

THESE

Présentée à
L'UNIVERSITE DE POITIERS

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'INGENIEURS DE POITIERS
ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGENIERIE POUR L'INFORMATION

Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006
SPECIALITE : AUTOMATIQUE

Présentée par

Wafa FARAH

Contribution à l'identification et à la quantification des incertitudes des systèmes multivariables

Directeur de Thèse : **T. POINOT**

Co-encadrement : **G. MERCERE**

Présentée et soutenue publiquement le 28 février 2011

COMPOSITION DU JURY

<i>Rapporteurs :</i>	M. M. M'saad	Professeur l'ENSI, Caen
	M. J-C. Carmona	Professeur à Arts et Métiers ParisTech
<i>Examineurs :</i>	M. M. Chaabane	Professeur à l'Université de Sfax, Tunisie
	M. R. Malti	Maître de Conférence à l'Université de Bordeaux
	M. G. Mercère	Maître de conférence à l'Université de Poitiers
	M. T. Poinot	Professeur à l'Université de Poitiers

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux de recherche exposés dans ce mémoire ont été réalisés au sein de l'équipe Identification du Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle de Poitiers (LAI) de l'Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieur de Poitiers (ENSIP).

Mes premiers remerciements vont tous naturellement au Seigneur qui a su me guider tout au long de ce travail, qui m'a donné la santé, l'inspiration, l'intelligence, en un mot tout ce dont j'ai eu besoin pour réussir mon travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et mes sincères remerciements à Thierry Poinot, Professeur à l'Université de Poitiers, pour m'avoir accueillie au sein de son équipe et pour l'aide précieuse qu'il m'a offerte associée à ses qualités humaines et ces compétences scientifiques. Je le remercie particulièrement pour ses nombreux conseils fructueux, pour sa présence et son aide importante pour résoudre nombre de mes problèmes théoriques et pratiques grâce à ses compétences et à son enthousiasme.

Je tiens à témoigner à Guillaume Mercère, Maître de Conférence à l'Université de Poitiers, co-directeur de thèse. Ses conseils, sa disponibilité et sa clairvoyance ont apporté leur pierre à la construction de ma réflexion. J'ai eu la chance d'apprécier ses qualités humaines et scientifiques. Je lui suis très reconnaissante de la confiance qu'il m'a toujours accordé. Je le suis aussi reconnaissante pour sa patience et sa pertinence.

Je remercie tout spécialement Monsieur Mohamed M'saad, Professeur à l'ENSI Caen et Monsieur Jean-Claude Carmona, Professeur aux Arts et Métiers ParisTech Aix-en-Provence pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de participer au jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Mohamed Chaabane, professeur à l'ENIS, Tunisie et Monsieur Rachid Malti, Maître de Conférence à l'Université de Bordeaux pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à ce jury de thèse.

Je remercie chaleureusement Monsieur Paul van Den Hof, Professeur à l'Université de Delft et Monsieur Jan-Willem van Wingerden Maître assistant à l'Université de Delft pour m'avoir accueillie au sein de leur laboratoire DCSC.

Je n'oublie pas tous les membres du laboratoire LAII qui m'ont toujours offert leur aide et qui ont su créer une ambiance agréable. Je ne peux les citer tous de risque d'en oublier.

Un grand merci à Wiem, Refka et Hela avec lesquelles j'ai passé de très bons moments durant ma thèse, merci à eux pour leur aide et leur précieux soutien.

Je tiens à remercier du fond du cœur mes parents qui m'ont encouragée tout au long

de ces années d'études. Qu'ils reçoivent ici ma profonde gratitude pour leurs innombrables sacrifices. Merci aussi à ma chère sœur Soumaya et mon cher frère Mohamed.

Enfin (the last but not the least!), mes plus tendres remerciements vont à mon fiancé Chaker pour tout son soutien, sa patience et sa complicité indispensables.

