A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ est

donné par

$$\mu_1 = \frac{1}{4} \left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \right), \quad (4.80)$$

et

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \right). \quad (4.81)$$

Preuve. La résolution de l'équation caractéristique de A_2 ci-dessous,

$$\det(A_2 - \mu I_{\text{Ker}L(\cdot, \delta_*)}) = \mu^2 - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\mu + \frac{1}{4}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \quad (4.82)$$

donne les solutions suivantes

$$\mu_1 = \frac{1}{4} \left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \right),$$

et

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \right).$$

D'où (4.80) et (4.81). □

Les deux lemmes précédemment énoncés montrent que les hypothèses (4.8)-(4.10) sont suffisantes pour appliquer le résultat de la stabilité réduite donné par le Théorème 4.2.1.

Théorème 4.3.1 (Stabilité réduite de la solution bifurquante)

Soit $k_* = k_{**} + 1$ et $\epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_*-1}}$. Sous les hypothèses du Lemme 4.3.1, on suppose que

$$\mu_2 \neq 0, \quad \mu_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 \neq \mu_2.$$

Alors la stabilité (ou l'instabilité) de la solution $v(y)$ bifurquant du point $(0, (\epsilon_*, M_*))$, est donnée par le signe des valeurs propres perturbées,

$$\{\mu_1 y^2 + \mathcal{O}(y^3) \mid y \in (-\tau_1, \tau_1)\} \tag{4.83}$$

et

$$\{\mu_2 y^2 + \mathcal{O}(y^3) \mid y \in (-\tau_2, \tau_2)\} \tag{4.84}$$

telle que

$$g(y, \mu(y)) = \det(K(y) - \mu(y)I_{KERL(\cdot, \delta_*)}) = 0, \quad \text{avec} \quad \mu(y) \quad \text{valeur propre de} \quad K(y). \tag{4.85}$$

Ici μ_1 et μ_2 sont les valeurs de A_2 données par (4.80) et (4.81).

Preuve. La première assertion est donnée par le Théorème 4.2.1. En effet, sous les hypothèses du Lemme 4.2.1, l'opérateur $K(y)$ est développable au voisinage de $y = 0$ comme suit

$$K(y) = y^2 K_2 + \mathcal{O}(y^3) \quad \forall y \in (-\tau, \tau) \tag{4.86}$$

où

$$K_2 = \frac{1}{2} \ddot{K}(0) \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4.87}$$

sa représentation matricielle de la base $e_{KERL(\cdot, \delta_*)}$. Et comme nous avons supposé que $\mu_1 \neq 0$ et $\mu_2 \neq 0$, alors d'après le Lemme 4.3.2, 0 n'est pas valeur propre de A_2 (ou de l'application linéaire K_2). Et par conséquent, le théorème 4.2.1 nous permet de conclure que, la stabilité (ou l'instabilité) de la solution bifurquante $v(y) = y\varphi_0 + w(y\varphi_0, \delta(y))$ est donnée, à des ordres petits de y , par les valeurs propres de $K(y)$ qu'il nous reste à calculer. Pour cela, nous rappelons que le calcul des valeurs propres de $K(y)$ revient à chercher les solutions de l'équation

$$g(y, \mu) = \det(K(y) - \mu I_{KERL(\cdot, \delta_*)}) = 0, \tag{4.88}$$

or par l'utilisation de (4.86), il vient que les solutions de (4.88) sont encore données par

$$g(y, \mu) = \det(y^2 K_2 - \mu I_{KERL(\cdot, \delta_*)} + \mathcal{O}(y^3)) = 0. \tag{4.89}$$

Par suite, si on pose M_1 , la représentation matricielle de l'opérateur à l'intérieur de (4.89) dans $KerL(\cdot, \delta_*)$, on a

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}y^2a_{11} - \mu + \mathcal{O}(y^3) & \frac{1}{2}y^2a_{12} + \mathcal{O}(y^3) \\ \frac{1}{2}y^2a_{21} + \mathcal{O}(y^3) & \frac{1}{2}y^2a_{22} - \mu + \mathcal{O}(y^3) \end{pmatrix}. \quad (4.90)$$

Donc les solutions de (4.88) sont finalement données par

$$g(y, \mu) = \mu^2 - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})y^2\mu + \frac{1}{4}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)y^4 + R(y, \mu) = 0 \quad (4.91)$$

où

$$R(y, \mu) = \mu \mathcal{O}(y^3) + \mathcal{O}(y^5). \quad (4.92)$$

Grâce au polygone de Newton (cf. Chapitre 1) et au fait que $g(0, 0) = 0$, nous faisons le changement de variable suivant,

$$\mu = y^2\tilde{\mu} \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathbb{R}. \quad (4.93)$$

Ainsi, (4.91) devient,

$$g(y, \mu) = y^4\tilde{g}(y, \tilde{\mu}) = 0, \quad (4.94)$$

où \tilde{g} est donnée par

$$\tilde{g}(y, \tilde{\mu}) = \tilde{\mu}^2 - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})\tilde{\mu} + \frac{1}{4}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + R_1(y, \tilde{\mu}) \quad (4.95)$$

$$= (\tilde{\mu} - \mu_1)(\tilde{\mu} - \mu_2) + R_1(y, \tilde{\mu}), \quad (4.96)$$

et

$$R_1(y, \tilde{\mu}) = \tilde{\mu} \mathcal{O}(y) + \mathcal{O}(y). \quad (4.97)$$

De ce fait, il s'ensuit que les solutions non triviales de (4.91) sont obtenues par résolution de l'équation

$$\tilde{g}(y, \tilde{\mu}) = 0. \quad (4.98)$$

D'autre part, par (4.97), on trouve que

$$R_1(0, \mu_1) = 0 \quad \text{et} \quad R_1(0, \mu_2) = 0. \quad (4.99)$$

D'où $(0, \mu_1)$ (ou $(0, \mu_2)$) est une solution triviale du problème (4.98). De plus, comme

$$D_{\tilde{\mu}}\tilde{g}(y, \tilde{\mu})|_{(y, \tilde{\mu})=(0, \mu_1)} = \mu_1 - \mu_2, \quad (4.100)$$

est une quantité non nulle car $\mu_1 \neq \mu_2$. Il résulte alors que (par utilisation du théorème des fonctions implicites)

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(y) \quad \forall y \in (-\tau_1, \tau_1) \quad \text{et} \quad \tilde{\mu}(0) = \mu_1. \quad (4.101)$$

En substituant ce résultat, dans (4.93), on conclut que

$$\mu = \mu(y) = y^2\tilde{\mu}(y) \quad \forall y \in (-\tau_1, \tau_1) \quad \text{et} \quad \mu(0) = 0. \quad (4.102)$$

Par ailleurs, la fonction $\tilde{\mu}$ est au moins de classe $C^1(-\tau_1, \tau_1)$ (même régularité que \tilde{g} , d'après le théorème des fonctions implicites), alors elle peut être développable à l'ordre 1, comme suit,

$$\tilde{\mu}(y) = \mu_1 + \mathcal{O}(y). \quad (4.103)$$

En remplaçant, en retour, (4.103) dans (4.102), on trouve que

$$\mu(y) = \mu_1 y^2 + \mathcal{O}(y^3). \quad (4.104)$$

D'où le résultat (4.83). Le résultat (4.84) est obtenu en inversant les rôles de μ_1 et μ_2 dans (4.101). Ce qui achève la preuve du théorème. \square

Remarque 4.3.2

1. τ_1 et τ_2 donnés dans le théorème précédent, sont nécessairement plus petits que τ du Théorème 3.3.1.
2. Pour connaître la stabilité linéaire de $v(y)$, il est nécessaire d'étudier les signes de μ_1 et μ_2 .

Dans la suite, nous poserons

$$Q(x, M_*^2, \alpha) := \mu_1 \cdot \mu_2 \quad (4.105)$$

où $x = \theta^2 = \left(\frac{k_*}{k_{**}}\right)^2$, M_* et α sont respectivement donnés par (4.11), (4.9) et (4.24).

Ainsi, le but de la section qui va suivre est d'effectuer une étude de la fonction $Q(x, M_*^2, \cdot)$ précédemment définie, pour $\alpha \in [-1, 1]$. En d'autres termes, nous allons tenter de déterminer les valeurs des paramètres pour lesquels les solutions bifurquantes du problème (4.4), données par le Théorème 3.3.1, sont stables (ou instables).

4.4 Stabilité des solutions bifurquantes

Comme on peut le voir, dans le Théorème 4.3.1, la stabilité (ou l'instabilité) linéaire des solutions bifurquantes $v(y)$ du problème (4.4), données par le Théorème 3.3.1, dépend des signes des valeurs propres μ_1 et μ_2 de A_2 (ou de l'opérateur K_2 , voir Lemme 4.3.2). Cependant, la complexité des coefficients de la matrice A_2 , nous dispense de nous attaquer directement aux études des signes de ses valeurs propres. Toutefois, pour contourner cette difficulté, nous avons choisi d'étudier son déterminant $Q(x, M_*^2, \cdot)$, en fonction de α , pour le couple (x, M_*^2) fixé dans $]1, 4[\times]0, +\infty[$. Cette étude non suffisante dans le cas de la stabilité est exhaustive pour conclure dans le cas de l'instabilité.

En utilisant les définitions de μ_1 et μ_2 , données dans le Lemme 4.3.2, il vient que le déterminant Q défini en (4.105), peut encore être vu comme

$$Q(x, M_*^2, \alpha) = \frac{1}{4} (a_{11}a_{22} - a_{12}^2), \quad (4.106)$$

où a_{11} , a_{22} et a_{12} sont donnés par (voir la Remarque 4.3.1)

$$a_{11} = \frac{3}{2}\alpha^2 + 3 + f''(M_*)^2 \frac{(x+1)^2}{16x(4x-1)(x-4)} [-(21x-4)\alpha^2 + 20x] + \frac{4x(x-1)\check{\epsilon}(0)}{(x+1)^2\epsilon_*} + f''(M_*)\check{M}(0), \quad (4.107)$$

$$a_{22} = -\frac{3}{2}\alpha^2 + \frac{9}{2} + f''(M_*)^2 \frac{(x+1)^2}{16(4x-1)(x-4)} [(-4x+21)\alpha^2 + (4x-1)] - \frac{4(x-1)\check{\epsilon}(0)}{(x+1)^2\epsilon_*} + f''(M_*)\check{M}(0), \quad (4.108)$$

et

$$a_{12} = a_{21} = \alpha\beta \left[6 + f''(M_*)^2 \frac{5(x+1)^2}{2(4x-1)(x-4)} \right]. \quad (4.109)$$

D'autre part, comme (voir Théorème 3.3.1)

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{3\epsilon_*}{8\sqrt{p}} (A\alpha^2 + B), \quad (4.110)$$

et

$$\ddot{M}(0) = \frac{1}{8M_*} (C\alpha^2 + D), \quad (4.111)$$

où A, B, C et D sont données par

$$\begin{cases} A := A(x, M_*^2) = 2 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (-2x^2 + 61x - 2)}{x(4x-1)(x-4)}, \\ B := B(x, M_*^2) = -1 + M_*^2 \frac{(x+1)^2 (4x-61)}{2(4x-1)(x-4)}, \end{cases} \quad (4.112)$$

et

$$\begin{cases} C := C(x, M_*^2) = -2 \frac{x-1}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(x-1)(4x^2 - 57x + 4)}{x(4x-1)(x-4)}, \\ D := D(x, M_*^2) = -2 \frac{x+2}{x+1} + M_*^2 \frac{(x+1)(-4x^2 + x - 60)}{(4x-1)(x-4)}, \end{cases} \quad (4.113)$$

alors nous pouvons réécrire les coefficients a_{11} , a_{22} et a_{12} sous les formes suivantes :

$$a_{11} = \Gamma_1 \alpha^2, \quad (4.114)$$

$$a_{22} = \Gamma_2 (\alpha^2 - 1), \quad (4.115)$$

et

$$a_{12} = \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \Gamma_3 \quad (4.116)$$

avec

$$\Gamma_1(x, M_*^2) = 3 - 3M_*^2 \frac{(x+1)^2}{2x(4x-1)}, \quad (4.117)$$

$$\Gamma_2(x, M_*^2) = -3 - 3M_*^2 \frac{(x+1)^2}{2(x-4)}, \quad (4.118)$$

$$\Gamma_3(x, M_*^2) = 6 + M_*^2 \frac{90(x+1)^2}{(4x-1)(x-4)}. \quad (4.119)$$

De ce fait, on a

$$Q(x, M_*^2, \alpha) := \frac{1}{4} (\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_3^2) \alpha^2 (\alpha^2 - 1). \quad (4.120)$$

Autrement dit il s'agit d'étudier pour (x, M_*^2) fixé dans $]1, 4[\times]0, +\infty[$ la fonction

$$Q(x, M_*^2, \cdot) :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha \mapsto Q(x, M_*^2, \alpha).$$

Afin de simplifier les notations, dans la suite, nous considérerons M^2 au lieu de M_*^2 et on se limitera à prendre x dans $]1, 4[$ et α dans $]0, 1[$ car $Q(x, M^2, -\alpha) = Q(x, M^2, \alpha)$

(autrement dit, $Q(x, M^2, \cdot)$ est paire). On signale que le choix de l'intervalle de x n'est pas sans intérêt, car d'un point de vue pratique, c'est dans ce dernier intervalle que l'on a le plus de change d'obtenir une solution triviale stable (voir Proposition 4.1.2). Nous nous intéressons désormais à l'étude de la fonction $Q(x, M^2, \cdot)$ définie par (4.120). On pose, pour plus tard

$$\sigma := \sigma(x, M^2) = \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_3^2, \quad (4.121)$$

et on donne un lemme relatif à l'étude du signe de σ qui sera d'une grande utilité dans la suite.

Lemme 4.4.1

Soient $(x, M^2) \in]1, 4[\times]0, +\infty[$ et $J_1, J_2 :]1, 4[\rightarrow]0, +\infty[$ deux fonctions définies par

$$J_1(x) = \frac{2x(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{-b_1(x) + \sqrt{h(x)}}{b_2(x)} \right] \quad (4.122)$$

et

$$J_2(x) = \frac{2x(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{-b_1(x) - \sqrt{h(x)}}{b_2(x)} \right] \quad (4.123)$$

où b_1, b_2 et h sont définies en (4.126)-(4.128).

