

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Pôle poitevin de recherche pour l'ingénieur en mécanique, matériaux et énergétique -
PPRIMME
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie en matériaux, mécanique, énergétique et
aéronautique - SIMMEA (Poitiers)
Secteur de recherche : Mécanique des solides, robotique, biomécanique et bioingénierie

Présentée par :
Juan Antonio Rojas Quintero

Contribution à la manipulation dextre dynamique pour les aspects conceptuels et de commande en ligne optimale

Directeur(s) de Thèse :
Marc Arsicault, Jean-Pierre Gazeau

Soutenue le 31 octobre 2013 devant le jury

Jury :

Président	Géry de Saxcé	Professeur des Universités, Université de Lille 1
Rapporteur	Gérard Poisson	Professeur des Universités, Université d'Orléans
Rapporteur	Daniel Sidobre	Maître de conférences, Université de Toulouse 3
Membre	Marc Arsicault	Maître de conférences, Université de Poitiers
Membre	Jean-Pierre Gazeau	Ingénieur de recherche CNRS, Université Paris 7
Membre	Claude Vallée	Professeur émérite, Université de Poitiers
Membre	Pascal Seguin	Maître de conférences, Université de Poitiers
Membre	Zhi-Qiang Feng	Professeur des Universités, Université d'Évry-Val d'Essonne

Pour citer cette thèse :

Juan Antonio Rojas Quintero. *Contribution à la manipulation dextre dynamique pour les aspects conceptuels et de commande en ligne optimale* [En ligne]. Thèse Mécanique des solides, robotique, biomécanique et bioingénierie. Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur Internet <<http://theses.univ-poitiers.fr>>

THÈSE

pour l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National – Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale SCIENCES ET INGÉNIERIE EN MATÉRIAUX, MÉCANIQUE,
ÉNERGÉTIQUE ET AÉRONAUTIQUE

Secteurs de Recherche : MÉCANIQUE DES SOLIDES, ROBOTIQUE, BIOMÉCANIQUE &
BIOINGÉNIERIE

Présentée par

JUAN ANTONIO ROJAS QUINTERO

CONTRIBUTION À LA MANIPULATION DEXTRE
DYNAMIQUE POUR LES ASPECTS CONCEPTUELS ET DE
COMMANDE EN LIGNE OPTIMALE

Sous la direction de Marc Arsicault.

Co-dirigée par Jean-Pierre Gazeau, Pascal Seguin & Claude Vallée.

Soutenance prévue le 31 Octobre 2013
devant la commission d'Examen

JURY

Géry de SAXCÉ, <i>Professeur à l'Université de Lille 1</i>	Président
Gérard POISSON, <i>Professeur à l'Université d'Orléans</i>	Rapporteur
Daniel SIDOBRE, <i>Maître de Conférences à l'Université Toulouse 3</i>	Rapporteur
Marc ARSICAULT, <i>Maître de Conférences à l'Université de Poitiers</i>	Examineur
Zhi-Qiang FENG, <i>Professeur à l'Université d'Evry-Val d'Essone</i>	Examineur
Jean-Pierre GAZEAU, <i>Ingénieur de Recherche au CNRS</i>	Examineur
Pascal SEGUIN, <i>Maître de Conférences à l'Université de Poitiers</i>	Examineur
Claude VALLÉE, <i>Professeur Émérite à l'Université de Poitiers</i>	Examineur

CONTRIBUTION À LA MANIPULATION DEXTRE DYNAMIQUE
POUR LES ASPECTS CONCEPTUELS ET DE COMMANDE EN
LIGNE OPTIMALE

JUAN ANTONIO ROJAS QUINTERO



Septembre 2013

Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem.

Les entités ne doivent pas être multipliées sans nécessité.

— Guillaume d'Occam (vers 1295)

COMMUNICATIONS ET PUBLICATIONS

Quelques idées et figures présentes dans ce document sont apparues précédemment dans les communications et publications suivantes :

J. A. Rojas Quintero, C. Vallée, D. Fortuné, J. P. Gazeau. *Covariant formulation of optimal control*. Mathematics and Mechanics of Solids (MMS), SAGE. — Soumis.

J. A. Rojas Quintero, J. P. Gazeau, P. Seguin, M. Arsicault. *Using a Motion Capture System to Identify Pertinent Design Parameters of a Bio-inspired Mechanical Hand*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering (CMBBE), 16 (supplement 1) : 179–181, 2013. Taylor & Francis.

J. A. Rojas Quintero, C. Vallée, J. P. Gazeau, P. Seguin, M. Arsicault. *An alternative to Pontryagin's principle for the optimal control of jointed arm robots*. Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, Août 2013.

J. A. Rojas Quintero, C. Vallée, J. Chaoufi, S. Zeghloul. *Efficient algorithms to control jointed arm robots*. Congrès Mécanique de la Société Marocaine des Sciences Mécaniques, Agadir, Avril 2013.

J. A. Rojas Quintero, J. P. Gazeau, P. Seguin, M. Arsicault. *Manipulation dextre par des mains mécaniques avec prise en compte de la dynamique*. Congrès Français de Mécanique, Besançon, Août 2011.

Un ami me dit : « si tu devais remercier toutes les personnes qui t'ont apporté leur aide, tu oublierais les trois quarts d'entre elles ».

(Anonyme)

REMERCIEMENTS

Je souhaite tout d'abord remercier le directeur de cette thèse, le Docteur Marc Arsicault, ainsi que les deux co-directeurs, les Docteurs Jean-Pierre Gazeau et Pascal Seguin, pour m'avoir confié ce travail de recherche. Ils m'ont toujours laissé une grande liberté d'action durant cette période et j'espère sincèrement avoir été à la hauteur de leurs espérances.

Je remercie également le Professeur Olivier Bonneau, directeur du Laboratoire de Mécanique des Solides (LMS), son successeur le Directeur de Recherche Michel Fillon et le Professeur Saïd Zeghloul, actuel directeur du département Génie Mécanique des Systèmes Complexes de l'Institut [PPRIME](#) (anciennement LMS). Ils m'ont accueilli au sein du laboratoire et m'ont permis de travailler dans des conditions favorables ainsi que dans un environnement scientifique adéquat.

Je remercie les membres externes du Jury, les Professeurs Zhi-Qiang Feng et Gérard Poisson et le Docteur Daniel Sidobre de l'intérêt porté à ce travail de recherche. Un grand merci au Professeur Géry de Saxcé pour ses encouragements lors d'un congrès à Bordeaux.

Je remercie aussi le Professeur Patrick Lacouture qui m'a permis d'élargir mon champ de compétences à la biomécanique. Il m'a donné l'opportunité de participer à l'enseignement de la biomécanique à la Faculté des Sciences du Sport de l'Université de Poitiers durant mon cycle de thèse. Les Docteurs Floren Colloud et Tony Monnet, membres de l'équipe pédagogique ont facilité cette expérience en me conseillant judicieusement sur l'enseignement et je les en remercie.

Au cours de ce cycle de thèse, comme tout doctorant, j'ai du assimiler des notions scientifiques et techniques essentielles à l'exercice du travail de recherche scientifique. Sans l'aide des doctorants, ingénieurs et Maîtres de Conférences membres de l'équipe, cela n'aurait pas été possible. Merci aux Docteurs Vincent Fohanno et Mathieu Domalain pour avoir tenu le rôle de « consultant » lors des expérimentations en capture et en analyse du mouvement. Merci à Thomas Rivière pour ses explications sur la lecture et la réalisation des plans mécaniques. Merci au Docteur Antoine Eon pour ses explications sur la modélisation dynamique de Newton-Euler. Enfin merci à Madame Danielle Fortuné pour ses explications sur la mécanique lagrangienne et sur le calcul tensoriel.

Je n'oublie pas tous les autres membres de l'axe Robotique Biomécanique Sport Santé ([RoBioSS](#)) que j'ai eu la chance de côtoyer pendant les heures de travail et en dehors également. Ils ont rendu le climat agréable et m'ont fourni un soutien supplémentaire. Beaucoup sont devenus mes amis et je les remercie également : Ameer, Amine, Arnaud, Franco, Houssein, Hussein, Julien, Luc, Naël, Philippe et TERENCE. Je remercie aussi les techniciens de l'atelier mécanique Mickaël Beau et René Branlé ainsi que les secrétaires Laurence Artus, Estelle Ferdinand et Djamila Lagache.

Je pense également à toutes les personnes qui me sont proches, des amis sans qui cette thèse n'aurait jamais eu lieu. Ils m'ont tous apporté leur soutien inconditionnel et par des actions ponctuelles, aussi petites fussent-elles, ils ont fait en sorte que mon travail s'achève : Adrien, Camille, Florie, Gabriele Arcangelo, Jean-Baptiste, Mélanie, Nicolas, Pierre et Rémi. Je les remercie. Je remercie particulièrement Elodie qui m'a soutenu, encouragé et motivé pendant une grande partie de ma thèse.

Je remercie mes parents, c'est d'abord grâce à eux que j'ai découvert le milieu de la robotique et ce sont eux qui m'ont inspiré à m'engager dans le chemin de la recherche scientifique. Je remercie mes sœurs, elles m'ont toujours apporté une légèreté apaisante loin de la pression du travail. Je n'oublie pas ces personnes qui ont porté une grande attention à mon égard. Elles m'ont considéré comme un membre de leur propre famille : Angelina, Claudia, Evelyne et Gabriel. Je les en remercie chaleureusement.

Enfin, je tiens à remercier tout particulièrement le Professeur Claude « *le coach* » Vallée. Toujours avidement intéressé par la recherche en Mécanique, il s'est penché sur mon cas et m'a patiemment guidé cette dernière année. Je le remercie de m'avoir instruit et apporté son expérience en matière de *commande optimale*, en matière de *méthodes de calcul numérique et optimisation* ainsi qu'en *calcul tensoriel*. J'espère sincèrement être devenu le mauvais élève qu'il aurait voulu "*coacher*".

TABLE DES MATIÈRES

I	ASSISTANCE À LA CONCEPTION DES MAINS MÉCANIQUES ANTHROPOMORPHES À L'AIDE D'UN OUTIL DE CAPTURE ET D'ANALYSE DU MOUVEMENT OPTIQUE	1
1	INTRODUCTION	3
2	STRATÉGIE DE SYNTHÈSE DE TÂCHES DE MANIPULATION DYNAMIQUE	5
2.1	Synthèse de prise	5
2.2	Calcul des points de contact : roulement sans glissement	7
2.2.1	Algorithme de planification des tâches de manipulation	10
2.3	Calcul des coordonnées articulaires : modèle géométrique	10
2.4	Calcul des efforts de contact	11
2.5	Calcul des couples actionneurs : Modèle Dynamique	14
2.5.1	Modèle dynamique d'un doigt	14
2.5.2	Calcul des couples actionneurs d'un doigt	16
3	APPROCHE BIOMÉCANIQUE DE LA MANIPULATION	19
3.1	État de l'art	19
3.1.1	Cinématique de la main humaine	19
3.1.2	Les tâches de préhension et de manipulation réalisées par l'humain	20
3.1.3	Dimensions de la main humaine	22
3.2	Analyse du mouvement et reconstruction 3D	22
3.2.1	Les systèmes d'analyse du mouvement optiques	23
3.2.2	Les systèmes d'analyse du mouvement non optiques	24
3.2.3	Protocole d'enregistrement d'une tâche de manipulation dextre	24
4	ÉTAT DE L'ART EN MATIÈRE DE MAINS ROBOTIQUES ANTHROPOMORPHES	29
4.1	Les mains mécaniques à actionnement élevé et au design anthropomorphe	29
4.1.1	La main UTAH/MIT	29
4.1.2	La main du DLR	30
4.1.3	La main de la SHADOW ROBOT COMPANY	31
4.1.4	La main GIFU-III	32
4.1.5	La main NAIST	33
4.2	Les mains dextres à dynamique élevée et résistantes aux chocs	34
4.2.1	Main UT/HDS	34
4.2.2	La main « super robuste » du DLR	35
4.2.3	Conclusion	36
4.3	Les mains robotiques de l'Institut PPRIME	37
4.3.1	La main robotique à quatre doigts et seize articulations ROB-H16	37
4.3.2	Les expérimentations conduites	38
4.3.3	Main robotique intégrée à quatre doigts et douze actionneurs ROB-H12	41
4.3.4	La main ABILIS	42
4.3.5	Conclusion	42
5	EVALUATION DES MAINS ROBOTIQUES	45

5.1	La capture et l'analyse du mouvement au service du développement de mains robotiques	46	
5.2	Simulation avec les mains robioss, recherche des limites	48	
5.2.1	Essais de la main ROB-H16	49	
5.2.2	Essais de la main ROB-H12	51	
5.2.3	Bilan des essais	51	
5.3	Analyses supplémentaires et évaluation des moteurs	52	
5.3.1	Analyse du rapport de couplage articulaire IPP-IPD	53	
5.3.2	Le rôle du poignet dans les tâches de manipulation dynamique	54	
5.3.3	Evaluation motrice des mains mécaniques	55	
6	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	59	
II CONTRÔLE OPTIMAL DES ROBOTS MANIPULATEURS PAR LES ÉLÉMENTS FINIS TEMPORELS D'HERMITE 61			
7	INTRODUCTION	63	
7.1	La méthode de contrôle	63	
7.2	La Méthode des Éléments Finis	63	
7.3	La Méthode des Éléments Finis en Robotique	64	
7.4	Structure de la partie	65	
8	DYNAMIQUE DU ROBOT ET ÉQUATIONS DU MOUVEMENT	67	
8.1	Dynamique du Robot	67	
8.1.1	Énergie cinétique	67	
8.1.2	Potentiel de gravitation	67	
8.1.3	Actionneurs	67	
8.2	Modèle dynamique	68	
8.2.1	Équations de Lagrange	68	
8.2.2	Dérivée covariante du potentiel de gravité	69	
8.2.3	Formulation tensorielle des équations du mouvement	69	
9	DISCRÉTISATION TEMPORELLE	71	
9.1	Éléments Finis Cubiques d'Hermite	71	
9.1.1	Fonctions de base cubiques d'Hermite	71	
9.1.2	Éléments Finis Cubiques d'Hermite	71	
9.1.3	Interpolation d'Hermite cubiques par morceaux cubiques	72	
9.2	Éléments Finis Quintiques d'Hermite	72	
9.2.1	Fonctions de base quintiques d'Hermite	72	
9.2.2	Éléments Finis Quintiques d'Hermite	74	
9.2.3	Interpolation d'Hermite quintiques par morceaux	74	
9.3	Éléments Finis Heptiques d'Hermite	74	
9.3.1	Fonctions de base Heptiques d'Hermite	74	
9.3.2	Éléments Finis Heptiques d'Hermite	75	
9.3.3	Interpolation d'Hermite heptiques par morceaux	76	
9.4	Bilan des trois variantes de la Méthode des Éléments Finis d'Hermite	76	
9.5	Précision des interpolations	77	
10	SIMULATION DES MOUVEMENTS : EXEMPLE DU PENDULE NON-LINÉAIRE	81	
10.1	Algorithme d'intégration temporelle	81	
10.1.1	Remarques sur l'algorithme d'intégration temporelle	81	
10.2	Méthode de perturbation	82	
10.3	Validation de la méthode de perturbation	82	
10.3.1	Description du pendule non-linéaire	82	

10.3.2	Implémentation de la méthode par les EFCH	83
10.3.3	Solution classique de l'équation du mouvement du pendule linéaire	84
10.3.4	Approximation de la solution du pendule non-linéaire par la méthode des perturbations	84
10.3.5	Comparaison de q_3 avec q_1	85
10.3.6	Comparaison de q_3 avec la solution de Jacobi	86
11	CONTRÔLE OPTIMAL : MÉTHODES ET ALGORITHMES	89
11.1	Contrôle optimal	89
11.1.1	Fonction coût invariante	89
11.1.2	Méthode d'optimisation d'Euler-Lagrange	90
11.1.3	Algorithme de contrôle optimal par la méthode de perturbation	91
11.1.4	Algorithme de Contrôle Optimal par optimisation directe	92
11.2	Rappels de géométrie riemannienne	93
11.2.1	Dérivée covariante par rapport au temps du tenseur de commande	93
11.2.2	Dérivée covariante du tenseur de commande	94
11.2.3	Dérivée seconde covariante du potentiel de gravitation	94
11.2.4	Dérivée seconde covariante par rapport au temps du tenseur de commande	94
11.2.5	Théorème de Ricci	94
11.2.6	Dérivée seconde covariante du tenseur de commande	95
11.2.7	Symétrie de la dérivée seconde covariante	95
11.2.8	Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel	95
11.3	Covariance des équations de la commande	95
12	SIMULATIONS NUMÉRIQUES DES TRAJECTOIRES ET DES COMMANDES	97
12.1	Exemple linéaire à 1 DDL	97
12.1.1	Solution de référence	98
12.1.2	Algorithme de commande optimale par une méthode de descente	98
12.1.3	Optimisation par les EFCH	99
12.1.4	Optimisation par les EFQH	102
12.1.5	Optimisation par les EFHH	105
12.1.6	Remarques et résultats concernant l'exemple à 1 DDL linéaire	109
12.2	Exemple linéaire à 2 DDL couplés	113
12.2.1	Optimisation par les EFCH	115
12.2.2	Détails sur la construction du système linéaire	117
12.2.3	Résultats	118
12.3	Commande optimale d'un robot à 2 DDL	120
12.3.1	Modèle dynamique du robot à 2 DDL	121
12.3.2	Symboles de Christoffel	122
12.3.3	Potentiel de gravitation	124
12.3.4	Équations covariantes du mouvement du robot à 2 DDL	124
12.3.5	Comparaison de notre modèle dynamique avec celui d'un code de calcul commercial	124
12.3.6	Commande optimale par la méthode de perturbation	126
12.3.7	Résultats de la commande optimale du robot à 2 DDL	127

13 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES 133

BIBLIOGRAPHIE 135

TABLE DES FIGURES

FIGURE 1	Algorithme pour la synthèse des tâches de manipulation	5
FIGURE 2	Chaîne cinématique ouverte d'un doigt de la main ROB-H12 à $n_q = 4$ corps segmentaires	14
FIGURE 3	Complexe osseux de la main humaine et les différentes articulations des doigts	19
FIGURE 4	Les deux familles de prises : prise de puissance et prise de précision	21
FIGURE 5	Six principaux types de prises	21
FIGURE 6	Chaîne cinématique d'un doigt long	22
FIGURE 7	Système d'acquisition du mouvement multi caméras VICON®	25
FIGURE 8	Utilisation des capteurs passifs sur une main humaine et modèle virtuel 3D construit par le logiciel NEXUS	25
FIGURE 9	Repérage des marqueurs et repères des phalanges de la main	26
FIGURE 10	Coordonnées articulaires d'un doigt en mouvement avant et après filtrage	27
FIGURE 11	La main UTAH/MIT	30
FIGURE 12	La main du DLR	31
FIGURE 13	La main de SHADOW C5 et C6M	32
FIGURE 14	La main GIFU-III	32
FIGURE 15	La main NAIST	33
FIGURE 16	La main UT/HDS	34
FIGURE 17	La main « super robuste » du DLR	35
FIGURE 18	Des préhenseurs spécifiques	36
FIGURE 19	La main à quatre doigts et seize actionneurs ROB-H16	37
FIGURE 20	Schéma de la transmission de la main ROB-H16	38
FIGURE 21	Exemples de synthèse de prise en bout de doigt	39
FIGURE 22	Prise d'un objet sphérique en utilisant l'approche mixte	40
FIGURE 23	Mouvement de vissage d'une ampoule : étapes de la manipulation	40
FIGURE 24	La main compacte à douze actionneurs et seize articulations ROB-H12	41
FIGURE 25	Transmission des mains RoBioSS	41
FIGURE 26	La main ABILIS	43
FIGURE 27	Remplissage d'un verre à l'aide d'une bouteille d'eau	43
FIGURE 28	Postures caractéristiques de la main humaine	43
FIGURE 29	Mise en rotation rapide d'une balle de tennis : positionnement des marqueurs réfléchissants pour l'enregistrement	46
FIGURE 30	Plan de prise de la saisie : points de contact A_1 , A_2 et A_3 entre la balle et les extrémités des doigts de l'opérateur	47
FIGURE 31	Mouvement de la balle enregistré	48
FIGURE 32	Mouvement enregistré focalisé sur la phase de contact entre les doigts du sujet et la balle	48

FIGURE 33	Forces de manipulation durant la phase de contact de la mise en rotation de la balle de tennis pour chaque doigt des mains RoBioSS 50	
FIGURE 34	Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H16 avec une prise Pouce, Index et Majeur 50	
FIGURE 35	Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H16 avec une prise Pouce, Index et Annulaire 50	
FIGURE 36	Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H12 avec une prise Pouce, Index et Majeur 51	
FIGURE 37	Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H12 avec une prise Pouce, Index et Annulaire 51	
FIGURE 38	Rapports de couplage des articulations IPP-IPD durant la phase de manipulation des sujets humains 54	
FIGURE 39	Déplacements angulaires et linéaires du poignet pendant la phase de manipulation de la mise en rotation rapide de la balle de tennis 55	
FIGURE 40	Couples articulaires de ROB-H12 pour la phase de manipulation de la mise en rotation rapide d'une balle de tennis 56	
FIGURE 41	Fonctions de base cubiques d'Hermite : ϕ , ψ et leurs dérivées premières et secondes 71	
FIGURE 42	Fonctions de base quintiques d'Hermite : ϕ , ψ , θ et leurs dérivées premières et secondes 73	
FIGURE 43	Fonctions de base heptiques d'Hermite : ϕ , ψ , θ , χ et leurs dérivées premières, secondes et troisièmes 76	
FIGURE 44	Superconvergence des interpolations de la fonction $\sin t$ par les EFCH , les EFQH et les EFHH 79	
FIGURE 45	Pendule non-linéaire 83	
FIGURE 46	Distribution des instants particuliers pour l'approximation de l'équation du mouvement du pendule non-linéaire par la méthode de perturbation 84	
FIGURE 47	Pendule linéaire : comparaison de la solution classique avec la solution calculée par les EFCH 85	
FIGURE 48	Comparaison de la solution du pendule linéaire $q_1(t)$ avec la solution du pendule non-linéaire calculée $q_3(t)$ 86	86
FIGURE 49	Comparaison de la solution exacte du pendule non-linéaire θ avec la solution calculée par la méthode de perturbation q_3 86	
FIGURE 50	Comparaison de la solution de référence du pendule linéaire avec la solution approchée obtenue par les EFCH : position, vitesse, accélération et secousse en fonction du temps 110	
FIGURE 51	Comparaison de la solution de référence du pendule linéaire avec la solution approchée obtenue par les EFQH : position, vitesse, accélération et secousse en fonction du temps 111	
FIGURE 52	Comparaison de la solution de référence du pendule linéaire avec la solution approchée obtenue par les EFHH : position, vitesse, accélération et secousse en fonction du temps 111	
FIGURE 53	Superconvergence des EFCH , EFQH et EFHH pour l'exemple à 1 DDL par la méthode d'optimisation 112	

FIGURE 54	Décroissance de l'intégrale $\mathcal{J}(q_N)$ par la méthode d'optimisation : $\ln(\mathcal{J}(q_N))$ en fonction de $\ln\left(\frac{\pi}{N}\right)$. 113
FIGURE 55	Comparaison de la solution approchée $q_N^1(t)$ avec la solution de référence $q^1(t)$ ainsi que leurs dérivées premières, secondes et tierces en fonction du temps 119
FIGURE 56	Comparaison de la solution approchée $q_N^2(t)$ avec la solution de référence $q^2(t)$ ainsi que leurs dérivées premières, secondes et tierces en fonction du temps 120
FIGURE 57	Schéma du robot à 2 DDL 120
FIGURE 58	Positions initiales et finales de la trajectoire « test » du KUKA LBR 4+ 125
FIGURE 59	Paramètres angulaires de la trajectoire « test ». 125
FIGURE 60	Comparaison des deux modèles dynamiques 126
FIGURE 61	Trajectoires angulaires optimales : $q_3^1(t)$ et $q_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $q_1^1(t)$ et $q_1^2(t)$ 127
FIGURE 62	Commandes optimales : $u_3^1(t)$ et $u_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $u_1^1(t)$ et $u_1^2(t)$ 128
FIGURE 63	Simulation du mouvement optimal 129
FIGURE 64	Vitesses articulaires optimales : $\dot{q}_3^1(t)$ et $\dot{q}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\dot{q}_1^1(t)$ et $\dot{q}_1^2(t)$ 129
FIGURE 65	Accélérations articulaires optimales : $\ddot{q}_3^1(t)$ et $\ddot{q}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\ddot{q}_1^1(t)$ et $\ddot{q}_1^2(t)$ 130
FIGURE 66	Dérivées premières temporelles des commandes optimales : $\dot{u}_3^1(t)$ et $\dot{u}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\dot{u}_1^1(t)$ et $\dot{u}_1^2(t)$ 130
FIGURE 67	Dérivées secondes temporelles des commandes optimales : $\ddot{u}_3^1(t)$ et $\ddot{u}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\ddot{u}_1^1(t)$ et $\ddot{u}_1^2(t)$ 131

LISTE DES TABLEAUX

TABLE 1	Rapport entre la taille du segment médian du majeur et les distances inter axiales de chaque doigt 22
TABLE 2	Rapport entre la taille du segment médian du majeur et les dimensions principales de la paume de la main humaine 22
TABLE 3	Limites angulaires des abductions-adductions des doigts longs des mains RoBioSS 52
TABLE 4	Rapports de couplage constants des articulations IPP-IPD des mains RoBioSS 53
TABLE 5	Spécifications techniques du système d'actionnement de ROB-H12 55
TABLE 6	Evaluation du pouce de ROB-H12 pour une mise en rotation rapide d'une balle de tennis 57
TABLE 7	Evaluation de l'index de ROB-H12 pour une mise en rotation rapide d'une balle de tennis 57

TABLE 8	Evaluation de l'annulaire de ROB-H12 pour une mise en rotation rapide d'une balle de tennis 57
TABLE 9	Étude de la convergence des méthodes des EFCH, EFQH et EFHH; $\ e\ _i$ en rad 78
TABLE 10	Vérification de la superconvergence des méthodes des EFCH, EFQH et EFHH pour l'exemple à 1 DDL; $\ e\ _i$ en rad 112
TABLE 11	Décroissance de l'intégrale $\mathcal{J}(q_N)$ pour l'exemple à 1 DDL par les EFCH, EFQH et EFHH : \mathcal{S}_i en $\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ 113
TABLE 12	Paramètres inertiels du robot KUKA LBR 4+ fournis par le modèle CAO de SOLIDWORKS® 125

ACRONYMES

ABILIS	Approches Bio Inspirées pour La manipulation Intelligente et la Saisie
AG	Algorithmes Génétiques
ANR	Agence Nationale de la Recherche
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CEA	Commissariat à l'Énergie Atomique
CMC	Carpo-métacarpienne
DDL	Degré De Liberté
DLR	Deutsches Zentrum für Luft Raumfahrt
EDO	Équations Différentielles Ordinaires
EDP	Équations aux Dérivées Partielles
EFCH	Éléments Finis Cubiques d'Hermite
EFH	Éléments Finis d'Hermite
EFHH	Éléments Finis Heptiques d'Hermite
EFQH	Éléments Finis Quintiques d'Hermite
HJB	Hamilton – Jacobi – Bellman
IPP	Inter-phalangienne Proximale
IPD	Inter-phalangienne Distale
MEF	Méthode des Éléments Finis
MCP	Métacarpo-phalangienne
MGD	Modèle Géométrique Direct
MGI	Modèle Géométrique Inverse
MPH	Matrice de Passage Homogène
PFD	Principe Fondamental de la Dynamique
PMP	Principe du Maximum de Pontriaguine
POB	Principe d'Optimalité de Bellman
PPRIME	Pôle Poitevin de Recherche pour l'Ingénieur en Mécanique, Matériaux et Énergétique

PVB	Problème des Valeurs aux Bornes
RMS	Root Mean Square
RoBioSS	Robotique Biomécanique Sport Santé
SQP	Sequential Quadratic Programming
ST	Scaphoïdo-trapézoïdienne
TM	Trapézo-métacarpienne

Première partie

ASSISTANCE À LA CONCEPTION DES MAINS
MÉCANIQUES ANTHROPOMORPHES À L'AIDE
D'UN OUTIL DE CAPTURE ET D'ANALYSE DU
MOUVEMENT OPTIQUE

*Two important characteristics of maps should be noticed. A map is not
the territory it represents, but if correct, it has a similar structure to
the territory, which accounts for its usefulness.*

— Alfred Korzybski (1933)

INTRODUCTION

Dès sa création au début des années 80, l'équipe Mécanismes et Robotique dirigée alors par J.-C. Guinot, s'est intéressée à la préhension robotique. Ainsi de nombreux travaux théoriques et expérimentaux ont été conduits en mécanique de la préhension depuis cette époque.

Les premiers travaux concernaient la conception de préhenseurs en utilisant la théorie des mécanismes. Ces travaux ont conduit à la réalisation notamment d'un préhenseur bidigital [53] et d'un préhenseur isostatique tridigital [80]; pour mémoire, ces deux préhenseurs étaient dotés de mouvements de translation indépendants des doigts instrumentés en capteurs d'efforts. Parallèlement à ces réalisations, des études sur la stabilité de la prise, la mécanique du contact en considérant la géométrie de l'objet ont été conduites. Ensuite afin d'assurer des mouvements fins pour réaliser des tâches d'assemblage de précision, P. Bidaud [11] a développé un préhenseur manipulateur composé de trois modules indépendants. Chaque module est un doigt articulé souple à trois mobilités instrumenté en capteurs d'efforts; ainsi le préhenseur est capable d'assurer des mouvements fins de la pièce saisie selon ses six Degré De Liberté (DDL). On peut également citer le préhenseur à trois doigts développé par C. Chenebault [17] pour réaliser des assemblages cylindriques (à faible jeu : inférieur à $4\ \mu\text{m}$) sous contrôle. Parallèlement à ces réalisations, de nombreux travaux sur la prise optimale ont été conduits et en particulier sur la prise par empaument [32, 3].

Sur la base de ces compétences théoriques et expérimentales en préhension robotique, l'équipe a ensuite, sous l'impulsion de son directeur J.-P. Lallemant, souhaité étendre au début des années 90 ses travaux à la question plus générale de la manipulation dextre en robotique. C'est ainsi qu'en 1996, a été réalisée une nouvelle main mécanique polyarticulée à quatre doigts et seize actionneurs. Cette main robotique au design anthropomorphe unique sur la scène nationale a depuis cette date été utilisée comme plateforme expérimentale pour la validation de l'ensemble des recherches théoriques conduites en manipulation dextre. Elle a ainsi été exploitée dans le cadre du projet ANR Approches Bio Inspirées pour La manipulation Intelligente et la Saisie (ABILIS) sur la période 2009–2012 pour explorer des approches de la saisie bio-inspirée.

La conception de mains robotiques pour des opérations de saisie et/ou de manipulation dextre reste aujourd'hui une problématique complexe. Les préhenseurs développés pour des opérations de saisie restent généralement dédiés à la réalisation d'une tâche spécifique; c'est le cas des nombreux préhenseurs exploités industriellement.

En ce qui concerne les mains robotiques dédiées à la manipulation dextre, leur utilisation reste à ce jour encore confinée aux laboratoires de recherche en raison de la complexité inhérente à la conception de ces mains, ainsi qu'à leur mise en oeuvre.

La conception de préhenseurs dotés de capacités d'universalité et de flexibilité reste ainsi un enjeu important pour l'avenir de la robotique et en particulier pour la robotique collaborative. L'émergence des robots « *Safety* », c'est-à-dire *sûrs* pour l'opérateur humain, permet d'envisager de nouveaux

champs d'exploitation où le robot et l'homme interagiront ensemble dans un environnement commun pour mener à bien une tâche donnée.

Pour offrir des capacités d'interaction élevée entre l'humain et la machine, il sera nécessaire de doter le robot d'un organe de préhension capable de s'adapter à des objets variés afin de satisfaire aux exigences d'interaction propre à un environnement humain. Le préhenseur constitue ainsi une interface essentielle pour interagir avec l'environnement et ainsi avec un opérateur humain.

Fort de ce constat, l'équipe s'est intéressée très tôt à la main humaine qui reste un modèle d'adaptabilité, de flexibilité et d'universalité aussi bien pour la préhension d'objets que pour la manipulation. Ce design anthropomorphe a ainsi inspiré l'équipe dans la conception de mains robotiques dédiées à la manipulation dextre ; elle a par ailleurs également inspiré plusieurs laboratoires sur la scène internationale.

Aussi à travers cette partie, nous nous proposons après la présentation de notre stratégie de synthèse des tâches de manipulation dynamiques, puis des mains robotiques de référence, d'analyser la capacité de ces mains à produire certaines tâches cibles en particulier dans un contexte dynamique.

Les recherches conduites en manipulation dextre depuis une quinzaine d'années ont permis de proposer une approche générale pour la production de tâches de manipulation dextre dans un contexte quasi-statique. Il s'agit alors après une saisie de l'objet, de le manipuler en bout de doigts afin de lui imposer un déplacement souhaité.

La volonté de produire de la saisie dynamique ou encore de la manipulation dynamique implique des contraintes nouvelles dans la conception des mains robotiques. Ces contraintes nouvelles doivent être évaluées et intégrées si l'on souhaite à terme exploiter ces mains robotiques dans un environnement dynamique et en particulier dans le cadre d'applications en robotique collaborative où l'humain évolue et coopère avec le robot dans un environnement partagé.

Afin d'intégrer ces contraintes, nous avons en premier lieu choisi d'analyser le mouvement humain sur des tâches de manipulation dynamique. Sur la base de cette analyse, nous pourrions ainsi évaluer la capacité des mains robotiques existantes, voire des préhenseurs polyarticulés existants à produire de telles tâches. En second lieu, une synthèse des paramètres affectant la capacité de ces mains à manipuler les objets sera effectuée et puis des perspectives seront ensuite proposées à ce travail.

STRATÉGIE DE SYNTHÈSE DE TÂCHES DE MANIPULATION DYNAMIQUE

Dans ce chapitre, nous détaillerons la stratégie complète de synthèse de tâches en manipulation dynamique (voir FIGURE 1) développée au sein de l'Institut Pôle Poitevin de Recherche pour l'Ingénieur en Mécanique, Matériaux et Énergétique (PPRIME) de l'Université de Poitiers. Cette stratégie a pour but de permettre l'évaluation des mains mécaniques existantes lors de tâches de manipulation dynamique et d'aider à la conception de nouvelles mains. Ainsi, nous présenterons successivement la synthèse de prise d'un objet, le calcul des points de contact entre les différents doigts et l'objet manipulé avec la condition de roulement sans glissement, les modèles géométriques directs et inverses pour chaque doigt, le calcul des *efforts de serrage* en respectant la stabilité dynamique de l'objet et enfin le calcul des couples actionneurs par l'utilisation du modèle dynamique.

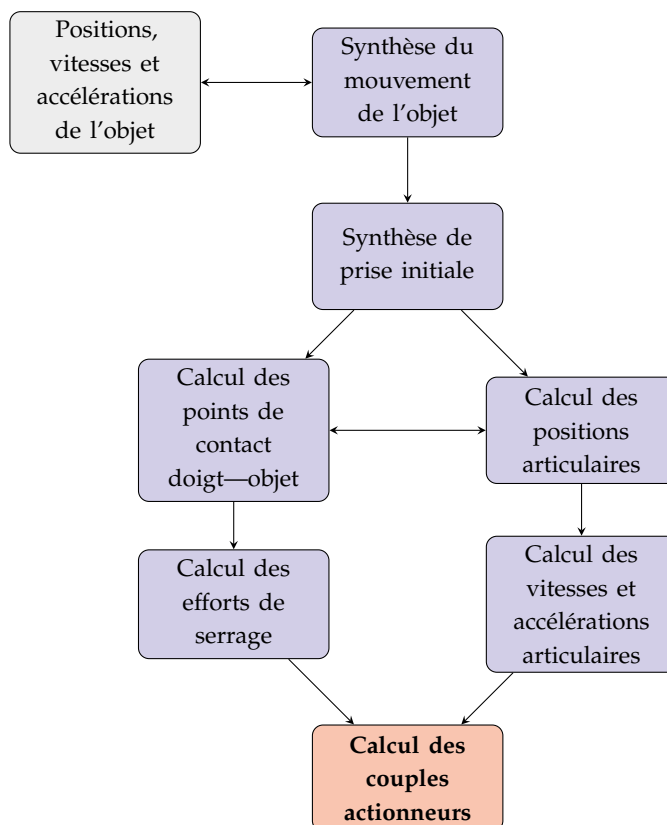


FIGURE 1: Algorithme pour la synthèse des tâches de manipulation

2.1 SYNTHÈSE DE PRISE

Pour pouvoir manipuler un objet, la première étape importante est la *synthèse de prise initiale* de cet objet. La notion de synthèse de prise initiale est un problème complexe dû au grand nombre de prises possibles et surtout à

l'infinité de formes géométriques pouvant être rencontrées dans les objets à saisir. Cette problématique peut se définir comme *la recherche d'un ensemble de points de contacts avec une configuration correspondante de la main pour une tâche visée, associée à un objet cible* [37].

Deux types de prises ont été définies dans [55] :

- les prises de puissance ou prises « à pleine main » ;
- les prises de précision ou prises « fines » où seules les extrémités des doigts interviennent.

Nous nous intéressons uniquement aux prises de précision dans la mesure où cette étape fait partie de notre stratégie de synthèse de tâches de manipulation dextre. Nous utilisons l'approche développée par Naël Daoud dans ses travaux de thèse [21, 22]. Le problème de synthèse de prise initiale est décomposé en deux étapes.

La première étape, appelée « reach », consiste à déterminer la position et l'orientation de la main par rapport à l'objet à saisir. Pour répondre à cette problématique, un système expert a été mis en œuvre. Par définition, un système expert est un programme informatique qui simule le jugement et le comportement d'un homme ou d'une organisation ayant des connaissances spécialisées et une expérience dans un domaine particulier. Pour atteindre cet objectif, un tel système contient une base de connaissances qui intègre l'expérience accumulée. Cette base de connaissances ou base de données se divise en deux bases distinctes : une base de faits, qui explicite la situation ou la valeur des variables du problème à traiter, et une base de règles qui contient la connaissance opératoire. Il est important de noter que les systèmes experts sophistiqués peuvent évoluer et voir leurs performances s'accroître par l'ajout permanent à la base de connaissances de nouvelles règles. Les expérimentations qui ont servi à établir cette base de connaissances se sont déroulées sur le plateau technique d'analyse du mouvement de l'Institut PRIME de Poitiers. Lors de ces expérimentations, dix personnes ont été mises à contribution pour réaliser et répéter deux types de mouvement : le premier mouvement est un simple déplacement d'objet sur une table entre trois positions identifiées et le second mouvement est une tâche de manipulation de la vie courante. Chaque mouvement a été effectué pour dix objets de la vie quotidienne de plusieurs formes. Ces objets ont été choisis en considérant les deux prises en bout de doigt (prismatiques et cylindriques) identifiées par Cutkosky [19] et la sélection de tâches de manipulation caractéristiques avec les trois mouvements élémentaires : translation, rotation et combinaison translation-rotation de l'objet.

La seconde étape, appelée « grasp », consiste à choisir les trois doigts utilisés pour la saisie de l'objet et à déterminer leur point de contact avec l'objet. Afin d'obtenir la meilleure prise parmi plusieurs prises possibles, des critères qualitatifs permettant d'évaluer une prise donnée ont été choisis tout en garantissant la stabilité de l'objet grâce à la notion de « force closure » [47]. Cette propriété permet de s'assurer que la prise est capable de résister à des couples ou à des forces arbitraires. Le problème de synthèse de prise est donc un problème d'optimisation multi-critères :

- minimisation des efforts de serrage appliqués par les doigts sur l'objet ;
- maximisation de la manipulabilité globale ;
- maximisation de l'éloignement par rapport aux butées articulaires ;
- optimisation de l'orientation des phalanges distales par rapport à la surface de l'objet pour permettre la manipulation ;

sous les contraintes suivantes :

- la prise doit respecter la propriété *force closure* ;
- la prise doit être libre de toute collision entre les doigts ;
- la configuration des doigts doit être hors des limites articulaires ;
- la prise doit éviter les surfaces « interdites » de l'objet.

Ce sont les Algorithmes Génétiques (AG) qui ont été choisis pour résoudre ce problème d'optimisation [22].

2.2 CALCUL DES POINTS DE CONTACT : ROULEMENT SANS GLISSEMENT

Une fois que la synthèse de prise initiale a été réalisée, il faut déterminer les points de contact entre les doigts et l'objet tout au long du mouvement. Pour cela, nous commençons par rappeler la définition d'une tâche de manipulation :

Définition 1 ([12]) Une tâche de manipulation est définie par la trajectoire de l'objet $\mathbf{P}_{\text{obj}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^6$ telle que :

$$\mathbf{P}_{\text{obj}}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{t}) \\ \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}) \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{p}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3$ est la position du centre de gravité de l'objet dans l'espace cartésien, $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3$ donne l'orientation de l'objet avec les angles de Cardan et \mathbf{t} représente le temps.

L'intérêt du paramétrage utilisant les angles de Cardan est de pouvoir définir simplement des rotations et des translations suivant les axes propres de l'objet. Sur la base de cette définition, nous pouvons définir la matrice de transformation homogène $\mathbf{T}^{\mathbf{t}_i \mathbf{t}_f}$ qui permet de transporter l'objet de sa configuration initiale à sa configuration courante. Nous pouvons ainsi décomposer la trajectoire de l'objet en une succession de n petits déplacements :

$$\mathbf{T}^{\mathbf{t}_i \mathbf{t}_f} = \mathbf{T}^{\mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2} \mathbf{T}^{\mathbf{t}_2 \mathbf{t}_3} \dots \mathbf{T}^{\mathbf{t}_{n-1} \mathbf{t}_f}.$$

Nous cherchons alors à déterminer pour chaque petite transformation $\mathbf{T}^{\mathbf{t}_k \mathbf{t}_{k+1}}$ les mouvements des extrémités des doigts qui assurent ce déplacement tout en respectant les limites cinématiques de la main. La trajectoire désirée de l'objet peut être obtenue de deux façons : soit à l'aide d'un système d'acquisition de mouvement (voir section 3.2), soit en la générant. Il est important de préciser que nous nous intéressons à un mouvement dynamique de l'objet manipulé. Pour la génération de trajectoires, nous avons choisi un polynôme du septième ordre qui nous permet de raccorder deux trajectoires jusqu'aux accélérations. Ceci a pour but de limiter la *secousse*¹ au raccordement de deux trajectoires et ainsi garantir une certaine stabilité de l'objet. La trajectoire polynomiale de l'objet est décrite ci-dessous :

1. La *secousse* correspond à la dérivée temporelle d'une accélération. En anglais américain : *jerk* ; en anglais britannique : *jolt*.

$$\begin{cases} \mathbf{p}(\mathbf{X}(t)) = a\mathbf{X}(t)^7 + b\mathbf{X}(t)^6 + c\mathbf{X}(t)^5 + d\mathbf{X}(t)^4 + e\mathbf{X}(t)^3 + f\mathbf{X}(t)^2 + g\mathbf{X}(t) + h \\ \mathbf{v}(\mathbf{X}(t)) = 7a\mathbf{X}(t)^6 + 6b\mathbf{X}(t)^5 + 5c\mathbf{X}(t)^4 + 4d\mathbf{X}(t)^3 + 3e\mathbf{X}(t)^2 + 2f\mathbf{X}(t) + g \\ \mathbf{a}(\mathbf{X}(t)) = 42a\mathbf{X}(t)^5 + 30b\mathbf{X}(t)^4 + 20c\mathbf{X}(t)^3 + 12d\mathbf{X}(t)^2 + 6e\mathbf{X}(t) + 2f \end{cases}$$

où $\mathbf{p}(\mathbf{X}(t))$, $\mathbf{v}(\mathbf{X}(t))$, $\mathbf{a}(\mathbf{X}(t))$ sont respectivement les vecteurs position, vitesse et accélérations de l'objet (linéaires ou angulaires) à chaque instant du mouvement.

La liaison entre les doigts et l'objet manipulé est ponctuelle et les bouts des doigts sont considérés sphériques. Ces derniers roulent sans glisser sur la surface de l'objet manipulé. Avant de présenter notre approche pour calculer les différents points de contact, nous formulons les hypothèses suivantes :

- les objets manipulés sont indéformables ;
- la manipulation se fait en bout des doigts (manipulation fine) ;
- l'extrémité de chaque doigt est hémisphérique ;
- la manipulation est une manipulation à trois doigts ;
- les contacts objet–doigt sont des contacts ponctuels rigides avec frottement.

La planification d'une tâche de manipulation consiste donc à déterminer la succession de petits déplacements articulaires des doigts permettant d'obtenir le mouvement souhaité de l'objet saisi. Nous partons d'une prise initiale connue, ensuite l'évolution du déplacement de l'objet est dictée par la condition de roulement sans glissement des doigts sur l'objet.

Par définition, l'extrémité du doigt roule sans glisser sur l'objet en contact, *si et seulement si*, le glissement est nul en tous les points de contact, et cela quel que soit t . Cela se traduit par la relation suivante sur les vitesses :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_c \in \text{objet}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}_c \in \text{doigt}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}},$$

où \mathbf{p}_c est le point de contact entre le doigt et l'objet et $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$ est le repère associé au doigt concerné.

La vitesse du point de contact \mathbf{p}_c lié à l'objet étant connue, on peut l'explicitier par la loi de distribution des vitesses des points d'un même solide au centre de gravité G de l'objet :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_c \in \text{objet}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} = \mathbf{v}_{G \in \text{objet}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{objet}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} \wedge \mathbf{G}\mathbf{p}_c$$

Nous obtenons ainsi le modèle de petits déplacements dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$:

$$d\mathbf{p}_{c\text{objet}} = d\mathbf{X}_G + d\boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{G}\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} dx_G \\ dy_G \\ dz_G \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} x_{G\mathbf{p}_c} \\ y_{G\mathbf{p}_c} \\ z_{G\mathbf{p}_c} \end{bmatrix}$$

où $d\mathbf{X}_G$ et $d\boldsymbol{\theta}$ sont respectivement les vecteurs translation et rotation de l'objet exprimés dans le repère $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$.

Soit la matrice de passage $\mathbf{A}^{\text{doigt paume}}$ qui permet de passer du repère $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$ au repère $\mathcal{R}_{\text{paume}}$, lié à la paume, donnée par la géométrie de la main et la matrice $\mathbf{A}^{\text{paume objet}}$, matrice des angles de Cardan qui représente l'orientation de l'objet par rapport à la paume, la relation :

$$\begin{bmatrix} d\theta_x \\ d\theta_y \\ d\theta_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{\text{doigt paume}} \mathbf{A}^{\text{paume objet}} \begin{bmatrix} d\alpha_x \\ d\alpha_y \\ d\alpha_z \end{bmatrix};$$

où le vecteur connu $d\alpha$ représente l'orientation des petits déplacements de la trajectoire de l'objet par rapport à la paume, procure le vecteur rotation de l'objet dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$. De la même manière, nous obtenons les composantes du vecteur $d\mathbf{X}_G$ dans le repère $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$ par rapport à ses composantes connues dans le repère $\mathcal{R}_{\text{paume}}$.