Table des matières

Introduction générale	5
Chapitre 1 Quelques techniques de caractérisation des incertitudes dues aux bruits et aux erreurs de modèles	9
1.1 Introduction	10
1.2 Identification des systèmes	12
1.2.1 Algorithmes à erreur d'équation	12
1.2.2 Algorithmes à erreur de sortie	15
1.2.3 Algorithmes des sous-espaces	16
1.3 Modélisation de l'erreur de modèle	19
1.3.1 Modélisation de l'erreur de modèle en utilisant les propriétés des algorithmes à erreur d'équation	19
1.3.2 Modélisation de l'erreur de modèle en utilisant la méthode des moments	20
1.4 Caractérisation des domaines d'incertitude	23
1.4.1 Domaines d'incertitude d'un système sous forme de fonction de transfert	23
1.4.1.1 Approche statistique	23
1.4.1.2 Approche à erreur bornée	24
1.4.2 Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système sous forme d'état	26
1.4.2.1 Variation des valeurs propres du système	26
1.4.2.2 Caractérisation des incertitudes de la réponse fréquentielle du système	27
1.4.2.3 Variation paramétrique de la représentation canonique du système	28
1.5 Conclusion	30

Chapitre 2 Identification de modèles d'état linéaires structurés	31
2.1 Introduction	32
2.2 Identification d'un modèle d'état à temps discret	33
2.2.1 Notation et problématique	33
2.2.2 Méthode du propagateur	36
2.2.2.1 Méthode du propagateur : cas d'un système MISO	37
2.2.2.2 Extension de la méthode du propagateur aux systèmes multivariables	38
2.2.2.3 Discussion concernant le choix de κ	40
2.2.2.4 Extraction des matrices \mathcal{A} et \mathcal{C}	41
2.2.2.5 Extraction des matrices \mathcal{B} et \mathcal{D}	43
2.2.2.6 Propriétés de la représentation d'état estimée à partir du propagateur	44
2.2.2.7 Adaptation de la méthode du propagateur en présence de perturbations	44
2.2.3 Méthode "Predictor-based Subspace Identification" et propagateur	46
2.3 Identification d'un modèle d'état à temps continu	50
2.3.1 Problématique	51
2.3.2 Approximation des dérivées des données E/S	53
2.3.2.1 Filtres des moments partiels réinitialisés (MPR)	53
2.3.2.2 Filtres à variables d'état (FVE)	54
2.3.3 Adaptation de la méthode du propagateur dans le cas d'un système continu	55
2.4 Exemple de simulation	59
2.4.1 Système discret	59
2.4.2 Système continu	61
2.5 Conclusion	62
Chapitre 3 Caractérisation des domaines d'incertitude de modèles d'état linéaires structurés	65
3.1 Introduction	66
3.2 Caractérisation des domaines d'incertitude d'un modèle LP	67
3.3 Approche indirecte	71
3.3.1 Obtention d'un modèle E/S ARMAX	72

3.3.2	Extension de la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude à un modèle non linéaire dans les paramètres	75
3.3.3	Exemple numérique	76
3.3.4	Conclusion	79
3.4	Approche directe	79
3.4.1	Détermination des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{A} et \mathbf{C}	80
3.4.2	Détermination des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{B} . . .	81
3.4.3	Extension de l'approche directe au cas d'un système continu	82
3.4.3.1	Détermination des domaines d'incertitude des coefficients \mathbf{A} et \mathbf{C}	82
3.4.3.2	Détermination des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{B}	83
3.4.4	Exemple numérique	84
3.4.4.1	Cas discret	84
3.4.4.2	Cas continu	85
3.4.5	Conclusion	88
3.5	Quantification des incertitudes en utilisant l'algorithme des sous-espaces basé sur les moindres carrés	90
3.5.1	Caractérisation des domaines d'incertitudes	91
3.5.2	Exemple de simulation	91
3.5.3	Application à un prototype d'éolienne	93
3.5.3.1	Identification du modèle	95
3.5.3.2	Détermination des domaines d'incertitude	98
3.5.4	Synthèse	100
3.6	Conclusion	100

Chapitre 4 Réjection du biais dû à l'erreur de modèle dans le cas de systèmes multivariables **103**

4.1	Introduction	104
4.2	Problématique et notations	105
4.3	Estimation des paramètres des modèles d'ordre réduit	107
4.3.1	Estimation des modèles d'ordre réduit	107
4.3.2	Erreur de modélisation	108
4.4	Réjection du biais dû à l'erreur de modélisation	108
4.4.1	Modèle étendu prenant en compte l'erreur de modélisation	108

