THÈSE

pour l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale : **Sciences et Ingénierie pour l'Information S2I**

Secteur de Recherche : **Mathématiques et leurs intersections**

Présentée et soutenue publiquement
par :

Gang LIU

****

Restriction des séries discrètes de SU(2,1) à un sous-groupe exponentiel maximal et à un sous-groupe de Borel

****

Directeur de Thèse : **Pierre TORASSO**

Soutenue le 05 juillet 2011

Devant la Commission d'Examen

<u>JURY</u>

Michel Duflo	Professeur émérite, Université Paris 7	Rapporteur
David Vogan	Professeur, MIT , USA	Rapporteur
Abderrazak Bouaziz	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Pierre Torasso	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Michèle Vergne	Directrice de Recherche émérite, Université Paris 7	Examinateur

Table des matières

1 Introduction

La théorie des représentations et l'analyse harmonique constituent un domaine important des mathématiques, qui est relié à de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique, comme la théorie des nombres, les formes automorphes, la géométrie algébrique et la géométrie différentielle, l'analyse fonctionnelle, la mécanique quantique, etc.

Soit G un groupe de Lie. Du point de vue de la théorie des représentations, deux questions ont suscité l'intérêt de nombreux mathématiciens.

La première concerne la description du dual unitaire $\widehat{G}$ de G, i.e. de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations unitaires irréductibles de G. Il s'agit de paramétrer $\hat{G}$ à l'aide d'un ensemble de paramètres, constitué d'objets géométriques naturellement liés à G, et de donner pour chacun de ces paramètres une construction d'un représentant de la classe d'équivalence de représentations associée.

La deuxième, qui relève de l'analyse harmonique, concerne la décomposition d'une représentation unitaire de G en «somme» de représentations unitaires irréductibles.

En fait, on sait que ces deux questions ne peuvent avoir de réponse satisfaisante que si le groupe G est de type I. C'est le cas des groupes algébriques réels et donc des groupes que nous rencontrerons dans ce travail.

Un cas particulier de la deuxième question et auquel nous nous intéressons ici est connu sous le nom de «branching problem» ou «problème de branchement». Soit G un groupe algébrique réel et $H \subset G$ un sous-groupe algébrique. Soit $\pi \in \widehat{G}$. Puisque H est de type I, la restriction de π à H que l'on note $\pi|_H$ peut se décomposer de la manière (unique) suivante

$$\pi \mid_H = \int_{\widehat{H}}^{\oplus} m_\pi(\tau)\tau \; d\mu_\pi(\tau)$$

où

μ_π est une mesure borélienne sur $\widehat{H}$ (par rapport à la topologie de Fell)

$m_\pi : \widehat{H} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est une fonction mesurable, appelée *fonction de multiplicité*. Apporter une réponse au problème de branchement consiste à donner une description explicite de la mesure μ_π et de la fonction de multiplicité m_π.

En relation avec le problème de branchement, T. Kobayashi a introduit dans [15] le concept de *H-admissibilité* : on dit que $\pi|_H$ est *H-admissible*, si le support de la mesure μ_π est discret et $m_\pi(\tau) < \infty$ pour tout $\tau \in \widehat{H}$. Autrement dit $\pi|_H$ est H-admissible si et seulement si $\pi|_H = \widehat{\oplus}_{i \in I} k_i.\tau_i$ où I est un ensemble dénombrable, $k_i \in \mathbb{N}$ et les $\tau_i \in \widehat{H}$ sont deux à deux différentes.

Il est intéressant d'étudier les cas où une représentation unitaire irréductible d'un groupe est admissible pour un de ses sous-groupes et de résoudre le problème de branchement correspondant.

Revenons un moment à la question de la construction de représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie.

La *méthode des orbites* permet de construire «beaucoup» de telles représentations pour un groupe de Lie G de type I. Initiée par Kirillov dans sa thèse, elle a été développée par de nombreux mathématiciens, parmi lesquels Auslander-Kostant, pour les groupes résolubles, Vergne et Duflo pour les groupes réductifs et Duflo pour les groupes de Lie généraux.

Soit G un groupe de Lie de type I d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Duflo établit une correspondance entre l'ensemble des G-orbites dans $\mathfrak{g}^*$, l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$, qui sont *admissibles et bien polarisables* et $\widehat{G}$. Cette correspondance associe à chaque orbite admissible et bien polarisable un ensemble d'éléments de $\widehat{G}$ paramétré par un ensemble de *données d'admissibilité* attaché à l'orbite et elle est injective, en ce sens que les ensembles associés à deux orbites distinctes sont disjoints. Lorsque le groupe G est nilpotent, on retrouve la correspondance bijective établie par Kirillov dans sa thèse entre l'ensemble des orbites coadjointes de G et son dual unitaire. Lorsque G est résoluble simplement connexe, on retrouve les résultats d'Auslander-Kostant (à une translation près dans la paramétrisation) : dans ce cas, la méthode permet encore de décrire complètement le dual unitaire. Par contre, dans le cas général on n'obtient pas tout le dual unitaire de G, mais une partie suffisamment «grosse» pour supporter la mesure de Plancherel. Nous donnerons plus de détails, pour ce qui concerne les groupes algébriques, dans le chapitre 2.

La question qui se pose alors est de savoir si l'on peut apporter une réponse au problème de branchement dans le cadre de la méthode des orbites. C'est le cas pour les groupes résolubles exponentiels comme le montrent les travaux de Lipsman ([22]) et Fujiwara ([10]). Cependant, dans cette situation et pour les séries discrètes les cas de H-admissibilité sont rares (voir Kouki [18]).

Lorsque G est un groupe de Lie compact, toute représentation unitaire irréductible de G est H admissible. L'étude du problème de branchement dans cette situation a conduit à tout un ensemble de travaux autour de la conjecture «La quantification commute avec la réduction», due à Guillemin et Sternberg, que nous présentons brièvement ci-dessous.

Soit (M, ω, K, Φ) un K-espace hamiltonien, où (M, ω) est une variété symplectique compacte, K est un groupe de Lie compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, et Φ désigne l'application moment. On se donne un fibré de Kostant-Souriau $\mathcal{L}$ sur M qui est un fibré en droites hermitien K-équivariant de forme courbure $-i\omega$. On peut alors construire une quantification notée $Q^{\mathcal{L}}(M)$ qui est l'indice équivariant d'un opérateur différentiel elliptique K-équivariant associé aux objets considérés et ainsi une représentation formelle de K, cela signifie que $Q^{\mathcal{L}}(M)$ s'écrit $\Sigma_{\tau \in \widehat{K}} n_\tau \tau$, avec les $n_\tau \in \mathbb{Z}$ et tous nuls sauf un nombre fini. De plus si K est trivial ou agit trivialement (sur M et $\mathcal{L}$), alors $Q^{\mathcal{L}}(M)$ s'interprète comme un nombre. Fixons un tore maximal $\mathbb{T}$ (d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$) de K et un ensemble de racines positives de $\mathfrak{t}$ dans $\mathfrak{k}$: on peut donc identifier $\widehat{K}$ à l'ensemble des plus hauts poids dans $\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{k}^*$ (on identifie $\mathfrak{t}^*$ à l'orthogonal du sous-espace $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}]$ de $\mathfrak{k}$). Soit μ un plus haut poids, et $\mathcal{O}_\mu = K.\mu$ l'orbite coadjointe de μ sous K dans $\mathfrak{k}^*$, alors la variété réduite associée $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/K$ est naturellement munie d'un fibré de Kostant-Souriau induit par celui considéré . Soit $\tau_\mu \in \widehat{K}$ la représentation de plus haut poids μ. La conjecture de Guillemin-Sternberg dit que le calcul de la multiplicité n_{τ_μ}, se ramène à quantifier $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/K$. Plus précisément le nombre n_{τ_μ} est exactement le résultat de la quantification de la variété réduite $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/K$ et du fibré associé, tout du moins si la variété réduite est une variété lisse ou un «orbifold». Leur conjecture est connue sous le slogan : "La quantification commute avec la réduction".

Il existe une autre formulation de cette conjecture dans le cadre voisin de la quantification Spin_c. Disons simplement que dans ce cadre, le fibré de Kostant-Souriau est remplacé par $\tilde{L}$, son «translaté» par la racine carrée du fibré en droite défini par le déterminant d'une structure spinorielle complexe sur la variété M. Le résultat de la quantification est alors noté $\mathcal{Q}^{\tilde{L}}_{\mathrm{spin}}(M)$. On reprend les notations précédentes concernant le groupe compact K. Soit Δ^+ un ensemble de racines positives de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, δ la demi-somme des éléments de Δ^+ et $\mu \in \mathfrak{t}^*$ un poids dominant. Alors la structure spinorielle et le fibré $\tilde{L}$ sur M induisent des données du même type sur la variété réduite $\Phi^{-1}(\mathcal{O}_{\mu+\delta})/K$. Ici encore, la multiplicité de la représentation τ_μ dans $\mathcal{Q}^{\tilde{L}}_{\mathrm{spin}}(M)$ est donnée par la quantification Spin_c de la variété réduite et du fibré associé.

Cette conjecture a influencé des recherches de relations entre représentations d'un groupe compact K opérant de manière hamiltonienne sur une variété symplectique M pas forcément compacte et l'application moment. On doit citer entre autres les travaux de Witten, Jeffrey, Kirwan, Meinrenken, Berline-Vergne, Sjamaar. Enfin Tian-Zhang et Paradan ont obtenu des démonstrations directes pour le cas général qui s'adapte à certaines situations nouvelles : variétés à bord, variétés non compactes (dans la situation où l'application moment est prore) etc. Notamment Paradan ([24, 25, 26]) a traité le cas où M est une orbite coadjointe associée à une série discrète d'un groupe de Lie réductif G (pas forcément compact), et $K \subset G$ est un sous-groupe compact maximal. Dans ce cas M n'est pas forcément compacte, cependant Paradan a montré que dans cette situation, la quantification commute également avec la réduction. Il a aussi réussi à réinterpréter la formule de Blattner (une identité combinatoire) dans le cadre de la géométrie hamiltonienne.

Inspiré par les divers travaux cités dessus, Duflo a formulé une conjecture concernant le problème de branchement pour les séries discrètes d'un groupe algébrique réel. Pour des raisons de commodité, nous allons l'énoncer dans le cas d'un groupe algébrique réductif connexe.

Soit donc G un groupe de Lie réel connexe *algébrique réductif* d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $H \subset G$ un sous-groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{g}^*$ (resp. $\mathfrak{h}^*$) le dual linéaire de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$). Supposons que π est une **série discrète** de G. Il est donc bien connu que la série discrète π correspond à une (unique) G-orbite coadjointe **"admissible et fortement régulière"** dans $\mathfrak{g}^*$ (au sens de Duflo). Notons donc $\mathcal{O}_\pi$ l'orbite liée à π. Muni de la structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau ω, $(\mathcal{O}_\pi, \omega)$ est une variété symplectique et comme le stabilisateur d'un point de l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ est un tore, elle admet un unique fibré de Kostant-Souriau . Le sous-groupe H agit dans $\mathcal{O}_\pi$ par l'action coadjointe, de sorte que $(\mathcal{O}_\pi, \omega, H, \mathrm{p})$ devient un H-espace hamiltonien, l'application moment associée étant la projection naturelle p de $\mathcal{O}_\pi$ dans $\mathfrak{h}^*$.

Maintenant, on énonce la conjecture de Duflo (on garde les notations et hypothèses du paragraphe précédent) :

La conjecture de Duflo : Notons $\mathfrak{h}^*_{fr}$ la réunion des H-orbites coadjointes fortement régulières dans $\mathfrak{h}^*$. Alors :

(i) Pour que la restriction π à H, $\pi|_H$ soit H-admissible, il faut et il suffit que la projection (c'est-à-dire l'application moment de $(\mathcal{O}_\pi, \omega, H, \mathrm{p})$)

$$\mathrm{p} : \mathcal{O}_\pi \longrightarrow \mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi) \subseteq \mathfrak{h}^*$$

$$f \longmapsto f|_{\mathfrak{h}}$$

soit **faiblement propre**.

(ii) Si $\pi|_H$ est H-admissible, toute τ_i qui figure dans la décomposition $\pi|_H = \sum k_i.\tau_i$ correspond à une (unique) H-orbite coadjointe admissible et fortement régulière Ω_{τ_i} de $\mathfrak{h}^*$(au sens de Duflo), avec Ω_{τ_i} contenue dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$.

(iii) Toujours dans le cas où π est H-admissible, les multiplicités k_i doivent pouvoir s'exprimer à l'aide de la quantification de la variété réduite correspondante. Autrement dit le slogan **quantification commute avec réduction** reste valable dans ce cadre.

Ici la notion « faiblement propre » signifie que l'image réciproque de tout compact contenu dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi) \bigcap \mathfrak{h}^*_{fr}$ par la projection p est compact. Dans cet article, on utilisera aussi la notion classique « **propre sur l'image** » selon laquelle l'image réciproque par la projection p de tout compact contenu dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$ est compact. Pour simplifier, dans cet article, nous dirons "**propre**" au lieu de « **propre sur l'image** ». Il est évident que si la projection est propre, elle est aussi faiblement propre, alors que l'inverse est généralement faux.

Dans ce travail, on s'intéresse au cas où $G = SU(2,1)$ et H est un sous-groupe de Borel ou un sous-groupe exponentiel maximal de G.

Maintenant, on énonce les principaux résultats de cet article.

Donc soit $G = SU(2,1)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $B = MAN$ un sous-groupe de Borel (de G) d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et $B_1 = AN$ le sous-groupe exponentiel maximal associé d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}_1$. Soit π une série discrète de G et $\mathcal{O}_\pi$ la G-orbite coadjointe qui lui est associée par Duflo. Soit $\mathrm{p} : \mathcal{O}_\pi \longrightarrow \mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi) \subset \mathfrak{b}^*$ (resp. $\mathrm{p}_1 : \mathcal{O}_\pi \longrightarrow \mathrm{p}_1(\mathcal{O}_\pi) \subset \mathfrak{b}_1^*$), la projection naturelle de $\mathcal{O}_\pi \subset \mathfrak{g}^*$ dans $\mathfrak{b}^*$ (resp. $\mathfrak{b}_1^*$). Donc comme expliqué plus haut, muni de la structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau ω, $(\mathcal{O}_\pi, \omega)$ est une variété symplectique. B (resp. B_1) agit dans $\mathcal{O}_\pi$ par l'action coadjointe, de sorte que $(\mathcal{O}_\pi, \omega, B, \mathrm{p})$ (resp. $(\mathcal{O}_\pi, \omega, B_1, \mathrm{p}_1)$) devient un espace hamiltonien, où l'application moment associée est p (resp. p_1). De plus, $(\mathcal{O}_\pi, \omega)$ admet un unique fibré de Kirillov-Kostant-Souriau (car on l'a déjà expliqué, le stabilisateur d'un point de l'orbite $\mathcal{O}_\pi$ est un tore).

On obtient les résultats suivants :

1) (Théorème 5.4) La projection (l'application moment pour $(\mathcal{O}_\pi, \omega, B_1, \mathrm{p}_1)$) $\mathrm{p}_1 : \mathcal{O}_\pi \longrightarrow \mathrm{p}_1(\mathcal{O}_\pi) \subset \mathfrak{b}_1^*$ est propre (sur l'image) ou faiblement propre, si et seulement si la série discrète π est holomorphe ou anti-holomorphe.

2) (Théorème 5.5) La projection (l'application moment pour $(\mathcal{O}_\pi, \omega, B, \mathrm{p})$) $\mathrm{p} : \mathcal{O}_\pi \longrightarrow \mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi) \subset \mathfrak{b}^*$ est faiblement propre. De plus elle est propre (sur l'image) si et seulement si π est holomorphe ou anti-holomorphe.

3) (Théorème 6.3) Si π est holomorphe ou anti-holomorphe, $\pi|_{B_1}$ (resp. $\pi|_B$) est B_1-admissible (resp. B-admissible), et on a une décomposition explicite de $\pi|_{B_1}$ (resp. $\pi|_B$). Le théorème 6.3 énonce, dans le cas particulier du groupe $SU(2,1)$, un résultat dû à Rossi-Vergne ([29]) dans le cas général d'un groupe réductif connexe admettant des séries discrètes holomorphes.

4) Ainsi, lorsque π est holomorphe (ou anti-holomorphe), d'après le théorème 5.3 (resp. la proposition 6.5) qui décrit les B_1-orbites (resp. B-orbite) coadjointes fortement régulières et admissibles (au sens de Duflo) contenues dans $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}_\pi)$ (resp. $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$), les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont vérifiées

pour (G, π, B_1) et (G, π, B). On constate alors que, parmi les séries dicrètes de B associées à une orbite contenue dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$, seulement une sur trois intervient dans dans la décomposition $\pi|_B$.

5) (Théorème 6.8) Soit π une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe. En utilisant la réalisation de π dans un espace de L^2-cohomologie due à Narasimhan-Okamoto ([23]) ainsi que les résultats de Hersant ([11]), on obtient un encadrement pour les multiplicités des représentations unitaires irréductibles de B dans $\pi|_B$: la multiplicité n_τ de chaque $\tau \in \widehat{B}$ (le dual unitaire de B) est égale à la dimension du sous-espace des solutions de carré intégrable sur $]0, +\infty[$ (par rapport à la mesure de Haar dt/t) d'un système différentiel linéaire ordinaire ayant deux points singuliers (en 0 et $+\infty$), dont un de deuxième espèce. En étudiant le comportement asymptotique de ses solutions, on obtient une borne inférieure et une borne supérieure pour toutes les multiplicités. Ceci nous permet de montrer que $\pi|_B$ est B-admissible et $\pi|_{B_1}$ n'est pas B_1-admissible. Donc d'après 1) (le théorème 5.4), les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont vérifiées pour (G, π, B_1) avec π ni holomorphe ni anti-holomorphe. Donc d'après 4), elles sont vérifiées pour (G, π, B_1) et pour toute série discrète π. De plus, cette méthode permet de retrouver les résultats de 3) obtenus dans le cas des séries discrètes holomorphes.

Il est à noter que le fait que les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes ne sont pas B_1-admissibles a été démontré pour $SU(n, 1)$ par Rosenberg-Vergne ([28]), également en utilisant leur réalisation dans un espace de L^2-cohomologie.

6) (Théorème 6.10) En combinant les travaux de Fabec ([9]) et ceux de Kraljevic ([19, 20]) sur les séries principales de $SU(2, 1)$ avec le théorème 6.8 et le théorème 6.3 (dû à Rossi et Vergne), on parvient à décomposer explicitement $\pi|_B$ pour π ni holomorphe ni anti-holomorphe.

7) En comparant le théorème 6.10 avec la proposition 6.11 (qui décrit les B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles contenues dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$), on montre que les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont vérifiées pour (G, π, B). Ainsi, d'après 4) et 5), les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont vérifiées pour (G, π, B) et (G, π, B_1) pour toute série discrète π. On constate également que, parmi les séries dicrètes associées à une orbite contenue dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$, seulement une sur trois intervient dans la décomposition $\pi|_B$.

8) (proposition 6.11) Puisque l'on obtient une décomposition explicite de $\pi|_B$ pour π ni holomorphe ni anti-holomorphe, en comparant le théorème 6.8 et le théorème 6.10, on peut trouver la dimension exacte du sous-espace des solutions de carré intégrable de chaque système différentiel concerné que l'on évoque dans 4). Ce résultat semble difficile à obtenir par des méthodes «directes».

9) (Chapitre 7) En modifiant certains paramètres, on montre que dans notre cas les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont encore vérifiées si on utilise la paramétrisation de Blattner pour les séries discrètes et celle d'Auslander-Kostant pour les représentations unitaires irréductibles de B_1 et B.

10) (Propositions 8.1, 8.2 et 8.3) On montre que les variétés réduites pour l'espace hamiltonien $(\mathcal{O}_\pi, \omega, B, \mathrm{p})$ sont des points. On vérifie qu'une représentation de B associée à une orbite contenue dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$ apparaît dans $\pi|_B$ si et seulement son caractère central coïncide avec celui de π (B et G ont même centre).

On interprète ce résultat dans le cadre de la quantification géométrique et on montre qu'il est l'analogue de celui démontré par Paradan dans ([26], section 2.4 "Quantization of points", Theorem 2.16), dans lequel il considère un groupe de Lie compact muni d'une action hamiltonienne sur une variété symplectique avec application moment propre et calcule la quantification de la variété réduite lorsqu'elle est réduite à un point.

Ceci montre que l'assertion (iii) de la conjecture de Duflo est vérifiée et explique pourquoi seulement une série discrète de B sur trois parmi celles associées à une orbite contenue dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\pi)$ intervient dans la décomposition $\pi|_B$.

11) (Propositions 8.1 et 8.4) Lorsque $\pi|_{B_1}$ est B_1-admissible, on montre que la variété réduite est une sous-variété symplectique de $\mathcal{O}_\pi$, difféomorphe à une sphère de dimension 2, et que la multiplicité s'exprime également comme la quantification de cette dernière, c'est à dire comme l'intégrale de sa forme volume naturelle. Ceci montre que l'assertion (iii) de la conjecture de Duflo est également vérifiée dans ce cas.

2 La méthode des orbites et la théorie de Duflo

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques élements dont nous aurons besoin de la construction de Duflo de représenations unitaires irréductibles.

Orbites fortement régulières :

Rappelons qu'un groupe de Lie presque algébrique est la donnée d'un triplet $(G, j, \mathbf{G})$ où $\mathbf{G}$ est un groupe algébrique affine défini sur $\mathbb{R}$, G est un groupe de Lie et j est un morphisme de groupes de Lie de G dans le groupe des points réels $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ de $\mathbf{G}$ dont le noyau est discret central dans G et dont l'image est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{G}_{\mathbb{R}}$ dense dans $\mathbf{G}$ pour la topologie de Zariski (voir [7], p. 199). On notera plus simplement G le groupe presque algébrique $(G, j, \mathbf{G})$.

Soit G un groupe de Lie presque algébrique sur $\mathbb{R}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On dit qu'une forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ est régulière si son orbite coadjointe $G.f$ est de dimension maximale ou si, de manière équivalente, son stabilisateur $G(f)$ dans G est de dimension minimale. Supposons que $f \in \mathfrak{g}^*$ est une forme linéaire régulière. Alors, il est bien connu que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(f)$ de $G(f)$ est algébrique abélienne. On désigne par $\mathfrak{s}(f)$ son unique facteur réductif qui est l'ensemble des $X \in \mathfrak{g}(f)$ pour lesquels $\mathrm{ad}X$ est semi-simple. On dit que f est fortement régulière, si $\mathfrak{s}(f)$ est de dimension maximale lorsque f parcourt l'ensemble des formes régulières. Il est clair que f est régulière (fortement régulière), si et seulement s'il en est de même pour tous les éléments de son orbite coadjointe. Nous dirons qu'un orbite est régulière (resp. fortement régulière) si c'est l'orbite du forme régulière (resp. fortement régulière).

Formes linéaires admissibles et bien polarisables

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$. Considérons la forme bilinéaire alternée B_f sur $\mathfrak{g}$ définie par

$$B_f(X,Y) = f([X,Y]), \quad X,\ Y \in \mathfrak{g}.$$

On sait que $\mathfrak{g}(f)$ est le noyau de B_f, de sorte que $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ est un espace symplectique, et $G(f)$ laisse invariant B_f. En 1972, Duflo a introduit le groupe $G(f)^{\mathfrak{g}}$, un revêtement à deux feuillets de $G(f)$ associé à $(\mathfrak{g}, B_f)$, qui joue un rôle central dans la méthode des orbites (pour plus de détails, voir [7], p.153 et suivantes).

Comme nous en aurons besoin plus loin, nous présentons la construction de ce revêtement dans un cadre plus général : on se donne un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire alternée β dans lequel agit un groupe de Lie H en laissant β invariante. On considère l'espace symplectique $V/\ker\beta$, le groupe symplectique $Sp(V/\ker\beta)$ et le groupe métaplectique $Mp(V/\ker\beta)$, revêtement connexe à deux feuillets du précédent. Le revêtement à deux feuillets de H, dit revêtement métaplectique associé à (V,β), est alors le produit fibré de H par $Mp(V/\ker\beta)$ au dessus de $Sp(V/\ker\beta)$: on le note H^V.

On prolonge par bilinéarité complexe β en une forme bilinéaire alternée sur l'espace vectoriel complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V, encore notée β. On appelle lagrangien complexe de $V_{\mathbb{C}}$ de V un sous-espace isotrope maximal de $V_{\mathbb{C}}$ pour β.

Si $l \subseteq V_{\mathbb{C}}$ est un lagragien complexe stable sous l'action de l'algèbre de Lie

$\mathfrak{h}$ de H, on pose

$$\rho_l(X) = \frac{1}{2} tr X_{l/\ker\beta},\ X \in \mathfrak{h}.$$

Remarque. $G(f)^{\mathfrak{g}}$ n'est pas forcément connexe, même si $G(f)$ est connexe. Cependant, si $G(f)$ est connexe, alors, $G(f)^{\mathfrak{g}}$ a au plus 2 composantes connexes.

On appelle ε l'élément non trivial du noyau de la projection de $G(f)^{\mathfrak{g}}$ sur $G(f)$. Notons $X(f)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles τ de $G(f)^{\mathfrak{g}}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\tau(\varepsilon) = -id \qquad (1)$$

la différentielle $d\tau$ est un multiple de $if|_{g(f)}$ (2)

On dit que f est *admissible*, si $X(f)$ est non vide. Soit η un caractère d'un sous-groupe fermé central Γ de G, on dit qu'un élément $\tau \in X(f)$ est η-*admissible*, si $\tau|_\Gamma$ est un multiple de η.

Concernant l'admissibilité de f, il y a un lemme très utile dû à Duflo (voir [7], p. 154 Remarque 2) :

Lemme 2.1 *Supposons qu'il existe un sous-espace lagrangien complexe $l \subseteq \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ pour B_f, qui est stable par $\mathfrak{g}(f)$, alors, f est admissible si et seulement s'il existe un caractère de $G(f)_0$ (la composante neutre de $G(f)$) dont la différentielle est $\rho_l + if|_{g(f)}$.*

Dans [7], Duflo a introduit la notion de forme linéaire bien polarisable. Soit f une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. On appelle *polarisation* en f une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui soit un sous-espace lagrangien complexe pour B_f.

Soit $\mathfrak{b}$ une polarisation en f et soit B le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ du groupe de Lie simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. On dit que la polarisation $\mathfrak{b}$ vérifie la *condition de Pukanszky* si on a $B.f = f + \mathfrak{b}^{\perp}$ (ici $\mathfrak{b}^{\perp}$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}}$).

La forme linéaire f est dite *bien polarisable* si elle admet une polarisation résoluble et vérifiant la condition de Pukanszky.

Notons $\mathfrak{g}^*_{ap} \subset \mathfrak{g}^*$, l'ensemble des formes linéaires admissibles et bien polarisables. Alors on a $G.\mathfrak{g}^*_{ap} = \mathfrak{g}^*_{ap}$, ceci nous permet de définir les *orbites coadjointes admissibles et bien polarisables* d'une façon évidente. Notons $\widehat{G}$, le dual unitaire de G. Soit $f \in \mathfrak{g}^*_{ap}$ et $\tau \in X(f)$. Au couple (f, τ) Duflo associe une représentation unitaire irréductible $\pi_{f,\tau}$ de G. De plus, si $f_1 \in G.f$, il existe un et un seul élément τ_1 dans $X(f_1)$ tel que $\pi_{f,\tau} \cong \pi_{f_1,\tau_1}$. Ainsi, étant donnée une orbite coadjointe admissible et bien polarisable $\mathcal{O}$, il existe un ensemble $X(\mathcal{O})$ qui se met canoniquement en bijection avec $X(f)$, pour tout $f \in \mathcal{O}$. On définit alors $\Upsilon_{a.p} := \{(\mathcal{O}, \tau) : \mathcal{O} \text{ est admissible et bien polarisable},\ \tau \in X(\mathcal{O})\}$. Alors, la correspondance

$$\Upsilon_{a.p} \longrightarrow \widehat{G}$$
$$(\mathcal{O}, \tau) \longmapsto \pi_{f,\tau}$$

est bien définie, où pour tout $\mathcal{O}$, le point $f \in \mathcal{O}$ une fois choisi est fixé, de sorte que $X(\mathcal{O})$ est identifié à $X(f)$. Duflo a montré que cette correspondance est injective.

Suposons que G est un groupe presque algébrique. Alors Duflo a montré que $\pi_{f,\tau}$ est une série discrète modulo un sous-groupe Γ du centre de G si et seulement si $G(f)/\Gamma$ est compact et toute série discrète de G modulo Γ est isomorphe à une telle $\pi_{f,\tau}$ (pour tout ceci voir [7], p. 203 théorème 3).

Si G est connexe réductif et f correspond à une série discrète, alors $G(f)$ est connexe et $X(f)$ a un unique élément τ_f qui est un caractère. Nous noterons simplement $T_f = T_{f,\tau_f}$.

Il est connu que les orbites fortement régulières sont **bien polarisables**. Pour G réductif, f est fortement régulière si et seulement si $\mathfrak{g}(f)$ est une sous-algèbre de Cartan. De plus Duflo a démontré le résultat suivant : Soit G un groupe presque algébrique. Notons $\widehat{G}_{fr}$ l'ensemble des classes des représentations unitaires irréductibles de G liées aux orbites fortement régulières admissibles. Alors le complémentaire de $\widehat{G}_{fr}$ dans $\widehat{G}$ est négligeable par rapport à la mesure de Plancherel. Donc toute série discrète π de G est liée à une orbite fortement régulière admissible, puisque par rapport à la mesure de Plancherel, $\{\pi\}$ a une mesure non nulle. De plus, d'après ce qui précéède, un élément de $\widehat{G}_{fr}$ est une série discrète si et seulement s'il correspond à une orbite dont le stabilisateur d'un point quelconque est compact.

Nous dirons qu'un forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ est *de type compact* si $G(f)$ est compact. Nous dirons qu'une orbite coadjointe est *de type compact*, si elle contient une forme linéaire de type compact. On voit donc que les séries discrètes d'un groupe presque algébrique sont les représentations associées par la construction de Duflo aux orbites fortement régulières admissibles et de type compact.

Maintenant, on va énoncer des éléments de la construction des représentations "$T_{f,\tau}$" de Duflo, pour plus de détails, nous renvoyons à [7].

La construction de Duflo de représentations unitaires

Soient G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, Γ un sous-groupe du centre de G, η un caractère unitaire de Γ. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire, η-admissible, et $\tau \in X(f,\eta)$ (pour les définitions « η-admissible »et « $X(f,\eta)$ », voir le chapitre 2 de [7]. Mais de toute façon, dans notre cas, le centre de $SU(2,1)$ et celui du sous-groupe de Borel B sont isomorphes à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui est fini, donc on peut prendre Γ et η triviaux de sorte que $X(f,\eta) = X(f)$).

Duflo a construit les représentations $T_{f,\tau}$ par récurrence sur dim(G).

D'abord si dim(G)=0, alors $f = 0$, $G(f) = G$. On pose $T_{f,\tau}(x) = \tau(x,1)$, pour $x \in G$. On suppose la construction faite pour tous les groupes de Lie de dimension strictement inférieure.

On note $\mathfrak{u}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$. Posons $u = f|_{\mathfrak{u}}$. On peut montrer que le sous-groupe analytique U de $\mathfrak{u}$ est fermé et distingué et de plus, u est admissible (par rapport à U). Il est clair que G agit sur $\mathfrak{u}^*$ d'une manière évidente. Puisque $\mathfrak{u}$ est un idéal invariant par G, ainsi $G(u)$ a un sens clair et il laisse invariant la forme bilinéaire alternée B_u (sur $\mathfrak{u}$). Notons $G(u)^{\mathfrak{u}}$ le revêtement à 2 feuillets associé de $G(u)$, $q = \mathfrak{u}(u) \bigcap \ker(u)$ et Q le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}$. Il est connu que l'application $x \longmapsto (x,1)$ est injective du groupe $U(u)$ dans $G(u)^{\mathfrak{u}}$ (donc elle est un isomorphisme de $U(u)$ sur son image dans $G(u)^{\mathfrak{u}}$), et Q est la composante neutre du noyau du caractère χ_u de $U(u)$ de différentielle $iu|_{\mathfrak{u}(u)}$. Le groupe Q est donc fermé et distingué dans $G(u)^{\mathfrak{u}}$ (ici, on identifie Q à son image canonique dans $G(u)^{\mathfrak{u}}$). On pose $G_1^{\vee} = G(u)^{\mathfrak{u}}/Q$, et $\mathfrak{g}_1^{\vee}$ son algèbre de Lie.