Nous obtenons le vecteur \mathbf{Gp}_c à partir de la relation suivante :

$$\mathbf{Gp}_c = \mathbf{Gb}_d + \mathbf{b}_d \mathbf{p}_c = \mathbf{Gb}_d - R\mathbf{n},$$

où R désigne le rayon de la demi-sphère représentant l'extrémité du doigt et \mathbf{n} est la normale à la facette en contact avant le petit déplacement ; les coordonnées de \mathbf{b}_d dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$ sont calculées par le modèle géométrique direct (voir section 2.3).

Nous venons de déterminer le déplacement $d\mathbf{p}_{\text{cobjet}}$ du point de contact appartenant à l'objet dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$. Nous allons maintenant établir le déplacement du point de contact appartenant au doigt également dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$. De la même façon que précédemment, nous reprenons l'expression de sa vitesse dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$:

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_c \in \text{doigt}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} = \mathbf{v}_{\mathbf{b}_d \in \text{doigt}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{doigt}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} \wedge \mathbf{b}_d \mathbf{p}_c.$$

Les vecteurs vitesses des translations et rotations du centre \mathbf{b}_d de l'extrémité du doigt peuvent être calculés grâce au modèle cinématique. Ainsi, la relation précédente devient :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}_c \in \text{doigt}/\mathcal{R}_{\text{doigt}}} = \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{b}_d \mathbf{p}_c,$$

avec \mathbf{J}_v et \mathbf{J}_ω représentant respectivement les parties translation et rotation de la matrice jacobienne ; \mathbf{q} est le vecteur des coordonnées généralisées (positions articulaires) du doigt ; $\dot{\mathbf{q}}$ le vecteur des vitesses articulaires.

Nous obtenons ainsi le *modèle des petits déplacements* dans $\mathcal{R}_{\text{doigt}}$:

$$d\mathbf{p}_{\text{cDoigt}} = \mathbf{J}_v(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \mathbf{J}_\omega(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \wedge (-R\mathbf{n}),$$

où $d\mathbf{q}$ représente le vecteur des petites variations articulaires du doigt considéré.

La condition de roulement sans glissement du doigt sur la surface de l'objet manipulé implique qu'en termes de petits déplacements

$$d\mathbf{p}_{\text{cdoigt}} = d\mathbf{p}_{\text{cobjet}},$$

soit :

$$J_v(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + J_\omega(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \wedge (-R\mathbf{n}) = d\mathbf{X}_G + d\theta \wedge \mathbf{G}p_c.$$

Un système de 3 équations linéaires à $n = 4$ inconnues est ainsi obtenu (n étant le nombre d'articulations des doigts). En résolvant ce système, les variations des paramètres articulaires du doigt sont obtenues pour un petit déplacement de l'objet manipulé et caractérisé par les paramètres $d\mathbf{X}_G$ et $d\alpha$. Les paramètres articulaires du doigt après le petit déplacement de l'objet sont calculés par :

$$\mathbf{q}^{t+1} = \mathbf{q}^t + d\mathbf{q}.$$

Ainsi, les nouvelles coordonnées du centre de l'hémisphère du bout du doigt sont devenues b'_d à l'aide du modèle géométrique du doigt. La nouvelle normale \mathbf{n}' étant connue, les coordonnées du nouveau point de contact p'_c est donnée par :

$$b'_d p'_c = -R\mathbf{n}'.$$

2.2.1 Algorithme de planification des tâches de manipulation

Dès lors, l'algorithme de planification d'une tâche de manipulation est proposé et s'articule ainsi :

- A. **Calcul de la prise initiale** : obtention du point de contact initial p_{cinit} entre le doigt et l'objet ;
- B. **Calcul de la trajectoire de l'objet** : calcul des vecteurs $\mathbf{p}(t)$ et $\alpha(t)$;
- C. **Décomposition de la trajectoire de l'objet en n petits déplacements** :

$$\left\{ d\mathbf{X}_G^i, d\alpha^i \mid \forall i \in [1; n] \right\} ;$$

- D. **Initialisation des paramètres** : $p_{c0} = p_{cinit}$; $p_0 = \mathbf{p}(t_{init})$; $\alpha_0 = \alpha(t_{init})$;
- E. **Boucle sur i de 1 à n** :
 - Mise à jour de la translation de l'objet : $\mathbf{X}_{G_i} = \mathbf{X}_{G_{i-1}} + d\mathbf{X}_{G_i}$;
 - Mise à jour de la rotation de l'objet : $\alpha_i = \alpha_{i-1} + d\alpha_i$;
 - Calcul des petits déplacements articulaires : $d\mathbf{q}_j^i$, j étant le numéro de l'articulation ;
 - Calcul du nouveau point de contact : p_{c_i} .

2.3 CALCUL DES COORDONNÉES ARTICULAIRES : MODÈLE GÉOMÉTRIQUE

Le Modèle Géométrique Direct (MGD) d'un doigt nous permet de calculer les coordonnées du centre b_d du bout de doigt hémisphérique à partir des coordonnées articulaires du doigt dans le repère \mathcal{R}_{doigt} associé au doigt concerné. L'origine de ce repère est placée au centre de la première articulation. Le passage du repère local \mathcal{R}_{doigt} associé à un doigt au repère global

$\mathcal{R}_{\text{paume}}$ associé à la paume de la main, se fait par l'intermédiaire d'une *matrice homogène* constante dont les paramètres sont déterminés par la conception de la main.

La détermination des paramètres de configuration q_i de chaque doigt nécessite l'introduction de repères locaux dans la chaîne articulaire. Nous avons choisi de réaliser cette mise en place conformément à la construction de Denavit-Hartenberg [24] utilisée avec la convention de Khalil-Kleinfinger [41]. Ainsi, pour chaque repère local noté $\mathcal{R}_i = (O_i; \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i)$, $\forall i \in [1; n_q]$, l'axe $(O_i; \mathbf{Z}_i)$ est l'axe de rotation de \mathcal{R}_i par rapport à \mathcal{R}_{i-1} , en convenant que $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{\text{doigt}}$ est le repère de référence attaché à la paume; n_q correspond au nombre de degrés de liberté du doigt. Nous obtenons la configuration d'étude d'un doigt $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_{n_q})^T$ à n_q paramètres définis par :

$$q_i = (\mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_i)_{\mathbf{Z}_i}, \forall i \in [1; n_q].$$

Ce paramétrage facilite la modélisation géométrique du robot car toutes les Matrices de Passage Homogènes (MPH) ont la même expression littérale. La MPH de taille $4 \times 4 \mathbf{T}^{i-1}$, transforme un vecteur exprimé dans le \mathcal{R}_{i-1} associé à la liaison du doigt précédent le repère \mathcal{R}_i associé à la liaison courante du doigt, en un vecteur exprimé dans la base associée à \mathcal{R}_i . Le MGD du doigt est donné par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} x_{b_d} \\ y_{b_d} \\ z_{b_d} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \mathbf{T}^{0 n_q}(\mathbf{q}) \begin{bmatrix} x_{b_d} \\ y_{b_d} \\ z_{b_d} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{n_q}},$$

avec $\mathbf{T}^{0 n_q}(\mathbf{q}) = \mathbf{T}^{0 1}(\mathbf{q})\mathbf{T}^{1 2}(\mathbf{q}) \dots \mathbf{T}^{n_q-1 n_q}(\mathbf{q})$. Le processus de détermination des paramètres articulaires q^i d'un doigt, en fonction des positions dans l'espace cartésien du centre b_d de l'hémisphère d'un doigt, appelé Modèle Géométrique Inverse (MGI), consiste à résoudre un système de trois équations non linéaires à n_q inconnues. Beaucoup des mains mécaniques existantes possèdent des doigts à 4 DDL. Le système est alors sous-déterminé et survient alors un problème de redondance généralement traité en introduisant des variables synchronisées. Dans les cas des mains de notre équipe (voir les sous sections 4.3.1 et 4.3.3), les deux dernières flexions des doigts sont couplées mécaniquement pour ROB-H12et numériquement pour ROB-H16.

Le système est ainsi réduit à trois équations et trois inconnues pour nos mains mécaniques. Sachant que notre approche consiste à aider à la conception et au dimensionnement de mains mécaniques dans le but de manipuler un objet dynamiquement (qui est une approche hors ligne), notre choix d'environnement logiciel s'est porté sur MATLAB®. Le MGI est résolu avec la fonction `fsolve` de ce logiciel.

2.4 CALCUL DES EFFORTS DE CONTACT

Chaque doigt impliqué dans une tâche de manipulation doit appliquer une force envers l'objet de façon à *provoquer* le mouvement désiré de ce

dernier. Dans notre problème de manipulation fine, plusieurs doigts interviennent. Il faut qu'à chaque instant, le glissement et/ou la rupture de contact soient évités. Il faut aussi que les forces provenant des doigts assurent le mouvement résultant souhaité de l'objet.

Les hypothèses considérées sont :

- les paramètres inertiels de l'objet sont pris en compte ;
- la manipulation de l'objet implique *trois doigts* ;
- l'objet est saisi avec l'extrémité des doigts ;
- les contacts sont supposés ponctuels avec frottement ;
- les efforts au niveau des points de contact sont unilatéraux et ne doivent jamais être nuls.

La première étape pour calculer les efforts de contact consiste à écrire les équations du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) appliquées à l'objet en mouvement. Au centre de gravité G de l'objet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i = m_{\text{objet}} (\Gamma_{G, \mathcal{R}_{\text{paume}}} - \mathbf{g}) \\ \sum_{i=1}^3 \mathbf{GA}_i \wedge \mathbf{F}_i = \mathbf{I}_{G, \text{objet}} \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_{\text{objet}, \mathcal{R}_{\text{paume}}} \right)_{\mathcal{R}_{\text{paume}}} \end{array} \right.$$

Sous forme matricielle, le système précédent devient

$$\mathbf{f} = \mathbf{WF}, \quad (1)$$

où \mathbf{f} correspond au vecteur de dimensions 6×1

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} m_{\text{objet}} (\Gamma_{G, \mathcal{R}_{\text{paume}}} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{I}_{G, \text{objet}} \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\omega}_{\text{objet}, \mathcal{R}_{\text{paume}}} \right)_{\mathcal{R}_{\text{paume}}} \end{bmatrix};$$

la matrice 6×9 \mathbf{W} , appelée « *matrice de prise* » [58] :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 \end{bmatrix},$$

où $\mathbf{I}_{3 \times 3}$ est la matrice identité de dimensions 3×3 et les matrices \mathbf{A}_i ($i = 1, 2, 3$) sont des matrices antisymétriques de dimensions 3×3 contenant les positions des points de contact p_{ci} des doigts sur l'objet :

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{G}p_{ci_z} & \mathbf{G}p_{ci_y} \\ \mathbf{G}p_{ci_z} & 0 & -\mathbf{G}p_{ci_x} \\ -\mathbf{G}p_{ci_y} & \mathbf{G}p_{ci_x} & 0 \end{bmatrix}.$$

Enfin, \mathbf{F} est le vecteur 9×1 des efforts de serrage des trois doigts sur l'objet :

$$\mathbf{F} = (F_{1_x} \ F_{1_y} \ F_{1_z} \ F_{2_x} \ F_{2_y} \ F_{2_z} \ F_{3_x} \ F_{3_y} \ F_{3_z})^T.$$

Les composantes de ce vecteur sont les inconnues du problème de stabilité dynamique. Rappelons que ces efforts doivent être appliqués sur l'objet de telle sorte qu'il n'y ait ni glissement ni rupture de contact avec l'objet. Ces conditions se traduisent respectivement par les contraintes suivantes :

$$\mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - (1 + \mu^2) (\mathbf{F}_i \mathbf{n}_i)^2 \leq 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

$$-\mathbf{F}_i^T \mathbf{n}_i \leq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

où μ est le coefficient de frottement sec ; \mathbf{F}_i et \mathbf{n}_i sont respectivement les vecteurs des efforts de serrage et normal au point de contact p_{ci} .

Le vecteur \mathbf{F} solution doit être déterminé afin de satisfaire les contraintes précédentes. Cette solution n'étant pas unique, la problématique est de trouver sa valeur de telle sorte qu'elle optimise une fonction objective. Une fonction qui minimise les efforts de serrage appliqués par les doigts à l'objet a été choisie, elle représente la moyenne quadratique des efforts de serrage :

$$h(\mathbf{F}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{F}.$$

Un algorithme de programmation quadratique séquentielle (Sequential Quadratic Programming (SQP) en anglais). L'optimisation s'effectue d'une manière itérative à partir d'une solution d'initialisation \mathbf{F}_0 . À chaque itération, c'est-à-dire pour un \mathbf{F}_k donné, le gradient de la fonction est calculé, ce qui entraîne une direction de recherche. Son hessien est estimé et mis à jour à chaque itération à l'aide d'un algorithme de Quasi-Newton utilisant les formules Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno [18]. Un processus de recherche linéaire intervient pour atteindre l'itération suivante. L'optimisation s'arrête lorsque les contraintes sont respectées et que le gradient est suffisamment proche de zéro à une tolérance près fixée au départ.

L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'une convergence globale n'est pas obtenue. Le résultat de l'optimisation dépend beaucoup de la solution d'initialisation. Dans notre cas, le problème est résolu par le fait que l'algorithme de prise initiale procure justement une solution d'initialisation. Cette méthode est implémentée dans la fonction `fmincon` de l'Optimisation Toolbox de MATLAB® que nous avons employée.

Pour éviter que la solution optimale comporte un effort nul, une contrainte a été ajoutée au problème d'optimisation :

$$-\|\mathbf{F}_i\| + \epsilon \leq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Un effort de serrage minimal ϵ est ainsi imposé pour chaque doigt. En résumé, notre problème d'optimisation s'articule ainsi :

$$\min_{\mathbf{F}} \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{F},$$

sous les contraintes (1), (2), (3) et (4) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}\mathbf{F} = \mathbf{f} \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{F}_i - (1 + \mu^2) (\mathbf{F}_i \mathbf{n}_i)^2 \leq 0 \\ \mathbf{F}_i^T \mathbf{n}_i \leq 0 \\ -\|\mathbf{F}_i\| + \epsilon \leq 0. \end{array} \right.$$

2.5 CALCUL DES COUPLES ACTIONNEURS : MODÈLE DYNAMIQUE

Une fois que les *efforts de serrage* sont connus, il est possible de calculer les couples actionneurs nécessaires à imposer à l'objet manipulé, le mouvement dynamique désiré. Dans cette partie nous développerons le modèle dynamique des doigts. Il dépendra des positions, vitesses et accélérations articulaires, ainsi que des efforts en bout de doigt calculés selon la méthode exposée dans la section précédente.

L'algorithme de planification d'une tâche de manipulation 2.2.1 procure, pour chaque doigt, les valeurs des positions articulaires à la discrétisation donnée par le modèle des petits déplacements. Chaque coordonnée articulaire q^i est ensuite interpolée sur tout le mouvement par une *spline* cubique à l'aide de la fonction `spLine` de MATLAB®. Les quatre coefficients de chaque polynôme sont obtenus entre deux points de discrétisation. Les vitesses et accélérations découlent ensuite par dérivation.

Le modèle dynamique présenté dans cette section, de Newton-Euler, est formulé selon le processus de calcul de Luh, Walker et Paul [50].

2.5.1 Modèle dynamique d'un doigt

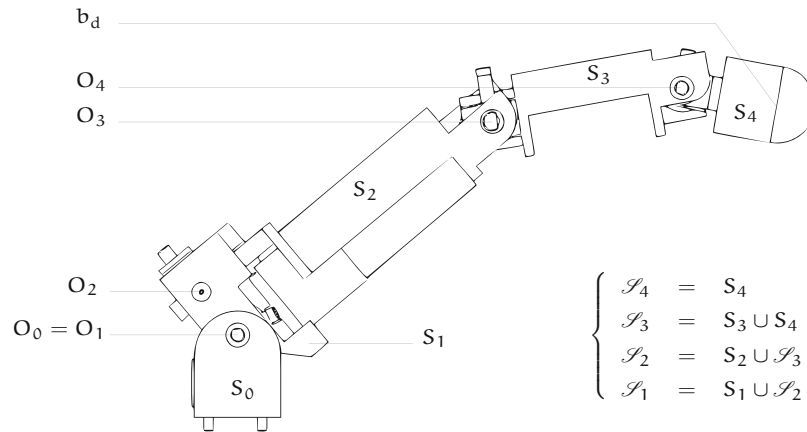


FIGURE 2: Chaîne cinématique ouverte d'un doigt de la main ROB-H12 à $n_q = 4$ corps segmentaires

Dans cette approche, nous cherchons à déterminer les efforts d'interaction

$$\mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i),$$

en appliquant le PFD aux sous chaînes distales

$$\mathcal{S}_i = \bigcup_{k=i}^{n_q} S_k$$

successivement pour i décroissant de n_q à 1. Soit :

$$\mathcal{T}_d(\mathcal{S}_i) = \mathcal{T}(F^e \rightarrow \mathcal{S}_i), \quad i = n_q, \dots, 1, \quad (5)$$

où $\mathcal{T}_d(\mathcal{S}_i)$ et $\mathcal{T}(F^e \rightarrow \mathcal{S}_i)$ sont respectivement le torseur dynamique de \mathcal{S}_i et le torseur des efforts extérieurs appliqués à \mathcal{S}_i . Ce dernier torseur se décompose comme :

$$\mathcal{T}(F^e \rightarrow \mathcal{S}_i) = \mathcal{T}(F_{\mathcal{S}}^e \rightarrow \mathcal{S}_i) + \mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i),$$

où $\mathcal{T}(F_{\mathcal{S}}^e \rightarrow \mathcal{S}_i)$ est le torseur des efforts extérieurs appliqués à la chaîne complète $\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{n_q} S_k$ agissant sur \mathcal{S}_i et $\mathcal{T}(S_{i-1} \rightarrow S_i)$ correspond au torseur recherché.

Le torseur $\mathcal{T}(F_{\mathcal{S}}^e \rightarrow \mathcal{S}_i)$ se décompose également comme

$$\mathcal{T}(F_{\mathcal{S}}^e \rightarrow \mathcal{S}_i) = \mathcal{T}(F^g \rightarrow \mathcal{S}_i) + \mathcal{T}(\mathcal{S}_0 \rightarrow S_{n_q}),$$

où $\mathcal{T}(F^g \rightarrow \mathcal{S}_i)$ est le torseur des efforts de gravité agissant sur \mathcal{S}_i et $\mathcal{T}(\mathcal{S}_0 \rightarrow S_{n_q})$ est le torseur des efforts exercés par l'environnement sur le solide en bout de doigt S_{n_q} . Dans notre cas de manipulation en bout des doigts ce sont les efforts de serrage.

Compte tenu de la représentation donnée au torseur des efforts extérieurs, l'égalité torsorielle (5) se dissocie sous la forme d'un système de deux équations vectorielles, les équations de la résultante dynamique et équations du moment dynamique en O_i :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i = \mathbf{R}(S_{i-1} \rightarrow S_i) = \mathcal{A}(\mathcal{S}_i) - \mathbf{R}(F_{\mathcal{S}}^e \rightarrow \mathcal{S}_i) \\ \mathbf{M}_i = \mathbf{M}(O_i, S_{i-1} \rightarrow S_i) = \boldsymbol{\delta}(O_i, \mathcal{S}_i) - \mathbf{M}(O_i, F_{\mathcal{S}}^e \rightarrow \mathcal{S}_i), \end{cases}$$

où $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$ et $\boldsymbol{\delta}(O_i, \mathcal{S}_i)$ sont respectivement la résultante dynamique et le moment dynamique en O_i de \mathcal{S}_i .

\mathcal{S}_i se décompose comme $\mathcal{S}_i = S_i \cup \mathcal{S}_{i+1}$. De cette dernière décomposition, nous obtenons pour chaque doigt la double récurrence :

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{n_q} = m_{n_q} (\Gamma_{G_{n_q}, \mathcal{R}_0} - \mathbf{g}) - \mathbf{F}_{\text{serrage}} \\ \mathbf{M}_{n_q} = \boldsymbol{\delta}_{O_{n_q} \in S_{n_q}, \mathcal{R}_0} - O_{n_q} \mathbf{G}_{n_q} \wedge m_{n_q} \mathbf{g} - O_{n_q} \mathbf{p}_c \wedge \mathbf{F}_{\text{serrage}} \\ \mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i+1} + m_i (\Gamma_{G_i, \mathcal{R}_0} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_{i+1} + \boldsymbol{\delta}_{O_i \in S_i, \mathcal{R}_0} - O_i O_{i+1} \wedge \mathbf{R}_{i+1} - O_i \mathbf{G}_i \wedge m_i \mathbf{g}, \end{cases} \quad (6)$$

où $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{\text{doigt}}$ est le repère de référence du doigt attaché à la paume.

Les moments \mathbf{M}_i se décomposent sous la forme

$$\mathbf{M}_i = \tau_i \mathbf{z}_i + \mathbf{M}_i^d, \quad (7)$$

où τ_i est le couple actionneur exercé par S_{i-1} sur S_i ; \mathbf{M}_i^d est le couple dissipatif exercé par S_{i-1} sur S_i , obéissant par exemple à une loi de type frottement sec — amortissement visqueux linéaire telle que :

$$\mathbf{M}_i^d(q, \dot{q}) = -C^f \text{signe}(\dot{q}_i) \mathbf{z}_i - C^v \dot{q}_i \mathbf{z}_i,$$

avec C^f un coefficient de frottement sec et C^v un coefficient de frottement visqueux.

2.5.2 Calcul des couples actionneurs d'un doigt

Les étapes du processus de calcul des couples actionneurs d'un doigt seront présentées sous forme d'algorithme. Cet algorithme fait appel aux grandeurs suivantes :

- m_i : masse du solide S_i ;
- $O_i G_i$: position du centre de gravité G_i du solide S_i par rapport au centre articulaire O_i exprimé dans la base du repère local \mathcal{R}_i ;
- I_{G_i, S_i} : matrice d'inertie du solide S_i calculée en son centre de gravité G_i ;
- q_i : position articulaire du solide S_i ;
- F_{serrage}^j : effort de serrage exercé sur l'extrémité du doigt j .

2.5.2.1 Algorithme de calcul des couples actionneurs d'un doigt

Calculer successivement :

A. les MPH de \mathcal{R}_{i-1} à \mathcal{R}_i

$$\mathbf{T}^{i-1 i} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 & d_i \\ \cos \alpha_i \sin q_i & \cos \alpha_i \cos q_i & -\sin \alpha_i & -r_i \sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin q_i & \sin \alpha_i \cos q_i & \cos \alpha_i & r_i \cos \alpha_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où les termes r_i , d_i et α_i correspondent au paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié [41] ;

B. les MPH de \mathcal{R}_0 à \mathcal{R}_i

$$\mathbf{T}^{0 i} = \mathbf{T}^{01} \mathbf{T}^{12} \dots \mathbf{T}^{i-1 i};$$

C. les vecteurs de rotation instantanée dans \mathcal{R}_i

$$\boldsymbol{\omega}_{S_i, \mathcal{R}_0} = \mathbf{A}^{i i-1} \boldsymbol{\omega}_{S_{i-1}, \mathcal{R}_0} + \dot{q}_i \mathbf{z}_i,$$

où les matrices $\mathbf{A}^{i-1 i}$ sont les parties « rotation » des MPH $\mathbf{T}^{i-1 i}$:

$$\mathbf{A}^{i-1 i} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i & 0 \\ \cos \alpha_i \sin q_i & \cos \alpha_i \cos q_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i \sin q_i & \sin \alpha_i \cos q_i & \cos \alpha_i \end{bmatrix};$$

D. les vitesses de G_i dans \mathcal{R}_i

$$\mathbf{v}_{G_i, \mathcal{R}_0} = \mathbf{A}^{i0} \frac{d}{dt} (\mathbf{O}O_i)_{\mathcal{R}_0} + \boldsymbol{\omega}_{S_i, \mathcal{R}_0} \wedge \mathbf{O}_i G_i;$$

E. les accélérations des G_i dans \mathcal{R}_i

$$\boldsymbol{\Gamma}_{G_i, \mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} (\mathbf{v}_{G_i, \mathcal{R}_0})_{\mathcal{R}_i} + \boldsymbol{\omega}_{S_i, \mathcal{R}_0} \wedge \mathbf{v}_{G_i, \mathcal{R}_0};$$

F. les moments cinétiques en G_i dans \mathcal{R}_i

$$\boldsymbol{\sigma}_{G_i \in S_i, \mathcal{R}_0} = \mathbf{I}_{G_i, S_i} \boldsymbol{\omega}_{S_i, \mathcal{R}_0};$$

G. les moments dynamiques en G_i dans \mathcal{R}_i

$$\delta_{G_i \in S_i, \mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} (\sigma_{G_i \in S_i, \mathcal{R}_0})_{\mathcal{R}_i} + \omega_{S_i, \mathcal{R}_0} \wedge \sigma_{G_i \in S_i, \mathcal{R}_0};$$

H. les moments dynamiques en O_i dans \mathcal{R}_i

$$\delta_{O_i \in S_i, \mathcal{R}_0} = \delta_{G_i \in S_i, \mathcal{R}_0} + \mathbf{O}_i \mathbf{G}_i \wedge m_i \Gamma_{G_i, \mathcal{R}_0};$$

I. les couples actionneurs τ_i du doigt suivant l'axe de liaison z_i selon les équations récurrentes (6) et la relation (7). Fin d'algorithme.

Nous avons présenté les bases théoriques de notre *planification d'une tâche de manipulation dynamique* dans ce chapitre. Le chapitre 5 exploitera ces notions pour évaluer la possibilité de produire certaines tâches réalisées par l'homme avec les mains robotiques existantes.

3.1 ÉTAT DE L'ART

3.1.1 Cinématique de la main humaine

Avant de concevoir une main mécanique anthropomorphe, une connaissance des aspects biologiques de la main humaine s'impose. La main humaine compte vingt-sept segments osseux qui peuvent être répartis en six groupes :

- I. un groupe comprenant les huit os du poignet (ou carpe) permettant les mouvements de flexion-extension et d'abduction-adduction de la main à travers une relation interosseuse complexe ;
- II. un groupe constitué par le pouce (deux phalanges et un os métacarpien) relié au poignet au niveau du trapèze ;
- III. quatre autres groupes formant les « *doigts longs* » avec chacun trois phalanges et un os métacarpien contenu dans le corps de la paume.

Les os métacarpiens forment la paume et jouent un grand rôle dans le soutien de la main entière.

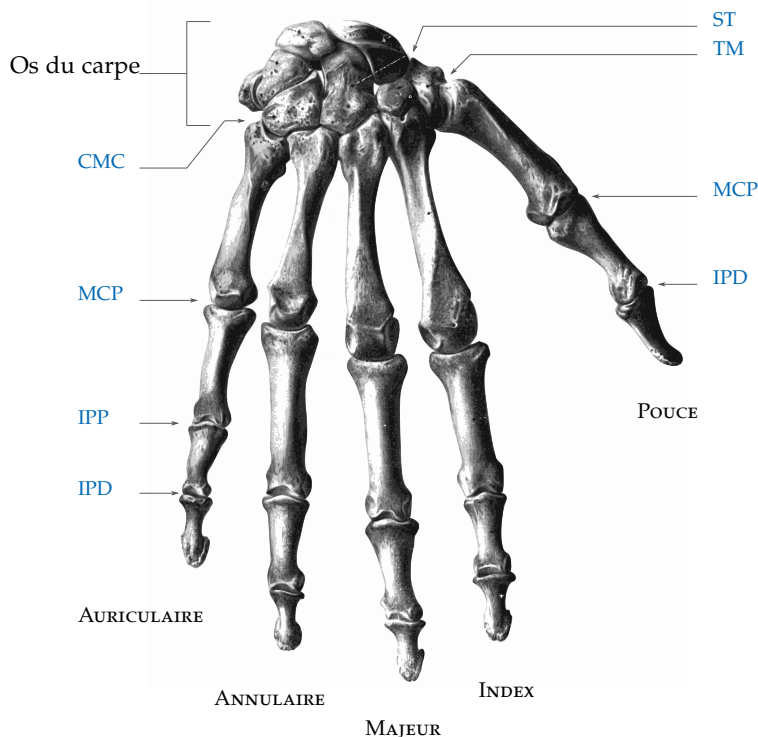


FIGURE 3: Complexe osseux de la main humaine et les différentes articulations des doigts

La FIGURE 3 montre les différentes articulations des doigts. Une distinction est faite entre les doigts appelés « longs » et le pouce du fait que ce

dernier possède une phalange de moins et surtout parce qu'il dispose d'une plus grande mobilité que les autres doigts.

Tous les doigts longs possèdent une architecture articulaire semblable munie des articulations suivantes :

- une Carpo-métacarpienne (CMC) ;
- une Métacarpo-phalangienne (MCP) ;
- une Inter-phalangienne Proximale (IPP) ;
- une Inter-phalangienne Distale (IPD).

Le pouce est quant à lui munie des articulations suivantes :

- une Scaphoïdo-trapézoïdienne (ST) ;
- une Trapézo-métacarpienne (TM) ;
- une MCP ;
- une IPD.

La main est constituée principalement d'articulations trochléennes à 1 DDL (IPP et IPD) dont la forme peut rappeler celle d'une poulie, ainsi que d'articulations condyliennes à deux degrés de liberté en forme de selle (MCP). Le pouce possède en outre les articulations ST et TM qui ne rentrent pas dans ces catégories ; la première ne possède pas de DDL actif, mais elle admet le mouvement de flexion du pouce vers l'intérieur de la main (abduction palmaire) par une translation de faible amplitude ; la seconde peut s'apparenter à une rotule dont le mouvement axial est couplé aux autres rotations [40].

La cinématique de la main biologique ayant été établie, les différentes tâches de préhension et de manipulation d'un objet réalisées par un humain seront introduites.

3.1.2 Les tâches de préhension et de manipulation réalisées par l'humain

La réalisation d'une tâche de préhension est étroitement liée à la géométrie de l'objet. La quasi-infinité de formes d'objets susceptibles d'être manipulés par l'humain laisse à supposer qu'il existe un nombre identique de prises associées. Le biologiste Bernard Campbell affirme que la main humaine produit *cinquante huit* mouvements simples [13]. John Russell Napier [55], qui a particulièrement étudié l'évolution de la main humaine, a défini deux familles distinctes pour la saisie d'un objet par l'homme ou par une main robotique : les *prises de puissance* appelées également « à pleine main » et les *prises de précision* ou « fines » (voir FIGURE 4). Les premières sont caractérisées par de grandes surfaces de contact entre l'objet saisi, les surfaces des doigts et la paume de la main. Elles n'autorisent pratiquement pas la manipulation et sont associées à des prises où la stabilité et la sécurité sont des critères dominants. Les secondes sont plutôt destinées à la manipulation fine d'un objet en bout de doigts. Elles sont caractérisées par l'utilisation de la phalange distale du pouce, en opposition avec un ou plusieurs autres doigts (segment distal ou côté) ainsi qu'une implication minimale de la paume. Elles sont utilisées lorsque la sensibilité et la dextérité sont prépondérantes.

Sur cette base, Cutkosky a classifié les prises selon la géométrie des objets manipulés et selon les tâches à réaliser [19, 20]. Dans [20], il présente un organigramme arrangeant les prises selon la forme de l'objet manipulé : objets circulaires d'une part et objets prismatiques d'autre part. On constate que les objets dont la dimension et le poids sont importants font appel à

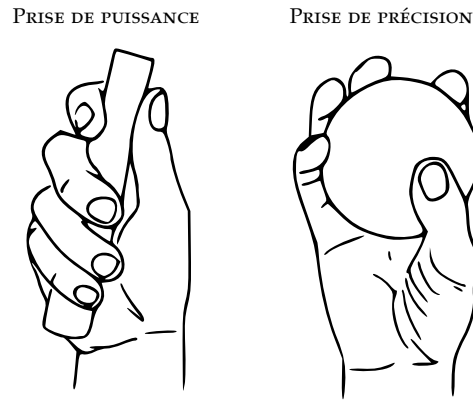


FIGURE 4: Les deux familles de prises : prise de puissance et prise de précision

des prises de puissance, tandis que les objets de petites dimensions font appel à des prises de précision où la dextérité augmente. Il ajoute aux caractéristiques le nombre de doigts en contact avec l'objet et leur répartition sur celui-ci. Dans [19], il procure les différents éléments permettant de décrire une configuration de saisie à travers la relation entre l'objet et la main comme nous pouvons retrouver dans la littérature portant sur la synthèse et l'évaluation des prises [57, 10, 9].

Toutes les prises décrites dans [20] peuvent se résumer à six prises de référence [66, 72], montrées par la FIGURE 5.

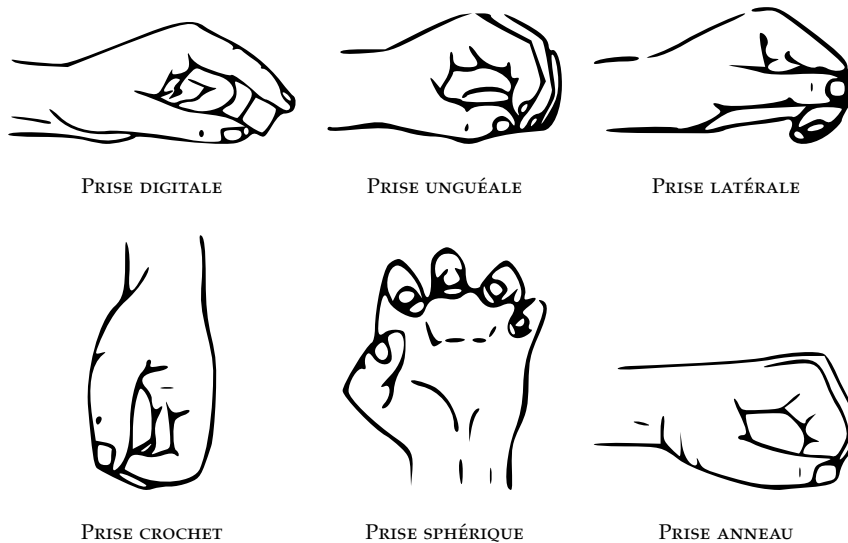


FIGURE 5: Six principaux types de prises

Dans les tâches de préhension et de manipulation, il est possible de remarquer l'usage du doigt auriculaire. Il sert particulièrement :

- d'appui pour réaliser des tâches de dépose précise en réduisant la chaîne cinématique mise en jeu [71] ;
- de verrou lors de prises délicates et potentiellement dangereuses ;
- de verrou pour les prises de force, en complément du pouce ;
- de point de prise lors de la saisie d'objets suffisamment volumineux ou lourds pour impliquer la main entière [15].

Nous nous intéressons seulement aux prises de précision pour la manipulation fine, et pour les raisons énoncées ci-dessus, les mains de l'Institut PPRIME ne comportent que quatre doigts : un pouce et trois doigts longs.

3.1.3 Dimensions de la main humaine

Terminons cette section par une étude des dimensions et proportions de la main biologique. Dans [73], l'auteur s'appuie sur trois études anatomiques [16, 2, 68] pour établir un modèle générique de la main humaine. Ainsi, à partir d'une seule mesure anatomique de surface et de la longueur du segment médian du majeur, un modèle complet de main est obtenu. Les résultats sont présentés dans la TABLE 1 ; les segments sont représentés sur la FIGURE 6.

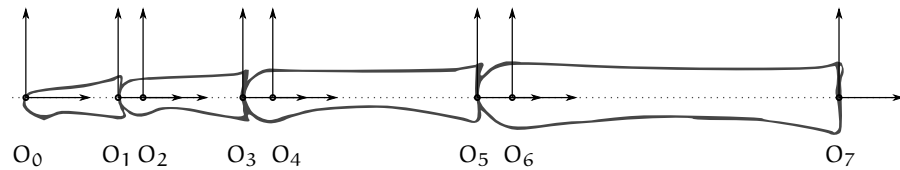


FIGURE 6: Chaîne cinématique d'un doigt long

TABLE 1: Rapport entre la taille du segment médian du majeur et les distances interaxiales de chaque doigt

SEGMENT \ DOIGT	POUCE	INDEX	MAJEUR	ANNULAIRE	AURICULAIRE
O_7O_6	1,567	2,049	1,906	1,719	1,578
O_6O_4	1,134	1,489	1,683	1,563	1,254
O_4O_2	—	0,864	1,041	0,994	0,719
O_2O_0	0,974	0,757	0,798	0,778	0,698

Concernant la paume de la main, la position de son centre, sa longueur ainsi que sa largeur sont exprimées également proportionnellement à la taille du segment médian du majeur (voir TABLE 2).

TABLE 2: Rapport entre la taille du segment médian du majeur et les dimensions principales de la paume de la main humaine

CENTRE DE LA PAUME	LONGUEUR	LARGEUR
2,804	6,571	3,000

3.2 ANALYSE DU MOUVEMENT ET RECONSTRUCTION 3D

L'analyse du mouvement trouve ses origines dans les techniques de la photographie. Parmi les inventeurs de ce type de procédé se trouve Eadweard MUYBRIDGE. Ce photographe américain d'origine britannique, devint célèbre lorsqu'il prouva en 1887 qu'un cheval au galop voyait ses quatre pattes se décoller et se trouvait ainsi en suspension pendant un laps de

temps. Pour le démontrer, il a utilisé *douze* appareils photographiques qu'il a disposé le long d'une piste afin de prendre douze clichés à différents instants. Il a ainsi décomposé le mouvement du cheval au galop.

Aujourd'hui, les méthodes ont évolué et les outils d'analyse sont devenus plus complexes. Mais il apparaît évident par cette anecdote que le but primaire de ces techniques est de rendre à l'évidence un aspect particulier d'un fait naturel. L'exemple du cheval au galop reste assez éloigné de nos problématiques actuelles, mais les principes restent les mêmes.

Pour notre étude, l'objectif est d'extraire des grandeurs physiques qui puissent s'introduire dans une stratégie de réalisation de tâches de manipulation bio-inspirées par des mains mécaniques. En effet, les mains mécaniques pour lesquelles toutes ces méthodes sont développées *sont, par nature architecturale, bio-inspirées*.

Les mains mécaniques ont généralement une paume et des doigts composés de phalanges liées par des articulations, tout comme la main humaine. Ces articulations admettent des DDL qui visent à s'apparenter à ceux de la main biologique. L'architecture des mains mécaniques est donc vouée à évoluer de telle sorte qu'aucune distinction, au moins du point de vue de la fonction, puisse être faite entre le mécanisme et le réel.

Les systèmes d'analyse de mouvement actuels sont regroupés en deux grandes catégories : les systèmes optiques, et les systèmes non optiques.

3.2.1 Les systèmes d'analyse du mouvement optiques

Les systèmes optiques sont les moyens de capture et d'analyse du mouvement les plus répandus. Pour cause, ils permettent de s'intéresser à l'aspect le plus évident pour l'œil : la cinématique du mouvement. Pour beaucoup d'études, ce seul moyen suffit pour mettre en évidence une multitude d'aspects.

Les systèmes optiques à marqueurs passifs sont très répandus, ils permettent de *suivre* des marqueurs réfléchissants par au moins deux caméras. Chaque caméra projette une lumière hautement réfléchie par le marqueur dont le volume est bien défini. S'effectue ensuite une reconstruction de chaque marqueur repéré, ce qui conduit à un suivi de sa position au cours du temps. Des segments sont alors construits en créant des liaisons cinématiques à l'aide de ces marqueurs. La masse des marqueurs étant négligeable, ils ne créent aucune gêne dans l'évolution des mouvements. Ce type de système permet donc la liberté de mouvement au sujet étudié, ce qui lui vaut son utilisation dans des grands espaces pour l'étude des mouvements à grande amplitude.

Les systèmes optiques à marqueurs actifs sont composés d'un jeu de caméras et de marqueurs équipés en diodes électroluminescentes. Ces capteurs se différencient les uns des autres par les fréquences ou longueurs d'ondes émises. Ce type d'équipement a l'avantage principal d'être généralement plus précis que leurs homologues à capteurs passifs en termes de suivi de position. Ils sont généralement plus robustes et le sujet peut s'éloigner des caméras car la reconnaissance de volume est inexistante. En revanche, les capteurs étant actifs, ils requièrent une alimentation électrique et par conséquent les marqueurs sont liés à l'alimentation par des fils électriques, gênant ainsi les gestes du sujet.

Enfin, il existe des systèmes dépourvus de capteurs. Ces systèmes sont beaucoup moins répandus, ils se trouvent principalement dans les labora-

toires de recherche au stade de développement. Quelques systèmes tels que 4D VIEW SOLUTIONS® développé par l'INRIA ainsi que le système ORGANIC MOTION™, se commercialisent déjà et offrent des possibilités très intéressantes comme la liberté de mouvement totale dont peut jouir le sujet¹. Ces systèmes reconstruisent le volume du sujet en constituant un maillage tridimensionnel. La solution paraît donc alléchante.

3.2.2 Les systèmes d'analyse du mouvement non optiques

Les systèmes non optiques sont souvent composés de capteurs destinés à mesurer une grandeur spécifique. Par opposition aux systèmes optiques, ils ne sont pas forcément destinés à l'analyse cinématique du mouvement. Par conséquent, ces systèmes peuvent s'utiliser en tant que complément d'une méthode optique pour l'obtention d'une information particulière supplémentaire.

Parmi ces systèmes se trouvent les capteurs de bas niveau comme par exemple les accéléromètres et les gyromètres. Les accéléromètres sont des dispositifs qui, fixés à un objet, permettent de mesurer les accélérations linéaires suivant trois axes orthogonaux de l'objet. Les gyromètres fonctionnent de manière similaire pour donner une information sur la vitesse angulaire. Ces dispositifs ont un faible coût et peuvent être facilement embarqués sur les systèmes. De plus, il n'existe pas de problèmes particuliers quant aux circonstances d'utilisation (pas de systèmes de caméras pour suivre le mouvement, donc pas de problèmes d'occlusion optique). En revanche, ces systèmes doivent être alimentés, comme les systèmes optiques à marqueurs actifs. Il existe aussi des capteurs de bas niveau à l'analyse dynamique du mouvement tels que les capteurs de force ou les capteurs de couple.

Viennent ensuite des systèmes mécaniquement plus complexes comme les exosquelettes. Ce sont des mécanismes polyarticulés qui s'attachent au sujet humain formés par des segments rigides et reliés par des liaisons pivots. Ils sont également équipés de capteurs de position (potentiomètres) passifs ou encore de capteurs de couple au niveau des articulations. Ils épousent les formes du corps humain et il en existent deux sortes. D'abord les exosquelettes passifs, qui rentrent dans cette catégorie des systèmes d'analyse du mouvement, servent à enregistrer l'évolution angulaire des liaisons, des couples articulaires ou encore des vitesses des rotation. Ils sont globalement autonomes, mais malheureusement ils peuvent créer une gêne lors des mouvements, surtout lorsqu'un contact avec un autre objet a lieu. Mais encore, leur architecture étant souvent inextensible, ils ne peuvent être utilisés par deux sujets dont les dimensions corporelles varient beaucoup.

Il existe également des exosquelettes actifs. Ces derniers ne sont pas employés dans l'analyse du mouvement car leur fonctionnalité réside dans l'assistance corporelle en soulageant les muscles du sujet. Ils servent donc à augmenter les capacités motrices d'un humain et sont utiles par exemple pour la rééducation fonctionnelle.

3.2.3 Protocole d'enregistrement d'une tâche de manipulation dextre

Notre site poitevin dispose d'un outil pour expertiser et analyser le geste humain. Il s'agit d'un système de capture et d'analyse du mouvement op-

1. À condition de rester dans le champ de vision de la caméra.

tique à capteurs passifs distribué par la société VICON® (voir FIGURE 7). Il offre la possibilité d'acquérir des vidéos à une fréquence maximale de 370 images par seconde avec une résolution de 2352×1728 pixels.

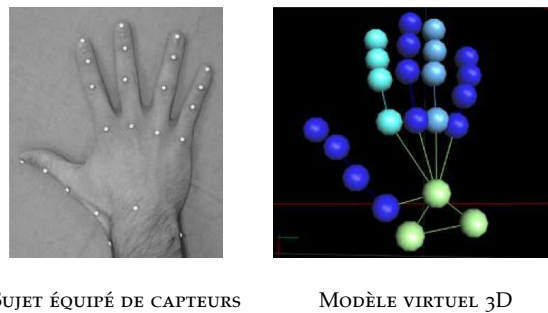


CAMÉRA T40

SITUATION EXPÉRIMENTALE

FIGURE 7: Système d'acquisition du mouvement multi caméras VICON®

Le système d'acquisition traque les marqueurs réfléchissants éclairés par des projecteurs à base de diodes électroluminescentes. Ces marqueurs sont hémisphériques et pour notre étude, leurs dimensions sont de 5mm de diamètre. Ils sont soigneusement collés à l'aide d'un adhésif adapté sur la main de l'opérateur et sur l'objet comme le montre la FIGURE 8. Un modèle segmentaire de la main est alors construit avec l'environnement logiciel NEXUS de VICON® qui procure une visualisation.



Sujet équipé de capteurs

Modèle virtuel 3D

FIGURE 8: Utilisation des capteurs passifs sur une main humaine et modèle virtuel 3D construit par le logiciel NEXUS

Le modèle segmentaire se construit après « étiquetage » de chaque marqueur puis de création des segments. Des repères associés à chaque segment doivent également être définis afin de calculer les angles intersegmentaires en tenant compte des hypothèses suivantes :

- les centres de rotation se trouvent au niveau des marqueurs ;
- il existe 2 DDL au niveau des MCP : première flexion et abduction-adduction ;
- il existe 1 DDL au niveau de l'IPP : deuxième flexion ;
- il existe 1 DDL au niveau de l'IPD : troisième flexion ;
- cette configuration est utilisée aussi pour le pouce².

La FIGURE 9 montre, pour le doigt majeur, le choix de construction des repères de chaque phalange. La procédure est la même pour les quatre doigts. Ceci permet de calculer les angles au niveau des articulations. Pour celles où un seul DDL est disponible, la procédure est assez simple. Les relations

2. Le pouce humain compte 5 DDL au total mais les pouces des mains mécaniques de notre laboratoire possèdent 4 DDL.

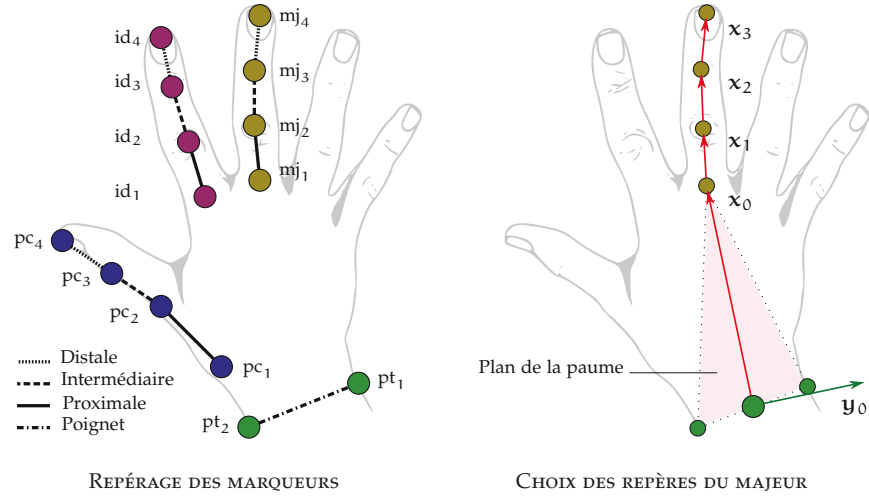


FIGURE 9: Repérage des marqueurs et repères des phalanges de la main

(8) et (9) procurent respectivement les angles intersegmentaires des IPP et IPD :

$$q_{IPP} = q_3 = \arccos(\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1) \quad (8)$$

$$q_{IPD} = q_4 = \arccos(\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_2) \quad (9)$$

Pour calculer les deux angles intersegmentaires au niveau des MCP, nous projetons le vecteur \mathbf{x}_1 dans le repère de la paume de la main $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$. La matrice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{x}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}$$

est à identifier avec la matrice de rotation entre le repère \mathcal{R}_0 associé à la paume et le repère \mathcal{R}_2 associé à la phalange intermédiaire. Cette dernière matrice dépend de l'agencement cinématique du doigt souhaité : première flexion puis abduction-adduction ou abduction-adduction puis première flexion. Les paramètres articulaires q_1 et q_2 sont ainsi obtenus.