4.4.2	Contrainte de non concurrence par les moments	110
4.4.2.1	Les moments temporels	110
4.4.2.2	Les moments fréquentiels	111
4.4.2.3	Expression des contraintes en basses fréquences ($\omega_o = 0$) .	112
4.4.2.4	Expression des contraintes en hautes fréquences ($\omega_o \neq 0$) .	114
4.5	Algorithme d'identification	116
4.6	Simulation numérique	117
4.7	Conclusion	119
Conclusion générale		121
Annexes		125
Annexe A Variation des valeurs propres du système		125
Annexe B Approximation de la fonction coût $J_B(\theta_B)$ pour un système discret		127
Annexe C Approximation de la fonction coût $J_B(\theta_B)$ pour un système continu		129
Annexe D Bibliographie personnelle		131
Bibliographie		133

Table des figures

1.1	Principe de la méthode à erreur d'équation.	13
1.2	Principe de la méthode à erreur de sortie.	15
1.3	Approche ellipsoïdale à erreur bornée ($n = 2$).	25
3.1	Approche ellipsoïdale	69
3.2	Estimation paramétrique du modèle d'état. Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (\times), les paramètres estimés par des croix bleues ($*$) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (\bullet) représentent les valeurs défaillantes.	78
3.3	Caractérisation des domaines d'incertitude : approche indirecte.	79
3.4	Pôles estimés à l'aide de la méthode du propagateur	86
3.5	Pôles estimés à l'aide de la méthode MPR+PIMOESP.	86
3.6	Estimation paramétrique du ($\mathbf{A}(3, 1)$, $\mathbf{A}(3, 1)$). Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (\times), les paramètres estimés par des croix bleues ($*$) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (\bullet) représentent des valeurs défaillantes.	87
3.7	Estimation paramétrique du ($\mathbf{B}(1, 1)$, $\mathbf{B}(1, 2)$). Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (\times), les paramètres estimés par des croix bleues ($*$) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (\bullet) représentent des valeurs défaillantes.	88
3.8	Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système discret : approche directe.	89
3.9	Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système à temps continu : Approche directe.	90
3.11	Photo de l'éolienne à deux pales. La personne à côté de cette éolienne illustre la taille du système.	93
3.10	Estimation paramétrique du modèle d'état. Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (\times), les paramètres estimés par des croix bleues ($*$) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (\bullet) représentent des valeurs défaillantes.	94
3.12	Schéma de principe de l'éolienne.	95
3.13	Les entrées et sorties de l'éolienne.	96
3.14	Sortie réelle (trait plein bleu) et sortie estimée (trait pointillé rouge) du système.	97

3.15	réponse fréquentielle estimé (trait plein bleu) avec un domaine d'incertitude obtenu par la méthode développée (trait interrompu rouge) et par la méthode de Ljung (trait pointillé noir).	99
3.16	Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système à temps discret.	100
4.1	Modélisation du système à l'aide d'un modèle d'ordre réduit et d'un modèle boîte noire.	106
4.2	Approximation de $H^{ij}(s)$ par les moments temporels	111
4.3	Approximation de $H^{ij}(s)$ par les moments fréquentsiels	112
4.4	Estimation des paramètres du modèle étendu	119
4.5	Signal de sortie du système réel, modèle réduit et modèle étendu	120

Liste des tableaux

2.1	Algorithmes d'identification.	59
2.2	Identification des valeurs propres du système à l'aide de l'algorithme MOESP et de l'algorithme du propagateur ($p = 5$).	60
2.3	% BFT et % VAF.	60
2.4	Identification des valeurs propres du système à l'aide de l'algorithme MOESP et de l'algorithme SBMC ($p = 20$).	61
2.5	% BFT et % VAF.	61
2.6	Identification des valeurs propres du système à l'aide de l'algorithme du propagateur en utilisant les filtres MPR et les FVE.	62
3.1	Paramètres estimés en utilisant la méthode du propagateur.	76
3.2	Taux de défaillance.	77
3.3	Taux de défaillance.	85
3.4	Paramètres estimés en utilisant la méthode des sous-espaces basée sur les moindres carrés.	92
3.5	Taux de défaillance.	93
3.6	% BFT et % VAF pour différents algorithmes d'identification.	98
4.1	Estimation des paramètres du modèle d'ordre réduit seul	118
4.2	Estimation des paramètres du modèle étendu	118