1. Si $M^2 \in]J_1(x), J_2(x)[$ alors $\sigma < 0$.
2. Si $M^2 \notin]J_1(x), J_2(x)[$ alors $\sigma > 0$.

Preuve. En effet, pour tout x fixé dans $]1, 4[$, on va regarder $\sigma(x, \cdot)$ comme une fonction de la variable M^2 définie par

$$\sigma(x, M^2) = (\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_3^2)(x, M^2). \quad (4.124)$$

Après avoir remplacer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 par leurs expressions respectives, il vient que :

$$\sigma(x, M^2) = 9 \left[3 + \frac{(x+1)^2 b_1(x)}{x(4x-1)(x-4)} M^2 + \frac{(x+1)^4 b_2(x)}{4x^2(4x-1)^2(x-4)^2} M^4 \right]. \quad (4.125)$$

où $b_1, b_2, h :]1, 4[\rightarrow \mathbb{R}$, sont données par,

$$b_1(x) = -2x^2 + 121x - 2, \quad (4.126)$$

$$b_2(x) = x(4x^2 + 3583x + 4) \quad (4.127)$$

et

$$h(x) = b_1^2(x) - 3b_2(x) = 4(x^4 - 124x^3 + 975x^2 - 124x + 1) \quad (4.128)$$

On montre, sans difficulté (voir Proposition 3.4.2) que toutes les fonctions définies ci-dessus, sont positives sur $]1, 4[$. Ainsi, si nous regardons l'équation ci-dessous, en fonction de la variable M^2

$$\sigma(x, M^2) = 0, \quad \forall (x, M^2) \in]1, 4[\times]0, +\infty[, \quad (4.129)$$

il vient, au regard de la positivité de h , qu'il existe $J_1(x) \in \mathbb{R}$ et $J_2(x) \in \mathbb{R}$, données respectivement par (4.122) et (4.123), telles que $\sigma(x, \cdot)$ puisse s'écrire sous la forme

$$\sigma(x, M^2) = \frac{9(x+1)^4 b_2(x)}{4x^2(4x-1)^2(x-4)^2} (M^2 - J_1(x)) (M^2 - J_2(x)). \quad (4.130)$$

La conclusion vient du fait que $J_1(\cdot)$ et $J_2(\cdot)$ sont positives sur $]1, 4[$. En effet, par (4.122), on a

$$\begin{aligned} J_1(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2x(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{-b_1(x) + \sqrt{h(x)}}{b_2(x)} \right] > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-b_1(x) + \sqrt{h(x)}}{b_2(x)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{h(x)} < b_1(x) \quad \text{car } b_2(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow -3b_2(x) < 0 \quad \text{car } b_1(x) > 0, \end{aligned}$$

cela est vrai car b_2 est positive sur $]1, 4[$. Par conséquent, J_1 est positive sur $]1, 4[$. Et comme $J_2(x) > J_1(x)$, alors on en déduit que J_2 l'est aussi. D'où

- si $M^2 \in]J_1(x), J_2(x)[$ alors $\sigma(x, M^2) < 0$,
- si $M^2 \notin]J_1(x), J_2(x)[$ alors $\sigma(x, M^2) > 0$.

ce qui achève la preuve du lemme. □

D'où le théorème suivant.

Théorème 4.4.1 (Théorème du signe de Q)

Soit $x \in]1, 4[$, J_1 et J_2 les fonctions respectivement données par (4.122), (4.123) et $\alpha \in]0, 1[$.

1. si $M^2 \in]J_1(x), J_2(x)[$ alors $Q(x, M^2, \alpha) > 0$,
2. si $M^2 \notin]J_1(x), J_2(x)[$ alors $Q(x, M^2, \alpha) < 0$.

Preuve. Pour démontrer ce théorème, nous étudierons, en fonction de $\alpha \in]0, 1[$, le signe de la fonction $Q(x, M^2, \cdot)$ (voir (4.120)) que nous rappelons encore ici,

$$Q(x, M^2, \alpha) = \frac{1}{4} (\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_3^2) \alpha^2 (\alpha^2 - 1) \quad (4.131)$$

Dans un premier temps, on a le résultat suivant

$$Q(x, M^2, 0) = Q(x, M^2, 1) = 0. \quad (4.132)$$

En effet, ce résultat découle de la définition $Q(x, M^2, \cdot)$. Pour le reste de la preuve, il suffit de remarquer que

$$\text{sign} Q(x, M^2, \alpha) = -\text{sign} (\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_3^2) = -\text{Sign} \sigma. \quad (4.133)$$

Ainsi, grâce au Lemme 4.4.1, il vient que

1. si $M^2 \in]J_1(x), J_2(x)[$ alors $Q(x, M^2, \alpha) > 0, \quad \forall \alpha \in]0, 1[$,

2. si $M^2 \notin]J_1(x), J_2(x)[$ alors $Q(x, M^2, \alpha) < 0, \quad \forall \alpha \in]0, 1[$.

Ce qui achève la preuve du théorème. \square

Comme nous l'avons dit, dans l'introduction de cette section, l'étude du signe de Q n'est pas suffisante pour conclure dans le cas de la stabilité. Pour y parvenir, il est nécessaire de connaître le signe de μ_1 (ou de μ_2).

Soit $(x, M^2) \in]1, 4[\times]0, +\infty[$, on rappelle que

$$Q(x, M^2, \alpha) = \mu_1 \cdot \mu_2, \quad (4.134)$$

où μ_1 et μ_2 sont données par

$$\mu_1 = \frac{1}{4} \left[(\Gamma_1 + \Gamma_2)\alpha^2 - \Gamma_2 - \sqrt{((\Gamma_1 - \Gamma_2)\alpha^2 + \Gamma_2)^2 + 4\alpha^2(1 - \alpha^2)\Gamma_3^2} \right] \quad (4.135)$$

et

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \left[(\Gamma_1 + \Gamma_2)\alpha^2 - \Gamma_2 + \sqrt{((\Gamma_1 - \Gamma_2)\alpha^2 + \Gamma_2)^2 + 4\alpha^2(1 - \alpha^2)\Gamma_3^2} \right] \quad (4.136)$$

avec $\Gamma_{i,i=1,2,3}$ définies par (4.117), (4.118) et (4.119).

Une conséquence des définitions ci-dessus est que nous pouvons maintenant définir z_0 , Γ_{10} et Γ_{20} respectivement par

$$z_0 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad \text{car } \Gamma_1 + \Gamma_2 \neq 0, \quad (4.137)$$

et

$$\Gamma_{20}(x) = -\frac{2(x-4)}{(x+1)^2} \quad (\text{c'est la fonction d'annulation de } \Gamma_2). \quad (4.138)$$

On a la proposition suivante.

Proposition 4.4.1

Soient J_1 , J_2 et Γ_{20} les fonctions définies respectivement sur $]1, 4[$ par (4.122), (4.123) et (4.138). On a l'assertion suivante

$$J_1(x) < J_2(x) < \Gamma_{20}(x) \quad \forall x \in]1, 4[. \quad (4.139)$$

Preuve. Puisque selon le lemme 4.3.1, $J_1(x) < J_2(x) \quad \forall x \in]1, 4[$, alors nous allons juste montrer que

$$J_2(x) < \Gamma_{20}(x) \quad \forall x \in]1, 4[.$$

En effet, en utilisant les définitions (4.123) et (4.138) on obtient,

$$J_2(x) - \Gamma_{20}(x) = -\frac{2(4x-1)(x-4)}{(x+1)^2} \left[\frac{xb_1(x) + x\sqrt{h(x)}}{b_2(x)} - \frac{1}{4x-1} \right]$$

où b_1 , b_2 et h sont données par (4.126), (4.127) et (4.128). Ainsi,

$$J_2(x) - \Gamma_{20}(x) < 0 \Leftrightarrow x(4x-1)b_1(x) - b_2(x) < -x(4x-1)\sqrt{h(x)}, \quad \text{car } b_2(x) > 0.$$

Comme $x \mapsto -x(4x - 1)\sqrt{h(x)}$ est trivialement négative sur $]1, 4[$, alors il est nécessaire d'étudier la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x) = x(4x - 1)b_1(x) - b_2(x).$$

En utilisant les définition de b_1 et b_2 on trouve que

$$g(x) = -2x(4x^3 - 241x^2 + 1856x + 1), \quad (4.140)$$

et d'où on conclut que g est négative sur $]1, 4[$ car $x \mapsto 4x^3 - 241x^2 + 1856x + 1$ est positive sur $]1, 4[$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} J_2(x) - \Gamma_{20}(x) < 0 &\Leftrightarrow g(x)^2 - x^2(4x - 1)^2 h(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^3(4x^2 + 3583x + 4)(4x - 31)^2 > 0, \end{aligned}$$

cela est vrai $\forall x \in]1, 4[$. D'où le résultat (4.139). □

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de stabilité des solutions bifurquantes $v(y)$ en fonction des données du problème.

Théorème 4.4.2

Soit $k_* = k_{**} + 1$ et $\epsilon_* = \frac{2}{\lambda_{k_*} + \lambda_{k_* - 1}}$. On pose $x = \frac{k_{**} + 1}{k_*}$ et on suppose que

$$(\alpha^2, M^2) \neq \left(\frac{4x^2 - 31x}{4x^2 - 62x + 4}, -\frac{(4x - 1)(x - 4)}{15(x + 1)^2} \right).$$

1. si $M^2 < J_1(x)$ alors $\mu_1 < 0 < \mu_2$ et $v(y)$ est instable,
2. si $J_1(x) < M^2 < J_2(x)$ alors $\mu_2 > \mu_1 > 0$ et $v(y)$ est stable,
3. si $J_2(x) < M^2$ alors $\mu_1 < 0 < \mu_2$ et $v(y)$ est instable.

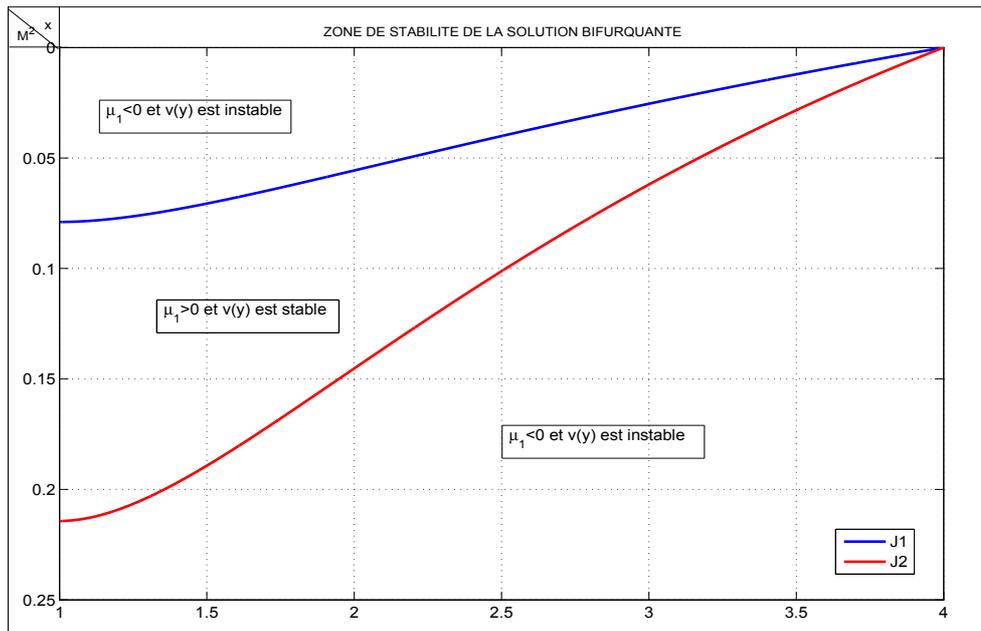


FIGURE 4.2 – Résumé graphique de la zone de stabilité de la solution bifurquante

Preuve. La preuve du Théorème 4.4.2 se limite à l'étude de la fonction z_0 donnée par (4.137). Car les signes de μ_1 et μ_2 dépendent de cette fonction. Néanmoins, on rappelle que l'hypothèse $(\alpha^2, M^2) \neq \left(\frac{4x^2 - 31x}{4x^2 - 62x + 4}, -\frac{(4x - 1)(x - 4)}{15(x + 1)^2} \right) \forall x \in]1, 4[$ est équivalente à l'hypothèse $\mu_1 \neq \mu_2$ sans laquelle le résultat de stabilité, donné par le Théorème 4.3.1 ne peut être prouvé.

Etude de Γ_2 pour $(x, M^2) \in]1, 4[\times]0, +\infty[$. On rappelle que

$$\Gamma_2(x, M^2) = -3 - 3M^2 \frac{(x + 1)^2}{2(x - 4)}. \quad (4.141)$$

D'où

$$\Gamma_2(x, M^2) = 0 \iff M^2 = \Gamma_{20}(x) = -\frac{2(x - 4)}{(x + 1)^2}. \quad (4.142)$$

Comme Γ_{20} est trivialement positive sur $]1, 4[$ alors,

- si $M^2 < \Gamma_{20}$ alors $\Gamma_2 < 0$,
- si $M^2 > \Gamma_{20}$ alors $\Gamma_2 > 0$.

Etude de $\Gamma_1 + \Gamma_2$ pour $(x, M^2) \in]1, 4[\times]0, +\infty[$. Des définitions (4.117) et (4.118) il vient que

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)(x, M^2) = -6M^2 \frac{(x + 1)^3(x - 1)}{x(4x - 1)(x - 4)}. \quad (4.143)$$

Donc

$$(\Gamma_1 + \Gamma_2)(x, M^2) > 0 \quad \forall (x, M^2) \in]1, 4[\times]0, +\infty[. \quad (4.144)$$

L'utilisation des définitions (4.135) et (4.136) nous permet de donner la conclusion partielle suivante

- si $M^2 < \Gamma_{20}(x)$ alors $z_0 < 0$ et $\mu_2 > 0$
- si $M^2 > \Gamma_{20}(x)$ alors $z_0 > 0$ et $v(y)$ est instable car d'après la proposition 4.4.1 et le Théorème 4.3.1, $Q(x, M^2, \alpha) = \mu_1\mu_2 < 0$.

Le premier cas donne que, pour tout $M^2 < \Gamma_{20}(x)$, alors

$$\text{Sign}\mu_1 = \text{Sign}Q(x, M^2, \alpha). \quad (4.145)$$

Et par suite, on a d'après le théorème 4.4.1,

1. si $M^2 < J_1(x)$ alors $\mu_1 < 0$ et $v(y)$ est instable,
2. si $J_1(x) < M^2 < J_2(x)$ alors $\mu_1 > 0$ et $v(y)$ est stable,
3. si $J_2(x) < M^2$ alors $\mu_1 < 0$ et $v(y)$ est instable.

Ce qui achève la preuve du théorème. □

4.4.1 Tests numériques

L'objectif de cette partie est d'illustrer, à l'aide des simulations numériques, la stabilité linéaire des solutions bifurquantes, énoncée dans le Théorème 4.4.2. Pour ce faire, nous nous donnerons quelques valeurs du paramètre M^2 fixé dans l'intervalle $]J_1(x), J_2(x)[$ (car, ici nous sommes juste intéressés par les valeurs permettant d'avoir les solutions bifurquantes stables) et $x \in]1, 4[$ (voir le Lemme 4.4.1). Ensuite, dans chaque cas, on formera, pour α fixé dans $]0, 1[$ la solution bifurquante

$$u_0(x) = M(y) + y(\alpha \cos(k_*\pi x) + \sqrt{1 - \alpha^2} \cos((k_* - 1)\pi x)) \quad \text{voir Théorème 3.3.1} \quad (4.146)$$

où

$$M(y) = M + \frac{1}{16M}(C(x, M^2)\alpha^2 + D(x, M^2))y^2$$

et

$$\epsilon(y) = \epsilon_* + \frac{3\epsilon_*}{16\sqrt{p}}(A(x, M^2)\alpha^2 + B(x, M^2))y^2$$

(voir (4.112) et (4.113) pour les définitions de A , B , C et D) et y sera prise proche de 0.

Pour finir, on calculera, grâce au programme Scilab utilisé dans [30], la solution du problème d'évolution suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \epsilon \partial_{xx}(\epsilon^2 \partial_{xxxx} u + 2\epsilon \partial_{xx} u + f(u)), & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ \partial_x u = \partial_{xxx} u = \partial_{xxxx} u = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 & \text{dans } L^2((0, 1)), \end{cases} \quad (4.147)$$

où la donnée initiale $u(0)$ est exactement la solution bifurquante formée en (4.146). Ainsi, si après un test numérique, d'environ 10^{-14} , la solution calculée, que l'on notera u_{num} (et qui sera de couleur bleue sur toutes les figures) reste suffisamment proche de u_0 (dont le profil sera de couleur noire), alors on pourra conclure que le résultat numérique est conforme au Théorème 4.4.2.