Les résultats obtenus étant bruités, les données ont du être filtrées à l'aide des fonctions `butter` pour la construction du filtre passe-bas et `filtfilt` pour le filtrage de la série des données, de la `SIGNAL PROCESSING TOOLBOX` de `MATLAB®`. La FIGURE 10 montre des résultats obtenus directement avec le système de capture avant et après filtrage (filtre passe-bas (LPF) d'ordre 2 à une fréquence de 10Hz).

Les vitesses et accélérations articulaires sont obtenues par dérivation des positions articulaires calculées ci-dessus.

La capture de mouvements de manipulation fine présentée dans ce chapitre reste un travail sensible. En effet, la taille relativement petite de la main humaine impose l'utilisation de petits marqueurs réfléchissants (5mm de diamètre dans notre cas). L'installation de ces marqueurs sur la main peut

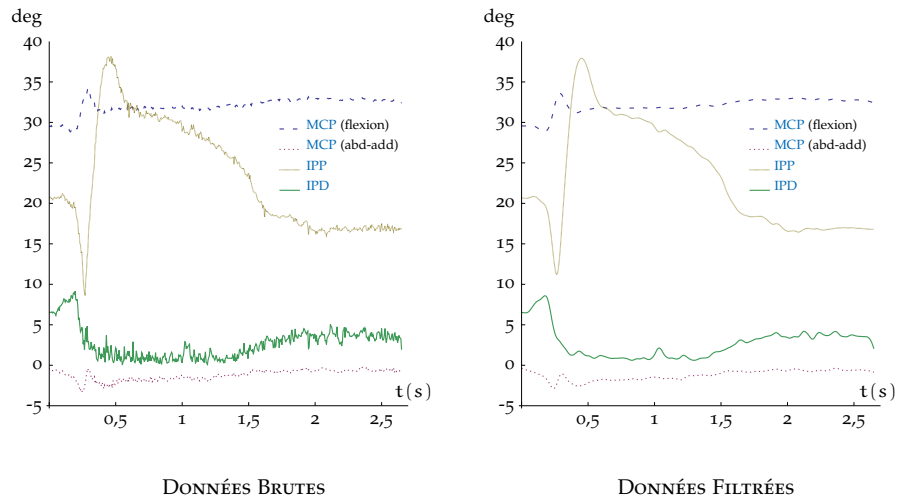


FIGURE 10: Coordonnées articulaires d'un doigt en mouvement avant et après filtrage

s'avérer difficile et leur proximité relative peut dévoiler des problèmes d'occlusion. Ce sont autant de facteurs qui nécessitent une bonne expérience de l'outil.

ÉTAT DE L'ART EN MATIÈRE DE MAINS ROBOTIQUES ANTROPOMORPHES

Nous allons dans cette partie nous intéresser aux mains robotiques existantes, ainsi qu'aux préhenseurs polyarticulés à fort potentiel de dextérité. On compte ainsi dans le monde environ une centaine de mains mécaniques développées aussi bien par des industriels, que par des laboratoires académiques.

On peut classer ces mains en fonction du degré de sous-actionnement. Le nombre d'actionneurs comparé au nombre d'articulations permettra en effet d'évaluer la capacité d'une main à piloter indépendamment ses articulations. Lorsque le nombre d'actionneurs est égal au nombre d'articulations, on qualifie la main, de main *complètement actionnée*. Il en résulte généralement dans ce cas des capacités qui dépassent la simple préhension *tout-ou-rien* d'un objet.

La motivation principale de ces développements est qu'une main multi-doigts ou une main polyarticulée peut offrir une solution intéressante en termes de dextérité, de polyvalence, d'adaptation à la forme de l'objet. Ainsi une main multi-doigts pourra exécuter la saisie d'objets variés, et pourra offrir des capacités en termes de manipulation dextre et de repositionnement de l'objet dans la main.

4.1 LES MAINS MÉCANIQUES À ACTIONNEMENT ÉLEVÉ ET AU DESIGN ANTROPOMORPHE

Les mains à actionnement élevé au design anthropomorphe présentent un intérêt évident, dans la mesure où elles vont permettre d'envisager la reproduction directe du comportement de la main humaine. Au vu de la dextérité incomparable de la main humaine, le potentiel de dextérité de ces mains robotiques est évidemment élevé.

Cette reproduction du mouvement humain pourra ainsi se faire de manière quasi-transparente. En effet si la main robotique et la main humaine offrent une cinématique similaire :

- il devient aisé d'envisager une « recopie » du mouvement de la main humaine à travers l'utilisation d'un gant de données ou exosquelette de main dans un schéma télé-opéré ;
- il est également possible d'utiliser des techniques d'apprentissage à partir de l'analyse du mouvement humain pour exploiter ensuite une main robotique anthropomorphique.

Nous allons donc présenter ces mains notoirement connues au sein de la communauté scientifique internationale.

4.1.1 La main UTAH/MIT

La main de Jacobsen a été conçue et réalisée en 1986 grâce à une collaboration entre l'Université d'Utah et le laboratoire d'intelligence artificielle du Massachusetts Institute of Technology (MIT). Elle reste aujourd'hui une référence dans l'histoire de la manipulation dextre en robotique en raison de

son caractère novateur à l'époque et de son design bio-inspiré. Cette main à quatre doigts offre une configuration très anthropomorphique au niveau de la cinématique des doigts ; chaque doigt possède ainsi quatre DDL correspondant aux trois mouvements de flexion-extension et au mouvement d'abduction-adduction présents sur la main humaine. La main est commandée via une transmission par câbles comme le montre la FIGURE 11.



MAIN UTAH/MIT



INTÉGRATION SUR BRAS MANIPULATEUR

FIGURE 11: La main UTAH/MIT

Le modèle biologique sur lequel s'appuie la main de Jacobsen a prouvé qu'un tel design était efficace pour les manipulations complexes [38].

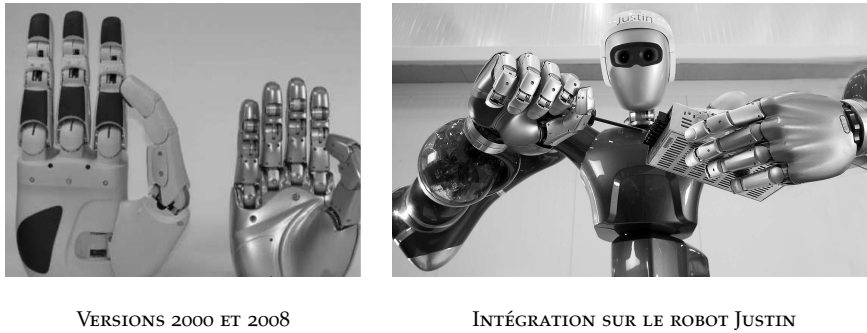
L'actionnement des articulations de la main est réalisé grâce à des vérins pneumatiques, via une transmission par tendons en polyéthylène haute résistance. Au final la main est actionnée par 32 actionneurs pneumatiques permettant de piloter les 16 DDL via 32 tendons indépendants. La main est donc totalement actionnée.

Cette main reste néanmoins pénalisée par des dimensions importantes, un actionnement encombrant et complexe qui rend la main difficile à intégrer et à embarquer en tant qu'organe effecteur. Sur le plan expérimental, la main a été exploitée pour réaliser des opérations de saisie, et quelques manipulations en bout de doigt dans un contexte quasi-statique. L'actionnement pneumatique pénalise par ailleurs la main sur le plan de la réalisation de tâches de précision en bout de doigt.

4.1.2 La main du DLR

La main développée par le Deutsches Zentrum für Luft Raumfahrt (DLR) reste à ce jour l'une des mains robotiques les plus évoluées sur la scène internationale. La première version développée en 2000 a fait office de précurseur en termes d'intégration en proposant l'une des premières mains totalement actionnées à quatre doigts avec une motorisation intégrée dans la paume de la main.

La nouvelle version de la main DLR [48] développée en 2008 a permis une réduction importante des dimensions comme en atteste la FIGURE 12, ainsi que l'implémentation d'un cinquième doigt. Elle reste caractérisée par un design anthropomorphique et se compose de quatre doigts identiques à 4 DDL chacun (3 mobilités actives et 1 mobilité passive). Un degré de liberté supplémentaire dans la paume de la main à la base du pouce permet théoriquement d'ajuster parfaitement une prise stable et une manipulation dextre. Les deux premiers DDL de chaque doigt sont réalisés par une liaison cardan alors que les deux autres sont couplés à l'aide d'un ressort. La main du DLR dans sa deuxième version est donc sous-actionnée avec 15 DDL actionnés pour un total de 20 articulations.



VERSIONS 2000 ET 2008

INTÉGRATION SUR LE ROBOT JUSTIN

FIGURE 12: La main du DLR

Avec cette nouvelle version l'objectif était clairement d'exploiter la main en l'embarquant sur un bras manipulateur. L'intégration de la main a ainsi été réalisée avec succès en l'embarquant en tant qu'organe effecteur sur le robot Justin à l'extrémité d'un bras KUKA LWR. Néanmoins les dimensions de la main du DLR restent éloignées des dimensions de la main humaine. De nombreuses démonstrations ont permis de valoriser la main du DLR ; des tâches de manipulation en bout de doigt en quasi-statique ont été proposées et la plupart des expérimentations montrent des tâches de saisie ; dont certaines concernent de la saisie dynamique. Le fort potentiel de dextérité de cette main avec par exemple du repositionnement à l'intérieur de la main reste donc à démontrer.

4.1.3 La main de la SHADOW ROBOT COMPANY

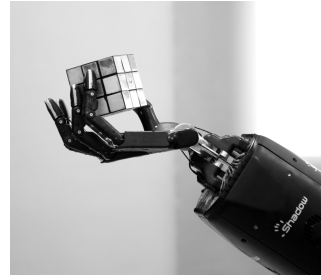
La main de SHADOW est probablement la main robotique au design anthropomorphe le plus abouti. Elle est commercialisée par la société anglaise SHADOW ROBOT COMPANY en deux versions, la C5 actionnée par des vérins pneumatiques et la C6M actionnée par des moteurs électriques. La main compte cinq doigts et possède 20 DDL actionnés et 4 DDL couplés, pour un total de 24 articulations. Ainsi même si l'actionnement n'est pas complet, le degré de sous-actionnement est faible. Les amplitudes de mouvement sont très proches des amplitudes de la main humaine.

Ces mains permettent de saisir des objets extrêmement variés en termes de taille et de dimension. En ce qui concerne la manipulation, les actionneurs pneumatiques de la main C5 fournissent des vitesses considérables, toutefois la précision en position reste inférieure à la précision d'une main actionnée électriquement. Une autre difficulté pour la manipulation des objets avec cette main, dans sa version « actionnement pneumatique » reste liée à la modélisation difficile des muscles artificiels au niveau du contrôleur de la main [6, 64].

Avec le projet européen HANDLE, la société SHADOW ROBOT COMPANY a mis en situation sa main C6M, c'est-à-dire sa main basée sur un actionnement électrique (cf. FIGURE 13). Les partenaires impliqués ont permis l'intégration d'un certain nombre de composants propres à la perception autour de cette main embarquée à l'extrémité d'un bras manipulateur (voir FIGURE 13) : vision exploitant une caméra KINECT et la librairie OPENNI, capteur tactile 6 composantes à l'extrémité de chaque doigt ; pour autant les vidéos de manipulation proposées ne permettent pas de conclure sur une avancée importante en termes de dextérité de la main, les expérimentations en saisie et en manipulation proposées concernent des tâches relativement simples réa-



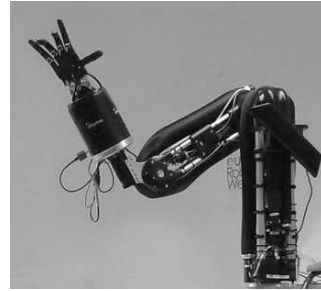
MODÈLE C5



MODÈLE C6



MAIN HUMAINE ET MAIN SHADOW



PROJET HANDLE

FIGURE 13: La main de SHADOW C5 et C6M

lisées en schéma « *quasi-statique* » ou bien une reproduction de mouvement de main humaine via un gant de données. Cette main n'a pas été exploitée dans un contexte de saisie ou de manipulation dynamique.

4.1.4 La main GIFU-III

La main GIFU-III développée à l'Université de GIFU au Japon en 2001 offre un design anthropomorphe, un poids plume de 1,4 kg motorisation comprise et des dimensions réduites avec un facteur 1,3 par rapport à la taille de la main humaine. Le pouce possède 4 DDL actionnés, les quatre autres doigts possèdent 4 DDL dont 3 sont actionnés. Avec 20 articulations et 16 actionneurs, le degré d'actionnement de la main GIFU-III reste élevé.

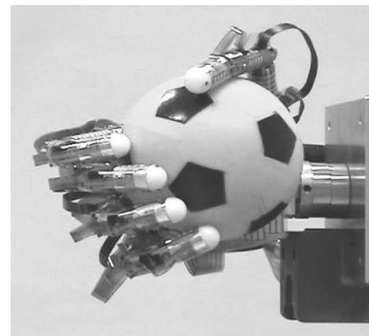


FIGURE 14: La main GIFU-III

Cette main offre avec un tel actionnement et sa cinématique anthropomorphe un fort potentiel de dextérité. Les démonstrations proposées montrent des opérations de saisie (voir FIGURE 14). L'état de l'art n'a pas permis de

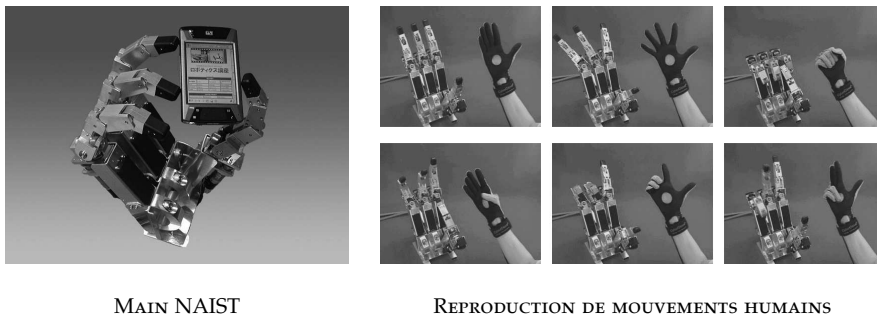
mettre en avant des expérimentations de manipulation complexes avec repositionnement à l'intérieur de la main, ni d'opérations de saisie dynamique.

En l'occurrence, une publication [76] présente une manipulation de l'objet saisi avec une translation de l'objet saisi : 3cm de déplacement réalisés en 0,3 s. Le déplacement de l'objet est suivi par un système OPTOTRAK. Même si la dynamique reste faible, cet exemple de tâche simple permet d'illustrer la difficulté pour une main robotique avancée de reproduire ce type de mouvement fin en bout de doigt.

Des expérimentations montrent par ailleurs la main en situation de téléopération avec l'utilisation d'un gant de données sans objet saisi ; la main y reproduit en temps réel les mouvements de l'opérateur humain.

4.1.5 La main NAIST

La main NAIST est la dernière main présentée au sein de cette rubrique. Elle a été développée au Japon à l'Institut NARA et achevée en 2007. Le but était de conduire des recherches en manipulation dextre en exploitant des informations tactiles, ainsi que la programmation par démonstration de l'humain [42]. La main possède quatre doigts, et chaque doigt est doté de 4 DDL dont 3 sont actionnés ; soit un total de 16 DDL pour l'ensemble de la main. Le poids et les dimensions de cette main sont loin d'être anthropomorphes comme en attestent les photos de la FIGURE 15.



MAIN NAIST

REPRODUCTION DE MOUVEMENTS HUMAINS

FIGURE 15: La main NAIST

On constate après ce tour d'horizon des mains dextres au design anthropomorphe, que les expérimentations probantes avec un niveau de dextérité élevé sont rares. Ces mains réalisent pour la plupart de la saisie d'objets de formes variées et ont ainsi démontré la capacité de ces mains à s'adapter à tous types d'objets néanmoins rigides pour la plupart.

En ce qui concerne la manipulation d'objets en bout de doigt, les démonstrations proposées exploitent pour beaucoup un schéma télé-opéré avec un gant de données. Les expérimentations où la main manipule un objet saisi de manière autonome à l'intérieur de la main avec du repositionnement et une planification préalable sont très rares comme nous avons pu le constater à travers les quelques exemples précédents les plus aboutis ; nous présenterons à ce sujet des résultats issus des travaux de l'équipe RoBioSS lors de la présentation des mains robotiques développées au sein de l'institut PPRIME. Le potentiel de dextérité qui devrait conduire avec ces mains au design anthropomorphe à imiter et reproduire la main humaine reste donc un enjeu certain mais loin d'être atteint pour les chercheurs du domaine.

4.2 LES MAINS DEXTRES À DYNAMIQUE ÉLEVÉE ET RÉSISTANTES AUX CHOCS

Nous souhaitons dans le cadre des travaux de ce mémoire, explorer la capacité des mains robotiques et des préhenseurs à réaliser de la saisie dynamique, voire de la manipulation dynamique. Il était donc important de présenter quelques développements notoires dans ce domaine où peu de résultats existent. Nous présenterons ainsi deux types de mains, une main dont le design et le contrôle ont été pensés pour la réalisation de tâches de manipulation où la dynamique de l'objet est élevée d'une part, et une main dont la conception a été pensée pour permettre une interaction dynamique avec l'environnement d'autre part, c'est le cas des mains robustes, c'est-à-dire résistantes aux chocs et en particulier capables de saisir une balle au vol.

4.2.1 *Main UT/HDS*

La main mécanique UT/HDS est développée par l'Université de Tokyo. Avec son poids réduit de 0,8kg et un actionnement intégré à la base des doigts, elle offre une dynamique inégalée à ce jour sur la scène internationale. Elle est ainsi capable d'attraper une balle qui tombe avec une vitesse de $4\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ en moins de 0,01s, ainsi les vitesses articulaires peuvent atteindre $1800^{\circ}\cdot\text{s}^{-1}$. La force appliquée par l'extrémité d'un doigt est de l'ordre de 28N.

La main possède trois doigts et un actionnement complet avec 8 DDL pilotés par 8 actionneurs (voir FIGURE 16). La particularité de cette main est d'intégrer au niveau de l'actionnement la dernière technologie d'actionneur miniature développée par HARMONIC DRIVE®.

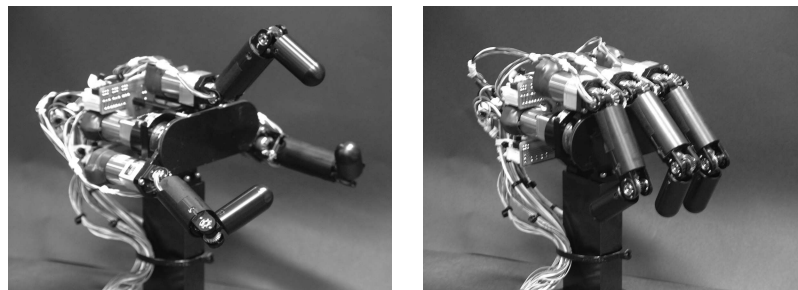


FIGURE 16: La main UT/HDS

Le point fort de ce développement est le couplage d'un système de vision avec un ordinateur parallèle appelé Column-Parallel High Speed Vision System (CPV) offrant une grande vitesse de traitement d'image de l'ordre d'1ms pour le repérage d'un objet dans l'espace [54]. Forte de ce contrôle visuel, les démonstrations de manipulation produites sont impressionnantes en termes de vitesse de l'objet. En l'occurrence, le nombre de doigts de la main empêche d'envisager du repositionnement et/ou une réorientation de l'objet saisi à l'intérieur de la main.

4.2.2 La main « super robuste » du DLR

Le DLR a développé récemment une main capable de résister à ces collisions avec des objets rigides ainsi qu'à des chocs sans craindre aucune altération de la mécanique de la main. La robustesse de la main a été placée au cœur de la problématique de conception. Cette main aurait pu également figurer parmi les mains dextres au design anthropomorphe ; cependant elle offre des performances dynamiques avec des vitesses articulaires qui peuvent atteindre $2000^{\circ}\cdot s^{-1}$ lorsque les ressorts sous tension libèrent leur énergie après un impact. A la différence de la main UT/HDS (cf. 4.2.1), ces vitesses articulaires ne sont pas obtenues pour un pilotage des articulations en position ; dans ce mode, la vitesse articulaire de la main n'excède pas $500^{\circ}\cdot s^{-1}$.



MAIN « SUPER ROBUSTE »

MAJEUR DE LA MAIN

FIGURE 17: La main « super robuste » du DLR

La main développée possède avec ses cinq doigts une forme et des dimensions anthropomorphes. Les cinq doigts avec un total de 19 DDL sont actionnés via 38 tendons connectés chacun à un actionneur. Le pilotage des 38 actionneurs permet ainsi de contrôler en permanence la raideur des tendons et ainsi d'absorber des chocs importants ; la main a ainsi été soumise à des coups répétés¹ alors qu'elle était sous contrôle de position.

Les extrémités des doigts sont ainsi capables d'exercer un effort de plus de 30 N, ce qui fait de cette main l'une des mains robotiques les plus puissantes. La main a ainsi été pensée pour la robotique de service ; la main précédemment développée par le DLR (cf. 4.1.2) avec une transmission rigide et embarquée sur le robot Justin ne permettait pas ou peu d'envisager la saisie d'une balle au vol en raison de l'impact produit au moment de la saisie.

Un actionnement antagoniste est donc mis en œuvre avec cette main via deux tendons pour piloter une articulation. Chaque tendon est couplé à un actionneur. Lorsque les deux actionneurs tournent dans le même sens, cela implique naturellement un mouvement de l'articulation ; lorsque les deux actionneurs tournent dans le sens contraire, la raideur de l'articulation est modifiée. Il devient donc possible de manipuler un objet finement en travaillant avec une raideur élevée ; et de la même façon en diminuant la

1. Il s'agit de coups avec un marteau pesant 500 grammes.

raideur, il devient possible d'absorber l'énergie propre à un choc ou à une saisie dynamique. Il est à noter que cette main reste une main d'exception avec un coût estimé de commercialisation de l'ordre de 100 000 €.

4.2.3 Conclusion

Les mains présentées ici ont permis de réaliser un rapide tour d'horizon des enjeux et limitations liées à l'exploitation de ces mains dédiées à la fois à la saisie adaptative et à la manipulation dextre.

Nous avons exclu certaines catégories de mains et/ou préhenseurs de cette présentation tels que les préhenseurs à trois doigts pour réaliser de la saisie adaptative (main BARRETT), les préhenseurs robustes résistants aux chocs (main iRobot) ou encore les prothèses au design anthropomorphe qui proposent une quinzaine de configurations de prise possibles (main BEBIONIC, main i-Limb) (cf. FIGURE 18). Ces catégories de main n'offrent pas la possibilité de manipuler un objet saisi en bout de doigt.

Même si ces mains sont dignes d'intérêt, elles restent donc éloignées de nos objectifs qui visent à mettre en œuvre une stratégie pour la reproduction de la dextérité de la main humaine aussi bien pour de la saisie que pour de la manipulation.



MAIN BEBIONIC 3



MAIN I-LIMB



MAIN BARRET



MAIN IROBOT-DARPA

FIGURE 18: Des préhenseurs spécifiques

Les travaux récents ont ainsi fait apparaître de nouveaux types de préhenseurs et/ou de mains plus robustes, telle la main du DLR « super robuste ». Cette main ouvre des possibilités d'interaction avec l'environnement intéressantes, avec la possibilité d'attraper une balle au vol avec une énergie cinétique importante.

Nous allons dans ce contexte nous attacher à apporter une contribution dans la conception de mains robotiques aptes à répondre à ces exigences en saisie et en manipulation dextre dans un contexte dynamique, en s'inspirant du modèle humain qui reste inégalé en termes de dextérité. Pour

mener à bien ce travail, nous nous appuyerons en premier lieu sur les mains robotiques dextres développées au sein l'équipe [RoBioSS](#).

4.3 LES MAINS ROBOTIQUES DE L'INSTITUT PPRIME

L'activité recherche en manipulation dextre a débuté au début des années 90 à Poitiers. Elle a conduit en 1996 à la conception d'une main robotique à quatre doigts totalement actionnée à seize articulations. Cette main a évolué en 2009 dans le cadre du projet Agence Nationale de la Recherche (ANR) [ABILIS](#). Parallèlement à ce travail, une main à quatre doigts et douze actionneurs plus compacte a également été réalisée.

Avec le projet [ANR ABILIS](#), un certain nombre d'approches pour la saisie et la manipulation dextre ont été évaluées et valorisées avec ces dispositifs expérimentaux ; une main de nouvelle génération avec un actionnement à haut rendement a ainsi été conçue avec le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA).

L'équipe a donc développé et contribué au développement de trois mains dédiées à la manipulation dextre. Forte de cette expérience, elle souhaite aujourd'hui continuer ces développements et mettre ces mains en situation dans un contexte robotique collaboratif. Nous allons donc présenter ces mains avant de les utiliser dans notre approche où nous souhaitons confronter ces mains à la reproduction de mouvements dextres produits par la main humaine.

4.3.1 La main robotique à quatre doigts et seize articulations ROB-H16

4.3.1.1 Les caractéristiques de la main

La main robotique à quatre doigts et seize articulations actionnées développée en 1996 (cf. [FIGURE 19](#)) a été largement inspirée par le modèle humain ; ainsi la cinématique retenue avec quatre articulations par doigt (trois pour le mouvement de flexion-extension, une pour le mouvement d'abduction-adduction), les dimensions et l'implantation des doigts sont similaires à celles de la main humaine. Elle reste à ce jour la main la plus aboutie développée au laboratoire. Une évolution de cette main devrait voir le jour à la fin de l'année 2013.



FIGURE 19: La main à quatre doigts et seize actionneurs ROB-H16

Un cinquième doigt manque cependant à la main pour satisfaire un anthropomorphisme plus avancé. Le choix de développer une main à quatre

doigts a été dicté par la volonté de pouvoir repositionner les doigts sur l'objet saisi durant une tâche de manipulation pour réaliser d'une part des mouvements de grande amplitude sans effectuer d'opération de dépose-reprise de l'objet, et d'autre part de produire des réorientations de l'objet saisi.

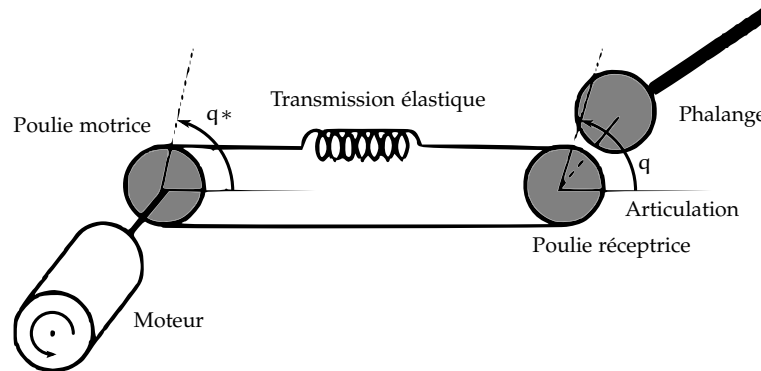


FIGURE 20: Schéma de la transmission de la main ROB-H16

Un autre point important mérite d'être souligné concernant la conception de cette main ; il s'agit de la transmission retenue qui repose sur l'utilisation de câbles. En effet deux câbles permettent la transmission du mouvement entre le moteur et l'articulation (cf. FIGURE 20) ; soit un total de 32 câbles de transmission pour l'ensemble de la main. On peut évidemment effectuer l'analogie avec les tendons propres à la main humaine et à son actionnement antagoniste. Ces caractéristiques conceptuelles ont ainsi intéressé les partenaires spécialistes en neurosciences dans le cadre du projet [ANR ABILIS](#). Sur ces bases, une stratégie de commande bio-inspirée pour la saisie a été mise en œuvre.

4.3.2 Les expérimentations conduites

La main robotique polyarticulée développée est une main particulièrement avancée sur la scène internationale ; elle reste unique sur la scène nationale et a été citée à ce titre parmi les cent faits marquants du CNRS.

Les travaux conduits en manipulation dextre ont permis de développer une stratégie complète dédiée à la manipulation dextre en quasi-statique [23, 31]. Une partie des composants de cette stratégie a ainsi été citée au sein du chapitre 2 de ce mémoire.

La stratégie proposée permet ainsi de résoudre les étapes suivantes du processus permettant la réalisation d'une tâche de manipulation dextre :

- synthèse d'une prise optimale d'un objet en bout de doigt ;
- résolution de la stabilité de l'objet saisi en temps réel : calcul en ligne des efforts de serrage ;
- planification du mouvement des doigts pour réaliser le mouvement souhaité de l'objet préalablement saisi ;
- repositionnement des doigts sur l'objet en cours de manipulation pour assurer la continuité de la tâche et ainsi produire des mouvements de grande amplitude.

Pour illustrer cette stratégie, nous présentons ci-après quelques résultats significatifs qui ont permis de valoriser expérimentalement ces approches

avec la main à seize actionneurs. Il est important de noter que dans le cadre du projet ANR ABILIS (CONTINT 2009–2012), la main a été installée en tant qu'organe effecteur à l'extrémité d'un bras manipulateur industriel.

4.3.2.1 Synthèse de prise

Le processus de synthèse de prise mis en œuvre offre la possibilité de synthétiser une prise de type « force-closure » [47], c'est-à-dire apte à résister à des efforts arbitraires, optimisée d'un objet en prenant en compte des critères tels que la minimisation des efforts de serrage, la manipulabilité, l'éloignement par rapport aux limites articulaires. Cette synthèse de prise qui repose sur un processus d'optimisation basé sur les AG permet de résoudre le problème du « grasp », c'est-à-dire de la saisie. Le problème de résolution du « reach », c'est-à-dire de configuration du bras, est quant à lui résolu en exploitant deux types d'approches : une approche bio-inspirée [74] ou encore une approche par systèmes experts [22].

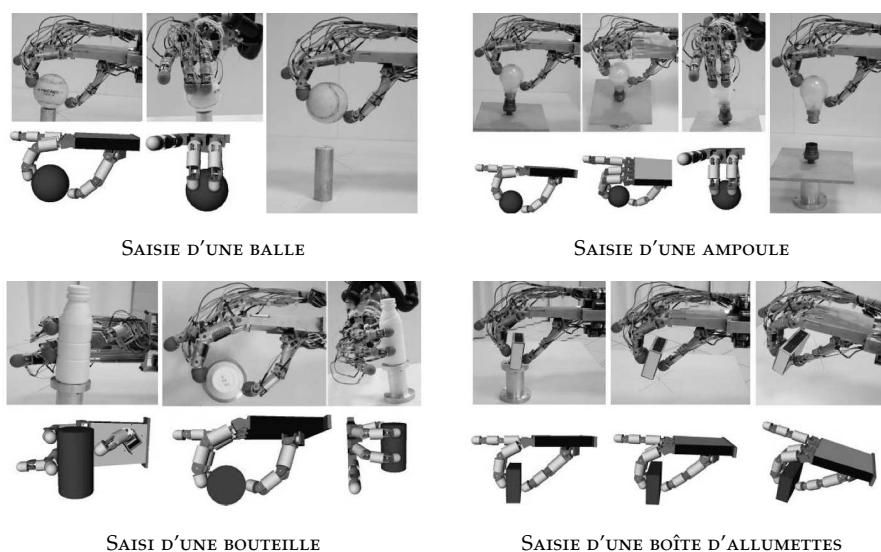


FIGURE 21: Exemples de synthèse de prise en bout de doigt

La FIGURE 21 illustre ainsi plusieurs configurations de prise synthétisées en exploitant cette approche. Lors de ces opérations de saisie, la stabilité de la prise est obtenue par un calcul des efforts de serrage en ligne. La FIGURE 22 montre une configuration complète du système *bras + main* pour saisir un objet placé dans l'espace de travail du bras manipulateur. Dans cet exemple, une approche *mixte* a été employée. Cette méthode emprunte des stratégies issues des neurosciences pour la partie « reach ».

4.3.2.2 Planification d'une tâche de manipulation

Une fois l'objet saisi, la manipulation de l'objet à l'intérieur de la main peut débuter. Il s'agit de manipulation en bout de doigt. En fonction de l'amplitude souhaitée du mouvement de l'objet, le repositionnement des doigts sur l'objet pourra être mis en œuvre. En effet, si une collision entre les doigts/l'objet apparaît ou si une limite articulaire est atteinte durant la réalisation de la tâche de manipulation, il est nécessaire de reconfigurer successivement les doigts sur l'objet pour sortir de cette situation de blocage afin de poursuivre la manipulation.

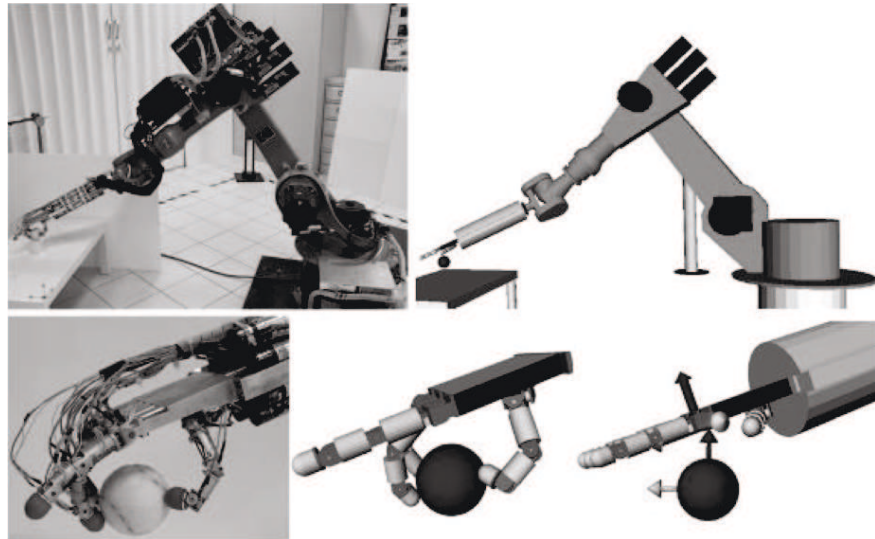


FIGURE 22: Prise d'un objet sphérique en utilisant l'approche mixte

La réalisation d'une tâche de manipulation avec repositionnement est illustrée sur la FIGURE 23. Les étapes 1 à 3 concerne la saisie de l'ampoule et le début de la manipulation. A l'étape 4, après un mouvement de rotation de l'ampoule exploitant le roulement sans glissement des doigts sur l'objet, la main est en situation de limite articulaire ; il est donc nécessaire de reconfigurer les doigts sur l'objet tout en conservant la stabilité de celui-ci au sein du préhenseur. Les étapes 5 à 13 montrent le repositionnement successif des doigts sur l'objet pour sortir de cette situation de blocage et atteindre une nouvelle prise synthétisée en exploitant le processus de synthèse de prise basé sur une optimisation par AG. Les étapes 14 et 15 montrent l'achèvement de la manipulation souhaitée avec la lampe qui s'allume.

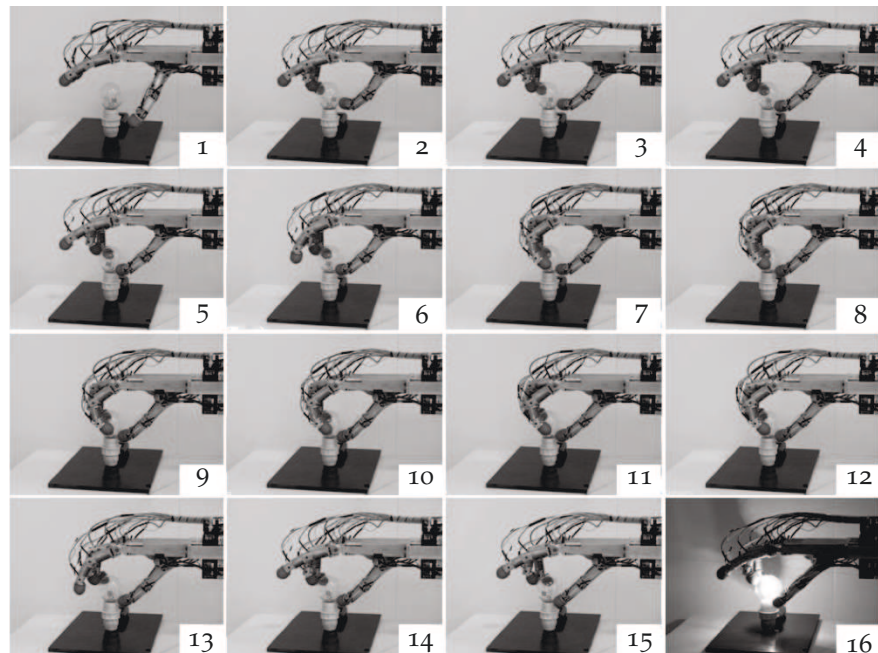


FIGURE 23: Mouvement de vissage d'une ampoule : étapes de la manipulation

4.3.3 Main robotique intégrée à quatre doigts et douze actionneurs ROB-H12

Les dimensions importantes de l'avant-bras de la main à 16 actionneurs étant importantes, les chercheurs de l'équipe ont été conduits à s'intéresser à la conception d'une main mécanique plus compacte. Une solution à quatre doigts et douze actionneurs intégrés dans la main (voir FIGURE 24) a alors été explorée. Le design a été largement inspiré par celui de ROB-H16. Ainsi la main est composée de quatre doigts et chaque doigt possède trois articulations pour les mouvements de flexion-extension et une articulation pour l'abduction-adduction. La cinématique des doigts est la même que celle des doigts longs (index, majeur, annulaire) de ROB-H16.



FIGURE 24: La main compacte à douze actionneurs et seize articulations ROB-H12

La transmission du mouvement est une transmission par câbles en acier recouverts d'un film en Téflon. Le principe de la transmission est illustré par la FIGURE 25. On observe la poulie motrice relative à l'axe moteur d'une part, et la poulie réceptrice relative à l'articulation d'autre part. L'intérêt de cette configuration de la transmission est que la tension du câble est identique quel que soit le mouvement (flexion ou extension) ; en effet pour ROB-H16 la conception de la transmission impliquait la mise sous tension préalable de deux câbles (cf. FIGURE 25).

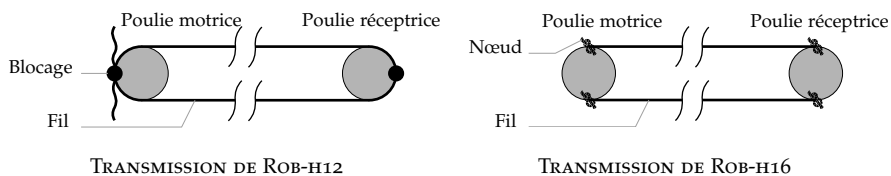


FIGURE 25: Transmission des mains RoBioSS

Afin de pouvoir intégrer la motorisation sous la paume et dans les doigts de la main, les choix technologiques ont orienté les solutions vers un couplage mécanique entre deux articulations sur chaque doigt. Le nombre de motorisations est ainsi diminué, avec un moteur en moins par doigt, par rapport à ROB-H16. Ainsi le mouvement de la phalange distale (repéré par le paramètre articulaire q_4) est couplé mécaniquement avec le mouvement de la phalange intermédiaire (repéré par le paramètre articulaire q_3). La relation de couplage retenue est la relation de couplage qui existe naturellement chez l'homme entre ces deux phalanges ; elle est par ailleurs utilisée pour le calcul du modèle géométrique inverse des doigts de la main ROB-H16 (voir 2.3).

Il en résulte la relation suivante entre q_3 paramètre de l'IPP et q_4 paramètre de l'IPD :

$$q_4 = \frac{2}{3} q_3$$

La motorisation est partiellement intégrée sous la paume de la main. Les douze moteurs retenus sont des moteurs à courant continu équipés de réducteurs planétaires et de codeurs incrémentaux. La phalange proximale de chaque doigt intègre un actionneur. Cet actionneur permet de piloter l'axe relatif à la phalange intermédiaire et donc également la phalange distale. Les huit autres actionneurs sont positionnés sous la paume et pilotent les articulations via la transmission par câbles.

La dernière main que nous présentons dans ce mémoire est la main développée dans le cadre du projet [ANR ABILIS](#).

4.3.4 *La main ABILIS*

Dans le cadre du projet [ANR ABILIS](#), les partenaires réunis souhaitaient concevoir une nouvelle main optimal-actionnée, plus intégrée, moins coûteuse en énergie et plus légère que les mains existantes en associant de manière judicieuse des technologies mécaniques innovantes et adaptées. L'objectif étant de pouvoir réaliser avec cette main aussi bien des tâches de saisie d'objets en bout de doigts ou empaumés que des tâches de manipulation fine en bout de doigts.

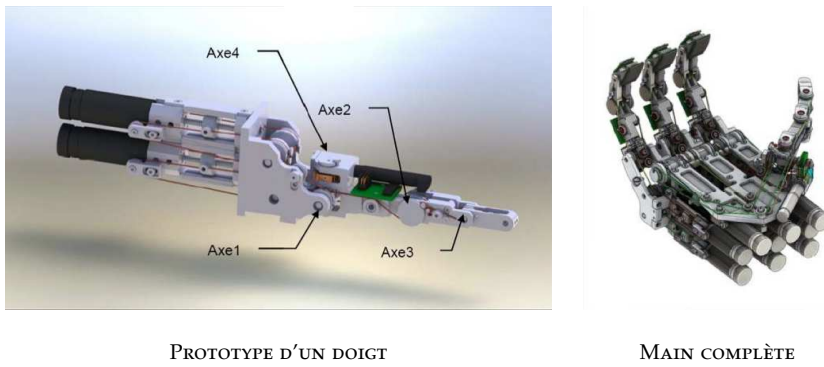
Les caractéristiques principales retenues pour cette nouvelle main sont les suivantes : elle possède 16 [DDL](#), l'implantation des doigts et du pouce sont anthropomorphes, les doigts sont capables d'exercer un effort normal de 300g et le pouce un effort de 900g. Il était également important que l'encombrement de la main soit le plus petit possible et semblable à celui de la main humaine (échelle 1,2). Les besoins exprimés en termes de manipulation ont conduit à baser la conception sur l'implantation d'actionneurs de type vérins à câbles et sur des architectures flexibles qui présentent des caractéristiques intéressantes du point de vue de la fidélité de transmission, de la capture de l'effort, de l'encombrement et des jeux mécaniques.

En ce qui concerne l'actionnement, les mouvements de flexion/extension sont actionnés par le vérin à câble et le mouvement d'abduction/adduction est quant à lui mû par un mécanisme irréversible (moins contraignant en termes de performance et d'encombrement). La [FIGURE 26](#) montre le prototype d'un doigt. Au final, la main réalisée (cf. [FIGURE 26](#)) se compose de 3 doigts à 4 [DDL](#) (dont trois sont actionnés) tous semblables au prototype présenté par la [FIGURE 26](#), et d'un pouce à 4 [DDL](#).

Pour exploiter la main et procéder à son évaluation, les algorithmes de synthèse de prise ont permis de générer des prises bio-inspirées sur une plateforme constituée de la main [ABILIS](#) et d'un robot manipulateur EPSON 6 axes. A titre d'exemple, la [FIGURE 27](#) illustre la saisie d'une bouteille pour effectuer le remplissage d'un verre.

4.3.5 *Conclusion*

Ces mains ont été conçues pour réaliser d'une part des tâches de saisie pour des objets variés, et d'autre part pour réaliser des tâches de manipulation dans un cadre quasi-statique. Leur design et leur conception respective ont été inspirées par le design de la main humaine, les configurations de



PROTOTYPE D'UN DOIGT

MAIN COMPLÈTE

FIGURE 26: La main ABILIS



FIGURE 27: Remplissage d'un verre à l'aide d'une bouteille d'eau

prise caractéristiques (cf. FIGURE 28) ont été évaluées. Pour autant, la reproduction de mouvements de manipulation dextre de la main humaine n'a pas été intégrée dans la démarche initiale de conception.

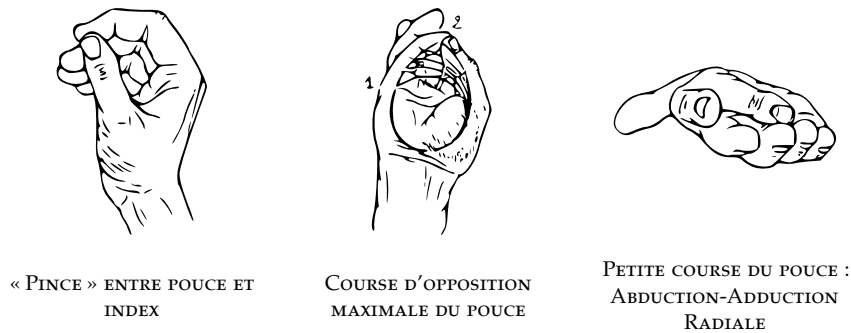


FIGURE 28: Postures caractéristiques de la main humaine

Nous nous proposons ainsi dans la partie qui suit de confronter ces mains à des expérimentations produites au préalable par un opérateur humain. Pour réaliser ces expérimentations, il est en premier lieu nécessaire de disposer du modèle que constitue le mouvement de la main humaine. Nous nous appuyons ainsi dans cette démarche, sur une première étape propre à l'analyse du mouvement humain et à son acquisition.

ÉVALUATION DE LA CAPACITÉ DES MAINS ROBOTIQUES À REPRODUIRE DE MOUVEMENTS HUMAINS DE MANIPULATION

Le travail présenté dans les pages suivantes s'inscrit dans le contexte du développement de mains mécaniques anthropomorphes. Ces préhenseurs sont destinés à évoluer dans un environnement humain. Dès lors, une robustesse accrue ainsi qu'un rapprochement de la main humaine¹ sont visés. La main humaine est communément vue comme l'organe externe le plus complexe du corps humain et c'est le seul préhenseur universel présent dans la nature. La reproduire mécaniquement est tout simplement impossible à cause des limites techniques actuelles. Pour cette raison, des choix pertinents en matière d'aspects conceptuels doivent être pris en fonction des tâches principales visées. Les préoccupations de notre équipe se situent au niveau de la manipulation fine en bout de doigts.

Le travail proposé vise ainsi à assister la conception de mains mécaniques bio-inspirées. Il s'agit ainsi de permettre le développement de mains robotiques capables de manipuler des objets en faisant appel à des mouvements qui requièrent une dynamique élevée.

Par conséquent, les tâches de manipulation dextre étudiées seront essentiellement celles qui demandent des grandes variations de vitesse lors des mouvements. Comme tout travail comportant une composante d'analyse du mouvement, notre méthode est dépendante de la tâche visée. Néanmoins, elle peut être adaptée à n'importe quelle tâche de manipulation sous réserve de disposer d'un dispositif d'analyse optique dont la fréquence soit compatible avec la dynamique de la tâche observée.