Abréviations et acronymes

4SID	Subspace State Space System IDentification
ARMAX	AutoRegressive Moving Average with eXogenous inputs
ARX	AutoRegressive model with eXogenous inputs
BFT	Best Fit
CVA	Canonical Variate Analysis
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
E/S	Entrées/Sorties
FIR	Finite Impulse Response
FLI	Filtre Linéaire Intégral
FMF	Fonctions Modulantes de Fourier
FMH	Fonctions Modulantes de Hartley
LP	Linéaire dans les Paramètres
MIMO	Multi-Input Multi-Output
MISO	Multi-Input Single-Output
MOESP	Mimo Output Error State sPace
MPG	Moment de Poisson Généralisé
MPR	Moments Partiels Réinitialisés
N4SID	Numerical algorithm for Subspace State Space System IDentification
NLP	Non Linéaire dans les Paramètres
PBSID	Predictor-Based Subspace IDentification
PI	Past Input
PNL	Programmation Non Linéaire
PO	Past Output
SBMC	Sous-espaces Basée sur les Moindres Carrés
SIMO	Single-Input Multi-output
SISO	Single-Input Single-output
VAF	Variance Accounted For

Symboles et notations

n_u	nombre d'entrées du systèmes
n_y	nombre de sorties du systèmes
n_x	dimension du vecteur d'état
f	indice futur
p	indice passé
\mathbb{R}	corps de réels
$\mathbb{E}\{.\}$	espérance mathématique
\mathbf{I}	matrice identité
\mathbf{M}^T	transposée de la matrice \mathbf{M}
\mathbf{M}^{-1}	inverse de la matrice \mathbf{M}
\mathbf{M}^\dagger	pseudo inverse de Moore Penrose de la matrice \mathbf{M}
Π^\perp	projection orthogonale
$\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}$	produit de Kronecker des matrices \mathbf{M} et \mathbf{N}
$\text{vec}(\mathbf{M})$	mise en colonnes de la matrice \mathbf{M}
$\text{Com}(\mathbf{M})$	comatrice de la matrice \mathbf{M}
$\text{dim}(\mathbf{M})$	dimension de la matrice \mathbf{M}
$\text{rang}(\mathbf{M})$	rang de la matrice \mathbf{M}
$\mathbf{M}_{.k}$	est le $k^{\text{ième}}$ colonne de la matrice \mathbf{M}
$\mathbf{M}_{k.}$	est le $k^{\text{ième}}$ ligne de la matrice \mathbf{M}
$\ \mathbf{x}\ $	norme du vecteur \mathbf{x}
$\ \mathbf{M}\ _F$	norme de Frobenius de la matrice \mathbf{M}
$\hat{\mathbf{x}}$	estimée du vecteur \mathbf{x}
$[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$	matrices d'état du système
\mathbf{u}	vecteur d'entrée
\mathbf{y}	vecteur de sortie
\mathbf{x}	vecteur d'état
\mathbf{v}	vecteur de bruit de mesure en sortie
\mathbf{h}	réponse impulsionnelle
$\mathbf{\Gamma}_f$	matrice d'observabilité d'ordre f
$\mathbf{\Gamma}_f^\uparrow$	matrice réduite obtenue en supprimant les n_y dernières lignes de $\mathbf{\Gamma}_f$
$\mathbf{\Gamma}_f^\downarrow$	matrice réduite obtenue en supprimant les n_y premières lignes de $\mathbf{\Gamma}_f$
\mathbf{H}_f	matrice de Toeplitz d'ordre f contenant les paramètres de Markov du système
$\mathbf{\Xi}$	matrice de variable instrumentale
\mathbf{R}, \mathbf{Q}	matrices résultantes de la décomposition QR
$\mathbf{U}, \mathbf{\Sigma}, \mathbf{V}$	matrices résultantes de la décomposition en valeurs singulières
Pour $\bar{t} = t + M - 1$	