Dans la suite, les figures seront organisées de façon suivante : Pour x et M^2 fixés, nous regrouperons les données des paramètres et les tests numériques de chaque solution

calculée, dans un tableau de synthèse, lequel sera lui même accompagné des figures que l'on obtiendra. Plus précisément, nous avons choisi, de façon arbitraire, le couple (x, M^2) dans $\{\frac{9}{4}, \frac{81}{64}, \frac{121}{100}\} \times \{\frac{2}{25}, \frac{4}{25}, \frac{114}{625}\}$ et ensuite, nous avons construit les tableaux suivants en nous servant des résultats théoriques obtenus dans le Chapitre 3 et le Chapitre 4.

	α	$\mu_1(\alpha)$	y	$M(y)$	$\epsilon(y)$	Tests	Energies
fig 4.2	0.7	0.5	0.06	0.2820329315	$0.1558526421 \cdot 10^{-1}$	$4.233 \cdot 10^{-16}$	0.0259240
fig 4.4	0.3	0.125	0.06	0.2819362676	$0.1560010827 \cdot 10^{-1}$	$5.832 \cdot 10^{-16}$	0.0259049
fig 4.3	0.4	0.22	0.06	0.2819531837	$0.1559751056 \cdot 10^{-1}$	$7.311 \cdot 10^{-16}$	0.0259050
fig 4.5	0.9	0.2	0.06	0.2821102625	$0.1557338896 \cdot 10^{-1}$	$6.119 \cdot 10^{-16}$	0.0259389

TABLE 4.1 – Tableau de synthèse pour $x = \frac{9}{4}$, $M^2 = \frac{2}{25}$ et $r = -\frac{1639}{4225}$

	α	$\mu_1(\alpha)$	y	$M(y)$	$\epsilon(y)$	Tests	Energies
fig 4.7	0.8	0.4	0.06	0.3996419866	$0.1394765747 \cdot 10^{-2}$	$6.305 \cdot 10^{-17}$	0.0468046
fig 4.8	0.9	0.224	0.06	0.3996599949	$0.1391748303 \cdot 10^{-2}$	$5.880 \cdot 10^{-17}$	0.0468092
fig 4.6	0.5	0.314	0.06	0.3996006733	$0.1401688118 \cdot 10^{-2}$	$6.198 \cdot 10^{-17}$	0.0467934

TABLE 4.2 – Tableau de synthèse pour $x = \frac{81}{64}$, $M^2 = \frac{4}{25}$ et $r = -\frac{10381}{21025}$

	α	$\mu_1(\alpha)$	y	$M(y)$	$\epsilon(y)$	Tests	Energies
fig 4.9	0.4	0.14	0.06	0.4268506546	$0.9192277989 \cdot 10^{-3}$	$1.104 \cdot 10^{-16}$	0.0487265
fig 4.10	0.6	0.26	0.06	0.4268713030	$0.9192188101 \cdot 10^{-3}$	$8.249 \cdot 10^{-17}$	0.0487324
fig 4.11	0.5	0.2	0.06	0.4268599464	$0.9211774068 \cdot 10^{-3}$	$5.145 \cdot 10^{-17}$	0.0487292
fig 4.12	0.35	0.11	0.06	0.4268467829	$0.9234475983 \cdot 10^{-3}$	$5.561 \cdot 10^{-16}$	0.0487254

TABLE 4.3 – Tableau de synthèse pour $x = \frac{121}{100}$, $M^2 = \frac{114}{625}$ et $r = -\frac{16979247}{30525625}$