Soit Γ' l'image réciproque de Γ dans $G(u)^{\mathfrak{u}}$. Comme l'action adjointe de Γ est triviale, Γ' est isomorphe au produit direct de Γ par le groupe à deux éléments $\{\pm 1\}$. On pose $\Gamma_1 = \Gamma' U(u)/Q$, alors Γ_1 est un sous-groupe du centre de $G_1^{\vee}$. On note η_1 le caractère de Γ_1 provenant par passage au quotient du caractère η' de $\Gamma' U(u)$ qui prolonge χ_u, et tel que $\eta'(\gamma, \pm 1) = \pm \eta(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. On sait que η' est bien défini (donc η_1 est bien défini), puisque $\eta|_{\Gamma \bigcap U(u)} = \chi_u|_{\Gamma \bigcap U(u)}$. Posons f_1 l'élément de ${\mathfrak{g}_1^{\vee}}^*$ qui est déduit de la restriction de f sur $\mathfrak{g}(u)$ par passage au quotient, où $\mathfrak{g}(u)$ est l'algèbre de Lie de $G(u)$. Alors, on peut montrer que f_1 est bien polarisable et η_1-admissible. De plus il existe une bijection canonique $\tau \longmapsto \tau_1$ entre $X_{G,\Gamma}(f, \eta)$ et $X_{G_1^{\vee},\Gamma_1}(f_1, \eta_1)$. Pour plus de détails, voir le chapitre 4 de [7].

Ainsi, on considère les deux cas suivants :

i) Si dim($\mathfrak{g}$)=dim($\mathfrak{g}_1^{\vee}$), alors u est de dimension au plus 1, et $\mathfrak{g}$ est réductive de centre u. Dans ce cas, $T_{f,\tau}$ est défini comme pour les groupes réductifs. Pour plus de détails, voir le chapitre 3 de [7].

ii) Si dim($\mathfrak{g}_1$)<dim($\mathfrak{g}$), alors l'hypothèse de récurrence nous permet de construire la représentation $T_{f_1,\tau_1}^{G_1^{\vee}}$ de $G_1^{\vee}$.

On peut donc définir une représentation $T_{f_1,\tau_1}^{G} \bigotimes S_u T_u$ du groupe $G(u)U$ de la manière suivante :

Soient $x \in G(u)$, $y \in U$ et $\tilde{x} \in G(u)^{\mathfrak{u}}$ un représentant de x. On désigne l'image de $\tilde{x}$ dans G_1 par la même notation $\tilde{x}$. On pose

$$T_{f_1,\tau_1}^{G} \otimes S_u T_u(xy) = T_{f_1,\tau_1}^{G}(\tilde{x}) \otimes S_u(\tilde{x}) T_u(y). \tag{3}$$

On peut vérifier que la définition ne dépend pas du choix de x, y, (x, ψ). De plus elle est une vraie représentation pour $G(u)U$. Ici, T_u est la représentation unitaire et irréductible de U associée à la forme linéaire u (comme U est nilpotent, T_u est dans le sens de la théorie de Kirillov), et pour la notation S_u, voir le chapitre 5 de [7].

Finalement, on définit la représentation $T_{f,\tau}^{G}$ de G de la manière suivante

$$T_{f,\tau}^{G} = \mathrm{Ind}_{G(u)U}^{G}(T_{f_1,\tau_1}^{G} \otimes S_u T_u).$$

3 Quelques propriétés de $SU(2,1)$

Dans tout ce qui suit, on note G le groupe $SU(2,1)$ et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

Désignons par $I_{2,1}$ la matrice dans la base canonique de la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^3$, $\langle z,t\rangle = z_1\bar{t}_1 + z_2\bar{t}_2 - z_3\bar{t}_3$. Alors

$$G = \left\{ g \in SL(3,\mathbb{C}) \middle| \, {}^t\overline{g} I_{2,1} g = I_{2,1} \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ X \in M_3(\mathbb{C}) \middle| \, {}^t\overline{X} I_{2,1} + I_{2,1} X = 0 \text{ et } trX = 0 \right\}$$

Le groupe de Lie G est simple de dimension 8, son complexifié est $SL(3,\mathbb{C})$. Le centre de G est le groupe à trois éléments

$$Z_G = \{\xi Id \,|\, \xi^3 = 1\}$$

Notons θ l'involution de Cartan sur G et $\mathfrak{g}$, telle que $\theta(g) = {}^t\overline{g^{-1}}$ pour $g \in G$ et $\theta(X) = -{}^t\overline{X}$ pour $X \in \mathfrak{g}$. Désignons par K le sous-groupe des points fixes de θ dans G, par $\mathfrak{k}$ son algèbre de Lie et par $\mathfrak{p}$ le sous-espace propre de θ pour la valeur prore -1 dans $\mathfrak{g}$. Alors K est un sous-groupe compact maximal de G et on a les décompositions de Cartan de G et $\mathfrak{g}$:

$$G = K \exp \mathfrak{p}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}.$$

Le centre de $z(\mathfrak{k})$ de $\mathfrak{k}$ est de dimension 1. Il est engendré par la matrice

$$Z = i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

et son centralisateur dans $\mathfrak{g}$ est $\mathfrak{k}$. Si Z_K désigne le centre de K, on a

$$Z_K = \exp \mathbb{R}Z.$$

Soit $\mathfrak{k}'$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{k}$. Elle est isomorphe à $\mathfrak{su}(2)$:

$$\mathfrak{k}' = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{su}(2) \right\}$$

et on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}' \oplus z(\mathfrak{k})$. Le sous-groupe analytique K' d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est le sous-groupe dérivé de K. Il est isomorphe à $SU(2)$ et on a

$$K' = \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| U \in SU(2) \right\} \quad \text{et} \quad K = K'Z_K.$$

Enfin, on a

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ {}^t\overline{X} & 0 \end{pmatrix} \middle| X \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \right\}$$

Soit $\mathfrak{t}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ constituée des matrices diagonales. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenue dans $\mathfrak{k}$. C'est donc également une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}$. Désignons par $diag(h_1,h_2,h_3)$ la matrice diagonale de $M_3(\mathbb{C})$ de valeurs propres h_1, h_2, h_3, dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Alors, on a

$$\mathfrak{t} = \{\, diag(ih_1, ih_2, ih_3) |\, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{R} \text{ et } h_1 + h_2 + h_3 = 0\}$$
$$\mathfrak{t}_{\mathbb{C}} = \{\, diag(h_1, h_2, h_3) |\, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{C} \text{ et } h_1 + h_2 + h_3 = 0\}$$

Le système des racines de $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ est

$$\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = \{\, \alpha_{kl} |\, 1 \leqslant k \neq l \leqslant 3\}\,,$$

où

$$\alpha_{kl}(diag(h_1, h_2, h_3)) = h_k - h_l.$$

Le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ pour la racine α_{kl} est $\mathfrak{g}_{kl} = \mathbb{C}E_{kl}$, où $E_{kl} \in M_3(\mathbb{C})$ désigne la matrice élémentaire d'indice kl. La coracine de α_{kl} est la matrice $H_{kl} = E_{kk} - E_{ll}$. Posons $H = iH_{12}$. Alors $\mathfrak{t}' := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k}' = \mathbb{R}H$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}' \oplus z(\mathfrak{k})$ et (H, Z) est une base de $\mathfrak{t}$.

De plus, $\{\alpha_{12}, \alpha_{21}\}$ est l'ensemble des racines compactes et son complémentaire $\Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \setminus \{\alpha_{12}, \alpha_{21}\}$ est l'ensemble des racines non-compactes.

Maintenant, si $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{a} = \mathbb{R}S$ est une sous-algèbre abélienne maximale de $\mathfrak{p}$. L'ensemble des racines Δ de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ est $\pm\beta$, $\pm 2\beta$ avec $\beta(tS) = t,\ t \in \mathbb{R}$. Les sous-espaces radiciels correspondants sont

$$\mathfrak{g}_\beta = \mathbb{R}E_1 \bigoplus \mathbb{R}E_1', \quad \mathfrak{g}_{2\beta} = \mathbb{R}E_2,$$

$$\mathfrak{g}_{-\beta} = \theta(\mathfrak{g}_\beta), \quad \mathfrak{g}_{-2\beta} = \theta(\mathfrak{g}_{2\beta}),$$

où "θ" est l'involution de Cartan (au niveau algébrique) et

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1' = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = i\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathfrak{n} = \mathfrak{g}_\beta + \mathfrak{g}_{2\beta}$ et $N = \exp(\mathfrak{n})$. Alors les décompositions d'Iwasawa correspondantes sont

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n} \text{ et } G = KAN.$$

Il est clair que $[E_1,\ E_2] = [E_1',\ E_2] = 0$ et $[E_1,\ E_1'] = E_2$. Donc $\mathfrak{n}$ est une algèbre de Heisenberg de dimension 3 et N est un groupe de Heisenberg de dimension 3.

$$\text{Si } W = \frac{i}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors $\mathfrak{m} = \mathbb{R}W$ est le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$. De plus $[W,\ E_1] = E_1'$, $[W,\ E_1'] = -E_1$, et $[W,\ E_2] = 0$. Donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Borel. Notons $M = \exp(\mathfrak{m})$ qui est le centralisateur du sous-groupe A dans K. Ainsi, $B = MAN$ est le sous-groupe de Borel associé à $\mathfrak{b}$. Pour simplifier, on note $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$ et $B_1 = AN$.

On vérifie que Z_G est également le centre de B.

4 Rappels sur les séries discrètes des groupes de Lie simples

Théorème 4.1 *Soient G un groupe de Lie linéaire semi-simple, $K \subset G$ un sous-groupe compact maximal, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ leurs algèbres de Lie respectives. On suppose que K et G ont le même rang. Soit donc $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{k} \subseteq \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Notons $\triangle = \Sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\ \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ et $\triangle_K = \Sigma(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}},\ \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$.*

Supposons que $\lambda \in (i\mathfrak{t})^*$ est non-singulière (autrement dit $\langle\lambda,\ \alpha\rangle \neq 0$ pour toute $\alpha \in \Delta$). On considère l'ensemble de racines positives (pour Δ), $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta | \langle\lambda,\ \alpha\rangle > 0\}$. Alors, $\Delta_K^+ = \Delta^+ \bigcap \Delta_K$ est un ensemble de racines positives pour Δ_K. Notons δ_G (resp. δ_K) la demi-somme des éléments de Δ^+ (resp. Δ_K^+).

Si $\lambda+\delta_G$ est analytiquement intégrable (i.e. est la différentielle d'un caractère du tore maximal T), alors il existe une unique série discrète π_λ de G qui possède les propriétés suivantes :

(a) π_λ a le caractère infinitésimal ζ_λ, où ζ_λ est le caractère du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ défini par λ.

(b) Dans la restriction de π_λ à K que l'on note $\pi_\lambda|_K$, le K type avec le plus haut poids (par rapport à Δ_K^+)

$$\Lambda = \lambda + \delta_G - 2\delta_K$$

figure une seule fois.

(c) si Λ' est le plus haut poids d'un K type qui apparaît dans $\pi_\lambda|_K$, alors, Λ' est de la forme

$$\Lambda' = \Lambda + \sum_{\alpha\in\Delta^+} n_\alpha \alpha \qquad \textit{ici } n_\alpha \textit{ sont des entiers positifs ou nuls.}$$

De plus, deux telles π_{λ_1} et π_{λ_2} sont équivalentes si et seulement si λ_1 et λ_2 sont conjuguées par W_K, où W_K est le groupe de Weyl pour Δ_K. Et, toute série discrète de G est obtenue de cette manière

Remarque 1. (1) La paramétrisation des séries discrètes est due à Harish-Chandra. Les assertions b) et c) du théorème sont une partie de la conjecture de Blattner, démontrée par Hecht et Schmid.

(2) Dans le théorème, le paramètre λ est appelé **le paramètre de Harish-Chandra**, et le paramètre Λ est appelé **le paramètre de Blattner**.

(3) Supposons que G est simple et que le centre de K est de dimension supérieure ou égale à 1. Alors π_λ est une série discrète holomorphe si et seulement si $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+ = \oplus_{-\alpha\in\Delta_{\mathrm{n}}^+}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ est une sous-algèbre (abélienne) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, où Δ_{n}^+ est l'ensemble des racines non compactes positives (relativement à λ). De plus $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ est l'espace radiciel de α. Dans ce cas π_λ est holomorphe pour la structure complexe définie par $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+$ sur G/K.

(4) Si $f \in \mathfrak{g}^*$ est une forme linéaire fortement régulière, d'après ce que l'on a expliqué dans le chapitre 2, $\mathfrak{g}(f)$ est une sous-algèbre de Cartan. Supposons f de type compact. Sans perte de généralité, on peut supposer $\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{t}$. Donc $f \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ (on utilise la décomposition en somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}\oplus[\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$ pour identifier

$\mathfrak{t}^*$ à un sous-epace de $\mathfrak{g}^*$). On peut donc définir l'ensemble de racines positives Δ^+ relatif à $if \in (i\mathfrak{t})^*$ comme on a fait pour λ dans le théorème précédent. Soit δ (resp. δ_K) la demi-somme des racines dans Δ^+ (resp. $\Delta_K^+ := \Delta^+ \cap \Delta_K$).

Ainsi f est admissible pour G si et seulement si $\lambda = if$ est un paramètre de Harish-Chandra. Supposons que nous soyons dans ce cas. Alors, la représentation T_f de la paramétrisation de Duflo est la série discrète π_λ.

Soit χ_f la caractère de T de différentielle $if + \delta - 2\delta_K$. On voit facilement que le caractère central de la série discrète $T_f = \pi_\lambda$ est la restriction de χ_f au centre Z_G de G.

(5) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ est une forme linéaire fortement régulière de type compact. Avec les notations de (4), on dit que f est dans **le cône holomorphe**, si $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^+ = \oplus_{-\alpha \in \Delta_{\mathrm{n}}^+} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ est une sous-algèbre (abélienne) de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, où Δ_{n}^+ est l'ensemble des racines non compactes dans Δ^+. Donc il est clair que si f est de plus admissible, la série discrète T_f est holomorphe si et seulement si f est dans le cône holomorphe.

Maintenant, on revient sur $G = SU(2,1)$ et on reprend du chapitre 2 le concernant. On veut trouver à quelles conditions un élément $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ correspond à une série discrète et à quelles conditions cette dernière est holomorphe.

Il est clair que $W_K = \{s_{\alpha_{12}},\ id\}$. Donc, d'après le théorème, on peut toujours supposer que α_{12} est dans Δ^+. Les ensembles de racines positives contenant α_{12} sont

$$\Delta_1^+ = \{\alpha_{12},\ \alpha_{32},\ \alpha_{31}\}\,,\ \Delta_2^+ = \{\alpha_{12},\ \alpha_{23},\ \alpha_{13}\}\,,\ \Delta_3^+ = \{\alpha_{12},\ \alpha_{32},\ \alpha_{13}\}$$

D'après la remarque (3) précédente, on peut déduire que Δ_1^+ et Δ_2^+ correspondent aux séries discrètes holomorphes et Δ_3^+ à celles non holomorphes.

Remarque 2. (1) Comme $\delta_G = 1/2(\alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{31}) = \alpha_{32}$ est un poids, λ correspond à une série discrète si et seulement si λ est analytiquement intégrable.

(2) Par convention, on appelle « séries discrètes holomorphes », celles qui correspondent à l'un des ensembles de racines positives Δ_1^+ ou Δ_2^+, et « séries discrètes anti-holomorphes », celles qui correspondent à l'autre. Dans la suite, pour nous conformer à l'article de Rossi et Vergne ([29]) que l'on va utiliser, on appellera « séries discrètes holomorphes », celles correspondant à Δ_1^+.

D'après le théorème, les « λ » qui correspondent à Δ_1^+ sont celles qui vérifient que $\langle\lambda,\ \alpha\rangle > 0$ pour toute $\alpha \in \Delta_1^+$ et $\lambda + \delta_G$ est analytiquement intégrable. On en déduit donc que les « λ » qui correspondent à Δ_1^+ sont celles qui vérifient

$$\lambda(H_{12}) = n_1 \in \mathbb{N}^+,\ \lambda(H_{32}) = n_2 \in \mathbb{N}^+,\ \lambda(H_{31}) = n_3 \in \mathbb{N}^+.$$

Mais, comme $H_{32} = H_{12} + H_{31}$, et H_{12} et H_{31} sont linéairement indépendants, la condition précédente est équivalente à

$\lambda(H_{12}) = n_1 \in \mathbb{N}^+,\ \lambda(H_{31}) = n_3 \in \mathbb{N}^+$ où le choix de n_1 et n_3 est indépendant.

5 Étude des orbites coadjointes de G, B et B_1

Nous commençons par rappeler ce que nous entendons par propreté et faible de propreté pour la projection d'une orbite coadjointe. On se donne un groupe de Lie presque algébrique connexe G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $H \subset G$ un sous-groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On désigne par p la projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{h}^*$. Soit $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^*$ une orbite coadjointe sous G.

Nous dirons que la restriction de la projection p à $\mathcal{O}$ est *propre*, si elle est propre sur l'image, c'est à dire si, pour tout compact $L \subset p(\mathcal{O})$, $p^{-1}(L) \cap \mathcal{O}$ est compact.

Nous dirons que la restriction de la projection p à $\mathcal{O}$ est *faiblement propre*, si, pour tout compact $L \subset p(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{h}^*_{fr}$, $p^{-1}(L) \cap \mathcal{O}$ est compact.

Pour simplifier, dans tout ce qui suit, sauf indication contraire, on garde toutes les notations concernant $SU(2,1)$ du chapitre précédent (i.e. on note $G = SU(2,1)$ etc). On désigne par p (resp. p_1) la projection naturelle de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{b}^*$ (resp. $\mathfrak{b}_1^*$).

Maintenant, on va énoncer le plan de ce chapitre.

1) Détermination des orbites coadjointes fortement régulières et celles fortement régulières et admissibles de $\mathfrak{b}_1^*$ et détermination des données d'admissibilité.

2) La même chose pour $\mathfrak{b}^*$.

3) Étude de la faible propreté (et de la propreté) pour la restriction de p_1 à une orbite fortement régulière de type compact.

4) La même chose pour p.

5.1 Orbites coadjointes fortement régulières (et admissibles) de $\mathfrak{b}_1^*$

Maintenant, $S,\ E_1,\ E_1',\ E_2$ sont comme dans le chapitre 3, ils constituent une base de $\mathfrak{b}_1$. Notons $S^*,\ E_1^*,\ E_1'^*,\ E_2^*$ la base duale correspondante dans $\mathfrak{b}_1^*$.

Proposition 5.1 *Notons $\Omega^- = \{b \in \mathfrak{b}_1^* \mid b(E_2) < 0\}$ et $\Omega^+ = \{b \in \mathfrak{b}_1^* \mid b(E_2) > 0\}$. Alors $\Omega^\pm = B.(\pm E_2^*)$ sont les seules NA-orbites coadjointes fortement régulières dans $\mathfrak{b}_1^*$, et elles sont également admissibles.*

Démonstration. Notons $\mathfrak{b}_1^{*\prime} = \{b \in \mathfrak{b}_1^* \mid b(E_2) \neq 0\}$. Comme $\mathbb{R}E_2$ est un idéal de $\mathfrak{b}_1$, il est clair que $\mathfrak{b}_1^{*\prime}$ est un ouvert B_1-invariant (pour l'action coadjointe). Soit $b \in \mathfrak{b}_1^{*\prime}$. Nous allons voir que $\mathfrak{b}_1(b) = 0$. Soit $n = b_{|\mathfrak{n}}$. Comme l'idéal $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{b}_1$ est une algèbre de Lie de Heisenberg de dimension 3 de centre E_2, on a $N.n = n + (\mathbb{R}E_2)^\perp$, où $(\mathbb{R}E_2)^\perp = \{g \in n^* | \, g(E_2) = 0\}$. On peut supposer que $b = \mu S^* + \gamma E_2^*$ avec $\gamma \neq 0$. Dans ce cas, la matrice de la forme B_b dans la base $S,\ E_1,\ E_1',\ E_2$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 \\ -2\gamma & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc que les B_1-orbites coadjointes dans $\mathfrak{b}_1^{*\prime}$ sont ouvertes. Comme elles sont connexes, par argument de connexité, il y en deux : Ω^- et Ω^+. De plus comme $\Omega^\pm$ est simplement connexe, si $b \in \Omega^\pm$ on déduit que

$$B_1 \longrightarrow \Omega^\pm$$

$$x \longmapsto x.b$$

est un difféomorphisme, de sorte que le stabilisateur $B_1(b)$ est trivial. Donc Ω^- et Ω^+ sont fortement régulières et admissibles, d'où le résultat. $\square$

5.2 Orbites coadjointes fortement régulières (et admissibles) de $\mathfrak{b}^*$

W, S, E_1, E_1' et E_2 est une base de $\mathfrak{b}$ et on note W^*, S^*, E_1^*, $E_1'^*$ et E_2^* la base duale de $\mathfrak{b}^*$.

Proposition 5.2 *Pour $r \in \mathbb{R}$, notons $\Omega_{r,-} = B.(rW^* - E_2^*) \subset \mathfrak{b}^*$ et $\Omega_{r,+} = B.(rW^* + E_2^*) \subset \mathfrak{b}^*$, alors*

1) Les B-orbites fortement régulières dans $\mathfrak{b}^*$ sont les $\Omega_{r,-}$ et $\Omega_{r,+}$. Elles sont deux à deux distinctes.

2) Les B-orbites fortement régulières et admissibles dans $\mathfrak{b}^*$ sont les $\Omega_{r,-}$ et $\Omega_{r,+}$, avec $r + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/3$.

Démonstration. On va commencer par déterminer toutes les orbites fortement régulières de $B = MAN$: $\mathfrak{b} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ est de dimension 5 et elle contient $\mathfrak{b}_1$ comme un idéal. Il suit alors de la proposition 5.1 de la section précédente, que si $f \in \mathfrak{b}^*$ vérifie $f(E_2) \neq 0$, on a $\dim B.f = 4$. Soit donc $f \in \mathfrak{b}^*$ telle que $f(E_2) \neq 0$. Quitte à translater f par un élément de B_1, on peut supposer que $f = rW^* + \varepsilon E_2^*$ avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Il est alors immédiat que $\mathfrak{b}(f) \subset \mathfrak{m}$ et donc que $\mathfrak{b}(f) = \mathfrak{m}$, pour des raisons de dimension. On en déduit que les orbites $\Omega_{r,-}$ et $\Omega_{r,+}$ sont fortement régulières. Maintenant si $f(E_2) = 0$, alors $\mathbb{R}E_2 \subset \mathfrak{b}(f)$. Donc f ne peut pas être fortement régulière. Par suite, $\mathfrak{b}^*_{fr} = \{f \in \mathfrak{b}^* \mid f(E_2) \neq 0\}$ et $\Omega_{r,-}$ et $\Omega_{r,+}$, $r \in \mathbb{R}$ sont les seules B-orbites fortement régulières dans $\mathfrak{b}^*$. Comme $B = MB_1$ et comme le stabilisateur d'un point de $\Omega_\pm$ dans B_1 est trivial, on en déduit que les formes linéaires $rW^* + \varepsilon E_2^*$ et $r'W^* + \varepsilon' E_2^*$ avec $r, r' \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon, \varepsilon' \in \{\pm 1\}$, ne peuvent être dans la même B-orbite que si $r = r'$ et $\varepsilon = \varepsilon'$. Par suite, les orbites $\Omega_{r,\pm}$ sont deux à deux distinctes.

Maintenant, on va déterminer toutes les B-orbites fortement régulières admissibles dans $\mathfrak{b}^*$. On a déjà vu que les B-orbites fortement régulières (dans $\mathfrak{b}^*$) sont les $\Omega_{r,\pm}$ $r \in \mathbb{R}$. Soit donc $f = rW^* + \varepsilon E_2^* \in b^*$. On veut chercher les conditions, pour lesquelles f est admissible. Par des calculs directs, on voit que le stabilisateur de f dans B est $B(f) = \exp(\mathbb{R}W)$ et que $\xi = \mathbb{C}W \oplus \mathbb{C}(E_1 + \varepsilon i E_1') \oplus \mathbb{C}E_2$ est une polarisation positive pour la forme bilinéaire alternée B_f. Donc $\rho_\xi(W) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_{\xi/\mathbb{C}W}) = -\varepsilon \frac{i}{2}$ (car $[W, E_1 + \varepsilon i E_1'] = -\varepsilon i(E_1 + \varepsilon i E_1')$ et $[W, E_2] = 0$). Donc en appliquant le lemme 2.1, on déduit que f est admissible si et seulement s'il existe un caractère χ de $\exp(\mathbb{R}W)$ dont la différentielle est $\rho_\xi + if|_{\mathbb{R}W}$. Comme $(\rho_\xi + if|_{\mathbb{R}W})(wW) = iw(r - \varepsilon\frac{1}{2})$, $w \in \mathbb{R}$, si un tel caractère χ existe, on a $\chi(\exp(wW)) = e^{i(r-\varepsilon\frac{1}{2})w}$, $w \in \mathbb{R}$. Or il est clair que $\exp(wW) = 1$ si et seulement si $w \in 6\pi\mathbb{Z}$. Donc un tel caractère existe, si et seulement si

$6\pi i(r - \varepsilon\frac{1}{2}) \in 2\pi i\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $r + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/3$. On en déduit que **les B-orbites fortement régulières et admissibles dans $\mathfrak{b}^*$ sont les $\Omega_{r,-}$ et $\Omega_{r,+}$, avec** $r + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/3$, d'où le résultat. $\square$

Pour ce dont on a besoin ultérieurement, on va décrire explicitement les orbites $\Omega_{r,\pm}$. D'abord on a $B.(rW^* + \varepsilon E_2^*) B_1 M(rW^* + \varepsilon E_2^*) = B_1.(rW^* + \varepsilon E_2^*)$. Soit donc $b = \exp(xE_1 + yE_1')\exp(zE_2).\exp(sS)$ dans B_1, avec $x,\ y,\ z,\ s \in \mathbb{R}$. Comme $[W, E_1] = E_1'$, $[W, E_1'] = -E_1$, $[W, E_2] = [W, S] = 0$, on en déduit que $\exp(-xE_1 - yE_1').W = W + [W, xE_1 + yE_1'] + \frac{[[W, xE_1 + yE_1'], xE_1 + yE_1']}{2} = W + xE_1' - yE_1 - (\frac{x^2+y^2}{2})E_2$. Donc $b^{-1}.W = W + xe^{-s}E_1' - ye^{-s}E_1 - (\frac{x^2+y^2}{2}e^{-2s})E_2$ et $b.(rW^* + \varepsilon E_2^*)(W) = r - \varepsilon(\frac{x^2+y^2}{2})e^{-2s}$, ici $\varepsilon \in \{1, -1\}$. D'autre part, on vérifie que l'on a $b.E_2^* = (2ze^{-2s})S^* + ye^{-2s}E_1^* - xe^{-2s}E_1'^* + e^{-2s}E_2^*$. On en déduit que

$$\begin{aligned} b(rW^* + \varepsilon E_2^*) = (2\varepsilon ze^{-2s})S^* + \varepsilon ye^{-2s}E_1^* - \varepsilon xe^{-2s}E_1'^* + \varepsilon e^{-2s}E_2^* \\ + (r - \varepsilon(\frac{x^2+y^2}{2}e^{-2s}))W^*. \end{aligned}$$

Ceci montre que l'on a

$$\Omega_{r,\pm} = \{wW^* + sS^* + xE_1^* + yE_1'^* + zE_2^* \,|x,\ y,\ s \in \mathbb{R},\ \pm z > 0, w = r - \frac{x^2+y^2}{2z}\}.$$

Donc on voit facilement que deux formes linéaires de $\mathfrak{b}^*$, $f_i = w_iW^* + s_iS^* + x_iE_1^* + y_iE_1'^* + z_iE_2^*$, $i = 1,\ 2$ avec $z_1, z_2 \neq 0$ sont dans la même orbite, si et seulement si $z_1z_2 > 0$ et $w_1 + \frac{x_1^2+y_1^2}{2z_1} = w_2 + \frac{x_2^2+y_2^2}{2z_2}$. Donc $w_1W^* + \varepsilon_1E_2^*$ **et** $w_2W^* + \varepsilon_2E_2^*$ **avec** $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$ **sont dans la même orbite, si et seulement si** $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ **et** $w_1 = w_2$**, et** $f = wW^* + sS^* + xE_1^* + yE_1'^* + zE_2^* \in \mathfrak{b}^*$ **avec** $z \neq 0$**, est dans la même orbite que** $(w + \frac{x^2+y^2}{2z})W^* + \varepsilon E_2^*$ **avec** $\varepsilon z > 0$.

Une conséquence importante est que l'on obtient un difféomorphisme :

$$\Psi : \mathbb{R} \times AN \times \{\pm 1\} \longrightarrow \mathfrak{b}^*_{fr}$$

$$(r, x, \varepsilon) \longmapsto x.(rW^* + \varepsilon E_2^*).$$

Pour $f \in \mathfrak{b}^*_{fr}$, on écrit $\Psi^{-1}(f) = (r(f), x(f), \varepsilon(f))$. Alors on a $r(f) = w + \frac{x^2+y^2}{2z}$ et $\varepsilon(f) = \frac{z}{|z|}$ pour $f = wW^* + sS^* + xE_1^* + yE_1'^* + zE_2^* \in \mathfrak{b}^*_{fr}$.

5.3 La faible propreté (et la propreté) de la projection p_1

Supposons que $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ est fortement régulière de type compact (pas forcément admissible). Donc d'après ce que l'on a expliqué, sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathfrak{g}(f_0) = \mathfrak{t}$, auquel cas f_0 est de la forme $f_0 = f_0(H)H^* + f_0(Z)Z^* \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$, avec $|f_0(H)| \neq 0$ et $|f_0(H)| \neq |f_0(Z)|$ (ici, (H^*, Z^*) désigne la base duale de la base de $\mathfrak{t}$ introduite dans la section 3). D'autre part, on voit facilement que f_0 est dans le cône holomorphe (que l'on a défini dans le chapitre précédent) si et seulement si $|f_0(H)| \neq 0$ et $|f_0(H)| < |f_0(Z)|$.

Maintenant, on va déterminer $\mathrm{p}_1(G.f_0)$. Comme $G = NAK$, il est évident que $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}_{\pi_\lambda}) = \mathrm{p}_1(NAK.f_0) = NA.\mathrm{p}_1(K.f_0)$ et $K.f_0 = f_0(H)K.H^* + f_0(Z)Z^* \subset \mathfrak{g}^*$.

On identifie $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g}$ par

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$
$$X \longmapsto (Y \longmapsto -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(XY)),$$

où $X,\ Y \in \mathfrak{g}$. Puisque la forme "$\mathrm{tr}(XY)$" est proportionnelle à la forme de Killing, et $\mathrm{tr}(H^2) = -2$, $\mathrm{tr}(Z^2) = -6$, on en déduit que sous cette identification, $H^* \cong H$ et $Z^* \cong \frac{Z}{3}$.

Posons

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, on a les relations $[H, F] = 2V$, $[F, V] = 2H$ et $[V, H] = 2F$. De plus, (H, F, V) est une base orthonormée de l'algèbre dérivée $\mathfrak{k}'$ de $\mathfrak{k}$. Comme le sous-groupe dérivé K' de K est isomorphe à $SU(2)$ et les orbites coadjointes de $SU(2)$ sont de dimension 2, on voit que

$$K.H^* \cong \left\{ x_1H + x_2F + x_3V \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

Maintenant, $S,\ E_1,\ E_1',\ E_2$ sont comme dans le chapitre précédent ; ils constituent une base de $\mathfrak{b}_1$. Notons $S^*,\ E_1^*,\ E_1'^*,\ E_2^*$ la base duale correspondante dans $\mathfrak{b}_1^*$. Par des calculs directs, on montre que

$$H|_{\mathfrak{b}_1} = E_2^* \quad F|_{\mathfrak{b}_1} = -E_1^* \quad V|_{\mathfrak{b}_1} = -E_1'^* \quad Z^*|_{\mathfrak{b}_1} = \frac{Z}{3}|_{\mathfrak{b}_1} = E_2^*. \tag{1}$$

Donc

$$\mathrm{p}_1(K.H^*) = \left\{ x_1E_2^* + x_2E_1^* + x_3E_1'^* \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}$$

et

$$\mathrm{p}_1(Z^*) = E_2^*.$$

Ainsi, ona

$$\mathrm{p}_1(K.f_0) = \left\{ (f_0(H)x_1 + f_0(Z))E_2^* + f_0(H)(x_2E_1^* + x_3E_1'^*) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\}.$$

On en déduit donc que

$$\mathrm{p}_1(G.f_0) \subset \mathfrak{b}_1^{*\prime} = \mathfrak{b}_1{}^*_{fr} \Longleftrightarrow |f_0(H)| < |f_0(Z)|$$

$$\Longleftrightarrow f_0 \text{ est dans le cône holomorphe,}$$

où $\mathfrak{b}_1^{*\prime} = \{b \in \mathfrak{b}_1^* \mid b(E_2) \neq 0\}$. Surtout dans ce cas, $\mathrm{p}_1(G.f_0)$ est une B_1-orbite coadjointe ouverte dans $\mathfrak{b}_1^*$.