$$\mathbf{y}_f(t) = [\mathbf{y}^T(t) \ \cdots \ \mathbf{y}^T(t + f - 1)]^T \in \mathbb{R}^{n_y f \times 1}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_f(\bar{t}) &= [\mathbf{y}_f(t) \quad \cdots \quad \mathbf{y}_f(\bar{t})] \in \mathbb{R}^{n_y f \times M} \\
\mathbf{y}_p(t) &= [\mathbf{y}^T(t-p) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^T(t-1)]^T \in \mathbb{R}^{n_y p \times 1} \\
\mathbf{Y}_p(\bar{t}) &= [\mathbf{y}_p(t) \quad \cdots \quad \mathbf{y}_{p-}(\bar{t})] \in \mathbb{R}^{n_y p \times M} \\
\mathbf{u}_f(t) &= [\mathbf{u}^T(t) \quad \cdots \quad \mathbf{u}^T(t+f-1)]^T \in \mathbb{R}^{n_u f \times 1} \\
\mathbf{U}_f(\bar{t}) &= [\mathbf{u}_f(t) \quad \cdots \quad \mathbf{u}_f(\bar{t})] \in \mathbb{R}^{n_u f \times M} \\
\mathbf{u}_p(t) &= [\mathbf{u}^T(t-p) \quad \cdots \quad \mathbf{u}^T(t-1)]^T \in \mathbb{R}^{n_u p \times 1} \\
\mathbf{U}_p(\bar{t}) &= [\mathbf{u}_p(t) \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{p-}(\bar{t})] \in \mathbb{R}^{n_u p \times M} \\
\mathbf{v}_f(t) &= [\mathbf{v}^T(t) \quad \cdots \quad \mathbf{v}^T(t+f-1)]^T \in \mathbb{R}^{n_y f \times 1} \\
\mathbf{V}_f(\bar{t}) &= [\mathbf{v}_f(t) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_f(\bar{t})] \in \mathbb{R}^{n_y f \times M} \\
\mathbf{v}_p(t) &= [\mathbf{v}^T(t-p) \quad \cdots \quad \mathbf{v}^T(t-1)]^T \in \mathbb{R}^{n_y p \times 1} \\
\mathbf{V}_p(\bar{t}) &= [\mathbf{v}_p(t) \quad \cdots \quad \mathbf{v}_p(\bar{t})] \in \mathbb{R}^{n_y p \times M}
\end{aligned}$$

Introduction générale

La construction et l'utilisation de modèles constituent, de nos jours, des étapes incontournables de nombreuses disciplines scientifiques et technologiques (physique, chimie, biologie, économie...). La modélisation permet en effet de formaliser le comportement du processus étudié à l'aide d'une représentation, baptisée « modèle », à partir de laquelle il est possible de comprendre, commander ou améliorer le fonctionnement du procédé analysé. Deux approches, souvent complémentaires, peuvent être envisagées pour modéliser un système :

- La première, qui fait appel aux connaissances des spécialistes du domaine considéré, consiste à regrouper, généralement sous forme de systèmes différentiels, algébriques ou graphiques, les lois et relations de la physique qui décrivent le comportement du processus. On parle alors de modèle de type « boîte blanche » (ou « boîte grise » selon la complexité du modèle final). L'estimation des paramètres de ces modèles est alors réalisée soit par des essais types généralement bien maîtrisés par le spécialiste du domaine considéré (on parle alors généralement de modèles « boîte blanche »), soit par des techniques d'estimation paramétrique à partir des données d'entrée-sortie ou fréquentielles du procédé (on parle alors généralement de modèles « boîte grise »).
- Dans de nombreuses situations pratiques, la complexité du procédé à modéliser est telle qu'il est difficile, voire impossible, de connaître ou d'associer les lois physiques gouvernant la dynamique du système. Il est alors nécessaire de faire appel à un modèle « boîte noire » (ou modèle de comportement), construit quasi exclusivement à partir de mesures des données d'entrée-sortie du procédé. L'objectif majeur de ce modèle est de reproduire au mieux le comportement du processus identifié. On parle plus particulièrement, dans ce cas, « d'identification du système ». Le modèle de représentation ainsi obtenu est généralement constitué d'un ensemble de relations mathématiques liant les variables du système analysé. Les paramètres de ce type de modèle sont, la plupart du temps, difficilement interprétables physiquement.