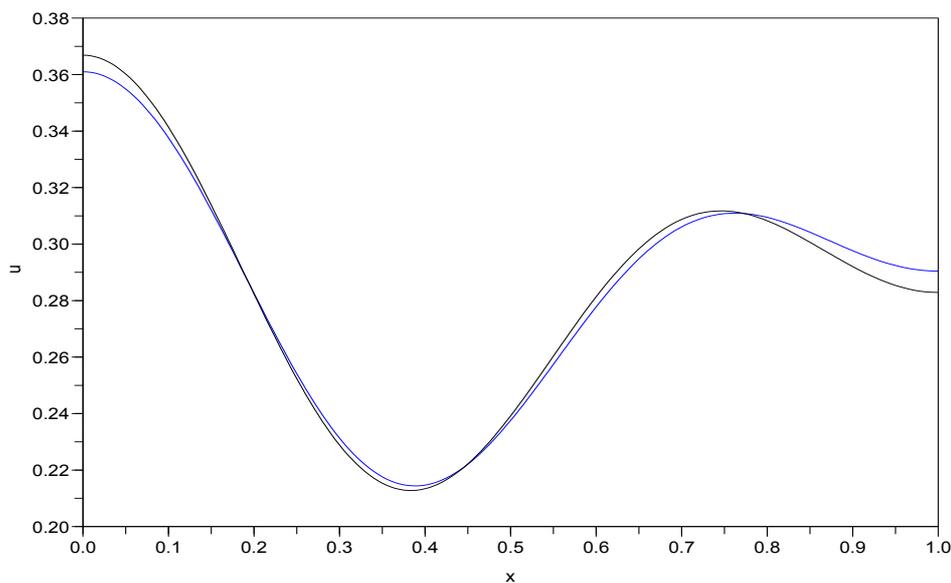


FIGURE 4.3 – Solution stable pour $x = \frac{9}{4}$ et $\alpha = 0.7$

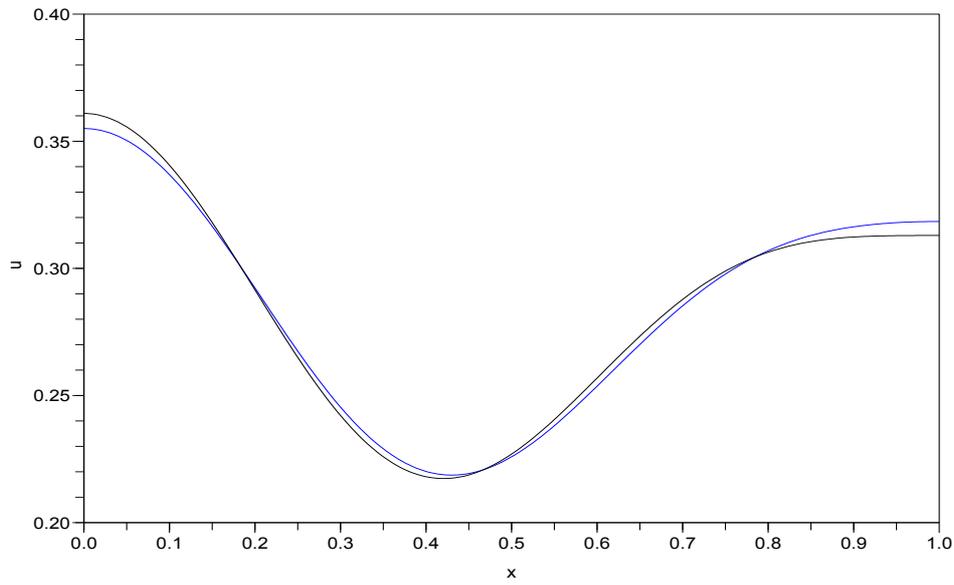


FIGURE 4.4 – Solution stable pour $x = \frac{9}{4}$ et $\alpha = 0.4$

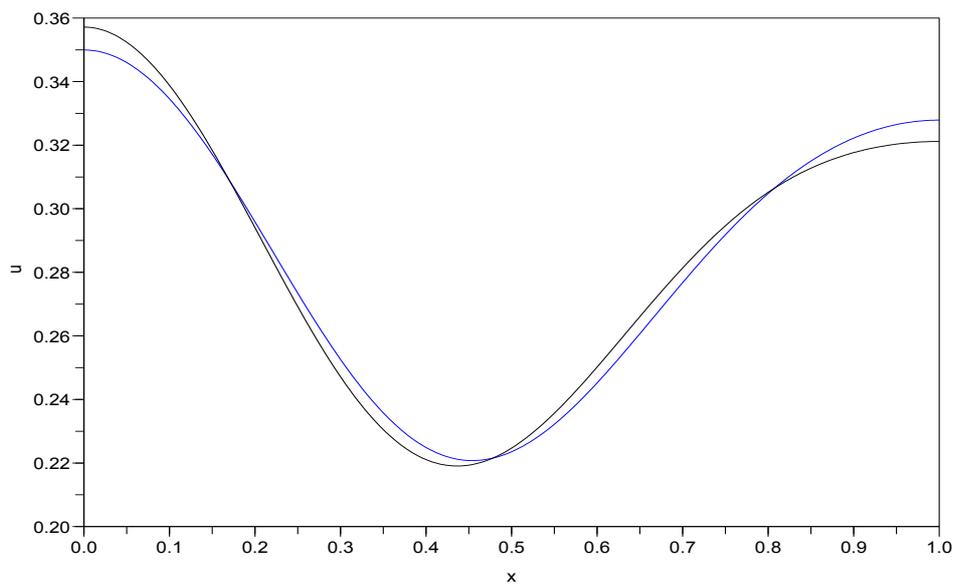


FIGURE 4.5 – Solution stable pour $x = \frac{9}{4}$ et $\alpha = 0.3$

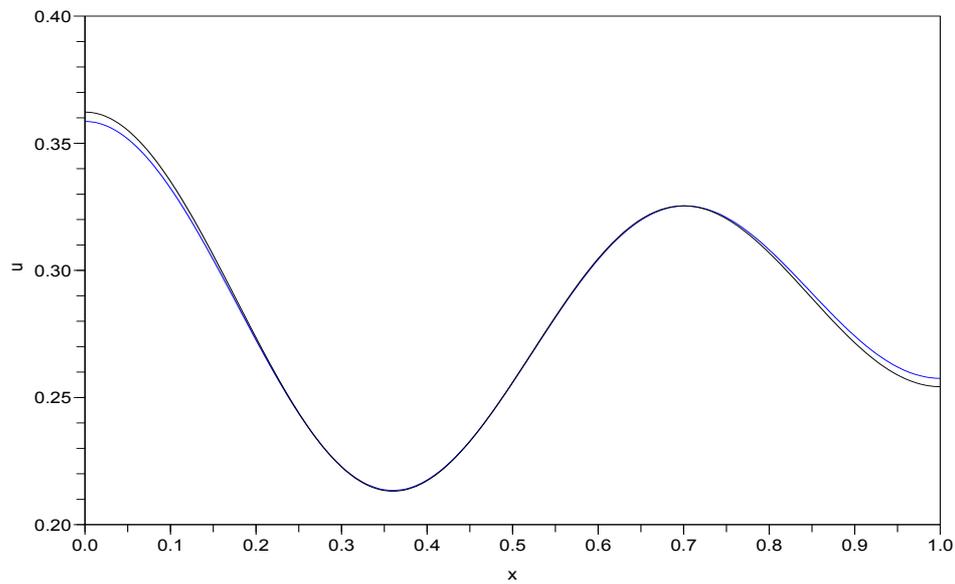


FIGURE 4.6 – Solution stable pour $x = \frac{9}{4}$ et $\alpha = 0.9$

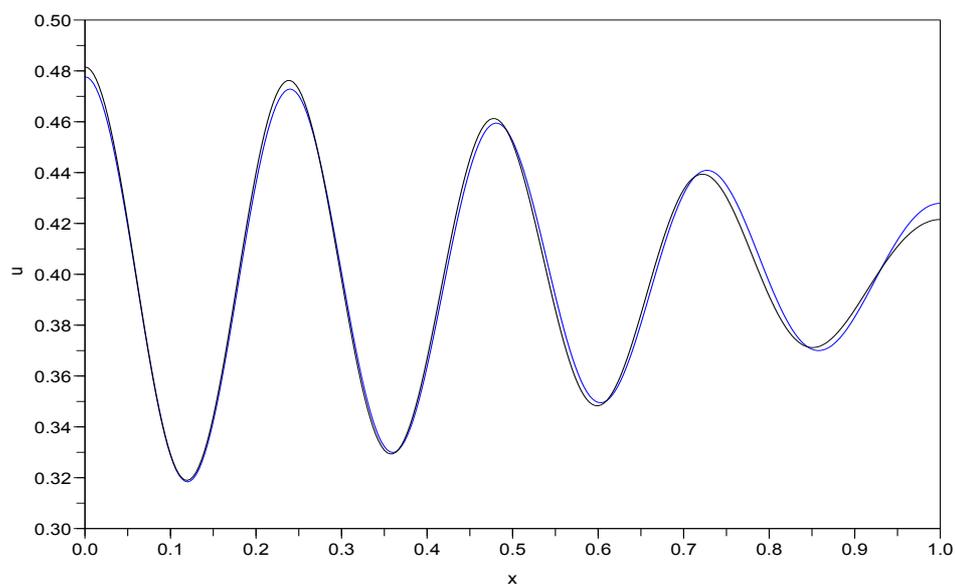


FIGURE 4.7 – Solution stable pour $x = \frac{81}{64}$ et $\alpha = 0.5$

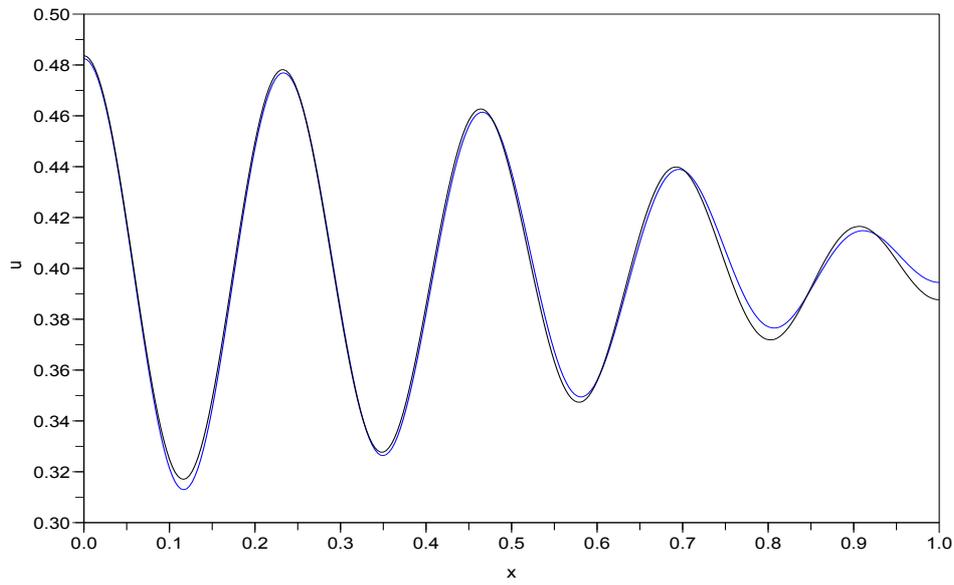


FIGURE 4.8 – Solution stable pour $x = \frac{81}{64}$ et $\alpha = 0.8$

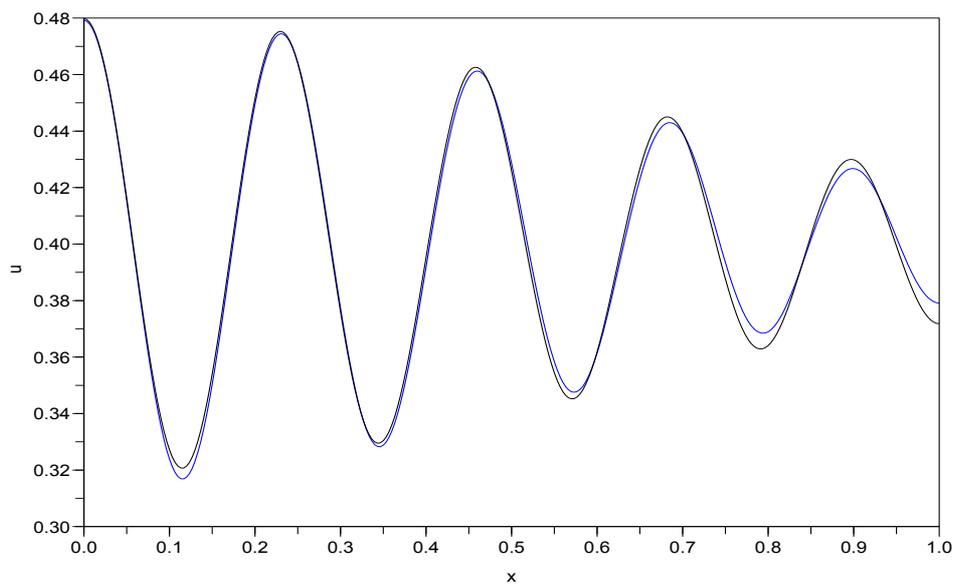


FIGURE 4.9 – Solution stable pour $x = \frac{81}{64}$ et $\alpha = 0.9$

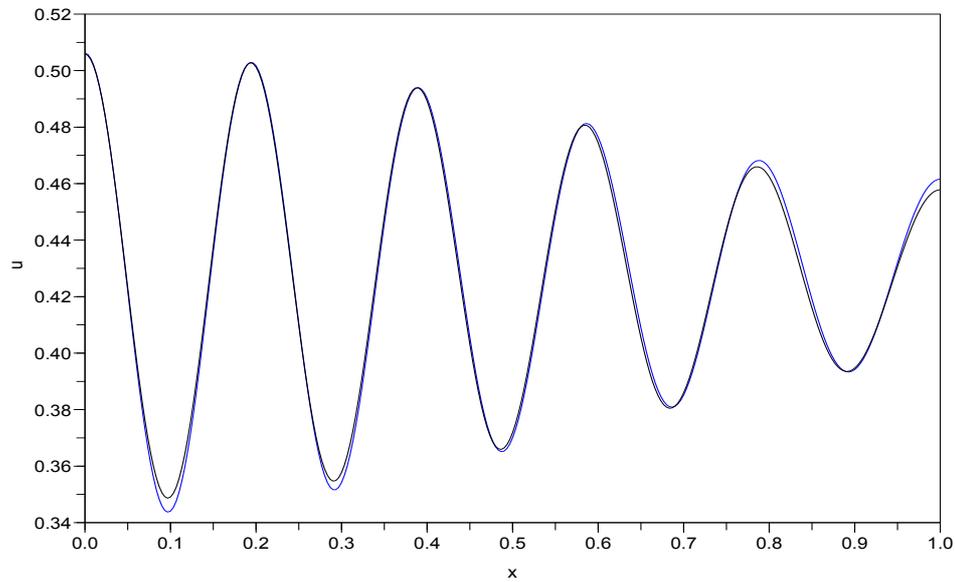


FIGURE 4.10 – solution stable pour $x = \frac{121}{100}$ et $\alpha = 0.4$

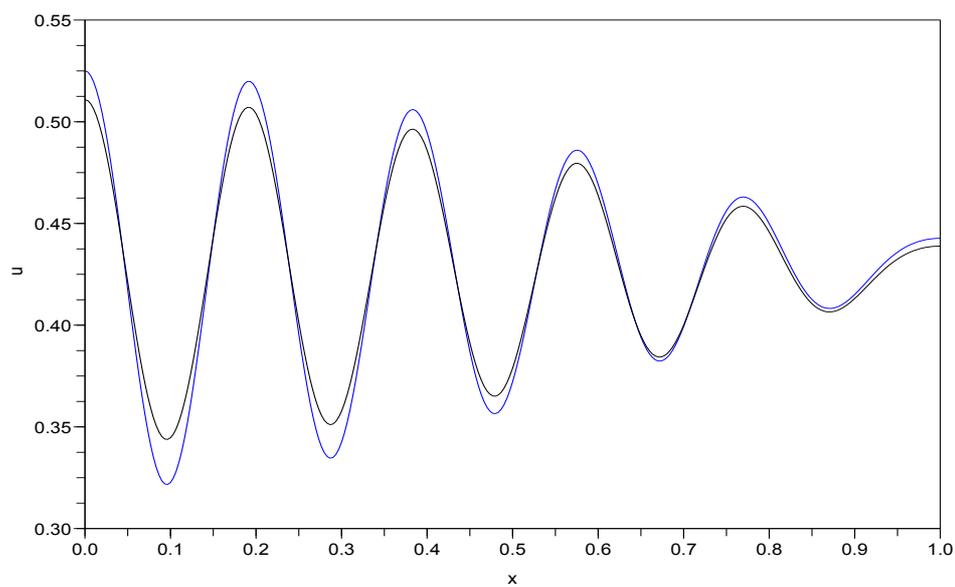


FIGURE 4.11 – solution stable pour $x = \frac{121}{100}$ et $\alpha = 0.6$

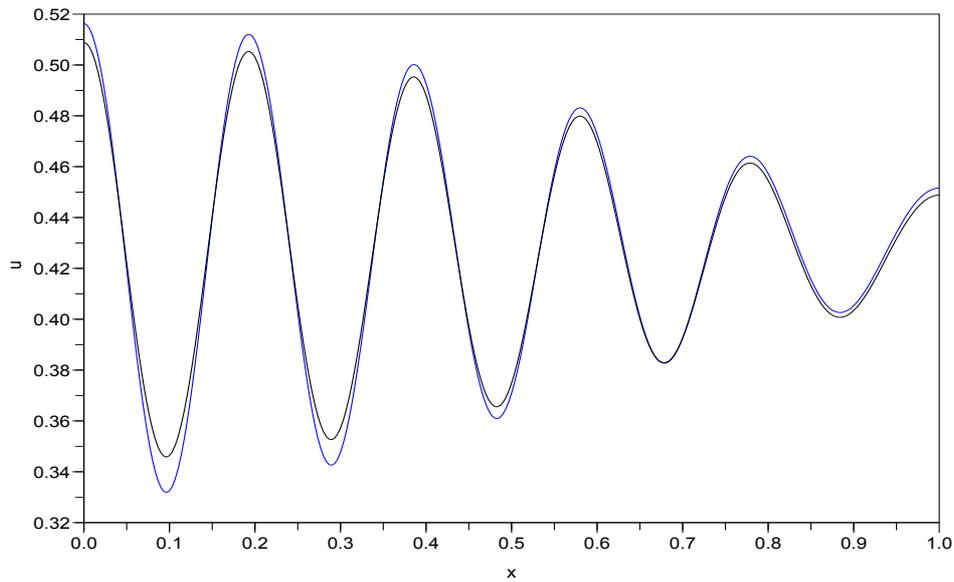


FIGURE 4.12 – solution stable pour $x = \frac{121}{100}$ et $\alpha = 0.5$

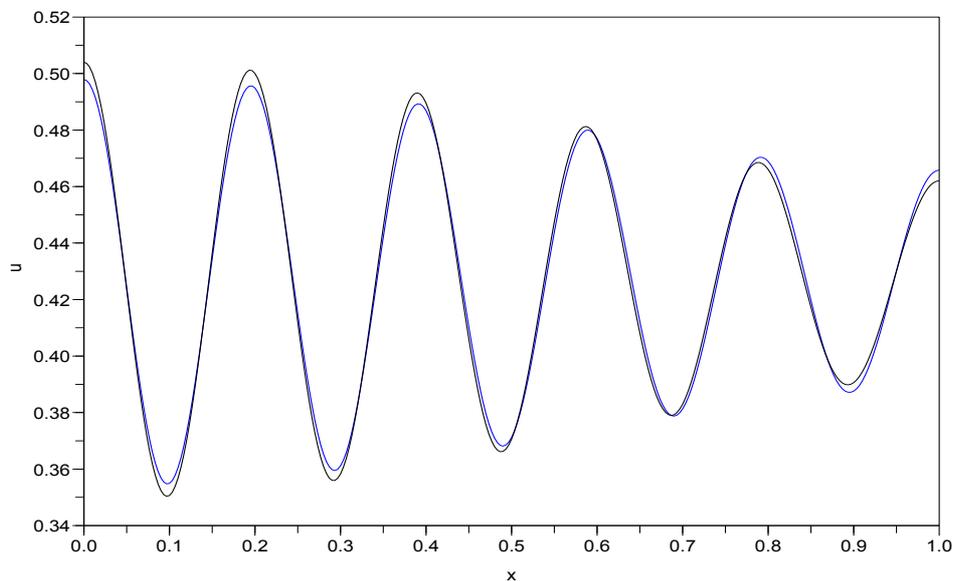


FIGURE 4.13 – solution stable pour $x = \frac{121}{100}$ et $\alpha = 0.35$

Dans le graphique ci-dessous, nous avons perturbé la solution bifurquante $v(y)$ (profil noir) par le terme $10^{-1} \cos(k\pi x)$. Cela nous a donné une solution perturbée que nous notons $\tilde{v}(y)$ (profil rouge). Afin de vérifier la stabilité, nous avons lancé le programme en partant très proche de la solution perturbée $\tilde{v}(y)$. Le résultat obtenu montre que la solution numérique converge bien vers la solution bifurquante.

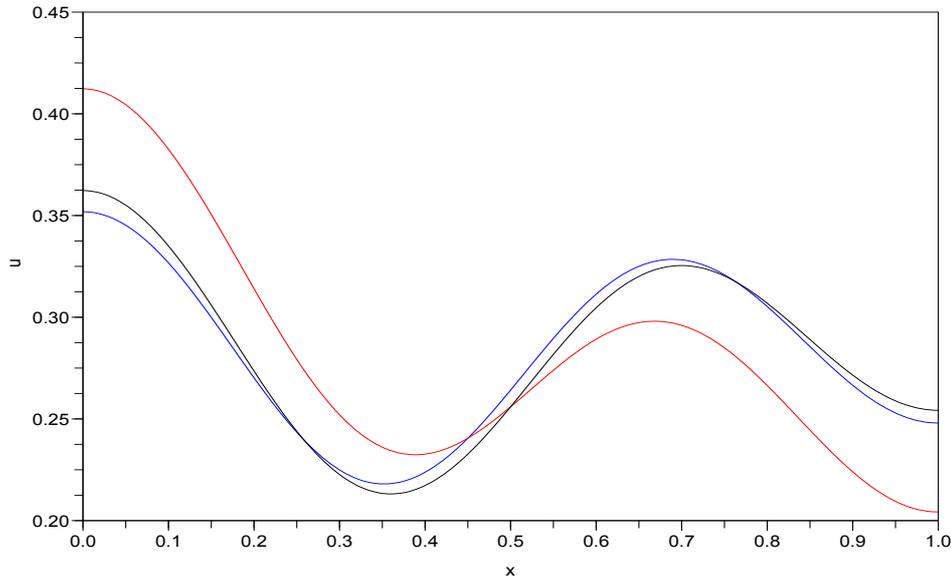


FIGURE 4.14 – solution stable perturbée pour $x = \frac{9}{4}$ et $\alpha = 0.9$, $\text{Test} = 5.781.10^{-16}$

Pour réaliser des simulations ci-dessus, nous avons fait un choix totalement arbitraire des valeurs des paramètres. Plus précisément, nous avons pris $x \in \{\frac{121}{100}, \frac{81}{64}, \frac{9}{4}\}$ et $M^2 \in \{\frac{114}{625}, \frac{4}{25}, \frac{2}{25}\}$. Les figures données ci-dessus montrent bien que les résultats obtenus numériquement sont correctement approchés par les solutions bifurquantes $u_0(y)$ (voir (4.146)). Ce résultat significatif laisse entendre qu'en plus des résultats obtenus lorsque $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 1$, les solutions obtenues par l'analyse développée dans cette thèse le sont aussi, du moins par leurs propriétés de stabilité.

Remarque 4.4.1

Par analogie, il est possible d'obtenir des solutions bifurquantes instables. Par exemple pour $x = \frac{9}{4}$ et $M^2 = \frac{1}{50}$ on obtient pour

$$u_0(x) = M(y) + y(0.5 \cos(3\pi x) + 0.5 \cos(2\pi x)) \tag{4.148}$$

dans le problème (4.147), le résultat suivant

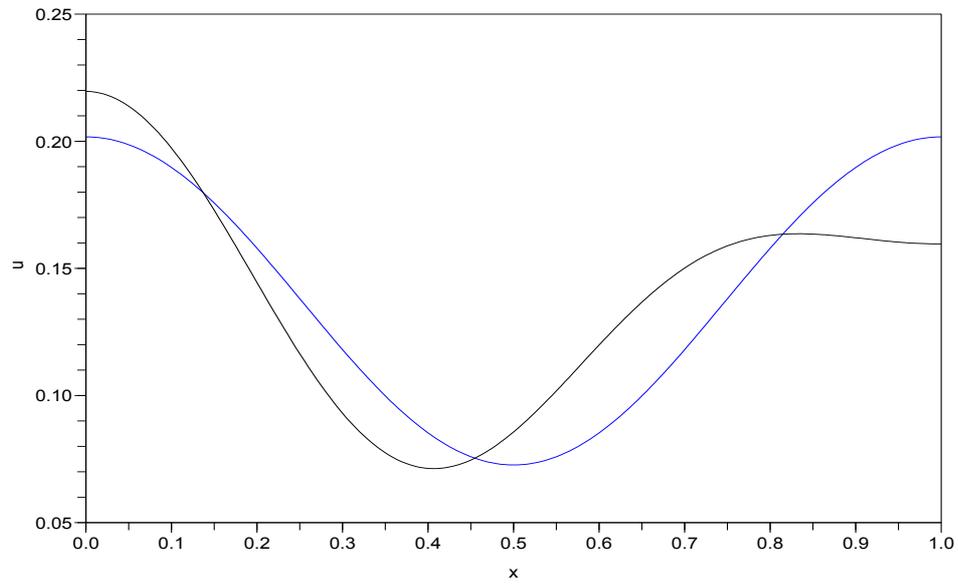


FIGURE 4.15 – solution instable pour $x = \frac{9}{4}$ et $\alpha = 0.5$.