De manière générale, le but de la capture et de l'analyse du mouvement est d'extraire des informations sur les mouvements du sujet réalisant une tâche donnée. Le sujet visé pourra dans notre cas aussi bien concerner un humain, qu'un système robotique.

Comme nous l'avons vu dans les paragraphes précédents, notre laboratoire dispose de mains robotiques capables de saisir des objets, ou encore de les manipuler avec une approche quasi-statique. Dans ce contexte, il s'agit donc de manipulation fine en bout de doigt avec une dynamique quasi-inexistante.

Dès lors que l'on souhaite saisir un objet au vol, ou encore manipuler des objets avec une dynamique plus importante, il devient important d'intégrer cette dynamique dans la démarche de conception afin d'optimiser la main en vue de la réalisation de ce type de tâche.

Nous nous proposons donc en nous appuyant sur les mains mécaniques existantes au laboratoire d'effectuer des simulations avec ces dispositifs afin de détecter leurs limitations actuelles par rapport à des tâches cibles avec une dynamique importante.

L'objectif est de pouvoir ensuite exploiter cette approche d'une part, pour évaluer des cinématiques de main en fonction d'une tâche cible à réaliser, et d'autre part pour en déduire des règles, des heuristiques pour assister le concepteur dans sa démarche.

1. Tant du point de vue architecturale que du point de vue de la puissance.

Dans un premier temps, nous nous appuyerons sur l'analyse d'une tâche de référence avec une dynamique élevée produite par la main humaine. Pour cela, nous utiliserons le système de capture du mouvement optique VICON® dont dispose le laboratoire. Dans un second temps, nous étudierons la possibilité de reproduire cette tâche de référence avec une main robotique.

Les résultats obtenus seront discutés et des perspectives d'exploitation de ces résultats seront proposées.

5.1 LA CAPTURE ET L'ANALYSE DU MOUVEMENT AU SERVICE DU DÉVELOPPEMENT DE MAINS ROBOTIQUES

Il était important dans notre démarche de nous appuyer sur une tâche de référence avec une dynamique importante. Pour répondre à cet enjeu, nous avons choisi de nous focaliser sur une tâche. La tâche choisie est la mise en rotation rapide d'une balle de tennis autour de l'axe vertical par rapport au sol. C'est un mouvement qui exige de hautes vitesses articulaires des doigts et qui impose d'utiliser au moins trois doigts. C'est également un mouvement qui rentre dans le cadre des manipulations fines en bout de doigts.

La disposition initiale du mouvement est montrée sur la FIGURE 29 ; sont également représentés les marqueurs disposés sur la main du sujet ainsi que sur la balle de tennis. Ce schéma montre la disposition de la main par rapport à la balle. La balle de tennis (64mm de diamètre, 59g) est tenue à l'extrémité de trois doigts d'une main droite (pouce, index et majeur) qui entraînent la balle en rotation autour de l'axe vertical dans le sens horaire.

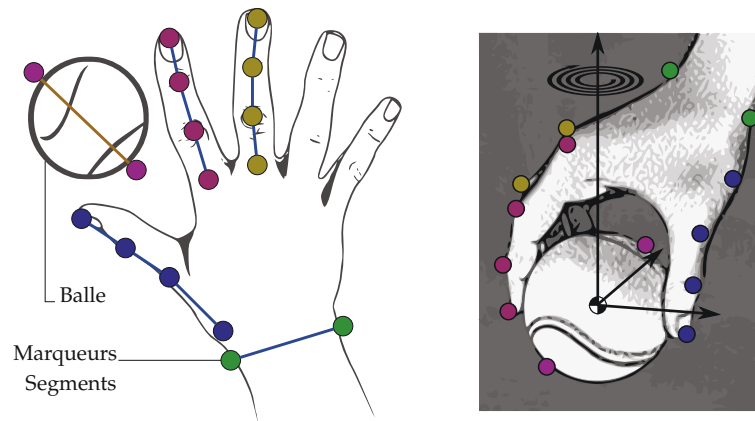


FIGURE 29: Mise en rotation rapide d'une balle de tennis : positionnement des marqueurs réfléchissants pour l'enregistrement

Nous souhaitons ainsi d'une part déterminer les caractéristiques du mouvement appliqué à l'objet, et d'autre part, déterminer les mouvements individuels des doigts impliqués dans la manipulation.

Le processus expérimental propre à l'enregistrement du mouvement a été présenté dans la section 3.2 avec le positionnement des marqueurs permettant l'enregistrement de la cinématique de la main. La capture du mouvement s'effectue pendant toute la durée du mouvement mais seule la séquence où la balle tourne est d'intérêt. La fréquence des caméras a été fixée à 200Hz.

Trois sujets différents ont été analysés pour un total de neuf essais. Nous avons constaté des fortes ressemblances concernant les mouvements de tous ces essais. La vitesse de rotation de la balle au moment du lâcher est toujours du même ordre de grandeur et il en va de même pour tous les autres paramètres pris en compte lors de cette étude. Ainsi, les résultats ci-après correspondent à un de ces neuf essais jugé comme étant le plus homogène. La balle reste en contact avec les doigts pendant une durée de 0,29s et une vitesse maximale de rotation d'environ $2000^{\circ}.s^{-1}$ est atteinte. Durant cette phase de manipulation où les doigts sont en contact, la balle effectue une rotation de 142° autour de l'axe de rotation. A compter de l'instant où la balle est libre de tout contact avec les doigts de l'opérateur, la balle freine et s'arrête après 2,65s.

Le plan de prise de la balle (plan défini par les trois points de contact) n'est pas situé *au milieu* de la balle, comme on aurait pu l'imaginer. Il est, sur un axe perpendiculaire au support, décalé de 9,85mm vers le haut (déduit en faisant une moyenne sur le décalage de tous les plans de prise au cours du mouvement) comme schématisé par la FIGURE 30.

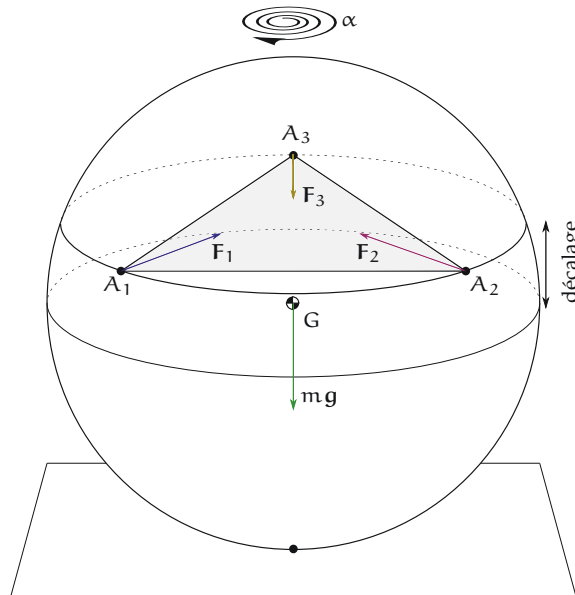


FIGURE 30: Plan de prise de la saisie : points de contact A_1 , A_2 et A_3 entre la balle et les extrémités des doigts de l'opérateur

A partir de l'enregistrement des deux marqueurs installés sur la balle, il est possible de calculer directement la vitesse $\dot{\alpha}(t)$ et la position angulaire $\alpha(t)$ est obtenue ensuite par intégration de la vitesse par rapport au temps (voir FIGURE 31). La vitesse mesurée est bruitée, un filtrage passe-bas à 10Hz est appliqué sur ce signal.

La FIGURE 32 se focalise sur le mouvement de la balle pendant la durée de la phase de contact entre cette dernière et les doigts de la main du sujet analysé.

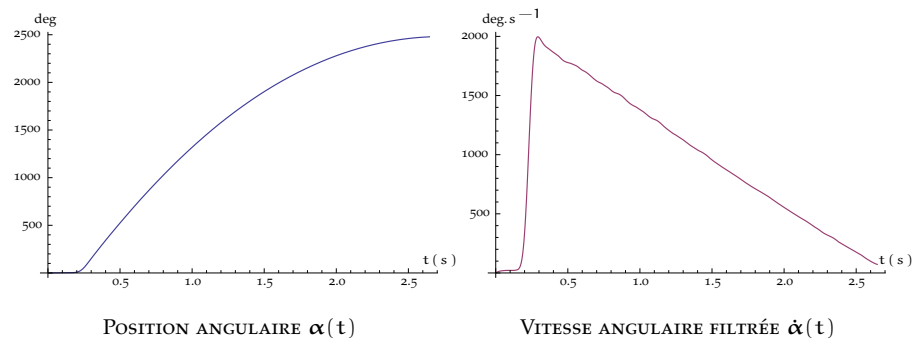


FIGURE 31: Mouvement de la balle enregistré

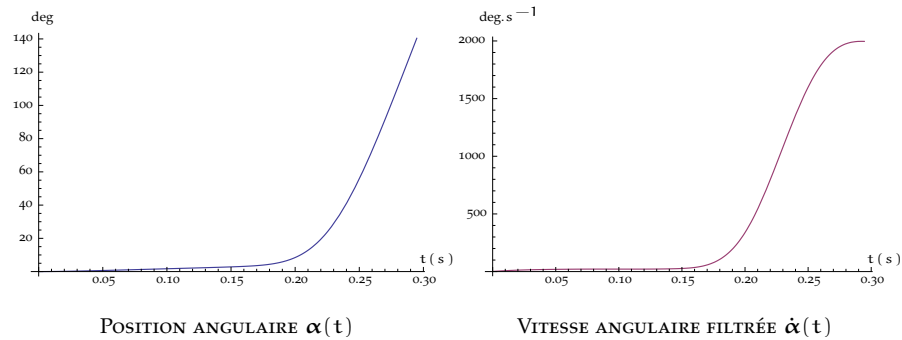


FIGURE 32: Mouvement enregistré focalisé sur la phase de contact entre les doigts du sujet et la balle

5.2 SIMULATION AVEC LES MAINS ROBIOSS, RECHERCHE DES LIMITES

Dans cette section, les informations issues de la capture du mouvement sont employées afin de reproduire le mouvement de l'objet imposé par les sujets analysés. Ce mouvement sera reproduit par les mains mécaniques ROB-H16 et ROB-H12 en simulation. Cette étape représente notre phase de recherche des limitations mécaniques effectives des mains RoBioSS.

Le processus est le suivant :

- A. Le mouvement des sujets analysés est transcrit le plus simplement possible² ;
- B. le mouvement est reproduit *tel quel* par les mains RoBioSS (ROB-H16 et ROB-H12) en simulation en faisant abstraction de leurs limites mécaniques³ dans un premier temps⁴ ;
- C. la stratégie de synthèse de tâches de manipulation dynamique développée au chapitre 2 est employée pour reproduire le mouvement des mains humaines par les mains mécaniques ;
- D. les résultats des tests en simulation permettront d'identifier les paramètres de conception à tenir en compte pour une amélioration des mains mécaniques évaluées.

Pour notre exemple de *mise en rotation rapide d'une balle de tennis*, la prise initiale peut être simplifiée de façon à obtenir un plan de prise *équilatéral* ou

2. Ce qui veut dire qu'un minimum de modifications sera apporté afin de respecter au mieux la nature du mouvement humain.

3. Tant architecturales que motrices.

4. Ce qui permettra d'identifier les nécessités d'amélioration.

symétrique comme il est montré sur la FIGURE 30, ou encore un plan de prise *isocèle*.

La résolution de la *géométrie inverse* (cf. 2.3) est réalisée tout au long du mouvement de façon à ce que les bouts des doigts *suivent* le mouvement de l'objet. Ceci est évidemment au *sens figuré* puisque ce sont en réalité les doigts qui vont *conduire* la balle de tennis dans son mouvement rotatif. Pour cela, les points de contact tout au long du mouvement doivent être *mis à jour* en partant de la trajectoire angulaire de la balle (cf. FIGURE 31) obtenue via la capture du mouvement.

Lors des essais dynamiques de la mise en rotation rapide de la balle de tennis, l'utilisation de capteurs de force a été évitée. En effet le fait d'instrumenter tous les sujets en capteurs de forces aurait été invasif et difficile à mettre en place. De plus le mouvement des doigts n'aurait pas été naturel et cela aurait nuit à notre finalité. Rappelons que l'analyse du mouvement du sujet n'est pas la finalité première et par conséquent, la connaissance des efforts appliqués par les doigts du sujet sur la balle de tennis n'est pas vraiment nécessaire. *En revanche*, connaître les efforts *qu'une main mécanique appliquerait si elle devait reproduire ce type de mouvement* est extrêmement important pour la simulation. Dès lors, les *efforts de manipulation* sont obtenus par la méthode de calcul des efforts de contact proposée au 2.4.

La FIGURE 33 montre les forces de manipulation durant la phase de contact du lancer en rotation de la balle de tennis calculées pour chaque doigt des mains RoBioSS. Elles doivent être appliquées sur la surface de la balle de tennis par les doigts de la main mécanique durant toute la phase de contact afin de l'entraîner en rotation à une vitesse maximale d'environ $2000^{\circ}.s^{-1}$ (voir la section 5.1). Nous avons également vérifié que ces efforts soient non nuls à tout instant en calculant leurs normes (cf. FIGURE 33, au point de départ, les valeurs sont très proche de 0 sans l'atteindre).

Des essais en simulation numérique ont été conduits avec les deux mains mécaniques du laboratoire.

5.2.1 Essais de la main ROB-H16

Une première simulation de la mise en rotation rapide de la balle de tennis a été réalisée avec la main ROB-H16 et une prise initiale mettant en jeu le pouce, l'index et le majeur. La FIGURE 34 montre les conséquences de cet essai au cours duquel deux collisions ont eu lieu. La première collision a eu lieu entre l'index et le majeur et la deuxième entre la phalange intermédiaire du majeur et la balle de tennis. La limite articulaire de l'IPP a été atteinte et dépassée avant la fin du mouvement entraînant la rupture de contact avec l'objet.

La deuxième simulation a été réalisée avec une prise initiale utilisant le pouce, l'index et l'annulaire (voir FIGURE 35). De cette manière, la collision entre l'index et le majeur a été évitée augmentant ainsi les chances de terminer le mouvement. Cependant, une collision entre la phalange intermédiaire de l'annulaire et la balle a tout de même eu lieu. La limite articulaire de l'IPP du pouce a également été dépassée ainsi que la rupture de contact du pouce avec l'objet.

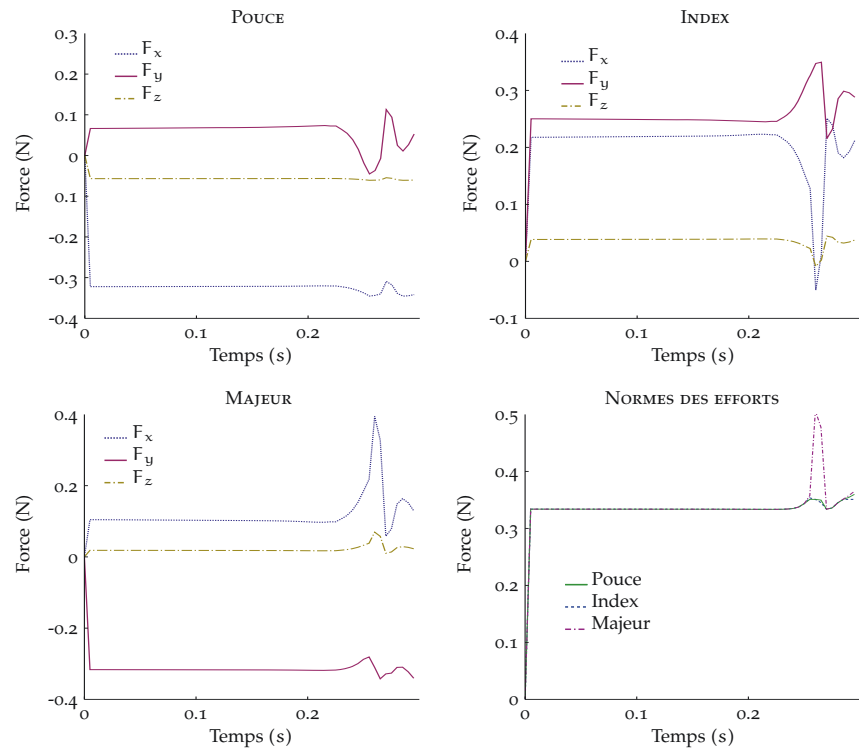


FIGURE 33: Forces de manipulation durant la phase de contact de la mise en rotation de la balle de tennis pour chaque doigt des mains RoBioSS

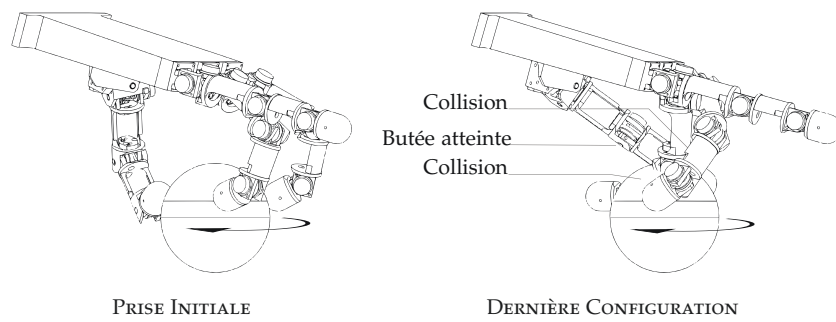


FIGURE 34: Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H16 avec une prise Pouce, Index et Majeur

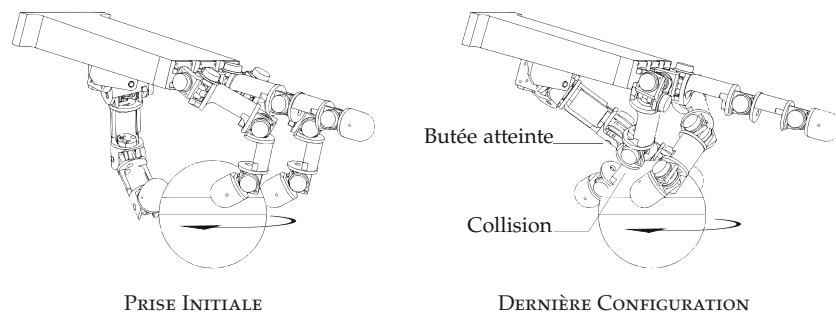


FIGURE 35: Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H16 avec une prise Pouce, Index et Annulaire

5.2.2 Essais de la main ROB-H12

La main ROB-H12 a ensuite été évaluée de la même manière que la main ROB-H16 pour le lancer de la balle de tennis en rotation rapide. La FIGURE 36 montre la prise initiale avec le pouce, l'index et le majeur ainsi que la dernière configuration de l'essai. Au final, ce sont les mêmes symptômes que ceux observés pour la main ROB-H16, à savoir les collisions entre phalanges et entre phalange et objet ainsi que le dépassement d'une limite articulaire et la rupture de contact avec l'objet pour le pouce.

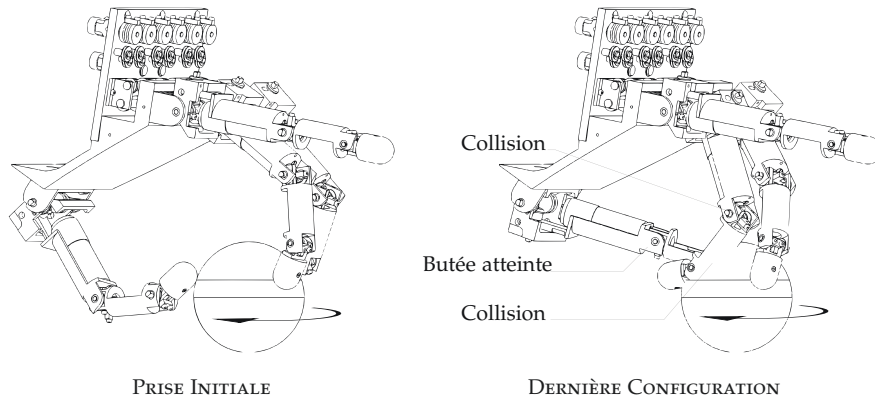


FIGURE 36: Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H12 avec une prise Pouce, Index et Majeur

Finalement, l'essai avec une prise pouce, index et annulaire par la main ROB-H12 n'a pas permis non plus de terminer le mouvement sans qu'une collision et un dépassement de limite angulaire ait lieu. La rupture de contact entre le pouce et l'objet a également été observée.

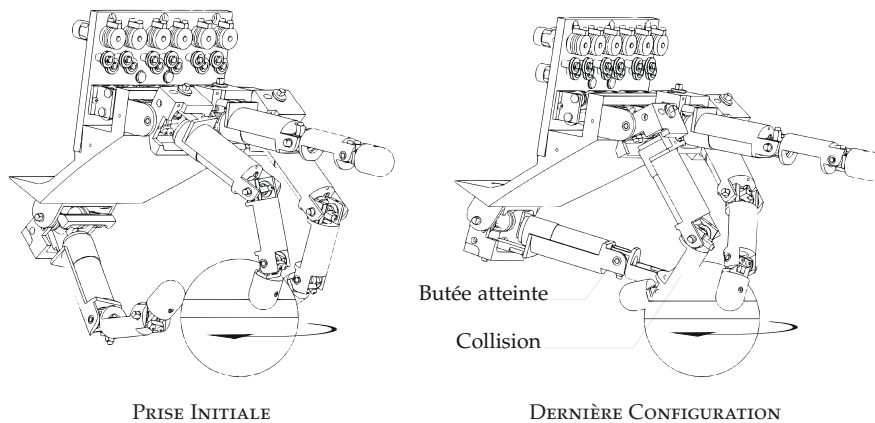


FIGURE 37: Mise en rotation rapide de la balle de tennis par ROB-H12 avec une prise Pouce, Index et Annulaire

5.2.3 Bilan des essais

Les FIGURES 34 à 37 montrent quelques résultats visuels. Dans ces figures, sont affichées les configurations initiales ainsi que la dernière configuration avant l'arrêt définitif de l'algorithme 2.2.1. En effet, après cette dernière configuration, il n'était plus possible pour les deux mains respectives

de poursuivre le mouvement à cause de la rupture du contact entre leurs pouces et la balle de tennis.

Remarquons également qu’une prise employant l’annulaire au lieu du majeur a été utilisée afin de maximiser la manipulabilité. En utilisant le majeur il était impossible de dépasser quelques itérations. Ainsi, ni ROB-H16 ni ROB-H12 n’ont pu compléter toute la phase de contact de 0,29s sans rompre le contact avec l’objet ou même rentrer en collision avec celui-ci.

L’espace de travail requis est en fait plus grand que celui proposé par nos mains mécaniques. Leur architecture actuelle ne permet malheureusement pas ce type de mouvement hautement dynamique.

En particulier, les limites en abduction-adduction de l’index ainsi que de l’annulaire ont été dépassées. L’autre phénomène important qui a été remarqué durant le lancer en rotation rapide de la balle de tennis concerne les mouvements de flexion-extension IPP-IPD et leurs rapports de couplage. Il a été relevé que ces rapports sont en réalité variables.

TABLE 3: Limites angulaires des abductions-adductions des doigts longs des mains RoBioSS

ROB-H16		ROB-H12	
ACTUELLE	CONSEILLÉE	ACTUELLE	CONSEILLÉE
$\pm 15^\circ$	$\pm 30^\circ$	$\pm 15^\circ$	$\pm 30^\circ$

La TABLE 3 montre les limites en amplitude angulaire des abductions-adductions utilisées pour la conception de nos mains mécaniques. Elle affiche également les limites conseillées, ou du moins les amplitudes maximales observées lors de la simulation avec les mains RoBioSS. Tel qu’il a été proscrit par [40], nous proposons qu’une amplitude de $\pm 30^\circ$ en abduction-adduction des doigts longs soit employée pour la conception des futures mains mécaniques.

Pour terminer avec cette section, nous insisterons sur le fait que la capture et l’analyse du mouvement ont donné suite à une nouvelle façon d’évaluer la capacité d’une main mécanique à réaliser une tâche de manipulation dynamique. Il sera également souligné que d’autres paramètres (en plus des limites angulaires et l’architecture globale) restent encore à évaluer car des collisions ont eu lieu pendant la phase de contact même si les limites angulaires ont été ignorées. Ces paramètres supplémentaires seront étudiés dans la section suivante.

5.3 ANALYSES SUPPLÉMENTAIRES ET ÉVALUATION DES MOTEURS

Des analyses supplémentaires ont été menées afin de poursuivre notre *recherche des paramètres pertinents à prendre en compte lors de la conception d’une main mécanique anthropomorphe*. Nous nous sommes d’abord intéressés aux rapports de couplage IPP-IPD; puis nous nous sommes interrogés sur l’impact du poignet lors des tâches de manipulation dynamiques. Pour finir, nous avons cherché à évaluer la capacité motrice d’une main mécanique à réaliser la mise en rotation rapide d’une balle de tennis.

TABLE 4: Rapports de couplage constants des articulations IPP-IPD des mains RoBioSS

ROB-H16		ROB-H12	
POUCE	DOIGTS LONGS	POUCE	DOIGTS LONGS
$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

5.3.1 Analyse du rapport de couplage articulaire IPP-IPD

ROB-H16 et ROB-H12 ont leurs articulations IPP-IPD couplées entre elles. Pour la première, il s'agit d'un couplage de haut-niveau, c'est-à-dire, que c'est le contrôleur qui a été configuré pour imposer ce couplage⁵ lors d'un contrôle en position. En revanche, pour la deuxième, il s'agit d'un couplage mécanique qui lui ne peut-être changé que par la modification physique du système couplant les deux articulations⁶. L'équation (10) présente le rapport de couplage utilisé par les mains mécaniques RoBioSS.

$$\frac{DIP}{PIP} = \frac{2}{3} \quad (10)$$

Ce rapport impose que pour chaque degré parcouru par l'articulation proximale inter-phalangienne, la distale inter-phalangienne en parcourra les deux tiers. De la même manière, un couplage des articulations IPP-IPD est utilisé pour les pouces des deux mains. La TABLE 4 répertorie les rapports de couplage des articulations IPP-IPD des deux mains mécaniques du laboratoire.

En réalité, il a été observé lors des expériences réalisées avec les sujets humains, que les rapports de couplage des articulations IPP-IPD sont variables au cours du mouvement. La FIGURE 38 illustre ce fait et montre comment ces rapports de couplage évoluent au cours du temps. Précisons que ces données sont *directement* issues de la capture du mouvement⁷. Les sujets sont alors capables de changer le rapport de couplage des articulations IPP-IPD dynamiquement. Ceci est effectivement dû à la nature élastique des tendons [40]. De ce fait, les doigts sont relativement compliants alors le rapport de couplage (10) n'est employé *seulement* que quand le doigt n'exerce aucun effort envers un objet.

Le graphique de la FIGURE 38 montre également les rapports de couplage moyens pour le pouce, l'index ainsi que le majeur. Si ces valeurs sont comparées à celles de la TABLE 4, nous voyons que les rapports de couplage IPP-IPD employés par les mains du laboratoire correspondent en fait à la valeur moyenne en ce qui concerne le pouce et l'index. Par contre, cela ne se vérifie plus au niveau du majeur. De plus, ces rapports de couplage sont constants et non pas variables comme le prouve l'expérience. En conséquence, ils ne permettent pas la reproduction d'un mouvement *humain tel*

5. ROB-H16 est entièrement actionnée, toutes ses articulations peuvent être contrôlées indépendamment.

6. ROB-H12 est sous-actionnée, et c'est précisément la distale inter-phalangienne qui n'est pas motorisée.

7. Trajectoire de référence des sujets humains.

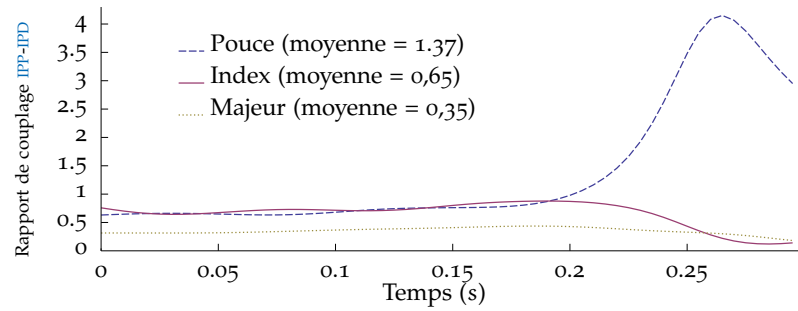


FIGURE 38: Rapports de couplage des articulations IPP-IPD durant la phase de manipulation des sujets humains

quel⁸. Ces résultats prouvent qu'il faut chercher d'autres modèles de couplage mécaniques entre les articulations afin de créer des mains mécaniques anthropomorphes.

À la vue de ces résultats, nous avons considéré le rôle du poignet dans la production de mouvements à dynamique élevée.

5.3.2 Le rôle du poignet dans les tâches de manipulation dynamique

Les résultats de la section montrent que les méthodes de conception employées couramment afin de concevoir des mains mécaniques anthropomorphes utilisent beaucoup de simplifications. Ainsi, peu de mains robotiques existantes comportent un poignet. C'est un aspect souvent négligé en raison de la complexité du mécanisme qu'il engendrerait. Les coûts de production serait également plus élevés. Mais dans d'autres cas, c'est un aspect non pris en considération au nom de la modularité et la main ainsi créée se place en tant qu'organe effecteur d'un autre robot manipulateur. Toutes ces raisons sont peut-être valables, mais au moins du point de vue biologique, la main humaine se voit entièrement liée au poignet et par conséquent aux muscles du bras en raison du réseau tendineux [40]. Aussi, naturellement, la main ne bouge *quasiment jamais* sans action du bras.

L'analyse de l'influence du poignet a consisté à quantifier les déplacements angulaires au niveau du poignet et les déplacements linéaires de celui-ci. Les déplacements angulaires ont été calculés en accord avec les recommandations prescrites par [78]. Les déplacements linéaires ont été obtenus simplement en vérifiant la position spatiale du centre de rotation du poignet par rapport au repère de référence.

La FIGURE 39 montre l'évolution des déplacements angulaires ainsi que linéaires du poignet pendant la phase de contact avec la balle de tennis. D'après ces résultats, les rotations par flexion-extension ainsi que externe-interne du poignet sont négligeables. Il en est de même pour les déplacements linéaires. En revanche, le déplacement angulaire du poignet en abduction-adduction a été d'environ 16° . Ce type de déplacement est loin d'être négligeable par rapport à l'espace de travail d'une main. À titre de comparaison, l'amplitude de l'abduction-adduction des mains mécaniques

8. Afin de reproduire un mouvement naturel il faudrait passer par une phase d'adaptation bien plus approfondie et modifier grandement les trajectoires.

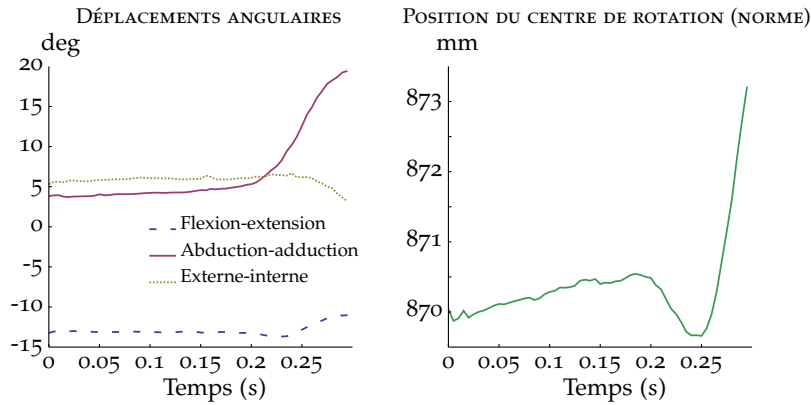


FIGURE 39: Déplacements angulaires et linéaires du poignet pendant la phase de manipulation de la mise en rotation rapide de la balle de tennis

testées au 5.2 est de seulement 15° . L'absence de cette amplitude de mouvement pénalise donc l'action des mains mécaniques.

Le poignet humain a donc joué un grand rôle dans la réalisation du lancer de la balle de tennis en rotation rapide. Des 142° de rotation de la balle⁹ durant la phase de manipulation, 16° ont été fournis par le poignet du sujet, ce qui correspond à environ 11% de la rotation totale. Ces résultats indiquent que la présence d'un poignet dans une main mécanique anthropomorphe est plus que bienvenue et elle contribuerait à résoudre beaucoup de problèmes de limitations géométriques durant des tâches de manipulation dynamiques.

5.3.3 Evaluation motrice des mains mécaniques

Les forces de manipulation permettent de calculer la dynamique inverse de chaque doigt en utilisant comme entrée la force de serrage calculée à chaque instant pour chaque doigt. La dynamique inverse pour chaque doigt a été résolue en utilisant l'algorithme 2.5.2.1. Ceci permet l'évaluation du système d'actionnement des doigts en termes des couples d'actionnement. Pour illustrer cette méthode, c'est ROB-H12 qui a servi pour l'étude. Bien évidemment, d'autres mains mécaniques peuvent être analysées avec la même procédure.

TABLE 5: Spécifications techniques du système d'actionnement de ROB-H12

CARACTÉRISTIQUES	MCP	IPP
TYPE DE MOTEUR	CC*	CC*
VITESSE MAX (tr/min)	24,1	40,65
COUPLE RMS (Nm)	0,3	0,3
COUPLE MAXIMUM (Nm)	0,45	0,45

* Courant continu

Ainsi, les couples moteurs nécessaires pour exécuter la mise en rotation rapide de la balle de tennis ont été comparés avec les spécifications actuelles

9. Voir section 5.1 pour plus de détails.

de la motorisation de ROB-H12. La FIGURE 40 montre les couples actionneurs requis par ROB-H12 pour imposer son mouvement rotatoire à la balle. Les spécifications techniques pour le système d'actionnement de ce préhenseur est donné par la TABLE 5. En comparant les deux informations rapidement, il apparaît que l'annulaire dépasse ses capacités d'actionnement.

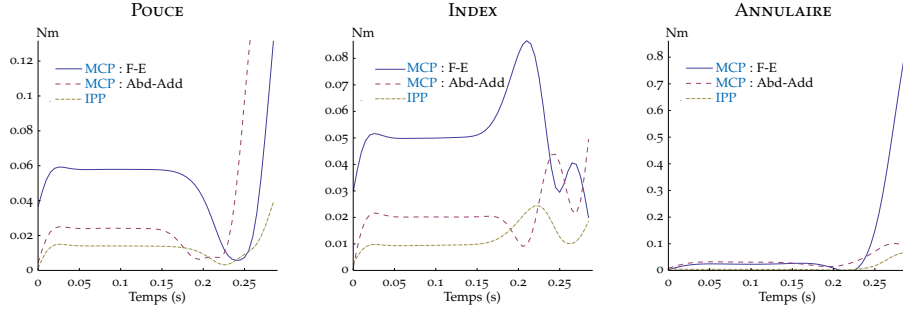


FIGURE 40: Couples articulaires de ROB-H12 pour la phase de manipulation de la mise en rotation rapide d'une balle de tennis

Par la suite, les couples Root Mean Square (RMS) $u_{i_{RMS}}$, calculés en utilisant la formule (11), ont été comparés avec les couples RMS admis par les systèmes d'actionnement de ROB-H12 :

$$u_{i_{RMS}} = \sqrt{\frac{\int_0^T u_i(t)^2 dt}{T}} \quad (11)$$

où les u_i sont les couples articulaires calculés précédemment et le temps T correspond à la durée de la phase de manipulation de la balle de tennis. Les vitesses articulaires durant la phase de manipulation ont également été comparées avec les vitesses admises par ROB-H12 (TABLE 5). Les TABLES 6, 7 et 8 affichent les vitesses maximales ainsi que les couples RMS et maximaux requis par ROB-H12 pour la réalisation de la tâche de manipulation.

Les valeurs **en gras rouge** sont celles qui sont *supérieures aux valeurs admises par le système d'actionnement*. Il apparaît donc qu'en ce qui concerne les vitesses articulaires, ROB-H12 ne soit pas en mesure de réaliser le lancer de toupie. Également, les demandes en couple pour l'articulation métacarpo-phalangienne en flexion extension (MCP : F-E) sont très élevées. Ces résultats montrent que le système d'actionnement de ROB-H12 ne permet pas dans son état actuel la réalisation de tâches de manipulation à dynamique élevée. Mais surtout, nous proposons une méthode pour évaluer les capacités motrices d'une main mécanique en simulation.

TABLE 6: Evaluation du pouce de ROB-H12 pour une mise en rotation rapide d'une balle de tennis

CARACTÉRISTIQUE	MCP : F-E ^a	MCP : ABD-ADD ^b	IPP
VITESSE MAX (tr/min)	105,79	142,77	42,38
COUPLE RMS (Nm)	0,058	0,062	0,016
COUPLE MAXIMUM (Nm)	0,14	0,14	0,05

^a Métacarpophalangienne : Flexion-Extension^b Métacarpophalangienne : Abduction-Adduction

TABLE 7: Evaluation de l'index de ROB-H12 pour une mise en rotation rapide d'une balle de tennis

CARACTÉRISTIQUE	MCP : F-E ^a	MCP : ABD-ADD ^b	IPP
VITESSE MAX (tr/min)	88,08	101,62	99,48
COUPLE RMS (Nm)	0,055	0,026	0,014
COUPLE MAXIMUM (Nm)	0,09	0,07	0,03

^a Métacarpophalangienne : Flexion-Extension^b Métacarpophalangienne : Abduction-Adduction

TABLE 8: Evaluation de l'annulaire de ROB-H12 pour une mise en rotation rapide d'une balle de tennis

CARACTÉRISTIQUE	MCP : F-E ^a	MCP : ABD-ADD ^b	IPP
VITESSE MAX (tr/min)	387,18	61,177	105,8
COUPLE RMS (Nm)	0,4	0,08	0,03
COUPLE MAXIMUM (Nm)	0,8	0,12	0,09

^a Métacarpophalangienne : Flexion-Extension^b Métacarpophalangienne : Abduction-Adduction

À travers cette partie, nous avons présenté successivement une stratégie de synthèse de tâches de manipulation dynamiques pour des mains mécaniques ; l'approche biomécanique suivie ; un état de l'art en matière de mains mécaniques anthropomorphes ; une méthode d'évaluation des mains robotiques en vue de la reproduction de mouvements humains.

Toutes ces notions s'inscrivent dans un projet voué à assister la conception des mains mécaniques bio-inspirées. En effet, les nouveaux préhenseurs et mains robotiques qui seront développés dans un futur proche par l'équipe [RoBioSS](#) de l'Institut [PPRIME](#) visent à être toujours plus rapides, toujours plus robustes et surtout plus polyvalents.

Le parti pris a été d'analyser le seul préhenseur universel naturel en action. Nous sommes convaincus qu'il ne suffit plus de se baser sur des analyses statiques de la main humaine pour rapprocher nos préhenseurs de celle-ci. Ainsi, l'analyse de tâches de manipulation dextres et à haute dynamique est requise.

Une tâche de référence dont la dynamique est élevée a été choisie et analysée afin de mieux cibler les aspects de conception à tenir en compte et ainsi faire évoluer les performances des mains mécaniques en termes d'architecture cinématique et d'actionnement.

Ainsi, nous avons proposé une stratégie globale de saisie et de manipulation dynamique *pour des mains mécaniques* lorsque le mouvement de l'objet est connu. Les paramètres de ce mouvement ont été obtenus via sa capture et son analyse à l'aide d'un outil d'analyse optique. Bien évidemment, nos méthodes sont dépendantes de la tâche analysée. Or elles sont adaptables à une quasi-infinité de tâches. Pour l'exemple choisi, la capture, l'analyse et la reproduction du mouvement par les mains [RoBioSS](#) ont été effectuées en simulation.

Dans cette étude, il a été observé que le rapport de couplage [IPP-IPD](#) ainsi que l'incidence du poignet pendant le mouvement, sont des paramètres importants et non-négligeables. Il en va de même pour les demandes en couples et vitesses articulaires. Ce sont là des aspects à prendre absolument en considération pour la réalisation de nouvelles mains mécaniques bio-inspirées.

Le rapport de couplage [IPP-IPD](#) s'est avéré variable au cours du lancer de la balle en rotation (cf. [5.3.1](#)). Il peut s'en déduire qu'un rapport de couplage doit être fonction de la posture du doigt ou encore de l'état de contact avec l'objet, c'est-à-dire de la force exercée par le doigt sur l'objet à un instant donné.

Le poignet joue un rôle très important. Les amplitudes de ses déplacements angulaires lors du lancer de balle en rotation ont un impact considérable sur le mouvement résultant de cette dernière (cf. [5.3.2](#)). Par conséquent une synchronisation entre les mouvements de ce dernier et ceux de la main doit avoir lieu pour ce type de manipulation dynamique. L'intégration d'un poignet (et d'un avant bras par conséquent) qui soit indissociable du reste de la main mécanique est donc conseillé.

Les méthodes développées au chapitre 2 pour le calcul des efforts de manipulation (cf. 2.4) et le calcul des couples actionneurs (cf. 2.5) nous ont permis d'une part de nous passer de capteurs de forces en bout de doigt lors de la capture du mouvement et d'autre part, d'évaluer le système d'actionnement d'une main mécanique et ainsi contribuer au dimensionnement des moteurs (cf. 5.3.3).

Nous souhaitons développer des mains robotiques qui puissent s'inscrire dans un environnement humain. En explorant la possibilité des nos mains mécaniques à manipuler dynamiquement des objets, nous nous sommes aperçus qu'elles n'en étaient pas aptes en leur état actuel.

En perspective aux stratégies développées dans cette première partie, nous souhaitons étudier un maximum de tâches de manipulation dynamique de façon à identifier les paramètres de conception les plus pertinents.

Pour qu'une main robotique puisse manipuler un objet, elle doit être en mesure de l'approcher. En deuxième perspective, nous souhaitons attraper un objet au vol avec une main mécanique portée par un bras manipulateur. Nous devons donc être capables d'optimiser la dynamique du bras pour réaliser ce mouvement de « *reach & grasp* ». C'est pourquoi la suite de la thèse est consacrée au contrôle optimal des robots manipulateurs.

Deuxième partie

CONTRÔLE OPTIMAL DES ROBOTS
MANIPULATEURS PAR LES ÉLÉMENTS FINIS
TEMPORELS D'HERMITE

Les ingénieurs, toujours en quête des valeurs optimales pour les grandeurs qui les intéressent, voient dans les mathématiciens les dépositaires d'un trésor de formules qu'ils doivent leur fournir sur demande.

— Jean Dieudonné (1987)

La commande optimale est communément appliquée en robotique pour mettre en mouvement des systèmes mécaniques polyarticulés. La robotisation consiste à contrôler les actionneurs des mécanismes en prenant en compte les charges externes s'exerçant sur le système. Les conditions initiales et finales en position et en vitesse sont imposées.

Afin de commander les actionneurs des robots, deux méthodes sont traditionnellement employées [26]. La première est basée sur le Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP), elle nécessite la résolution d'un système Hamiltonien couplé d'Équations Différentielles Ordinaires (EDO), gouvernant les variables d'état et les variables conjuguées [7, 26, 62, 75]. Le PMP s'applique non seulement aux systèmes mécaniques mais à tout système biophysico-chimique gouverné par une EDO. La résolution numérique fait appel à des *méthodes de tir* pour résoudre le Problème des Valeurs aux Bornes (PVB) [26, 65]. En robotique ces valeurs aux bornes se résument aux conditions finales en position et en vitesse.

La deuxième méthode, est basée sur le Principe d'Optimalité de Bellman (POB), il nécessite la résolution d'un système d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) appelées équations d'Hamilton – Jacobi – Bellman (HJB) [5, 7, 26, 75]. Cette résolution peut s'avérer compliquée du point de vue numérique [26, 67].

Dans cette partie, nous présentons une alternative aux deux méthodes citées précédemment. Notre méthode de contrôle est spécialement conçue pour commander des systèmes mécaniques dont le mouvement est gouverné par les équations de Lagrange. La discrétisation temporelle utilise les Éléments Finis d'Hermite (EFH).

7.1 LA MÉTHODE DE CONTRÔLE

Nous aborderons le contrôle optimal en partant d'une formulation tensorielle des équations du mouvement. Ce sont des EDO du second ordre gouvernant les paramètres de configuration. Les équations du mouvement se déduisent de l'énergie cinétique du robot et du potentiel de gravitation. L'énergie cinétique sera considérée comme une métrique riemannienne.

Nous présenterons une méthode d'optimisation basée sur la minimisation d'une fonctionnelle intégrale. La fonction lagrangienne de cette fonctionnelle dépend des positions, vitesses et accélérations.

Les équations d'Euler-Lagrange associées à la minimisation conduisent à des EDO du second ordre gouvernant les commandes.

7.2 LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

La Méthode des Éléments Finis (MEF) est une technique de résolution numérique des EDO ou EDP appliquées en sciences et en ingénierie. Elle est particulièrement adaptée pour résoudre des problèmes admettant une formulation variationnelle. Le domaine est divisé en sous-domaines appelés

« éléments finis ». La solution de l'EDO ou de l'EDP traitée est approchée *par morceaux* sur chacun de ces éléments. L'intégrale est ensuite évaluée comme la somme de chacune des contributions de tous les *éléments finis* du domaine.

La MEF détermine un *ensemble fini* de valeurs : les valeurs aux nœuds de la solution. Une interpolation continue par morceaux (solution approchée de l'EDP ou de l'EDO), peut être reconstruite sur tout le domaine en fin d'algorithme.

7.3 LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS EN ROBOTIQUE

L'utilisation de la MEF en synthèse et en génération du mouvement d'un robot, concerne surtout des cas où les segments sont déformables [14, 27, 30, 43, 56]. Dans tous ces travaux, la MEF est utilisée pour discrétiser l'espace afin de connaître l'état de déformation des segments du robot, ce n'est pas l'intervalle de temps qui est discrétisé. Dans le cas de [27], il s'agit d'un robot parallèle entièrement flexible et actionné par câbles ; [30, 56] utilisent la MEF pour connaître l'état de flexion d'un bras à 1 DDL au cours du mouvement ; [43] en fait de même pour un robot à 2 DDL et fait appel au PMP pour calculer les paramètres d'état et de commande du robot. D'autres exemples faisant appel à la MEF spatiale se trouvent en la robotique mobile [35].

Carrera [14], utilise également les Éléments Finis spatiaux mais il fait appel à la Méthode des Différences Finies pour discrétiser les variables d'état et de commande par rapport au temps. Eriksson [28, 29] emploie la MEF et plus précisément les EFH pour discrétiser temporellement les variables d'état et de commande le long d'une trajectoire. Il simule la commande et la trajectoire de mécanismes poly-articulés sériels en se servant des Éléments Finis Cubiques d'Hermite (EFCH).

En robotique, le *domaine* correspond à la durée d'une trajectoire du robot. C'est donc une *discrétisation temporelle* qui est effectuée (éléments finis mono dimensionnels en temps). Les équations différentielles sont les *équations du mouvement* et les *équations de la commande*¹ du robot.

De même que [28, 29], nous employons les EFH pour effectuer la commande optimale des robots sériels. Nous proposerons *trois alternatives* pour satisfaire *trois degrés de finesse*. La première utilise les EFCH. Les deux autres utilisent les Éléments Finis Quintiques d'Hermite (EFQH) et les Éléments Finis Heptiques d'Hermite (EFHH).

Les EFCH donnent les positions et les vitesses aux nœuds d'interpolation. Les EFQH donnent les positions, les vitesses et les accélérations et les EFHH donnent en plus la secousse (la dérivée troisième).