Maintenant on va démontrer un théorème général qui permet de conclure la faible propreté (et la propreté) de la projection p_1.

Théorème 5.3 *Soit G_1 un groupe de Lie simple linéaire connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1$. Soit $G_1 = K_1A_1N_1$ une décomposition d'Iwasawa, où K_1 est un sous-groupe compact maximal de G_1. On suppose que A_1N_1 admet une orbite coadjointe ouverte dans $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$ (où $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{n}_1$ sont les algèbres de Lie de A_1 et N_1 respectivement). Soit $g \in \mathfrak{g}_1^*$ tel que le stabilisateur $G_1(g) = T_1$ soit un tore compact. Alors pour que la projection $p_1 : \mathcal{O} := G_1.g \longrightarrow p_1(\mathcal{O}) \subset (\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$ soit faiblement propre, il faut et il suffit que $p_1(\mathcal{O})$ soit une A_1N_1-orbite coadjointe ouverte (dans $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$). De plus au cas où p_1 est faiblement propre, elle est aussi propre.*

Démonstration. D'abord, d'après le théorème 9.1 de l'appendice, $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ contient une A_1N_1-orbite coadjointe ouverte de $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$. De plus, un groupe exponentiel n'ayant pas de sous-groupe fini non trivial, A_1N_1 est difféomorphe à toutes ses orbites coadjointes ouvertes. Maintenant si $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}) \triangleq \Omega$ est une orbite coadjointe ouverte, fixons $f_1 \in \mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_1^*$ et $h_1 \in \Omega \subset (\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$. Alors

$$A_1N_1 \longrightarrow A_1N_1.h_1$$

$$a \longmapsto a.h_1$$

est un difféomorphisme. Supposons que $L \subseteq \Omega$ est un compact, et $x = b_1k_1f_1 \in p_1^{-1}(L)$ où $b_1 \in A_1N_1$, $k_1 \in K_1$. Donc $b_1.\mathrm{p}_1(k_1f_1) \in L$, et il est clair que $\mathrm{p}_1(K_1f_1)$ est un compact dans Ω. Donc selon ce qui précède, $\mathrm{p}_1(K_1f_1)$ peut s'écrire $\mathrm{p}_1(K_1f_1) = \Theta_1.h_1$, où Θ_1 est un compact dans A_1N_1. De même, $L = \Theta_2.h_1$ avec Θ_2 un compact dans A_1N_1. On en donc déduit que $b_1\Theta_1 \subset \Theta_2$. Donc $b_1 \in \Theta_2.\Theta_1^{-1}$, ainsi, on déduit que $\mathrm{p}_1^{-1}(L) \subseteq \Theta_2.\Theta_1^{-1}.K_1f_1$ qui est un compact dans l'orbite $\mathcal{O}$. Donc $\mathrm{p}_1^{-1}(L)$ est aussi compact, puisque $\mathrm{p}_1^{-1}(L)$ est fermé dans $\mathcal{O}$. Donc p_1 est propre, donc faiblement propre.

Maintenant supposons que $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ n'est pas une A_1N_1-orbite coadjointe ouverte de $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$, et $\Omega = A_1N_1.h_0$ est une orbite ouverte contenue dans $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ ici, $h_0 = \mathrm{p}_1(g)$ avec $g \in \mathcal{O}$. Il est clair que $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}) = A_1N_1.\mathrm{p}_1(K_1.g)$. Donc on en déduit que $\mathrm{p}_1(K_1.g) \nsubseteq \Omega$. D'autre part, on a $\overline{\Omega} \bigcap \mathrm{p}_1(\mathcal{O}) \supsetneqq \Omega$, où $\overline{\Omega}$ est l'adhérence de Ω dans $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$. En effet, sinon $\overline{\Omega} \bigcap \mathrm{p}_1(\mathcal{O}) = \Omega$, donc Ω est ouvert et fermé dans $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ qui est connexe (car G_1 est supposé connexe), donc $\Omega = \mathrm{p}_1(\mathcal{O})$. Ceci est une contradiction avec l'hypothèse « $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ n'est pas une orbite ouverte ». Donc on en déduit qu'il existe une suite $\{k_n\}$ dans K_1 telle que $\mathrm{p}_1(k_n.\lambda) \in \Omega$ et $\mathrm{p}_1(k_n.g) \longrightarrow h \notin \Omega$. Il est clair que $\mathrm{p}_1(k_n.g)$ s'écrit d'une façon unique $\mathrm{p}_1(k_n.g) = l_n.h_0$, avec $l_n \in A_1N_1$. Donc on en déduit que la suite $\{l_n\}$ n'est pas bornée dans A_1N_1 (c'est-à-dire $\{l_n\}$ n'est pas contenue dans un compact de A_1N_1). Donc $\{(l_n)^{-1}\}$ n'est pas bornée dans A_1N_1. D'autre part, il est clair que $(l_n)^{-1}k_n.g \in \mathrm{p}_1^{-1}(\{h_0\})$. Or il est bien connu que $\mathcal{O}$ est difféomorphe à $A_1N_1 \times K_1/T_1$, où T_1 est le stabilisateur $G_1(g)$ qui est d'après l'hypothèse, un tore de K_1. Donc on en déduit que $\mathrm{p}_1^{-1}(\{h_0\})$ n'est pas compact, donc p_1 n'est pas faiblement propre. Le théorème est donc bien démontré.

$\square$

Maintenant, on revient à $G = SU(2,1)$. Il est clair que les conditions du théorème précédent sont vérifiées pour G et $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ fortement régulière. Donc selon ce que l'on a obtenu, on a le théorème suivant :

Théorème 5.4 *Soit* $f_0 \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ *une forme linéaire fortement régulière. On pose* $\mathcal{O}_{f_0} = G.f_0$*. Alors la projection* $p_1 : \mathcal{O}_{f_0} \longrightarrow p_1(\mathcal{O}_{f_0}) \subset \mathfrak{b}_1^*$ *est propre ou faiblement propre, si et seulement si* f_0 *est dans le cône holomorphe.*

Gardons les notations du théorème 5.3 et supposons de plus que G_1/K_1 est un espace hermitien symétrique. Alors il est bien connu que A_1N_1 admet des orbites coadjointes ouvertes. Dans ce cas Rossi et Vergne ([29]) ont demontré le résultat suivant : si π est une série discrète holomorphe ou anti-holomorphe de G_1, alors π est A_1N_1-admissible (dans le chapitre suivant, on va détailler plus sur les résultats de Rossi-Vergne). D'autre part Rosenberg et Vergne ([28]) ont demontré que si π est une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe (de G_1), alors π n'est pas A_1N_1-admissible. La mise en perspective de ces résultats, du théorème 5.3 et la conjecture de Duflo nous amène à poser une autre conjecture :

Conjecture : En gardant les notations du théorème 5.3, on suppose que G_1/K_1 est un espace hermitien symétrique et π est une série discrète de G_1 avec G_1-orbite coadjointe associée $\mathcal{O}_\pi \subset \mathfrak{g}_1^*$. Alors nous conjecturons que π **est holomorphe ou anti-holomorphe, si et seulement si** $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}_\pi)$ **est une** A_1N_1**-orbite coadjointe ouverte dans** $(\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1)^*$. Plus généralement si $\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}_1^*$ est l'orbite coadjointe d'un élément $f \in \mathfrak{g}_1^*$ dont le stabilisateur est un tore compact, alors les assertions suivantes sont équivalentes

(i) p_1 est propre
(ii) p_1 est faiblement propre
(iii) $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ est une A_1N_1-orbite coadjointe.
(iv) $\mathrm{p}_1(\mathcal{O})$ est une A_1N_1-orbite coadjointe ouverte.
(v) f est dans le cône holomorphe.

5.4 La faible propreté (et la propreté) de la projection p

Théorème 5.5 *Soit $f_0 \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire fortement régulière et $\mathcal{O}_{f_0} = G.f_0$. Alors la projection $p : \mathcal{O}_{f_0} \longrightarrow p(\mathcal{O}_{f_0}) \subset \mathfrak{b}^*$ est faiblement propre. De plus elle est propre si et seulement si f_0 est dans le cône holomorphe.*

Démonstration. Rappelons que $\mathfrak{b} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, et W, S, E_1, E_1' et E_2 est une base de $\mathfrak{b}$, où S, E_1, E_1' et E_2 sont comme dans la section précédente et

$$W = \frac{i}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}.$$

Notons W^*, S^*, E_1^*, $E_1'^*$ et E_2^* la base duale de $\mathfrak{b}^*$. Soit $k \in K$. Comme $\mathfrak{p}$ est K-invariant, $\mathrm{p}(K.f_0)$ est contenu dans l'orthogonal de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \mathbb{R}S$. On a donc

$$\mathrm{p}(k.f_0) = \langle k.f_0, W\rangle W^* + \langle k.f_0, E_2\rangle E_2^* + \langle k.f_0, E_1\rangle E_1^* + \langle k.f_0, E_1'\rangle E_1'^*.$$

De sorte que $\mathrm{p}(k.f_0) \in \mathfrak{b}^*_{fr} \Leftrightarrow \langle k.f_0, E_2\rangle \neq 0$. Soit $K' = \{k \in K | \langle k.f_0, E_2\rangle \neq 0\}$, c'est un ouvert de K. Maintenant, rappelons que l'on a obtenu un difféomorphisme :

$$\Psi : \mathbb{R} \times AN \times \{\pm 1\} \longrightarrow \mathfrak{b}^*_{fr}$$

$$(r, x, \varepsilon) \longmapsto x.(rW^* + \varepsilon E_2^*),$$

et que, pour $f = wW^* + sS^* + xE_1^* + yE_1'^* + zE_2^* \in \mathfrak{b}^*_{fr}$, $\Psi^{-1}(f) = (r(f), x(f), \varepsilon(f))$, avec $r(f) = w + \frac{x^2+y^2}{2z}$ et $\varepsilon(f) = \frac{z}{|z|}$.

Soit donc $k \in K'$, on pose $r(k) = r(\mathrm{p}(k.f_0))$, $x(k) = x(\mathrm{p}(k.f_0))$ et $\varepsilon(k) = \varepsilon(\mathrm{p}(k.f_0))$. Alors

$$r(k) = \langle k.f_0, W\rangle + \frac{\langle k.f_0, E_1\rangle^2 + \langle k.f_0, E_1'\rangle^2}{2\langle k.f_0, E_2\rangle}.$$

Maintenant soit H, F, V et Z comme dans la section précédente. Alors, on a

$$k.f_0 = \langle k.f_0, H\rangle H^* + \langle k.f_0, F\rangle F^* + \langle k.f_0, V\rangle V^* + \langle f_0, Z\rangle Z^* \in \mathfrak{g}^*,$$

avec $\langle k.f_0, H\rangle^2 + \langle k.f_0, F\rangle^2 + \langle k.f_0, V\rangle^2 = \langle f_0, H\rangle^2$ et ici pour $X \in \mathfrak{g}$, $\langle H^*, X\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(HX)$, $\langle F^*, X\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(FX)$, $\langle V^*, X\rangle = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(VX)$ et $\langle Z^*, X\rangle = -\frac{1}{6}\mathrm{tr}(ZX)$.

D'autre part, par des calculs directs, on a $\langle H^*, W\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle F^*, W\rangle = \langle V^*, W\rangle = 0$ et $\langle Z^*, W\rangle = -\frac{1}{6}$, de sorte que $\langle k.f_0, W\rangle = \frac{1}{2}\langle k.f_0, H\rangle - \frac{1}{6}\langle f_0, Z\rangle$. Enfin, il suit des relations 1 que $\langle k.f_0, E_2\rangle = \langle k.f_0, H\rangle + \langle f_0, Z\rangle$, $\langle k.f_0, E_1\rangle = -\langle k.f_0, F\rangle$ et $\langle k.f_0, E_1'\rangle = -\langle k.f_0, V\rangle$.

Donc on a

$$r(k) = \langle k.f_0, W\rangle + \frac{\langle k.f_0, E_1\rangle^2 + \langle k.f_0, E_1'\rangle^2}{2\langle k.f_0, E_2\rangle}$$

$$= \frac{1}{2}\langle k.f_0, H\rangle - \frac{1}{6}\langle f_0, Z\rangle + \frac{\langle f_0, H\rangle^2 - \langle k.f_0, H\rangle^2}{2(\langle k.f_0, H\rangle + \langle f_0, Z\rangle)}$$

$$= \frac{1}{3}\langle f_0, Z\rangle + \frac{\langle f_0, H\rangle^2 - \langle f_0, Z\rangle^2}{2(\langle k.f_0, H\rangle + \langle f_0, Z\rangle)},$$

soit

$$r(k) = \frac{1}{3}\langle f_0, Z\rangle + \frac{\langle f_0, H\rangle^2 - \langle f_0, Z\rangle^2}{2\langle k.f_0, E_2\rangle} \quad (**).$$

Maintenant, pour $\delta > 0$, posons $K_\delta = \{k \in K| \mid \langle k.f_0, E_2\rangle \mid \geqslant \delta\}$, c'est un compact de K.

Soit $\Gamma \subset \mathfrak{b}^*_{fr}$ un compact. Alors il existe $u < v \in \mathbb{R}$ et $L \subset AN$ compact tels que $\Gamma \subset \Psi([u, v] \times L \times \{\pm 1\})$. Soit $k \in K$, alors si $AN\mathrm{p}(k.f_0) \cap \Gamma \neq \emptyset$, on a $k \in K'$ et $r(k) \in [u, v]$. Compte tenu de la formule $(**)$ donnant $r(k)$, cela montre qu'il existe $\delta > 0$ tel que l'ensemble $K_\Gamma = \{k \in K | AN\mathrm{p}(k.f_0) \cap \Gamma \neq \emptyset\}$ est contenu dans K_δ. Soit $x \in AN$ et $k \in K$, alors on a

$$\mathrm{p}(xk.f_0) \in \Gamma \Leftrightarrow k \in K_\Gamma \;\text{ et }\; xx(k)(r(k)W^* + \varepsilon(k)E_2^*) \in \Gamma$$

$$\Rightarrow k \in K_\delta,\; r(k) \in [u, v] \;\text{ et }\; xx(k) \in L$$

$$\Rightarrow k \in K_\delta, \;\text{ et }\; x \in L(x(K_\delta))^{-1}.$$

On voit donc que $\mathrm{p}^{-1}(\Gamma) \subset L(x(K_\delta))^{-1}K_\delta f_0$. Or L et K_δ étant compact et $\mathrm{p}^{-1}(\Gamma)$ étant fermé, on en déduit que $\mathrm{p}^{-1}(\Gamma)$ est compact, donc p est faiblement propre.

Maintenant, si $\mid f_0(Z) \mid > \mid f_0(H) \mid$, on a $\mathrm{p}(G.f_0) \subset \mathfrak{b}^*_{fr}$. Donc p est propre. Si $\mid f_0(Z) \mid < \mid f_0(H) \mid$, alors on voit facilement que $K \backslash K' \neq \emptyset$ et si $k \in K \backslash K'$, on vérifie directement que $\exp \mathbb{R}E_2.(k.f_0) \subset \mathrm{p}^{-1}(\mathrm{p}(k.f))$ de sorte que p n'est pas propre. Donc la démonstration est bien achevée.

$\square$

6 Représentations

Toutes les notations concernant $G = SU(2,1)$ des chapitres précédents sont gardées pour ce chapitre.

Soit π_λ la série discrète de G avec le paramètre de Harish-Chandra $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$. Selon le chapitre 3, on peut supposer que λ correspond à un ensemble de racines positives Δ_j^+ défini dans le chapitre 3, où $j \in \{1,2,3\}$. D'après la théorie de Duflo (dans ce cas là c'est aussi la théorie de Harish-Chandra pour les groupes de Lie réductifs), π_λ correspond à la forme linéaire $f_0 = -i\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$, où l'inclusion "$\mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$" est relative à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus [\mathfrak{t}, \mathfrak{g}]$ (et aussi à la forme de Killing). Dans ce cas, comme on a déjà évoqué dans le chapitre 2, il y a un seul élément τ dans $X(f_0)$, et $T^G_{f_0,\tau} \cong \pi_\lambda$. Pour simplifier, on $T^G_{f_0,\tau}$ par $T^G_{f_0}$ et on désigne l'orbite coadjointe associée $G.f_0$ par $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}$. De plus on note la complexifiée de f_0 encore f_0. Donc on a $f_0(E_{ij}) = 0$, et $f_0|_\mathfrak{t} = -i\lambda$, où les $E_{ij},\ i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant 3)$ sont des matrices élémentaires dans $M_3(\mathbb{C})$.

Dans ce chapitre, on va déterminer la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ et $\pi_\lambda|_{NA}$ en combinant plusieurs travaux et méthodes différents. Puis on va confirmer la conjecture de Duflo pour $G = SU(2,1)$ en interprétant la décomposition dans le cadre de la méthode des orbites. Enfin, on va en retirer des conséquences sur des systèmes différentiels qui semblent difficilement s'obtenir directement.

Maintenant on énonce le plan de ce chapitre :

1) Description des représentations (irréductibles et unitaires) de B_1 et de B associées aux orbites (coadjointes) fortement régulières et admissibles.

2) Interprétation des travaux de Rossi-Vergne et confirmation de la conjecture de Duflo pour les séries discrètes holomorphes et anti-holomorphes de G.

3) Construction des séries discrètes de G par des formes harmoniques (sens généralisé de L^2-Cohomologie).

4) Application de 3) à la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ (et de $\pi_\lambda|_{B_1}$).

5) Etude du comportement asymptotique des solutions des systèmes différentiels liés à 4).

6) Interprétation et application des travaux de Fabec et de ceux de Kraljevic.

7) Confirmation des assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour $G = SU(2,1)$.

8) Conséquences sur les systèmes différentiels dans 5).

6.1 Description des représentations (irréductibles et unitaires) de B_1 et de B associées aux orbites (coadjointes) fortement régulières et admissibles

Dans le chapitre précédent, on a déjà vu qu'il y a deux orbites coadjointes fortement régulières et admissibles dans $\mathfrak{b}_1^*$: Ω^- et Ω^+, notons $f_\pm = \pm E_2^* \in \Omega^\pm \subset \mathfrak{b}_1^*$. Le stabilisateur de $f_\pm$ dans B_1 étant trivial, il y a un seul élément $\tau_\pm$ dans $X(f_\pm)$, donc une seule représentation unitaire irréductible associée à $\Omega^\pm$, on la note $\mathrm{T}_\pm$. Puisque Ω^- et Ω^+ sont ouvertes, T_- et T_+ sont des séries discrètes de B_1 (en fait il n'y a que deux séries discrètes pour B_1).

Maintenant en suivant la construction de Duflo, on va donner une réalisation concrète pour T_- et T_+.

Posons $n_\pm = f_\pm|_{\mathfrak{n}}$. Alors, $\mathfrak{n}$ est le radical unipotent de $\mathfrak{b}_1$ et le stabilisateur de $n_\pm$ dans B_1 est le centre Z de N. On en déduit que

$$\mathrm{T}_\pm = \underset{N}{\overset{B_1}{\mathrm{Ind}\!\uparrow}} \mathrm{T}_{n_\pm}$$

où $\mathrm{T}_{n_\pm}$ est la représentation irréductible unitaire de N associée à $n_\pm$ par la méthode des orbites de Kirillov.

On vérifie que $\mathfrak{l}_\pm = \mathbb{C}\,(E_1 \pm iE_1') \oplus \mathbb{C}E_2 \subset \mathfrak{n}_\mathbb{C}$ est une polarisation positive de $f_\pm$, c'est aussi une polarisation positive pour $n_\pm = f_\pm|_{\mathfrak{n}}$.

Nous réalisons alors $\mathrm{T}_{n_\pm}$ comme une induite holomorphe : Soit φ une fonction lisse sur N qui vérifie

$$X * \varphi = -n_\pm(X)\varphi \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{l}_\pm \qquad (\Delta)$$

où, $X * \varphi$ est l'action de X sur φ en tant qu'opérateur différentiel invariant à gauche.(ici, on prolonge naturellement l'action à $\mathfrak{n}_\mathbb{C}$, plus préciséent, pour $X, Y \in \mathfrak{n}$, $X * \varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi(x\exp(tX)\big|_{t=0}$, et $(X + iY) * \varphi = X * \varphi + iY * \varphi)$.

Comme $E_2 \in \mathfrak{l}_\pm$, on peut donc déduire facilement que pour tout $X \in \mathbb{R}E_2$, $\varphi(x\exp(X)) = e^{-in_\pm(X)}\varphi(x)$. Donc, $|\varphi|^2$ est bien définie sur $N/\exp(\mathbb{R}E_2)$. Notons $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ le complété hilbertien de l'espace préhilbertien des fonctions lisses sur B_1 qui vérifient (Δ) avec la norme

$$\|\varphi\|^2 = \int_{N/\exp(\mathbb{R}E_2)} |\varphi|^2 dx < +\infty,$$

où dx est la mesure invariante à gauche sur $N/\exp(\mathbb{R}E_2)$. On sait qu'elle existe, puisque $\exp(\mathbb{R}E_2)$ est distingué dans N. Il est clair que N opère dans $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ par translations à gauche, et cette représentation que l'on note $\rho(\ f_\pm,\ \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ est bien une réalisation de $T_{n_\pm}$. Similairement, on peut définir une représentation $\rho(\ f_\pm,\ \mathfrak{l}_\pm,\ B_1)$ de B_1 dans $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ B_1)$ (il suffit de remplacer N par B_1). Puisque B_1 est le produit semidirect de A et N, on déduit que

$$\rho(\ f_\pm,\ \mathfrak{l}_\pm,\ B_1) \cong \underset{N}{\overset{B_1}{\mathrm{Ind}\!\uparrow}} \mathrm{T}_{n_\pm} = \mathrm{T}_\pm.$$

Maintenant soit $V = \mathbb{R}E_1 \oplus \mathbb{R}E_1'$. Alors $\ell_\pm = \mathfrak{l}_\pm \cap V_\mathbb{C}$ est un lagrangien complexe totalement positif de V pour $B_{n_\pm}$, et on a un isomorphisme (d'espaces vectoriels réels) :

$$V \cong \ell_\pm$$

$$x \longmapsto v_x \qquad \text{où } v_x \text{ est l'unique élément de } \ell_\pm \text{ tel que } x = v_x + \overline{v_x}.$$

D'où la structure complexe et hermitienne sur V : $\langle x, x\rangle = -iB_{n_\pm}(v_x, \overline{v_x}),\ x \in V$.

Soient $Sp(V)$ le groupe symplectique de V pour $B_{n_\pm}$, et $Mp(V)$ le groupe métaplectique qui agissent dans N par automorphismes. Alors il existe une unique représentation $\mathrm{S}_{n_\pm}$ (la représentation métaplectique) de $Mp(V)$ dans $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ qui vérifie

$$S_{n_\pm}(x.y) = S_{n_\pm}(x)\mathrm{T}_{n_\pm}(y)S_{n_\pm}(x)^{-1},\ \ x \in Mp(V),\ y \in N.$$

Soit $U(\ell_\pm) = \{x \in Sp(V)|x.\ell_\pm = \ell_\pm\} \cong U(V)$ le groupe unitaire de V (pour la structure hermitienne définie plus haut), et $\widetilde{U}(\ell_\pm)$ son image réciproque dans $Mp(V)$. Alors on a

$$\widetilde{U}(\ell_\pm) \cong \{(u,z) \in U(\ell_\pm) \times C^\times\}|z^2 = \det_{\ell_\pm} u\}.$$

Soit $\chi_\pm$ le caractère de $\widetilde{U}(\ell_\pm)$ tel que $\chi_\pm(u,z) = z$. Alors on définit une représentation $S'_{n_\pm}$ de $U(\ell_\pm)$ dans $\mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ N)$ par

$$S'_{n_\pm}(x)\varphi(z) = \varphi(x^{-1}z).$$

Il vient alors

$$S_{n_\pm}(x) = \chi_\pm(x)S'_{n_\pm}(x),\ \ x \in \widetilde{U}(\ell_\pm).$$

Cela dit l'action adjointe de M dans $\mathfrak{n}$ stabilise V et est triviale sur $\mathbb{R}E_2$. Elle permet d'identifier M à $U(V)$. La représentation $\mathrm{T}_{n_\pm}$ s'étend donc à MN comme la représentation $S'_{n_\pm}\mathrm{T}_{n_\pm}$.

Maintenant soit $\widetilde{\mathrm{T}_\pm} = \mathrm{Ind} \underset{MN}{\overset{MAN}{\uparrow}} S'_{n_\pm}\mathrm{T}_{n_\pm}$. Alors il est clair que $\widetilde{\mathrm{T}_\pm}|_{B_1} \cong \mathrm{Ind}\underset{N}{\overset{B_1}{\uparrow}}\mathrm{T}_{n_\pm} = \mathrm{T}_\pm$ de sorte que $\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ prolonge $T_\pm$ à $B = MB_1$. D'autre part, on vérifie facilement que

$$(\widetilde{\mathrm{T}_\pm}(x)\varphi)(y) = \varphi(x^{-1}yx),\ \ \varphi \in \mathbb{H}(n_\pm, \mathfrak{l}_\pm,\ B_1)\ \ x \in M,\ y \in B_1.$$

On a vu que les B-orbites fortement régulières et admissibles dans $\mathfrak{b}^*$ sont les $\Omega_{r,-}$ et $\Omega_{r,+}$, avec $r + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/3$.

Maintenant, on va appliquer la théorie de Duflo au sous-groupe de Borel $B = MAN$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{b} = \mathfrak{w} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$.

On a vu que pour $f_{r,\pm} = rW^* \pm E_2^* \in \Omega_{r,\pm}$, $B(f_r^\pm) = \exp \mathbb{R}W = M = U(V)$ est un tore de dimension 1. Donc $B(f_{r,\pm})^\mathfrak{b}$ s'identifie à $\widetilde{U}(\ell_\pm)$ qui est un tore connexe . Ainsi on en déduit que si $f_{r,\pm}$ est admissible (i.e. $r + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}/3$), $X(f)$ contient un seul élément que l'on note $\tau_{r,\pm}$, et $T^B_{f_{r,\pm},\tau_{r,\pm}}$ est la seule représentation unitaire irréductible associée à $\Omega_{r,\pm}$. Pour simplifier, pour $m \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{T}_{m,-} := T^B_{f_{r,-},\tau_{r,-}}$**, la représentation unitaire irréductible associée à** $\Omega_{r,-}$**, avec** $r = \frac{m}{3} - \frac{1}{2}$**, et** $\mathrm{T}_{m,+} \triangleq T^B_{f_{r,-},\tau_{r,+}}$**, mais avec** $r = \frac{m}{3} + \frac{1}{2}$. D'autre part, puisque $B(f_r^\pm) = \exp \mathbb{R}W$ est compact, selon la théorie de Duflo, l'ensemble $\{\mathrm{T}_{m,\pm} :\ m \in \mathbb{Z}\}$ **est exactement l'ensemble des séries discrètes de** B. On voit donc que **la formule de Plancherel pour** B **ou** B_1 **ne fait apparaître que des séries discrètes**.

Dans la suite de cette section, on va donner une description concrète pour toutes les $\mathrm{T}_{m,\pm}$. Cette description est inspirée de Rossi-Vergne ([29]), et on va voir qu'elle est très utile dans la section 6.4 pour faire intervenir la formule de Plancherel.

Pour $m \in \mathbb{Z}$, on note σ_m le caractère de M tel que $\sigma_m(\exp tW) = e^{i(\frac{mt}{3})},\ \ t \in \mathbb{R}$.

On a déjà défini $\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$. D'autre part puisque B_1 est distingué dans B, il est évident que l'on peut prolonger trivialement σ_m en une représentation unitaire irréductible de B (c'est-à-dire que l'action de B_1 est triviale), on la note encore σ_m. Il est facile de voir que les représentations $\sigma_m \otimes \widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ sont irréductibles, $\forall m \in \mathbb{Z}$, on va démontrer qu'elles ne sont rien d'autres que $\mathrm{T}_{m,\pm}$.

Théorème 6.1 *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{T}_{m,\pm} \cong \sigma_m \otimes \widetilde{\mathrm{T}_\pm}$.*

Démonstration. Pour $m \in \mathbb{Z}$, posons $r_{m,\pm} = \frac{m}{3} \pm \frac{1}{2}$, et $f_{m,\pm} = r_{m,\pm}W^* \pm E_2^* \in \Omega_{r,\pm}$. D'abord, il est clair que le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{b}$ est $\mathfrak{n}$, et $n_\pm = f_{m,\pm}|_{\mathfrak{n}}$, où $n_\pm \in \mathfrak{n}^*$ est ce que l'on a défini pour B_1. Posons aussi $f^1_{m,\pm} = f_{m,\pm}|_{\mathfrak{b}_1}$ qui est en fait indépendant de m. On a vu que $\mathfrak{l}_\pm = \mathbb{C}\,(E_1 \pm iE_1') \oplus \mathbb{C}E_2 \subset \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ est une polarisation positive pour $n_{m,\pm}$ et $f^1_{m,\pm}$. De plus $\mathfrak{l}'_\pm = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{l}_\pm$ en est une pour $f_{m,\pm}$. D'autre part par des calculs directs, on a $B(f_{m,\pm}) = B(f^1_{m,\pm}) = M$ et $B(n_{m,\pm}) = M \exp \mathbb{R}E_2$. Donc $B(n_{m,\pm})N = MN$, et on en déduit que les revêtements métaplectiques $B(f_{m,\pm})^{\mathfrak{b}}$ et $B(f^1_{m,\pm})^{\mathfrak{b}_1}$ et l'image réciproque de M dans $B(n_{m,\pm})^{\mathfrak{n}}$ sont canoniquement isomorphes à

$$\widetilde{M_\pm} = \left\{ (x,z) \in \exp \mathbb{R}W \times \mathbb{C}^\times \,\middle|\, x = \exp tW,\ z^2 = \det(\exp tW|_{\mathfrak{l}_\pm}) \right\}.$$

Comme pour B_1, on définit le caractère $\chi_\pm$ pour $\widetilde{M_\pm}$ tel que $\chi_\pm(\exp tW, z) = z$. On vérifie directement que $\det(\exp tW|_{\mathfrak{l}_\pm}) = e^{\mp it}$ de sorte que $\tau_\pm = \sigma_m \chi_\pm^{-1}$ est le seul élément dans $X(f_{m,\pm})$, où σ_m est le caractère unitaire de M que l'on a défini plus haut.

Alors, d'après les résultats de la section 2, on a

$$\mathrm{T}_{m,\pm} = \mathrm{Ind}_{MN}^{B}(\tau_\pm \otimes S_{n_\pm} T_{n_\pm})$$

$$= \mathrm{Ind}_{MN}^{B}(\sigma_m \otimes S'_{n_\pm} \mathrm{T}_{n_\pm})$$

$$= \sigma_m \otimes \mathrm{Ind}_{MN}^{B} S'_{n_\pm} \mathrm{T}_{n_\pm}$$

$$= \sigma_m \otimes \widetilde{T_\pm},$$

d'où le résultat. □

Corollaire 6.2 *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Alors le caractère central de la représentation $T_{m,\pm}$ est la restriction du caractère σ_m au centre Z_G de B.*

Démonstration. L'action de Z_G par automorphismes dans N étant triviale, le caractère central de la représentation $\widetilde{T_\pm}$ est trivial. D'où le corollaire. □

6.2 Interprétation des travaux de Rossi-Vergne et confirmation de la conjecture de Duflo pour les séries discrètes holomorphes et anti-holomorphes de G

Dans cette section, on garde les notations de la section 6.1. On suppose que π_λ est une série discrète holomorphe (pour les séries discrètes anti-holomorphes, on a exactement les mêmes résultats), i.e. λ correspond à $\Delta_1^+ = \{\alpha_{12},\ \alpha_{32},\ \alpha_{31}\}$, ceci équivaut à $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$. Comme on a déjà expliqué, π_λ est associée à $f_0 = -i\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ (au sens de Duflo). Puisque $H = iH_{12}$ et $Z = i(-H_{12} - 2H_{31})$, on a $f_0(H) = -i\lambda(iH_{12}) = \lambda(H_{12})$ et $f_0(Z) = -i\lambda(i(-H_{12}-2H_{31})) = -\lambda(H_{12}+2H_{31})$ (donc surtout $f_0(Z)+f_0(H) < 0$). Donc on en déduit facilement que π_λ est une série discrète holomorphe équivaut à dire que $f_0(H) \in \mathbb{N}^+$ et $f_0(Z)+f_0(H)$ est un entier pair strictement négatif. Dans la suite de cette section on va exprimer les résultats en fonction de $f_0(H)$ et $f_0(Z)$.