Chapitre 5

Etude des solutions bifurquantes : Cas particulier $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$

Les résultats obtenus dans les Chapitre 3 et 4 sont en partie, possibles grâce aux hypothèses faites sur k_* et k_{**} . A savoir,

$$k_* \neq 2k_{**} \quad \text{et} \quad k_* \neq 3k_{**}. \quad (5.1)$$

La question est maintenant de savoir ce qui se passerait si l'une de ces conditions n'était pas satisfaite. En d'autres mots, existe-t-il des courbes de solutions non triviales lorsque $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$? On signale, toute de même, que l'hypothèse (5.1) a été nécessaire pour faire l'étude des variations des branches de solutions, et non pour prouver leurs existences. Dans la suite, nous ferons une analyse intégrale du premier cas et nous nous limiterons à prouver l'existence des solutions non triviales dans le second. Comme dans le chapitre 3, nous posons

$$\delta = (\epsilon, M). \quad (5.2)$$

5.1 Analyse spectrale de $L(\cdot, \delta_*)$ pour $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$

Il est important de souligner que le résultat que nous souhaitons établir ici est un cas particulier du chapitre 3. Pour cette raison, nous rappelons, en plus de (5.1), les hypothèses qui ont rendu possible les résultats importants de ce dernier chapitre.

$$(H4) \quad \text{Soient } 1 \leq k_{**} < k_* \text{ et } r < 0 \text{ fixés.} \quad (5.3)$$

$$(H5) \quad \text{Soient } \epsilon > 0 \text{ et } M \in \mathbb{R}^* \text{ vérifiant} \\ (\epsilon\lambda_{k_*} - 1)^2 + r + 3M^2 = (\epsilon\lambda_{k_{**}} - 1)^2 + r + 3M^2 = 0. \text{ On pose } p = -3M^2 - r. \quad (5.4)$$

$$(H6) \quad \text{De plus, on suppose que } 0 < p < 1 \text{ et } \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) = \langle \varphi_{k_*}, \varphi_{k_{**}} \rangle. \quad (5.5)$$

Dans ce chapitre, on supposera encore que ces hypothèses sont vraies. Par contre dans la suite, on travaillera avec les conditions

$$k_* = 2k_{**} \quad \text{et} \quad k_* = 3k_{**} \quad (5.6)$$

Remarque 5.1.1

Pour $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$ le paramètre p est égale à $\frac{9}{25}$ (respectivement $\frac{16}{25}$). Car selon l'hypothèse (5.4), on peut voir que

$$\epsilon = \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_{k_*}} = \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_{k_*}}.$$

Et en utilisant la condition (5.6), il vient, par exemple que

$$\sqrt{p} = \frac{\left(\frac{k_*}{k_{**}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{k_*}{k_{**}}\right)^2 + 1} = \frac{\left(\frac{2k_{**}}{k_{**}}\right)^2 - 1}{\left(\frac{2k_{**}}{k_{**}}\right)^2 + 1} = \frac{4 - 1}{4 + 1} = \frac{3}{5}. \quad (5.7)$$

Nous rappelons que le but dans cette section est de calculer les branches de solutions bifurquantes du problème de bifurcation qui consiste à trouver $(v, \epsilon) \in \dot{V}_0 \times (0, +\infty)$ tels que

$$\epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v + \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx) = 0 \quad (5.8)$$

Dans la suite nous diviserons la partie de gauche de l'équation (5.8) en deux parties et on pose

$$L(\cdot, \delta) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \epsilon^2 \partial_{xxxx} v + 2\epsilon \partial_{xx} v + f'(M)v \quad (5.9)$$

$$N(\cdot, \delta) : \dot{V}_0 \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad v \mapsto \frac{f''(M)}{2}(v^2 - \int_{\Omega} v^2 dx) + \frac{f'''(M)}{6}(v^3 - \int_{\Omega} v^3 dx). \quad (5.10)$$

Où $\dot{L}^2(\Omega)$ et \dot{V}_0 sont donnés par

$$V_0 = \{u \in H^4(\Omega) | \partial_x u = \partial_{xxx} u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

$$\dot{L}^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) | \int_{\Omega} v dx = 0\}$$

$$\dot{V}_0 = V_0 \cap \dot{L}^2(\Omega).$$

Finalement nous définissons, comme nous l'avons déjà fait dans les chapitres précédents

$$F : \dot{V}_0 \times (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \dot{L}^2(\Omega), \quad (v, \delta) \mapsto F(v, \epsilon) = L(v, \delta) + N(v, \delta).$$

Ainsi, au lieu de (5.8), nous considérerons désormais le problème qui consiste à trouver $(v, \delta) \in \dot{V}_0 \times (0, \infty) \times \mathbb{R}^*$ tels que :

$$F(v, \delta) = 0 \quad \dot{L}^2(\Omega). \quad (5.11)$$

De plus, selon la Proposition 2.2.1, nous savons que l'opérateur $L(\cdot, \delta)$ admet une base orthogonale de vecteurs propres

$$\varphi_k = \cos(k\pi \cdot), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

Pour les valeurs propres

$$\mu_k = (\epsilon \lambda_k - 1)^2 - p, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

où

$$p = 1 - f'(M) = -3M^2 - r \quad \text{et} \quad \lambda_k = (k\pi)^2. \quad (5.14)$$

5.1.1 Résultats préliminaires

On rappelle que de (5.3)-(5.5), les solutions du problème spectral pour l'opérateur $L(\cdot, \delta)$, avec les conditions homogènes aux bords de Neumann sont données par :

$$\begin{cases} \mu_k = (\epsilon\lambda_k - 1)^2 - p, & k = 1, 2, \dots \\ \varphi_k(x) = \cos(k\pi x), & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.15)$$

Ainsi, pour $k \geq 1$, le noyau de $L(\cdot, \delta)$ est obtenu par :

$$\mu_k = 0 \Leftrightarrow \epsilon := \epsilon_k \in \left\{ \frac{1 + \sqrt{p}}{\lambda_k}; \frac{1 - \sqrt{p}}{\lambda_k} \right\}. \quad (5.16)$$

Afin de simplifier les écritures, on adoptera pour $k = k_*$ fixé, les notations suivantes :

$$\epsilon_* = \epsilon_{k_*}, \quad \lambda_* = \lambda_{k_*}, \quad \varphi_* := \varphi_{k_*}, \quad \varphi_{**} := \varphi_{k_{**}} \quad \text{et} \quad \delta_* = (\epsilon_*, M_*). \quad (5.17)$$

Comme la suite de vecteurs propres donnée par (5.15) de $L(\cdot, \delta_*)$ est complète dans $\dot{L}^2(\Omega)$, alors on a les décompositions spatiales suivantes :

$$\dot{L}^2(\Omega) = \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) \oplus R(L(\cdot, \delta_*)) \quad (5.18)$$

et

$$\dot{V}_0 = \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) \oplus \left(R(L(\cdot, \delta_*)) \cap \dot{V}_0 \right). \quad (5.19)$$

Où

$$Pv := 2(v, \varphi_*)_2 \varphi_* + 2(v, \varphi_{**})_2 \varphi_{**}, \quad \forall v \in \dot{L}^2(\Omega) \quad \text{et} \quad Q = I - P \quad (5.20)$$

sont les projections induites par la décomposition (5.18) et $\delta = (\epsilon, M)$. D'où la solution v peut s'écrire de manière unique comme

$$v = Pv + (I - P)v = \varphi + w \quad \text{avec} \quad \varphi \in \text{Ker}L(\cdot, \delta_*), \quad \text{et} \quad w \in \left(R(L(\cdot, \delta_*)) \cap \dot{V}_0 \right). \quad (5.21)$$

De ce fait, il résulte que les solutions du problème (5.11) sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} PF(\varphi + w, \delta) = P(L(\varphi, \delta) + PN(\varphi + w, \delta)) = 0 \\ QF(\varphi + w, \delta) = Q(L(w, \delta) + QN(\varphi + w, \delta)) = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

Pour appliquer la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt au mieux, nous posons

$$\varphi = y\varphi_0 \quad \text{avec} \quad \varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**} \quad \text{tel que} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*. \quad (5.23)$$

Projection sur $R(L(\cdot, \delta_*))$

Par la méthode de Lyapunov-Schmidt et le théorème des fonctions implicites, pour (v, w, δ) proche de $(0, 0, \delta_*)$, la deuxième équation (5.22) est équivalente à

$$\begin{cases} w := w(\varphi, \delta), \quad \forall (\varphi, \delta) \in U \times V \subset \text{Ker}(L(\cdot, \delta_*)) \times \mathbb{R}^2 \\ w(0, \delta_*) = 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

où $U \times V$ est un voisinage ouvert de $(0, \delta_*)$. De plus w a la même régularité que F et est définie d'un voisinage de $(0, \delta_*)$ à valeurs dans $R(L(\cdot, \delta_*))$. Comme c'est l'unique solution locale alors on a aussi :

$$w(0, \delta) = 0, \quad \forall \delta \sim \delta_*. \quad (5.25)$$

On notera, comme dans le chapitre 3, par $I_{\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))}$ l'opérateur identité de $\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))$.

Projection sur $Ker(L(\cdot, \delta_*))$

Des relations (5.22) et (5.24), on définit par $\tilde{\Phi}$ la fonction suivante

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PF(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) = PL(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) + PN(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta). \quad (5.26)$$

En plus, d'après (5.22) et (5.25) on a

$$\tilde{\Phi}(0, \delta) = 0, \quad \forall \delta \in V. \quad (5.27)$$

Ce qui donne la solution triviale du problème

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = 0 \quad \varphi \in U \subset KerL(\cdot, \delta_*) \quad \text{et} \quad \delta \in V \subset]0, +\infty[\times \mathbb{R}^*, \quad (5.28)$$

et permet d'écrire $\tilde{\Phi}$ comme suit

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t\varphi, \delta) dt = \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(t\varphi, \delta) \varphi dt. \quad (5.29)$$

En posant $\varphi = y\varphi_0$ (voir hypothèse (5.23)), il résulte alors que

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta) = y \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta) \varphi_0 dt = y\Phi(y, \delta) \quad (5.30)$$

avec

$$\Phi(y, \delta) = \int_0^1 D_\varphi \tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta) \varphi_0 dt. \quad (5.31)$$

D'où les solutions non triviales du problème (5.11), sont désormais obtenues par le problème suivant

$$y \in \mathbb{R}, \quad \delta \sim \delta_*, \quad \Phi(y, \delta) = 0. \quad (5.32)$$

5.2 Existence des branches de solutions pour $k_* = 2k_{**}$

Pour que $(0, \delta_*)$ soit un point de bifurcation du problème (5.32) il suffit que l'opérateur $D_\delta \Phi(0, \delta_*)$ soit inversible. On rappelle que d'après le Lemme 3.3.1 et la condition (5.6) la représentation matricielle $A_{\alpha, \beta}$ de $D_\delta \Phi(0, \delta_*)$ dans les bases $e_{\mathbb{R}^2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)_2$ et $e_{Ker(L(\cdot, \delta_*))} = (\varphi_*, \varphi_{**})$ est donnée par

$$\begin{aligned} A_{\alpha, \beta} &= \begin{pmatrix} 2 \left(D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_* \right)_2 & 2 \left(D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_* \right)_2 \\ 2 \left(D_{\varphi \epsilon} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_{**} \right)_2 & 2 \left(D_{\varphi M} \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \varphi_0, \varphi_{**} \right)_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha \frac{48}{25\epsilon_*} & \alpha f''(M_*) \\ -\beta \frac{12}{25\epsilon_*} & \beta f''(M_*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En notant $D_{\alpha, \beta}$ le déterminant de $A_{\alpha, \beta}$. Il vient que

$$D_{\alpha, \beta} = \frac{12\alpha\beta}{5\epsilon_*} f''(M_*). \quad (5.33)$$

Et comme $D_{\alpha, \beta}$ est non nul par les hypothèses (5.3)-(5.5) et (5.23). Alors on a le théorème suivant.

Théorème 5.2.1

Soit k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (5.3)-(5.5), α et β vérifiant (5.23), alors

- $(0, \delta_*)$ est un point de bifurcation de (5.32)
- Il existe $\tau > 0$ et une unique courbe de solutions non triviales de classe C^2 en $(0, \delta_*)$ et définie par

$$\{(v(y), \delta(y)) \mid y \in (-\tau, \tau) \text{ et } (v(0), \delta(0)) = (0, \delta_*)\}. \quad (5.34)$$

telle que $F(v(y), \delta(y)) = 0$, $\forall y \in (-\tau, \tau)$ et $\dot{v}(0) = \varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$.

De plus, si l'hypothèse (5.6) est satisfaite, alors ϵ et M sont dérivables par rapport à y et on a

$$\dot{\epsilon}(0) = \frac{5\epsilon_* f''(M_*)(3\alpha^2 - 1)}{48\alpha} \quad (5.35)$$

et

$$\dot{M}(0) = -\frac{(1 + 7\alpha^2)}{20\alpha}. \quad (5.36)$$

Preuve. La preuve des deux premiers points, à savoir :

- $(0, \delta_*)$ est un point de bifurcation de (5.32),
- il existe $\tau > 0$ et une unique courbe de solutions non triviales de classe C^2 en $(0, \delta_*)$ par $\{(v(y), \delta(y)) \mid y \in (-\tau, \tau) \text{ et } (v(0), \delta(0)) = (0, \delta_*)\}$, est donnée par le Théorème 3.3.1 (voir Chapitre 3). D'où, grâce au théorème des fonctions implicites, les solutions bifurquantes donnée par la courbe ci-dessus, vérifient

$$\begin{cases} \delta = \delta(y) & \text{et } \delta(0) = \delta_* \\ \Phi(y, \delta(y)) = 0, & \forall y \in (-\tau, \tau) \end{cases}. \quad (5.37)$$

Il reste à prouver (5.35) et (5.36). En effet, par le théorème des fonctions implicites, $\delta = (\epsilon, M)$ est infiniment dérivable par rapport à y . Ainsi, en dérivant la relation (5.37), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\Phi(y, \delta(y)) \Big|_{y=0} &= D_y\Phi(y, \delta(y)) + D_\delta\Phi(y, \delta(y))\dot{\delta}(y) \Big|_{y=0} \\ &= D_y\Phi(0, \delta_*) + D_\delta\Phi(0, \delta_*)\dot{\delta}(0) = 0. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Autre part, on a

$$\begin{aligned} D_y\Phi(y, \delta_*) \Big|_{y=0} &= \int_0^1 D_y(D_\varphi\tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta_*)\varphi_0)dt \Big|_{y=0} \\ &= \int_0^1 D_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Phi}(ty\varphi_0, \delta_*)[\varphi_0, t\varphi_0]dt \Big|_{y=0} \\ &= \frac{1}{2}D_{\varphi\varphi}^2\tilde{\Phi}(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0] \\ &= \frac{1}{2}D_{vv}^2F(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0] \end{aligned}$$

En effet, par la définition de $\tilde{\Phi}$ (voir (5.26)), on a

$$D_\varphi\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PD_vF(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta)).$$

Et par suite

$$D_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PD_{vv}^2 F(v, \delta) [I + D_\varphi w(\varphi, \delta), I + D_\varphi w(\varphi, \delta)] + PD_v F(v, \delta) D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta).$$

Pour $(\varphi, \delta) = (0, \delta_*)$ on obtient

$$\begin{aligned} D_{\varphi\varphi}^2 \tilde{\Phi}(0, \delta_*)[\varphi_0, \varphi_0] &= PD_{vv}^2 F(0, \delta_*) [\varphi_0, \varphi_0] \\ &= f''(M_*) P(\varphi_0^2 - \int_0^1 \varphi_0^2 dx) \end{aligned}$$

car selon le Corollaire 5.1.1

$$D_\varphi w(0, \delta_*)\varphi_0 = 0 \quad \text{et} \quad PD_v F(0, \delta_*) D_{\varphi\varphi}^2 w[\varphi_0, \varphi_0] = PL(D_{\varphi\varphi}^2 w[\varphi_0, \varphi_0], \delta_*) = 0.$$

Comme $A_{\alpha\beta}$ est la représentation matricielle de l'opérateur $D_\delta \tilde{\Phi}(0, \delta_*)$ dans les bases

$$e_{\mathbb{R}^2} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad e_{\text{Ker}(L(\cdot, \delta_*))} = (\varphi_*, \varphi_{**})$$

et

$$\varphi_0^2 = (\alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**})^2 = \frac{\alpha^2}{2}(1 + \varphi_{2k_*}) + \alpha\beta(\varphi_{k_*+k_{**}} + \varphi_{k_*-k_{**}}) + \frac{\beta^2}{2}(1 + \varphi_{2k_{**}}).$$

Alors par (5.6), il vient que

$$\varphi_0^2 = (\alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**})^2 = \frac{\alpha^2}{2}(1 + \varphi_{4k_{**}}) + \alpha\beta(\varphi_{3k_{**}} + \varphi_{k_{**}}) + \frac{\beta^2}{2}(1 + \varphi_{2k_{**}}).$$

Et par utilisation de la relation (5.38), on trouve l'égalité suivante

$$A_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}(0) \\ \dot{M}(0) \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} f''(M_*) \begin{pmatrix} \beta^2/2 \\ \alpha\beta \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

La définition de $A_{\alpha,\beta}$ donne le système (S) suivant :

$$\begin{cases} \frac{48\alpha}{25\epsilon_*} \dot{\epsilon}(0) + \alpha f''(M_*) \dot{M}(0) = -\frac{1}{4} f''(M_*) \beta^2 \\ -\frac{12\beta}{25\epsilon_*} \dot{\epsilon}(0) + \beta f''(M_*) \dot{M}(0) = -\frac{1}{2} f''(M_*) \alpha\beta. \end{cases} \quad (5.40)$$

En multipliant la première équation par β et la deuxième par $-\alpha$ nous trouvons que

$$\dot{\epsilon}(0) = \frac{5\epsilon_* f''(M_*) (3\alpha^2 - 1)}{48\alpha}.$$

On trouve l'expression $\dot{M}(0)$ en remplaçant, simplement le résultat de $\dot{\epsilon}(0)$ ci-dessus dans l'une des deux équations du système (S). \square

Nous allons maintenant donner un résultat relatif à l'étude du signe du rapport $\frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)}$.