Dans notre approche, les variables de commande sont gouvernées par des EDO du second ordre de la même manière que les paramètres de configuration. Un des avantages majeurs de notre méthode est qu'elle évite le PVB. En effet, la MEF prend en compte les conditions finales aussi bien que les conditions initiales. Subséquemment, il n'est pas nécessaire de faire appel à une méthode de tir pour atteindre les conditions finales.

Un deuxième avantage est que les paramètres adjoints sont mécaniquement interprétables : ce sont les commandes. Un troisième avantage est que les valeurs des positions et des commandes sont directement calculées aux nœuds de discrétisation. Il est par conséquent inutile de reconstruire ces valeurs en fin d'algorithme.

1. Voir la sous-section 11.3.

7.4 STRUCTURE DE LA PARTIE

Nous présenterons d'abord une formulation tensorielle du modèle dynamique des robots.

Ensuite la discrétisation temporelle sera abordée. Les trois degrés d'EFH proposés seront présentés. Les fonctions de base des EFCH, les EFQH et des EFHH seront fournies. L'étude de la précision des interpolations par les EFH démontrera la superconvergence de cette méthode.

Nous simulerons la trajectoire d'un pendule non-linéaire à partir de ses conditions initiales. Une méthode de perturbation inspirée de Lagrange sera proposée.

Nous proposerons ensuite deux algorithmes de commande optimale. Le premier sera basé sur la méthode de perturbation. Le deuxième optimisera directement l'intégrale d'un Lagrangien invariant.

Les *équations de la commande* sont des EDO qui concernent les positions et les commandes. Nous mettrons en évidence la covariance de ces équations sera mise en évidence.

Finalement nous présenterons trois exemples de simulation de trajectoires et de commandes. D'abord deux systèmes mécaniques à 1 et 2 DDL, régis par des équations linéaires. Nous adapterons ensuite nos algorithmes aux cas non-linéaires pour réaliser la commande optimale d'un robot à 7 DDL dont seuls 2 actionneurs seront commandés.

DYNAMIQUE DU ROBOT ET ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

8.1 DYNAMIQUE DU ROBOT

La robotique industrielle nécessite des commandes de plus en plus rapides et précises. Nous cherchons à élaborer des algorithmes de commande optimale présentant de telles caractéristiques. Nous dédions principalement ces algorithmes à la commande des mouvements d'un bras manipulateur. Les six ou sept degrés de liberté de ce robot manipulateur sont très proches de ceux du bras humain. Ils permettent de pointer les effecteurs vers toutes les directions.

La chaîne cinématique de ces robots est sérielle : chaque articulation est portée par le segment précédent et supporte le segment suivant. Ils sont actionnés par $n = 6$ (ou 7) moteurs électriques intégrés, qui activent les n paramètres de rotation q^i .

8.1.1 Énergie cinétique

Le champ des vitesses d'un système mécanique articulé est une fonction linéaire des dérivées par rapport au temps \dot{q}^i des paramètres de configuration q^i . L'énergie cinétique $K(q, \dot{q})$ est une fonction quadratique strictement convexe de la seconde variable \dot{q} . Son Hessien $\mathbf{M}(q)$ est défini-positif, il est appelé *tenseur des masses*. La convention de sommation d'Einstein sera appliquée sur les indices répétés une fois en haut et une fois en bas. Avec cette convention l'énergie cinétique s'exprime :

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j. \quad (12)$$

8.1.2 Potentiel de gravitation

Les actions de la pesanteur sont modélisées par un potentiel énergétique $V(q)$ qui est le produit de la masse totale m , de l'intensité locale g du champ gravitationnel, et de la hauteur du centre de masse. Il sera appelé potentiel de gravitation.

8.1.3 Actionneurs

L' i^{e} moteur exerce un couple d'intensité u_i ¹ entre le i^{e} solide et le suivant dans la chaîne cinématique. Pour chaque variation virtuelle δq^i des paramètres de configuration q^i , le travail virtuel des actionneurs vaut $u_i \delta q^i$. Ce travail virtuel étant indépendant du choix des coordonnées², les u_i sont les composantes covariantes d'un tenseur que nous appellerons tenseur de commande et que nous noterons u .

1. La lettre u est l'initiale du mot russe « *upravlenie* » qui signifie *commande* (« control » en anglais) [33, 34, 59].

2. Voir section 11.1.1.

8.2 MODÈLE DYNAMIQUE

Dans la suite, nous présentons les équations du mouvement que nous privilégierons dans l'élaboration de nos algorithmes. Nous avons choisi le formalisme de Lagrange qui présente l'avantage d'être systématique.

8.2.1 Équations de Lagrange

Le mouvement du système est gouverné par les n équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} = u_i - \frac{\partial V}{\partial q^i}. \quad (13)$$

Ces équations du mouvement peuvent être détaillées sous la forme

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \ddot{q}^j + \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}^i \partial q^l} \dot{q}^l - \frac{\partial K}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} = u_i.$$

La forme quadratique (12) de l'énergie cinétique conduit aux n EDO du second ordre [69]

$$\mathbf{M}_{ij} \ddot{q}^j + \Gamma_{ikl} \dot{q}^k \dot{q}^l + \frac{\partial V}{\partial q^i} = u_i, \quad (14)$$

où les coefficients

$$\Gamma_{ikl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{ik}}{\partial q^l} + \frac{\partial \mathbf{M}_{il}}{\partial q^k} - \frac{\partial \mathbf{M}_{kl}}{\partial q^i} \right) \quad (15)$$

sont les symboles de Christoffel de première espèce associés aux \mathbf{M}_{ij} considérés comme les coefficients d'une métrique riemannienne.

Introduisant les coefficients \mathbf{M}^{ij} de l'inverse du tenseur de masses et les symboles de Christoffel de deuxième espèce

$$\Gamma_{kl}^j = \mathbf{M}^{ji} \Gamma_{ikl}, \quad (16)$$

les équations de Lagrange (14) deviennent [79]

$$\mathbf{M}_{ij} \left(\ddot{q}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{q}^k \dot{q}^l + \mathbf{M}^{jk} \frac{\partial V}{\partial q^k} \right) = u_i \quad (17)$$

et prennent la forme contravariante :

$$\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k + \mathbf{M}^{ik} \frac{\partial V}{\partial q^k} = u^i. \quad (18)$$

REMARQUE 1 *Composantes contravariantes de la commande* : En suivant les règles du calcul tensoriel dans une variété riemannienne, nous avons introduit dans le membre de droite de l'équation (18), la i^e composante contravariante $u^i = \mathbf{M}^{ik} u_k$ du tenseur de commande u .

REMARQUE 2 Les termes de l'équation (18) mettent en jeu les symboles de Christoffel Γ_{jk}^i . Pour $j = k$, ils sont dits « *centrifuges* ». Lorsque $j \neq k$, ils sont dits « *Coriolis* » [69].

DISCUSSION Suite à la vulgarisation de la méthode des éléments finis en mécanique des structures après 1945, les notions de vecteurs et de matrices sont devenues usuelles en ingénierie [77]. Dans le cadre de la mécanique numérique, de nombreux roboticiens vectorialisent l'équation (14) en introduisant un vecteur colonne de composantes \dot{q}^i et une matrice carrée \mathbf{C} de composantes $C_{ij} = \Gamma_{ikj} \dot{q}^k$. L'équation (17) devient

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{u}.$$

Les éléments de la diagonale de \mathbf{C} sont qualifiés *Coriolis* et les éléments hors diagonales *centrifuges* (voir REMARQUE 2). Nous ne retiendrons pas ces notations matricielles car la modélisation ne doit pas seulement tenir compte de l'algèbre linéaire mais aussi de la géométrie. Les paramètres de configuration q^i ne décrivent pas un espace vectoriel \mathbb{R}^n plat mais une variété riemannienne de métrique \mathbf{M}_{ij} dont la courbure est caractérisée par le tenseur de Riemann-Christoffel (voir la section 11.2.8). Les dérivées secondes \ddot{q}^i ne sont pas les composantes d'un vecteur. Ce sont les dérivées secondes covariantes $\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k$ de \dot{q}^i qui forment un vecteur $\frac{\hat{d}\dot{q}}{dt}$ (voir la sous-section 8.2.3) qui généralise l'accélération classique. Les coefficients C_{ij} ne sont pas les composantes d'un tenseur deux fois covariant. La version géométrique de l'équation du mouvement de Newton est donc $\mathbf{M} \frac{\hat{d}\dot{\mathbf{q}}}{dt} = \mathbf{u} - \nabla V$ (voir équation (20)). Elle s'énonce : *le produit de la masse par l'accélération équilibre la somme des forces.*

8.2.2 Dérivée covariante du potentiel de gravité

Dans le membre de gauche de l'équation (18), $\frac{\partial V}{\partial q^k}$ est la k^e composante covariante d'un tenseur appelé dérivée covariante du potentiel V . Dans la suite, il sera désigné par ∇V et dit « *nabla V* ». Ses composantes sont :

$$(\nabla V)_k = \frac{\partial V}{\partial q^k}.$$

Sa j^e composante contravariante $\mathbf{M}^{jk} \frac{\partial V}{\partial q^k}$ sera désigné par $(\nabla V)^j$.

8.2.3 Formulation tensorielle des équations du mouvement

Dans le membre de gauche de l'équation (18), $\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k$ est la dérivée covariante par rapport au temps de \dot{q}^i . C'est la i^e composante contravariante d'un tenseur que nous appellerons *vecteur accélération* et désignerons par $\frac{\hat{d}\dot{q}}{dt}$. La dérivation covariante par rapport au temps, nous la noterons $\frac{\hat{d}}{dt}$ avec un *chapeau* sur le d pour la distinguer de la dérivée ordinaire $\frac{d}{dt}$. Ainsi

$$\frac{\hat{d}\dot{q}^i}{dt} = \ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k. \quad (19)$$

Avec ces notations, les équations (17) se lisent sous la forme covariante

$$\mathbf{M}_{ij} \frac{\hat{d}q^j}{dt} = u_i - (\nabla V)_i, \quad (20)$$

en accord avec les prescriptions de Newton. La forme contravariante est

$$\frac{\hat{d}q^i}{dt} = u^i - (\nabla V)^i. \quad (21)$$

DISCRÉTISATION TEMPORELLE

Afin de résoudre les équations du mouvement (18), nous discrétisons le temps en nous basant sur la technique des éléments finis d'Hermite [1, 51, 70].

9.1 ÉLÉMENTS FINIS CUBIQUES D'HERMITE

9.1.1 Fonctions de base cubiques d'Hermite

Les Éléments Finis Cubiques d'Hermite (EFCH) sont basés sur deux fonctions de base [1] à support compact ϕ et ψ définies par les formules

$$\phi(t) = \begin{cases} (1+t)^2(1-2t) & \text{si } t \in [-1, 0] \\ (1-t)^2(1+2t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\psi(t) = \begin{cases} t(1+t)^2 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ t(1-t)^2 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions de base, ainsi que leurs dérivées premières et secondes sont représentées sur la FIGURE 41.

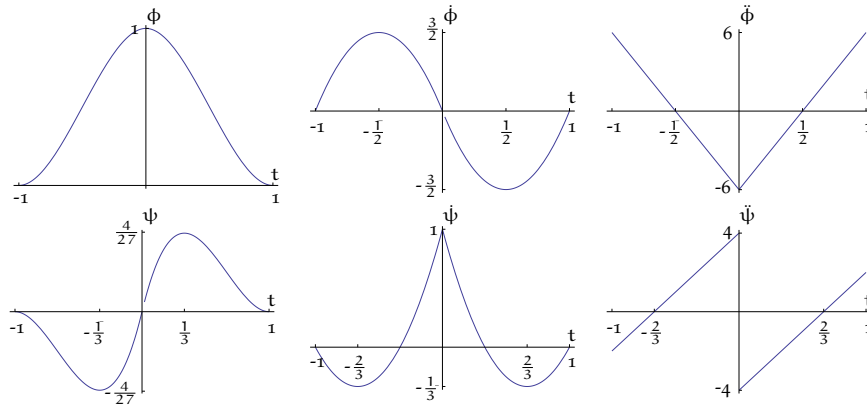


FIGURE 41: Fonctions de base cubiques d'Hermite : ϕ , ψ et leurs dérivées premières et secondes

9.1.2 Éléments Finis Cubiques d'Hermite

Afin de discrétiser la durée T de la trajectoire, divisons l'intervalle $[0, T]$ en N morceaux égaux de durée $h = \frac{T}{N}$ limités par les instants $t_p = p h$ (pour p allant de 0 à N). Nous définissons les $2N + 2$ fonctions de base

$$\begin{cases} \phi_p(t) = \phi\left(\frac{t}{h} - p\right) \\ \psi_p(t) = \psi\left(\frac{t}{h} - p\right) \end{cases}$$

appelées Éléments Finis Cubiques d'Hermite (EFCH). Notons que chaque fonction de base doit être tronquée quand elle dépasse l'intervalle $[0, T]$ que ce soit à droite ou à gauche. Cette remarque concerne surtout les indices $p = 0$ et $p = N$.

9.1.3 Interpolation d'Hermite cubiques par morceaux cubiques

Chaque paramètre de configuration q^i est interpolé [1, 51, 70] par les fonctions cubiques par morceaux

$$q_N^i(t) = \sum_{p=0}^N \left(a_p^i \phi_p(t) + h b_p^i \psi_p(t) \right). \quad (22)$$

Les coefficients a_p^i et b_p^i sont directement interprétés comme les valeurs aux nœuds ($t_p = p h$) des paramètres q^i et de leurs dérivées par rapport au temps q^i .

REMARQUE Dans l'expression (22), la multiplication du deuxième terme de la somme par le pas de temps h le rend homogène à une position.

9.2 ÉLÉMENTS FINIS QUINTIQUES D'HERMITE

9.2.1 Fonctions de base quintiques d'Hermite

Les Éléments Finis Quintiques d'Hermite (EFQH) sont basés sur trois fonctions de base à support compact ϕ , ψ et θ . Elles sont définies par les formules

$$\phi(t) = \begin{cases} (1+t^3)(1-3t+6t^2) & \text{si } t \in [-1, 0] \\ (1-t^3)(1+3t+6t^2) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} t(1+t)^3(1-3t) & \text{si } t \in [-1, 0] \\ t(1-t)^3(1+3t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}(1+t)^3 & \text{si } t \in [-1, 0] \\ \frac{t^2}{2}(1-t)^3 & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces trois fonctions de base ont été construites selon les indications de G. Marchouk [51]. Cette construction se résume de la manière suivante :

- construire la fonction ϕ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les six conditions :

$$\begin{cases} \phi(0) = 1, & \dot{\phi}(0) = 0, & \ddot{\phi}(0) = 0, \\ \phi(1) = 0, & \dot{\phi}(1) = 0, & \ddot{\phi}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire la fonction ψ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les six conditions :

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, & \dot{\psi}(0) = 1, & \ddot{\psi}(0) = 0, \\ \psi(1) = 0, & \dot{\psi}(1) = 0, & \ddot{\psi}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire la fonction θ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les six conditions :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0, & \dot{\theta}(0) = 0, & \ddot{\theta}(0) = 1, \\ \theta(1) = 0, & \dot{\theta}(1) = 0, & \ddot{\theta}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire les fonctions ϕ , ψ et θ dans l'intervalle $[-1, 0]$ en respectant les mêmes conditions en $t = 0$ et en remplaçant les conditions en $t = 1$ par les mêmes conditions en $t = -1$.

Les trois fonctions de base ainsi construites sont représentées sur la FIGURE 42 avec leurs dérivées premières et secondes.

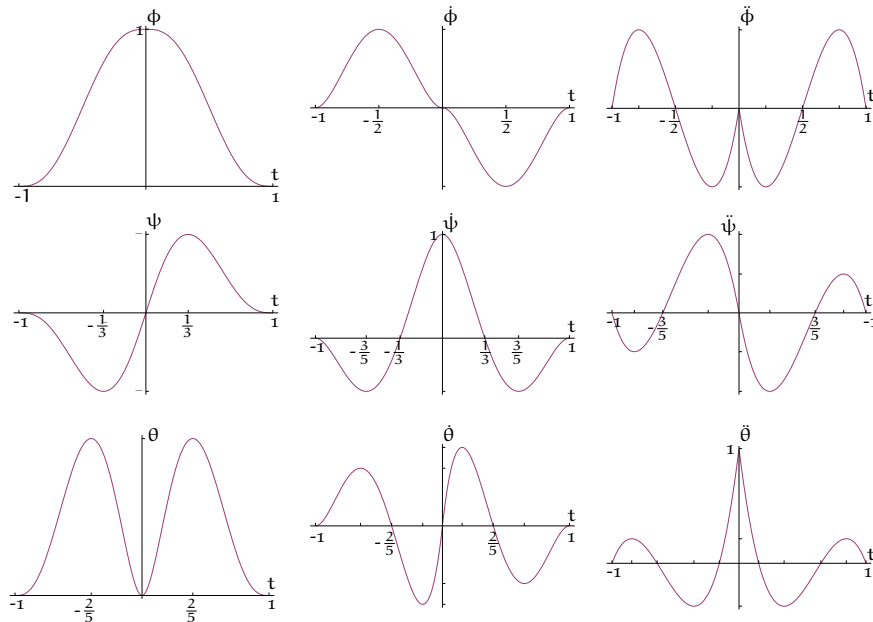


FIGURE 42: Fonctions de base quintiques d'Hermite : ϕ , ψ , θ et leurs dérivées premières et secondes

9.2.2 Éléments Finis Quintiques d'Hermite

Nous définissons les $3N + 3$ fonctions de base

$$\begin{cases} \phi_p(t) = \phi\left(\frac{t}{h} - p\right) \\ \psi_p(t) = \psi\left(\frac{t}{h} - p\right) \\ \theta_p(t) = \theta\left(\frac{t}{h} - p\right) \end{cases}$$

appelées [EFQH](#).

9.2.3 Interpolation d'Hermite quintiques par morceaux

Les paramètres de configuration q^i sont interpolés [1] par les fonctions quintiques par morceaux d'Hermite.

$$q_N^i(t) = \sum_{p=0}^N \left(a_p^i \phi_p(t) + hb_p^i \psi_p(t) + h^2 c_p^i \theta_p(t) \right). \quad (23)$$

Les coefficients a_p^i , b_p^i et c_p^i sont directement interprétés comme les valeurs aux nœuds (aux instants $t_p = ph$) des paramètres de configuration q^i , de leurs dérivées premières \dot{q}^i et de leurs dérivées secondes \ddot{q}^i par rapport au temps.

REMARQUE Les multiplications du second terme de la somme (23) par h et du dernier terme de la somme (23) par h^2 les rendent homogènes à une position.

9.3 ÉLÉMENTS FINIS HEPTIQUES D'HERMITE

9.3.1 Fonctions de base Heptiques d'Hermite

Les Éléments Finis Heptiques d'Hermite ([EFHH](#)) sont basés sur quatre fonctions de base à support compact : ϕ , ψ , θ et χ . Elles sont définies par les formules

$$\phi(t) = \begin{cases} (t+1)^4 (-20t^3 + 10t^2 - 4t + 1) & \text{si } t \in [-1; 0] \\ (t-1)^4 (20t^3 + 10t^2 + 4t + 1) & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} t(t+1)^4 (10t^2 - 4t + 1) & \text{si } t \in [-1; 0] \\ t(t-1)^4 (10t^2 + 4t + 1) & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} (t+1)^4 (1 - 4t) & \text{si } t \in [-1; 0] \\ \frac{t^2}{2} (t-1)^4 (1 + 4t) & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\chi(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{6} (t+1)^4 & \text{si } t \in [-1; 0] \\ \frac{t^3}{6} (t-1)^4 & \text{si } t \in [0; 1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces quatre fonctions de base ont été construites selon les indications de G. Marchouk [51]. La construction se résume de la manière suivante :

- construire la fonction ϕ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les huit conditions :

$$\begin{cases} \phi(0) = 1, & \dot{\phi}(0) = 0, & \ddot{\phi}(0) = 0, & \dddot{\phi}(0) = 0, \\ \phi(1) = 0, & \dot{\phi}(1) = 0, & \ddot{\phi}(1) = 0, & \dddot{\phi}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire la fonction ψ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les huit conditions :

$$\begin{cases} \psi(0) = 0, & \dot{\psi}(0) = 1, & \ddot{\psi}(0) = 0, & \dddot{\psi}(0) = 0, \\ \psi(1) = 0, & \dot{\psi}(1) = 0, & \ddot{\psi}(1) = 0, & \dddot{\psi}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire la fonction θ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les huit conditions :

$$\begin{cases} \theta(0) = 0, & \dot{\theta}(0) = 0, & \ddot{\theta}(0) = 1, & \dddot{\theta}(0) = 0, \\ \theta(1) = 0, & \dot{\theta}(1) = 0, & \ddot{\theta}(1) = 0, & \dddot{\theta}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire la fonction χ dans l'intervalle $[0, 1]$ en respectant les huit conditions :

$$\begin{cases} \chi(0) = 0, & \dot{\chi}(0) = 0, & \ddot{\chi}(0) = 0, & \dddot{\chi}(0) = 1, \\ \chi(1) = 0, & \dot{\chi}(1) = 0, & \ddot{\chi}(1) = 0, & \dddot{\chi}(1) = 0; \end{cases}$$

- construire les fonctions ϕ, ψ, θ et χ dans l'intervalle $[-1, 0]$ en respectant les mêmes conditions en $t = 0$ et en remplaçant les conditions en $t = 1$ par les mêmes conditions en $t = -1$.

Les quatre fonctions de base ainsi construites sont représentées sur la FIGURE 43 avec leurs dérivées premières, secondes et troisièmes.

9.3.2 Éléments Finis Heptiques d'Hermite

Nous définissons les $4N + 4$ fonctions de base

$$\begin{cases} \phi_p(t) = \phi\left(\frac{t}{h} - p\right) \\ \psi_p(t) = \psi\left(\frac{t}{h} - p\right) \\ \theta_p(t) = \theta\left(\frac{t}{h} - p\right) \\ \chi_p(t) = \chi\left(\frac{t}{h} - p\right) \end{cases}$$

appelées EFHH.

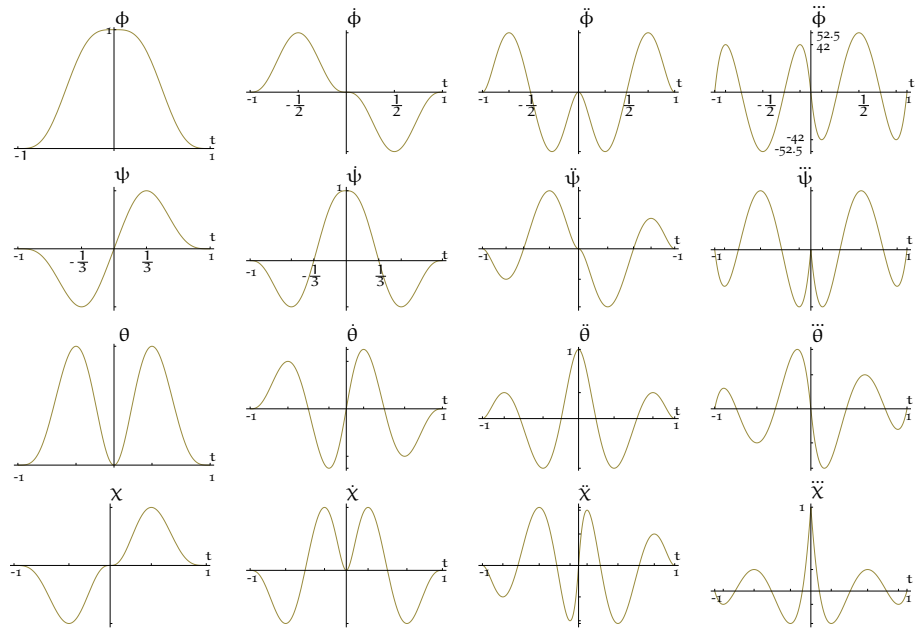


FIGURE 43: Fonctions de base heptiques d’Hermite : ϕ , ψ , θ , χ et leurs dérivées premières, secondes et troisièmes

9.3.3 Interpolation d’Hermite heptiques par morceaux

Les paramètres de configuration q^i sont interpolés [1] par les fonctions heptiques par morceaux d’Hermite

$$q_N^i(t) = \sum_{p=0}^N \left(a_p^i \phi_p(t) + h b_p^i \psi_p(t) + h^2 c_p^i \theta_p(t) + h^3 d_p^i \chi_p(t) \right). \quad (24)$$

Les coefficients a_p^i , b_p^i , c_p^i et d_p^i sont directement interprétés comme les valeurs aux nœuds ($t_p = p h$) des paramètres de configuration q^i de leurs dérivées premières \dot{q}^i , de leurs dérivées secondes \ddot{q}^i et de leurs dérivées troisièmes \dddot{q}^i par rapport au temps.

REMARQUE Les multiplications du second terme de la somme (24) par h , du troisième terme par h^2 et du dernier terme par h^3 les rendent homogènes à une position.

9.4 BILAN DES TROIS VARIANTES DE LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS D’HERMITE

Les bénéfices de la méthode des éléments finis d’Hermite sont indéniables. Les inconnues (a_p^i , b_p^i , c_p^i , d_p^i) sont *directement* les valeurs aux nœuds de discrétisation des grandeurs recherchées, il ne sera par conséquent pas nécessaire de recalculer ces grandeurs a posteriori.

Trois variantes de cette méthode d’Hermite sont proposées :

- les EFCH qui fournissent les positions et les vitesses aux nœuds d’interpolation ;

- les EFQH qui fournissent les positions, les vitesses et les accélérations aux nœuds d'interpolation ;
- les EFHH qui en plus de fournir les positions, les vitesses et les accélérations aux nœuds d'interpolation, fournissent aussi le *jerk* (secousse).

Si d'autres degrés de finesse sont nécessaires, il sera possible de généraliser la construction de G. Marchouk [51] et d'introduire les Éléments Finis Noniques (pour atteindre la dérivée quatrième des positions) ou encore Undécadriques (pour atteindre la dérivée cinquième des positions).

9.5 PRÉCISION DES INTERPOLATIONS

Afin d'étudier la précision des interpolations obtenues par les méthodes des EFCH, des EFQH et des EFHH, considérons l'exemple monodimensionnel du paramètre de configuration circulaire $q(t) = \sin t$.

Les *valeurs aux nœuds* sont calculées sur l'intervalle de temps $[0, \pi]$ pour un nombre de points d'interpolation N allant de 2 à 20. Afin de mesurer l'erreur

$$e_N(t) = q_N(t) - \sin t,$$

de la N^e interpolation, les normes suivantes sont introduites :

$$\|e\|_3 = \frac{\sqrt{\int_0^\pi ((e(t))^2 + h^2(\dot{e}(t))^2) dt}}{\sqrt{\pi}} \quad (25)$$

pour les EFCH,

$$\|e\|_5 = \frac{\sqrt{\int_0^\pi ((e(t))^2 + h^2(\dot{e}(t))^2 + h^4(\ddot{e}(t))^2) dt}}{\sqrt{\pi}} \quad (26)$$

pour les EFQH et

$$\|e\|_7 = \frac{\sqrt{\int_0^\pi ((e(t))^2 + h^2(\dot{e}(t))^2 + h^4(\ddot{e}(t))^2 + h^6(\dddot{e}(t))^2) dt}}{\sqrt{\pi}} \quad (27)$$

pour les EFHH.

Ces normes, homogènes à des angles mesurés en radians, sont données par la TABLE 9. Sur cette table nous pouvons d'abord constater que la norme de e_N décroît lorsque l'entier N augmente. Elle montre également que les EFHH sont plus précis que les EFQH et que ces derniers sont à leur tour plus précis que les EFCH.

Afin d'analyser la précision de ces méthodes, les graphiques de la FIGURE 44 affichent les logarithmes des normes des erreurs $\|e_N\|_3$, $\|e_N\|_5$ et $\|e_N\|_7$ en fonction du logarithme du pas de temps h associé à chaque entier N

$$h = \frac{\pi}{N}.$$

TABLE 9: Étude de la convergence des méthodes des EFCH, EFQH et EFHH; $\|e\|_i$ en rad

N	$\ln(\frac{\pi}{N})$	$\ e\ _3$	$\ln \ e\ _3$	$\ e\ _5$	$\ln \ e\ _5$	$\ e\ _7$	$\ln \ e\ _7$
2	0,45	$2,48 \times 10^{-2}$	-3,70	$3,47 \times 10^{-3}$	-5,66	$4,11 \times 10^{-4}$	-7,80
3	0,04	$5,00 \times 10^{-3}$	-5,30	$3,10 \times 10^{-4}$	-8,08	$1,63 \times 10^{-5}$	-11,03
4	-0,24	$1,60 \times 10^{-3}$	-6,44	$5,54 \times 10^{-5}$	-9,80	$1,64 \times 10^{-6}$	-13,32
5	-0,46	$6,56 \times 10^{-4}$	-7,33	$1,46 \times 10^{-5}$	-11,13	$2,75 \times 10^{-7}$	-15,11
6	-0,64	$3,17 \times 10^{-4}$	-8,06	$4,88 \times 10^{-6}$	-12,23	$6,41 \times 10^{-8}$	-16,56
7	-0,80	$1,71 \times 10^{-4}$	-8,67	$1,94 \times 10^{-6}$	-13,15	$1,87 \times 10^{-8}$	-17,80
8	-0,93	$1,00 \times 10^{-4}$	-9,21	$8,70 \times 10^{-7}$	-13,96	$6,42 \times 10^{-9}$	-18,86
9	-1,05	$6,27 \times 10^{-5}$	-9,68	$4,30 \times 10^{-7}$	-14,66	$2,50 \times 10^{-9}$	-19,81
10	-1,16	$4,12 \times 10^{-5}$	-10,10	$2,28 \times 10^{-7}$	-15,29	$1,08 \times 10^{-9}$	-20,65
11	-1,25	$2,81 \times 10^{-5}$	-10,48	$1,29 \times 10^{-7}$	-15,86	$5,03 \times 10^{-10}$	-21,41
12	-1,34	$1,98 \times 10^{-5}$	-10,83	$7,64 \times 10^{-8}$	-16,39	$2,51 \times 10^{-10}$	-22,11
13	-1,42	$1,44 \times 10^{-5}$	-11,15	$4,73 \times 10^{-8}$	-16,87	$1,32 \times 10^{-10}$	-22,75
14	-1,49	$1,07 \times 10^{-5}$	-11,44	$3,03 \times 10^{-8}$	-17,31	$7,31 \times 10^{-10}$	-23,34
15	-1,56	$8,14 \times 10^{-6}$	-11,72	$2,00 \times 10^{-8}$	-17,73	$4,21 \times 10^{-11}$	-23,89
16	-1,63	$6,29 \times 10^{-6}$	-11,98	$1,36 \times 10^{-8}$	-18,11	$2,51 \times 10^{-11}$	-24,41
17	-1,69	$4,93 \times 10^{-6}$	-12,22	$9,46 \times 10^{-9}$	-18,47	$1,55 \times 10^{-11}$	-24,89
18	-1,75	$3,93 \times 10^{-6}$	-12,45	$6,71 \times 10^{-9}$	-18,82	$9,79 \times 10^{-12}$	-25,35
19	-1,80	$3,16 \times 10^{-6}$	-12,66	$4,85 \times 10^{-9}$	-19,14	$6,35 \times 10^{-12}$	-25,78
20	-1,85	$2,58 \times 10^{-6}$	-12,87	$3,57 \times 10^{-9}$	-19,45	$4,21 \times 10^{-12}$	-26,19

Ces graphiques mettent en lumière la *superconvergence* de la méthode des Éléments Finis d'Hermite. En effet, la norme de l'erreur e_N est en h^4 (la pente de la droite de régression est pratiquement égale à quatre) pour les EFCH, en h^6 pour les EFQH et en h^8 pour les EFHH.

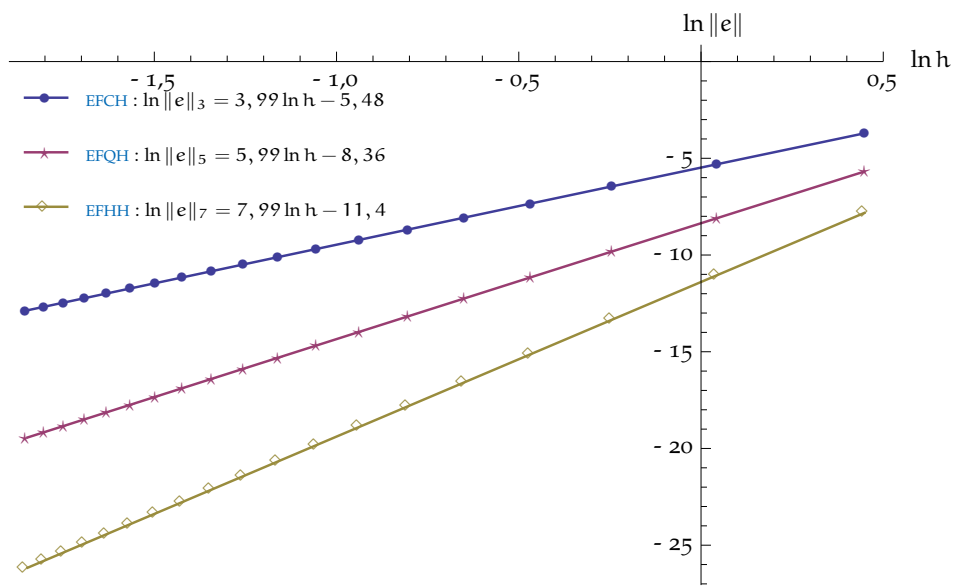


FIGURE 44: Superconvergence des interpolations de la fonction $\sin t$ par les EFCH, les EFQH et les EFHH : $\ln (\|\sin t - q_N(t)\|)$ en fonction de $\ln \left(\frac{\pi}{N}\right)$

SIMULATION DES MOUVEMENTS : EXEMPLE DU PENDULE NON-LINÉAIRE

Avant d'aborder le contrôle optimal, nous présentons une méthode directe pour résoudre des équations du mouvement par la méthode des EFH. Cette méthode trouve son application lorsque la commande est connue.

10.1 ALGORITHME D'INTÉGRATION TEMPORELLE

Lorsque le tenseur des couples $u(t)$ est connu, le vecteur d'état

$$x(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{bmatrix}$$

du robot peut être prédit à chaque instant t à partir de sa valeur initiale

$$x(0) = \begin{bmatrix} q(0) \\ \dot{q}(0) \end{bmatrix}$$

en résolvant numériquement [67] les EDO (18). Afin de simuler les trajectoires, nous proposons un algorithme d'intégration temporelle :

- A. approcher chaque paramètre de configuration q^i par son interpolation d'Hermite cubique par morceaux (respectivement quintique ou heptique), définie par la formule (22) (respectivement (23) ou (24));
- B. exprimer les équations du mouvement (18) en $2nN$ (pour les EFCH) instants bien choisis (respectivement $3n(N+1)$ pour les EFQH et $4n(N+2)$ pour les EFHH);
- C. résoudre le système algébrique obtenu concernant les $2nN$ coefficients inconnus (a_p^i, b_p^i) pour les EFCH (respectivement $3n(N+1)$ coefficients inconnus (a_p^i, b_p^i, c_p^i) pour les EFQH et $4n(N+2)$ coefficients inconnus $(a_p^i, b_p^i, c_p^i, d_p^i)$ pour les EFHH);
- D. construire l'approximation q_N^i de q^i à partir de ses valeurs aux nœuds.

10.1.1 Remarques sur l'algorithme d'intégration temporelle

REMARQUE 1 Les étapes B. et C. de l'algorithme 10.1 sont inspirées de la technique d'identification des paramètres inertiels proposée par Gautier dans [36].

REMARQUE 2 Les conditions initiales fixent les coefficients a_0^i, b_0^i, c_0^i et d_0^i :

$$\begin{cases} a_0^i &= q^i(0) \\ b_0^i &= \dot{q}^i(0) \\ c_0^i &= \ddot{q}^i(0) \\ d_0^i &= \ddot{\ddot{q}}^i(0). \end{cases}$$

10.2 MÉTHODE DE PERTURBATION

Souvent, les équations du mouvement ne sont pas linéaires. Pour obvier à cette difficulté, nous allons utiliser une méthode de perturbation inspirée de Lagrange. Un processus itératif est généré en ajoutant un incrément Δq à l'approximation précédente à chaque pas.

Les équations du mouvement covariantes (17) se perturbent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{ij} \left(\ddot{q}^j + \Delta \ddot{q}^j \right) + \frac{\partial \mathbf{M}_{ij}}{\partial q^k} \ddot{q}^j \Delta q^k + \mathbf{M}_{ij} \Gamma_{kl}^j \left(\dot{q}^k \dot{q}^l + \dot{q}^l \Delta \dot{q}^k + \dot{q}^k \Delta \dot{q}^l \right) \\ & + \left(\frac{\partial \mathbf{M}_{ij}}{\partial q^m} \Gamma_{kl}^j + \mathbf{M}_{ij} \frac{\partial \Gamma_{kl}^j}{\partial q^m} \right) \dot{q}^k \dot{q}^l \Delta q^m + \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} \Delta q^j = u_i . \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Ricci (11.2.5) aux dérivées des coefficients de la métrique \mathbf{M}_{ij} apparaissant dans l'expression ci-dessus, nous sommes conduits à l'EDO linéaire :

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_{ij} \left(\ddot{q}^j + \Delta \ddot{q}^j \right) + \left(\mathbf{M}_{lj} \Gamma_{ik}^l + \mathbf{M}_{il} \Gamma_{jk}^l \right) \Delta q^k \ddot{q}^j \\ & + \mathbf{M}_{ij} \Gamma_{kl}^j \left(\dot{q}^k \dot{q}^l + \dot{q}^l \Delta \dot{q}^k + \dot{q}^k \Delta \dot{q}^l \right) \\ & + \left(\mathbf{M}_{ij} \frac{\partial \Gamma_{kl}^j}{\partial q^m} + \left(\mathbf{M}_{lj} \Gamma_{im}^l + \mathbf{M}_{il} \Gamma_{jm}^l \right) \Gamma_{kl}^j \right) \dot{q}^k \dot{q}^l \Delta q^m \\ & + \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} \Delta q^j = u_i . \end{aligned} \quad (28)$$

Afin de valider cette méthode, nous avons choisi de l'illustrer par l'exemple du pendule non-linéaire.

10.3 VALIDATION DE LA MÉTHODE DE PERTURBATION

10.3.1 Description du pendule non-linéaire

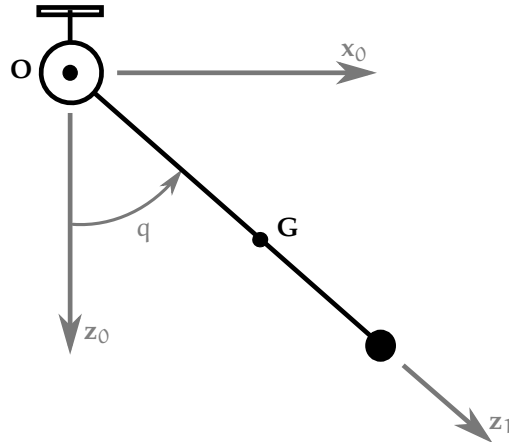
Considérons en une dimension le pendule non-linéaire schématisé FIGURE 45. Son mouvement est régi par l'équation

$$\mathbf{M} \ddot{q} + mgl \sin q = 0. \quad (29)$$

Les coefficients \mathbf{M} , m et l sont respectivement le moment d'inertie en O du pendule, sa masse et la distance de son centre d'inertie G au point O . Dans cet exemple, les valeurs de ces coefficients sont tels que la pulsation du pendule soit égale à

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{\mathbf{M}}} = 3,102 \text{ s}^{-1}.$$

Les conditions initiales sont

FIGURE 45: Pendule non-linéaire. $OG = lz_1$.

$$\begin{cases} q(0) = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \\ \dot{q}(0) = 0 \text{ rad.s}^{-1}. \end{cases}$$

La durée de la simulation est fixée à

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ s.}$$

10.3.2 Implémentation de la méthode par les EFCH

Les interpolations d'Hermite cubiques sont implémentées dans la méthode de perturbation 10.2 avec $N = 73$ points d'interpolation. Ceci conduit à la procédure suivante :

- A. exécuter la sous-routine proposée à la section 10.1 pour résoudre l'équation du pendule *linéaire*

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (30)$$

avec les mêmes conditions initiales que le pendule non-linéaire. Soit q_1 sa solution ;

- B. exécuter la sous-routine proposée au 10.1 pour résoudre le système d'EDO linéaire suivant :

$$\frac{d^2}{dt^2} (\Delta q_1(t)) + \omega^2 (\cos q_1(t)) \Delta q_1(t) = 0$$

avec des conditions initiales nulles ;

- C. améliorer l'approximation $q_1(t)$ en posant

$$q_2(t) = q_1(t) + \Delta q_1(t) ;$$

- D. répéter ce processus jusqu'à ce que l'approximation cesse de s'améliorer.

10.3.3 Solution classique de l'équation du mouvement du pendule linéaire

La loi horaire du pendule linéaire (30) est de la forme

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} A = q(0) = \frac{\pi}{12} \text{ rad} \\ -B\omega = \dot{q}(0) = 0 \text{ rad.s}^{-1}. \end{cases}$$

La solution classique de l'équation (29) est donc

$$q(t) = \frac{\pi}{12} \cos(\omega t).$$

10.3.4 Approximation de la solution du pendule non-linéaire par la méthode des perturbations

Les $2N$ instants particuliers choisis pour interpoler l'équation du mouvement (30) par les EFCH sont les suivants :

$$\begin{cases} \frac{kT}{2(N+1)} & \text{pour } k = 1, \dots, N-1 \\ \frac{(k+1)T}{2(N+1)} & \text{pour } k = N+2, \dots, 2N \end{cases} \quad (31)$$

La FIGURE 46 illustre la distribution des instants particuliers choisis dans l'intervalle $[0; T]$. Y sont présentées les distributions temporelles pour N allant de 2 à 4 en suivant la construction proposée par l'équation (31).

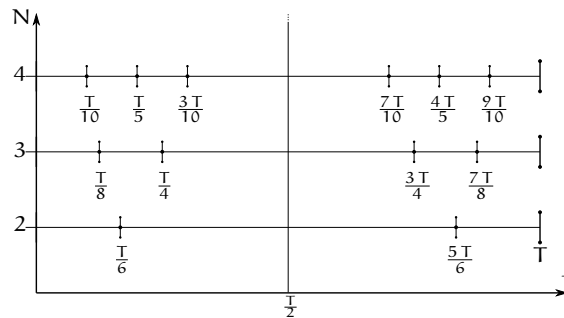


FIGURE 46: Distribution des instants particuliers pour l'approximation de l'équation du mouvement du pendule non-linéaire par la méthode de perturbation

Il est important de préciser que le choix des instants particuliers est crucial et qu'il doit être finement étudié pour chaque application. Ici, nous avons pris soin d'éviter les instants $t = 0$, $t = \frac{T}{2}$ et $t = T$.

Nous avons remarqué que l'obtention rapide d'une bonne approximation de la solution nécessitait une résolution fine préalable de l'équation du pendule linéaire (étape A. de la procédure 10.3.2) avec un grand nombre de

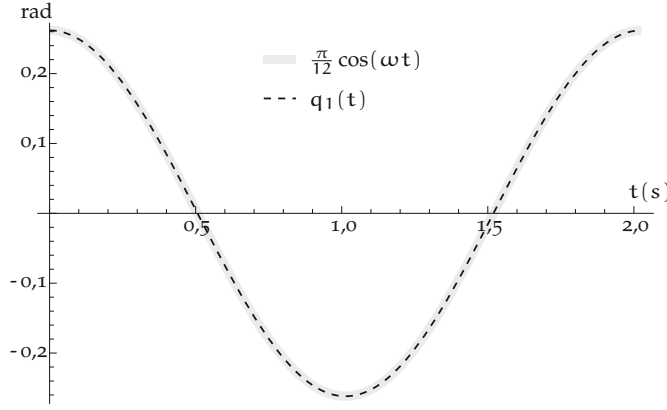


FIGURE 47: Pendule linéaire : comparaison de la solution classique $\frac{\pi}{12} \cos(\omega t)$ avec la solution $q_1(t)$ calculée par les EFCH

points d'interpolation. Ici, un nombre $N = 601$ points d'interpolation a été choisi. Nous constatons que l'approximation $q_1(t)$ calculée avec les EFCH coïncide pratiquement avec la solution classique (FIGURE 47). La norme de l'erreur e

$$\|e\|_3 = \frac{\sqrt{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(q_1(t) - \frac{\pi}{12} \cos(\omega t) \right)^2 + h^2 \left(\dot{q}_1(t) + \frac{\omega\pi}{12} \sin(\omega t) \right)^2 dt}}{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}},$$

s'évalue à $9,61 \times 10^{-7}$ radians.

10.3.5 Comparaison de q_3 avec q_1

La procédure d'arrêt employée dans la procédure 10.3.2 est la suivante :

$$\text{si } \frac{\sqrt{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (q_i(t) - q_{i-1}(t))^2 + h^2 (\dot{q}_i(t) - \dot{q}_{i-1}(t))^2 dt}}{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}} \leq 10^{-7} \text{ rad, alors arrêt.}$$

Après trois itérations de cette procédure, nous avons constaté que la solution calculée était *périodique*. Nous avons aussi remarqué FIGURE 48 que la solution $q_3(t)$ calculée à la fin de la procédure 10.3.2 était un peu en retard par rapport à la solution $q_1(t)$ du pendule linéaire.

La période des oscillations identifiée

$$\tau = 2.03452 \text{ s}$$

s'avère coïncider (en précision machine) avec la période donnée par l'intégrale elliptique incomplète de première espèce F de Legendre [4] :

$$\tau = \frac{4}{\omega} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\sin^2 \frac{\pi}{24}\right) \sin^2 \alpha}} = \frac{4}{\omega} F\left(\frac{\pi}{2}, \sin^2 \frac{\pi}{24}\right).$$

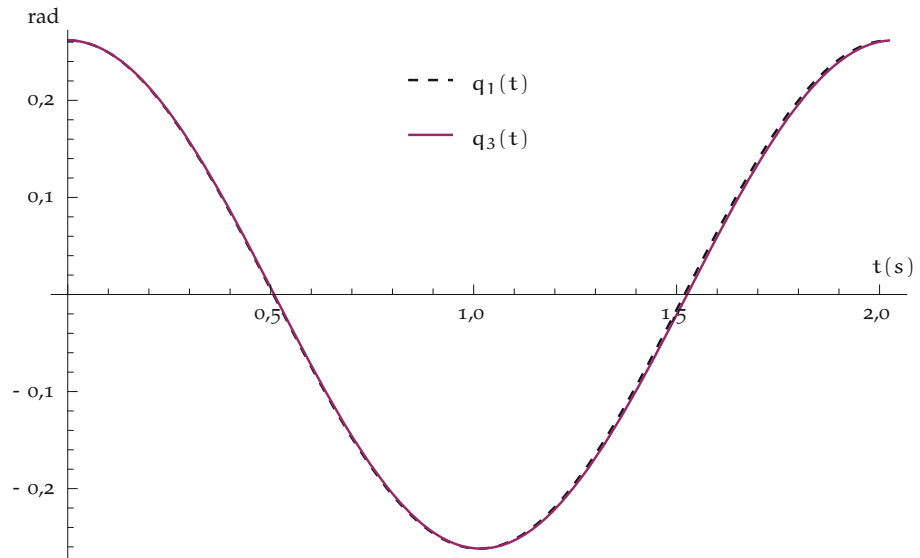


FIGURE 48: Comparaison de la solution du pendule linéaire $q_1(t)$ avec la solution du pendule non-linéaire calculée $q_3(t)$

10.3.6 Comparaison de q_3 avec la solution de Jacobi

À l'aide de la fonction elliptique sn de Jacobi et de l'intégrale elliptique complète de Legendre K , la solution du pendule non-linéaire [4] s'exprime sous la forme :

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left(\sin \frac{q(0)}{2} \text{sn} \left[K \left(\sin^2 \frac{q(0)}{2} \right) - \omega t; \sin^2 \frac{q(0)}{2} \right] \right),$$

La FIGURE 49 compare cette solution θ de Jacobi avec la solution q_3 calculée par la méthode de perturbation. Les deux courbes se superposent, ce qui exhibe la performance de notre algorithme.