Il est clair que le paramètre de Blattner de π_λ est $\Lambda = \lambda+\delta_G-2\delta_K = \lambda+\alpha_{31}$.

Notons U_Λ la représentation unitaire irréductible de K, dont le plus haut poids est Λ (par rapport à $\Delta_{1,K}^+ = \{\alpha_{12}\}$). En appliquant la formule de Weyl, la dimension de U_Λ

$$\begin{aligned} d_\Lambda &= \prod_{\alpha\in\Delta_{1,K}^+} \langle \Lambda + \delta_K,\ \alpha\rangle \Big/ \prod_{\alpha\in\Delta_{1,K}^+} \langle \delta_K,\ \alpha\rangle \\ &= \langle \Lambda + \delta_K,\ \alpha_{12}\rangle / \langle \delta_K,\ \alpha_{12}\rangle \\ &= \langle \Lambda + \delta_K,\ H_{12}\rangle / \langle \delta_K,\ H_{12}\rangle \\ &= (\, f_0(H) - 1 + 1)/\, 1 = f_0(H). \end{aligned}$$

Dans [29], Rossi et Vergne on donné une description de la restriction d'une série discrète holomorphe d'un groupe de Lie simple à un sous-groupe de Borel. Nous allons appliquer leur résultat au cas qui nous intéresse et ensuite l'interpréter dans le cadre de la méthode des orbites.

Rappelons que les caractères de M sont les σ_m, $m \in \mathbb{Z}$ définis par

$$\sigma_m(\exp tW) = e^{i(\frac{mt}{3})}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On peut donc écrire

$$U_\Lambda|_M \cong \bigoplus_{m=0}^{f_0(H)-1} \sigma_{\Lambda_m},\ \text{où } \Lambda_m \in \mathbb{Z}.$$

Alors d'après [29], on a :

Théorème 6.3 *La restriction de la série discrète holomorphe π_λ à $B = MAN$ peut se décomposer de la manière suivante :*

$$\pi_\lambda|_B \cong \bigoplus_{m=0}^{f_0(H)-1} \sigma_{\Lambda_m} \otimes \widetilde{\mathrm{T}_-}.$$

Donc on déduit que

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong f_0(H).\mathrm{T}_-$$

Rappelons qu'ici T_- est la série discrète de B_1 associée à l'orbite Ω^- et $\widetilde{\mathrm{T}_-}$ estson prolongement à B que l'on a défini dans la section 6.1.

Puisque dans la section 6.1, on a montré que $\mathrm{T}_{m,-} \cong \sigma_m \otimes \widetilde{\mathrm{T}_-}$ (rappelons que $\mathrm{T}_{m,-}$ est la série discrète de B associée à $\Omega_{r,-}$, avec $r = \frac{m}{3} - \frac{1}{2}$), on obtient que $\pi_\lambda|_B \cong \bigoplus_{m=0}^{f_0(H)-1} \mathrm{T}_{\Lambda_m,-}$.

Dans la suite, on va calculer explicitement les Λ_m.

Comme $M = \exp(\mathbb{R}W)$ est un tore de dimension 1, il suffit de calculer les valeurs propres de $dU_\Lambda(W)$. Or on a, $W = \frac{1}{2}H - \frac{1}{6}Z$. Comme Z est central dans $\mathfrak{k}$, $dU_\Lambda(Z)$ est l'opérateur scalaire $\Lambda(Z)Id$. Par ailleurs, $\Lambda(Z) = (\lambda + \alpha_{31})(Z) = i(f_0(Z) - 3)$. D'autre part, la restriction de U_Λ à K' est la représentation irréductible de dimension $f_0(H)$ de $K' = SU(2)$. On sait alors que les valeurs propres de $dU_\Lambda(H)$ sont les $f_0(H)-1-2m$, avec m entier et $0 \le m \le f_0(H)-1$. On voit donc que les valeurs propres de $dU_\Lambda(W)$ sont $\frac{i(f_0(H)-1-2m)}{2} - \frac{i(f_0(Z)-3)}{6} = i(\frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6} - m)$. On en déduit donc que $\Lambda_m = \frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{2} - 3m$. Donc on peut résumer :

Proposition 6.4 *Soit π_λ une série discrète holomorphe de $G = SU(2,1)$ avec λ son paramètre de Harish-Chandra qui vérifie que $\lambda(H_{12}) = \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$. Soit $f_0 = -i\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ la forme linéaire associée (au sens de Duflo). Alors on a*

$$\pi_\lambda|_B \cong \bigoplus_{m=0}^{f_0(H)-1} \mathrm{T}_{(\frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{2} - 3m),-}$$

et

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong f_0(H).\mathrm{T}_-$$

Pour les séries discrètes anti-holomorphes, on a un résultat complètement analogue.

Maintenant, on va démontrer la conjecture de Duflo pour π_λ holomorphe ou anti-holomorphe.

Supposons toujours que π_λ est holomorphe, et soit $f_0 = -i\lambda$ la forme linéaire associée (au sens de Duflo). Donc l'orbite coadjointe associée $\mathcal{O}_\lambda$ de π_λ est $G.f_0$. Rappelons que l'on a noté les projections $\mathrm{p} : \mathcal{O}_\lambda \longrightarrow \mathrm{p}(\mathcal{O}_\lambda) \subset \mathfrak{b}^*$ et $\mathrm{p}_1 : \mathcal{O}_\lambda \longrightarrow \mathrm{p}_1(\mathcal{O}_\lambda) \subset \mathfrak{b}_1^*$. On a vu que dans notre cas $f_0(Z) + f_0(H) < 0$. Donc d'après la formule de la section 5.3 qui donne $\mathrm{p}_1(K.f_0)$, on a $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}_\lambda) = \Omega^-$. Donc d'après la proposition précédente et le théorème 5.3, **les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont confirmées pour** (G, π_λ, B_1).

Soit maintenant $k \in K$, on a vu dans la section 5.4 que $\mathrm{p}(k.f_0) \in \mathfrak{b}_{fr}^*$ si et seulement si $\langle k.f_0, E_2\rangle \neq 0$. Or $\langle k.f_0, E_2\rangle = \langle k.f_0, H\rangle + \langle f_0, Z\rangle$ avec $|\langle k.f_0, H\rangle| \le |\langle f_0, H\rangle|$, d'après ce qui précède, $\langle k.f_0, E_2\rangle < 0$. Donc on a $\mathrm{p}(k.f_0) \subset \mathfrak{b}_{fr}^*$. Donc $\mathrm{p}(G.f_0) \subset \mathfrak{b}_{fr}^*$. Plus précisément, d'après la formule $(**)$ de la section 5.4 et ce qui la précède, on déduit que

$$\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda}) = \bigcup_{k\in K} B.(r(k)W^* - E_2^*) = \bigcup_{k\in K} \Omega_{r(k),-},$$

où $r(k) = \frac{1}{3}\langle f_0, Z\rangle + \frac{\langle f_0,H\rangle^2 - \langle f_0,Z\rangle^2}{2(\langle k.f_0,H\rangle + \langle f_0,Z\rangle)}$.

On a déjà vu que $\{\langle k.f_0, H\rangle | k \in K\} = [-|\langle f_0, H\rangle|, |\langle f_0, H\rangle|]$, on en déduit donc facilement que $\{r(k)|k \in K\} = [\frac{-(3f_0(H)+f_0(Z))}{6}, \frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6}]$. Donc on a

$$\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda}) = \bigcup_{\frac{-(3f_0(H)+f_0(Z))}{6} \leq r \leq \frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6}} \Omega_{r,-}.$$

Remarquons que $-(3f_0(H) + f_0(Z))$ et $3f_0(H) - f_0(Z)$ sont des entiers pairs, on en déduit qu'il y a $3f_0(H)$ B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles dans $\mathfrak{b}^*$ qui sont contenues dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda})$: Elles sont

$$\Omega_{(\frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6}+\frac{1-m}{3}-\frac{1}{2}),-},$$

où $0 \leq m \leq 3f_0(H) - 1$ et $m \in \mathbb{Z}$. On l'écrit comme une proposition. Voici

Proposition 6.5 *Soit π_λ une série discrète holomorphe de $G = SU(2,1)$ avec λ son paramètre de Harish-Chandra qui vérifie que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$ et $f_0 = -i\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ la forme linéaire associée (au sens de Duflo). Alors il y a $3f_0(H)$ B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles de $\mathfrak{b}^*$ qui sont contenues dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda})$: Elles sont*

$$\Omega_{(\frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6}+\frac{1-m}{3}-\frac{1}{2}),-}$$

où $0 \leq m \leq 3f_0(H) - 1$ et $m \in \mathbb{Z}$.

D'après la section 6.1, pour $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{T}_{m,-}$ est associée à l'orbite $\Omega_{(\frac{m}{3}-\frac{1}{2}),-}$, on peut donc déduire des propositions 6.4 et 6.5 et du théorème 5.5 que **les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont confirmées pour** (G, π_λ, B).

Pour π_λ anti-holomorphe, on peut confirmer de la même manière les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour (G, π_λ, B_1) et (G, π_λ, B).

On peut donc faire un résumé :

Pour π_λ holomorphe ou anti-holomorphe, les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont confirmées pour (G, π_λ, B_1) **et** (G, π_λ, B).

Remarque. Il y a $3f_0(H)$ B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles de $\mathfrak{b}^*$ qui sont contenues dans $\mathrm{p}(O_{\pi_\lambda})$ et chaque telle orbite correspond à une (seule) représentation irréductible et unitaire de B. cependant, il n'y a que $f_0(H)$ telles orbites qui figurent dans la décomposition $\pi_\lambda|_B$. On va voir un phénomène analogue pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe.

6.3 Construction des séries discrètes de G par des formes harmoniques (sens généralisé de L^2-Cohomologie)

Dans cette section, on va rappeler des éléments sur la construction des séries discrètes d'un groupe réductif par la méthode des formes harmoniques. Dans la section suivante, on va appliquer cette méthode à la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ (et de $\pi_\lambda|_{B_1}$), pour $G = SU(2,1)$.

Dans toute la suite de cette section, on ne suppose plus que $G = SU(2,1)$.

En 1982, Hersant a construit les "formes harmoniques et les modules de cohomologie relative des algèbres de Lie" généralisant certaines constructions de Schmid ([30,31]), Narasimhan-Okamoto ([23]) et Penney. Dans la suite, on va d'abord faire un petit rappel de la construction de Hersant, puis expliquer surtout comment elle généralise la construction de Narasimhan-Okamoto. Dans la section suivante, on va travailler dans le cadre de Hersant.

Rappel de la théorie de Hersant [11]

Soient G un groupe de Lie réel, K et Z deux sous-groupes fermés de G qui vérifient : (1) Z est inclus dans le centre de G. (2) Z est inclus dans K, et K/Z est compact. Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{z}$ les algèbres de Lie correspondantes, et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{z}_{\mathbb{C}}$ leurs complexifiées respectives.

Supposons qu'il existe une sous-algèbre complexe $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui est stable par l'action adjointe de K, et telle que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{e} + \bar{\mathfrak{e}}$ et $\mathfrak{e} \bigcap \bar{\mathfrak{e}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ (ici "$^-$" signifie la conjugaison dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ par rapport à la forme réelle $\mathfrak{g}$)

Soit V un $(\mathfrak{e}, K)$-module qui est K-unitaire : C'est-à-dire que V est l'espace d'une représentation unitaire τ de K et d'une représentation notée τ aussi, de $\mathfrak{e}$ vérifiant

$$\forall k \in K, \forall x \in \mathfrak{e}, \tau(\mathrm{Ad}k.x) = \tau(k)\tau(x)\tau(k^{-1}), \text{et } \forall x \in \mathfrak{k}, \tau(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \tau(\exp tx).$$

Supposons de plus que Z agit scalairement dans V suivant le caractère χ.

Maintenant soit π une représentation unitaire de G dans $\mathbb{H}$. On note aussi π la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (et de son algèbre enveloppante universelle) dans $\mathbb{H}^\infty$ (ici $\mathbb{H}^\infty$ est le sous-espace des vecteurs C^∞ de π dans $\mathbb{H}$).

Considérons $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty = \oplus_p \Lambda^p(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ le $\mathfrak{e}$-complexe standard à valeurs dans $V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ (pour $\tau^* \otimes \pi$). Notons ∂ le cobord standard de Hoschild-Serre pour $\Lambda(\mathfrak{e}) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$, et $\Theta = \mathrm{Ad}^* \otimes \tau^* \otimes \pi$ la représentation de K dans $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ définie par : $(\Theta(k)\omega)(X_1, ..., X_p) = (\tau^*(k) \otimes \pi(k)).\omega(\mathrm{Ad}k^{-1}X_1, ..., \mathrm{Ad}k^{-1}X_p)$ où $k \in K$ et $\omega \in \Lambda^p(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ est une p-forme. On peut vérifier facilement que les opérateurs $\Theta(k)$ commutent au cobord ∂.

Considérons le sous-espace de $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$ constitué des formes ω telles que $i(X)\omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, où $(i(X)\omega)(Y_1, ..., Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, ..., Y_{p-1})$ pour ω une p-forme. Cet espace s'identifie naturellement à

$$\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty$$

qui est stable par la représentation Θ. Notons

$$[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K = \left\{\omega \in \Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty | \ \Theta(k)\omega = \omega, \forall k \in K\right\}.$$

On peut vérifier que $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$ est stable par l'opérateur ∂, donc définit par restriction de ∂, un sous-complexe que l'on note

$$[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K \xrightarrow{\partial_K} [\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K.$$

Puisque K/Z est supposé compact, $\mathrm{Ad}K$ est un groupe compact. Donc sur $\Lambda(\mathfrak{e}^*)$ (ainsi que sur $\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*)$), il y a un produit scalaire $\mathrm{Ad}K-$invariant.

Donc l'espace $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$ a une structure naturelle de produit tensoriel hilbertien, pour laquelle la représentation Θ de K est unitaire.

Hersant a démontré les assertions qui suivent. Le sous-espace que l'on note $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$ des vecteurs invariants par $\Theta(K)$ est l'adhérence de l'espace $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$ dans $\Lambda(\mathfrak{h}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$. L'opérateur $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K \xrightarrow{\partial_K} [\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}^\infty]^K$ a un adjoint formel δ_K sur le même espace, et si on pose $\Box_K = \partial_K \delta_K + \delta_K \partial_K$, alors

$$[\mathrm{Im}(\partial_K + \delta_K)]^\perp = \ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K) = \ker \Box_K,$$

où $[\mathrm{Im}(\partial_K + \delta_K)]^\perp$ est l'orthogonal de $\mathrm{Im}(\partial_K + \delta_K)$ dans $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$. En particulier, $\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)$ est fermé dans $[\Lambda((\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}]^K$.

Pour simplifier, on appelle le sous-complexe construit ci-dessus le **"complexe de Hersant" et on le note** $C^*(\mathfrak{e}, V, K, G, \pi)$. Puisque dans toute la suite, on prend toujours "Z" trivial pour tous les groupes concernés, on n'indique pas "Z" dans la notation du complexe. De plus dans toute la suite, si le "K" concerné est aussi trivial, on remplacera $C^*(\mathfrak{e}, V, K, G, \pi)$ par $C^*(\mathfrak{e}, V, G, \pi)$.

Maintenant soit R la représentation de G dans $\mathbb{H} = L^2(G/Z, \chi)$ par translations à droite, où $L^2(G/Z, \chi)$ est l'espace des fonctions f de carré intégrable modulo Z qui vérifient $f(zg) = f(gz) = \chi(z)f(g), \forall g \in G, \forall z \in Z$, on note aussi R la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (et de son algèbre enveloppante universelle) dans $\mathbb{H}^\infty$. Ici $\mathbb{H}^\infty$ est le sous-espace des vecteurs lisses dans $\mathbb{H}$ et $L^2(G/Z, \chi)$ est relatif à la mesure de Haar invariante à gauche. Donc la translation à droite de G dans $\mathbb{H}$ a le terme « $\Delta^{1/2}$ »devant, si G n'est pas unimodulaire, où Δ est la fonction module de G.

Hersant a également démontré que le sous-espace $\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)$ du complexe $C^*(\mathfrak{e}, V, K, G, R)$ est invariant par la représentation unitaire $1 \otimes 1 \otimes l$ de G dans $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$ (où $1 \otimes 1 \otimes l$ signifie que G agit trivialement dans $\Lambda(\mathfrak{e}^*) \otimes V^*$ et par translations régulière à gauche dans $\mathbb{H}$). On note la sous-représentation associée $\pi(\mathfrak{e}, \chi)$. Comme la représentation $1 \otimes 1 \otimes l$ laisse clairement invariant le sous-espace des q-formes, on a $\pi(\mathfrak{e}, \chi) = \bigoplus \pi^q(\mathfrak{e}, \chi)$, où $\pi^q(\mathfrak{e}, \chi)$ est la sous-représentation associée de G dans $(\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)) \cap \Lambda^q(\mathfrak{e}^*) \otimes V^* \otimes \mathbb{H}$.

Maintenant, soit G un groupe de Lie semi-simple d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, K un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée et soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$ les complexifiés respectifs de $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$. On fixe une décomposition d'Iwasawa $G = KAN$. Supposons que sur l'espace homogène G/K, il existe une structure complexe G-invariante, alors il existe deux sous-algèbres complexes $\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ telles que

$$\mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_- = \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}, \ \mathfrak{p}_+ = \overline{\mathfrak{p}_-}, \ [\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_+] \subseteq \mathfrak{p}_+.$$

Donc $[\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{p}_-] \subseteq \mathfrak{p}_-$. De plus l'espace des vecteurs tangents anti-holomorphes est canoniquement identifié à $\mathfrak{p}_+$. Dans ce cas, $\mathfrak{k}$ contient une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ (donc l'ensemble des séries discrètes de G n'est pas vide). Notons Δ l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ relatif à $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, et Δ_K (resp. Δ_n)l'ensemble des racines compactes (resp. non compactes) pour Δ. Alors il existe un et un seul sous-ensemble $\Delta_n^+ \subset \Delta_n$ tel que $\mathfrak{p}_+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}^\alpha$, où $\mathfrak{g}^\alpha$ est l'espace radiciel associé à α, et il existe un ensemble de racines positives Δ^+ de Δ, tel que $\Delta_n^+ \subset \Delta^+$. C'est-à-dire que Δ_n^+ est l'ensemble de racines positives non-compactes par rapport à

Δ^+, on note Δ_K^+ l'ensemble de racines positives associé (donc $\Delta^+ = \Delta_n^+ \cup \Delta_K^+$) et $\mathfrak{F}$ l'ensemble des formes algébriquement intégrables sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$, i.e. l'ensemble des formes linéaires complexes λ sur $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ telles ques $\lambda(H_\alpha)$ soit entier pour tout $\alpha \in \Delta$, ici H_α est la coracine de α. Pour simplifier, on suppose que le complexifié $G_{\mathbb{C}}$ de G existe et est simplement connexe, de sorte que toute forme algébriquement intégrable est analytiquement intégrable. Posons

$$\mathfrak{F}' = \{\lambda \in \mathfrak{F} | (\lambda + \rho)(H_\alpha) \neq 0 \ \ \forall \alpha \in \Delta\}$$

$$\mathfrak{F}_0' = \left\{\lambda \in \mathfrak{F}' | (\lambda + \rho)(H_\alpha) > 0 \ \ \forall \alpha \in \Delta_K^+\right\}$$

où $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ est la demi-somme des racines positives associées à Δ^+.

Soient $\Lambda \in \mathfrak{F}_0'$ et τ_Λ la représentation unitaire irréductible de K avec le plus haut poids Λ par rapport à Δ_K, et V_Λ l'espace hilbertien associé. Notons τ_Λ^* la représentation contragrédiente de τ_Λ, et V_Λ^* l'espace hilbertien associé. Soient $Q_\Lambda = \{\alpha \in \Delta_n^+ | (\Lambda + \rho)(H_\alpha) > 0\}$ et $q_\Lambda = \mathrm{card}(Q_\Lambda)$.

Maintenant, on va énoncer un théorème de Narasimhan-Okamoto dans le cadre de la théorie de Hersant. On reprend les notations dans "Rappel de la théorie de Hersant" et celles ci-dessus. Supposons que Z est trivial (χ aussi), K est le sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{e} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ ($(\mathfrak{e}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})^* \cong \mathfrak{p}_-$), et $V = V_\Lambda$, $\tau = \tau_\Lambda$, l'action de $\mathfrak{p}_+$ dans V_Λ étant triviale. On note la représentation $\pi^q(\mathfrak{e}, 1) \triangleq \pi^q(\mathfrak{e})$. Alors le théorème suivant est dû à Narasimhan et Okamoto ([23]) :

Théorème 6.6 *Si $q \neq q_\Lambda$, alors $\pi^q(\mathfrak{e})$ est réduite à zéro, et $\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$ est une série discrète de G. Plus précisément, $\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$ est la représentation contragrédiente de la série discrète de G dont le paramètre de Harish-Chandra est $\Lambda + \rho$, donc le paramètre de Harish-Chandra de $\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$ est $-(\Lambda + \rho)$.*

Maintenant, on veut réaliser π_λ comme une $\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\Delta_\lambda^+ \cap \Delta_K = \Delta_K^+$, où Δ_λ^+ est l'ensemble de racines positives par rapport à λ. Soient W_K le groupe de Weyl pour Δ_K et w_K le seul élément dans W_K tel que $w_K(\Delta_K^+) = -\Delta_K^+$. Alors il est clair que $\Lambda = -w_K\lambda - \rho \in \mathfrak{F}_0'$ et $-(\Lambda + \rho) = w_K.\lambda$, donc $\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}) = \pi_{w_K.\lambda}$. Or $\pi_{w_K.\lambda} \cong \pi_\lambda$. Donc on peut réaliser π_λ par $\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$ avec $\Lambda = -w_K\lambda - \rho$.

6.4 Application de 6.3 à la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ (et de $\pi_\lambda|_{B_1}$)

Maintenant on revient sur $G = SU(2,1)$ et on reprend toutes les notations des chapitres précédents qui concernent G. On se donne $\lambda \in i\mathfrak{t}^*$ correspondant à une série discète π_λ de G. On suppose, comme il est loisible que Δ_λ^+ est l'un des Δ_j^+, $j = 1, 2, 3$.

Dans notre situation, on peut prendre $\mathfrak{p}_+$ et $\mathfrak{p}_-$ de la section précédente comme

$$\mathfrak{p}_+ = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{array} \right) \middle| Y \in M_{1,2}(\mathbb{C}) \right\}$$

$$\mathfrak{p}_- = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & X \\ 0 & 0 \end{array} \right) \middle| X \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \right\}$$

où $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 0 & X \\ Y & 0 \end{array} \right) \middle| X \in M_{2,1}(\mathbb{C}),\ Y \in M_{1,2}(\mathbb{C}) \right\}$ est le complexifié de $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{e} = \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. On vérifie facilement que l'ensemble de racines positives $\Delta^+ = \Delta_1^+$ défini dans le chapitre 3 est tel que $\Delta_K^+ = \alpha_{12}$ et $\mathfrak{p}_+ = \oplus_{\alpha \in \Delta_n^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$. Par suite, $\rho = \alpha_{32}$ et la symétrie s_{12} par rapport à la racine α_{12} est l'élément dans W_K tel que $s_{12}(\Delta_K^+) = -\Delta_K^+$. Donc si $\Delta_\lambda^+ = \Delta_j^+$ ($j \in \{1,2,3\}$), d'après ce que l'on a vu, $\pi_\lambda = \pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$, avec $\Lambda = -s_{12}\lambda - \alpha_{32}$. Or $\alpha_{32} = s_{12}(\alpha_{31})$, donc $\Lambda = -s_{12}(\lambda + \alpha_{31})$ et on en déduit que $V_\Lambda^* \cong V_{-\Lambda} \cong V_{\lambda+\alpha_{31}}$.

Cependant on a aussi $\mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, où $\mathfrak{h}_+ = \mathbb{C}(E_1' + iE_1) \oplus \mathbb{C}(S - iE_2/2)$. On en déduit que $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1} = \mathfrak{h}_+$ (resp. $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h}_+ \oplus \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$) qui est considérée comme une sous-algèbre de $(\mathfrak{b}_1)_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$), avec "K, Z" triviaux, "$V = V_\Lambda$" dans lequel l'action de $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}$ provient par restriction de celle de $\mathfrak{e}$ (resp. avec "$K = M$", "Z" trivial, "$V = V_\Lambda$" dans lequel l'action de $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}$ provient par restriction de celle de $\mathfrak{e}$) vérifient les "hypothèses de Hersant". Comme $G = KB_1 = KB$, on voit alors que le complexe de Hersant $C^*(\mathfrak{e}, V_\Lambda, K, G)$ peut aussi s'interpréter comme $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\Lambda, B_1)$ ou $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}, V_\Lambda, M, B)$, et que les espaces de cohomologies sont les mêmes

$$H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}, V_\Lambda, G) = H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}, V_\Lambda, B) = H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\Lambda, B_1),$$

chacun d'eux fournissant la restriction de la représentation $\pi_\lambda = \pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$ au sous-groupe correspondant. Donc $\pi_\lambda|_{B_1}$ (resp. $\pi_\lambda|_B$) est l'action de B_1 par translations à gauche dans $H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_\Lambda, B_1)$ (resp. $H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}, V_\Lambda, B)$).

Notons ξ la représentation de $\mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ dans $V_\Lambda^* \cong V_{\lambda+\alpha_{31}}$ définie par $\xi|_{\mathfrak{p}_+} = 0$ et $\xi|_{\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}} = \tau_\Lambda^* = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}$. On note $\xi|_{\mathfrak{h}_+}$ encore par ξ. On désigne l'espace dans lequel T_- (resp. T_+) agit par $\mathbb{H}_-$ (resp. $\mathbb{H}_+$), et $\mathbb{H}_-^\infty$ (resp. $\mathbb{H}_+^\infty$) le sous-espace des vecteurs C^∞ de T_- (resp. T_+). Pour $q_\Lambda = 0, 1, 2$, définissons

$$(\delta_\pm)_{q_\Lambda} : \Lambda^{q_\Lambda}(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty \longrightarrow \Lambda^{q_\Lambda+1}(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty,$$

le cobord standard de Hochschild-Serre pour le $\mathfrak{h}_+$-module $V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty$, où l'action de $\mathfrak{h}_+$ dans $\mathbb{H}_\pm^\infty$ est induite par $\mathrm{T}_\pm$, mais celle de $\mathfrak{h}_+$ dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ est $\xi + (\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}_1}).\mathrm{id}/2$ (non pas simplement ξ). Soit ${(\delta_\pm)_{q_\Lambda}}^*$ l'adjoint formel de $(\delta_\pm)_{q_\Lambda}$ tel qu'il est explicité dans [11]. Alors il est clair que le complexe ci-dessus n'est rien autre que le complexe de Hersant $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1}, V_{\lambda+\alpha_{31}}, B_1, \mathrm{T}_\pm)$ mais pour lequel l'action de $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1} = \mathfrak{h}_+$ est $\xi + (\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}_1}).\mathrm{id}/2$. Notons alors $\mathfrak{H}_\pm^{q_\Lambda} = \ker(\delta_\pm)_{q_\Lambda} \cap \ker{(\delta_\pm)_{q_\Lambda}}^*$ et $\mathfrak{H}_\pm = \bigoplus_{q_\Lambda=0}^2 \mathfrak{H}_\pm^{q_\Lambda}$.

Maintenant, considérons le $(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}, M)$-module $V_{\lambda+\alpha_{31}}$, où l'action de M dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ est induite par celle de K, mais l'action de $\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}$ dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ est $\xi + (\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}}).\mathrm{id}/2$ (rappelons que on a déjà défini le $\mathfrak{e}$-module ξ plus haut, ici on désigne $\xi|_{\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}}$ encore par ξ). Donc à partir de ce module, on peut construire le complexe de Hersant $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}, V_{\lambda+\alpha_{31}}, M, B, \mathrm{T}_{m,\pm})$, où $\mathrm{T}_{m,\pm}$ est la représentation unitaire irréductible de B que l'on a déjà définie. Puisque $\mathrm{T}_{m,\pm} = \sigma_m \otimes \widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ qui prolonge $\mathrm{T}_\pm$, et $(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}})/\mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{h}_+$, on déduit que le "$\ker(\partial_K) \cap \ker(\delta_K)$" (pour la notation, voir le "Rappel de la théorie de Hersant") pour $C^*(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}}, V_{\lambda+\alpha_{31}}, M, B, \mathrm{T}_{m,\pm})$ n'est rien d'autre que $(\mathfrak{H}_\pm)_{\sigma_{-m}}$, où pour $m \in \mathbb{Z}$, $(\mathfrak{H}_\pm)_{\sigma_m}$ désigne le sous-espace de $\mathfrak{H}_\pm$ constitué des vecteurs de poids σ_m pour la représentation $\mathrm{Ad}^*\otimes\tau_{\lambda+\alpha_{31}}\otimes\widetilde{\mathrm{T}_\pm}$ de M. On note $(\mathfrak{H}_\pm)^{q_\Lambda}_{\sigma_m}=(\mathfrak{H}_\pm)_{\sigma_m}\cap\mathfrak{H}^{q_\Lambda}_\pm$.

Rappelons que puisque $\Delta^+_\lambda=\Delta^+_j$ ($j\in\{1,2,3\}$), on a $\pi_\lambda=\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})$, avec $\Lambda=-s_{12}\lambda-\alpha_{32}$. Maintenant on énonce le premier théorème de cette section.

Théorème 6.7

$$\textit{(i)}\quad \pi_\lambda|_{B_1}=\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})|_{B_1}\cong\dim(\mathfrak{H}^{q_\Lambda}_-)\mathrm{T}_+\oplus\dim(\mathfrak{H}^{q_\Lambda}_+)\mathrm{T}_-$$

$$\textit{(ii)}\quad \pi_\lambda|_B=\pi^{q_\Lambda}(\mathfrak{e})|_B\cong\sum_{m\in\mathbb{Z}}\left[\dim((\mathfrak{H}_-)^{q_\Lambda}_{\sigma_m})\mathrm{T}_{m,+}\oplus\dim((\mathfrak{H}_+)^{q_\Lambda}_{\sigma_m})\mathrm{T}_{m,-}\right]$$

Démonstration. On va d'abord montrer (i) : Puisque $H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\Lambda,B_1)$ est B_1-invariant pour $1\otimes1\otimes l$, on peut le désintégrer par la décomposition de Plancherel, autrement dit

$$H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\Lambda,B_1)\cong\sum_{\pi\in\widehat{B_1}_d}\mathbb{H}_\pi\otimes\mathrm{Hom}_{B_1}(\mathbb{H}_\pi,H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\Lambda,B_1)).$$

Où $\widehat{B_1}_d$ désigne l'ensemble des séries discrètes de B_1, $\mathbb{H}_\pi$ est l'espace dans lequel π agit et $\mathrm{Hom}_{B_1}(\mathbb{H}_\pi,H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\Lambda,B_1))$ est l'espace des opérateurs d'intrelacement entre $\mathbb{H}_\pi$ et $H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\Lambda,B_1)$. Dans notre cas, B_1 ne possède que 2 séries discrètes : T_- et T_+ dont l'une est la contragrédiente de l'autre. En effet, dune part B_1 a uniquement deux orbites coadjointes ouvertes, Ω_+ et Ω_-, et d'autre part, on vérifie facilement que la désintégration de la restriction de T_+ à N ne fait intervenir que les représentations de caractère central $\exp tE_2\mapsto e^{iat}$ avec $a>0$. Pour décrire concrètement l'espace $\mathrm{Hom}_{B_1}(\mathbb{H}_\pi,H^{q_\Lambda}(\mathfrak{e}_{\mathfrak{b}_1},V_\Lambda,B_1))$, on peut suivre la méthode de Schmid pour les groupes de Lie semi-simples ([30]), sauf que dans notre cas, il faut faire un ajustement concernant la fonction module, puisque le groupe B_1 n'est pas unimodulaire. En fait sous l'identification de Plancherel

$$L^2(B_1)\cong\sum_{\pi\in\widehat{B_1}_d}\mathbb{H}_\pi\otimes\mathbb{H}_{\pi^\vee},\ \text{où } \pi^\vee \text{ est la représentation contragrédiente de } \pi,$$

la différentielle de l'action de B_1 dans $\mathbb{H}_{\pi^\vee}$ ne correspond pas à l'action régulière à droite R (dans $L^2(B_1)$), mais correspond à $R-(\mathrm{tr}\ \mathrm{ad}_{\mathfrak{b}_1}).\mathrm{id}/2$, et le reste est expliqué dans la section 5 de [11].