La modélisation est souvent considérée comme la phase initiale de l'automatique moderne. Elle permet en effet de déterminer le modèle du procédé qui sera utilisé pour prédire son comportement futur, diagnostiquer ses évolutions de fonctionnement ou synthétiser son régulateur et sa loi de commande. Puisque les processus industriels sont généralement

complexes, il est nécessaire de posséder des connaissances approfondies dans des domaines aussi variés que la mécanique, l'électronique, l'énergétique, la biologie ou la chimie pour obtenir un modèle boîte blanche efficace. La modélisation expérimentale ou l'identification des systèmes [SS89, BDRaZ92, Lju99a] sont alors une alternative logique à la modélisation classique fondée sur l'exploitation des lois physiques pour

- avoir accès à des paramètres inconnus de modèles dont les équations sont issues des lois de la physiques,
- estimer un modèle « boîte noire » du procédé.

Quelles que soient la provenance des équations utilisées et la structure du modèle choisi, de par la complexité des systèmes étudiés, le modèle à estimer est, le plus souvent, une description approchée du comportement global du système. Les modèles employés sont très souvent des représentations linéaires à temps invariant. Ce choix s'explique principalement par le fait que, sous cette hypothèse, le comportement entrée-sortie du système est représenté à l'aide d'équations différentielles ou d'équations aux différences plus faciles à manipuler que des fonctions non-linéaires et/ou à temps variant. Ayant conscience de la limite de validité de tels modèles, l'utilisateur des modèles identifiés demande d'avoir non seulement accès à un modèle nominal fiable mais également à une représentation des erreurs induites par une telle approximation [Lju01, XL02, Enq05]. C'est dans ce contexte que s'inscrit les développements proposés dans ce manuscrit. Plus particulièrement, le travail présenté ci-après cherche à fournir à l'utilisateur

- des techniques d'identification de systèmes multivariables conduisant à des modèles linéaires à temps invariant fiables du système,
- une caractérisation des erreurs et des incertitudes liées au modèle nominal reflétant, d'une certaine manière, la distance du modèle nominal au système non-linéaire et/ou à temps variant qu'on doit identifier.

Pour résoudre ce problème, ce manuscrit s'articule autour de quatre principaux chapitres.

Chapitre 1 : Quelques techniques de caractérisation des incertitudes dues aux bruits et aux erreurs de modèles. Ce chapitre présente les principales approches d'identification de modèles linéaires à temps invariant et leur associe quelques techniques de modélisation de l'erreur de modèle et de caractérisation des domaines d'incertitude. Un accent particulier est porté sur

- les techniques dédiées aux modèles d'état,
- les approches à erreur bornée.

Elles sont en effet à l'origine des principaux développements proposés dans cette thèse.

Chapitre 2 : Identification de modèles d'état linéaires structurés. Pour identifier des modèles d'état linéaires à temps invariant, les méthodes des sous-espaces sont désormais considérées comme une alternative fiable aux techniques plus classiques d'optimisation non-linéaire (méthodes d'erreur de sortie ou d'erreur d'équation). Dans leur grande majorité, les méthodes des sous-espaces souffrent malheureusement d'un problème majeur pour la caractérisation des incertitudes des paramètres estimés : il est quasiment impossible de figer la base dans laquelle les modèles sont identifiés, en particulier lorsque plusieurs modèles sont obtenus à partir de diffé-

rents jeux de données. Ce chapitre expose quelques solutions à ce problème, dans un contexte à temps discret, à temps continu, en boucle ouverte et en boucle fermée. Ces solutions partagent comme point commun de s'affranchir de l'utilisation de l'algorithme de décomposition en valeurs singulières et d'offrir la possibilité de fixer la base de coordonnées de l'état. Ces techniques sont comparées et validées à l'aide d'exemples de simulation.