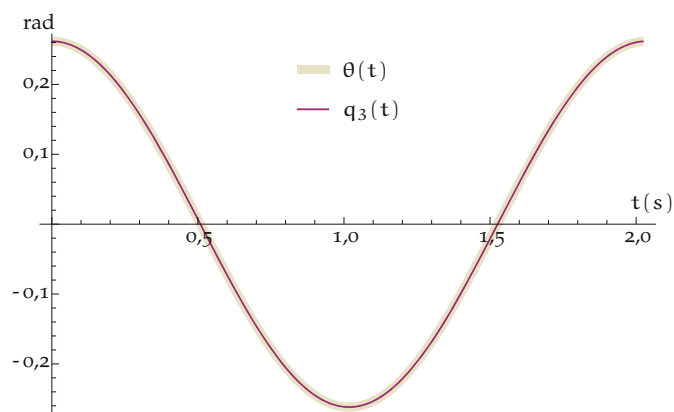


FIGURE 49: Comparaison de la solution exacte du pendule non-linéaire θ avec la solution calculée par la méthode de perturbation q_3

Enfin, la norme $\|e\|_3$ de l'erreur $e(t) = q_3(t) - \theta(t)$, très faible devant l'unité 1 rad, permet de conclure à l'efficacité de la méthode :

$$\|e\|_3 = \frac{\sqrt{\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (q_3(t) - \theta(t))^2 + h^2 (\dot{q}_3(t) - \dot{\theta}(t))^2 dt}}{\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}}$$

$$= 1,15 \times 10^{-6} \text{ rad.}$$

Les résultats exposés dans ce chapitre démontrent la performance de la technique d'Hermite et de la méthode de perturbation pour résoudre les équations du mouvement. Dans le chapitre suivant, le contrôle optimal sera abordé. Deux méthodes pour simuler les commandes et les trajectoires seront proposées. Dans la première méthode, nous reviendrons sur la méthode de perturbation exposée dans ce chapitre. La deuxième sera une méthode d'optimisation directe.

En robotique, la commande n'est jamais fournie et la difficulté consiste en son obtention. Pour cela, les roboticiens font généralement appel à des méthodes de commande optimale telles les méthodes faisant intervenir le PMP ou encore la résolution de l'équation d'HJB. Dans cette partie, une alternative est proposée, elle est accompagnée de deux techniques de contrôle optimal. La première fait appel à des algorithmes de résolution de l'équation de la commande. La deuxième fait appel à des algorithmes de descente (gradient ou encore gradient conjugué).

11.1 CONTRÔLE OPTIMAL

À l'état initial, le robot se trouve dans un état de positions et de vitesses $(q_0, \dot{q}_0) = (q(0), \dot{q}(0))$. En un temps final T fixé, le robot doit être amené vers un état final $(q_1, \dot{q}_1) = (q(T), \dot{q}(T))$.

Quelles sont les commandes nécessaires pour réaliser cette tâche ? Afin de borner l'intensité de ces commandes, les couples sont généralement choisis en minimisant une fonctionnelle intégrale du type :

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^T \gamma(u(t)) dt$$

appelée *fonction objectif*. La fonction γ est appelée *fonction coût* et est choisie convexe. Ainsi la fonctionnelle $\mathcal{J}(u)$ est elle même convexe.

11.1.1 Fonction coût invariante

Souvent, on choisit comme fonction coût une forme quadratique des commandes :

$$\gamma(u) = \frac{1}{2} \mathbf{S}^{ij} u_i u_j$$

où \mathbf{S} est une forme bilinéaire symétrique et définie positive. La fonction objective est alors une moyenne quadratique des commandes. Si cette fonction coût n'est pas invariante par changement de paramètres de configuration, les commandes u_i calculées ne se transformeront pas selon la règle des tenseurs covariants. Pour respecter cette règle, nous choisirons une fonction coût invariante. Le tenseur deux fois contravariant \mathbf{S}^{ij} le plus simple est

$$\mathbf{S}^{ij} = \mathbf{M}^{ij}.$$

En faisant ce choix [45], la fonction coût $\gamma(u) = \frac{1}{2} u_i u^i$ est indépendante du choix des coordonnées.

11.1.2 Méthode d'optimisation d'Euler-Lagrange

La question posée dans la section 11.1 relève du calcul des variations : il s'agit de minimiser la fonctionnelle

$$\mathcal{J}(q) = \int_0^T \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t)) dt. \quad (32)$$

L'intégrande est la fonction lagrangienne

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{M}_{ij} u^i u^j,$$

où les composantes contravariantes de la commande sont exprimées en fonction de (q, \dot{q}, \ddot{q}) par l'équation (18). L'équation d'Euler-Lagrange correspondante à la minimisation de la fonctionnelle 32 est :

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}^i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = 0. \quad (33)$$

Nous pouvons remarquer que les dérivées de la fonction de Lagrange par rapport à \dot{q}^i et \ddot{q}^i sont très simples :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{q}^i} = u_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} = 2\Gamma_{ij}^k \dot{q}^j u_k \end{cases}$$

Par contre, la dérivée de la fonction de Lagrange par rapport à q^i est un peu plus difficile à obtenir :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{M}^{jk}}{\partial q^i} u_j u_k + u^j \frac{\partial u_j}{\partial q^i}, \quad (34)$$

avec

$$\frac{\partial u_j}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{M}_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^k + \frac{\partial \Gamma_{jkl}}{\partial q^i} \dot{q}^k \dot{q}^l + \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j}. \quad (35)$$

D'après la définition (16) des symboles de Christoffel de deuxième espèce, la dérivée $\frac{\partial \Gamma_{jkl}}{\partial q^i}$ figurant dans l'équation ci-dessus est la somme de deux termes

$$\frac{\partial \Gamma_{jkl}}{\partial q^i} = \frac{\partial \mathbf{M}_{jm}}{\partial q^i} \Gamma_{kl}^m + \mathbf{M}_{jm} \frac{\partial \Gamma_{kl}^m}{\partial q^i}. \quad (36)$$

L'application du théorème de Ricci (voir section 11.2.5) aux dérivations du tenseur des masses apparaissant dans les équations (34), (35) et (36) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} &= \Gamma_{mi}^k u^m u_k + \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^l - \Gamma_{mi}^k \mathbf{M}^{mj} \frac{\partial V}{\partial q^j} \right) u_k \\ &+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^l} - \Gamma_{li}^j \frac{\partial V}{\partial q^j} \right) u^l. \end{aligned} \quad (37)$$

Nous remarquons que la dérivée seconde covariante $\nabla^2 V$ du potentiel gravitationnel (voir équation (45) de la section 11.2.3) apparaît dans le dernier terme de l'équation (37). Cette expression de $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i}$ permet d'explicitier l'équation (33) sous la forme :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i - \Gamma_{ij}^k \ddot{q}^j u_k - 2\Gamma_{ij}^k \dot{q}^j \dot{u}_k - 2\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} \dot{q}^j \dot{q}^l u_k + \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial q^i} u_k \dot{q}^j \dot{q}^l \\ + \left(\nabla^2 V \right)_{ij} u^j + \Gamma_{mi}^k u_k \left(u^m - \mathbf{M}^{mj} \frac{\partial V}{\partial q^j} - \ddot{q}^m \right) = 0. \end{aligned}$$

Cette EDO du second ordre concernant u_i semble mettre en jeu les dérivées secondes \ddot{q}^m des paramètres de configuration. Mais grâce à l'équation du mouvement (18), le dernier terme de l'équation ci-dessus se simplifie en :

$$\Gamma_{jl}^m \dot{q}^j \dot{q}^l.$$

Ainsi, les équations d'Euler-Lagrange (33) se réduisent à l'EDO du second ordre :

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i - \Gamma_{ij}^k \ddot{q}^j u_k - 2\Gamma_{ij}^k \dot{q}^j \dot{u}_k - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} \dot{q}^j \dot{q}^l u_k \\ + \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial q^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} + \Gamma_{mi}^k \Gamma_{jl}^m \right) \dot{q}^j \dot{q}^l u_k + \left(\nabla^2 V \right)_{ij} u_j = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Nous les appellerons « *équations de la commande* ». Associées aux équations du mouvement covariantes (17) ou contravariantes (18), elles procurent un système de $2n$ EDO du second ordre (n étant le nombre de DDL du robot) régissant les variables duales (q^i, u_i) . Ce système est une alternative au système issu de l'application du PMP. Ce dernier régit les $2n$ variables d'état (q, \dot{q}) et les $2n$ variables conjuguées par $4n$ EDO du premier ordre. Avec notre point de vue, les variables conjuguées sont les commandes u_i , qui sont directement interprétables.

11.1.3 Algorithme de contrôle optimal par la méthode de perturbation

Une technique faisant appel à la méthode de perturbation (voir 10.2) est proposée dans cette section pour trouver la commande optimale et les trajectoires. C'est cette technique que nous avons retenue pour réaliser la commande optimale des trois systèmes robotiques étudiés au chapitre suivant.

Nous perturbons les équations du mouvement (17) :

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_{ij} \left(\ddot{q}^j + \Delta \ddot{q}^j \right) + \left(\mathbf{M}_{lj} \Gamma_{ik}^l + \mathbf{M}_{il} \Gamma_{jk}^l \right) \Delta q^k \dot{q}^j \\
& + \mathbf{M}_{ij} \Gamma_{kl}^j \left(\dot{q}^k \dot{q}^l + \dot{q}^l \Delta \dot{q}^k + \dot{q}^k \Delta \dot{q}^l \right) \\
& + \left(\mathbf{M}_{ij} \frac{\partial \Gamma_{kl}^j}{\partial q^m} + \left(\mathbf{M}_{lj} \Gamma_{im}^l + \mathbf{M}_{il} \Gamma_{jm}^l \right) \Gamma_{kl}^j \right) \dot{q}^k \dot{q}^l \Delta q^m \\
& + \frac{\partial V}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 V}{\partial q^i \partial q^j} \Delta q^j - u_i - \Delta u_i = 0.
\end{aligned} \tag{39}$$

Nous perturbons également les équations de la commande (38) :

$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i - \Gamma_{ij}^k \left(\ddot{q}^j u_k + \dot{q}^j \Delta u_k + u_k \Delta \ddot{q}^j \right) - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} \dot{q}^j u_k \Delta q^l \\
& - 2 \Gamma_{ij}^k \left(\dot{q}^j \dot{u}_k + \dot{q}^j \Delta \dot{u}_k + \dot{u}_k \Delta \dot{q}^j \right) - 2 \frac{\Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} \dot{q}^j \dot{u}_k \Delta q^l \\
& - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} \left(\dot{q}^j \dot{q}^l u_k + \dot{q}^j \Delta q^l u_k + \dot{q}^j \dot{q}^l \Delta u_k + \dot{q}^l u_k \Delta \dot{q}^j \right) \\
& + \frac{\partial^2 \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l \partial q^m} \dot{q}^j \dot{q}^l u_k \Delta q^m \\
& + \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial q^i} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l} + \Gamma_{mi}^k \Gamma_{jl}^m \right) \left(\dot{q}^j \dot{q}^l u_k + \dot{q}^j \Delta q^l u_k + \dot{q}^j \dot{q}^l \Delta u_k + \dot{q}^l u_k \Delta \dot{q}^j \right) \\
& \left(\frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^k}{\partial q^i \partial q^p} - \frac{\partial^2 \Gamma_{ij}^k}{\partial q^l \partial q^p} + \frac{\partial \Gamma_{mi}^k}{\partial q^p} \Gamma_{jl}^m + \Gamma_{mi}^k \frac{\partial \Gamma_{jl}^m}{\partial q^p} \right) \left(\dot{q}^j \dot{q}^l u_k \Delta q^p \right) \\
& \left(\frac{\partial^3 V}{\partial q^j \partial q^i \partial q^m} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q^m} \frac{\partial V}{\partial q^k} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial^2 V}{\partial q^k \partial q^m} \right) \Delta q^m = 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Les équations (39) et (40) sont alors couplées et forment un système de $2n$ EDO du second ordre régissant les commandes et les trajectoires. L'algorithme d'intégration temporel de ce système est une adaptation de l'algorithme 10.1.

Un deuxième algorithme de commande optimale est proposé dans la section suivante. Cet algorithme optimise directement la fonction objectif à l'aide d'une technique de descente rapide.

11.1.4 Algorithme de Contrôle Optimal par optimisation directe

Dans cette section, nous proposons un deuxième algorithme de commande optimale. Cet algorithme optimise directement la fonction objectif (32) par une méthode de descente.

Au lieu de résoudre les $2n$ EDO du second ordre (17) et (33), il est possible de minimiser directement la fonction $\mathcal{J}(q_N)$. Cette fonction est générée en remplaçant dans l'intégrale (32) les paramètres de configuration q^i par leurs interpolations cubiques (22), quintiques (23) ou encore heptiques (24).

La fonction $\mathcal{J}(q_N)$ dépend seulement des paramètres

- (a_p^i, b_p^i) dans le cas des EFCH;
- (a_p^i, b_p^i, c_p^i) dans le cas des EFQH;
- $(a_p^i, b_p^i, c_p^i, d_p^i)$ dans le cas des EFHH.

La minimisation de $\mathcal{J}(q_N)$ devient un problème d'optimisation en dimension finie. L'obtention des paramètres $(a_p^i, b_p^i, c_p^i, d_p^i)$ peut se faire en utilisant l'algorithme du gradient conjugué de Polak-Ribière [39, 60, 61].

Il est important de *souligner* que les coefficients a_p^i et b_p^i sont connus pour $p = 0$ et pour $p = N$:

$$\begin{cases} a_0^i = q^i(0) \\ b_0^i = \dot{q}^i(0) \\ a_N^i = q^i(T) \\ b_N^i = \dot{q}^i(T) \end{cases}$$

Après l'obtention de l'approximation $q_N(t)$ de $q(t)$, une approximation de la commande optimale $u(t)$ est obtenue par les équations du mouvement (17) ou (18).

11.2 RAPPELS DE GÉOMÉTRIE RIEMANIENNE

11.2.1 Dérivée covariante par rapport au temps du tenseur de commande

En accord avec une remarque de David Hilbert concernant la Relativité Générale, notre choix d'une fonction coût invariante γ implique que les équations d'Euler-Lagrange (33) soient covariantes comme Einstein l'a prescrit pour la modélisation de tout phénomène physique [52].

La puissance $u_i \dot{q}^i$ est indépendante du choix des paramètres de configuration, par conséquent sa dérivée par rapport au temps doit l'être également :

$$\frac{d}{dt} (u_i \dot{q}^i) = (u_i \ddot{q}^i + \dot{u}_i \dot{q}^i) = u_i (\ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k) + (\dot{u}_i - \Gamma_{ik}^j u_j \dot{q}^k) \dot{q}^i.$$

Nous reconnaissons la dérivée covariante par rapport au temps de \dot{q}^i (voir la sous-section 8.2.3, équation (18)) :

$$\frac{\hat{d}\dot{q}^i}{dt} = \ddot{q}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{q}^j \dot{q}^k. \quad (41)$$

Cette remarque mécanique indique que la dérivée covariante par rapport au temps de la commande u_i est

$$\frac{\hat{d}u_i}{dt} = \dot{u}_i - \Gamma_{ik}^j u_j \dot{q}^k. \quad (42)$$

Les formules (41) et (42) sont duales. Notons le signe "+" pour les tenseurs contravariants et le signe "-" pour les tenseurs covariants.

11.2.2 Dérivée covariante du tenseur de commande

Supposons que chaque commande u_i dépende des paramètres de configuration q^j . La formule (42) associée à la composition des dérivations conduit à

$$\frac{\hat{d}u_i}{dt} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^j u_j \right) \dot{q}^k.$$

Cette remarque indique que la dérivée covariante ∇u (dite « *nabla u* ») du tenseur de commande a pour composantes

$$(\nabla u)_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^j u_j. \quad (43)$$

Nous pouvons retenir la relation

$$\frac{\hat{d}u_i}{dt} = (\nabla u)_{ik} \dot{q}^k \quad (44)$$

entre les dérivées covariantes par rapport au temps et les dérivées covariantes des tenseurs.

11.2.3 Dérivée seconde covariante du potentiel de gravitation

Appliquons la formule (43) au tenseur ∇V . Nous constatons que les composantes de la dérivée covariante du tenseur ∇V ne sont pas simplement $\frac{\partial^2 V}{\partial q^j \partial q^i}$ mais

$$\left(\nabla^2 V \right)_{ij} = (\nabla \nabla V)_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q^j \partial q^i} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial V}{\partial q^k}. \quad (45)$$

11.2.4 Dérivée seconde covariante par rapport au temps du tenseur de commande

En itérant la formule (42) de la section 11.2.1 :

$$\frac{\hat{d}^2 u_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\hat{d}u_i}{dt} \right) - \Gamma_{ik}^j \frac{\hat{d}u_j}{dt} \dot{q}^k,$$

nous en déduisons la dérivée seconde covariante par rapport au temps de la commande u_i

$$\frac{\hat{d}^2 u_i}{dt} = \ddot{u}_i - \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial q^l} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j \right) u_j \dot{q}^k \dot{q}^l - \Gamma_{ik}^j u_j \ddot{q}^k - 2\Gamma_{ik}^j \dot{u}_j \dot{q}^k. \quad (46)$$

11.2.5 Théorème de Ricci

Gregorio Ricci-Curbastro remarqua que les formules (15) et (16), permettant le calcul des symboles de Christoffel de première et de deuxième espèce,

signifiaient géométriquement que la dérivée covariante $\nabla \mathbf{M}$ du tenseur des masses était nulle[8, 25, 46, 49, 63]. Ainsi

$$(\nabla \mathbf{M})_{ijk} = \frac{\partial \mathbf{M}_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^l \mathbf{M}_{lj} - \Gamma_{jk}^l \mathbf{M}_{il} = 0. \quad (47)$$

Le tenseur des masses inverse satisfait la même propriété :

$$(\nabla \mathbf{M})_k^{ij} = \frac{\partial \mathbf{M}^{ij}}{\partial q^k} + \Gamma_{lk}^i \mathbf{M}^{lj} + \Gamma_{lk}^j \mathbf{M}^{il} = 0. \quad (48)$$

11.2.6 Dérivée seconde covariante du tenseur de commande

En itérant la dérivée covariante (42) de la commande u , nous obtenons

$$(\nabla^2 u)_{ikl} = \frac{\partial}{\partial q^l} \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^k} - \Gamma_{ik}^j u_j \right) - \Gamma_{il}^m \left(\frac{\partial u_m}{\partial q^k} - \Gamma_{mk}^j u_j \right) - \Gamma_{kl}^m \left(\frac{\partial u_i}{\partial q^m} - \Gamma_{im}^j u_j \right).$$

11.2.7 Symétrie de la dérivée seconde covariante

Afin d'étudier la symétrie de la dérivée seconde covariante ci-dessus, soustrayons $(\nabla^2 u)_{ikl}$ et $(\nabla^2 u)_{ilk}$. Nous obtenons :

$$(\nabla^2 u)_{ikl} - (\nabla^2 u)_{ilk} = \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial q^l} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j \right) u_j. \quad (49)$$

11.2.8 Tenseur de courbure de Riemann-Christoffel

Dans l'équation (49), nous reconnaissons le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel :

$$\mathbf{R}_{ikl}^j = \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial q^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial q^l} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j \right). \quad (50)$$

Le tenseur $(\nabla^2 u)$ se révèle être symétrique par rapport à ses deux derniers indices si et seulement si le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel s'annule. En bref, le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel caractérise le défaut de symétrie de la dérivée seconde covariante :

$$(\nabla^2 u)_{ikl} - (\nabla^2 u)_{ilk} = \mathbf{R}_{ikl}^j u_j.$$

11.3 COVARIANCE DES ÉQUATIONS DE LA COMMANDE

En revenant aux équations (38), nous remarquons que les termes

$$\Gamma_{ij}^m \Gamma_{lm}^k \dot{q}^j \dot{q}^l u_k$$

manquent avec des signes opposés pour retrouver le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel \mathbf{R}_{jil}^k et la dérivée seconde covariante par rapport au temps $\frac{d^2 u_i}{dt^2}$ du tenseur de commande. Par cette compensation, les équations de la commande se simplifient en :

$$\frac{d^2 u_i}{dt^2} + \mathbf{R}_{jil}^k \dot{q}^j \dot{q}^l u_k + (\nabla^2 V)_{ij} u^j = 0. \quad (51)$$

Ces équations de la commande seront couplées aux équations du mouvement. Nous obtenons ainsi un système de $2n$ EDO du second ordre régissant les positions et les commandes (n étant le nombre de DDL du robot).

SIMULATIONS NUMÉRIQUES DES TRAJECTOIRES ET DES COMMANDES

Dans ce chapitre, nous simulons les trajectoires et les commandes de trois systèmes mécaniques. Nous commençons par deux systèmes linéaires, l'un à 1 DDL, l'autre à 2 DDL. Le troisième système est non linéaire, c'est un robot manipulateur à 7 DDL dont seulement 2 DDL sont actionnés.

L'algorithme de contrôle optimal par optimisation directe proposé en 11.1.4 est validé sur le premier exemple. Les trajectoires et les commandes du robot manipulateur sont simulées par la méthode de perturbation proposée en 11.1.3.

12.1 EXEMPLE LINÉAIRE À 1 DDL

Afin de valider la méthode d'optimisation directe de la commande présentée au 11.1.2, nous avons considéré un système très simple : il s'agit d'un pendule linéaire dont le mouvement est gouverné par l'équation

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = u. \quad (52)$$

où la pulsation ω vaut 1 s^{-1} , et le temps final est égal à $\pi \text{ s}$. Les conditions initiales sont :

$$\begin{cases} q(0) = 0 \text{ rad} \\ \dot{q}(0) = 1 \text{ rad.s}^{-1} \end{cases}$$

et les conditions finales sont :

$$\begin{cases} q(\pi) = 0 \text{ rad} \\ \dot{q}(\pi) = -1 \text{ rad.s}^{-1}. \end{cases}$$

La fonctionnelle (32) se particularise en

$$\mathcal{J}(q) = \frac{1}{2} \int_0^T (\ddot{q}(t) + q(t))^2 dt. \quad (53)$$

Cette fonctionnelle est positive. Elle atteint zéro, quand son intégrande positive est nulle à tout instant. Est-ce qu'une solution de

$$\ddot{q}(t) + q(t) = 0, \quad (54)$$

vérifie les conditions initiales et finales ? Si oui, le minimum de $\mathcal{J}(q)$ vaudra zéro. C'est à cette question que nous répondrons dans la prochaine sous-section.

12.1.1 *Solution de référence*

La loi horaire du mouvement (54) est de la forme

$$q(t) = A \cos t + B \sin t.$$

A et B sont exprimés en radians. Les conditions initiales impliquent :

$$\begin{cases} q(0) = 0 = A \\ \dot{q}(0) = 1 = B. \end{cases}$$

La fonction

$$q(t) = \sin t$$

vérifie les conditions initiales et finales. En conclusion, le minimum de $\mathcal{J}(q)$ est zéro. La commande u de référence est nulle

$$u(t) = 0.$$

12.1.2 *Algorithme de commande optimale par une méthode de descente*

La fonctionnelle

$$\mathcal{J}(q_N) = \frac{1}{2} \int_0^T (\ddot{q}_N(t) + q_N(t))^2 dt$$

devient une fonction \mathcal{J} d'un nombre fini de variables. Ces variables sont les coefficients (a, b) (respectivement (a, b, c) et (a, b, c, d)) des interpolations d'Hermite cubiques (respectivement quintiques et heptiques) du paramètre de configuration q_N . Mais les coefficients a_0, b_0, a_N et b_N sont connus. Après intégration, la fonction \mathcal{J} devient une forme quadratique du vecteur \mathbf{v} défini par

$$\mathbf{v}^T = (a_1, b_1, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}).$$

Nous la noterons

$$\mathcal{Q}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{f}$$

en omettant une constante additive dépendant de a_0, b_0, a_N et b_N . Par analogie avec l'élasticité linéaire, nous dirons que \mathbf{K} est la matrice de rigidité.

La minimisation de la forme quadratique $\mathcal{Q}(v)$ revient à résoudre le système linéaire

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (55)$$

Afin de mettre en place la méthode d'optimisation, nous proposons un algorithme basé sur une méthode de descente qui nous permettra de valider la méthode d'optimisation directe (11.1.4). L'algorithme se structure de la manière suivante :

- A. Interpoler la trajectoire q avec, au choix, les EFCH, les EFQH ou encore les EFHH :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_N = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(t) + h b_i \psi_i(t) \quad (\text{EFCH}) \\ q_N = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(t) + h b_i \psi_i(t) + h^2 c_i \theta_i(t) \quad (\text{EFQH}) \\ q_N = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(t) + h b_i \psi_i(t) + h^2 c_i \theta_i(t) + h^3 d_i \chi_i(t) \quad (\text{EFHH}); \end{array} \right. \quad (56)$$

- B. construire la fonction \mathcal{X} correspondante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}(a, b) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_0^T (a_i (\ddot{\phi}_i(t) + \phi_i(t)) + h b_i (\ddot{\psi}_i(t) + \psi_i(t)))^2 dt \\ \mathcal{X}(a, b, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_0^T (a_i (\ddot{\phi}_i(t) + \phi_i(t)) + h b_i (\ddot{\psi}_i(t) + \psi_i(t)) \\ \quad + h^2 c_i (\ddot{\theta}_i(t) + \theta_i(t)))^2 dt \\ \mathcal{X}(a, b, c, d) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_0^T (a_i (\ddot{\phi}_i(t) + \phi_i(t)) + h b_i (\ddot{\psi}_i(t) + \psi_i(t)) \\ \quad + h^2 c_i (\ddot{\theta}_i(t) + \theta_i(t)) + h^3 d_i (\ddot{\chi}_i(t) + \chi_i(t)))^2 dt \end{array} \right.$$

- C. annuler le gradient de la fonction \mathcal{X} par rapport aux coefficients (a, b) pour les EFCH; (a, b, c) pour les EFQH; (a, b, c, d) pour les EFHH; en résolvant le système algébrique (55) [1].

La matrice de rigidité \mathbf{K} est de taille $(2N - 2) \times (2N - 2)$ pour les EFCH, $(3N - 1) \times (3N - 1)$ pour les EFQH et $4N \times 4N$ pour les EFHH. Le vecteur \mathbf{v} qui contient les coefficients a, b, c, d de la fonction approchée u_N (56) est de taille $(2N - 2) \times 1$ pour les EFCH, $(3N - 1) \times 1$ pour les EFQH et $4N \times 1$ pour les EFHH. Le vecteur \mathbf{f} contient les résidus.

12.1.3 Optimisation par les EFCH

12.1.3.1 Optimisation par une méthode de descente rapide

En suivant l'algorithme 12.1.2, l'étape A. conduit à l'expression du paramètre de configuration interpolée

$$q_N = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(t) + h b_i \psi_i(t).$$

Nous introduisons les fonctions

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \phi_i(t) + \ddot{\phi}_i(t) \\ \beta_i(t) = \psi_i(t) + \ddot{\psi}_i(t). \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{X}(a, b)$ (étape B. de l'algorithme 12.1.2) est :

$$\mathcal{X}(a, b) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\sum_{i=0}^N (a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)) \right]^2 dt.$$

L'annulation de son gradient par rapport aux coefficients a_k et b_k (étape C. de l'algorithme 12.1.2) conduit à la construction de la *matrice de rigidité* \mathbf{K} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial a_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \alpha_k(t) (a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial b_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N h \beta_k(t) (a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)) dt = 0 \end{cases} \quad (57)$$

Les conditions initiales et finales sont imposées, par conséquent, les termes a_0 , b_0 , a_N et b_N sont connus. Le système (57) se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_k(t) (a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)) dt = f_\alpha \\ \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h \beta_k(t) (a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)) dt = f_\beta. \end{cases} \quad (58)$$

Les deuxièmes membres f_α et f_β sont connus grâce aux conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} f_\alpha = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \alpha_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \\ f_\beta = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h \beta_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt. \end{cases}$$

Le système linéaire (58) se présente sous la forme matricielle (55) où la matrice de rigidité \mathbf{K} est de taille $2(N-1) \times 2(N-1)$. Le vecteur \mathbf{v} contient les coefficients a et b de la solution approchée q_N . Le vecteur \mathbf{f} contient les résidus.

12.1.3.2 Détails sur la construction du système linéaire.

Par la méthode des EFCH, la matrice de rigidité \mathbf{K} est de la forme

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} \\ \mathbf{B}^T & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{o} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{o} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{B} \\ \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{B}^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Les matrices 2×2 \mathbf{A} et \mathbf{B} sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi \alpha_1(t)^2 dt & 0 \\ 0 & \int_0^\pi h^2 \beta_1(t)^2 dt \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi \alpha_1(t)\alpha_2(t) dt & B_{12} \\ -B_{12} & \int_0^\pi h^2 \beta_1(t)\beta_2(t) dt \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

La matrice \mathbf{A} est diagonale, les éléments extra-diagonaux de la matrice \mathbf{B} sont opposés :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{12} = \int_0^\pi h \alpha_1(t)\beta_1(t) dt = 0 \\ B_{12} = \int_0^\pi h \alpha_1(t)\beta_2(t) dt = -B_{21} \end{array} \right.$$

REMARQUE 1 Le calcul de *seulement cinq intégrales* suffit pour constituer la matrice de rigidité \mathbf{K} , et ce, quel que soit le nombre de points d'interpolation employé.

REMARQUE 2 La matrice \mathbf{A} est diagonale. Les éléments extra-diagonaux de la matrice \mathbf{B} sont opposés. Ceci est dû au fait que les fonctions $\beta_i(t)$ sont antisymétriques¹ et que les fonctions $\alpha_i(t)$ sont symétriques². Le produit d'une fonction symétrique par une fonction antisymétrique résulte en une fonction antisymétrique.

REMARQUE 3 Le vecteur résidu \mathbf{f} s'écrit simplement de la façon suivante :

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix}$$

1. Car elles sont composées par la somme de deux fonctions antisymétriques $\psi(t)$ et $\check{\psi}(t)$.

2. Elles sont composées par la somme des fonctions symétriques $\phi(t)$ et $\check{\phi}(t)$.

C'est un vecteur de taille $(2N - 2) \times 1$. Le vecteur contenant les coefficients de la fonction approchée q_N est de taille $(2N - 2) \times 1$. Dans cet exemple, il se présente sous la forme :

$$\mathbf{v} = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{N-1}, b_{N-1})^T$$

12.1.4 Optimisation par les EFQH

12.1.4.1 Minimisation de la fonction objectif par une méthode de descente rapide

En suivant l'algorithme 12.1.2, l'étape A. conduit à l'expression du paramètre de configuration interpolée

$$q_N = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(t) + h b_i \psi_i(t) + h^2 c_i \theta_i(t).$$

Nous introduisons les fonctions

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \phi_i(t) + \ddot{\phi}_i(t) \\ \beta_i(t) = \psi_i(t) + \ddot{\psi}_i(t) \\ \gamma_i(t) = \theta_i(t) + \ddot{\theta}_i(t) \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{X}(a, b, c)$ (étape B. de l'algorithme 12.1.2) est :

$$\mathcal{X}(a, b, c) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\sum_{i=0}^N \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) \right]^2 dt.$$

L'annulation de son gradient par rapport aux coefficients a_k , b_k et c_k (étape C. de l'algorithme 12.1.2) conduit à la construction de la *matrice de rigidité* \mathbf{K} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial a_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \alpha_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial b_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N h \beta_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial c_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N h^2 \gamma_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Les conditions initiales et finales sont imposées, par conséquent, les termes a_0 , b_0 , a_N et b_N sont connus. En posant $r_i = a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)$, le système (60) se présente de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\alpha \\ \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h \beta_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\beta \\ \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h^2 \gamma_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\gamma. \end{array} \right. \quad (61)$$

Les deuxièmes membres f_α , f_β et f_γ sont connus grâce aux conditions initiales et finales :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_\alpha = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \alpha_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \\ f_\beta = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h \beta_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \\ f_\gamma = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h^2 \gamma_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt. \end{array} \right.$$

Le système linéaire (58) se présente sous la forme matricielle (55) où la matrice de rigidité \mathbf{K} est de taille $(3N-1) \times (3N-1)$. Le vecteur \mathbf{v} contient les coefficients a et b de la solution approchée q_N . Le vecteur \mathbf{f} contient les résidus.

12.1.4.2 Détails sur la construction du système linéaire.

Par la méthode des EFQH, la matrice de rigidité \mathbf{K} est de la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A_{03} & \mathbf{B}_{31} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{c3}^T & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}^T & \mathbf{A} & \mathbf{B}_{c3} \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{31}^T & A_{03} \end{bmatrix}$$

Les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont 3×3 . La matrice \mathbf{A} est symétrique. Les éléments extra-diagonaux de la matrice \mathbf{B} sont tels que $B_{21} = -B_{12}$, $B_{32} = -B_{23}$ et $B_{31} = B_{13}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} \\ 0 & A_{22} & 0 \\ A_{13} & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ -B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & -B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Les coefficients A_{12} et A_{23} sont nuls. Les autres coefficients de la matrice \mathbf{A} sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{03} = \int_0^\pi h^4 \gamma_0(t)^2 dt \\ A_{11} = \int_0^\pi \alpha_1(t)^2 dt \\ A_{12} = \int_0^\pi h \alpha_1(t) \beta_1(t) dt = 0 \\ A_{13} = \int_0^\pi h^2 \alpha_1(t) \gamma_1(t) dt \\ A_{22} = \int_0^\pi h^2 \beta_1(t)^2 dt \\ A_{23} = \int_0^\pi h^3 \beta_1(t) \gamma_1(t) dt = 0 \\ A_{33} = \int_0^\pi h^4 \gamma_1(t)^2 dt \end{array} \right.$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{B} sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{11} = \int_0^\pi \alpha_1(t) \alpha_2(t) dt \\ B_{12} = \int_0^\pi h \alpha_1(t) \beta_2(t) dt \\ B_{13} = \int_0^\pi h^2 \alpha_1(t) \gamma_2(t) dt \\ B_{22} = \int_0^\pi h^2 \beta_1(t) \beta_2(t) dt \\ B_{23} = \int_0^\pi h^3 \beta_1(t) \gamma_2(t) dt \\ B_{33} = \int_0^\pi h^4 \gamma_1(t) \gamma_2(t) dt \end{array} \right.$$

\mathbf{B}_{31} et \mathbf{B}_{c3} sont les troisièmes lignes et troisièmes colonnes respectivement de la matrice \mathbf{B} . \mathbf{B}_{31}^T et \mathbf{B}_{c3}^T sont les troisièmes lignes et troisièmes colonnes respectivement de la matrice \mathbf{B}^T .

REMARQUE 1 Le calcul de *seulement onze intégrales* suffit pour constituer la matrice de rigidité \mathbf{K} , et ce, quel que soit le nombre de points d'interpolation.

REMARQUE 2 La matrice \mathbf{A} est symétrique. La matrice \mathbf{B} ne l'est pas. Ceci est dû au fait que les fonctions $\beta_i(t)$ sont antisymétriques³ et que les fonctions $\alpha_i(t)$ et $\gamma_i(t)$ sont symétriques⁴. Le produit d'une fonction symétrique par une fonction antisymétrique résulte en une fonction antisymétrique.

REMARQUE 3 Le vecteur résidu \mathbf{f} s'écrit simplement :

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} A_{01} & A_{02} \\ \mathbf{B}^T \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{B} \\ A_{01} & -A_{02} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix}$$

C'est un vecteur de taille $(3N - 1) \times 1$ où les coefficients A_{01} et A_{02} sont les intégrales

$$\begin{cases} A_{01} = \int_0^\pi h^2 \gamma_0(t) \alpha_0(t) dt \\ A_{02} = \int_0^\pi h^3 \gamma_0(t) \beta_0(t) dt \end{cases}$$

Le vecteur contenant les coefficients de la fonction approchée est de taille $(3N - 1) \times 1$. Dans cet exemple, il se présente sous la forme :

$$\mathbf{v} = (c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}, c_{N-1}, c_N)^T$$

12.1.5 Optimisation par les EFHH

12.1.5.1 Minimisation de la fonction objectif par une méthode de descente rapide

En suivant l'algorithme 12.1.2, l'étape A. conduit à l'expression du paramètre de configuration interpolée

$$q_N = \sum_{i=0}^N a_i \phi_i(t) + h b_i \psi_i(t) + h^2 c_i \theta_i(t) + h^3 d_i \chi_i(t).$$

Nous introduisons les fonctions

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \phi_i(t) + \ddot{\phi}_i(t) \\ \beta_i(t) = \psi_i(t) + \ddot{\psi}_i(t) \\ \gamma_i(t) = \theta_i(t) + \ddot{\theta}_i(t) \\ \delta_i(t) = \delta_i(t) + \ddot{\delta}_i(t) \end{cases}$$

3. Car elles sont composées par la somme de deux fonctions antisymétriques $\psi_i(t)$ et $\ddot{\psi}_i(t)$.

4. Elles sont composées par les sommes des fonctions symétriques $\phi_i(t)$ et $\ddot{\phi}_i(t)$ ainsi que $\theta_i(t)$ et $\ddot{\theta}_i(t)$ respectivement.

La fonction $\mathcal{X}(a, b, c, d)$ (étape B. de l'algorithme 12.1.2) est :

$$\mathcal{X}(a, b, c, d) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left[\sum_{i=0}^N \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) + h^3 d_i \delta_i(t) \right) \right]^2 dt.$$

L'annulation de son gradient par rapport aux coefficients a_k , b_k , c_k et d_k (étape C. de l'algorithme 12.1.2) conduit à la construction de la *matrice de rigidité* \mathbf{K} :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial a_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \alpha_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial b_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N h \beta_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial c_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N h^2 \gamma_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial d_k} = \int_0^\pi \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N h^3 \delta_k(t) \left(a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t) + h^2 c_i \gamma_i(t) \right) dt = 0 \end{cases} \quad (62)$$

Les conditions initiales et finales sont imposées, par conséquent, les termes a_0 , b_0 , a_N et b_N sont connus. En posant $r_i = a_i \alpha_i(t) + h b_i \beta_i(t)$, le système (62) se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\alpha \\ \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h \beta_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\beta \\ \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h^2 \gamma_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\gamma \\ \int_0^\pi \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h^3 \delta_k(t) \left(r_i + h^2 (c_0 \gamma_0(t) + c_N \gamma_N(t)) \right) dt = f_\delta. \end{cases} \quad (63)$$

Les seconds membres f_α , f_β , f_γ et f_δ sont connus grâce aux conditions initiales et finales :

$$\begin{cases} f_\alpha = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \alpha_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \\ f_\beta = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h \beta_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \\ f_\gamma = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h^2 \gamma_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \\ f_\delta = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h^3 \delta_k(t) (a_0 \alpha_0(t) + a_N \alpha_N(t) + h (b_0 \beta_0(t) + b_N \beta_N(t))) dt \end{cases}$$

Le système linéaire (63) se présente sous la forme matricielle (55) où la matrice de rigidité \mathbf{K} est de taille $4N \times 4N$. Le vecteur \mathbf{v} contient les coefficients a , b , c et d de la solution approchée q_N . Le vecteur \mathbf{f} contient les résidus.

12.1.5.2 Détails sur la construction du système linéaire.

Par la méthode des EFHH, la matrice de rigidité \mathbf{K} est de la forme :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{034} & \mathbf{B}_{34l} & \mathbf{o} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{o} \\ \mathbf{B}_{c34}^T & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \vdots \\ \mathbf{o} & \mathbf{B}^T & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{o} & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{o} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{B} & \mathbf{o} \\ \vdots & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{B}^T & \mathbf{A} & \mathbf{B}_{c34} \\ \mathbf{o} & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{B}_{34l}^T & \mathbf{A}_{N34} \end{bmatrix}$$

La matrice 4×4 \mathbf{A} à coefficients A_{ij} est symétrique. Les coefficients B_{ij} de la matrice 4×4 \mathbf{B} sont tels que $\forall i, \forall j \mid j \bmod 2 = 0, i \bmod 2 \neq 0, B_{ji} = -B_{ij}$. Les matrices \mathbf{A}_{034} et \mathbf{A}_{N34} sont 2×2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 \\ 0 & A_{21} & 0 & A_{24} \\ A_{13} & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & A_{24} & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ -B_{12} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & B_{34} \\ -B_{14} & B_{24} & -B_{34} & B_{44} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{034} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi h^4 \gamma_0(t)^2 dt & \int_0^\pi h^5 \gamma_0(t) \delta_0(t) dt \\ \int_0^\pi h^5 \delta_0(t) \gamma_0(t) dt & \int_0^\pi h^6 \delta_0(t)^2 dt \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{N34} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi h^4 \gamma_N(t)^2 dt & \int_0^\pi h^5 \gamma_N(t) \delta_N(t) dt \\ \int_0^\pi h^5 \delta_N(t) \gamma_N(t) dt & \int_0^\pi h^6 \delta_N(t)^2 dt \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{A} sont :

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \int_0^\pi \alpha_1(t)^2 dt \\
A_{12} &= \int_0^\pi h\alpha_1(t)\beta_1(t) dt = 0 \\
A_{13} &= \int_0^\pi h^2\alpha_1(t)\gamma_1(t) dt \\
A_{14} &= \int_0^\pi h^3\alpha_1(t)\delta_1(t) dt = 0 \\
A_{22} &= \int_0^\pi h^2\beta_1(t)^2 dt \\
A_{23} &= \int_0^\pi h^3\beta_1(t)\gamma_1(t) dt = 0 \\
A_{24} &= \int_0^\pi h^4\beta_1(t)\delta_1(t) dt \\
A_{33} &= \int_0^\pi h^4\gamma_1(t)^2 dt \\
A_{34} &= \int_0^\pi h^5\gamma_1(t)^2\delta_1(t) dt = 0 \\
A_{44} &= \int_0^\pi h^6\delta_1(t)^2 dt
\end{aligned}$$

Les coefficients de la matrice \mathbf{B} sont :

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \int_0^\pi \alpha_1(t)\alpha_2(t) dt \\
B_{12} &= \int_0^\pi h\alpha_1(t)\beta_2(t) dt \\
B_{13} &= \int_0^\pi h^2\alpha_1(t)\gamma_2(t) dt \\
B_{14} &= \int_0^\pi h^3\alpha_1(t)\delta_2(t) dt \\
B_{22} &= \int_0^\pi h^2\beta_1(t)\beta_2(t) dt \\
B_{23} &= \int_0^\pi h^3\beta_1(t)\gamma_2(t) dt \\
B_{24} &= \int_0^\pi h^4\beta_1(t)\delta_2(t) dt \\
B_{33} &= \int_0^\pi h^4\gamma_1(t)\gamma_2(t) dt \\
B_{34} &= \int_0^\pi h^5\gamma_1(t)\delta_2(t) dt \\
B_{44} &= \int_0^\pi h^6\delta_1(t)\delta_2(t) dt
\end{aligned}$$

B_{34l} et B_{c34} sont les troisièmes et quatrièmes lignes et troisièmes et quatrièmes colonnes respectivement de la matrice antisymétrique \mathbf{B} . B_{34l}^T et B_{c34}^T sont les troisièmes et quatrièmes lignes (respectivement troisièmes et quatrièmes colonnes) de la matrice antisymétrique \mathbf{B}^T .

REMARQUE 1 Le calcul de *seulement seize intégrales* suffit pour constituer la matrice de rigidité \mathbf{K} , et ce, quel que soit le nombre de points d'interpolation.

REMARQUE 2 La matrice \mathbf{A} est symétrique. La matrice \mathbf{B} ne l'est pas. Ceci est dû au fait que les fonctions $\beta_i(t)$ et $\delta_i(t)$ sont antisymétriques⁵ et que les fonctions $\alpha_i(t)$ et $\gamma_i(t)$ sont symétriques⁶. Le produit d'une fonction symétrique par une fonction antisymétrique résulte en une fonction antisymétrique.

REMARQUE 3 Le vecteur résidu \mathbf{f} s'écrit simplement :

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{012} \\ \mathbf{B}^T \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{A}_{N12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N \\ b_N \end{bmatrix}$$

C'est un vecteur de taille $4N \times 1$. Les matrices 2×2 \mathbf{A}_{012} et \mathbf{A}_{N12} sont

$$\left| \begin{array}{l} \mathbf{A}_{012} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi h^2 \gamma_0(t) \alpha_0(t) dt & \int_0^\pi h^3 \gamma_0(t) \beta_0(t) dt \\ \int_0^\pi h^3 \delta_0(t) \alpha_0(t) dt & \int_0^\pi h^4 \delta_0(t) \beta_0(t) dt \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{N12} = \begin{bmatrix} \int_0^\pi h^2 \gamma_N(t) \alpha_N(t) dt & \int_0^\pi h^3 \gamma_N(t) \beta_N(t) dt \\ \int_0^\pi h^3 \delta_N(t) \alpha_N(t) dt & \int_0^\pi h^4 \delta_N(t) \beta_N(t) dt \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Le vecteur contenant les coefficients de la fonction approchée est de taille $4N \times 1$. Dans cet exemple, se présente sous la forme :

$$\mathbf{v} = (c_0, d_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \dots, a_{N-1}, b_{N-1}, c_{N-1}, d_{N-1}, c_N, d_N)^T.$$

12.1.6 Remarques et résultats concernant l'exemple à 1 DDL linéaire

12.1.6.1 Remarques

Comme en élasticité linéaire, l'ordre des composantes du vecteur \mathbf{v} est très important. Le choix de l'arrangement de ce vecteur conditionne les propriétés de la matrice de rigidité \mathbf{K} . Ce choix doit suivre les règles de la MEF. Tous les coefficients non-nuls sont concentrés sur une bande étroite voisine de la diagonale. La résolution du système linéaire (55) est alors assez aisée.

5. Elles sont composées par les sommes des fonctions antisymétriques $\psi_i(t)$ et $\check{\psi}_i(t)$ ainsi que $\chi_i(t)$ et $\check{\chi}_i(t)$ respectivement.

6. Elles sont composées par les sommes des fonctions symétriques $\phi_i(t)$ et $\check{\phi}_i(t)$ ainsi que $\theta_i(t)$ et $\check{\theta}_i(t)$ respectivement.

\mathbf{K} est une matrice bande. Dans le cas des EFCH (respectivement EFQH, EFHH) sa largeur de bande est de 5 (respectivement 11 et 16). Nous dirons qu'elle est *pentadiagonale* (respectivement *undécadiagonale* et *hexadécadiagonale*).

12.1.6.2 Résultats

Plus le degré de finesse des EFH augmente, plus la valeur de $\mathcal{J}(q_N)$ se rapproche de sa valeur optimale zéro (voir TABLE 11).