On peut démontrer (ii) similairement, et il suffit de remarquer que la représentation contragrédiente de $\mathrm{T}_{m,\pm}$ est $\mathrm{T}_{-m,\mp}$. □

Remarque. Il est clair que $\dim(\mathfrak{H}^{q_\Lambda}_\pm)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\dim((\mathfrak{H}_\pm)^{q_\Lambda}_{\sigma_m})$

Maintenant, on commence par traiter les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes, sauf indication contraire, on garde toutes les notations concernant $G=SU(2,1)$ dans les sections et chapitres précédents. Supposons donc que π_λ est une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe, c'est-à-dire que λ correspond à Δ^+_3 : $\lambda(H_{12})\in\mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13})\in\mathbb{N}^+$ avec $\lambda(H_{12})>\lambda(H_{13})$, on peut vérifier facilement que dans ce cas, $q_\Lambda=1$. D'autre part, puisque

$f_0(H) = \lambda(H_{12})$ et $f_0(Z) = 2\lambda(H_{13}) - \lambda(H_{12})$, on déduit facilement que λ correspond à Δ_3^+ si et seulement si $f_0(H) \in \mathbb{N}^+$, $f_0(H) + f_0(Z) \in 2\mathbb{N}^+$ et $|f_0(H)| > |f_0(Z)|$. Dans la suite on va exprimer les résultats concernés en fonction de $f_0(H)$ et $f_0(Z)$.

On va d'abord construire le système différentiel ordinaire (d'ordre 1) $D_m^\pm$ sur $]0, +\infty[$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$: Si $m \geqslant f_0(H)$, $D_m^\pm$ a $2f_0(H)$ fonctions inconnues, et si $0 \leqslant m \leqslant f_0(H) - 1$, $D_m^\pm$ a $2m + 1$ fonctions inconnues. Plus précisément : si $m \geq f_0(H)$, le système $D_m^\pm$ est le suivant :

$$(y_m^\pm)'(t) = (t^{-1}A_m^\pm + t^{-2}B_m^\pm + t^{-3}C_m^\pm)y_m^\pm(t) \quad (t \in]0, +\infty[) \quad (D_m^\pm, \quad m \geqslant f_0(H))$$

où

$$y_m^\pm(t) = \begin{pmatrix} a_{m,1}^\pm(t) \\ \vdots \\ a_{m,n}^\pm(t) \\ \vdots \\ a_{m,2f_0(H)}^\pm(t) \end{pmatrix}$$

$$A_m^\pm = \begin{pmatrix} r_m^\pm & & & & & & \\ & A_{m,0}^\pm & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A^\pm & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_{m,(f_0(H)-2)} & \\ & & & & & & s_m^\pm \end{pmatrix}$$

avec $r_m^- = s_m^+ = \frac{f_0(Z)-f_0(H)}{2}$, $s_m^- = r_m^+ = -(\frac{f_0(Z)+f_0(H)}{2})$ et

$$A_{m,n}^- = \begin{pmatrix} -(n+1+\frac{f_0(Z)-f_0(H)}{2}) & \sqrt{2}i(n+1) \\ -\sqrt{2}i(f_0(H)-n-1) & (n+1+\frac{f_0(Z)-f_0(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_0(H)-2$$

$$A_{m,n}^+ = \begin{pmatrix} (\frac{f_0(Z)+f_0(H)}{2} - n - 1) & -\sqrt{2}i(n+1) \\ \sqrt{2}i(f_0(H)-n-1) & (n+1-\frac{f_0(Z)+f_0(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_0(H)-2$$

$$B_m^\pm = \begin{pmatrix} B_{m,0}^\pm & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & B_{m,n}^\pm & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & B_{m,f_0(H)-1}^\pm \end{pmatrix}$$

avec

$$B_{m,n}^\pm = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 2(m-n) & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_0(H) - 1$$

et

$$C_m^{\pm} = \begin{pmatrix} C_{m,0}^{\pm} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & C_{m,n}^{\pm} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_{m,f_0(H)-1}^{\pm} \end{pmatrix}$$

avec

$$C_{m,n}^{\pm} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq f_0(H) - 1$$

Et si $0 \leqslant m \leqslant f_0(H) - 1$, le système $D_m^{\pm}$ est le suivant :

$$(y_m^{\pm})'(t) = (t^{-1}A_m^{\pm} + t^{-2}B_m^{\pm} + t^{-3}C_m^{\pm})y_m^{\pm}(t) \quad (t \in]0, +\infty[) \ (D_m^{\pm}, \quad 0 \leqslant m \leqslant f_0(H)-1)$$

où

$$y_m^{\pm}(t) = \begin{pmatrix} a_{m,1}^{\pm}(t) \\ \vdots \\ a_{m,n}^{\pm}(t) \\ \vdots \\ a_{m,2m+1}^{\pm}(t) \end{pmatrix}$$

$$A_m^{\pm} = \begin{pmatrix} r_m^{\pm} & & & & & \\ & A_{m,0}^{\pm} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & A_{m,n}^{\pm} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_{m,m-1}^{\pm} \end{pmatrix}$$

avec $r_m^- = \frac{f_0(Z) - f_0(H)}{2}$, $r_m^+ = -(\frac{f_0(Z)+f_0(H)}{2})$ et

$$A_{m,n}^{-} = \begin{pmatrix} -(n+1+\frac{f_0(Z)-f_0(H)}{2}) & \sqrt{2}i(n+1) \\ -\sqrt{2}i(f_0(H)-n-1) & (n+1+\frac{f_0(Z)-f_0(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq m-1$$

$$A_{m,n}^{+} = \begin{pmatrix} (\frac{f_0(Z)+f_0(H)}{2} - n - 1) & -\sqrt{2}i(n+1) \\ \sqrt{2}i(f_0(H)-n-1) & (n+1-\frac{f_0(Z)+f_0(H)}{2}) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq m-1$$

$$B_m^{\pm} = \begin{pmatrix} B_{m,0}^{\pm} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & B_{m,n}^{\pm} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & B_{m,m-1}^{\pm} & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$B_{m,n}^{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 2(m-n) & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq m-1$$

et

$$C_m^{\pm} = \begin{pmatrix} C_{m,0}^{\pm} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & C_{m,n}^{\pm} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & C_{m,m-1}^{\pm} & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

avec

$$C_{m,n}^{\pm} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq n \leq m-1.$$

Définissons alors

$$(D_m^{\pm})^{\infty} = \left\{ y_m \text{ solution de } D_m^{\pm}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Maintenant on énonce le deuxième théorème de cette section :

Théorème 6.8 *Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $f_0(H) \in \mathbb{N}^+$, $f_0(H) + f_0(Z) \in 2\mathbb{N}^+$ et $|f_0(H)| > |f_0(Z)|$, on a que*

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^-)^{\infty}).\mathrm{T}_{[3m - \frac{(3f_0(H)+f_0(Z))}{2}],+} \bigoplus$$
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^+)^{\infty}).\mathrm{T}_{[-(3m + \frac{f_0(Z)-3f_0(H)}{2})],-}$$

et

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^-)^{\infty}) \right) \mathrm{T}_+ \bigoplus \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^+)^{\infty}) \right) \mathrm{T}_-$$

Remarque. Puisque $\dim((D_m^{\pm})^{\infty}) \leqslant 2N_1$, on déduit surtout que π_λ est B-admissible.

Démonstration. D'après le théorème précédent et la remarque qui le suit, il s'agit de montrer :

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $l = \pm(3m - \frac{(3f_0(H) \pm f_0(Z))}{2})$

$$\dim((\mathfrak{H}_{\mp})^1_{\sigma_l}) = \dim((D_m^{\mp})^{\infty})$$

et pour les autres $l \in \mathbb{Z}$,

$$\dim((\mathfrak{H}_{\pm})^1_{\sigma_l}) = 0.$$

On va d'abord traiter $(\mathfrak{H}_-)^1 = \ker(\delta_-)_1 \cap \ker(\delta_-)_1^*$. Notons $H_1 \triangleq S, Z_1 \triangleq -E_2/2, X_1 \triangleq E_1'/\sqrt{2}$ et $Y_1 \triangleq E_1/\sqrt{2}$, alors dans $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$, $[X_1, Y_1] = Z_1$, $[H_1, X_1] = X_1$, $[H_1, Y_1] = Y_1$ et $[H_1, Z_1] = 2Z_1$. Notons $J_0 = H_1 + iZ_1$, et

$J_1 = X_1 + iY_1$, alors $\mathbb{C}J_0 \oplus \mathbb{C}J_1 = \mathfrak{h}_+$. Donc si on note φ_0, φ_1 la base duale de J_0 et J_1, tous les éléments dans $\Lambda^1(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_{\pi_1}$ s'écrivent sous la forme $\varphi_0 \otimes \upsilon_0 + \varphi_1 \otimes \upsilon_1$ avec $\upsilon_0, \upsilon_1 \in V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_{\pi_1}$, et on peut vérifier directement que les équations

$$(\delta_-)_1(\varphi_0 \otimes \upsilon_0 + \varphi_1 \otimes \upsilon_1) = 0 \text{ dans } \Lambda^2(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$$

$$(\delta_-)^*_1((\varphi_0 \otimes \upsilon_0 + \varphi_1 \otimes \upsilon_1) = 0 \text{ dans } V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$$

sont équivalentes à

$$J_0.\upsilon_1 = J_1.\upsilon_0 + \upsilon_1$$

et

$$J_0^*.\upsilon_0 + J_1^*.\upsilon_1 = 0.$$

Dans les 2 dernières équations, J_0, J_1 sont en tant qu'opérateurs dans $V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$(par rapport à la représentation $(\ \xi + (\text{tr ad }).\text{id}) \otimes \mathrm{T}_-)$ et J_0^*, J_1^* sont leurs adjoints formels respectifs. Donc $\ker(\delta_-)_1 \cap \ker(\delta_-)^*_1$ est l'ensemble des éléments $\varphi_0 \otimes \upsilon_0 + \varphi_1 \otimes \upsilon_1$ qui vérifient les 2 dernières équations. Dans la suite, on va déterminer explicitement les actions de J_0, J_1 et J_0^*, J_1^* dans $V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}^\infty_-$. Pour ceci, il suffit de déterminer celles dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ et dans $\mathbb{H}^\infty_-$ repectivement. On va d'abord déterminer leurs actions dans $\mathbb{H}^\infty_-$.

On a déjà vu que $\mathrm{T}_- \cong \mathrm{Ind}_N^{AN} \rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N)$ (voir la section 6.1), où $\rho(\ n_-,\ \mathfrak{l}_-,\ N)$ est une induite holomorphe.

Comme $n_- = -E_2^*$, on a $n_-(X_1) = n_-(Y_1) = 0$ et $n_-(Z_1) > 0$, sans perte de généralité, on peut supposer que $n_- = Z_1^*$ (par rapport à la base duale $X_1^*,\ Y_1^*,\ Z_1^*$ dans $\mathfrak{n}^*$), car $\mathrm{T}_- \cong \mathrm{Ind}_N^{AN} \rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N) \cong \mathrm{Ind}_N^{AN} \rho(rn_-, \mathfrak{l}_-, N)$, $\forall r > 0$. Soit F_1 un élément de l'espace de la représentation $\rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N)$, et $g = \exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1) \in N$. Il est clair que $F_1(g) = e^{-iz} F_1(\exp(xX_1 + yY_1))$ (rappelons que par définition $\forall X \in \mathfrak{l}_-$, on a $X * F_1 + if_0(X)F_1 = 0$). On peut donc identifier F_1 à une fonction $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : x + iy \longmapsto F_1(\exp(xX_1 + yY_1))$. Pour simplifier, on la note encore F_1, et sous cette identification, par des calculs directs, on peut obtenir que $X_1 * F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{i}{2} y F_1$, $Y_1 * F_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{i}{2} x F_1$, et $Z_1 * F_1 = -iF_1$. On en déduit que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)F_1 + \frac{1}{2}(x + iy)F_1 = 0 \qquad (\Delta).$$

On peut vérifier que $F_0(x + iy) = e^{-\frac{1}{4}(x^2+y^2)}$ est une solution particulière de (Δ). Puisque F_0 ne s'annule en aucun point, F_1 s'écrit sous la forme $F_1 = F_2.F_0$ avec F_2 holomorphe (car $(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})F_2 = 0$). Donc $\rho(n_-, \mathfrak{l}_-, N)$ peut se réaliser dans l'espace hilbertien

$$\mathbb{H}_{N,Z_1^*} = \left\{ F;\ \ F \text{ est holomorphe et } \int_{\mathbb{C}} |F(\omega)|^2 e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} d\omega < \infty \right\},$$

où $\omega = x + iy$.

Notons $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$ l'espace hilbertien où agit $\mathrm{Ind}_N^{AN}\rho(n_-,\mathfrak{l}_-,N) \cong \mathrm{T}_-$ et soit $f \in \mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$. Vu que $AN/N = A$, f est une fonction de AN dans $\mathbb{H}_{N,Z_1^*}$ qui vérifie

$$f(gn) = \rho(n_-,\mathfrak{l}_-,N)(n^{-1})f(g), \text{et} \int_A \|f(g)\|^2 dg < \infty.$$

Il est clair que le groupe R_+^* (pour la multiplication) est isomorphe à $A = \exp \mathbb{R}H_1$ par $t \longmapsto \exp(\log t)H_1$, et la mesure de Haar pour R_+^* est $\frac{dt}{t}$ (ici dt est la mesure de Lebesgue). Donc on peut identifier $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$ à l'espace hilbertien

$$\Big\{f : R_+^* \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} |\ f \text{ est mesurable et pour presque tout } t \in R_+^*, \omega \longmapsto f(t,\omega)$$

$$\text{est holomorphe et} \int_{R_+^* \times \mathbb{C}} |f(t,\omega)|^2 e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} \frac{dt}{t} d\omega < \infty \Big\}.$$

On note cet espace encore $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$ et π_{AN} la représentation associée (qui est équivalente à T^-). D'autre part, on voit facilement que $f \in \mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$ correspond à une application $\phi\mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbb{H}(n_-,\mathfrak{l}_-,N)$ (voir la section 6.1), avec $f(t,\omega) = \phi(t)(g).e^{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}.e^{iz}$ où $\omega = x+iy$ et $g = \exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1)$. Puisque

$$\exp(-uH_1).\exp(\log tH_1).\exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1)$$

$$= \exp(\log(e^{-u}t)H_1).\exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1),$$

on déduit facilement que pour $f \in \mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$,

$$(\pi_{AN}(\exp(uH_1))f(t,\omega) = f(e^{-u}t,\omega).$$

Donc si de plus $f \in \mathbb{H}^\infty_{AN,Z_1^*}$, on a $(d\pi_{AN}(H_1)f)(t,\omega) = -t\frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega)$.

De même, comme

$$\exp(-uZ_1).\exp(\log tH_1)\exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1)$$

$$= \exp(\log tH_1)\exp(xX_1 + yY_1 + (z - ut^{-2})Z_1),$$

on obtient que $(\pi_{AN}(\exp(uZ_1))f(t,\omega) = e^{iut^{-2}}f(t,\omega)$. Donc $(d\pi_{AN}(Z_1)f)(t,\omega) = it^{-2}f(t,\omega)$ pour $f \in \mathbb{H}^\infty_{AN,Z_1^*}$.

De la même façon, on peut obtenir que

$$(\pi_{AN}(\exp(uX_1 + vY_1))f)(t,\omega) = e^{\left(\frac{1}{2}t^{-1}\omega(u-iv) - \frac{t^{-2}}{4}(u^2+v^2)\right)} f(t,\omega - t^{-1}(u+iv)).$$

Donc

$$(d\pi_{AN}(X_1)f)(t,\omega) = \frac{1}{2}t^{-1}\omega f(t,\omega) - t^{-1}\frac{\partial f}{\partial \omega}(t,\omega)$$

et

$$(d\pi_{AN}(Y_1)f)(t,\omega) = -\frac{i}{2}t^{-1}\omega f(t,\omega) - it^{-1}\frac{\partial f}{\partial \omega}(t,\omega).$$

Donc

$$(d\pi_{AN}(J_0)f)(t,\omega) = -t^{-2}f(t,\omega) - t\frac{\partial f}{\partial t}(t,\omega)$$

$$(d\pi_{AN}(J_1)f)(t,\omega) = t^{-1}\omega f(t,\omega).$$

Avant de déterminer J_0^* et J_1^*, on va d'abord décrire l'action du groupe compact M dans $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$. On a vu que $(\nu(m)\varphi)(x) = \varphi(m^{-1}xm)$ pour $\varphi \in$

$\mathbb{H}(h_0, \mathfrak{b}_1^-, AN)$ et $m \in M$. On a aussi vu $M = \exp \mathbb{R}W$, avec $\exp \mathrm{ad}(-wW).X_1 = (\cos w)X_1 + (\sin w)Y_1$ et $\exp \mathrm{ad}(-wW)\ .Y_1 = -(\sin w)X_1 + (\cos w)Y_1$, où

$$W = \begin{pmatrix} i/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2i/3 & 0 \\ 0 & 0 & i/3 \end{pmatrix}$$

est défini dans le chapitre 3.

Donc si $m = \exp wW$ et $g = \exp(hH_1). \exp(xX_1 + yY_1 + zZ_1))$, alors $m^{-1}gm = \exp(hH_1). \exp((x \cos w - y \sin w)X_1 + (x \sin w + y \cos w)Y_1 + zZ_1)$. On en déduit que pour $f \in \mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$, on a $(m.f)(t, \omega) = f(t, \omega e^{i(w)})$. Donc les éléments dans $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$ qui sont de la forme $f(t)\omega^n$ sont des vecteurs poids de M, $(m.(f(t)\omega^n) = (f(t)\omega^n).e^{inw})$, et le sous-espace engendré par ce genre d'éléments est dense dans $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$. En fait, on peut vérifier directement que $\langle f(t)\omega^n, g(t)\omega^m\rangle = 0$ si $n \neq m$ où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$, et tout élément $f(t, \omega) \in \mathbb{H}_{AN,Z_1^*}$ s'écrit $f(t, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\omega^n$.

Puisque $\int_{\mathbb{C}} |\omega|^{2n} e^{-\frac{|\omega|^2}{2}} d\omega = 2\pi.2^n.n!$, on en déduit que

$$\mathbb{H}_{AN,Z_1^*} = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\omega^n; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n.n!. \int_{R_+^*} \frac{|f_n(t)|^2}{t} dt) < \infty \right\}.$$

Maintenant on va calculer J_0^* et J_1^*. Comme π_{AN} est unitaire, pour tout $X \in \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, on a $d\pi_{AN}(X)^* = -d\pi_{AN}(X)$. Donc on en déduit immédiatement le calcul de J_0^* et J_1^* :

$$J_0^* = d\pi_{AN}(H_1 + iZ_1)^* = d\pi_{AN}(-H_1 + iZ_1) = -t^{-2} + t\frac{\partial}{\partial t}$$

$$J_1^* = d\pi_{AN}(X_1 + iY_1)^* = d\pi_{AN}(-X_1 + iY_1) = 2t^{-1}\frac{\partial}{\partial \omega}.$$

Maintenant, on va calculer l'action de J_0, J_1, J_0^* et J_1^* dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. Les opérateurs sont induits par la représentation $\xi + (\mathrm{tr\ ad}).\mathrm{id}$ de $\mathfrak{h}_+ = \mathbb{C}J_0 + \mathbb{C}J_1$ dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. D'abord, comme dans la section 6.2, on peut déterminer que $\dim(V_{\lambda+\alpha_{31}}) = f_0(H)$ (rappelons que $f_0(H) = -i\lambda(iH_{12}) = \lambda(H_{12})$). D'autre part puisque $\mathfrak{k} \cong \mathfrak{su}(2) \oplus z(\mathfrak{k})$ où $z(\mathfrak{k})$ est le centre de $\mathfrak{k}$, et les représentations irréductibles de $\mathfrak{su}(2)$ sont déterminées par la dimension, et $z(\mathfrak{k})$ agit scalairement. Il est bien connu que l'on peut réaliser $V_{\lambda+\alpha_{31}}$ dans $\mathbb{C}[\omega_1, \omega_2]$ l'espace des polynômes complexes homogènes (2 variables) de degré $f_0(H) - 1$, et le produit scalaire $\langle , \rangle_1$ est défini par $\langle P, Q\rangle_1 = \int_{\mathbb{C}^2} P\overline{Q} e^{-\frac{(|\omega_1|^2 + |\omega_2|^2)}{2}} d\omega_1 d\omega_2$. Notons $v_n = \omega_1^n.\omega_2^{(f_0(H)-1-n)}$ $(n = 0, 1.., f_0(H) - 1)$. Alors $\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(H_{12})v_n = (f_0(H) - 1 - 2n)v_n$ et $\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(E_{12})v_n = -nv_{n-1}$ (par convention, $v_{-1} = 0$). Rappelons que

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons

$$Z_0' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

alors $\mathbb{C}Z_0' = z(\mathfrak{k})^{\mathbb{C}}$. Donc Z_0' agit scalairement dans $\mathbb{C}[\omega_1, \omega_2]$. Puisque $Z_0' = H_{13} - H_{12}/2$ et $(\lambda+\alpha_{31})(H_{13} - H_{12}/2) = (\lambda+\alpha_{31})(H_{13} - H_{12}/2) = \frac{f_0(Z)}{2} - 3/2$, **on note cette quantité** α, $\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(Z_0') = \alpha.\mathrm{id}$.

Puisque

$$J_0 = H_1 + iZ_1 = H_1 - iE_2/2 = H_{13} + 2E_{31}$$

avec

$$H_{13} \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \quad E_{31} \in \mathfrak{p}_+,$$

on a

$$\xi(J_0) = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}(H_{13}).$$

Or, $H_{13} = \frac{H_{12}}{2} + Z_0'$, donc $\xi(J_0) = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}(\frac{H_{12}}{2} + Z_0')$. D'autre part, par des calculs directs, on voit que tr ad $= 4H_1^*$, où H_1^* est l'élément par rapport à la base duale $H_1^*,\ X_1^*,\ Y_1^*,\ Z_1^*$ dans $\mathfrak{b}_1^*$, et $H_1^*(J_0) = 1$. Donc on en déduit que

$$J_0(v_n) = ((\xi + 2H_1^*\mathrm{id})(J_0))(v_n) = (\frac{f_0(H) - 1 - 2n}{2} + \alpha + 2)v_n.$$

De même,

$$J_1 = E_1'/\sqrt{2} + iE_1/\sqrt{2} = -\sqrt{2}iE_{12} - \sqrt{2}iE_{32}$$

avec $E_{12} \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et $E_{32} \in \mathfrak{p}_+$. Donc $\xi(J_1) = \tau_{\lambda+\alpha_{31}}(-\sqrt{2}iE_0)$, or tr ad$(J_1) = 0$, et on a

$$J_1(v_n) = -\sqrt{2}i(\tau_{\lambda+\alpha_{31}}(E_0))(v_n) = \sqrt{2}inv_{n-1}.$$

Par des calculs directs, on obtient que $\langle v_n, v_m\rangle_1 = 0$ si $n \neq m$, et $\langle v_n, v_n\rangle_1 = 4\pi^2.2^{f_0(H)-1}.n!.(f_0(H)-1-n)!$. Donc on en déduit que $J_0^* = J_0$ (car $\frac{f_0(H)-1-2n}{2} - \alpha + 2 \in \mathbb{R}$), et $J_1^*(v_{n-1}) = -\sqrt{2}i(f_0(H) - n)v_n$.

Maintenant, on peut calculer $\ker(\delta_-)_1 \cap \ker{(\delta_-)_1}^*$. Mais avant d'effectuer les calculs explicitement, on remarque que les vecteurs v_n constituent une base de vecteurs propres pour le groupe compact M dans $V_{\lambda+\alpha_{31}}$. Puisque $W = iH_{12}/2 - iZ_0'/3$, on obtient que

$$\exp(wW)v_n = e^{iw(\frac{f_0H-1-2n}{2} - \frac{\alpha}{3})}v_n = e^{iw(\frac{(3f_0(H)-f_0(Z))}{6} - n)}v_n.$$

Dans la suite, on va calculer $\ker(\delta_-)_1 \cap \ker{(\delta_-)_1}^*$. On a vu que $\ker(\delta_-)_1 \cap \ker{(\delta_-)_1}^*$ est constitué des éléments $\varphi_0 \otimes \mu_0 + \varphi_1 \otimes \mu_1$ avec $\mu_0,\ \mu_1 \in V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_-^\infty$ qui vérifient

$$J_0.\mu_1 = J_1.\mu_0 + \mu_1$$

et

$$J_0^*.\mu_0 + J_1^*.\mu_1 = 0.$$

On peut écrire $\mu_0 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes \phi_n$ et $\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes \psi_n$ avec $\phi_n, \psi_n \in \mathbb{H}_-^\infty$.

Donc, on a $J_0.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes J_0(\psi_n) + \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} J_0(v_n) \otimes \psi_n$. D'après ce qui précède, on obtient que

$$J_0.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes (-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} - t^{-2}\psi_n + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\psi_n).$$

De même

$$J_1.\mu_0 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes t^{-1}\omega.\phi_n + \sqrt{2}i \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_{n-1} \otimes n\phi_n,$$

donc

$$J_1.\mu_0 + \mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes (t^{-1}\omega.\phi_n + \psi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}).$$

Ici par convention $\phi_{-1} = \phi_{f_0(H)} = \psi_{f_0(H)} = \psi_{-1} = 0$, et cette convention s'applique dans toute la suite de la section. Donc on en déduit que l'équation

$$J_0.\mu_1 = J_1.\mu_0 + \mu_1$$

est équivalente à

$$-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} - t^{-2}\psi_n + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\psi_n = t^{-1}\omega.\phi_n + \psi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}$$

pour $0 \leq n \leq f_0(H) - 1$, c'est-à-dire

$$-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + (-t^{-2} + \frac{f_0(H) - 2n - 2\alpha + 1}{2})\psi_n = t^{-1}\omega.\phi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}(*).$$

De la même manière, on peut obtenir que

$$J_0^*.v_0 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes (t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} - t^{-2}\phi_n + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\phi_n)$$

et

$$J_1^*.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes 2t^{-1}\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega} - \sqrt{2}i \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_{n+1} \otimes (f_0(H) - 1 - n)\psi_n.$$

Donc

$$J_0^*.\mu_0 + J_1^*.v_1 = 0$$

est équivalente à

$$2t^{-1}\frac{\partial \psi_n}{\partial \omega} - \sqrt{2}i(f_0(H) - n)\psi_{n-1} + t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + (-t^{-2} + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2})\phi_n = 0 \; (**)$$

pour $0 \leq n \leq f_0(H) - 1$.

On écrit $\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}(t)\omega^m$ et $\psi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,n}(t)\omega^m$, $0 \leq n \leq f_0(H) - 1$. Donc

$$-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \sum_{m=0}^{+\infty} -tb'_{m,n}(t)\omega^m$$

$$(-t^{-2}+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+1}{2})\psi_n=\sum_{m=0}^{+\infty}(-t^{-2}+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+1}{2})b_{m,n}(t)\omega^m,$$

$$t^{-1}\omega.\phi_n=\sum_{m=0}^{+\infty}t^{-1}a_{m,n}(t)\omega^{m+1}$$

et

$$\sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}=\sum_{m=0}^{+\infty}\sqrt{2}i(n+1)a_{m,n+1}(t)\omega^m.$$

Donc de $(*)$, on déduit que

$$-tb'_{m,n}(t)+(-t^{-2}+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+1}{2})b_{m,n}(t)-t^{-1}a_{m-1,n}(t)-$$
$$\sqrt{2}i(n+1)a_{m,n+1}(t)=0 \qquad (\triangleright)$$

pour $m\geq 0,\ 0\leq n\leq f_0(H)-1$. Ici par convention $a_{-1,n}=b_{-1,n}=a_{m,f_0(H)}=b_{m,f_0(H)}=0$ et cette convention s'applique dans toute la suite.

De même, on peut obtenir de $(**)$ que

$$ta'_{m,n}(t)+(-t^{-2}+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+3}{2})a_{m,n}(t)-$$
$$\sqrt{2}i(f_0(H)-n)b_{m,n-1}(t)+2t^{-1}(m+1)b_{m+1,n}(t)=0 \qquad (\triangleright\triangleright).$$

Puisque la variable t est strictement positive, de $(\triangleright)$ et $(\triangleright\triangleright)$, on déduit que pour m fixé, on a

$$b'_{m-n,f_0(H)-1-n}(t)=-t^{-2}a_{m-n-1,f_0(H)-1-n}(t)+$$
$$(-t^{-3}+\frac{2n-f_0(H)+2\alpha+3}{2}t^{-1})b_{m-n,f_0(H)-1-n}(t)-t^{-1}\sqrt{2}i(f_0(H)-n)a_{m-n,f_0(H)-n}(t)$$

et

$$a'_{m-n-1,f_0(H)-1-n}(t)=t^{-1}\sqrt{2}i(1+n)b_{m-n-1,f_0(H)-2-n}(t)+$$
$$(t^{-3}-\frac{2n-f_0(H)+2\alpha+5}{2}t^{-1})a_{m-n-1,f_0(H)-1-n}(t)-2t^{-2}(m-n)b_{m-n,f_0(H)-1-n}(t).$$

Or $a_{m,f_0(H)}=a_{m,-1}=b_{m,-1}=b_{m,f_0(H)}=0$. Donc pour chaque $m\geq 0$, on obtient un système différentiel D^-_m d'ordre 1 comme expliqué ci-après. Si $m\geqslant f_0(H)$, D^-_m a $2f_0(H)$ fonctions inconnues, et si $0\leqslant m\leqslant f_0(H)-1$, D^-_m a $2m+1$ fonctions inconnues. Plus précisément : si $m\geq f_0(H)$ on obtient le système d'ordre 1 de $2f_0(H)$ fonctions inconnues suivante :

$$(y^-_m)'(t)=(t^{-1}A^-_m+t^{-2}B^-_m+t^{-3}C^-_m)y^-_m(t)\quad (t\in]0,+\infty[)\ \ (D^-_m,\quad m\geqslant f_0(H))$$

où

$$y^-_m(t)=\begin{pmatrix} b_{m,f_0(H)-1}(t)\\ a_{m-1,f_0(H)-1}(t)\\ \vdots\\ b_{m-n,f_0(H)-1-n}(t)\\ a_{m-n-1,f_0(H)-1-n}(t)\\ \vdots\\ b_{m-(f_0(H)-1),0}(t)\\ a_{m-f_0(H),0}(t)\end{pmatrix}$$

et A_m^-, B_m^- et C_m^- sont les matrices que l'on a définies auparavant.

Si $0 \leqslant m \leqslant N_1 - 1$, on obtient le système d'ordre 1 de 2m+1 fonctions inconnues suivante :

$$(y_m^-)'(t) = (t^{-1}A_m^- + t^{-2}B_m^- + t^{-3}C_m^-)y_m^-(t) \quad (t \in]0,+\infty[) \ (D_m^-,\ 0 \leqslant m \leqslant f_0(H)-1)$$

où

$$y_m^-(t) = \begin{pmatrix} b_{m,f_0(H)-1}(t) \\ a_{m-1,f_0(H)-1}(t) \\ \vdots \\ b_{m-n,f_0(H)-1-n}(t) \\ a_{m-n-1,f_0(H)-1-n}(t) \\ \vdots \\ b_{1,f_0(H)-m}(t) \\ a_{0,f_0(H)-m}(t) \\ b_{0,f_0(H)-m-1}(t) \end{pmatrix}$$

et A_m^-, B_m^- et C_m^- sont les matrices que l'on a définies auparavant (pour cette raison-là, on appelle les systèmes encore D_m^-).