Proposition 5.2.1

Sous les hypothèses du Théorème 5.2.1,

1. Si $\alpha \in]0, \frac{1}{\sqrt{3}}[$ alors $\frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} > 0$ et $\text{sign}(\epsilon - \epsilon_*) = -\text{sign}y$
 - si $y < 0$ alors $\epsilon > \epsilon_*$,
 - si $y > 0$ alors $\epsilon < \epsilon_*$.
2. Si $\alpha \in]\frac{1}{\sqrt{3}}, 1[$ alors $\frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} < 0$ et $\text{sign}(\epsilon - \epsilon_*) = \text{sign}y$.
 - si $y < 0$ alors $\epsilon < \epsilon_*$,
 - si $y > 0$ alors $\epsilon > \epsilon_*$.

De plus, le rapport $\frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)}$ est croissant et on a

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} \right) = \frac{48\alpha}{5\epsilon_* f''(M_*) (3\alpha^2 - 1)^2} > 0 \quad \forall \alpha \in]0, 1[. \quad (5.41)$$

En tirant y dans l'expression de $\epsilon(y)$ et en le remplaçant dans $M(y)$, on obtient

$$M(y) = M_* + \frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} (\epsilon - \epsilon_*) + \mathcal{O}((\epsilon - \epsilon_*)^2). \quad (5.42)$$

Preuve. La preuve est triviale car d'après le Théorème 5.2.1 et y proche de 0, on peut développer les paramètres de bifurcation comme suit

$$\epsilon(y) = \epsilon_* + \dot{\epsilon}(0)y + \mathcal{O}(y^2) \quad \text{et} \quad M(y) = M_* + \dot{M}(0)y + \mathcal{O}(y^2).$$

□

Remarque 5.2.1

Avec $f''(M_*) = 6M_*$, les valeurs limites du rapport $\frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)}$ sont

- $\alpha \rightarrow 0 \implies \frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} \rightarrow \frac{2}{25\epsilon_* M_*}$.
- $\alpha \rightarrow 1 \implies \frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} \rightarrow -\frac{8}{25\epsilon_* M_*}$.
- $\alpha \rightarrow 1/\sqrt{3}$ et $\alpha < 1/\sqrt{3} \implies \frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} \rightarrow +\infty$.
- $\alpha \rightarrow 1/\sqrt{3}$ et $\alpha > 1/\sqrt{3} \implies \frac{\dot{M}(0)}{\dot{\epsilon}(0)} \rightarrow -\infty$.

5.3 Stabilité des solutions bifurquantes pour $k_* = 2k_{**}$

Dans cette section nous étudions la stabilité linéaire des solutions bifurquantes données par le Théorème 5.2.1. Pour ce faire, nous utiliserons le même principe de la stabilité réduite que nous avons déjà utilisé dans le Chapitre 4. Par ailleurs, on rappelle que, toutes les solutions du problème (5.11) au voisinage du point de bifurcation $(0, \delta_*) \in \dot{V}_0 \times \mathbb{R}^2$, sont obtenues en résolvant

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PF(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) = 0 \quad (\varphi, \delta) \in \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \quad (5.43)$$

Les solutions obtenues (voir (5.34)) vérifient

$$F(v(y), \delta(y)) = 0, \quad y \in (-\tau, \tau) \quad \text{voir le théorème 5.2.1.} \quad (5.44)$$

On rappelle que le principe de stabilité réduite (voir Chapitre 4, pour plus de détails) consiste à établir que les équilibres $v(y)$ et $\varphi(y) = Pv(y)$ du problème $\frac{dv}{dt} = F(v, \delta)$ et du problème réduit $\frac{d\varphi}{dt} = \tilde{\Phi}(\varphi, \delta)$, pour y proche de 0, ont la même stabilité. Dans [36] (ou plus précisément, dans le Théorème 4.2.1), ce résultat est établi par l'étude des valeurs propres des familles d'opérateurs

$$T(y) := D_v F(v(y), \delta(y)) \quad (5.45)$$

$$K(y) := D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi(y), \delta(y)). \quad (5.46)$$

Etant donné que nous avons déjà fait une description du principe de stabilité réduite, dans le chapitre 4 alors, nous nous limiterons d'établir la stabilité des solutions bifurquantes données par le théorème 5.2.1, via une étude des valeurs propres de l'opérateur $K(y)$.

Lemme 5.3.1

Soient $k_* = 2k_{**}$, ϵ_* , M_* et p satisfaisant (5.3)-(5.5) et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ vérifiant (5.23). Si $k_* = 2k_{**}$ alors l'opérateur $K(y)$ est développable à l'ordre 1, comme suit,

$$K(y) = yK_1 + \mathcal{O}((y^2)) \quad \forall y \in (-\tau, \tau) \quad (5.47)$$

où

$$K_1 = \dot{K}(0) \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*)). \quad (5.48)$$

Si on pose A_1 la représentation matricielle de K_1 dans le noyau $KerL(\cdot, \delta_*)$. Alors

$$A_1 = \frac{f''(M_*)}{2} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

et ses valeurs propres sont données par :

$$\mu_1 = \frac{f''(M_*)}{4}(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}) \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{f''(M_*)}{4}(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2}) \quad (5.50)$$

Preuve. Nous rappelons que, pour $\varphi = y\varphi_0$

$$K(y) := D_\varphi \tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y)) \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*)) \quad (5.51)$$

et

$$\tilde{\Phi}(y\varphi_0, \delta(y)) = PF(y\varphi_0 + w(y\varphi_0, \delta), \delta(y)). \quad (5.52)$$

De fait, il résulte, par l'utilisation de la définition (5.43), que

$$\begin{aligned} K(0) &= D_\varphi \tilde{\Phi}(0, \delta_*) \\ &= PD_v F(0, \delta_*)(I_{KerL(\cdot, \delta_*)} + D_\varphi w(0, \delta_*)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car

$$PD_v F(0, \delta_*)I_{KerL(\cdot, \delta_*)} = PL(\cdot, \delta_*)I_{KerL(\cdot, \delta_*)} \equiv 0$$

et $D_\varphi w(0, \delta_*) \equiv 0$ (cf. corollaire 3.3.1).

De même, la différenciation de $K(y)$ par rapport à y , en 0, donne,

$$\begin{aligned}\dot{K}(y) |_{y=0} &= \frac{d}{dy} [PD_v F(v, \delta)(I + D_\varphi w(\varphi, \delta))] |_{y=0} \\ &= PD_{vv}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \varphi_0 + D_\varphi w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_\delta w(\varphi, \delta)\dot{\delta}(y)] |_{y=0} \\ &\quad + PD_{v\delta}^2 F(v, \delta)[I + D_\varphi w(\varphi, \delta), \dot{\delta}] |_{y=0} \\ &\quad + PD_v F(v, \delta)[D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 + D_{\varphi\delta}^2 w(\varphi, \delta)\dot{\delta}] |_{y=0} .\end{aligned}$$

Comme $D_{\varphi\varphi}^2 w(\varphi, \delta)\varphi_0 \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), R(L(\cdot, \delta_*)))$, donc

$$\begin{aligned}\dot{K}(0) &= PD_{vv}^2 F(0, \delta_*)[I, \varphi_0] \\ &= f''(M_*)P(\varphi_0 I_{KerL(\cdot, \delta_*)} - \int_0^1 \varphi_0 I_{KerL(\cdot, \delta_*)} dx).\end{aligned}$$

Or d'après l'hypothèse $k_* = 2k_{**}$ on a

$$\varphi_0 \cdot \varphi_* = \frac{\alpha}{2}(1 + \varphi_{4k_{**}}) + \frac{\beta}{2}(\varphi_{3k_{**}} + \varphi_{k_{**}}) \Rightarrow P(\varphi_0 \cdot \varphi_*) = 0 \cdot \varphi_* + \frac{\beta}{2}\varphi_{**} \quad (5.53)$$

et de même

$$\varphi_0 \cdot \varphi_{**} = \frac{\beta}{2}(1 + \varphi_{2k_{**}}) + \frac{\alpha}{2}(\varphi_{3k_{**}} + \varphi_{k_{**}}) \Rightarrow P(\varphi_0 \cdot \varphi_{**}) = \frac{\beta}{2}\varphi_* + \frac{\alpha}{2}\varphi_{**}. \quad (5.54)$$

D'où $\dot{K}(0)$ est un opérateur non nul sur $KerL(\cdot, \delta_*)$. Par conséquent, pour y proche de 0, l'opérateur linéaire $K(y)$ est développable comme suit

$$K(y) = y\dot{K}(0) + \mathcal{O}((y^2)) \quad \forall y \in (-\tau, \tau).$$

En posant $K_1 = \dot{K}(0)$, on trouve le résultat (5.47).

Si on pose A_1 la représentation matricielle de l'opérateur K_1 . Il vient, au regard des calculs (5.53) et (5.54) que

$$K_1 \varphi_* = f''(M_*)(0 \cdot \varphi_* + \frac{\beta}{2}\varphi_{**}) \quad \text{et} \quad K_1 \varphi_{**} = f''(M_*)(\frac{\beta}{2}\varphi_* + \frac{\alpha}{2}\varphi_{**}). \quad (5.55)$$

D'où, on en déduit le résultat (5.49) suivant

$$A_1 = \frac{f''(M_*)}{2} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Le calcul des valeurs propres de la matrice A_1 est trivial. Ce qui achève la preuve du lemme. \square

Remarque 5.3.1

La valeur propre μ_1 donnée par (5.50) est trivialement négative pour tout α dans $]0, 1[$.

Grâce au lemme précédent nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le résultat de la stabilité linéaire de la solution bifurquante $v(y) = y\varphi_0 + w(y\varphi_0, \delta_*)$.

Théorème 5.3.1

Sous les hypothèses du Lemme 5.3.1, les valeurs propres $\mu(y)$ de l'opérateur $K(y)$ données au voisinage de $y = 0$ par

$$\{\mu_1 y + \mathcal{O}((y^2)) \mid y \in (-\tau_1, \tau_1)\} \quad (5.56)$$

et

$$\{\mu_2 y + \mathcal{O}((y^2)) \mid y \in (-\tau_2, \tau_2)\} \quad (5.57)$$

telle que

$$g(y, \mu(y)) = \det(K(y) - \mu(y)I_{KerL(\cdot, \delta_*)}) = 0, \quad (5.58)$$

sont de signes opposés et la solution bifurquante $v(y)$ du problème (5.11) est linéairement instable. Ici, μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres de A_1 données par (5.50).

Preuve. Par des hypothèses du Lemme 5.3.1, on montre grâce au Théorème 4.2.1, que la stabilité de la solution bifurquante $v(y)$ donnée par le Théorème 5.2.1 est donnée, à des ordres petits de y par les valeurs propres $\mu(y)$ de l'opérateur $K(y)$, qu'il nous reste à calculer. En effet, le calcul des valeurs propres de $K(y)$ revient à chercher les solutions de l'équation

$$g(y, \mu) = \det(K(y) - \mu I_{KerL(\cdot, \delta_*)}) = 0. \quad (5.59)$$

Or par l'utilisation de (5.47), il vient que les solutions de (5.59) sont encore données par

$$g(y, \mu) = \det(yK_1 - \mu I_{KerL(\cdot, \delta_*)} + \mathcal{O}((y^2))) = 0. \quad (5.60)$$

Par suite, si on pose M_1 , la représentation matricielle de l'opérateur à l'intérieur de (5.60) dans $KerL(\cdot, \delta_*)$, on a

$$M_1 = \begin{pmatrix} ya_{11} - \mu + \mathcal{O}((y^3)) & ya_{12} + \mathcal{O}((y^2)) \\ ya_{21} + \mathcal{O}((y^2)) & ya_{22} - \mu + \mathcal{O}((y^2)) \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

où a_{11} , a_{22} , a_{12} et a_{21} sont les coefficients de la matrice A_1 donnée par (5.49). Donc les solutions de (5.59) sont finalement données par

$$g(y, \mu) = \mu^2 - (a_{11} + a_{22})y\mu + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)y^2 + R(y, \mu) = 0 \quad (5.62)$$

où

$$R(y, \mu) = \mu \mathcal{O}((y^2)) + \mathcal{O}((y^3)). \quad (5.63)$$

Grâce au polygone de Newton (cf. Chapitre 1, Sous section 1.3.2) et au fait que $g(0, 0) = 0$, nous faisons le changement de variable suivant,

$$\mu = y\tilde{\mu} \quad \forall \tilde{\mu} \in \mathbb{R}. \quad (5.64)$$

Ainsi, (4.91) devient,

$$g(y, \mu) = y^2 \tilde{g}(y, \tilde{\mu}) = 0, \quad (5.65)$$

où \tilde{g} est donnée par

$$\tilde{g}(y, \tilde{\mu}) = \tilde{\mu}^2 - (a_{11} + a_{22})\tilde{\mu} + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) + R_1(y, \tilde{\mu}) \quad (5.66)$$

$$= (\tilde{\mu} - \mu_1)(\tilde{\mu} - \mu_2) + R_1(y, \tilde{\mu}), \quad (5.67)$$

et

$$R_1(y, \tilde{\mu}) = \tilde{\mu} \mathcal{O}((y)) + \mathcal{O}((y)). \quad (5.68)$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites et le fait que $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ par (5.23), on montre que (en argumentant comme dans la preuve du Théorème 4.3.1)

$$\mu(y) = y\mu_1 + \mathcal{O}((y^2)) \quad \text{et} \quad \text{sign}\mu(y) = -\text{sign}y, \quad \text{car} \quad \mu_1 < 0 \quad (5.69)$$

et

$$\mu(y) = y\mu_2 + \mathcal{O}((y^2)) \quad \text{et} \quad \text{sign}\mu(y) = \text{sign}y, \quad \text{car} \quad \mu_2 > 0. \quad (5.70)$$

D'où $v(y)$ est instable car les valeurs propres de $K(y)$ sont de signes opposés. Ce qui achève la preuve du théorème. \square

En prenant $k_* = 2$, $k_{**} = 1$, $M_* = \frac{1}{5\sqrt{3}}$ et $\epsilon_* = \frac{2}{5\pi^2}$, on donne, grâce au logiciel Scilab de [30], une illustration numérique du résultat ci-dessus.