L'implémentation de la méthode d'optimisation 11.1.2 procure de bons résultats. À titre d'exemple, les solutions calculées par la méthode d'optimisation (position, vitesse, accélération et secousse) par les EFCH, les EFQH et les EFHH sont tracées et comparées avec les solutions de référence pour $N = 3$ points d'interpolation (cf. FIGURES 50, 51 et 52).

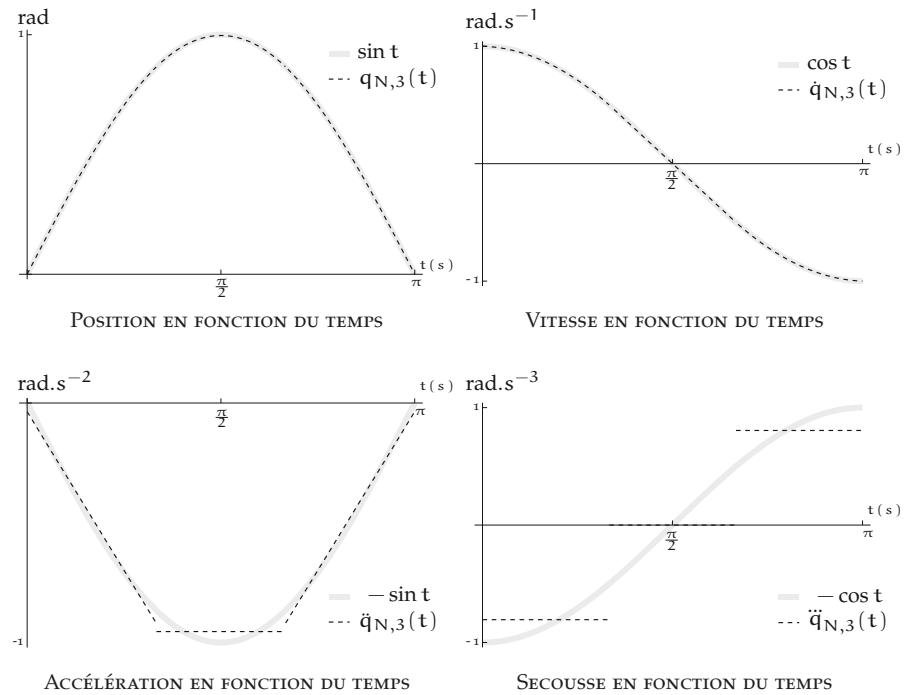


FIGURE 50: Comparaison de la solution de référence du pendule linéaire avec la solution approchée obtenue par les EFCH : position, vitesse, accélération et secousse en fonction du temps

Précisons que $N = 3$ est un *nombre très petit de points d'interpolation*. Il ne sera pratiquement jamais employé dans les applications. Ici, il servira seulement à illustrer notre propos. Nous noterons $q_{N,3}$ (respectivement $q_{N,5}$ et $q_{N,7}$) la solution approchée obtenue par les EFCH (respectivement EFQH et EFHH).

La solution calculée par les EFCH (FIGURE 50), la position $q_{N,3}$ et la vitesse $\dot{q}_{N,3}$ concordent avec les solutions de référence $\sin t$ et $\cos t$. Cependant le degré des EFCH étant limité à 3, l'accélération $\ddot{q}_{N,3}$ est linéaire par morceaux et la secousse $\dddot{q}_{N,3}$ est constante par morceaux. Par conséquent les solutions de référence : $-\sin t$ et $-\cos t$ sont médiocrement approchées.

L'interpolation par les EFQH (FIGURE 51) est plus précise que celle proposée par les EFCH. La position $q_{N,5}$, la vitesse $\dot{q}_{N,5}$ ainsi que l'accélération $\ddot{q}_{N,5}$ concorde très bien avec les solutions de référence *même avec un petit*

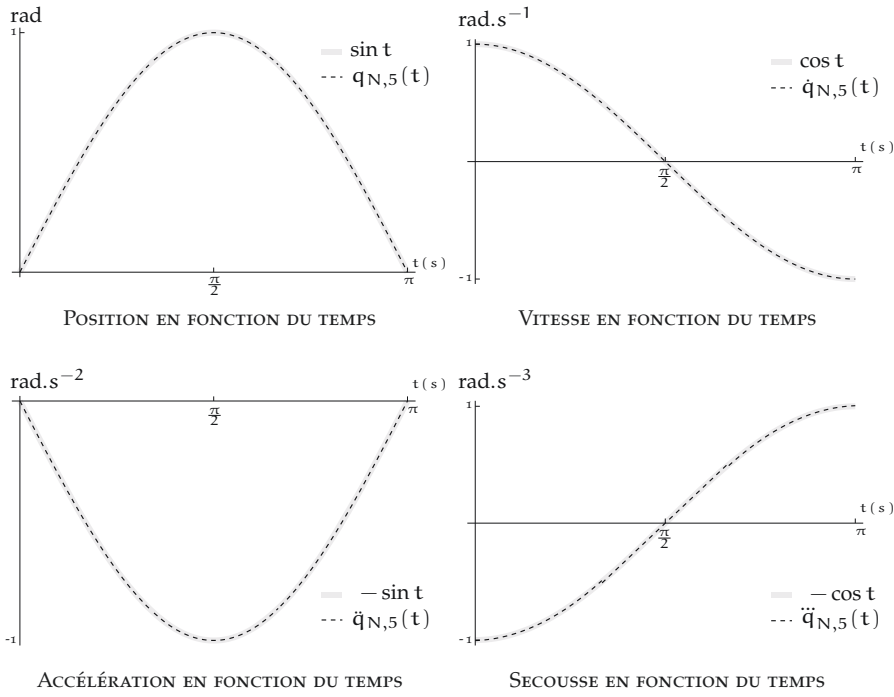


FIGURE 51: Comparaison de la solution de référence du pendule linéaire avec la solution approchée obtenue par les EFQH : position, vitesse, accélération et secousse en fonction du temps

nombre de nœuds. Remarquons qu'avec les EFQH les secousses sont interpolées par des fonctions quadratiques par morceaux. C'est pour cette raison que deux points de discontinuité apparaissent dans l'approximation $\ddot{q}_{N,5}$.

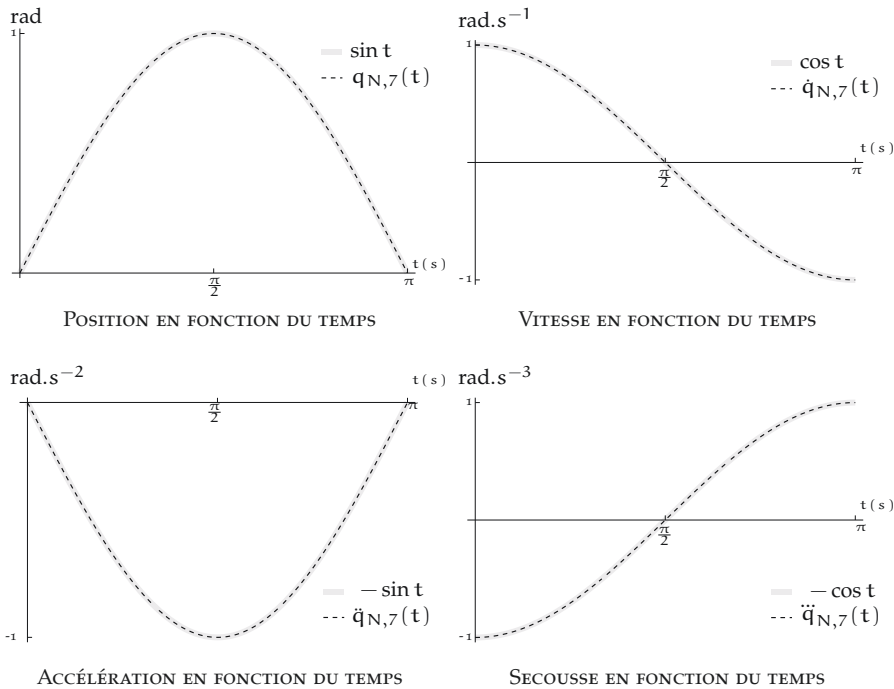


FIGURE 52: Comparaison de la solution de référence du pendule linéaire avec la solution approchée obtenue par les EFHH : position, vitesse, accélération et secousse en fonction du temps

Enfin, l'interpolation par les EFHH (FIGURE 52) est la plus précise de toutes. La position $q_{N,7}$, la vitesse $\dot{q}_{N,7}$, l'accélération $\ddot{q}_{N,7}$ ainsi que la secousse $\ddot{\ddot{q}}_{N,7}$ coïncident toutes convenablement avec les solutions de référence même si le nombre de points d'interpolation ($N = 3$) est très petit.

Afin d'étudier la précision de la méthode d'optimisation, l'étude menée au 9.5 s'impose ici également. Si la norme de l'erreur est en h^p , alors son logarithme est affine en $\ln h$ avec une pente p (si $\|e\| = h^p c$ alors $\ln \|e\| = p \ln h + \ln c$).

Les normes $\|e\|_3$, $\|e\|_5$ et $\|e\|_7$ décroissent en h^4 pour les EFCH, en h^6 pour les EFQH et en h^8 pour les EFHH (voir TABLE 10 et FIGURE 53), ce qui confirme les superconvergences remarquées dans la section 9.5.

TABLE 10: Vérification de la superconvergence des méthodes des EFCH, EFQH et EFHH pour l'exemple à 1 DDL; $\|e\|_i$ en rad

N	$\ln(\frac{\pi}{N})$	$\ e\ _3$	$\ln \ e\ _3$	$\ e\ _5$	$\ln \ e\ _5$	$\ e\ _7$	$\ln \ e\ _7$
3	0,04	$5,07 \times 10^{-3}$	-5,28	$1,91 \times 10^{-4}$	-8,56	$1,60 \times 10^{-5}$	-11,05
4	-0,24	$1,62 \times 10^{-3}$	-6,42	$3,39 \times 10^{-5}$	-10,29	$1,55 \times 10^{-6}$	-13,38
5	-0,46	$6,67 \times 10^{-4}$	-7,31	$8,83 \times 10^{-6}$	-11,63	$2,56 \times 10^{-7}$	-15,18
6	-0,64	$3,22 \times 10^{-4}$	-8,04	$2,94 \times 10^{-6}$	-12,74	$5,90 \times 10^{-8}$	-16,65
7	-0,80	$1,74 \times 10^{-4}$	-8,66	$1,16 \times 10^{-6}$	-13,66	$1,71 \times 10^{-8}$	-17,89
8	-0,93	$1,02 \times 10^{-4}$	-9,19	$5,21 \times 10^{-7}$	-14,47	$5,88 \times 10^{-8}$	-18,95
9	-1,05	$6,38 \times 10^{-5}$	-9,66	$2,57 \times 10^{-7}$	-15,18	$2,39 \times 10^{-9}$	-19,85

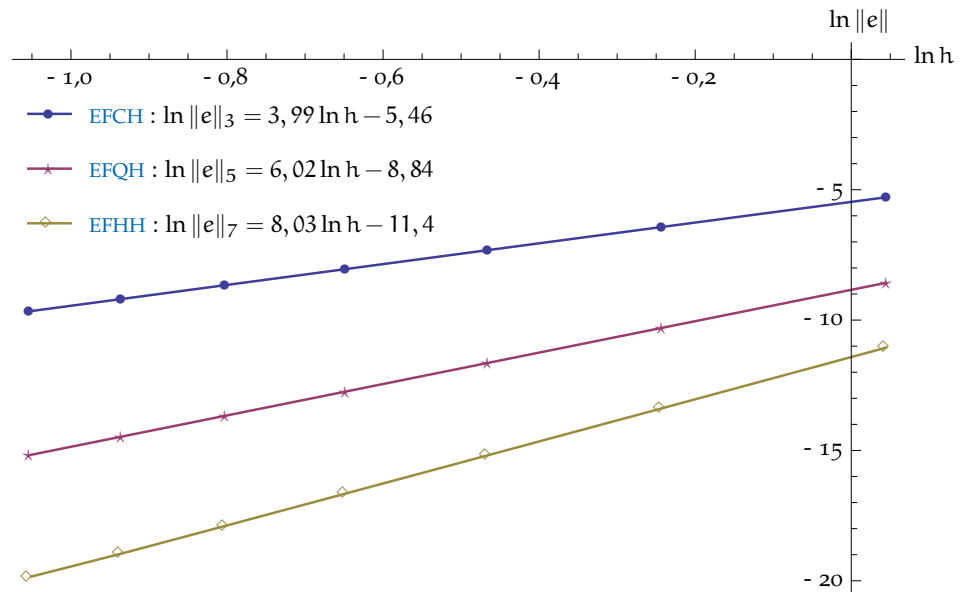


FIGURE 53: Superconvergence des EFCH, EFQH et EFHH pour l'exemple à 1 DDL par la méthode d'optimisation : $\ln(\|\sin t - q_N(t)\|)$ en fonction de $\ln(\frac{\pi}{N})$

Enfin, il est intéressant de remarquer que la suite positive $\mathcal{J}(q_N)$ décroît aussi en h^4 pour les EFCH. Elle décroît en h^8 pour les EFQH et en h^{12} pour les EFHH (cf. TABLE 11 et FIGURE 54).

Nous pouvons remarquer que la décroissance de l'intégrale $\mathcal{J}(q_N)$ semble être en

TABLE 11: Décroissance de l'intégrale $\mathcal{I}(q_N)$ pour l'exemple à 1 DDL par les EFCH, EFQH et EFHH : \mathcal{I}_i en $\text{rad}^2 \cdot \text{s}^{-3}$

N	$\ln(\frac{\pi}{N})$	EFCH		EFQH		EFHH	
		\mathcal{I}_3	$\ln \mathcal{I}_3$	\mathcal{I}_5	$\ln \mathcal{I}_5$	\mathcal{I}_7	$\ln \mathcal{I}_7$
3	0,04	$2,42 \times 10^{-3}$	-6,03	$9,35 \times 10^{-8}$	-16,19	$2,11 \times 10^{-12}$	-26,88
4	-0,24	$7,92 \times 10^{-4}$	-7,14	$9,34 \times 10^{-9}$	-18,49	$8,18 \times 10^{-14}$	-30,13
5	-0,46	$3,30 \times 10^{-4}$	-8,02	$1,55 \times 10^{-9}$	-20,28	$6,18 \times 10^{-15}$	-32,72
6	-0,64	$1,61 \times 10^{-4}$	-8,74	$3,59 \times 10^{-10}$	-21,75	$7,30 \times 10^{-16}$	-34,85
7	-0,80	$8,72 \times 10^{-5}$	-9,35	$1,04 \times 10^{-10}$	-22,99	$1,19 \times 10^{-16}$	-36,67
8	-0,93	$5,13 \times 10^{-5}$	-9,88	$3,56 \times 10^{-11}$	-24,06	$2,44 \times 10^{-17}$	-38,25
9	-1,05	$3,21 \times 10^{-5}$	-10,35	$1,38 \times 10^{-11}$	-25,01	$6,53 \times 10^{-18}$	-39,57

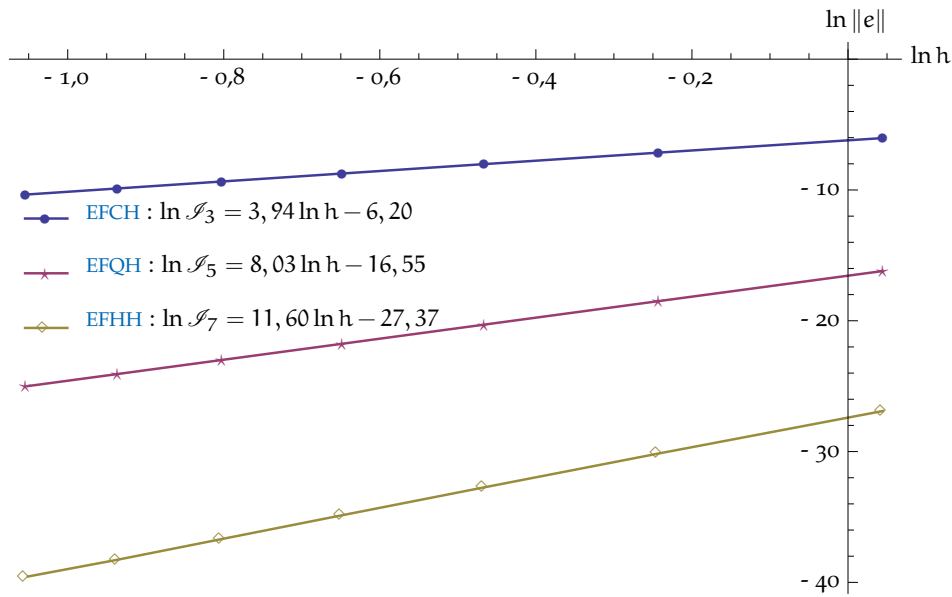


FIGURE 54: Décroissance de l'intégrale $\mathcal{I}(q_N)$ par la méthode d'optimisation : $\ln(\mathcal{I}(q_N))$ en fonction de $\ln(\frac{\pi}{N})$.

$$h^{2s-2},$$

où s est le degré des EFH retenus (3,5,7,...).

Pour les noniques, la décroissance de la norme de l'erreur $\|e\|_9$ serait donc en h^{10} et la décroissance de l'intégrale $\mathcal{I}(q_N)$ serait en h^{16} .

L'utilisation de la méthode des EFH sur un exemple d'un système à 1 DDL dont le mouvement est gouverné par une équation du mouvement linéaire a été présenté dans cette sous-section. Les variables d'état et de commande de ce système ont été correctement approchées. Mais qu'en est-il des systèmes à plus d'un DDL ? La sous-section suivante portera sur l'exemple d'un système linéaire à 2 DDL dont les équations du mouvement sont couplées.

12.2 EXEMPLE LINÉAIRE À 2 DDL COUPLÉS

Pour un temps final $T = \frac{\pi}{\sqrt{2}}s$, considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \ddot{q}^1(t) + q^1(t) - q^2(t) = u_1 \\ \ddot{q}^2(t) + q^2(t) - q^1(t) = u_2, \end{cases}$$

Les positions et vitesses initiales sont :

$$\begin{cases} q^1(0) = 1 \text{ m} \\ \dot{q}^1(0) = \sqrt{2} \text{ m.s}^{-1} \\ q^2(0) = -1 \text{ m} \\ \dot{q}^2(0) = -\sqrt{2} \text{ m.s}^{-1}. \end{cases}$$

Les positions et vitesses finales sont :

$$\begin{cases} q^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = -1 \text{ m} \\ \dot{q}^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} \text{ m.s}^{-1} \\ q^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = 1 \text{ m} \\ \dot{q}^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \text{ m.s}^{-1}. \end{cases}$$

La fonctionnelle (32) se particularise en

$$\mathcal{J}(u^1, u^2) = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \left((\dot{q}^1(t) + q^1(t) - q^2(t))^2 + (\dot{q}^2(t) + q^2(t) - q^1(t))^2 \right) dt. \quad (64)$$

Cette fonctionnelle est positive. Elle peut atteindre zéro quand son intégrande positive est nulle à tout instant. Est-ce que $q^1(t)$ et $q^2(t)$, solutions du système d'équations (65)

$$\begin{cases} \ddot{q}^1(t) + q^1(t) - q^2(t) = 0 \\ \ddot{q}^2(t) + q^2(t) - q^1(t) = 0, \end{cases} \quad (65)$$

vérifient les conditions initiales et finales de ce mouvement? Si oui, le minimum de $\mathcal{J}(q)$ vaudra zéro. C'est à cette question que nous répondrons dans la prochaine sous-section.

12.2.0.3 Solution de référence

En additionnant les deux équations du système d'équations (65), nous obtenons :

$$\ddot{q}^1(t) + \ddot{q}^2(t) = 0.$$

La somme $q^1(t) + q^2(t)$ est donc affine en t :

$$q^1(t) + q^2(t) = At + B.$$

En soustrayant les deux équations du système d'équations (65), nous obtenons :

$$\ddot{q}^1(t) - \ddot{q}^2(t) + 2(q^1(t) - q^2(t)) = 0, \quad (66)$$

la solution de référence $Q = q^1 - q^2$ satisfait donc

$$\ddot{Q} + 2Q = 0.$$

La solution générale de cette équation est de la forme

$$Q(t) = C \cos(\sqrt{2}t) + D \sin(\sqrt{2}t),$$

Ainsi,

$$\begin{cases} q^1(t) + q^2(t) = At + B \\ q^1(t) - q^2(t) = C \cos(\sqrt{2}t) + D \sin(\sqrt{2}t). \end{cases}$$

En imposant les conditions initiales, nous obtenons $A = 0$, $B = 0$, $C = 2$ et $D = 2$.

Nous en déduisons les solutions de référence

$$\begin{cases} q^1(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \sin(\sqrt{2}t) \\ q^2(t) = -\cos(\sqrt{2}t) - \sin(\sqrt{2}t). \end{cases} \quad (67)$$

Le minimum de $\mathcal{J}(u^1, u^2)$ est donc 0. Les commandes optimales u^1 et u^2 sont donc nulles. Elles serviront à vérifier la qualité des approximations calculées par les EFH.

12.2.1 Optimisation par les EFCH

En suivant l'algorithme 12.1.2, l'étape A. conduit aux deux expressions des commandes interpolées

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^N (a_i^1 (\ddot{\phi}_i(t) + \phi_i(t)) + hb_i^1 (\ddot{\psi}_i(t) + \psi_i(t)) - a_i^2 \phi_i(t) - hb_i^2 \psi_i(t)) = u_N^1 \\ \sum_{i=0}^N (a_i^2 (\ddot{\phi}_i(t) + \phi_i(t)) + hb_i^2 (\ddot{\psi}_i(t) + \psi_i(t)) - a_i^1 \phi_i(t) - hb_i^1 \psi_i(t)) = u_N^2, \end{cases}$$

nous introduisons les fonctions

$$\begin{cases} \alpha_i(t) = \phi_i(t) + \ddot{\phi}_i(t) \\ \beta_i(t) = \psi_i(t) + \ddot{\psi}_i(t). \end{cases}$$

À l'étape B. de l'algorithme 12.1.2, les fonctions \mathcal{X}_1 et \mathcal{X}_2 sont :

$$\begin{cases} \mathcal{J}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{i=0}^N \left(a_i^1 \alpha_i(t) + h b_i^1 \beta_i(t) - a_i^2 \phi_i(t) - h b_i^2 \psi_i(t) \right)^2 dt \\ \mathcal{J}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{i=0}^N \left(a_i^2 \alpha_i(t) + h b_i^2 \beta_i(t) - a_i^1 \phi_i(t) - h b_i^1 \psi_i(t) \right)^2 dt, \end{cases}$$

L'annulation de leurs gradients par rapport aux coefficients a_k^i et b_k^i (étape C. de l'algorithme 12.1.2) conduit à la construction de la *matrice de rigidité* \mathbf{K} .

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial a_k^1} = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \left(\alpha_k(t) \left(a_i^1 \alpha_i(t) + h b_i^1 \beta_i(t) - a_i^2 \phi_i(t) - b_i^2 \psi_i(t) \right) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{J}_1}{\partial b_k^1} = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \left(h \beta_k(t) \left(a_i^1 \alpha_i(t) + h b_i^1 \beta_i(t) - a_i^2 \phi_i(t) - b_i^2 \psi_i(t) \right) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial a_k^2} = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \left(\alpha_k(t) \left(a_i^2 \alpha_i(t) + h b_i^2 \beta_i(t) - a_i^1 \phi_i(t) - b_i^1 \psi_i(t) \right) \right) dt = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{J}_2}{\partial b_k^2} = \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=0}^N \sum_{i=0}^N \left(h \beta_k(t) \left(a_i^2 \alpha_i(t) + h b_i^2 \beta_i(t) - a_i^1 \phi_i(t) - b_i^1 \psi_i(t) \right) \right) dt = 0. \end{cases} \quad (68)$$

Les conditions initiales et finales sont imposées. Par conséquent, les coefficients $a_0^1, b_0^1, a_0^2, b_0^2, a_N^1, b_N^1, a_N^2, b_N^2$ ainsi que a_N^2 sont connus. Le système (68) se présente de la manière suivante :

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_k(t) \left(a_i^1 \alpha_i(t) + h b_i^1 \beta_i(t) - a_i^2 \phi_i(t) - h b_i^2 \psi_i(t) \right) dt = f_\alpha \\ \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h \beta_k(t) \left(a_i^1 \alpha_i(t) + h b_i^1 \beta_i(t) - a_i^2 \phi_i(t) - h b_i^2 \psi_i(t) \right) dt = f_\beta \\ \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \alpha_k(t) \left(-a_i^1 \phi_i(t) - h b_i^1 \psi_i(t) + a_i^2 \alpha_i(t) + h b_i^2 \beta_i(t) \right) dt = f_\gamma \\ \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} h \beta_k(t) \left(-a_i^1 \phi_i(t) - h b_i^1 \psi_i(t) + a_i^2 \alpha_i(t) + h b_i^2 \beta_i(t) \right) dt = f_\delta. \end{cases} \quad (69)$$

Les deuxièmes membres $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma$ et f_δ sont connus grâce aux conditions initiales et finales :

$$\begin{cases}
\mathbf{f}_\alpha = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \alpha_k(t) \left(a_0^1 \alpha_0(t) + a_N^1 \alpha_N(t) - a_0^2 \phi_0(t) - a_N^2 \phi_N(t) \right. \\
\quad \left. + h \left(b_0^1 \beta_0(t) + b_N^1 \beta_N(t) - b_0^2 \psi(t) - b_N^2 \psi(t) \right) \right) dt \\
\mathbf{f}_\beta = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h \beta_k(t) \left(a_0^1 \alpha_0(t) + a_N^1 \alpha_N(t) - a_0^2 \phi_0(t) - a_N^2 \phi_N(t) \right. \\
\quad \left. + h \left(b_0^1 \beta_0(t) + b_N^1 \beta_N(t) - b_0^2 \psi(t) - b_N^2 \psi(t) \right) \right) dt \\
\mathbf{f}_\gamma = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi \alpha_k(t) \left(a_0^2 \alpha_0(t) + a_N^2 \alpha_N(t) - a_0^1 \phi_0(t) - a_N^1 \phi_N(t) \right. \\
\quad \left. + h \left(b_0^2 \beta_0(t) + b_N^2 \beta_N(t) - b_0^1 \psi(t) - b_N^1 \psi(t) \right) \right) dt \\
\mathbf{f}_\delta = \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^\pi h \beta_k(t) \left(a_0^2 \alpha_0(t) + a_N^2 \alpha_N(t) - a_0^1 \phi_0(t) - a_N^1 \phi_N(t) \right. \\
\quad \left. + h \left(b_0^2 \beta_0(t) + b_N^2 \beta_N(t) - b_0^1 \psi(t) - b_N^1 \psi(t) \right) \right) dt.
\end{cases}$$

Le système linéaire (69) se présente alors sous la forme matricielle (55). La matrice de rigidité \mathbf{K} est de taille $4(N-1) \times 4(N-1)$. Le vecteur \mathbf{v} contient les coefficients a^i et b^i de la solution approchée q_N . Le vecteur \mathbf{f} contient les résidus.

12.2.2 Détails sur la construction du système linéaire

Dans cet exemple, nous nous sommes bornés à utiliser la méthode des EFCH. La matrice de rigidité \mathbf{K} a la même structure que la matrice (59) vue au 12.1.3. Les matrices blocs \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices 4×4 que nous décomposons elles-mêmes en blocs 2×2 :

$$\begin{cases}
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix}.
\end{cases}$$

Les matrices 2×2 \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 sont

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)^2 + \phi_1(t)^2 dt & 0 \\ 0 & h^2 \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \beta_1(t)^2 + \psi_1(t)^2 dt \end{bmatrix} \\
\mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} -2 \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\phi_1(t) dt & 0 \\ 0 & -2h^2 \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \beta_1(t)\psi_1(t) dt \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\alpha_2(t) + \phi_1(t)\phi_2(t) dt & h \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\beta_2(t) + \phi_1(t)\psi_2(t) dt \\ -h \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\beta_2(t) + \phi_1(t)\psi_2(t) dt & h^2 \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \beta_1(t)\beta_2(t) + \psi_1(t)\psi_2(t) dt \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_2 &= \begin{bmatrix} -\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\psi_2(t) + \phi_1(t)\beta_2(t) dt & -h \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\psi_2(t) + \phi_1(t)\beta_2(t) dt \\ \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \alpha_1(t)\psi_2(t) + \phi_1(t)\beta_2(t) dt & -h^2 \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}} \beta_1(t)\psi_2(t) + \psi_1(t)\beta_2(t) dt \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

REMARQUE 1 Le calcul de *seulement douze intégrales* suffit pour constituer la matrice de rigidité \mathbf{K} , et ce, quelque soit le nombre de points d'interpolation employé.

REMARQUE 2 Les matrices \mathbf{A}_1 et \mathbf{A}_2 sont symétriques. De même, les matrices \mathbf{B}_1 et \mathbf{B}_2 sont antisymétriques. Ceci est dû au fait que les fonctions $\beta_i(t)$ sont antisymétriques⁷ et que les fonctions $\alpha_i(t)$ sont symétriques⁸. Le produit d'une fonction symétrique par une fonction antisymétrique résulte en une fonction antisymétrique.

REMARQUE 3 Le vecteur résidu \mathbf{f} s'écrit simplement :

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \mathbf{B}^T \\ \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^1 \\ b_0^1 \\ a_0^2 \\ b_0^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{o} \\ \vdots \\ \mathbf{o} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_N^1 \\ b_N^1 \\ a_N^2 \\ b_N^2 \end{bmatrix}$$

C'est un vecteur de taille $4(N-1) \times 1$. Le vecteur contenant les coefficients de la fonction approchée est de taille $4(N-1) \times 1$. Dans cet exemple, il se présente sous la forme :

$$\mathbf{v} = \left(a_1^1, b_1^1, a_1^2, b_1^2, \dots, a_{N-1}^1, b_{N-1}^1, a_{N-1}^2, b_{N-1}^2 \right)^T.$$

12.2.3 Résultats

À titre d'exemple, les fonctions $q^1(t)$ et $q^2(t)$ ainsi que leurs dérivées premières, secondes, troisièmes et quatrièmes par rapport au temps ont été

7. Car elles sont composées par la somme de deux fonctions antisymétriques $\psi_i(t)$ et $\dot{\psi}_i(t)$.

8. Elles sont composées par la somme des fonctions symétriques $\phi_i(t)$ et $\ddot{\phi}_i(t)$.

approchées par les EFCH en utilisant $N = 20$ points d'interpolation. Les solutions approchées $q_N^1(t)$ et $q_N^2(t)$ sont représentées sur les FIGURES 55 et 56. Les solutions de référence $q^1(t)$ et $q^2(t)$ sont également représentées sur ces figures. Elles sont comparées avec les dérivées premières, secondes et tierces par rapport au temps. Nous pouvons constater que les fonctions de référence, ainsi que leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps sont bien approchées puisque les courbes se superposent. La reconstruction de la secousse (dérivée tierce par rapport au temps) est en échelons⁹.

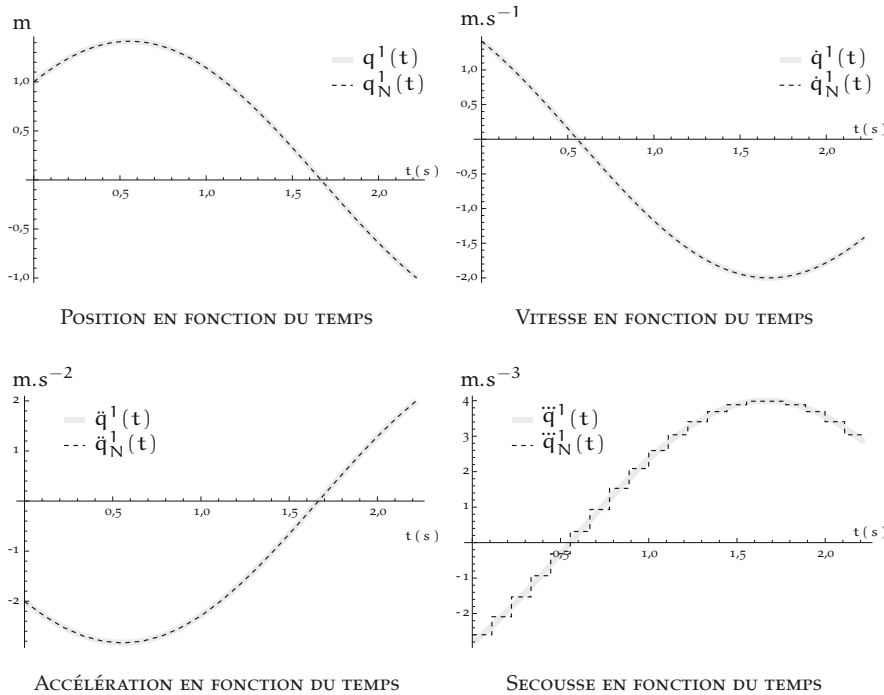


FIGURE 55: Comparaison de la solution approchée $q_N^1(t)$ avec la solution de référence $q^1(t)$ ainsi que leurs dérivées premières, secondes et tierces en fonction du temps

Pour ces approximations, l'intégrale (64) vaut $1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$. La norme de l'erreur e_3 entre les solutions approchées et les solutions de référence décroît en h^4 tel qu'il a été vu au 12.1 sur la FIGURE 53 pour les EFCH. Il en est de même pour la décroissance de l'intégrale $\mathcal{J}(q_N)$.

Les EFQH et EFHH peuvent bien évidemment être utilisés en s'inspirant des explications fournis au 12.1 et dans cette sous-section même pour les EFCH.

Au cours des sections 12.1 et 12.2, nous avons validé la méthode d'optimisation directe évoquée au 11.1.2 en simulant les trajectoires et les commandes de systèmes mécaniques à 1 ou 2 DDL régis par des équations différentielles linéaires.

Jusqu'ici, le seul problème non-linéaire que nous avons traité est la simulation des trajectoires d'un pendule non-linéaire à partir de ses conditions initiales. Nous terminerons par la commande d'un système non-linéaire : un robot sériel à 2 DDL.

⁹. Ce qui est normal puisque ce sont les EFCH qui ont été employés pour calculer ces approximations.

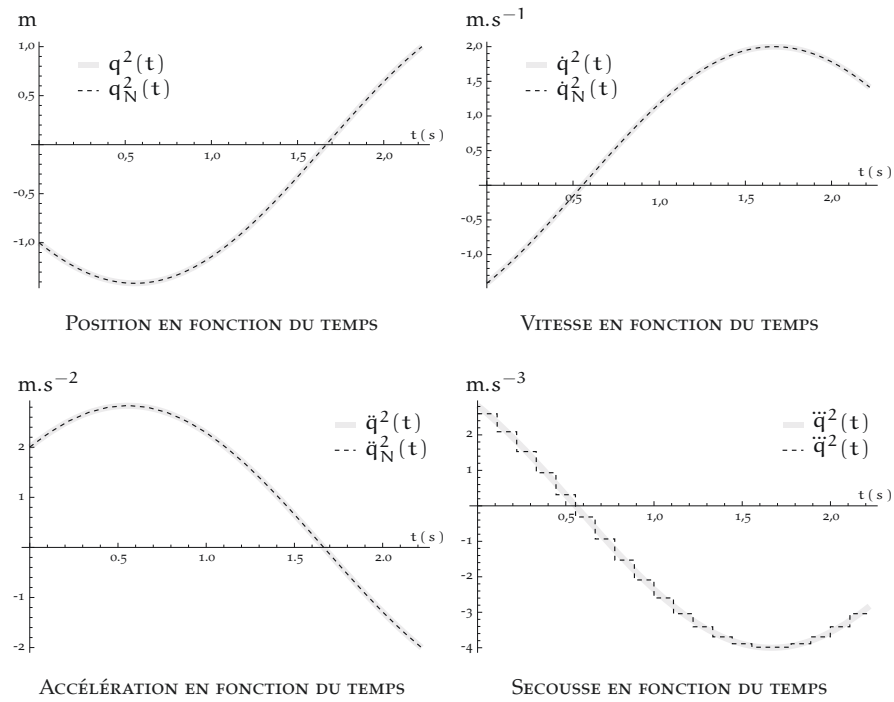


FIGURE 56: Comparaison de la solution approchée $q_N^2(t)$ avec la solution de référence $q^2(t)$ ainsi que leurs dérivées premières, secondes et tierces en fonction du temps

12.3 COMMANDE OPTIMALE D'UN ROBOT À 2 DDL

Nous nous proposons d'appliquer les méthodes numériques développées précédemment à la commande des robots. Elles seront validées en simulant les mouvements d'un robot sériel à 2 DDL (ce robot est schématisé sur la FIGURE 57).

Le modèle dynamique de ce robot suivra les indications de la section 8.2. Ensuite, les simulations seront comparées avec les résultats du module de calcul commercial SOLIDWORKS® Motion. Finalement, l'approximation de la commande optimale du robot KUKA LBR 4+ pour notre méthode sera présentée.

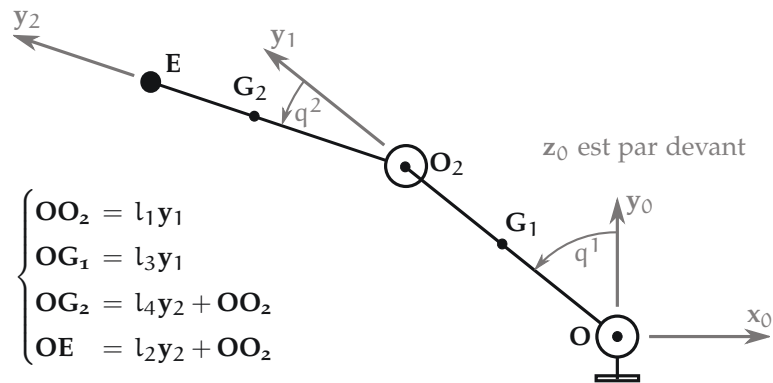


FIGURE 57: Schéma du robot à 2 DDL

12.3.1 *Modèle dynamique du robot à 2 DDL*

Nous avons choisi comme paramètres de configurations l'angle q^1 entre la verticale par rapport au support et le premier segment du robot, et l'angle q^2 entre les axes longitudinaux des premier et second segments du robot. G_1 est le centre d'inertie du premier segment et m_1 sa masse. G_2 est le centre d'inertie du deuxième segment et m_2 sa masse. E est l'effecteur du robot.

Le double de l'énergie cinétique du premier segment est la somme

$$2K_1 = \mathcal{J}_1 (\dot{q}^1)^2 + m_1 l_3^2 (\dot{q}^1)^2$$

où \mathcal{J}_1 est le moment d'inertie du premier segment par rapport à l'axe passant par G_1 et dirigé suivant z_1 . Nous poserons $\mathcal{J}_1 = (\mathcal{J}_1 + m_1 l_3^2)$. Ainsi :

$$2K_1 = \mathcal{J}_1 (\dot{q}^1)^2. \quad (70)$$

Le double de l'énergie cinétique du deuxième segment est la somme

$$2K_2 = \mathcal{J}_2 (\dot{q}^1 + \dot{q}^2)^2 + m_2 \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{OG}_2 \right\|^2$$

où \mathcal{J}_2 est le moment d'inertie du deuxième segment par rapport à l'axe passant par G_2 et dirigé suivant z_2 . La vitesse $\frac{d}{dt} \mathbf{OG}_2$ du centre d'inertie G_2 du deuxième segment est :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{OG}_2 = - (l_1 \dot{q}^1 \cos q^2 + (\dot{q}^1 + \dot{q}^2) l_4) \mathbf{x}_2 + (l_1 \dot{q}^1 \sin q^2) \mathbf{y}_2.$$

Le carré de la norme de cette vitesse se développe en

$$\left\| \frac{d}{dt} \mathbf{OG}_2 \right\|^2 = (l_1^2 + l_4^2 + 2l_1 l_4 \cos q^2) (\dot{q}^1)^2 + 2(l_4^2 + l_1 l_4 \cos q^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 + l_4^2 (\dot{q}^2)^2.$$

Le double de l'énergie cinétique du deuxième segment est donc

$$2K_2 = (\mathcal{J}_2 + m_2 (l_1^2 + l_4^2 + 2l_1 l_4 \cos q^2)) (\dot{q}^1)^2 + 2(\mathcal{J}_2 + m_2 (l_4^2 + l_1 l_4 \cos q^2)) \dot{q}^1 \dot{q}^2 + (\mathcal{J}_2 + m_2 l_4^2) (\dot{q}^2)^2,$$

Si nous introduisons les moments d'inertie

$$\begin{cases} \mathcal{J}_2 &= \mathcal{J}_2 + m_2 l_4^2 \\ \mathcal{J}_3 &= m_2 l_1^2 \\ \mathcal{J}_4 &= m_2 l_1 l_4, \end{cases}$$

nous obtenons la forme simplifiée

$$2K_2 = (\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + 2\mathcal{J}_4 \cos q^2) (\dot{q}^1)^2 + 2(\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 \cos q^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 + \mathcal{J}_2 (\dot{q}^2)^2 \quad (71)$$

Le double de l'énergie cinétique totale du robot est obtenue par la somme des expressions (70) et (71)

$$\begin{aligned} 2K &= 2(K_1 + K_2) \\ &= (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3 + 2\mathcal{J}_4 \cos q^2) (\dot{q}^1)^2 + 2(\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 \cos q^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 + \mathcal{J}_2 (\dot{q}^2)^2. \end{aligned}$$

En introduisant le moment d'inertie $\mathcal{J}_5 = \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3$, nous obtenons la forme plus compacte

$$2K_t = (\mathcal{J}_5 + 2\mathcal{J}_4 \cos q^2) (\dot{q}^1)^2 + 2(\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 \cos q^2) \dot{q}^1 \dot{q}^2 + \mathcal{J}_2 (\dot{q}^2)^2. \quad (72)$$

L'identification de l'énergie cinétique 72 avec la forme générale (12) du 8.1.1, détermine les coefficients du tenseur des masses :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{11}(q^2) &= \mathcal{J}_5 + 2\mathcal{J}_4 \cos q^2 \\ \mathbf{M}_{12}(q^2) &= \mathbf{M}_{21}(q^2) = \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 \cos q^2 \\ \mathbf{M}_{22} &= \mathcal{J}_2. \end{cases}$$

Ces coefficients dépendent du deuxième paramètre de configuration. Le déterminant de la matrice des masses

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_5 + 2\mathcal{J}_4 \cos q^2 & \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 \cos q^2 \\ \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_4 \cos q^2 & \mathcal{J}_2 \end{bmatrix}$$

est la fonction positive

$$f(q^2) = \mathcal{J}_2(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_3) - \mathcal{J}_4^2 \cos^2 q^2.$$

12.3.2 Symboles de Christoffel

Les Symboles de Christoffel de première espèce mettent en jeu les dérivées partielles des coefficients du tenseur des masses par rapport aux paramètres de configuration q^1 et q^2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{M}_{11}}{\partial q^1} = \frac{\partial \mathbf{M}_{12}}{\partial q^1} = \frac{\partial \mathbf{M}_{22}}{\partial q^1} = \frac{\partial \mathbf{M}_{22}}{\partial q^2} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{11}}{\partial q^2} = -2\mathcal{J}_4 \sin q^2 \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{12}}{\partial q^2} = \frac{\partial \mathbf{M}_{21}}{\partial q^2} = -\mathcal{J}_4 \sin q^2. \end{cases}$$

L'application de la formule (15) du 8.2.1 conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{111} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cancel{M_{11}}}{\partial q^1} + \frac{\partial \cancel{M_{11}}}{\partial q^1} - \frac{\partial \cancel{M_{11}}}{\partial q^1} \right) = 0 \\ \Gamma_{112} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cancel{M_{12}}}{\partial q^1} + \frac{\partial M_{11}}{\partial q^2} - \frac{\partial \cancel{M_{12}}}{\partial q^1} \right) = -J_4 \sin q^2 \\ \Gamma_{121} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{11}}{\partial q^2} + \frac{\partial \cancel{M_{12}}}{\partial q^1} - \frac{\partial \cancel{M_{21}}}{\partial q^1} \right) = -J_4 \sin q^2 = \Gamma_{112} \\ \Gamma_{122} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cancel{M_{12}}}{\partial q^2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial q^2} - \frac{\partial \cancel{M_{22}}}{\partial q^1} \right) = -J_4 \sin q^2 = \Gamma_{112} \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{211} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cancel{M_{21}}}{\partial q^1} + \frac{\partial \cancel{M_{21}}}{\partial q^1} - \frac{\partial M_{11}}{\partial q^2} \right) = J_4 \sin q^2 = -\Gamma_{112} \\ \Gamma_{212} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cancel{M_{22}}}{\partial q^1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial q^2} - \frac{\partial \cancel{M_{12}}}{\partial q^2} \right) = 0 \\ \Gamma_{221} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial q^2} + \frac{\partial \cancel{M_{22}}}{\partial q^1} - \frac{\partial \cancel{M_{21}}}{\partial q^2} \right) = 0 \\ \Gamma_{222} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \cancel{M_{22}}}{\partial q^2} + \frac{\partial \cancel{M_{22}}}{\partial q^2} - \frac{\partial \cancel{M_{22}}}{\partial q^2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

L'inverse de la matrice des masses est

$$\frac{1}{f(q^2)} \begin{bmatrix} J_2 & -J_2 - J_4 \cos q^2 \\ -J_2 - J_4 \cos q^2 & J_5 + 2J_4 \cos q^2 \end{bmatrix}.$$

La définition des symboles de Christoffel de deuxième espèce $\Gamma_{jk}^i = \mathbf{M}^{il} \Gamma_{ljk}$ (formule (16) du 8.2.1) conduit à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^1 = \mathbf{M}^{11} \Gamma_{111} + \mathbf{M}^{12} \Gamma_{211} = -\frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} (J_2 + J_4 \cos q^2) \\ \Gamma_{12}^1 = \mathbf{M}^{11} \Gamma_{112} + \mathbf{M}^{12} \Gamma_{212} = -\frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} J_2 \\ \Gamma_{21}^1 = \mathbf{M}^{11} \Gamma_{121} + \mathbf{M}^{12} \Gamma_{221} = -\frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} J_2 \\ \Gamma_{22}^1 = \mathbf{M}^{11} \Gamma_{122} + \mathbf{M}^{12} \Gamma_{222} = -\frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} J_2 \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{11}^2 = \mathbf{M}^{21} \Gamma_{111} + \mathbf{M}^{22} \Gamma_{211} = \frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} (J_5 + 2J_4 \cos q^2) \\ \Gamma_{12}^2 = \mathbf{M}^{21} \Gamma_{112} + \mathbf{M}^{22} \Gamma_{212} = \frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} (J_2 + J_4 \cos q^2) \\ \Gamma_{21}^2 = \mathbf{M}^{21} \Gamma_{121} + \mathbf{M}^{22} \Gamma_{221} = \frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} (J_2 + J_4 \cos q^2) \\ \Gamma_{22}^2 = \mathbf{M}^{21} \Gamma_{122} + \mathbf{M}^{22} \Gamma_{222} = \frac{J_4 \sin q^2}{f(q^2)} (J_2 + J_4 \cos q^2) \end{array} \right.$$

12.3.3 Potentiel de gravitation

Le potentiel de gravitation du système total

$$V = m_1 g l_3 \cos q^1 + m_2 g \left(l_4 \cos (q^1 + q^2) + l_1 \cos q^1 \right)$$

est la somme du potentiel de gravitation du premier segment : $m_1 g l_3 \cos q^1$ et du potentiel de gravitation du deuxième segment : $m_2 g (l_4 \cos (q^1 + q^2) + l_1 \cos q^1)$. Ses dérivées partielles par rapport aux deux paramètres de configuration q^1 et q^2 sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q^1} = -m_1 g l_3 \sin q^1 - m_2 g (l_4 \sin (q^1 + q^2) + l_1 \sin q^1) \\ \frac{\partial V}{\partial q^2} = -m_2 g l_4 \sin (q^1 + q^2) \end{cases}$$

12.3.4 Équations covariantes du mouvement du robot à 2 DDL

Les équations covariantes du mouvement du robot (17) sont :

$$\begin{cases} \left(J_5 + 2J_4 \cos q^2 \right) \ddot{q}^1 + \left(J_2 + J_4 \cos q^2 \right) \ddot{q}^2 - J_4 \sin q^2 \left(2\dot{q}^1 \dot{q}^2 + \dot{q}^2{}^2 \right) \\ - g \left(m_1 l_3 \sin q^1 + m_2 \left(l_4 \sin (q^1 + q^2) + l_1 \sin q^1 \right) \right) = u_1 \\ \left(J_2 + J_4 \cos q^2 \right) \ddot{q}^1 + J_2 \ddot{q}^2 + J_4 \sin q^2 \dot{q}^1{}^2 - m_2 g l_4 \sin (q^1 + q^2) = u_2 \end{cases} \quad (73)$$

12.3.5 Comparaison de notre modèle dynamique avec celui d'un code de calcul commercial

Nous avons introduit des trajectoires décrites par des polynômes de degré sept définis sur l'intervalle $[0, T]$ entier. En les remportant dans (73), nous en déduisons les commandes u_i (non optimales) correspondantes. Nous implémentons également ces trajectoires dans SOLIDWORKS® Motion. Nous comparons les commandes calculées par ce module de simulation aux nôtres. Le modèle Conception Assistée par Ordinateur (CAO) 3D du robot KUKA LBR 4+ est utilisé en actionnant seulement deux de ses articulations dans nos simulations. Nous n'avons pas utilisé les paramètres inertiels réels du KUKA LBR 4+, mais ceux fournis par SOLIDWORKS® (voir TABLE 12).