On voit facilement que les systèmes ($\triangleright$) et ($\triangleright\triangleright$) sont équivalents à D_m^- ($m \geqslant 0$). Le point important est que les systèmes D_m^- sont deux à deux indépendants et toute $a_{m,n} \in C^\infty$ (la même chose pour $b_{m,n}$) est impliquée dans un et un seul système D_m^-.

D'autre part, remarquons que $[W, J_0] = 0$ et $[W, J_1] = iJ_1$. On en déduit successivement que $\exp(wW).J_0 = J_0$, $\exp(wW).J_1 = e^{iw}.J_1$, $\exp(wW).\varphi_0 = \varphi_0$ et $\exp(wW).\varphi_1 = e^{-iw}\varphi_1$. D'après ce qui précède, il en résulte que

$$\exp(wW).(\varphi_0 \otimes v_{f_0(H)-n-1} \otimes a_{m-n-1,f_0(H)-n-1}(t)\omega^{m-n-1}) =$$

$$= e^{iw(m-\frac{(3f_0(H)+f_0(Z))}{6})}\varphi_0 \otimes v_{f_0(H)-n-1} \otimes a_{m-n-1,N_1-n-1}(t)\omega^{m-n-1}$$

et

$$\exp(wW).(J_1^* \otimes v_{f_0(H)-n-1} \otimes b_{m-n,f_0(H)-n-1}(t)\omega^{m-n}) =$$

$$= e^{iw(m-\frac{(3f_0(H)+f_0(Z))}{6})}\varphi_1 \otimes v_{f_0(H)-n-1} \otimes b_{m-n,f_0(H)-n-1}(t)\omega^{m-n}.$$

Pour $m \in N$, désignons par F_m^- l'espace formé des vacteurs

$$\sum_{n=0}^{N_1-1} (\varphi_0 \otimes v_{f_0(H)-n-1} \otimes a_{m-n-1,f_0(H)-n-1}(t)\omega^{m-n-1} + \varphi_1 \otimes v_{f_0(H)-n-1} \otimes b_{m-n,f_0(H)-n-1}(t)\omega^{m-n})$$

où, $a_{m-n-1,f_0(H)-n-1}(t)$, $b_{m-n,f_0(H)-n-1}(t)$ sont solutions de D_m^- avec $m \geqslant 0$. Définissons également les espaces

$$(F_m^-)^\infty = \left\{ g_m \in F_m^-;\ \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\|g_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Rappelons que l'on a déjà défini

$$(D_m^-)^\infty = \left\{ y_m \text{ solution de } D_m^-; \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Alors il est clair que $\dim(F_m^-)^\infty = \dim(D_m^-)^\infty$. D'autre part, d'après ce qui précède, on déduit facilement que pour $m \in \mathbb{N}$ et $l = (3m - \frac{(3f_0(H)+f_0(Z))}{2})$

$$\dim((\mathfrak{H}_-)^1_{\sigma_l}) = \dim((F_m^-)^\infty)$$

et pour les autres $l \in \mathbb{Z}$,

$$\dim((\mathfrak{H}_-)^1_{\sigma_l}) = 0.$$

Il reste donc à traiter $(\mathfrak{H}_+)^1 = \ker(\delta_+)_1 \cap \ker(\delta_+)_1^*$. Comme pour $(\mathfrak{H}_-)^1$, on peut obtenir que $\ker(\delta_+)_1 \cap \ker(\delta_+)_1^*$ est constitué des éléments $\varphi_0 \otimes \mu_0 + \varphi_1 \otimes \mu_1$ avec $\mu_0, \mu_1 \in V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_+^\infty$ qui vérifient

$$J_0.\mu_1 = J_1.\mu_0 + \mu_1$$

et

$$J_0^*.\mu_0 + J_1^*.\mu_1 = 0.$$

Ici, comme dans $(\mathfrak{H}_-)^1$, $J_0 = H_1 + iZ_1$ et $J_1 = X_1 + iY_1$, et H_1, Z_1, X_1, Y_1 sont comme ceux que l'on a définis auparavant. J_0^*, J_1^* sont leurs adjoints formels respectivement. D'autre part, puisque $\mathrm{T}_+ \cong \mathrm{T}_-^\vee$, en identifiant $\mathbb{H}_+$ à $\mathbb{H}_-$ (donc $\mathbb{H}_+^\infty$ à $\mathbb{H}_-^\infty$), les opérateurs $J_0 = H_1 + iZ_1$ et $J_1 = X_1 + iY_1$ dans $\mathbb{H}_+^\infty$ sont équivalents à $H_1 - iZ_1$ et $X_1 - iY_1$ respectivement dans $\mathbb{H}_-^\infty$ (et J_0^*, J_1^* aux $-H_1 - iZ_1$ et $-X_1 - iY_1$ respectivement). Dans la suite on va garder ces identifications, et travailler dans $V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_-^\infty$.

On écrit $\mu_0 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes \phi_n$ et $\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes \psi_n$ avec $\phi_n, \psi_n \in \mathbb{H}_-^\infty$, où les $v_n \in V_{\lambda+\alpha_{31}}$ sont ceux que l'on a définis auparavant.

On obtient que

$$J_0.\mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes (-t\frac{\partial \psi_n}{\partial t} + t^{-2}\psi_n + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\psi_n)$$

et

$$J_1.\mu_0 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes -2t^{-1}\frac{\partial \phi_n}{\partial \omega} + \sqrt{2}i \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_{n-1} \otimes n\phi_n.$$

Donc

$$J_1.\mu_0 + \mu_1 = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes (-2t^{-1}\frac{\partial \phi_n}{\partial \omega} + \psi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}),$$

ici par convention $\phi_{-1} = \phi_{f_0(H)} = \psi_{f_0(H)} = \psi_{-1} = 0$ bien entendu. Donc on en déduit que l'équation

$$J_0.\mu_1 = J_1.\mu_0 + \mu_1$$

est équivalente à

$$-t\frac{\partial\psi_n}{\partial t}+(t^{-2}+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+1}{2}\psi_n=-2t^{-1}\frac{\partial\phi_n}{\partial\omega}+\sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1}\quad(1')$$

pour $0\leq n\leq f_0(H)-1$.

De même, on a

$$J_0^*.\mu_0=\sum_{n=0}^{f_0(H)-1}v_n\otimes(t\frac{\partial\phi_n}{\partial t}+t^{-2}f_n+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+3}{2}\phi_n)$$

et

$$J_1^*.\mu_1=\sum_{n=0}^{f_0(H)-1}v_n\otimes -t^{-1}\omega.\psi_n-\sqrt{2}i\sum_{n=0}^{f_0(H)-1}v_{n+1}\otimes(f_0(H)-1-n)\psi_n.$$

Donc

$$J_0^*.\mu_0+J_1^*.\mu_1=0$$

est équivalente à

$$-t^{-1}\omega.\psi_n-\sqrt{2}i(f_0(H)-n)\psi_{n-1}+t\frac{\partial\phi_n}{\partial t}+(t^{-2}+\frac{f_0(H)-2n+2\alpha+3}{2})\phi_n=0\quad(2')$$

pour $0\leq n\leq f_0(H)-1$.

On écrit $\phi_n=\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}(t)\omega^m$ et $\psi_n=\sum_{m=0}^{+\infty}b_{m,n}(t)\omega^m$, $0\leq n\leq f_0(H)-1$. Alors, de la même manière que dans l'étude de $(\ker\delta_1)\bigcap(\ker\delta_1^*)$, on obtient de $(1')$ et $(2')$ que

$$a'_{m,n}(t)=\sqrt{2}it^{-1}(N_1-n)b_{m,n-1}-$$
$$(t^{-3}+\frac{N_1-2n+2\alpha+3}{2})a_{m,n}(t)+t^{-2}b_{m-1,n}(t)\quad(\triangleleft)$$

et

$$b'_{m,n}(t)=2(m+1)t^{-2}a_{m+1,n}(t)+$$
$$(t^{-3}+\frac{N_1-2n+2\alpha+1}{2}t^{-1})b_{m,n}(t)-\sqrt{2}i(n+1)t^{-1}a_{m,n+1}(t)\quad(\triangleleft\triangleleft).$$

Donc, comme dans l'étude de $\ker(\delta_-)_1\cap\ker(\delta_-)_1^*$, pour chaque $m\geq 0$, on obtient un système différentiel D_m^+ d'ordre 1. Si $m\geqslant N_1$, D_m^+ a $2N_1$ fonctions inconnues, et si $0\leqslant m\leqslant f_0(H)-1$, D_m^+ a $2m+1$ fonctions inconnues. Plus précisément : si $m\geqslant f_0(H)$, D_m^+ est le système suivant :

$$(y_m^+)'(t)=(t^{-1}A_m^++t^{-2}B_m^++t^{-3}C_m^+)y_m^+(t)\quad(t\in]0,+\infty[)\quad(D_m^+,\quad m\geqslant f_0(H))$$

où

$$y_m^+(t)=\begin{pmatrix}a_{m,0}(t)\\ b_{m-1,0}(t)\\ \vdots\\ a_{m-n,n}(t)\\ b_{m-n-1,n}(t)\\ \vdots\\ a_{m-(f_0(H)-1),f_0(H)-1}(t)\\ b_{m-f_0(H),f_0(H)-1}(t)\end{pmatrix}$$

et les A_m^+, B_m^+, C_m^+ sont les matrices que l'on a définies auparavant.

Si $0 \leqslant m \leqslant f_0(H)-1$, D_m^+ est le système suivant :

$$(y_m^+)'(t) = (t^{-1}A_m^+ + t^{-2}B_m^+ + t^{-3}C_m^+)y_m^+(t) \quad (t \in]0,+\infty[) \ (D_m^+, \ 0 \leqslant m \leqslant f_0(H)-1)$$

où

$$y_m^+(t) = \begin{pmatrix} a_{m,0}(t) \\ b_{m-1,0}(t) \\ \vdots \\ a_{m-n,n}(t) \\ b_{m-n-1,n}(t) \\ \vdots \\ a_{1,m-1}(t) \\ b_{0,m-1}(t) \\ a_{0,m} \end{pmatrix}$$

et les A_m^+, B_m^+, C_m^+ sont les matrices que l'on a définies auparavant (également pour cette raison-là, on appelle les systèmes D_m^+).

Comme dans $\ker(\delta_-)_1 \cap \ker(\delta_-)_1^*$, on voit facilement que les systèmes ($\triangleleft$)et ($\triangleleft\triangleleft$) sont équivalents à D_m^+ ($m \geqslant 0$). De plus les systèmes D_m^+ sont deux à deux indépendants et toute $a_{m,n} \in C^\infty$ (la même chose pour $b_{m,n}$) et est impliquée dans un et un seul système D_m^+.

D'autre part, il faut remarquer que puisque $\mathrm{T}_+ \cong \mathrm{T}_-^\vee$, on a

$$\exp(wW).a_{m,n}(t)\omega^m = e^{-iwm}a_{m,n}(t)\omega^m.$$

Donc on en déduit que

$$\exp(wW).(\varphi_0 \otimes v_n \otimes a_{m-n,n}(t)\omega^{m-n}) =$$

$$= e^{-iw(m+\frac{(f_0(Z)-3f_0(H))}{6})}\varphi_0 \otimes v_n \otimes a_{m-n,n}(t)\omega^{m-n},$$

et

$$\exp(wW).(\varphi_1 \otimes v_n \otimes b_{m-n-1,n}(t)\omega^{m-n-1}) =$$

$$= e^{-iw(m+\frac{(f_0(Z)-3f_0(H))}{6})}\varphi_1 \otimes v_n \otimes b_{m-n-1,n}(t)\omega^{m-n-1}.$$

Définissons les espaces

$$F_m^+ = \left\{ \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} (\varphi_0 \otimes v_n \otimes a_{m-n,n}(t)\omega^{m-n} + \varphi_1 \otimes v_n \otimes b_{m-n-1,n}(t)\omega^{m-n-1}) \right\}$$

où, $a_{m-n,n}(t)$, $b_{m-n-1,n}(t)$ sont solutions de D_m^+ avec $m \geqslant 0$. Définissons également les espaces

$$(F_m^+)^\infty = \left\{ g_m \in E_m; \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\|g_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}$$

et rappelons que l'on a déjà défini

$$(D_m^+)^\infty = \left\{ y_m \text{ solution de } D_m^+; \quad \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{\|y_m(t)\|^2}{t} dt < +\infty \right\}.$$

Alors il est clair que $\dim((F_m^+)^\infty) = \dim((D_m^+)^\infty)$. D'autre part, d'après ce qui précède, on déduit facilement que pour $m \in \mathbb{N}$ et $l = -(3m - \frac{(3f_0(H) - f_0(Z))}{2})$

$$\dim((\mathfrak{H}_+)^1_{\sigma_l}) = \dim((F_m^+)^\infty)$$

et pour les autres $l \in \mathbb{Z}$,

$$\dim((\mathfrak{H}_+)^1_{\sigma_l}) = 0.$$

La démonstration est donc bien achevée. $\square$

Maintenant on va retraiter le cas séries discrètes holomorphes à l'aide du théorème 6.7. On verra que non seulement on peut retrouver les résultats de Rossi-Vergne pour $G = SU(2,1)$ (théorème 6.3), mais cette méthode est particulièrement simple pour traiter les séries discrètes holomorphes (et celles anti-holomorphes) de G.

Supposons maintenant que π_λ est une série discète holomorphe avec le paramètre de Harish-Chandra λ qui vérifie que $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) \in \mathbb{N}^+$. On peut facilement vérifier que dans ce cas $q_\Lambda = 0$. On a déjà vu dans la section 6.2 que dire que π_λ est une série discrète holomorphe équivaut à dire que $f_0(H) \in \mathbb{N}^+$ et $f_0(Z) + f_0(H)$ est un entier pair strictement négatif. Dans la suite, on va exprimer les résultats en fonction de $f_0(H)$ et $f_0(Z)$.

Il est bien clair que $\ker(\delta_\pm)_0{}^* = \Lambda^0(\mathfrak{h}_+)^* \otimes V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty$. Donc $\mathfrak{H}_\pm^0 = \ker(\delta_\pm)_0 \cap \ker(\delta_\pm)_0{}^* = \ker(\delta_\pm)_0$. On peut facilement voir que

$$\ker(\delta_\pm)_0 = \left\{ \mu \in V_{\lambda+\alpha_{31}} \otimes \mathbb{H}_\pm^\infty; \quad J_0\mu = 0 \text{ et } J_1\mu = 0 \right\},$$

ici les opérateurs J_0 et J_1 sont ceux que l'on a définis auparavant.

D'abord, on va calculer $\ker(\delta_-)_0$. Écrivons $\mu = \sum_{n=0}^{N_1-1} v_n \otimes \phi_n$ avec $\phi_n \in \mathbb{H}_-^\infty$, et les $v_n \in V_{\lambda+\alpha_{31}}$ sont ceux que l'on a définis auparavant. Alors à l'aide des informations que l'on a eues pour les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes, on obtient que les condition $J_0\mu = 0$ et $J_1\mu = 0$ sont équivalentes à

$$-t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} - t^{-2}\phi_n + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\phi_n = 0,$$

et

$$t^{-1}\omega\phi_n + \sqrt{2}i(n+1)\phi_{n+1} = 0$$

respectivement. Ici, comme pour les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes $\alpha = \frac{f_0(Z)}{2} - 3/2$. Donc en écrivant $\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}(t)\omega^m$, on obtient de la première équation que $a_{m,n}(t) \in \mathbb{C}t^{\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2} - n} e^{\frac{t^{-2}}{2}}$. Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\mid t^{\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2} - n} e^{\frac{t^{-2}}{2}} \mid)^2}{t} dt = +\infty.$$

Donc $\mathfrak{H}_-^0 = \ker(\delta_-)_0 = 0$.

Maintenant, il reste à calculer $\mathfrak{H}_+^0 = \ker(\delta_+)_0$. Comme dans $\mathfrak{H}_-^0$, en identifiant $\mathbb{H}_+$ à $\mathbb{H}_-$, on obtient que

$$\ker(\delta_+)_0 = \left\{ \mu = \sum_{n=0}^{f_0(H)-1} v_n \otimes \phi_n \right\},$$

où $\phi_n \in \mathbb{H}_{\pi_1}^\infty$ vérifient

$$-t\frac{\partial \phi_n}{\partial t} + t^{-2}\phi_n + \frac{f_0(H) - 2n + 2\alpha + 3}{2}\phi_n = 0$$

et

$$-2t^{-1}\frac{\partial \phi_n}{\partial \omega} + \sqrt{2}(n+1)i\phi_{n+1} = 0.$$

Donc, en écrivant $\phi_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}(t)\omega^m$, on obtient de la première équation que $a_{m,n}(t) \in \mathbb{C}t^{\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}-n}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}$, et de la seconde équation, on déduit que $\phi_{f_0(H)-1} = a_{0,f_0(H)-1}$ et $a_{m,n}(t) = \sqrt{2}(n+1)it\frac{a_{m-1,n+1}(t)}{2m}$. On peut vérifier directement que si $a_{m-1,n+1}(t) \in \mathbb{C}t^{\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}-(n+1)}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}$, alors $\sqrt{2}(n+1)it\frac{a_{m-1,n+1}(t)}{2m} \in \mathbb{C}t^{\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}-n}e^{-\frac{t^{-2}}{2}}$. D'autre part, puisque $\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}$ est en entier strictement négatif, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\mid t^{\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}-n}e^{-\frac{t^{-2}}{2}} \mid)^2}{t}dt < +\infty.$$

On en déduit donc $\mathfrak{H}_+^0 = \ker(\delta_+)_0 \cong \bigoplus_{n=0}^{f_0(H)} \mathbb{C}v_n = V_{\lambda+\alpha_{31}}$. Donc d'après le théorème 6.7, on obtient exactement le résultat du théorème 6.3.

6.5 Étude asymptotique des solutions des systèmes différentiels $D_m^\pm$

Dans cette section, on va étudier le comportement asymptotique des solutions des systèmes $D_m^\pm$, on va d'abord traiter D_m^-.

En faisant un changement de variable $z = 1/t$, on peut transformer le système D_m^- dans la section précédente en

$$x_m'(z) = \{z^{-1}(-A_m^-)+(-B_m^-)+z(-C_m^-)\}x_m(z) \quad ((D_m^-)') \text{ (où } x_m(z) = y_m(1/z))$$

Il est clair que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\| x_m(z) \|^2}{z}dz = \int_0^{+\infty} \frac{\| y_m(t) \|^2}{t}dt.$$

Puisque au voisinage de 0, le système $(D_m^-)'$ a une singularité de première espèce, il est bien connu qu'au voisinage de 0, il existe une solution fondamentale $X_m(z) = U_m(z)z^{\Delta_m^-}z^{N_m}$, où $U_m(z)$ est une transformation analytique en 0 (c-est-à-dire $U_m(z)$ est analytique au voisinage de 0 et $U_m(0)$ est une matrice inversible), Δ_m^- est une matrice constante diagonale qui est équivalente à la partie semi-simple de $-A_m^-$, et N_m est une matrice constante strictement triangulaire inférieure. D'autre part, par des calculs directs, on voit que $-A_m^{-1}$ est diagonalisable et pour $m \geq f_0(H)$ (resp.$0 \leq m < f_0(H)$) , elle a $f_0(H)+1$ (resp. $m+1$) valeurs propres positives et $f_0(H)-1$ (resp. m) négatives. En fait, par exemple, pour $m \geq f_0(H)$, les valeurs propre de $-A_m^-$ sont $\frac{f_0(H)-f_0(Z)}{2}, \frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}$ qui sont positives et

$$\pm\sqrt{(n+1+\frac{f_0(Z)-f_0(H)}{2})^2+2(n+1)(f_0(H)-n-1)} =$$

$$\pm\sqrt{-[(n+1)-\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2}]^2+[(\frac{f_0(H)-f_0(Z)}{2})^2+(\frac{f_0(H)+f_0(Z)}{2})^2]},$$

pour $0 \leq n \leq f_0(H)-2$. Donc on en déduit que le sous-espace que l'on note $(E_m^-)^0$ des solutions $x_m(z)$ de $(D_m^-)'$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\|x_m(z)\|^2}{z} dz$ converge au voisinage de 0 est de dimension $f_0(H)+1$, si $m \geq f_0(H)$, et de dimension $m+1$, si $0 \leq m < f_0(H)$. (Pour plus de détails, voir les résultats de la section 9.2 de l'appendice qui nous ont été communiqués par C. Sabbah).

Maintenant on étudie le comportement asymptotique des solutions au voisinage de l'infini. Après une permutation des coordonnées du système $(D_m^-)'$ $(m \geqslant f_0(H))$, on réécrit

$$(D_m^-)' : z\widetilde{x_m}'(z) = z^2[\widetilde{C_m^-} + z^{-1}\widetilde{B_m^-} + z^{-2}\widetilde{A_m^-}]\widetilde{x_m}(z)$$

avec

$$\widetilde{x_m}(z) = \begin{pmatrix} b_{m,f_0(H)-1}(z) \\ b_{m-1,f_0(H)-2}(z) \\ \vdots \\ b_{m-(f_0(H)-1),0}(t) \\ a_{m-1,f_0(H)-1}(z) \\ a_{m-2,f_0(H)-2}(z) \\ \vdots \\ a_{m-f_0(H),0}(z) \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{C_m} = \begin{pmatrix} I_{f_0(H)} & 0 \\ 0 & -I_{f_0(H)} \end{pmatrix},$$

où

$I_{f_0(H)}$ est la matrice carrée identité de taille $f_0(H)$,

$$\widetilde{B_m^-} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{B_m^-}^{12} \\ \widetilde{B_m^-}^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{B_m^-}^{12}$ et $\widetilde{B_m^-}^{21}$ sont des matrices carrées de taille $f_0(H)$ et on ne précise pas leurs formes, puisque elles n'affectent pas notre argument suivant.

$$\widetilde{A_m^-} = \begin{pmatrix} \widetilde{A_m^-}^{11} & \widetilde{A_m^-}^{12} \\ \widetilde{A_m^-}^{21} & \widetilde{A_m^-}^{22} \end{pmatrix}$$

où les $\widetilde{A_m^-}^{ij}$ $(i, j \in \{1, 2\})$ sont des matrices carrées de taille $f_0(H)$. Pour la même raison, on ne précise pas leurs formes exactes. Il est connu qu'il existe au voisinage de l'infini, une unique transformation analytique formelle $\widetilde{T_m}(z)$ de la forme

$$\widetilde{T_m}(z) = \begin{pmatrix} I_{f_0(H)} & \widetilde{T_m}^{12}(z) \\ \widetilde{T_m}^{21}(z) & I_{f_0(H)} \end{pmatrix}$$

qui transforme $(D_m^-)'$ en $\widetilde{(D_m^-)'}$ (c'est-à-dire qu'au voisinage de l'infini, toute solution $\widetilde{x_m}(z) = \widetilde{T_m}(z)\widetilde{y_m}(z)$, où $\widetilde{y_m}(z)$ est une solution de $\widetilde{(D_m^-)'}$). Ici le nouveau système $\widetilde{(D_m^-)'}$ est

$$\widetilde{D'_m}: \quad z\widetilde{y_m}'(z) = z^2\widetilde{H_m}(z)\widetilde{y_m}(z),$$

avec

$$\widetilde{H_m}(z) = \begin{pmatrix} \widetilde{H_m}^{11}(z) & 0 \\ 0 & \widetilde{H_m}^{22}(z) \end{pmatrix}$$

(donc $\widetilde{D'_m}$ se divise en deux systèmes indépendants). Les $\widetilde{T_m}^{ij}(z)$, $\widetilde{H_m}^{ii}(z)$ $(i, j \in \{1, 2\})$ sont analytiques au voisinage de l'infini, et leurs coefficients peuvent se calculer par récurrence concrètement (pour la procédure de calculs, voir les pages 42 et 43 de l'ouvrage de W.Balser qui s'intitule « Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations »). Ce qui est important dans notre situation, c'est que $\widetilde{H_m}^{11}(z)$ et $\widetilde{H_m}^{22}(z)$ sont de la forme

$$\widetilde{H_m}^{11}(z) = [I_{f_0(H)} + z^{-2}\widetilde{G_m}^{11}(z)]$$

et

$$\widetilde{H_m}^{22}(z) = [-I_{f_0(H)} + z^{-2}\widetilde{G_m}^{22}(z)],$$

où les fonctions matricielles $\widetilde{G_m}^{11}(z)$ et $\widetilde{G_m}^{22}(z)$ sont analytiques au voisinage de l'infini. Donc on peut déduire que les solutions pour les deux petits systèmes

$$z\widetilde{y_m}'^{jj}(z) = z^2\widetilde{H_m}^{jj}(z)\widetilde{y_m}^{jj}(z) \ j = 1, 2$$

sont de la forme

$$\widetilde{y_m}^{11}(z) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\widetilde{x_m}^{11}(z)$$

et

$$\widetilde{y_m}^{22}(z) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\widetilde{x_m}^{22}(z)$$

où $\widetilde{x_m}^{11}(1/z)$ et $\widetilde{x_m}^{22}(1/z)$ sont les solutions de deux systèmes de la première espèce au voisinage de 0 respectivement. D'autre part, il est clair qu'au voisinage de l'infini, les solutions de $(D_m^-)'$ sont de la forme

$$y_m(z) = \widetilde{T_m}(z)\begin{pmatrix} \widetilde{y_m}^{11}(z) \\ \widetilde{y_m}^{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Donc d'après la forme des solutions fondamentales sur les systèmes de la premières espèce (voir ce que l'on a fait pour étudier le comportement asymptotique en 0 des solutions de $(D_m^-)'$. Pour plus de détails, voir la section 9.2 de l'appendice), on déduit que le sous-espace que l'on note $(E_m^-)^\infty$ des solutions $y_m(z)$ de $\widetilde{(D_m^-)'}$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\|y_m(z)\|^2}{z} dz$ converge au voisinage de $+\infty$ sont de la forme

$$\widetilde{T_m}(z) \begin{pmatrix} 0 \\ \widetilde{y_m}^{22}(z) \end{pmatrix}.$$

Donc $(E_m^-)^\infty$ est de dimension $f_0(H)$. D'autre part, il est clair que $\dim(D_m^-)^\infty = \dim((E_m^-)^0 \cap (E_m^-)^\infty)$. Or vu que la dimension de l'espace des solutions de $(D_m^-)'$ est de $2f_0(H)$, on déduit que $1 \leq \dim((D_m^-)^\infty) \leq f_0(H)$. De même, pour $0 \leq m < f_0(H)$, on peut obtenir que $\dim((E_m^-)^\infty) = m$. Puisque la dimension de l'espace des solutions de $(D_m^-)'$ est de $2m+1$, $\dim(D_m^-)^\infty \leqslant m$. Donc surtout $\dim(D_0^-)^\infty = 0$.

De la même manière, on peut étudier le comportement asymptotique des solutions de D_m^+. On peut obtenir que pour $m \geqslant f_0(H)$, on a que $1 \leq \dim((D_m^+)^\infty) \leq f_0(H)$, et pour $0 \leq m < f_0(H)$, on a que $\dim((D_m^+)^\infty) \leqslant m$. Donc surtout $\dim((D_0^+)^\infty) = 0$.

D'après ce qui précède, on déduit que $\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^\pm)^\infty) = +\infty$. Selon le théorème 6.8, on a donc

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong (+\infty)\,\mathrm{T}_+ \bigoplus (+\infty)\,\mathrm{T}_-.$$

Donc d'après le théorème 5.4, on déduit que les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont confirmées pour (G, π_λ, B_1), avec π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe. D'autre part dans la section 6.2, on a déjà confirmé les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour (G, π_λ, B_1), avec π_λ holomorphe ou anti-holomorphe. Donc **les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont confirmées pour** (G, π_λ, B_1) **pour toutes les séries discrètes**.

6.6 Interprétation et application des travaux de Fabec et de ceux de Kraljevic

Dans cette section, on va réétudier la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe à l'aide des travaux de Fabec et ceux de Kraljevic. En combinant les résultats que l'on a obtenus dans les sections 6.4 et 6.5, on arrive à décomposer explicitement $\pi_\lambda|_B$.

Soit $B = MAN$ le sous-groupe de Borel de $G = SU(2,1)$ que l'on a défini auparavant. Soit $R^{p,\alpha}$ la série principale de $G = SU(2,1)$ par rapport à B, où $p \in \widehat{M}$ (c'est-à-dire un caractère unitaire de M) et $\alpha \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. Rappelons que $R^{p,\alpha}$ est la représentation induite par la représentation de B de dimension 1 : $man \mapsto \exp((\alpha+\rho)(\log a)p(m))$, où $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ et $\rho = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,(\mathrm{ad}|_\mathfrak{n})$. Comme dans [20], on identifie $\widehat{M}$ au réseau des formes linéaires f dans $\mathfrak{m}^*$ avec $f(W) \in \mathbb{Z}/3$, et $\widehat{K}$ au réseau des formes linéaires f dans $\mathfrak{t}^*$ avec $f(W) \in \mathbb{Z}/3$ et $f(H_{12}) \in \mathbb{N}$. On identifie également α à $\alpha(S) \in \mathbb{C}$, où $S \in \mathfrak{a}$ est ce que l'on a défini dans le chapitre 3.

Kraljevic ([19] et [20]) a déterminé explicitement tous les sous-quotients irréductibles unitarisables pour $R^{p,\alpha}$. En particulier, il a donné une condition necessaire et suffisante pour qu'un sous-quotient irréductible unitarisable soit une série discrète et il a aussi montré que $R^{p,\alpha}$ a les même sous-quotients irréductibles (unitarisables ou pas) que $R^{p,-\alpha}$.

Fabec ([9]) a construit pour toute $R^{p,\alpha}$ deux sous-espaces fermés invariants $N_2 \subset N_1$. Notamment il a démontré que

Théorème 6.9 *Si $\alpha = 3p + 2k$, avec $3p + k \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$ (ici $k \in \mathbb{Z}$), alors $R^{p,\alpha}$ est unitarisable sur N_2. De plus en notant ce sous-quotient unitaire encore $R^{p,\alpha}$, on a*

$$R^{p,\alpha}|_{MAN} \cong \{ \sum_{n \geqslant 3p+k}^{+\infty} \tau^{p-n,+} \bigoplus \sum_{n \geqslant k}^{+\infty} \tau^{p+n,-} \}$$

où

$$\tau^{m,+} \cong \sigma_{3m} \otimes \overline{\mathrm{T}^-} \cong \mathrm{T}_{3m,-}$$

et

$$\tau^{m,-} \cong \sigma_{3m} \otimes \overline{\mathrm{T}^+} \cong \mathrm{T}_{3m,+}$$

$\forall m \in \mathbb{Z}/3$

Remarque. Dans l'article de Fabec ([9]), il y a une erreur sur un indice de somme dans le théorème concerné (voir le théorème 6.3 de [9]), et le théorème précédent est la version corrigée.

Or d'après Kraljevic (voir le théorème 6, la proposition 2 et (iv) de la proposition 3 dans [20]), lorsque $3p+k > 1$ et $k > 1$ ($k \in \mathbb{Z}$), on peut montrer que $R^{p,\alpha}$ a un seul sous-quotient unitarisable irréductible (et il correspond à "$\pi_{1,1}(r)$" avec "$j(p,\alpha) = 1, j(p,-\alpha) = 2$" dans [19]). Donc on en déduit qu'il est exactement celui dans le théorème précédent. D'autre part, en appliquant le théorème 6 de [19], on peut montrer qu'il correspond à une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe. Plus précisément, le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{12}) = \alpha$, $\lambda(H_{13}) = 3p+k$ et $\lambda(H_{32}) = k$. Donc en appliquant le théorème précédent de Fabec, **on peut décomposer explicitement toutes ces séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes dont le paramètre de Harish-Chandra λ vérifie $\lambda(H_{13}) > 1$ et $\lambda(H_{32}) > 1$**. Du coup il reste à décomposer les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes $\pi_\lambda|_B$ avec $\lambda(H_{13}) = 1$ ou $\lambda(H_{32}) = 1$.