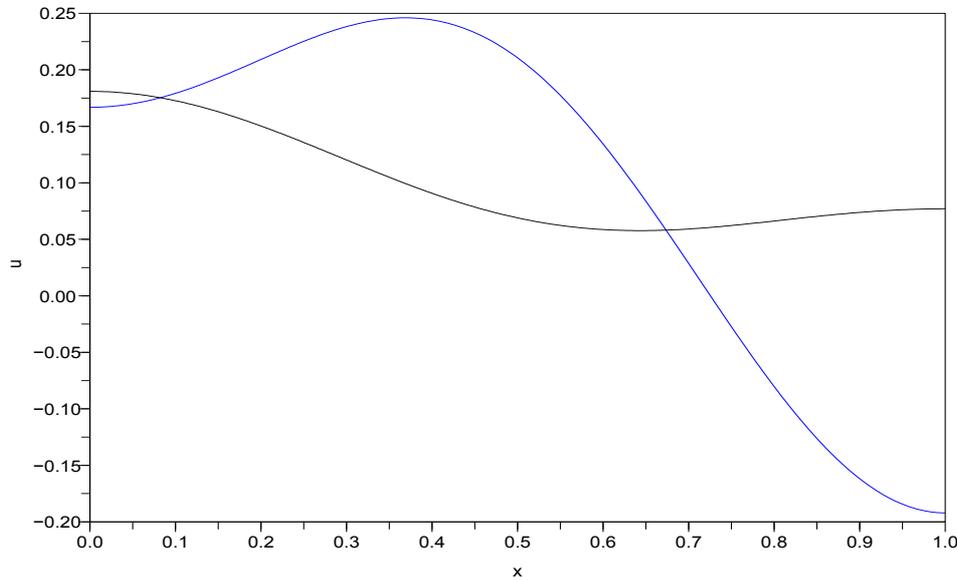


FIGURE 5.1 – Solution instable pour $x = 4$ et $\alpha = 0.5$.

5.4 Existence des solutions non triviales pour $k_* = 3k_{**}$

Dans cette section, nous nous contentons de montrer l'existence des solutions bifurquantes non triviales du problème (5.11) avec la condition

$$k_* = 3k_{**}. \quad (5.71)$$

Pour ce faire, on pose sous les hypothèses (5.3)-(5.5) et (5.23)

$$a := \frac{3\alpha^3}{4} + \frac{3\alpha\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{4}, \quad b := \frac{3\alpha^2\beta}{2} + \frac{3\alpha\beta^2}{4} + \frac{3\beta^3}{4}, \quad (5.72)$$

$$c := -\frac{f''(M_*)\alpha^3}{4\mu_6k_{**}} - \frac{f''(M_*)\alpha\beta^2}{2\mu_4k_{**}} - \frac{f''(M)\alpha\beta^2}{2\mu_2k_{**}}, \quad (5.73)$$

et

$$d := -\frac{f''(M_*)\beta^3}{4\mu_2k_{**}} - \frac{f''(M_*)\beta\alpha^2}{2\mu_4k_{**}} - \frac{f''(M_*)\beta\alpha^2}{2\mu_2k_{**}}. \quad (5.74)$$

où $\mu_j = (\epsilon_*\lambda_j - 1)^2 - p$, $j = 6k_{**}, 4k_{**}, 2k_{**}$ et $\lambda_j = (j\pi)^2$.

Théorème 5.4.1

Soit k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (5.3)-(5.5), α et β vérifiant (5.23), alors

- $(0, \delta_*)$ est un point de bifurcation de (5.32)
- Il existe $\tau > 0$ et une unique courbe de solutions non triviales de classe C^2 en $(0, \delta_*)$ et définie par

$$\{(v(y), \delta(y)) \mid y \in (-\tau, \tau) \text{ et } (v(0), \delta(0)) = (0, \delta_*)\}. \quad (5.75)$$

telle que $F(v(y), \delta(y)) = 0$, $\forall y \in (-\tau, \tau)$ et $\dot{v}(0) = \varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$.

De plus, si l'hypothèse (5.71) est satisfaite, alors $p = \frac{4}{5}$ et on a pour y proche de 0,

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{\epsilon_*}{4\sqrt{p}} \left[-\frac{2a}{\alpha} - \frac{f''(M_*)c}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} + \frac{f''(M_*)d}{\beta} \right], \quad (5.76)$$

et

$$\ddot{M}(0) = \frac{1}{f''(M_*)} \left[-\frac{a}{5\alpha} - \frac{f''(M_*)c}{10\alpha} - \frac{9b}{5\beta} - \frac{9f''(M_*)d}{10\beta} \right]. \quad (5.77)$$

Où a , b , c et d sont données par (5.72)-(5.74).

Remarque 5.4.1

Le résultat ci-dessus est une simple application du Théorème 3.3.1, à la seule différence que dans la relation (3.87) (cf. chapitre 3), on a (avec la condition $k_* = 3k_{**}$)

$$P(\varphi_0^3 - \int_0^1 \varphi_0^3 dx) = \left(\frac{3\alpha^3}{4} + \frac{3\alpha\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{4}\right)\varphi_* + \left(\frac{3\alpha^2\beta}{2} + \frac{3\alpha\beta^2}{4} + \frac{3\beta^3}{4}\right)\varphi_{**}. \quad (5.78)$$

5.5 Un résultat de stabilité linéaire pour $k_* = 3k_{}$**

Dans cette section nous allons donner un résultat général de stabilité linéaire des solutions bifurquantes données par le Théorème 5.4.1. Pour ce faire, nous posons, pour φ_0 et w satisfaisant respectivement (5.23) et (5.24)

$$\Theta_1 := P(\varphi_0^2 \cdot \varphi_* - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot \varphi_* dx), \quad (5.79)$$

$$\Theta_2 := P(\varphi_0^2 \cdot \varphi_{**} - \int_0^1 \varphi_0^2 \cdot \varphi_{**} dx), \quad (5.80)$$

$$\Theta_3 := P(\varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 - \int_0^1 \varphi_* \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 dx), \quad (5.81)$$

$$\Theta_4 := P(\varphi_{**} \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 - \int_0^1 \varphi_{**} \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \cdot \varphi_0 dx), \quad (5.82)$$

$$\Theta_5 := P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_* - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_* dx), \quad (5.83)$$

$$\Theta_6 := P(\varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_{**} - \int_0^1 \varphi_0 \cdot D_{\varphi\varphi}^2 w(0, \delta_*) \varphi_0 \varphi_{**} dx), \quad (5.84)$$

et le lemme suivant tient.

Proposition 5.5.1

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (5.3)-(5.5) et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ tel que $\varphi_0 = \alpha\varphi_* + \beta\varphi_{**}$. Si $k_* = 3k_{**}$ alors $p = \frac{16}{25}$ et

$$\Theta_1 = \left(\frac{3\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}\right)\varphi_* + \left(\alpha\beta + \frac{\beta^2}{4}\right)\varphi_{**}, \quad (5.85)$$

$$\Theta_2 = \left(\frac{3\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}\right)\varphi_* + \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{3\beta^2}{4}\right)\varphi_{**}, \quad (5.86)$$

$$\Theta_3 = 30M_*^2 \left[-\frac{\alpha^2}{126}\varphi_* + \left(\frac{6\alpha\beta}{7} + \frac{\beta^2}{2}\right)\varphi_{**} \right], \quad (5.87)$$

$$\Theta_4 = 30M_*^2 \left[\left(\frac{6\alpha\beta}{7} + \frac{\beta^2}{2}\right)\varphi_* + \left(\alpha\beta + \frac{\beta^2}{2}\right)\varphi_{**} \right], \quad (5.88)$$

$$\Theta_5 = 30M_*^2 \left[\left(-\frac{\alpha^2}{126} + \frac{3\beta^2}{7}\right)\varphi_* + \left(\frac{3\alpha\beta}{7} + \frac{\beta^2}{2}\right)\varphi_{**} \right], \quad (5.89)$$

$$\Theta_6 = 30M_*^2 \left[\left(\beta^2 + \frac{6\alpha\beta}{7}\right)\varphi_* + \left(\frac{13\alpha\beta}{7} + \alpha^2 + \beta^2\right)\varphi_{**} \right]. \quad (5.90)$$

De plus, on a

$$\ddot{\epsilon}(0) = \frac{5\epsilon_*}{32\alpha} \left[(3\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 - \beta^3 + 3\alpha^2\beta) + \frac{60M_*^2}{7} \left(\frac{\beta^3}{18} - \frac{5\alpha\beta^2}{2} + 6\alpha^3 \right) \right] \quad (5.91)$$

et

$$\ddot{M}(0) = -\frac{1}{60M_*\alpha} \left[(57\alpha^3 + 33\alpha\beta^2 + \beta^3 + 27\alpha^2\beta) + \frac{60M_*^2}{7} \left(-\frac{\beta^3}{18} + \frac{75\alpha\beta^2}{2} + 54\alpha^3 \right) \right]. \quad (5.92)$$

Preuve. Les égalités (5.85)-(5.90) sont prouvées de façon analogue à celles données par la Proposition 4.3.2. Ainsi, nous montrerons seulement (5.91) et (5.92). En effet, pour $k_* = 3k_{**}$, trouve que a , b , c et d (voir (5.72)-(5.74)) sont données par

$$a = \frac{3\alpha^3}{4} + \frac{3\alpha\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{4} \quad b = \frac{3\alpha^2\beta}{2} + \frac{3\alpha\beta^2}{4} + \frac{3\beta^3}{4},$$

et

$$c = -\frac{30M_*^2}{7} \left(\frac{\beta^3}{18} - 6\alpha\beta^2 \right) \quad d = \frac{30M_*^2}{7} \left(\frac{7\beta^3}{2} + 6\beta\alpha^2 \right).$$

La substitution de ces résultats dans (5.76) et (5.77) donne les assertions (5.91) et (5.92). \square

Soit $K(y)$ l'opérateur défini par

$$K(y) = D_\varphi \tilde{\Phi}(\varphi(y), \delta(y)). \quad (5.93)$$

Avec

$$\tilde{\Phi}(\varphi, \delta) = PF(\varphi + w(\varphi, \delta), \delta) = 0 \quad (\varphi, \delta) \in \text{Ker}L(\cdot, \delta_*) \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \quad (5.94)$$

Alors selon le principe de la stabilité réduite (voir Chapitre 4) le théorème suivant tient.

Théorème 5.5.1

Soient k_* , k_{**} , ϵ_* , M_* et p satisfaisant (4.8)-(4.10) et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ vérifiant (4.24). Si $k_* = 3k_{**}$ alors l'opérateur $K(y)$ est développable à l'ordre 2, comme suit,

$$K(y) = y^2 K_2 + \mathcal{O}((y)) \quad \forall y \in (-\tau, \tau) \quad (5.95)$$

où $K_2 = \frac{1}{2} \ddot{K}(0) \in \mathcal{L}(KerL(\cdot, \delta_*), KerL(\cdot, \delta_*))$.

Soit

$$A_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5.96)$$

la représentation matricielle de K_2 dans $KerL(\cdot, \delta_*)$. Alors les valeurs propres de K_2 sont données par

$$\mu_1 = \frac{1}{4} \left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \right), \quad (5.97)$$

et

$$\mu_2 = \frac{1}{4} \left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \right). \quad (5.98)$$

De plus, si

$$\mu_1 \neq 0, \quad \mu_2 \neq 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 \neq \mu_2 \quad (5.99)$$

alors la stabilité linéaire des solutions bifurquantes (5.75) est donnée par les signes des valeurs propres perturbées

$$\{\mu_1 y^2 + \mathcal{O}((y^3)) \mid y \in (-\tau_1, \tau_1)\} \quad (5.100)$$

et

$$\{\mu_2 y^2 + \mathcal{O}((y^3)) \mid y \in (-\tau_2, \tau_2)\} \quad (5.101)$$

telle que

$$g(y, \mu(y)) = \det(K(y) - \mu(y)I_{KerL(\cdot, \delta_*)}) = 0, \quad \text{avec} \quad \mu(y) \quad \text{valeur propre de} \quad K(y). \quad (5.102)$$

Ici, les coefficients a_{11} , a_{12} , a_{21} et a_{22} sont donnés par ;

$$a_{12} = a_{21} = 6\alpha\beta + \frac{3\beta^2}{2} + 30M_*^2 \left(\frac{12\alpha\beta}{7} + \frac{3\beta^2}{2} \right) \quad (5.103)$$

$$a_{11} = \frac{9\alpha^2}{2} + 3\beta^2 + 30M_*^2 \left(-\frac{\alpha^2}{42} + \frac{6\beta^2}{7} \right) + \frac{1}{2\alpha} \left[(-3\alpha^3 - 6\alpha\beta^2 - \beta^3) + \frac{6M_*^2}{7} \left(\frac{5\beta^3}{9} - 60\alpha\beta^2 \right) \right], \quad (5.104)$$

$$a_{22} = 3\alpha^2 + 3\alpha\beta + \frac{9\beta^2}{2} + 30M_*^2 \left(\frac{20\alpha\beta}{7} + \frac{3\beta^2}{2} + \alpha^2 \right) - \frac{1}{2\alpha} \left[(6\alpha^3 + 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\beta) + \frac{6M_*^2}{7} (35\alpha\beta^2 + 60\alpha^3) \right] \quad (5.105)$$

Preuve. La preuve de ce théorème est donnée par le Lemme 4.3.1 et 4.3.2 et le Théorème 4.3.1 du Chapitre 4. \square

Corollaire 5.5.1

Sous les hypothèses du Théorème 5.5.1, si $\alpha = \beta$, alors les solutions bifurquantes $v(y)$ données par le Théorème 5.4.1 sont linéairement instables.