Chapitre 3 : Caractérisation des domaines d'incertitude de modèles d'état linéaires structurés. Ayant accès à un modèle fiable linéaire à temps invariant du système, la deuxième étape consiste à caractériser les incertitudes relatives aux paramètres identifiés. Pour cela, une approche appartenant à la famille des techniques à erreur bornée est considérée. En supposant que les résidus fournis dans la phase d'estimation soient bornés, trois méthodes sont proposées, plus ou moins complexes et directes, pour caractériser les incertitudes des modèles d'état structurés identifiés à l'aide des techniques présentées dans le chapitre 2. Leurs performances sont analysées à l'aide d'exemples de simulation et de données réelles issues d'un prototype d'éolienne.

Chapitre 4 : Réjection du biais dû à l'erreur de modèle dans le cas de systèmes multivariables. L'utilisation d'un modèle linéaire de complexité réduite ne permet généralement pas de prendre en compte toutes les dynamiques du système et encore moins ses non linéarités. On est dans le cas d'une estimation paramétrique à l'aide d'un modèle d'ordre réduit (ou de complexité réduite) et donc en présence d'une erreur de modélisation non maîtrisée. Si toutefois, on souhaite que le modèle choisi caractérise au mieux le comportement du système dans la bande de fréquence utile, il est nécessaire de rejeter le biais qui va être induit par cette erreur de modélisation. Ce chapitre propose ainsi d'étendre une technique de réjection du biais développée initialement dans le cas monovariante à celui des systèmes multivariables. Les performances de l'approche sont illustrées par un exemple en simulation.

Le chapitre 5 expose une synthèse des contributions de cette thèse et présente les travaux de recherche futurs en lien avec la problématique traitée dans ce manuscrit.

Chapitre 1

Quelques techniques de
caractérisation des incertitudes dues
aux bruits et aux erreurs de modèles

1.1 Introduction

L'élaboration de modèles de systèmes représente un point clé de nombreuses disciplines scientifiques (robotique [WE99], thermique [Tah03], aéronautique [Ham10]...). Cette diversité d'applications implique une grande variété de problèmes posés ainsi qu'une multiplicité de solutions proposées. L'une des solutions les plus employées est la modélisation expérimentale ou identification [Lju99c].

Plusieurs techniques d'identification ont été développées depuis le début des années 1960. Ces techniques ont pour objectif l'élaboration d'un modèle mathématique à l'aide de l'observation d'un nombre fini de données entrées/sorties (E/S) [Lju99c, SS89]. Ce modèle doit être capable de capter les caractéristiques du système réel pour une application donnée. Dans ce contexte, plusieurs algorithmes d'identification ont été développés. Le choix de la technique d'identification dépend du système, de la structure de modèle et de la nature de bruit. Ces méthodes sont généralement classées en trois catégories [Lju99c, Lan01] : les méthodes à erreur d'équation [Lju99c], les méthodes à erreur de sortie [RRP71, WP97] et les méthodes des sous-espaces [Vib95, VD96b, BRS98, BSR98, Bau03, VV07].

Fondées toutes les deux sur la minimisation de critères quadratiques, les méthodes d'erreur de sortie et d'erreur d'équation se différencient principalement par

- la structure du modèle du système et du bruit employée,
- la construction de l'écart à minimiser.