Maintenant, on considère $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k \neq 0$ et $k \neq -1$. D'après ([19]), on sait que $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ a les même sous-quotients irréductibles que $R^{\frac{2k+1}{3},1}$. Or on peut déduire de ([19]) que $R^{\frac{2k+1}{3},1}$ a trois sous-quotients irréductibles unitarisables. Plus précisément, si $k \geq 1$, alors il s'agit de la série discrète holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{12}) = k$,$\lambda(H_{31}) = 1$, de la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ_k vérifie que $\lambda_k(H_{12}) = k+1$, $\lambda_k(H_{13}) = 1$ et d'une représentation unitaire irréductible qui n'est pas une série discrète. Et si $k \leq -2$, alors il s'agit de la série discrète anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{12}) = -1-k$, $\lambda(H_{23}) = 1$, de la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ_k vérifie que $\lambda_k(H_{12}) = -k$, $\lambda_k(H_{32}) = 1$ et d'une représentation unitaire irréductible qui n'est pas une série discrète. Ainsi il est clair que chaque série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe dont le paramètre de Harish-Chandra associé λ vérifie que $\lambda(H_{13}) = 1$ ou $\lambda(H_{32}) = 1$ figure comme un sous-quotient irréductible dans une (et une seule) $R^{\frac{2k+1}{3},1}$ (donc dans une et une seule $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$). Or d'après le théorème 6.5 de [9], on sait que $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ est unitarisable sur N_2, et, notant encore $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ le sous-quotient N_2, on a

si $k \geq 1$,

$$R^{\frac{2k+1}{3},-1}|_{MAN} \cong \tau^{-\frac{k-1}{3},+}$$

et si $k \leq -2$,

$$R^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \tau^{-\frac{k+2}{3},-}.$$

Donc on peut déduire de la proposition 6.3, du théorème 6.7 et de la section 6.5 que le sous-quotient unitaire sur N_2 est la représentation unitaire irréductible qui n'est pas une série discrète. D'autre part, d'après le théorème 6.6 de [9], $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ est unitarisable sur N_1/N_2, et

si $k \geq 1$, on a

$$R^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}+n),-} \bigoplus \sum_{n\geqslant 0}^{k-1} \tau^{(\frac{2k+1}{3}-n),+} \bigoplus \sum_{n\geqslant k+1}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}-n),+}$$

si $k \leq -2$, on a

$$R^{\frac{2k+1}{3},-1}|_B \cong \sum_{n\geqslant 0}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}-n),+} \bigoplus \sum_{n\geqslant 0}^{-k-2} \tau^{(\frac{2k+1}{3}+n),-} \bigoplus \sum_{n\geqslant -k}^{+\infty} \tau^{(\frac{2k+1}{3}+n),-}$$

Donc la proposition 6.3 nous permet de déduire que le sous-quotient unitarisable de $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ sur N_1/N_2 contient forcément la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe de paramètre λ_k. Or d'après le théorème 6.7 et la section 6.5, on sait que si $k \geq 1$, alors la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe de paramètre λ_k ne contient pas le terme "$\tau^{(\frac{2k+1}{3}),+}$" et si $k \leq -2$, elle ne contient pas le terme "$\tau^{(\frac{2k+1}{3}),-}$". Donc on en déduit que le sous-quotient unitarisable N_1/N_2 de $R^{\frac{2k+1}{3},-1}$ est la somme de la série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe et de la série discrète holomorphe (ou anti-holomorphe). Donc en appliquant encore une fois la proposition 6.3, on peut décomposer explicitement dans cette situation $\pi_\lambda|_B$. On arrive donc à décomposer explicitement $\pi_\lambda|_B$, pour toutes les séries discrète ni holomorphes ni anti-holomorphes (de G). On résume tout ceci comme un théorème :

Théorème 6.10 *Pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $\lambda(H_{12}) = n_1 \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13}) = n_2 \in \mathbb{N}^+$ $(n_1 > n_2)$, on a que*

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[3m+2n_1-n_2],+} \bigoplus \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[-(3m+n_1+n_2)],-}$$

c'est-à-dire

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[3m+\frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{2}],+} \bigoplus \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{T}_{[-(3m+\frac{3f_0(H)+f_0(Z)}{2})],-}.$$

Donc on en déduit aussi une nouvelle fois le résultat que l'on a obtenu dans la section 6.5 :

$$\pi_\lambda|_{B_1} \cong (+\infty)\,\mathrm{T}_+ \bigoplus (+\infty)\,\mathrm{T}_-.$$

6.7 Confirmation des assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour $G = SU(2,1)$

Jusqu'à présent, on a confirmé les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour (G, π_λ, B_1) pour toutes les séries discrètes π_λ, et pour (G, π_λ, B), pour π_λ holomorphe ou anti-holomorphe. Maintenant, le théorème 6.9 nous permet de les confirmer pour (G, π_λ, B), pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe.

Soit π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13}) \in \mathbb{N}^+$ ($\lambda(H_{12}) > \lambda(H_{13})$). Comme dans le chapitre 5, $\mathcal{O}_{\pi_\lambda} = G.f_0$ est son orbite coadjointe associée dans $\mathfrak{g}^*$ avec $f_0 = -\lambda$. Donc comme dans la section 6.2, on peut obtenir que

$$\{\langle k.f_0, E_2\rangle |\ k \in K\} = \{\langle k.f_0, H\rangle + \langle f_0, Z\rangle |\ k \in K\}$$

$$= \{x_1.\langle f_0, H\rangle + \langle f_0, Z\rangle | -1 \leq x_1 \leq 1\} = [f_0(Z) - f_0(H), f_0(H) + f_0(Z)].$$

Puisque $|f_0(H)| > |f_0(Z)|$, d'après la formule $(**)$ de la section 5.4 et ce qui la précède, on déduit que

$$\mathrm{p}(G.f_0) \cap \mathfrak{b}^*_{fr} = (\bigsqcup_{r \leq \frac{-(3f_0(H)+f_0(Z))}{6}} \Omega_{r,-}) \bigcup (\bigsqcup_{r \geq \frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6}} \Omega_{r,+}).$$

Donc on en déduit que l'ensemble des B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles de $\mathfrak{b}^*$ qui sont contenues dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda})$ est

$$\{\Omega_{r_N,-} : N \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\Omega_{l_N,+} : N \in \mathbb{N}\}$$

où $r_N = -(\frac{3f_0(H)+f_0(Z)}{6} + \frac{N}{3}) - \frac{1}{2}$, et $l_N = \frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6} + \frac{N}{3} + \frac{1}{2}$. On l'écrit comme une proposition. Voici

Proposition 6.11 *Soit π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $\lambda(H_{12}) \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{13}) \in \mathbb{N}^+$ ($\lambda(H_{12}) > \lambda(H_{13})$), et $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}$ son orbite coadjointe associée dans $\mathfrak{g}^*$. Alors l'ensemble des B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles de $\mathfrak{b}^*$ qui sont contenues dans $p(\mathcal{O}_{\pi_\lambda})$ est*

$$\{\Omega_{r_N,-} : N \in \mathbb{N}\} \bigcup \{\Omega_{l_N,+} : N \in \mathbb{N}\}$$

où $r_N = -(\frac{3f_0(H)+f_0(Z)}{6} + \frac{N}{3}) - \frac{1}{2}$, et $l_N = \frac{3f_0(H)-f_0(Z)}{6} + \frac{N}{3} + \frac{1}{2}$.

Puisque pour $m \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{T}_{m,\pm}$ correspond à $\Omega_{(\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2}),+}$, les théorèmes 5.5 et 6.10 et la proposition 6.11 nous permettent de confirmer les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour (G, π_λ, B), pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe.

Donc les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo sont confirmées pour (G, π_λ, B_1) et (G, π_λ, B) pour toutes les séries discrètes π_λ de $G = SU(2, 1)$.

Remarque. Comme on a vu pour les séries discrètes holomorphes, pour les séries discrètes ni holomorphes ni holomorphes, il n'y a qu'également un tiers des B-orbites coadjointes fortement régulières et admissibles dans la projection $\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda})$ qui interviennent dans la décomposition $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}|_B$.

6.8 Conséquences sur $(D_m^\pm)^\infty$

Dans le théorème 6.8, on a vu que pour π_λ ni holomorphe ni anti-holomorphe avec $f_0(H) \in \mathbb{N}^+$, $f_0(H) + f_0(Z) \in 2\mathbb{N}^+$ et $|f_0(H)| > |f_0(Z)|$, on a que

$$\pi_\lambda|_B \cong \sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^-)^\infty).\mathrm{T}_{[3m-\frac{(3f_0(H)+f_0(Z))}{2}],+} \bigoplus$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \dim((D_m^+)^\infty).\mathrm{T}_{[-(3m+\frac{f_0(Z)-3f_0(H)}{2})],-}.$$

Donc d'après le théorème 6.10, on déduit que

Proposition 6.12 *Pour les systèmes différentiels $D_m^\pm$ et les sous-espace $(D_m^\pm)^\infty$ définis dans la section 5.4, on a*

$$dim((D_m^\pm)^\infty) = 0, \quad si \ \ 0 \leqslant m \leqslant f_0(H) - 1$$

et

$$dim((D_m^\pm)^\infty) = 1, \quad si \ \ m \geqslant f_0(H).$$

Ce résultat semblerait difficilement s'obtenir par des méthodes "directes".

7 Comparaison entre la construction de Duflo et celle d'Auslander-Kostant pour la conjecture

Dans cette section, on va interpréter la conjecture dans le cadre d'Auslander-Kostant pour les groupes résolubles algébriques.

D'abord on fait quelques rappels concernant la théorie d'Auslander-Kostant

La théorie d'Auslander-Kostant :

Soit G un groupe réel résoluble algébrique tel que $[G,G] \subset G^{\mathfrak{u}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, ici $G^{\mathfrak{u}}$ est le radical unipotent de G. Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire. On dit que g est **entière**, s'il existe un caractère unitaire χ_g de $G(g)_0$ de différentielle $ig|_{\mathfrak{g}(g)}$, où $G(g) \subset G$ est le stabilisateur de g par rapport à l'action coadjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}(g)$ est l'algèbre de Lie de $G(g)$ et $G(g)_0$ est la composante neutre de $G(g)$. On note $\mathfrak{g}^*_{\text{ent}}$ l'ensemble des formes linéaires entières. Si $g \in \mathfrak{g}^*_{\text{ent}}$, on note $Y(g)$ l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de $G(g)$ dont la restriction à $G(g)_0$ est un multiple de χ_g .

Soient $\mathfrak{l}$ une polarisation en $g \in \mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, on dit que $\mathfrak{l}$ est admissible pour $\mathfrak{a}$ si $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est une polarisation en $a = g|_{\mathfrak{a}}$.

Théorème 7.1 *Soit $g \in \mathfrak{g}^*$, alors il existe une polarisation positive $\mathfrak{l}$ en g vérifiant la condition de Pukanszky, qui soit $\mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}$-admissible (ici $\mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}$ est le radical unipotent de $\mathfrak{g}$), telle que $\mathfrak{l}$ soit $G(g)$-invariante et que $l \cap \mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}$ soit $G(g|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}})$-invariante.*

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ et soit $\mathfrak{l}$ une polarisation positive en g vérifiant les conditions du théorème précédent. On définit alors la forme linéaire $\theta \in \mathfrak{g}(g)^*$ par

$$\theta(X) = \frac{1}{2}\text{Im tr}(\text{ad}X|_{\mathfrak{l}}) \ , \ X \in \mathfrak{g}(g)$$

Il s'avère que θ est indépendant du choix de $\mathfrak{l}$.

Soit $\widetilde{g} \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire telle que

(i) $\widetilde{g}|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}} = g|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}}$.

(ii) $\widetilde{g}|_{\mathfrak{g}(g)} = g|_{\mathfrak{g}(g)} - \theta$.

Une telle forme linéaire existe, car $\mathfrak{g}$ étant résoluble, on a $(\mathfrak{g}(g))^{\mathfrak{u}} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}(g)$, tandis que $\theta|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{u}}(g)} = 0$. Alors l'orbite $\widetilde{\mathcal{O}} = G.\widetilde{g}$ de $\widetilde{g}$ ne dépend que de l'orbite $\mathcal{O} = G.g$ de g et l'application $\mathcal{O} \longmapsto \widetilde{\mathcal{O}}$ induit une bijection de $\mathfrak{g}^*_{\text{ent}}/G$ sur $\mathfrak{g}^*_{\text{ad}}/G$, où $\mathfrak{g}^*_{\text{ad}}$ est l'ensemble des formes linéaires admissibles (dans le sens de Duflo). Rappelons que l'on a déjà défini ce qu'est une forme linéaire admissible (au sens de Duflo) dans le chapitre 2.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*_{\text{ent}}$ et $\widetilde{g} \in \mathfrak{g}^*_{\text{ad}}$ comme ci-dessus, alors on a $G(g) = G(\widetilde{g})$. De plus il existe un caractère χ_θ de $G(\widetilde{g})^{\mathfrak{g}}$ de différentielle $i\theta$. Alors l'application $\tau \longmapsto \widetilde{\tau} = \chi_\theta^{-1}\tau$ induit une bijection de $Y(g)$ sur $X(\widetilde{g})$, où $X(\widetilde{g})$ est ce que l'on a définit dans le chapitre 2.

Si $g \in \mathfrak{g}^*_{\text{ent}}$ et $\tau \in Y(g)$, Auslander-Kostant lui font correspondre une représentation $\pi_{g,\tau} \in \widehat{G}$.

Si $g \in \mathfrak{g}^*_{\text{ad}}$ et $\tau \in X(g)$, Duflo lui associe une représentation $T_{g,\tau} \in \widehat{G}$ (ce que l'on a expliqué dans le chapitre 2).

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 7.2 *Pour tout $g \in \mathfrak{g}^*_{ent}$ et tout $\tau \in Y(g)$, on a*

$$\pi_{g,\tau} \cong T_{\widetilde{g},\widetilde{\tau}}$$

Maintenant on revient sur $G = SU(2,1)$, et on garde les notations dans les chapitres précédents qui concernent G. On va appliquer la théorie d'Auslander-Kostant à $B = MAN$ et $B_1 = AN$.

D'abord pour B_1, on a vu qu'il y a deux B_1-orbites coadjointes fortement régulières (dans ${\mathfrak{b}_1}^*$) $\Omega^\pm$ qui sont également admissibles et ouvertes. Donc il est évident que $\Omega^\pm \subset {\mathfrak{b}_1}^*_{\mathrm{ad}}$. Comme les stabilisateurs concernés sont triviaux, on déduit des paragraphes précédents que $\forall f \in \Omega^\pm$, on a $f \in {\mathfrak{b}_1}^*_{\mathrm{ent}}$ et $\widetilde{f} = f$. De plus $Y(f) = X(f) = \{\tau\}$ et $\pi_{f,\tau} = T_{f,\tau} = T_\pm$.

Maintenant, on traite B, on a vu que les B-orbites coadjointes fortement régulières (dans $\mathfrak{b}^*$) sont les $\Omega_{r,\pm} = B.(rW^* \pm E_2^*)$, et $\Omega_{r,\pm}$ est admissible $\Leftrightarrow$ $r+\frac{1}{2} = \mathbb{Z}/3$. Soit $f_{m,\pm} = (\frac{m}{3} \pm \frac{1}{2})W^* \pm E_2^* \in b^*$. On peut vérifier directement que $\mathfrak{l}_\pm = \mathbb{C}W \oplus \mathbb{C}(E_1 + \pm iE_1') \oplus \mathbb{C}E_2$ est une polarisation positive en $f_{m,\pm}$ qui vérifie le théorème précédent. Puisque $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}W|_{\mathfrak{l}_\pm}) = \mp i$, où $W \in \mathfrak{m}$ est ce que l'on a défini dans le chapitre 3, on déduit que $\widetilde{g_{m,\pm}} = f_{m,\pm}$, avec $g_{m,\pm} = \frac{m}{3}W^* \pm E_2^* \in b^*$. Comme il y a un seul élément dans $X(f_{m,\pm})$, il y en a seul aussi dans $Y(g_{m,\pm})$, et on note $\pi_{g_{m,\pm}}$ la seule représentation unitaire irréductible associée à $g_{m,\pm}$ au sens d'Auslander-Kostant. Alors on a $\pi_{g_{m,\pm}} \cong \mathrm{T}_{m,\pm}$.

Maintenant, on part du paramètre de Blattner Λ. On a vu que si le paramètre de Harish-Chandra λ correspond à une série discrète holomorphe, alors $\Lambda = \lambda + \alpha_{31}$. On peut aussi vérifier facilement que si λ correspond à une série discrète ni holomorphe ni anti-holomorphe, alors $\Lambda = \lambda$.

On suppose d'abord que λ correspond à une série discrète holomorphe π_λ tel que $\lambda(H_{12}) = n_1 \in \mathbb{N}^+$ et $\lambda(H_{31}) = n_3 \in \mathbb{N}^+$. Notons l'orbite $\mathcal{O}_\Lambda = G.f_\Lambda$ avec $f_\Lambda = -i\Lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$. On vérifie facilement que $f_\Lambda(H_{12}) = n_1 - 1$, $f_\Lambda(H_{31}) = n_3 + 2$, $f_\Lambda(H) = n_1 - 1$ et $f_\Lambda(Z) = -(n_1 + 2n_3 + 3)$. Donc on a $f_\Lambda(Z) + f_\Lambda(H) < 0$. Donc d'après la section 6.2, on déduit que

$$\mathrm{p}(\mathcal{O}_\Lambda) = \bigcup_{\frac{n_3 - n_1}{3} + 1 \leq r \leq \frac{2n_1 + n_3}{3}} \Omega_{r,-}.$$

Puisque $\pi_{g_{m,\pm}} \cong \mathrm{T}_{m,\pm}$, la proposition 6.4 nous permet de conclure que **toute sous-représentation irréductible unitaire dans la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ correspond à une (et une seule) B-orbite coadjointe fortement régulière et entière (au sens d'Auslander-Kostant) qui est contenue dans $\mathcal{O}_\Lambda = G.f_\Lambda$.**

Remarque. (1) Ceci n'est pas vrai pour $\mathcal{O}_\lambda = G.f_\lambda$ avec $f_\lambda = -i\lambda$, si l'on utilise la théorie d'Auslander-Kostant pour B. D'autre part, Ceci n'est pas vrai non plus pour $\mathcal{O}_\Lambda = G.f_\Lambda$ si l'on utilise la théorie de Duflo pour B.

(2) Le nombre des orbites entières (au sens d'Auslander-Kostant) dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\Lambda)$ est **plus petit** que le nombre des orbites admissibles (au sens de Duflo) dans $\mathrm{p}(\mathcal{O}_\lambda)$.

Pour les séries discrètes anti-holomorphes, on a les résultats analogues.

Maintenant, on considère le cas les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes. Donc supposons $\lambda(H_{12}) = n_1$ et $\lambda(H_{13}) = n_2$ avec $n_1 > n_2$. Puisque dans ce cas $\lambda = \Lambda$, on a $\mathcal{O}_\Lambda = \mathcal{O}_\lambda$. D'autre part, on a vu dans la section 6.7 que

$$\mathrm{p}(G.f_0) \cap \mathfrak{b}^*_{fr} = \Big(\bigsqcup_{r \leq \frac{-n_1-n_2}{3}} \Omega_{r,-}\Big) \bigcup \Big(\bigsqcup_{r \geq \frac{2n_1-n_2}{3}} \Omega_{r,+}\Big).$$

Donc le théorème 6.10 permet de conclure : **Toute sous-représentation irréductible unitaire dans la décomposition de $\pi_\lambda|_B$ correspond à une (et une seule) B-orbite coadjointe fortement régulière et entière (au sens d'Auslander-Kostant) qui est contenue dans la projection de $\mathcal{O}_\Lambda = \mathcal{O}_\lambda$.**

8 Étude de variétés réduites et formule pour la multiplicité

Si G est un groupe de Lie réductif connexe, $K \subset G$ est un sous-groupe compact maximal, alors une telle formule de multiplicité est la célèbre *formule de Blattner* qui est une identité combinatoire. Un problème intéressant est : Est-ce que l'on peut exprimer les multiplicités à l'aide de formules qui ne soient "visiblement " pas combinatoires ? La réponse est : Du moins, si $H \subset G$ est un sous-groupe compact (G est toujours supposé réductif), oui. En fait dans ce cas, Paradan [[24],[25]) a réussi à obtenir une telle formule dans le cadre de la géométrie des orbites coadjointes. Surtout il a réinterprété la formule de Blattner sous forme non combinatoire. Parmi les objets principaux qu'il a utilisés figurent les *variétés réduites* liées à des variétés symplectiques d'orbites coadjointes. Mais si $H \subset G$ n'est pas un sous-groupe compact, les choses deviennent compliquées. Car il n'y a pas encore une bonne théorie générale pour les groupes de Lie non compacts agissant sur les variétés symplectiques. Cependant, l'objectif de cette section est d'illustrer cette "philosophie" à travers le groupe $G = SU(2,1)$ et ses sous-groupes non compacts B_1 et B.

Donc dans la suite de cette section, sauf indication contraire, on garde toutes les notations concernant $G = SU(2,1)$ introduites dans les chapitres et sections précédents.

8.1 Étude des variétés réduites

Soit $f_0 \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ une forme fortement régulière et $\mathcal{O}_{f_0} := G.f_0$ sa G-orbite coadjointe. Muni de la structure symplectique de Kirillov-Kostant-Souriau ϖ, $(\mathcal{O}_{f_0}, \varpi) \cong G/\mathbb{T}$ est une variété symplectique, où $\mathbb{T}$ est le tore maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$ ($\mathfrak{t}$ est défini dans le chapitre 3). B_1 (resp. B) agit dans $\mathcal{O}_{f_0}$ par l'action coadjointe, de sorte que $(\mathcal{O}_{f_0}, \varpi, B_1, \mathrm{p}_1)$ (resp. $(\mathcal{O}_{f_0}, \varpi, B, \mathrm{p})$) devient un espace hamiltonien, où l'application moment associée est la projection p_1 (resp. p). On a vu que les B_1-orbites (resp. B-orbites) fortement régulières dans $\mathfrak{b}_1^*$ (resp. $\mathfrak{b}^*$) sont $\Omega^{\pm}$ (resp. $\Omega_{r,\pm}$). Dans cette section, on va étudier la variété réduite $\mathrm{p}_1^{-1}(\Omega^{\pm})/B_1$ que l'on note $X_{\pm}$ (resp. $\mathrm{p}^{-1}(\Omega_{r,\pm})/B$ que l'on note $X_{r,\pm}$).

Proposition 8.1 *Soit $f_0 \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ une forme fortement régulière, et $\mathcal{O}_{f_0} := G.f_0$. Alors*

(1) Soit $\Omega^{\pm} \subset p_1(\mathcal{O}_{f_0})$. Alors : Si f_0 est dans le cône holomorphe, la variété réduite $X_{\pm}$ est difféomorphe à la sphère compacte de dimension 2. Sinon, $X_{\pm}$ est une variété non compacte de dimension 2.

(2) Soit $\Omega_{r,\pm} \subset p(\mathcal{O}_{f_0})$. Alors, la variété réduite $X_{r,\pm}$ est réduite à un point.

Démonstration. Remarquons d'abord que, si b est un élément quelconque de $\Omega^{\pm}$ (resp. $\Omega_{r,\pm}$), on a $X_{\pm} \cong \mathrm{p}_1^{-1}(b)/B_1(b)$ (resp. $X_{r,\pm} \cong \mathrm{p}^{-1}(b)/B$.

Soit $S = K.f_0$ qui est l'orbite co-adjointe de f_0 dans $\mathfrak{k}^*$, difféomorphe à la sphère de dimension 2. Tout d'abord on montre que $p_1(S)$ est une sous-variété compacte de $\mathfrak{b}_1^*$ et que p_1 induit un difféomorphisme de S sur $p_1(S)$: cela résulte de ce qui est dit dans la section 5.3 et de la formule $p_1(x_1H + x_2F + x_3V) =$

$x_1E_2^* + x_2E_1^* + x_3{E'_1}^*$ (remarquons que l'on peut donner une autre démonstration de ce fait moins calculatoire et qui se généralise, reposant sur le fait que le noyau de l'application linéaire p_1 est, modulo identification de $\mathfrak{g}^*$ avec $\mathfrak{g}$ au moyen de la forme de Killing, $\mathfrak{m} \oplus \theta(\mathfrak{n})$).

Soit $f_\pm \in S$ tel que $b_{1\pm} := p_1(f_\pm) \in \Omega^\pm$ et $S_\pm := S \cap p_1^{-1}(\Omega^\pm)$. Alors $X_\pm = p_1^{-1}(b_{1\pm})$ (car dans ce cas, le stabilisateur de $b_{1\pm}$ dans $\mathfrak{b}_1^*$ est trivial). L'application $x \mapsto x.b_{1\pm}$ est un difféomorphisme M-équivariant de B_1 sur $\Omega^\pm$ dont on désigne par $\sigma_\pm$ l'inverse. On pose $\Sigma_\pm = \sigma_\pm \circ p_1(S_\pm)$.

Alors

1 $\Sigma_\pm$ est une sous-variété M-invariante de B_1 difféomorphe via $\sigma_\pm$ à $S_\pm$.

2 $S_\pm = S$ si et seulement si $p_1(\mathcal{O}_{f_0}) \subset \Omega^\pm$. Dans ce cas $S_\mp = \emptyset$. Sinon, $S_\pm$ est une sous-variété ouverte non-compacte de la sphère S, qui est une calotte sphérique.

3 Soit $\Delta_\pm = \{(g, \sigma_\pm(g)) | g \in S_\pm\}$. Alors l'application $g \mapsto (g, \sigma_\pm(g))$ (resp. $(g, \sigma_\pm(g)) \mapsto \sigma_\pm(g)^{-1}.g$) est un difféomorphisme M-équivariant de $S_\pm$ sur $\Delta_\pm$ (resp. de $\Delta_\pm$ sur $X_\pm$).

4 Un système de représentants des M-orbites dans S (resp. $S_\pm$) est $\{f_\theta = \exp -\frac{\theta}{2}V.f_0 | \theta \in [0,\pi]\}$ (resp. $\{f_\theta = \exp -\frac{\theta}{2}V.f_0 | \theta \in [0,\pi]$ et $\pm\,(f_0(H)\cos\theta + f_0(Z)) > 0\}$).

5 On pose $\epsilon(f_0) = \frac{f_0(H)+f_0(Z)}{|f_0(H)+f_0(Z)|}$ et $f_\pm = \pm\epsilon(f_0)f_0$. Alors $f_\pm \in S$ si et seulement si $p_1(\mathcal{O}_{f_0}) \cap \Omega^\pm \neq \emptyset$.

6 Le calcul montre que $p(f_\theta) = -\frac{1}{6}(f_0(Z) - 3f_0(H)\cos\theta)W^* + (f_0(H)\cos\theta + f_0(Z))E_2^* + f_0(H)\sin\theta E_1^*$. D'après la section 5.2, il en résulte que $\langle \sigma_\pm(g_\theta)^{-1}.g_\theta, W\rangle = \phi(\cos\theta)$ où ϕ est la fonction homographique $\phi(t) = \frac{1}{6}(2f_0(Z) - 3\frac{f_0(Z)^2 - f_0(H)^2}{f_0(H)t + f_0(Z)})$. Il est alors clair que les variétés réduites pour B sont des points.

D'où les résultats.

$\square$

Remarque. Il est possible que l'image réciproque $\mathrm{p}^{-1}(rW^* \pm E_2^*)$ est réduite à un point elle-même, par exemple lorsque $rW^* \pm E_2^*$ est dans la même orbite que $\mathrm{p}(f_0)$.

8.2 Multiplicité et variétés réduites

On a vu que pour toutes les séries discrètes (holomorphes ou pas) π_λ, on a $\pi_\lambda|_B$ est B-admissible et toute sous-représentation irréductible (de B) qui intervient est de multiplicité 1. Pourtant, il n'y a que exactement un tiers des B-orbites fortement régulières et admissibles dans la projection $\mathrm{p}(\mathcal{O}_{\pi_\lambda})$ qui interviennent dans la décomposition de $\pi_\lambda|_B$. En fait on a le résultat suivant (on rappelle que les groupes G et B ont le même centre, Z_G) :

Proposition 8.2 *Soit π_λ une série discrète de $G = SU(2,1)$ avec $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ et soit $f = -i\lambda$. Supposons que la B-orbite fortement régulière et admissible $\Omega_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ soit contenue dans $p(G.f)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) la série discrète $T_{m,\pm}$ de B intervient dans $\pi_\lambda|_B$,

(ii) les séries discrètes π_λ et $T_{m,\pm}$ ont même caractère central,

(iii) $m - \frac{3f(H)+f(Z)}{2} \in 3\mathbb{Z}$

Démonstration. C'est une conséquence facile de l'assertion (4) remarque 1 du chapitre 4 et du corollaire 6.2 qui décrivent le caractère central des séries discrètes de G et de B, ainsi que de la proposition 6.4 et du théorème 6.10. $\square$

Dans la suite on va donner une interprétation de ce phénomène dans le cadre de la quantification Spin_c. Cette interprétation s'inspire des travaux de Paradan (théorème 2.16 dans [26]) pour les groupes de Lie compacts agissant dans les variétés symplectiques (non compactes) avec l'application moment propre. Ce qui est nouveau dans notre cas est que le groupe B n'est pas compact. De plus pour toute série discrète (holomorphe ou pas), le résultat s'applique, même si l'application moment (la projection) n'est pas forcément propre (e.g. pour les séries discrètes ni holomorphes ni anti-holomorphes).

Avant d'aller plus loin, nous devons expliquer quel est le fibré associé à une orbite de type compact fortement régulière et admissible dans le cadre de la quantification Spin_c. Soit G un groupe presque algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et $f \in \mathfrak{g}^*$ une forme de type compact fortement régulière et admissible. Nous supposons que G et $G(f)$ sont connexes. Comme $\mathrm{Ad}\, G(f)$ est un tore compact, il existe un lagrangien complexe l et positif dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ qui soit $G(f)$-invariant. Par suite, d'après le lemme 2.1, il existe un caractère χ_f de $G(f)$ de différentielle $\rho_l + if|_{\mathfrak{g}(f)}$. Il s'avère d'une part que ce caractère ne dépend pas du choix du lagrangien positif l et d'autre part que si χ_l désigne le caractère de $G(g)^{\mathfrak{g}}$ de différentielle ρ_l, on a $X(f) = \{\chi_l^{-1}\chi_f\}$. On définit alors le fibré associé à l'orbite comme le fibré en droites $\mathcal{L} = G \times_{G(f)} \mathbb{C}_{\chi_f}$.

Donnons deux exemples qui nous intéressent. Soit π_λ une série discrète de $G = SU(2,1)$ avec $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ et soit $f = -i\lambda$ de sorte que $\mathcal{O}_{\pi_\lambda} = G.f$. Dans ce cas, le fibré $\mathcal{L}$ de base $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}$ est défini par le caractère χ_f de $\mathbb{T} = G(f)$ de différentielle le paramètre de Blattner $\Lambda = \lambda + \rho - 2\rho_K$, où ρ (resp. ρ_K) est la demi-somme de l'ensemble des racines positives (resp. positives compactes) défini par λ.

Considérons la série discrète $T_{m,\pm}$ de B, associée à l'orbite $\Omega_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ et soit $h_{m,\pm}$ l'élément de cette orbite tel que $h_{m,\pm} = (\frac{m}{3} \pm \frac{1}{2})W^* \pm E_2^*$ et dont le stabilisateur est M. En utilisant la polarisation positive $\mathfrak{l}_\pm$ de la section 6.1, on voit que dans ce cas le fibré $\mathcal{L}$ de base $\Omega_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ est défini par le caractère $\chi_{h_{m,\pm}}$ dont la différentielle vérifie $d\chi_{h_{m,\pm}}(W) = i(\frac{m}{3} \pm 1)$; par suite $\chi_{h_{m,\pm}}$ à même restriction à Z_G que le caractère σ_m de la section 6.1.

Proposition 8.3 *Soit π_λ une série discrète de $G = SU(2,1)$ avec $\lambda \in \mathfrak{t}^*$ et soit $f = i\lambda$. Supposons que la B orbite fortement régulière et admissible $\Omega_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ soit contenue dans $p(G.f)$. Alors, la multiplicité de la série discrète $T_{m,\pm}$ de B dans $\pi_\lambda|_B$ vaut 1 si les caractères χ_λ et $\chi_{h_{m,\pm}}$ ont même restriction au sous-groupe $M(f)$ et 0 sinon.*

Démonstration. On vérifie tout d'abord que $M(f)$ est le centre Z_G du groupe G. D'autre part, il résulte de l'assertion (4) remarque 1 du chapitre 4 et du corollaire 6.2 que le caractère central de π_λ (resp. $T_{m,\pm}$) est donné par $\chi_\lambda|_{Z_G}$ (resp. $\chi_{h_{m,\pm}}|_{Z_G}$). $\square$

Ce résultat est l'analogue du résultat démontré par Paradan dans ([26], section 2.4 "Quantization of points", Theorem 2.16), dans lequel il considère un groupe de Lie compact muni d'une action hamiltonienne sur une variété symplectique avec application moment propre et calcule la quantification de la variété réduite lorsqu'elle est réduite à un point. En effet, d'après la proposition 8.1, la variété réduite d'une orbite $\Omega_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ contenue dans $p(G.f)$ est réduite à un point.