Preuve. En effet, si $\alpha = \beta$ alors

$$\begin{aligned}\mu_1 \cdot \mu_2 &= \frac{1}{4}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \\ &= -\alpha^2 \left[\frac{105}{2} + \frac{8030}{7}M_*^2 + \frac{458425}{49}M_*^4 \right] \\ &< 0.\end{aligned}$$

Donc μ_1 et μ_2 sont de signes opposés. Nous déduisons alors de (5.100) et (5.101) que les valeurs propres perturbées sont également de signes opposés. D'où le résultat. \square

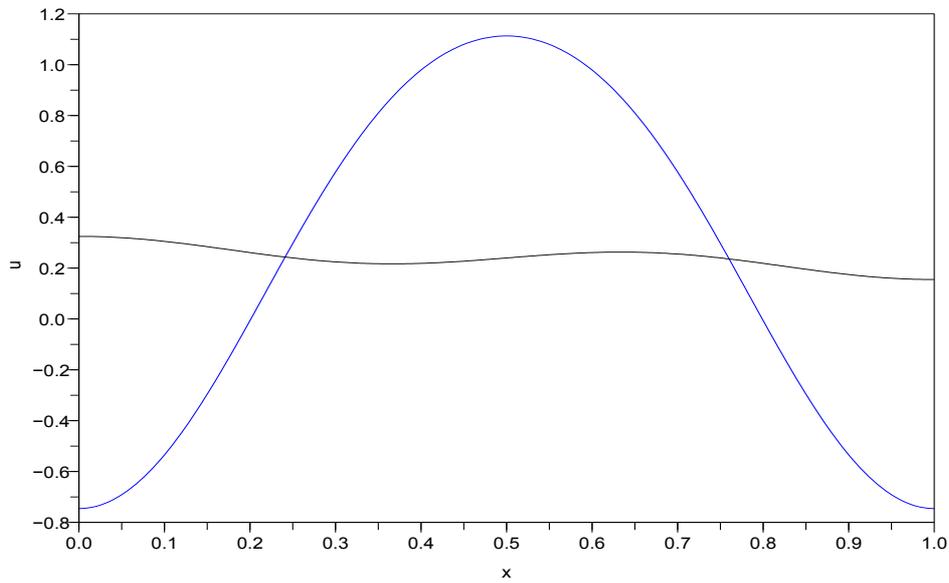


FIGURE 5.2 – Solution instable pour $x = 9$, $M = \frac{1}{4}$, $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et test = $2.664 \cdot 10^{-15}$.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié le problème stationnaire du modèle de champs de phase cristallin, en dimension 1 d'espace. Et l'essentiel des recherches effectuées, a été orienté vers le calcul des branches de solutions bifurquantes locales, lorsque $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 2$, avec $\delta_* = (\epsilon_*, M_*)$. Pour finir, nous avons prouvé un résultat de stabilité linéaire des solutions bifurquantes obtenues. Toutefois, nous avons consacré un chapitre entier (voir chapitre 2), à l'étude du même problème dans le cas où $\dim \text{Ker} L(\cdot, \epsilon_*) = 1$. Cela nous a permis de fournir des diagrammes de phases illustrant les différentes orientations des branches de solutions, au voisinage de tout point de bifurcation, et suivant uniquement la donnée des paramètres k_* et r du problème. Les résultats trouvés, dans ce dernier cas nous ont servi de travail préliminaires, car on peut également les retrouver dans [30].

Dans le chapitre 3, nous avons montré l'existence d'une courbe de solutions bifurquantes lorsque $\dim \text{Ker} L(\cdot, \delta_*) = 2$. La démonstration de ce résultat a été possible grâce à la méthode des multiparamètres, dont l'usage, nous a poussé à considérer, en plus de ϵ , la masse M , comme un paramètre de bifurcation. En retour, nous avons été amené à étudier les signes de ces paramètres et à s'intéresser aux directions tangentielles des branches de solutions au voisinage de chaque point de bifurcation. A la fin du chapitre, nous avons mené une petite étude de comparaison des énergies de la solution bifurquante et de la solution triviale. Ce qui nous a permis d'obtenir le résultat selon lequel, proche du point de bifurcation et selon les valeurs des paramètres, l'énergie de la solution bifurquante peut être plus grande que l'énergie de la solution triviale et réciproquement (voir théorème 3.5.1).

Dans le chapitre 4, nous avons établi un résultat de la stabilité linéaire des solutions bifurquantes obtenues dans le théorème 3.3.1. La réalisation de ce dernier résultat, bien que difficile, à cause de l'implication de plusieurs données du problème, a été possible grâce à un principe de la stabilité réduite de [36]. En nous appuyant sur ce principe, nous avons pu montrer que les solutions bifurquantes sont stables pour certaines valeurs des paramètres (voir théorème 4.3.2). Et, pour valider ce résultat intéressant, nous avons fourni quelques exemples de tests numériques.

Enfin, dans le chapitre 5, nous avons prouvé l'existence des courbes de solutions non triviales dans les cas particuliers $k_* = 2k_{**}$ et $k_* = 3k_{**}$ écartés dans le chapitre 3 et le chapitre 4. Néanmoins, plus de détails ont été fournis dans le premier cas, car, en plus du résultat d'existence, nous avons pu montrer que toutes les solutions bifurquantes obtenues par le théorème 5.2.1 sont linéairement instables.

D'un point de vue général, on peut dire que les solutions bifurquantes obtenues avec un noyau de dimension 2, s'ajoutent au large panel des solutions du problème stationnaire du modèle de champs de phase cristallin (voir [30]). En plus, grâce à leur propriété de stabilité, on peut se poser la question de savoir, laquelle de la solution bifurquante à une fréquence et de la solution bifurquante à double fréquence est la plus stable, et quelle est celle qui a la plus petite énergie? Dans bien des cas, et surtout pour des besoins expérimentaux, la préférence est souvent portée à la solution à une fréquence. Cependant, d'un point de

vue mathématique, aucun critère ne nous permet, à ce jour, de faire un choix objectif de l'une des deux solutions par rapport à une autre. Ainsi, il serait intéressant d'orienter les recherches en ce sens et aussi d'étendre les résultats que nous avons obtenus ici en dimension 2 d'espace.

Bibliographie

- [1] K. R. Elder and Martin Grant. Modeling elastic and plastic deformations in nonequilibrium processing using phase field crystals. *Phys. Rev. E*, 70 :051605, Nov 2004.
- [2] Battacharyya. S. Battacharjee. J. K. *Non-linear dynamics near and far from equilibrium*, volume 156. 2007.
- [3] K. R. Elder J. Berry and M. Grant. Melting at dislocations and grain boundaries : a phase field crystal study. *Phys. Rev. B*, 77 :224114, 2008.
- [4] K. R. Elder J. Berry and M. Grant. Simulation of an atomistic dynamic field theory for monatomic liquids : Freezing and glass-formation. *Phys. Rev. E*, 77 :061506, 2008.
- [5] J. Berry, M. Grant, and K. R. Elder. Diffusive atomistic dynamics of edge dislocations in two dimensions. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 73(3), 2006.
- [6] Kuo-An Wu, Ari Adland, and Alain Karma.
- [7] M. Plapp J. Mellenthin, A. Karma. Phase-field crystal study of grain-boundary pre-melting. *Phys. Rev. B*, 78 :184110, 2008.
- [8] CHARLES M. ELLIOTT and DONALD A. FRENCH. Numerical studies of the cahn-hilliard equation for phase separation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 38(2) :97–128, 1987.
- [9] K. R. Elder, Nikolas Provatas, Joel Berry, Peter Stefanovic, and Martin Grant. Phase-field crystal modeling and classical density functional theory of freezing. *Phys. Rev. B*, 75 :064107, Feb 2007.
- [10] M. J. Robbins, A. J. Archer, U. Thiele, and E. Knobloch. Modeling the structure of liquids and crystals using one- and two-component modified phase-field crystal models. *Phys. Rev. E*, 85 :061408, Jun 2012.
- [11] Peter Stefanovic, Mikko Haataja, and Nikolas Provatas. Phase-field crystals with elastic interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :225504, Jun 2006.
- [12] M. Yussouff T. V.Ramakrishnan. First principles order parameter theory of freezing. *Phys. Rev. B*, 19 :2775, 1979.
- [13] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15 :319–328, Jan 1977.
- [14] S. Van Teeffelen, R. Backofen, A. Voigt, and H. Löwen. Derivation of the phase-field-crystal model for colloidal solidification. *Physical Review E*, 79(5) :051404, 2009.
- [15] M. Haataja K. R. Elder, M. Katakowski and M. Grant. Modeling elasticity in crystal growth. *Phys. Rev. Lett*, 88 :245701, 2002.
- [16] Kuo-An Wu and Alain Karma. Phase-field crystal modeling of equilibrium bcc-liquid interfaces. *Phys. Rev. B*, 76 :184107, Nov 2007.

- [17] Sami Majaniemi and Nikolas Provatas. Deriving surface-energy anisotropy for phenomenological phase-field models of solidification. *Phys. Rev. E*, 79 :011607, 2009.
- [18] G. I. Tóth F. Podmaniczky A. Jaatinen T. Ala-Nissila T. Pusztai G. Tegze, L. Gránásy. Diffusion-controlled anisotropic growth of stable and metastable crystal polymorphs in the phase-field crystal model. *Phys. Rev. Lett*, 103 :035702, 2009.
- [19] G. I. Tóth L. Környei G. Bansel Z. Fan-L. Gránásy T. Pusztai, G. Tegze. Phase-field approach to polycrystalline solidification including heterogeneous and homogeneous nucleation. *J. Phys : Cond. Matter*, 20 :404205, 2008.
- [20] G. I. Tóth T. Pusztai Z. Fan L. Gránásy Tegze, G. Bansel. Advanced operator-splitting-based semi-implicit spectral method to solve the binary phase-field crystal equation with variable coefficients. *J. Comp. Phys.*, 228 :1612–1623, 2009.
- [21] L. A Peletier and V. Rottschäfer. Large time behaviour of solutions of the swift-hohenberg equation. *C.R. Math. Acad. Sci.*, 336(3) :225–230, 2003.
- [22] L.A Peletier and V.Rottschäfer. Pattern selection of solutions of the swift-hohenberg equation. *Phys. D*, 194(1-2) :95–126, 2004.
- [23] J. Swift and P. C. Hohenberg. Hydrodynamic fluctuations at the convective instability. *Phys. Rev. A*, 15 :319–328, Jan 1977.
- [24] Pierre Collet and Jean-Pierre Eckmann. *Instabilities and fronts in extended systems*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.
- [25] Sen-Zhong Huang. *Gradient inequalities*, volume 126 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. With applications to asymptotic behavior and stability of gradient-like systems.
- [26] Mustafa Polat. Global attractor for a modified Swift-Hohenberg equation. *Comput. Math. Appl.*, 57(1) :62–66, 2009.
- [27] Masoud Yari. Attractor bifurcation and final patterns of the n -dimensional and generalized Swift-Hohenberg equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 7(2) :441–456 (electronic), 2007.
- [28] L. A. Peletier and W. C. Troy. *Spatial patterns*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 45. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2001. Higher order models in physics and mechanics.
- [29] S. M. Wise, C. Wang, and J. S. Lowengrub. An energy-stable and convergent finite-difference scheme for the phase field crystal equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3) :2269–2288, 2009.
- [30] Morgan Pierre and Arnaud Rougirel. Stationary solutions to phase field crystal equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, 34(3) :278–308, 2011.
- [31] J D Crawford and E Knobloch. Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23(1) :341–387, 1991.
- [32] John Burke and Edgar Knobloch. Localized states in the generalized swift-hohenberg equation. *Phys. Rev. E*, 73 :056211, May 2006.
- [33] Martin Golubitsky, Ian Stewart, and David G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory. Vol. II*, volume 69 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1988.
- [34] Martin Golubitsky and David G. Schaeffer. *Singularities and groups in bifurcation theory. Vol. I*, volume 51 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [35] John David Crawford. Introduction to bifurcation theory. *Rev. Mod. Phys.*, 63 :991–1037, Oct 1991.

- [36] Hansjörg Kielhöfer. *Bifurcation theory*, volume 156 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004. An introduction with applications to PDEs.
- [37] Antonio Ambrosetti and Giovanni Prodi. *A primer of nonlinear analysis*, volume 34 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Corrected reprint of the 1993 original.
- [38] Tian Ma and Shouhong Wang. *Bifurcation theory and applications*, volume 53 of *World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A : Monographs and Treatises*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.
- [39] M.A. Krasnosel'skii. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. Pergamon, New York, 1964.
- [40] Paul H. Rabinowitz. A global theorem to nonlinear eigenvalue problems and applications. pages x+146. Academic Press, New York, 1971.
- [41] Tian Ma and Shouhong Wang. Bifurcation of nonlinear equations. I. Steady state bifurcation. *Methods Appl. Anal.*, 11(2) :155–178, 2004.
- [42] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [43] Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz. *Linear Operators. I. General Theory*. With the assistance of W. G. Bade and R. G. Bartle. Pure and Applied Mathematics, Vol. 7. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [44] Kôzaku Yosida. *Functional analysis*, volume 123 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, sixth edition, 1980.
- [45] Stefan Krömer, Timothy J. Healey, and Hansjörg Kielhöfer. Bifurcation with a two-dimensional kernel. *J. Differential Equations*, 220(1) :234–258, 2006.
- [46] Pascal Chossat and Reiner Lauterbach. *Methods in equivariant bifurcations and dynamical systems*, volume 15 of *Advanced Series in Nonlinear Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2000.
- [47] Thomas Brand, Markus Kunze, Guido Schneider, and Thorsten Seelbach. Hopf bifurcation and exchange of stability in diffusive media. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 171(2) :263–296, 2004.
- [48] Guido Schneider. Nonlinear stability of Taylor vortices in infinite cylinders. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 144(2) :121–200, 1998.
- [49] L. Peletier and J. Williams. Some canonical bifurcations in the swift–hohenberg equation. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 6(1) :208–235, 2007.
- [50] Jack K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, volume 25 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

Titre : Etude des Solutions Stationnaires d'un Modèle de Champs de Phase Cristallin

Résumé

Cette thèse porte essentiellement sur l'étude des solutions stationnaires, en dimension 1 d'espace, d'un modèle de champs de phase cristallin introduit par Elder en 2002. Ainsi, nous prouvons, par la méthode de réduction de Lyapunov-Schmidt et la technique des multiparamètres, l'existence de courbes de solutions bifurquantes stationnaires lorsque le noyau de l'opérateur linéarisé, au voisinage de la solution triviale est de dimension 2. Une parenthèse est ouverte pour la comparaison de l'énergie de la solution bifurquante par rapport à celle la solution triviale. Aussi, grâce au principe de la stabilité réduite, nous fournissons des ensembles précis de valeurs des paramètres de bifurcation pour lesquelles les solutions obtenues sont stables ou instables. Ces résultats théoriques sont corroborés par plusieurs tests numériques. Par ailleurs, dans le cas classique du noyau unidimensionnel, nous établissons des diagrammes de phases permettant de comprendre les différentes orientations de courbes de solutions non triviales au voisinage de chaque point de bifurcation.

Mots-clés : Champs de Phase Cristallin. Bifurcation. Méthode de Réduction de Lyapunov-Schmidt. Méthode des multiparamètres. Solutions bifurquantes stationnaires. Stabilité.

Title : Study of Stationary Solutions of a Phase Field Crystal Model

Abstract

This thesis is devoted to the study of stationary solutions of a Phase Field Crystal model, in one space dimension, introduced by Elder in 2002. Thus, we prove by the Lyapunov-Schmidt method of reduction and the multiparameter technique, the existence of the curves of bifurcating stationary solutions when the kernel of the linearized operator near to trivial solution is of two dimension. A parenthesis is open for comparing the energies of the bifurcating solution and the trivial solution. Also, thanks to the principle of reduced stability, we provide specific sets of parameter values for wich the obtained solutions are stable or unstable. These theoretical results are confirmed by several numerical tests. Moreover, in the classical case of a one dimensional kernel, we establish the phase diagrams allowing to understand the different orientations of non-trivial solutions curves near to of each bifurcation point.

Keywords : Phase Field Crystal. Bifurcation. Lyapunov-Schmidt Method of Reduction. Multiparameter method. Bifurcating solutions. Stability.