Au cours de la trajectoire testée, dont la durée totale était de 1 seconde :

- la première articulation passe de -20° à 50° ;
- la deuxième articulation passe de 0° à 30° ;
- les positions articulaires ont été échantillonnées à 10ms ;

La FIGURE 58 illustre les positions initiales et finales du robot lors du test. La FIGURE 59 montre l'évolution des paramètres articulaires lors la trajectoire *test*.

La FIGURE 60 montre les commandes u_i nécessitées par le robot pour effectuer la trajectoire imposée. Cette figure affiche aussi les commandes déterminées par SOLIDWORKS® Motion et les commandes calculées par notre modèle dynamique.

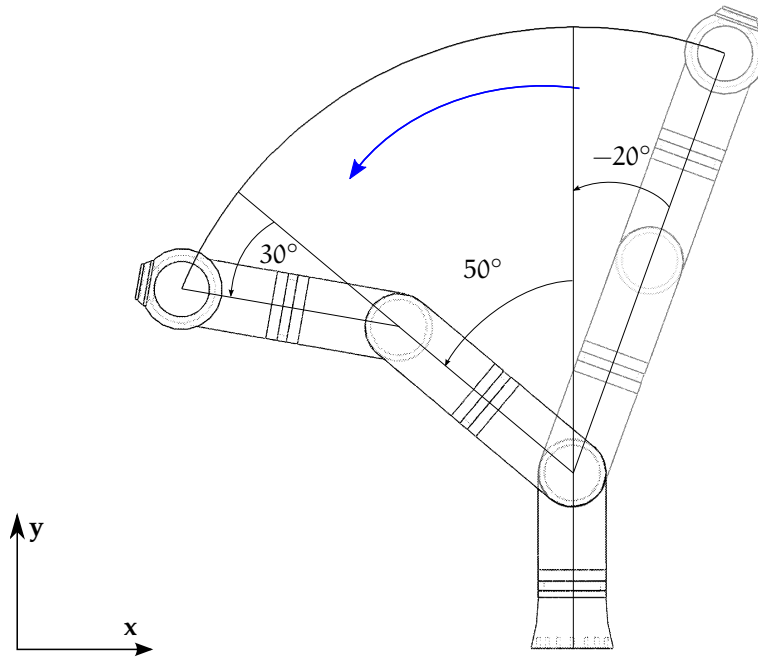


FIGURE 58: Positions initiales et finales de la trajectoire « test » du KUKA LBR 4+. Les angles sont mesurés algébriquement dans le sens trigonométrique à partir de y qui est vertical ascendant.

TABLE 12: Paramètres inertiels du robot KUKA LBR 4+ fournis par le modèle CAO de SolidWorks®

	PREMIER SEGMENT	DEUXIÈME SEGMENT
MASSE (KG)	4,4839	3,8177
COORDONNÉES DU CENTRE DE MASSE* (x ; y) (m)	(0; 0,1940)	(0; 0,1613)
MOMENT D'INERTIE** (kg · m ²)	0,0913	0,0615

* Exprimées dans le repère du solide, par rapport à l'articulation proximale.

** Autour de l'axe de rotation, exprimé au centre d'inertie du solide, dans son repère.

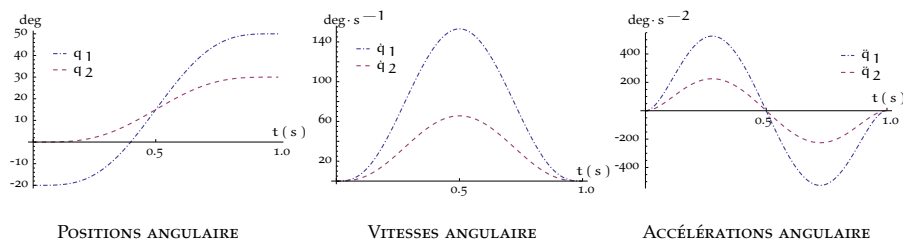


FIGURE 59: Paramètres angulaires de la trajectoire « test ».

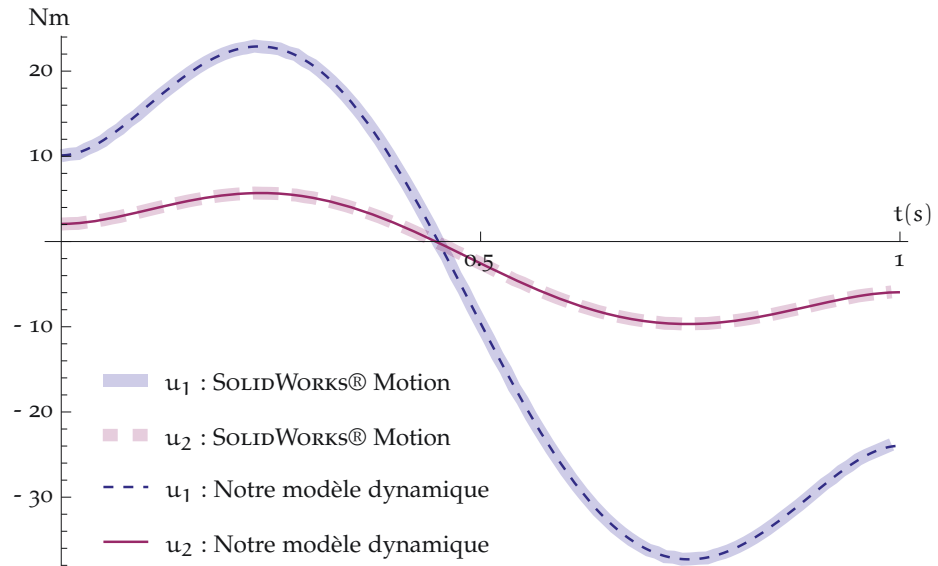


FIGURE 60: Comparaison des deux modèles dynamiques

Nos couples coïncident avec les couples déterminés par SOLIDWORKS® Motion. Ceci permet de conclure à la fiabilité de notre modèle dynamique. L'optimisation des commandes de ce robot sera abordée dans la section suivante.

12.3.6 Commande optimale par la méthode de perturbation

Tel qu'elle a été prescrite dans la section 11.1.3, la méthode de perturbation 10.2 couple les équations du mouvement covariantes perturbées (39) et les équations de la commande perturbées (40). L'algorithme 10.3.2 a été adapté pour tenir compte des équations de la commande.

Une simulation de mouvement du robot KUKA LBR 4+ a été réalisée. Les conditions initiales étaient :

$$\begin{cases} q^1(0) = a_0^1 = -20^\circ \\ \dot{q}^1(0) = b_0^1 = 0^{\circ.s^{-1}} \\ q^2(0) = a_0^2 = -10^\circ \\ \dot{q}^2(0) = b_0^2 = 0^{\circ.s^{-1}} \end{cases}$$

et les conditions finales :

$$\begin{cases} q^1(T) = a_N^1 = 25^\circ \\ \dot{q}^1(T) = b_N^1 = 0^{\circ.s^{-1}} \\ q^2(T) = a_N^2 = 20^\circ \\ \dot{q}^2(T) = b_N^2 = 0^{\circ.s^{-1}} \end{cases}.$$

La durée de la trajectoire était fixée à $T = 1s$.

À l'étape A. de l'algorithme 10.3.2 nous avons linéarisé les équations du mouvement et de la commande en remplaçant $\sin q^i$ par q^i et $\cos q^i$ par 1.

$N = 50$ points d'interpolation ont été utilisés pour interpoler les solutions $q_1^1(t)$ et $q_1^2(t)$.

À l'étape B. de l'algorithme 10.3.2, les équations du mouvement et de la commande perturbées ont été traitées avec $N = 15$ points d'interpolation.

12.3.7 Résultats de la commande optimale du robot à 2 DDL

À l'étape D. de l'algorithme 10.3.2, nous avons évalué l'écart relatif

$$\eta_{rs} = \frac{\|q_r^i(t) - q_{r-1}^i(t)\|_s}{\|q_{r-1}^i(t)\|_s}$$

entre la solution approchée $q_r^i(t)$ du pas courant et la solution approchée $q_{r-1}^i(t)$ du pas précédent. Les itérations sont indexées par r et l'indice s est le degré des EFH utilisé pour l'interpolation (3, 5 ou 7). Les normes $\|\cdot\|_s$ sont définies de la même manière que les normes $\|e\|_s$ de la section 9.5. Nous avons choisi d'arrêter l'algorithme 10.3.2 lorsque l'écart relatif η_{rs} est très petit. Le test d'arrêt se résume ainsi :

$$\text{si } \eta_{rs} \leq 10^{-4} \text{ alors arrêt.}$$

En choisissant le test d'arrêt ci-dessus, l'algorithme 10.3.2 a convergé en 3 itérations aussi bien pour les EFCH, que pour les EFQH et les EFHH. Ce sont donc les solutions $(q_3^1(t), u_3^1(t))$ et $(q_3^2(t), u_3^2(t))$ qui ont été retenues. La FIGURE 61 montre les profils des positions angulaires au cours du temps $(q_3^1(t), q_3^2(t))$. Y sont représentées également les solutions $(q_1^1(t), q_1^2(t))$ de la première itération de l'algorithme 10.3.2.

La FIGURE 62 montre les profils des commandes simulées.

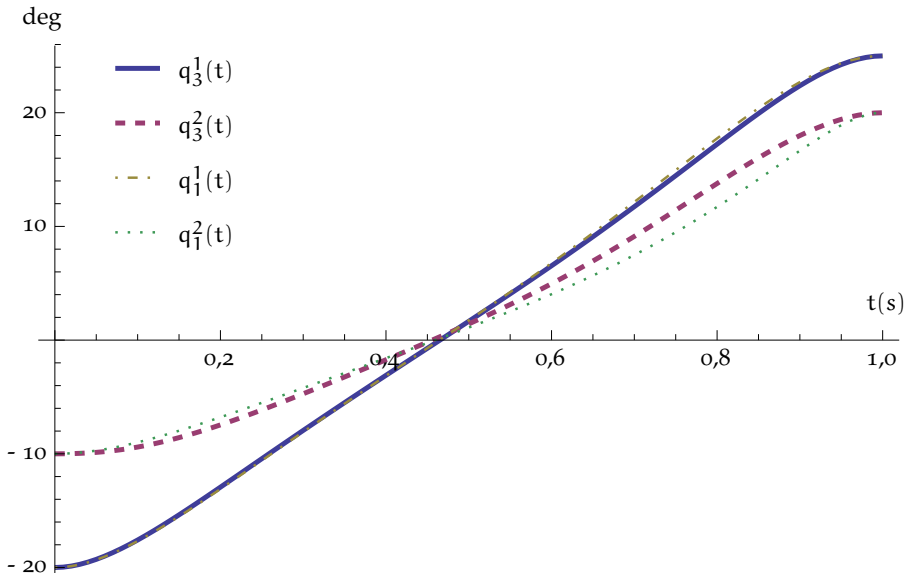


FIGURE 61: Trajectoires angulaires optimales : $q_3^1(t)$ et $q_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $q_1^1(t)$ et $q_1^2(t)$

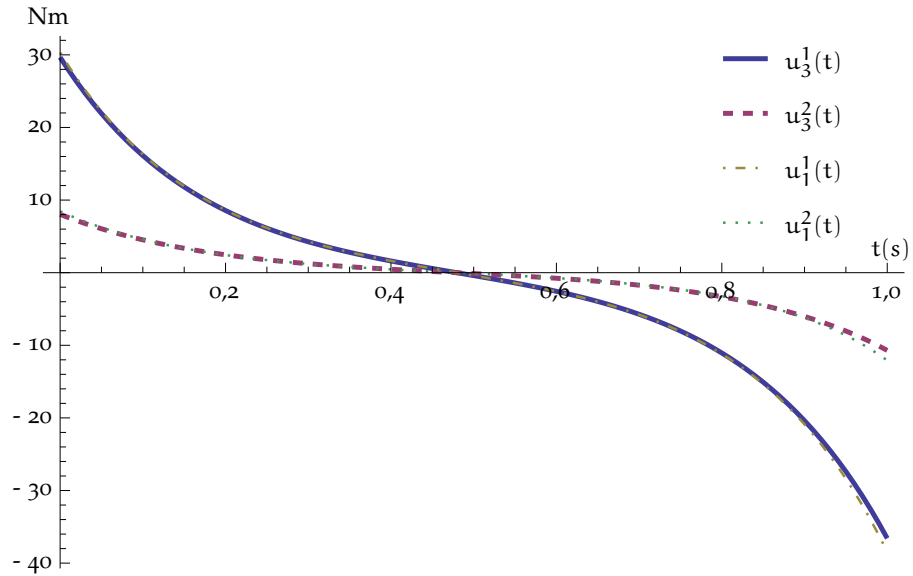


FIGURE 62: Commandes optimales : $u_3^1(t)$ et $u_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $u_1^1(t)$ et $u_1^2(t)$

Ce mouvement simulé est schématisé dans sa globalité sur la FIGURE 63. Cinq étapes de la trajectoire sont affichées. Le trait rouge représente la trajectoire suivie par l'effecteur du robot.

Les profils des vitesses et les accélérations angulaires sont représentés sur les FIGURES 64 et 65.

Les dérivées premières et secondes temporelles des commandes ont été calculées grâce à l'équation de la commande (voir 11.3). Leurs profils au cours de la trajectoire sont montrés sur les FIGURES 66 et 67.

En poussant les itérations jusqu'à $r = 4$, nous avons constaté que l'écart relatif η_{4s} était en 10^{-6} pour les EFCH, en 10^{-9} pour les EFQH et en 10^{-16} pour les EFHH.

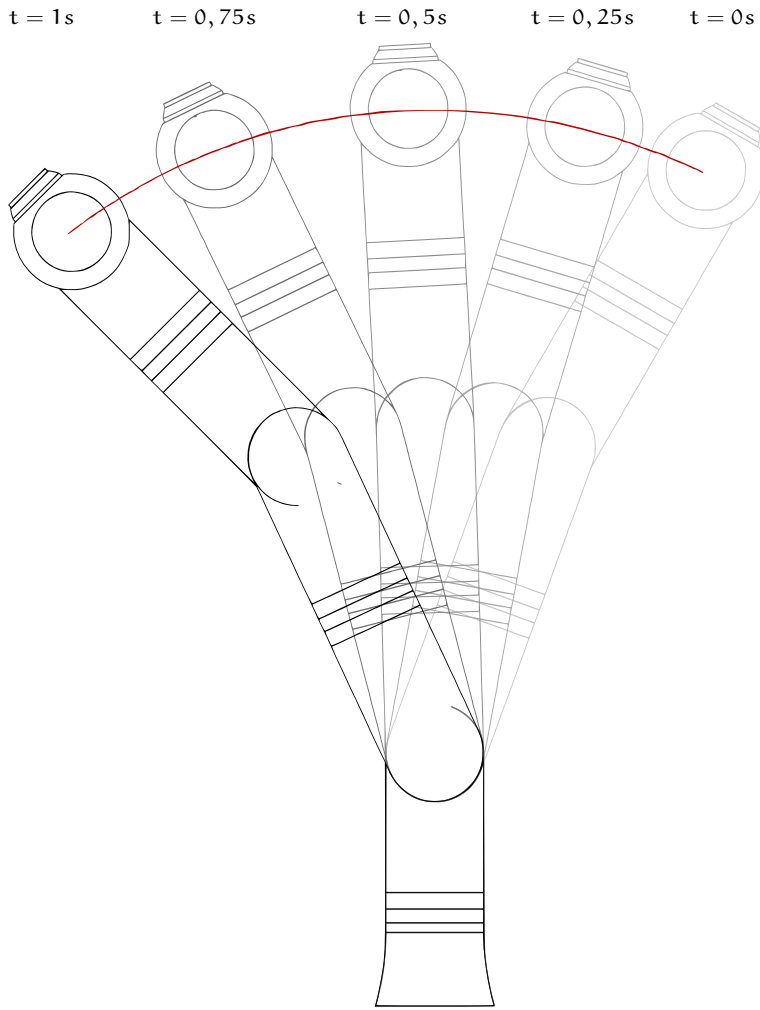


FIGURE 63: Simulation du mouvement optimal

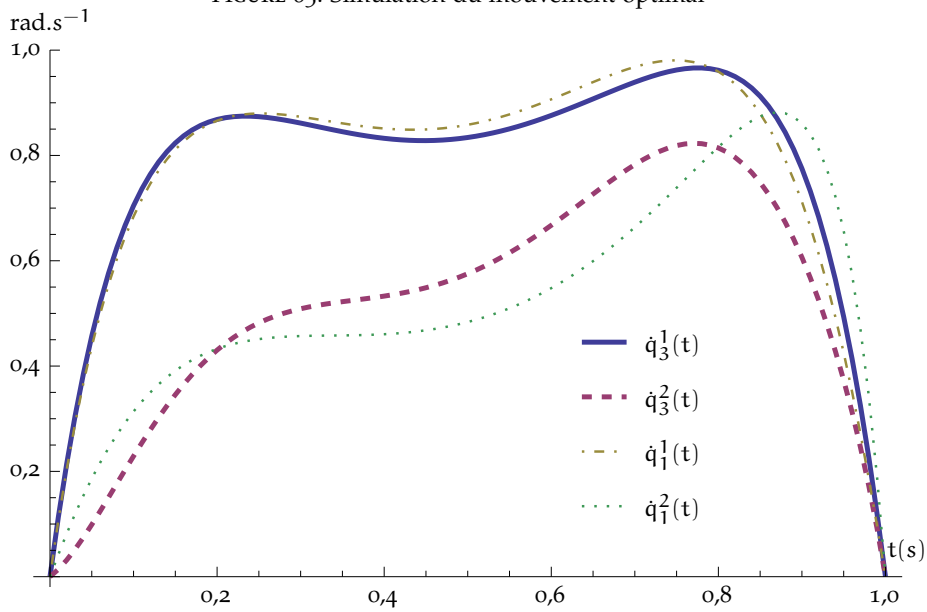


FIGURE 64: Vitesses articulaires optimales : $\dot{q}_3^1(t)$ et $\dot{q}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\dot{q}_1^1(t)$ et $\dot{q}_1^2(t)$

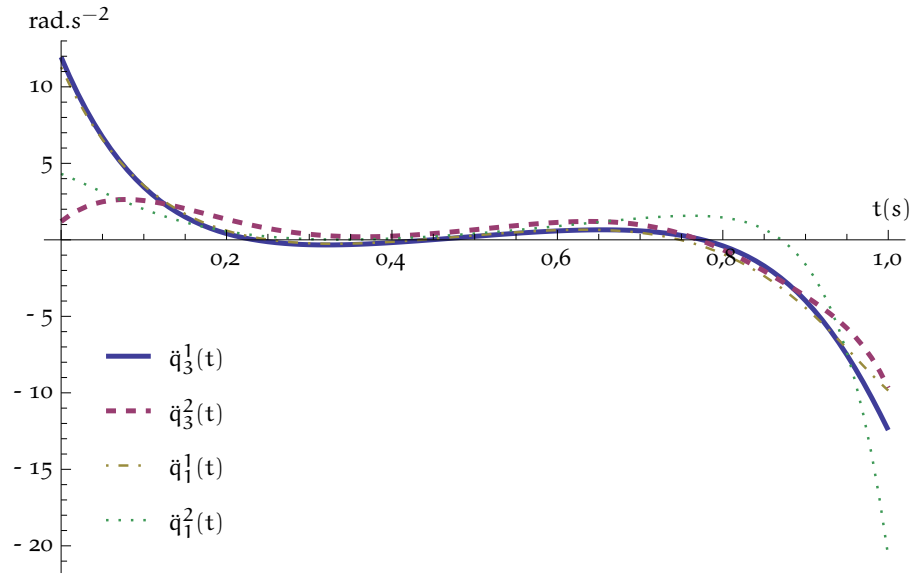


FIGURE 65: Accélérations articulaires optimales : $\ddot{q}_3^1(t)$ et $\ddot{q}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\ddot{q}_1^1(t)$ et $\ddot{q}_1^2(t)$

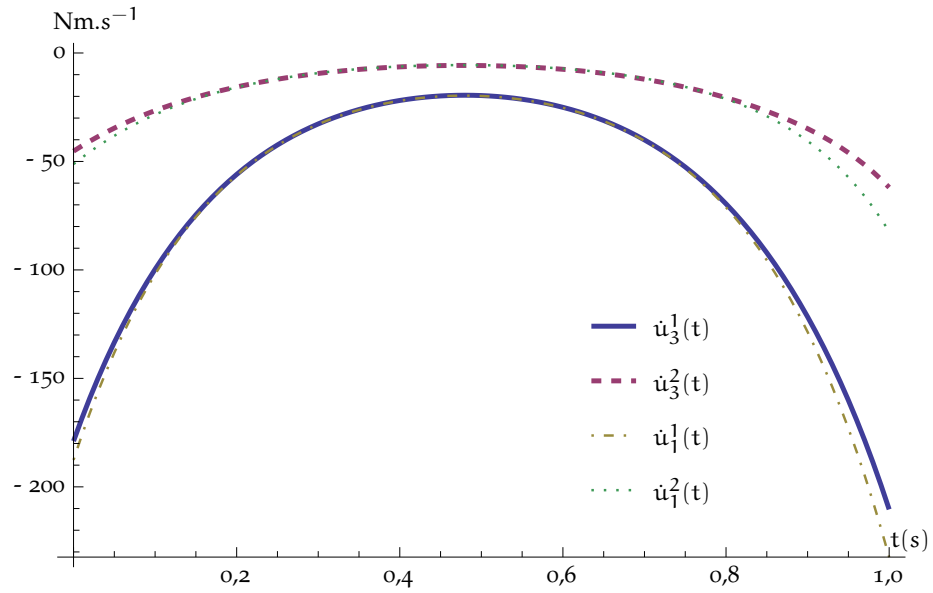


FIGURE 66: Dérivées premières temporelles des commandes optimales : $\dot{u}_3^1(t)$ et $\dot{u}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\dot{u}_1^1(t)$ et $\dot{u}_1^2(t)$

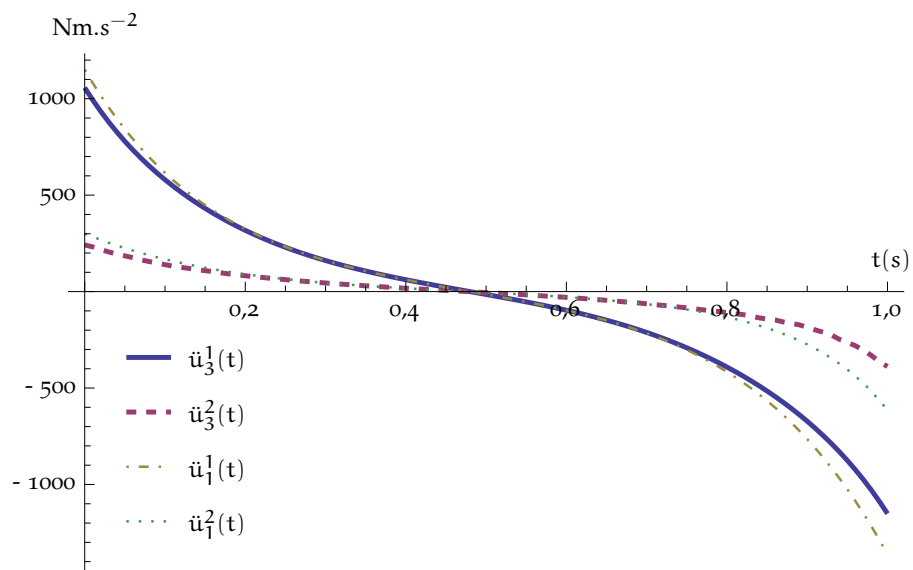


FIGURE 67: Dérivées secondes temporelles des commandes optimales : $\ddot{u}_3^1(t)$ et $\ddot{u}_3^2(t)$. Solutions optimales du problème linéarisé : $\ddot{u}_1^1(t)$ et $\ddot{u}_1^2(t)$

Nous avons établi un modèle dynamique de robots dans le cadre de la mécanique analytique de Lagrange. Les mêmes exigences géométriques qu'en relativité générale [52] ont été respectées. Une formulation tensorielle a donc été favorisée.

La méthode des EFH a été privilégiée pour interpoler les trajectoires et les commandes des robots. Elle s'est révélée efficace : des exemples de simulation de trajectoires ont mis en évidence la superconvergence de la méthode d'Hermite. Les EFH apparaissent donc très adaptés pour générer des mouvements rapides de robots évoluant dans un environnement instable.

L'emploi de cette technique permet l'obtention directe des valeurs des paramètres de configuration et des commandes aux nœuds d'interpolation. Nul n'est besoin de procéder à une reconstruction en fin d'algorithme. Les conditions finales sont prises en compte aussi bien que les conditions initiales. Ceci évite de faire appel à une méthode de tir. Les valeurs des positions, des vitesses, des accélérations et des secousses, sont proposées avec trois degrés de finesse : les EFCH, les EFQH et les EFHH.

Afin de tester la méthode d'Hermite, nous avons simulé le mouvement d'un pendule non-linéaire à partir de ses conditions initiales. Une méthode de perturbation inspirée de Lagrange a été implémentée. La discrétisation temporelle de cet exemple a été réalisée par les EFCH. La période de la solution approchée correspond avec l'intégrale elliptique incomplète de première espèce de Legendre à 10^{-7} secondes près. L'erreur relative entre cette solution et la solution classique exprimée à l'aide des fonctions elliptiques de Jacobi est en 10^{-6} . Ces résultats montrent la précision de notre algorithme.

Nous avons élaboré un algorithme de commande optimale basé sur une fonction coût invariante. Il a été développé dans le cadre du calcul des variations de Lagrange. L'équation d'Euler-Lagrange correspondant à la minimisation de la fonction objectif conduit à des équations covariantes que nous avons choisi d'appeler « *équations de la commande* ». En étudiant les propriétés de ces équations, nous avons découvert qu'elles mettaient en jeu le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel ainsi que la dérivée seconde covariante du potentiel de gravitation.

Les équations du mouvement et de la commande sont couplées. Ceci procure un système de $2n$ EDO du second ordre régissant les positions et les commandes (n étant le nombre de DDL du robot). Notre algorithme de commande optimale est une alternative à l'application du PMP. Ce dernier gouverne les variables d'état et les variables conjuguées par $4n$ EDO du premier ordre. Alors que les variables conjuguées de Pontriaguine ne s'interprètent pas mécaniquement, dans notre alternative les variables conjuguées des positions sont les commandes.

Le premier algorithme de contrôle optimal que nous avons proposé fait appel à la méthode de perturbation. Par cette méthode, inspirée de Lagrange, nous perturbons le système couplé composé des équations du mouvement et de la commande. Le deuxième algorithme de contrôle optimal

proposé optimise directement la fonction objectif à l'aide d'une technique de descente rapide.

Ces deux algorithmes ont été validés par simulation numérique des trajectoires et des commandes de trois systèmes mécaniques. Le premier système mécanique simulé exploite la méthode d'optimisation directe. Il s'agit d'un pendule linéaire. Les trois degrés de finesse de la technique d'Hermite ont été implémentés pour traiter cet exemple. Les résultats confirment la superconvergence de la méthode des EFH. Le deuxième système mécanique simulé exploite également la méthode d'optimisation directe. Il s'agit d'un système couplé linéaire à 2 DDL. Les résultats observés avec le pendule linéaire sont confirmés. Nous avons choisi une norme adaptée à nos interpolations d'Hermite pour estimer l'erreur relative entre la solution approchée et la solution de référence. Le troisième système mécanique simulé est un robot à 7 DDL dont seuls 2 DDL sont actionnés. La simulation des trajectoires et des commandes a été réalisée par la méthode de perturbation.

En première perspective de ce travail, nous souhaitons modifier nos algorithmes pour effectuer la commande optimale des robots en temps final libre. La méthode des EFH temporels paraît encore appropriée pour ce travail.

Ensuite, nous souhaitons exploiter nos algorithmes dans un environnement évolutif. Par exemple, saisir un objet au vol avec une main mécanique portée par un bras manipulateur. Pour ce faire nos algorithmes devront être programmés dans un langage assembleur et implémentés au sein d'un contrôleur. Nous espérons élaborer des algorithmes exécutables en temps réel.

Enfin, notre algorithme d'optimisation directe ne tient pas compte des contraintes auxquelles les couples sont assujettis. C'est pourquoi des contraintes inégalités devront être intégrées à cet algorithme. Nous envisageons d'y remplacer la méthode de descente du gradient par la méthode du gradient projeté.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Allaire. *Analyse numérique et optimisation*. Édition de l'École Polytechnique, Palaiseau, France, 2009.
- [2] A. Aydinlioglu, F. Akpınar, and N. Tosun. Mathematical relations between the lengths of the metacarpal bones and phalanges : surgical significance. *Tohoku Journal of Experimental Medicine*, 185(3) :209–16, 1998.
- [3] B. Barkat. *Contribution à l'optimisation des configurations de prise et de la fonction préhension en robotique, application à un préhenseur tridigital configurable modulaire*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Décembre 1994.
- [4] A. Beléndez, C. Pascual, D. I. Méndez, T. Beléndez, and C. Neipp. Exact solution for the nonlinear pendulum. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 29(4) :645–648, 2007.
- [5] R. E. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press., Princeton, NJ, 1957.
- [6] D. Berenson and S. Srinivasa. Grasp synthesis in cluttered environments for dexterous hands. In *Humanoids*, pages 189–196. IEEE, 2008.
- [7] M. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires, Cours et exercices corrigés*. Collection Sciences Sup. Dunod., Paris, France, 2001.
- [8] L. Bianchi. *Lezioni di geometria differenziale*. Spoerri, Pisa, Italie, 1902.
- [9] A. Bicchi. Hands for dexterous manipulation and robust grasping : a difficult road toward simplicity. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 16(6) :652–662, 2000.
- [10] A. Bicchi and V. Kumar. Robotic grasping and contact : a review. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, pages 348–353. IEEE, 2000.
- [11] P. Bidaud. *Préhenseur manipulateur à mouvements fins*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Novembre 1984.
- [12] M. Buss and H. Hashimoto. Manipulation skill modeling for dexterous hands. In *ICRA*, pages 3403–3408. IEEE Computer Society, 1994.
- [13] B. G. Campbell. *Humankind Emerging*. Scott Foresmann and Company, 1988.
- [14] E. Carrera and M. A. Serna. Inverse dynamics of flexible robots. *Mathematics and Computers in Simulation*, 41(5–6) :485–508, 1996.
- [15] P. Cesari and K.M. Newell. The scaling of human grip configurations. *Journal of Experimental Psychology : Human Perception and Performance*, 25(4) :927–35, 1999.
- [16] E. Y. Chao. *Biomechanics of the Hand : A Basic Research Study*. World Scientific, 1989.

- [17] C. Chenebault. *Développement d'un préhenseur doté de capteurs tactiles d'efforts et d'un porteur six axes pour la réalisation robotisée d'assemblages de haute précision*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Mars 1987.
- [18] T. Coleman, M. A. Branch, and A. Grace. *Optimization Toolbox, For Use with MATLAB®*. The MathWorks, Inc., Natick, MA, 1999.
- [19] M. R. Cutkosky. On grasp choice, grasp models, and the design of hands for manufacturing tasks. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(3) :269–279, June 1989.
- [20] M. R. Cutkosky and R. D. Howe. Dextrous robot hands. In S. T. Venkataraman and T. Iberall, editors, *Human grasp choice and robotic grasp analysis*, chapter Human grasp choice and robotic grasp analysis, pages 5–31. Springer-Verlag, New York, NY, 1990.
- [21] N. Daoud. *Contribution à la manipulation dextre et à la synthèse de prise en vue de la commande de mains mécaniques*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Octobre 2011.
- [22] N. Daoud, J. P. Gazeau, S. Zeghloul, and M. Arsicault. A fast grasp synthesis method for online manipulation. *Robotics and Autonomous Systems*, 59(6) :421–427, Juin 2011.
- [23] N. Daoud, J. P. Gazeau, S. Zeghloul, and M. Arsicault. A real-time strategy for dexterous manipulation : fingertips motion planning, force sensing and grasp stability. *Robotics and Autonomous Systems*, 60(3) : 377–386, Mars 2012.
- [24] J. Denavit and R. S. Hartenberg. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Trans. ASME E, Journal of Applied Mechanics*, 22 :215–221, June 1955.
- [25] M. Denis-Papin and A. Kaufmann. *Cours de Calcul Tensoriel Appliqué*. Albin Michel, 1961.
- [26] M. Diehl, H. G. Bock, H. Diedam, and P.-B. Wieber. *Fast Direct Multiple Shooting Algorithms for Optimal Robot Control, Chapitre dans : Fast Motions in Biomechanics and Robotics*. Springer-Verlag, 2006.
- [27] C. Duriez. Control of elastic soft robots based on real-time finite element method. In *Proceedings of ICRA 2013, Karlsruhe, Allemagne, 2013*.
- [28] A. Eriksson. Temporal finite elements for target control dynamics of mechanisms. *Computers & Structures*, 85(17–18) :1399–1408, 2007.
- [29] A. Eriksson and A. Nordmark. Temporal finite element formulation of optimal control in mechanisms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(25–28) :1783–1792, 2010.
- [30] M. Fanni and A. El-Keran. Theoretical and experimental investigation of integrated structure/control design of high speed flexible robot arm. In Mohamed F. Hassan and Said M. Megahed, editors, *Current Advances in Mechanical Design and Production VII*, pages 45–56. Pergamon, Oxford, 2000.
- [31] A. Fernandez, J. Gazeau, S. Zeghloul, and S. Lahouar. Regrasping objects during manipulation tasks by combining genetic algorithms and finger gaiting. *Meccanica*, pages 1–12, November 2011.

- [32] J. N. Gaborieau. *Calcul des efforts dans une prise par empaument pour des conditions anthropomorphes ; domaine de charge optimale en vue de la planification de mouvements de rotation de la main*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Janvier 1996.
- [33] R. Gamkrelidze. Discovery of the maximum principle. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 5(4) :437–451, October 1999.
- [34] R. Gamkrelidze. Hamiltonian form of the maximum principle. *Control and Cybernetics*, 38(4A) :959–971, 2009.
- [35] S. Garrido, L. Moreno, D. Blanco, and F. Martín Monar. Robotic motion using harmonic functions and finite elements. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 59(1) :57–73, 2010.
- [36] M. Gautier and W. Khalil. Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots. *The International Journal of Robotics Research*, 11(4) :362–375, 1992.
- [37] R. D. Hester, M. Çetin, C. Kapoor, and D. Tesar. A criteria-based approach to grasp synthesis. In *ICRA*, pages 1255–1260. IEEE Robotics and Automation Society, 1999.
- [38] S. Jacobsen, E. Iversen, D. Knutti, R. Johnson, and K. Biggers. Design of the utah/mit dextrous hand. In *1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, volume 3, pages 1520–1532, 1986.
- [39] P. Joly. Présentation de synthèse des méthodes de gradient conjugué. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 20(4) :639–665, 1992.
- [40] A. I. Kapandji. *The Physiology of the Joints, Volume I : The Upper Limb*. Churchill Livingstone, 6th edition, 2007.
- [41] W. Khalil and J. F. Kleinfinger. A new geometric notation for open and closed-loop robots. In *International Conference on Robotics and Automation*, 1986.
- [42] M. Kondo, J. Ueda, and T. Ogasawara. Recognition of in-hand manipulation using contact state transition for multifingered robot hand control. *Robotics and Autonomous Systems*, 56(1) :4571–4576, Juillet 2008.
- [43] M. H. Korayem, M. Haghpanahi, H. N. Rahimi, and A. Nikoobin. Finite element method and optimal control theory for path planning of elastic manipulators. In K. Nakamatsu, G. Phillips-Wren, L. C. Jain, and R. Howlett, editors, *New Advances in Intelligent Decision Technologies*, volume 199 of *Studies in Computational Intelligence*, pages 117–126. Springer-Verlag, 2009.
- [44] A. Korzybski. *Science and Sanity : An Introduction to Non-Aristotelian Systems and General Semantics*. International non-Aristotelian library. International Non-Aristotelian Library Publishing Company, The Science Press Printing Company, 1941.
- [45] M. Lazrak and C. Vallée. Commande de robots en temps minimal. *Revue d'Automatique et de Productique Appliquées (RAPA)*, 8(2–3) :217–222, 1995.
- [46] T. Levi-Civita and E. Persico. *Lezioni di calcolo differenziale assoluto : raccolte e compilate*. Alberto Stock Editore, Rome, Italie, 1925.

- [47] J.-W. Li, H. Liu, and H. Cai. On computing three-finger force-closure grasps of 2-d and 3-d objects. *IEEE Transactions on Robotics*, 19(1) :155–161, 2003.
- [48] H. Liu, K. Wu, P. Meusel, N. Seitz, G. Hirzinger, M. H. Jin, Y. Liu, S. Fan, T. Lan, and Z. P. Chen. Multisensory five-finger dexterous hand : The DLR/HIT hand II. In *IROS*, pages 3692–3697. IEEE, 2008.
- [49] D. Lovelock and H. Rund. *Tensor, differential forms, and variational principles*. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1975.
- [50] J. Y. S. Luh, M. W. Walker, and R. P. C. Paul. On-line computational scheme for mechanical manipulators. *Trans. ASME G, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 102 :69–76, 1980.
- [51] G. Marchouk and V. Agochkov. *Introduction aux méthodes des éléments finis*. Editions Mir, Moscou, 1985.
- [52] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman & Co., San Francisco, California, 1973.
- [53] D. Murguet. *Sens tactile des outils de préhension en robotique : développement d'un capteur à mesure d'efforts découplés*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Novembre 1984.
- [54] Y. Nakabo, M. Ishikawa, H. Toyoda, and S. Mizuno. 1ms column parallel vision system and its application of high speed target tracking. In *ICRA*, pages 650–655. IEEE, 2000.
- [55] J.R. Napier and R. Tuttle. *Hands*. Natural science. Princeton University Press, 1993.
- [56] H. S. Nielsen and M. K. Caspersen. Vertical control for a 1dof flexible robot based on a fem model applicable for control-purposes. In *Proceedings of European Control Conference ECC 2001*, 2001.
- [57] A. M. Okamura, N. Smaby, and M. R. Cutkosky. An overview of dexterous manipulation. In *ICRA*, pages 255–262. IEEE, 2000.
- [58] Y. C. Park and G. P. Starr. Finger force computation for manipulation of an object by a multifingered robot hand. *Proceedings of the 1989 International Conference on Robotics and Automation*, pages 930–935, 1989.
- [59] H. Pesch and M. Plail. The maximum principle of optimal control : A history of ingenious ideas and missed opportunities. *Control and Cybernetics*, 38(4A) :973–995, 2009.
- [60] E. Polak. *Computational methods in optimization*. Academic Press, New York, 1971.
- [61] E. Polak and G. Ribière. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Revue Française d'Automatique, d'Informatique et de Recherche Operationnelle (RAIRO), série rouge*, 8(16) :35–43, 1969.
- [62] L.S. Pontryagin, V.G. Boltyanskii, R. V Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh prozessov*. Gosudarstv. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moscou, Russie., 1961.

- [63] G. Ricci-Curbastro and T. Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54(1–2) :125–201, 1900.
- [64] F. Rothling, R. Haschke, J.J. Steil, and H. Ritter. Platform portable anthropomorphic grasping with the bielefeld 20-dof shadow and 9-dof tum hand. In *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS) 2007*, pages 2951–2956, 2007.
- [65] S. Sager. Reformulations and algorithms for the optimization of switching decisions in nonlinear optimal control. *Journal of Process Control*, 19 :1238–1247, 2009.
- [66] G. Schlesinger. *Der Mechanische Aufbau der Kunstlichen Glieder. Ersatzglieder und Arbeitshilfen, part II*. Springer, Berlin, 1919.
- [67] R. Siebert. *Mechanical integrators for the optimal control in multi body dynamics (Dissertation)*. PhD thesis, Universität Siegen, Siegen, Allemagne, 2012.
- [68] R.G. Snyder, University of Michigan. Highway Safety Research Institute, and U.S. Consumer Product Safety Commission. *Anthropometry of infants, children, and youths to age 18 for product safety design : final report May 31, 1977*. UM-HSRI. Consumer Product Safety Commission, 1977.
- [69] M. W. Spong and M. Vidyasagar. *Robot Dynamics and Control*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, 1989.
- [70] G. Strang and G. Fix. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1973.
- [71] T. Sugaiwa, Y. Yamaguchi, H. Iwata, and S. Sugano. Dexterous hand-arm coordinated manipulation using active body-environment contact. In *IROS*, pages 4168–4173. IEEE, 2009.
- [72] C. L. Taylor and R. J. Schwarz. The anatomy and mechanics of the human hand. *Artificial limbs*, 2(2) :22–35, May 1955.
- [73] F. Touvet. *Approche bioinspirée pour le contrôle des mains mécaniques*. These, Université René Descartes - Paris V, October 2012.
- [74] F. Touvet, N. Daoud, J. P. Gazeau, S. Zeghloul, M. A. Maier, and S. Es-kiizmirliker. A biomimetic reach and grasp approach for mechanical hands. *Robotics and Autonomous Systems*, 60(3) :473–486, Mars 2012.
- [75] E. Trélat. *Contrôle Optimal : Théorie & Applications*. Collection Mathématiques Concrètes. Vuibert, Paris, France, 2005.
- [76] S. Ueki, H. Kawasaki, and T. Mouri. Adaptive coordinated control of multi-fingered hands with sliding contact. In *SICE-ICASE, 2006. International Joint Conference*, pages 5893–5898, 2006.
- [77] C. Vallée. Jean-Marie l’ingénieur. *Gazette des Mathématiciens*, 133 :108–109, Juillet 2012.
- [78] G. Wu, F. C. T. van der Helm, H. E. J. Veeger, M. Makhsous, P. V. Roy, C. Anglin, J. Nagels, A. R. Karduna, K. McQuade, X. Wang, F. W. Werner, and B. Buchholz. Isb recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion

- part ii : shoulder, elbow, wrist and hand. *Journal of Biomechanics*, pages 981–992, 2005.
- [79] M. Žefran and F. Bullo. *Lagrangian Dynamics, Chapter in : Robotics and Automation Handbook*. CRC Press, Inc., Boca Raton, FL, 2005.
- [80] S. Zegloul. *Analyse de la préhension. Application à un préhenseur tridigital doté de sens tactile*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Poitiers, France, Octobre 1983.

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons à la conception des mains mécaniques anthropomorphes destinées à manipuler des objets dans un environnement humain. Via l'analyse du mouvement de sujets humains lors d'une tâche de manipulation de référence, nous proposons une méthode pour évaluer la capacité des mains robotiques à manipuler les objets. Nous montrons comment les rapports de couplage angulaires entre les articulations et les limites articulaires, influent sur l'aptitude à manipuler dynamiquement des objets. Nous montrons également l'impact du poignet sur les tâches de manipulation rapides. Nous proposons une stratégie pour calculer les forces de manipulation en bout de doigts et dimensionner les moteurs d'un tel préhenseur. La méthode proposée est dépendante de la tâche visée et s'adapte à tout type de mouvement dès lors qu'il peut être capturé et analysé. Dans une deuxième partie, consacrée aux robots manipulateurs, nous élaborons des algorithmes de commande optimale. En considérant l'énergie cinétique du robot comme une métrique, le modèle dynamique est formulé sous forme tensorielle dans le cadre de la géométrie Riemannienne. La discrétisation temporelle est basée sur les Éléments Finis d'Hermite. Nous intégrons les équations de Lagrange du mouvement par une méthode de perturbation. Des exemples de simulation illustrent la superconvergence de la technique d'Hermite. Le critère de contrôle est choisi indépendant des paramètres de configuration. Les équations de la commande associées aux équations du mouvement se révèlent covariantes. La méthode de commande optimale proposée consiste à minimiser la fonction objective correspondant au critère invariant sélectionné.

MOTS CLÉS Main robotique, manipulation dextre, conception bio-inspirée, dynamique des systèmes multicorps, commande optimale, géométrie riemannienne, tenseur de courbure de Riemann-Christoffel, Éléments Finis d'Hermite, Principe du Maximum de Pontryaguine

ABSTRACT

We focus on the design of anthropomorphous mechanical hands destined to manipulate objects in a human environment. Via the motion analysis of a reference manipulation task performed by human subjects, we propose a method to evaluate a robotic hand manipulation capacities. We demonstrate how the angular coupling between the fingers joints and the angular limits affect the hands potential to manipulate objects. We also show the influence of the wrist motions on the manipulation task. We propose a strategy to calculate the fingertip manipulation forces and dimension the fingers motors. In a second part devoted to articulated robots, we elaborate optimal control algorithms. Regarding the kinetic energy of the robot as a metric, the dynamic model is formulated tensorially in the framework of Riemannian geometry. The time discretization is based on the Hermite Finite Elements. A time integration algorithm is designed by implementing a perturbation method of the Lagrange's motion equations. Simulation examples illustrate the superconvergence of the Hermite's technique. The control criterion is selected to be coordinate free. The control equations associated with the motion equations reveal to be covariant. The suggested control method consists in minimizing the objective function corresponding to the selected invariant criterion.

KEYWORDS Robotic hand, dexterous manipulation, bio-inspired design, multibody dynamics, optimal control, riemannian geometry, Riemann-Christoffel curvature tensor, Hermite Finite Elements, Pontryagin Maximum Principle