Par analogie avec le résultat de Paradan, nous dirons que la quantification Spin$_c$ $Q_{spin}(X_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm})$ de la variété réduite $X_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ vaut 1 si les caractères χ_λ et $\chi_{h_{m,\pm}}$ ont même restriction au sous-groupe $M(f)$ et 0 sinon (ce cas englobant celui où la variété réduite est vide, i.e. l'orbite $\Omega_{\frac{m}{3}\pm\frac{1}{2},\pm}$ n'est pas contenue dans $p(G.f)$).

Avec cette convention, on voit que l'assertion (iii) de la conjecture de Duflo est confirmée pour (G, π_λ, B) pour toutes les séries discrètes. Puisque nous avons déjà confirmé les assertions (i) et (ii) de la conjecture de Duflo pour (G, π_λ, B) dans le chapitre 6, **la conjecture de Duflo est confirmée pour** (G, π_λ, B) **pour toutes les séries discrètes**.

Remarque. Le fait que toute variété réduite $\mathrm{p}^{-1}(h_{m,\pm})/M$ soit un point semble donner une explication géométrique au fait que la multiplicité d'une série discrète de B qui intervient dans π_λ est au plus 1.

D'après le Théorème 6.3 (de Rossi-Vergne) et le théorème 6.10, on sait que $\pi_\lambda|_{B_1}$ est B_1-admissible si et seulement si π_λ est holomorphe (ou antiholomorphe). Supposons que π_λ est holomorphe, alors d'après la section 6.2, on a $\mathrm{p}_1(\mathcal{O}_{\pi_\lambda}) = \Omega^-$. Donc selon la proposition 8.1, la variété réduite $\mathrm{p}_1^{-1}(\Omega^-)/B_1$ est une sous-variété de $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}$ difféomorphe à la sphère compacte de dimension 2. La théorie nous dit que c'est une sous-variété symplectique de $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}$: on note β sa structure symplectique, qui provient par restriction de celle (Kirillov-Kostant-Souriau) de $\mathcal{O}_{\pi_\lambda}$. Puisque $\mathrm{p}_1^{-1}(\Omega^-)/B_1$ est de dimension deux, alors la forme volume de Liouville pour β est $\frac{\beta}{2\pi}$.

Proposition 8.4 *Soit π_λ une série discrète holomorphe de G, avec le paramètre de Harish-Chandra λ. Soit $f_0 = -i\lambda \in \mathfrak{t}^* \subset \mathfrak{g}^*$ la forme linéaire associée (au sens de Duflo) de sorte que $\mathcal{O}_{\pi_\lambda} = G.f_0$. Alors*

$$\pi_\lambda|_{B_1} = (\int_{X_-} \frac{\beta}{2\pi})\mathrm{T}_-.$$

Démonstration. D'après le théorème 6.3, il s'agit de montrer que

$$\int_{X_-} \frac{\beta}{2\pi} = f_0(H),$$

où $H \in \mathfrak{g}$ est le même que celui dans le théorème 6.3. Dans la suite on va calculer $\int_{X_-} \frac{d\beta}{2\pi}$ par deux méthodes différentes : La première méthode procède par calcul direct, la deuxième plus directe, utilise un argument de topologie différentielle.

Méthode 1 : Dans la démonstration de la proposition 8.1, on obtient un difféomorphisme de $K.f_0$ sur $\mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$, on le note Φ. Or l'application σ : $(x_2, x_1, x_1') \mapsto f_0(Z)Z^* + f_0(H)(x_2 H^* - x_1 F^* - x_1' V^*)$ induit un difféomorphisme de $S^2 = \{(x_2, x_1, x_1') : x_2^2 + x_1^2 + x_1'^2 = 1\}$ sur $K.f_0$. Par suite $\Phi \circ \sigma$ est un difféomorphisme de S^2 sur $\mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$. Soit $S^{2'} = \{(x_2, x_1, x_1') \in S^2 : x_1' \neq$

0 ou $x_1 > 0\}$. Donc $\Phi \circ \sigma(S^{2'})$ est un ouvert de $\mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$ de complémentaire négligeable pour toute densité sur $\mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$.

Soit $x_\theta = -\frac{f_0(H)\sin\theta}{f_0(H)\cos\theta + f_0(Z)}$ et soit t_θ tel que $e^{2t_\theta} = \frac{f_0(H)\cos\theta + f_0(Z)}{f_0(H)+f_0(Z)}$, où $Z \in \mathfrak{g}$ est ce que l'on a défini le chapitre 3. Pour $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, on pose $x(\theta, \varphi) = \exp\varphi W \exp t_\theta S \exp x_\theta E_1' \exp -\frac{\theta}{2} V \in G$ et $g(\theta, \varphi) = x(\theta, \varphi).f_0$. Alors $\{g(\theta, \varphi) : (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]\} = \mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$, de plus l'application $(\theta, \varphi) \mapsto g(\theta, \varphi)$ est un difféomorphisme de $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ sur $\Phi \circ \sigma(S^{2'})$. En fait, M stabilise $\mathrm{p}(f_0)$ (dans $\mathfrak{b}^*$), donc agit dans $\mathrm{p}^{-1}(\mathrm{p}(f_0))$, donc aussi agit dans $\mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$ (car $\mathfrak{b} = \mathbb{R}W \oplus \mathfrak{b}_1$ et $M = \exp\mathbb{R}W$). Soit $x \in B_1$ et $k \in K$, tel que $\mathrm{p}_1(x.k.f_0) = \mathrm{p}_1(f_0)$. Alors si $m \in M$ on a $m(x.k.f_0) = mxm^{-1}(m.k.f_0)$. On peut donc supposer que $k.f$ fait partie d'un ensemble de représentants des M-orbites dans $K.f_0$., i.e. on peut supposer que $k.f_0 = f_\theta = f_0(Z)Z^* + f_0(H)(\cos\theta H^* - \sin\theta F^*) = \exp(-\frac{\theta}{2})V.f_0$ avec $\theta \in [0, \pi]$, ici $F, V \in \mathfrak{k}$ sont définis dans la section 5.3. Dans ce cas, on peut vérifier directement (par les informations d'après la proposition 5.2 de la section 5.2) que $\mathrm{p}_1(x.f_\theta) = \mathrm{p}_1(f_0)$ si et seulement si $x = \exp t_\theta S.\exp\exp x_\theta E_1'$.

Soit β la forme symplectique sur $\Phi \circ \sigma(S^{2'})$. Nous allons calculer $g^*(\beta_\theta)$. Tout d'abord, on a

$$\frac{\partial g}{\partial\theta} = x(\theta, \varphi)[-\frac{1}{2}V + \frac{dx_\theta}{d\theta}\mathrm{Ad}(\exp\frac{\theta}{2}V).E_1' + \frac{dt_\theta}{d\theta}\mathrm{Ad}(\exp\frac{\theta}{2}V\exp -x_\theta E_1').S].f$$

$$\frac{\partial g}{\partial\varphi} = x(\theta, \varphi)\mathrm{Ad}(\exp\frac{\theta}{2}V\exp -x_\theta E_1').W.f\ .$$

Posons

$$U(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2}V + \frac{dx_\theta}{d\theta}\mathrm{Ad}(\exp\frac{\theta}{2}V).E_1' + \frac{dt_\theta}{d\theta}\mathrm{Ad}(\exp\frac{\theta}{2}V\exp -x_\theta E_1').S,$$

$$Z(\theta, \varphi) = \mathrm{Ad}(\exp\frac{\theta}{2}V\exp -x_\theta E_1').W.$$

Alors on a
$g^*(\beta) = f_0([Z(\theta, \varphi), U(\theta, \varphi)])d\varphi \wedge d\theta$.
Or par des calculs directs, on peut obtenir que

$$f_0([Z(\theta, \varphi), U(\theta, \varphi)]) = \frac{1}{2}f_0(H)\sin\theta\frac{f_0(H)^2 - f_0(Z)^2}{(f_0(Z) + f_0(H)\cos\theta)^2}.$$

On a donc

$$g^*(\beta) = \frac{1}{2}f_0(H)\sin\theta\frac{f_0(Z)^2 - f_0(H)^2}{(f_0(Z) + f_0(H)\cos\theta)^2}d\theta \wedge d\varphi.$$

Il vient donc

$$\int_{X_-}\frac{\beta}{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\mid\int_{]0,2\pi[\times]0,\pi[} f_0(H)\sin\theta\frac{f_0(Z)^2 - f_0(H)^2}{(f_0(Z) + f_0(H)\cos\theta)^2}d\varphi d\theta\mid$$

$$= \frac{1}{4\pi}\mid\int_0^{2\pi}d\varphi.\int_0^{\pi}(f_0(Z)^2 - f_0(H)^2)f_0(H)\frac{\sin\theta}{(f_0(Z) + f_0(H)\cos\theta)^2}d\theta\mid$$

$$= \frac{1}{2}(f_0(Z)^2 - f_0(H)^2)\int_{-1}^{1}\frac{du}{(f_0(Z)+f_0(H)u)^2}$$

$$= \frac{1}{2}(f_0(Z)^2 - f_0(H)^2)[\frac{1}{\mid f_0(Z)\mid - \mid f_0(H)\mid} - \frac{1}{\mid f_0(Z)\mid + \mid f_0(H)\mid}]$$

$$=\mid f_0(H)\mid = f_0(H),$$

d'où le résultat cherché.

Méthode 2 : Notons $\Gamma : G \longrightarrow \mathcal{O}_{\pi_\lambda}$ le fibré principal (avec la fibre $G(f_0)$). Ici, il existe un unique caractère $\tilde{\chi}_{f_0}$ de $G(f_0)$ de différentille $if_0|_{\mathfrak{g}(f_0)}$. Soit $\mathcal{L} = G\times_{G(f_0)}\mathbb{C}_{\tilde{\chi}_{f_0}}$ le fibré en droite de Kirillov-Kostant-Souriau correspondant. Pour simplifier on note $X_{f_0} := \mathrm{p}_1^{-1}(\mathrm{p}_1(f_0))$. Il est clair que le fibré $\mathcal{L}_{X_{f_0}}$ restriction de $\mathcal{L}$ à X_{f_0} est $\Gamma^{-1}(X_{f_0})\times_{G(f_0)}\mathbb{C}_{\tilde{\chi}_{f_0}}$. Donc via le difféomorphisme $\Phi : K.f_0 \longrightarrow X_{f_0}$, $\mathcal{L}_{X_{f_0}}$ induit un fibré $\Phi^*(\mathcal{L}_{X_{f_0}})$ de base $K.f_0 \subset \mathcal{O}_{\pi_\lambda}$. On peut vérifier directement que $\Phi^*(\mathcal{L}_{X_{f_0}})$ est exactement la restriction de $\mathcal{L}$ à $K.f_0$, $\mathcal{L}_{K.f_0} := \Gamma^{-1}(K.f_0)\times_{G(f_0)}\mathbb{C}_{\tilde{\chi}_{f_0}}$.

Soit ∇ la connexion de Kirillov-Kostant-Souriau pour $\mathcal{L}$. Soient $\nabla_{K.f_0}$ et $\nabla_{X_{f_0}}$ les connexions induites pour $\mathcal{L}_{K.f_0}$ et $\mathcal{L}_{X_{f_0}}$ respectivement. Les formes courbures correspondantes sont $\beta_{|K.f_0}$ et $\beta_{|X_{f_0}}$. D'autre part, $\Phi^*(\nabla_{X_{f_0}})$ est une connexion sur le fibré $\Phi^*(\mathcal{L}_{X_{f_0}}) = \mathcal{L}_{K.f_0}$ dont la forme courbure est $\Phi^*(\beta_{X_{f_0}})$. Puisque les connexions $\Phi^*(\nabla_{X_{f_0}})$ et $\nabla_{K.f_0}$ proviennent du même fibré, il est connu que les formes courbures correspondantes $\Phi^*(\beta_{X_{f_0}})$ et $\beta_{K.f_0}$ sont dans la même classe de cohomologie de de Rham (pour ceci, on peut consulter par exemple le livre classique de Kobayashi et Nomizu intitulé "Foundations of Differential Geometry ") . Donc on déduit que

$$\int_{X_-}\frac{\beta}{2\pi} = \int_{K.f_0}\frac{\Phi^*(\beta_{X_{f_0}})}{2\pi} = \int_{K.f_0}\frac{\beta_{K.f_0}}{2\pi}.$$

La mesure de densité définie par la forme volume apparaissant dans la dernière intégrale est proportionnelle à la mesure invariante canonique sur la sphère (ici on considère naturellement $K.f_0$ comme une sphère de rayon 1). Pour calculer la constante de proportionalité, il suffit de calculer la valeur de la deux-forme sur deux vecteurs tangents indépendants en un point. On peut obtenir directement que la constante concernée est $\frac{f_0(H)}{2}$. Donc $\int_{K.f_0}\frac{\beta_{K.f_0}}{2\pi} = f_0(H)$, d'où le résultat. $\square$

Donc dans ce cas l'assertion (iii) de la conjecture de Duflo est confirmée pour (G, π_λ, B_1), et on peut confirmer de la même manière l'assertion (iii) de la conjecture de Duflo pour (G, π_λ, B_1) pour π_λ anti-holomorphe . Donc en combinant les résultats que l'on a obtenus dans le chapitre 5, **la conjecture de Duflo est confirmée pour** (G, π_λ, B_1) **pour toutes les séries discrètes**.

9 Appendice

9.1 Sur la projection des orbites coadjointes fortement régulières d'une algèbre de Lie simple.

Le résultat suivant et sa démonstration nous ont été communiqués par Michel Duflo.

Rappelons que, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple, la forme de Killing induit un isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}$. Nous dirons alors qu'une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ est semi-simple si, sous cet isomorphisme, elle correspond à un élément semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Théorème 9.1 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie propre et $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection naturelle. Soit $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ l'orbite sous l'action naturelle du groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ d'un élément «semi-simple» régulier. Alors $p(\Omega)$ contient un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{h}^*$.*

Démonstration. Pour démontrer le théorème, on s'appuie sur le lemme suivant

Lemme 9.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique, G un groupe algébrique connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie et $p : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ la projection naturelle. Soit Ω une G-orbite dans $\mathfrak{g}^*$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $p(\Omega)$ contient un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{h}^*$.

(ii) Il existe $g \in \Omega$ tel que $\mathfrak{g}(g) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

(iii) Il existe $g \in \Omega$ tel que son orbite sous l'action du sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ soit de dimension égale à celle de $\mathfrak{h}$.

Démonstration. Les assertions (ii) et (iii) sont clairement équivalentes. L'assertion (i) s'écrit quant à elle : il existe $g \in \Omega$ tel que $p(T_g(\Omega)) = \mathfrak{h}^*$, où $T_g(\Omega)$ désigne l'espace tangent en g à Ω. Ceci s'écrit aussi $\dim \mathfrak{g}.g - \dim(\mathfrak{g}.g \cap \mathfrak{h}^\perp) = \dim \mathfrak{h}$, soit encore $\dim(\mathfrak{g}.g \cap \mathfrak{h}^\perp) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}(g) - \dim \mathfrak{h}$. Considérant l'orthogonal de $\mathfrak{g}.g \cap \mathfrak{h}^\perp$, on voit que cette dernière relation équivaut à $\dim(\mathfrak{g}(g) + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{g}(g) + \dim \mathfrak{h}$. D'où le lemme. □

Le résultat suivant est conséquence immédiate du lemme.

Corollaire 9.3 *Sous les hypothèses du théorème, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'image par p de toute orbite coadjointe «semi-simple» régulière de $\mathfrak{g}^*$ contient un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{h}^*$.

(ii) Il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{t} \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

Démontrer le théorème se ramène donc à démontrer l'assertion (ii) du corollaire. Il suffit de le faire lorsque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre propre maximale de $\mathfrak{g}$, ce que l'on suppose désormais. Soit G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. Alors le normalisateur H de $\mathfrak{h}$ dans G est un sous-groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. Soit $X = G/H$ qui est une variété algébrique irréductible isomorphe à la classe de G-conjugaison de $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{t}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et T le sous-groupe de Cartan de G correspondant. On fait agir T sur X et on étudie les sous-groupes d'isotropie de cette action. Si $xH \in X$, le stabilisateur de xH dans T est $T^{xH} = T \cap xHx^{-1}$

et il a pour algèbre de Lie $\mathfrak{t}(xH) = \mathfrak{t} \cap \mathrm{Ad}x(\mathfrak{h})$. D'après Richardson ([27]), il existe un ouvert de Zariski non vide X' de X tel que les sous-groupes d'isotropie $T(xH)$, $xH \in X'$, soient deux à deux T-conjugués, donc tous égaux entre eux. Soit $x_0H \in X'$ et $\mathfrak{a} = \mathfrak{t} \cap \mathrm{Ad}x_0(\mathfrak{h}) = \mathrm{Ad}x_0(\mathrm{Ad}x_0^{-1}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{h})$. Alors, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{i}$ où $\mathfrak{i} = \cap_{xH\in X'}\mathrm{Ad}x(\mathfrak{h})$. Or $\mathfrak{i}$ est un idéal propre de $\mathfrak{g}$: en effet si $Y \in \mathfrak{i}$, on a $\mathrm{Ad}x^{-1}Y \in \mathfrak{h}$ pour tout $xH \in X'$ et donc pour tout $xH \in X$, par continuité, de sorte que $\mathfrak{i} = \cap_{xH\in X}\mathrm{Ad}x(\mathfrak{h})$ est bien un idéal de $\mathfrak{g}$, propre car contenu dans $\mathfrak{h}$. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, on a $\mathfrak{i} = \{0\}$ et donc $\mathrm{Ad}x_0^{-1}(\mathfrak{t}) \cap \mathfrak{h} = \{0\}$. D'où le théorème
$\square$

9.2 Sur le comportement asymptotique au voisinage d'un point singulier de première espèce des solutions d'un système différentiel linéaire ordinaire.

Les résultats de cet appendice concernant le comportement asymptotique au voisinage de 0 des solutions systèmes étudiés dans la section 6.5 nous ont été communiqué par Claude Sabbah.

On considère un système différentiel de taille ℓ

$$y'(z) = \frac{M(z)}{z} \cdot y(z), \tag{$*$}$$

où $M(z)$ est holomorphe en 0. On note $M_0 = M(0)$ et $M_0^{(s)}$ la partie semi-simple de M_0.

Proposition 9.4 *La solution fondamentale* $Y(z)$ *du système* $(*)$ *peut être mise sous la forme*

$$Y(z) = U(z)z^{\Delta_0}z^N,$$

où Δ_0 *est diagonale et équivalente à* $M_0^{(s)}$*,* N *est strictement triangulaire inférieure, et* $U(z)$ *est holomorphe inversible (c'est-à-dire* $\det U(0) \neq 0$*).*

Remarque. Dans cette écriture, il se peut que N ne commute pas à Δ_0 lorsque certaines valeurs propres de Δ_0 diffèrent d'un entier non nul. L'ordre de l'écriture est donc important.

Démonstration. Si on pose $\widetilde{Y}(z) = P(z)Y(z)$ avec P holomorphe inversible, et si $Y(z)$ est une matrice fondamentale de $(*)$, alors $\widetilde{Y}(z)$ est une solution fondamentale du système analogue de matrice $\widetilde{M}(z) = PMP^{-1} + zP'P^{-1}$.

On effectue un premier changement de base constant P^0 de sorte que la nouvelle matrice $P^0M_0(P^0)^{-1}$, que je note encore M_0 pour simplifier, soit sous forme de Jordan triangulaire inférieure. On choisit aussi P^0 de sorte que les parties entières des éléments diagonaux de la diagonale Δ_0 soient rangés en ordre croissant. Je les note $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_\ell$. Pour simplifier, je note encore $M(z)$ la matrice obtenue et je note D la matrice diagonale $\mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_\ell)$. Enfin, je pose $d = d_\ell - d_1 \geq 0$. La matrice D commute à Δ_0 et M_0, et les valeurs propres de $M_0 - D$ ont une partie réelle dans $[0, 1[$, de sorte que la seule valeur propre entière de $\mathrm{ad}(M_0 - D)$ est 0.

Lemme 9.5 *Il existe un changement de base holomorphe inversible $P^1(z)$ tel que $\widetilde{M} = M_0 + zB_1 + \cdots + z^d B_d$, où les matrices constantes B_k satisfont à $ad(D)(B_k) = kB_k$ (en particulier sont strictement triangulaires inférieures).*

On admet provisoirement ce lemme, et on écrit $\widetilde{M} = z^D B z^{-D}$, avec $B = M_0 + B_1 + \cdots + B_d$. En effectuant le changement de variable (méromorphe) de matrice z^{-D}, on trouve donc que $z^{-D}P^1P^0Y$ est solution fondamentale du système de matrice $B-D$. Maintenant, $B-D$ s'écrit $\Delta_0 - D + M_0^{(n)} + B_1 + \cdots + B_d$, où $M_0^{(n)}$ est la partie nilpotente de M_0, donc strictement triangulaire inférieure et commute à Δ_0. Par conséquent, il existe une matrice constante inversible P^2 triangulaire inférieure telle que $P^2(B-D)(P^2)^{-1} = \Delta_0 - D + N$, avec N strictement triangulaire inférieure commutant à $\Delta_0 - D$ (mais peut-être pas à Δ_0). Ainsi, on a, en posant $\widetilde{Y} = P^2 z^{-D} P^1 P^0 Y$, $[\widetilde{Y}' = \frac{\Delta_0 - D + N}{z} \cdot \widetilde{Y}]$ et donc $\widetilde{Y} = z^{\Delta_0 - D} z^N$. Par suite,

$$\begin{aligned} Y &= (P^1P^0)^{-1} z^D (P^2)^{-1} z^{\Delta_0 - D} z^N \\ &= [(P^1P^0)^{-1} z^D (P^2)^{-1} z^{-D}] z^{\Delta_0} z^N, \end{aligned}$$

et on pose $U(z) = (P^1P^0)^{-1} z^D (P^2)^{-1} z^{-D}$. La matrice $T := (P^2)^{-1}$ est triangulaire inférieure. Par suite les entrées $z^{d_i - d_j} t_{ij}$ de $z^D T z^{-D}$ son nulles si $i < j$, et puisque la suite (d_i) est croissante, la matrice $z^D T z^{-D}$ est holomorphe inversible. Finalement, $U(z)$ est holomorphe inversible, comme voulu. □

Corollaire 9.6 *La dimension de l'espace des solutions de $(*)$ qui sont localement L^2 en $z = 0$ pour la mesure dz/z sur la demi-droite réelle $\mathbb{R}_+$ est égale au nombre de valeurs propres de $M(0)$ ayant une partie réelle strictement positive.*

Démonstration. Une solution y de $(*)$ est une combinaison linéaire à coefficients constants des vecteurs colonnes de Y. Elle est de la forme $U(z)\widetilde{y}$, où $\widetilde{y}$ est la combinaison linéaire correspondante des vecteurs colonnes de $\widetilde{Y}$. De plus, y est L^2 si et seulement si $\widetilde{y}$ l'est, puisque $U(z)$ est inversible. Si $\Delta_0 = \mathrm{diag}(\delta_1, \ldots, \delta_\ell)$, les colonnes de $\widetilde{Y}$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z^{\delta_j} \\ n_{j+1,j} z^{\delta_{j+1}} \log z \\ \vdots \\ n_{\ell,j} z^{\delta_\ell} \dfrac{(\log z)^{\ell-j}}{(\ell-j)!} \end{pmatrix}$$

et on voit qu'une combinaison linéaire à coefficients constants non nuls de colonnes est L^2 si et seulement si chaque $\mathrm{Re}\delta_j$ correspondant est > 0. □

Démonstration. [Démonstration du lemme] On cherche une matrice $P^1(z) = \mathrm{Id} + zP_1^1 + \cdots$ et des matrices B_i comme dans le lemme, de sorte que l'on ait

$$z\frac{dP^1}{dz} = (M_0 + zB_1 + \cdots + z^d B_d)P^1(z) - P^1(z)(M_0 + zM_1 + z^2M_2 + \cdots). \quad (2)$$

On commence par considérer les équations pour $j = 1, \ldots, d$. On écrit

$$jP_j^1 = M_0 P_j^1 + B_j - P_j^1 M_0 + \Psi_j(P_1^1, \ldots, P_{j-1}^1; B_1, \ldots, B_{j-1}; M_0, \ldots, M_j),$$

où Ψ_j est connu par récurrence sur j, et on veut déterminer P_j^1 et B_j. On écrit ceci sous la forme

$$(j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}M_0)(P_j^1) = B_j + \Psi_j.$$

L'endomorphisme $j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}M_0$ est inversible si $j \geq d + 1$: en effet, les valeurs propres de $\mathrm{ad}M_0$ sont les différences des valeurs propres de M_0 ; si une telle différence est égale à l'entier j, autrement dit si $j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}M_0$ a une valeur propre nulle, la différence des parties entières correspondantes est aussi égale à j, et donc $j \leq d$.

Puisque $\mathrm{ad}M_0$ commute à $\mathrm{ad}D$, on peut décomposer cette équation sur les sous-espaces propres de $\mathrm{ad}D$. De plus, puisque la seule valeur propre entière de $\mathrm{ad}(M_0 - D)$ est 0, l'endomorphisme $\mathrm{ad}(M_0 - D) + k\mathrm{Id}$ est inversible pour tout entier $k \neq 0$. Sa restriction à chaque espace propre de $\mathrm{ad}D$ satisfait à la même propriété.

Ceci étant rappelé, on cherche donc à résoudre, pour tout entier k, l'équation

$$(j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}M_0)(P_j^{1(k)}) = B_j^{(k)} + \Psi_j^{(k)}, \tag{3}$$

où $Q^{(k)}$ désigne la composante de la matrice Q sur l'espace propre de valeur propre k de $\mathrm{ad}D$, qui satisfait donc $\mathrm{ad}D(Q^{(k)}) = kQ^{(k)}$.

a. Si $k \neq j$, on a $B_j^{(k)} = 0$ et $(j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}M_0)$ coïncide sur cet espace propre avec l'endomorphisme $(j-k)\mathrm{Id} - \mathrm{ad}(M_0 - D)$ qui, on l'a vu ci-dessus, est inversible. On peut donc trouver une solution (unique) à l'équation (3).

b. Si $k = j$, on doit résoudre sur cet espace propre l'équation $\mathrm{ad}(D - M_0)(P_j^{1(j)}) - B_j^{(j)} = \Psi_j^{(j)}$ en déterminant $B_j^{(j)}$ par la même occasion. Choisissons un supplémentaire de l'image de $\mathrm{ad}(D - M_0)$ dans cet espace propre. Alors on peut décomposer $\Psi_j^{(j)}$ en somme d'un élément de l'image de $\mathrm{ad}(D - M_0)$, ce qui donne $P_j^{1(j)}$ (de manière non unique) et d'un élément dans ce supplémentaire, qu'on baptise $B_j^{(j)}$.

On continue maintenant la récurrence lorsque $j \geq d + 1$, tous les B_i étant connus. On procède exactement comme dans le cas où $j \leq d$, mais il n'est plus nécessaire d'introduire des termes correctifs B_j puisque $j\mathrm{Id} - \mathrm{ad}M_0$ est inversible, et on détermine P_j^1 comme dans le cas (a).

Reste à montrer la convergence de la série $P^1(z)$, ce qui est un résultat classique, puisque le système (2) est à pôle simple. □

Références

[1] W. Balser, *Formal Power Series and linear Systems of Meromorphic Ordinary Differential Equations* , Universitext, Springer-Verlag, 2000, ISBN 0-387-98690-1.

[2] P. Bernat ; N. Conze ; M. Duflo ; M. Levy-Nahas ; Rais ; M. Renouard ; M. Vergne, *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Monographies de la Société Mathématique de France, No. 4. Dunod, Paris, 1972.

[3] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, 1969.

[4] J. Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (algèbres de von Neumann)*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, 1969.

[5] J. Dixmier, *Algèbres enveloppantes*, Les Grands Classiques Gauthier-Villars, 1974.

[6] M. Duflo ; M. Rais, *Sur l'analyse harmonique sur les groupes de Lie résolubles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 9 (1976), no. 1, 107-144.

[7] M. Duflo, *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, Cours d'été du CIME, Cortona, 1980.

[8] M. Duflo, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math. 149 (1982), no. 3-4, 153-213.

[9] R.C. Fabec, *Homogeneous distributions on the Heisenberg group and representations of $SU(2,1)$*, Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1991), no. 1, 351-391.

[10] H. Fujiwara, *Sur les restrictions des représentations unitaires des groupes de Lie résolubles exponentiels*, Invent. Math. 104 (1991), no. 3, 647-654.

[11] A. Hersant, *Formes harmoniques et cohomologie relative des algèbres de Lie*, J. Reine Angew. Math. 344 (1983), 71-86.

[12] M.S. Khalgui ; P. Torasso, *La formule de Plancherel pour les groupes de Lie presque algébriques réels*, J. Funct. Anal. 235 (2006), no. 2, 449-542.

[13] A.W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples*, Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. xx+773 pp. ISBN : 0-691-09089-0.

[14] A.W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction*,Progress in Mathematics, 140. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. xvi+604 pp. ISBN : 0-8176-3926-8.

[15] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive sub-groups and its applications*, Invent. Math. **117** (1994), 181-205.

[16] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. III. Restriction of Harish-Chandra modules and associated varieties*, Invent. Math. 131 (1998), no. 2, 229-256.

[17] T. Kobayashi, *Discrete decomposability of the restriction of $A_q(\lambda)$ with respect to reductive subgroups. II. Micro-local analysis and asymptotic K-support*, Ann. of Math. (2) 147 (1998), no. 3, 709-729.

[18] S. Kouki, *La conjecture de Duflo pour les groupes résolubles exponentiels*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 348 (2010), no. 13-14, 735-738.

[19] H. Kraljevic, *Representations of the universal convering group of the group $SU(n,1)$*, Glasnik Mat. Ser. III 8(28) (1973), 23-72.

[20] H. Kraljevic, *On representations of the group $SU(n,1)$*, Trans. Amer. Math. Soc. 221 (1976), no. 2, 433-448.

[21] G. Lion ; M. Vergne, *The Weil representation, Maslov index and theta series*, Progress in Mathematics, 6. Birkhäuser, Boston, Mass., 1980. vi+337 pp. ISBN : 3-7643-3007-4.

[22] R. Lipsman, *Orbital parameters for induced and restricted representations*,Trans. Amer. Math. Soc. 313 (1989), no. 2, 433-473.

[23] M.S. Narasimhan ; K. Okamoto, *An analogue of the Borel-Weil-Bott theorem for hermitian symmetric pairs of non-compact type*, Ann. of Math. (2) 91 1970 486-511.

[24] P.E. Paradan, Spin^c*-quantization and the K-multiplicities of the discrete series*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 36 (2003), no. 5, 805-845.

[25] P.E. Paradan, *Multiplicities of the discrete series*, arXiv :0812.0059.

[26] P.E. Paradan, *Formal geometric quantization II*, arXiv :0906.4436v1.

[27] R.W. Richardson, *Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups*, Acta Math. 129 (1972), p. 35-73.

[28] J. Rosenberg ; M. Vergne, *Harmonically induced representations of solvable Lie groups*, J. Funct. Anal. 62 (1985), no. 1, 8-37.

[29] H. Rossi ; M. Vergne, *Representations of certain solvable Lie groups on Hilbert spaces of holomorphic functions and the application to the holomorphic discrete series of a semisimple Lie group*, J. Functional Analysis 13 (1973), 324-389.

[30] W. Schmid, *On a conjecture of Langlands*, Ann. of Math. (2) 93 1971 1-42.

[31] W. Schmid, *L^2-cohomology and the discrete series*, Ann. of Math. (2) 103 (1976), no. 2, 375-394.

[32] M. Vergne, *Quantification géométrique et réduction symplectique*, Séminaire Bourbaki, n^0 888, 2001.

UMR 6086 CNRS, Université de Poitiers, Laboratoire de Mathématiques et Applications, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 Chasseneuil Cedex, France ; liu@math.univ-poitiers.fr