Intéressantes d'un point de vue statistique de par leur relation avec les méthodes de type maximum de vraisemblance [Lju99c], les méthodes d'erreur d'équation présentent l'inconvénient majeur de dépendre fortement de la structure de bruit considérée. Dans le but de surmonter cette limite, bien qu'employant les mêmes outils itératifs d'optimisation non linéaire, les algorithmes à erreur de sortie utilisent exclusivement la simulation du modèle de la sortie à partir de la seule connaissance de l'excitation. Grâce à cette procédure, la sortie simulée est indépendante des perturbations affectant la sortie du système. Bien qu'assurant théoriquement une convergence vers l'optimum global du critère minimisé, les algorithmes à erreur de sortie sont fortement dépendants de l'initialisation des techniques itératives d'optimisation des critères non convexes employés. Depuis quelques années, de nombreux auteurs [Vib95, VD96b, BRS98, BSR98, Bau03, VV07] ont proposé comme alternative aux techniques classiques d'optimisation de type erreur d'équation ou erreur de sortie les méthodes des sous-espaces. Ces méthodes présentent, entre autres, l'avantage de ne pas nécessiter de phase d'initialisation. Cette qualité les rend intéressantes pour initialiser des techniques telles que celles d'erreur de sortie. Néanmoins, il est important de noter que les méthodes des sous-espaces emploient des outils d'algèbre linéaire (tel que la Décomposition en Valeurs Singulières (DVS)) qui peuvent être relativement lourds d'un point de vue numérique dans certains contextes tels que l'identification en ligne. De plus, l'optimalité de ces algorithmes ne peut être assurée puisqu'il s'agit de techniques multi-étapes [Bau03].

Génériquement, ces techniques d'identification permettent d'estimer les paramètres du système sans fournir le degré de confiance qu'on peut accorder au modèle estimé. Par la suite, l'utilisation exclusive du modèle nominal peut être insuffisante, surtout dans un contexte de commande.

En pratique, il existe plusieurs sources d'erreurs qui agissent sur le système. Ces erreurs

ont une grande influence sur la qualité d'estimation des paramètres du système et peuvent être à l'origine d'un biais d'estimation. Elles sont généralement classées en deux catégories, à savoir :

- **l'erreur de mesure** : en pratique, les systèmes réels sont généralement affectés par des bruits. Ainsi, les mesures recueillies sur le système sont entachées de bruit. Ces erreurs ont un grand effet sur l'estimation des paramètres du système et peuvent se traduire par un biais paramétrique important.
- **l'erreur de modélisation** : le modèle estimé étant généralement une représentation simplifiée des phénomènes physiques mis en jeu dans le système réel, une erreur de modélisation, qui peut être importante et souvent prépondérante devant l'erreur de mesure, apparaît. Les paramètres estimés peuvent différer notablement des valeurs exactes. Cette erreur est une seconde source de biais lors de l'identification des paramètres du modèle.

Pour minimiser l'effet de l'erreur de modélisation, il semble logique, dans un premier temps, de chercher à modéliser l'erreur du modèle. Pour atteindre cet objectif, une première solution consiste à augmenter la complexité du modèle. Cette démarche a pour inconvénient de nécessiter l'emploi de routines d'optimisation plus difficiles à mettre en œuvre et conduit généralement à des paramètres dont la variance croit fortement [Bai91, HL92, PTL97, GGN92]. Une deuxième solution consiste à introduire de la connaissance *a priori* [TP01] afin de réduire le biais d'estimation en utilisant toute connaissance initiale telle que les valeurs nominales, la précision... Des travaux récents [BPTB02] cherchent quant à eux à reproduire la dynamique du système réel par un modèle d'ordre réduit (de complexité réduite), tout en modélisant l'erreur de modélisation, inhérente à cette approximation, à l'aide d'un modèle de type boîte noire non concurrent du modèle d'ordre réduit, autrement dit un modèle qui explique ce qui n'est pas pris en compte par le modèle d'ordre réduit.

Malgré tous ces efforts pour modéliser l'erreur du modèle, une incertitude sur les paramètres du modèle est toujours présente lors d'une estimation. Comme dans le cas de l'erreur de modèle, il est nécessaire de caractériser de telles incertitudes pour fournir à l'utilisateur un modèle fiable du procédé. Dans la littérature, plusieurs méthodes de caractérisation des domaines d'incertitude ont été développées [De 94, WNPLM96, HV97, Lju99c, GMT97]. Ces techniques sont généralement répertoriées en deux catégories : les approches statistiques et les approches à erreur bornée. Les méthodes statistiques [Lju99c], comme leur nom l'indique, reposent sur des hypothèses statistiques et supposent que le bruit qui affecte le système est une variable aléatoire. Comme les perturbations sont généralement non accessibles à la mesure [De 94], d'autres approches de détermination des domaines d'incertitude sont développées. Ces techniques sont basées sur des hypothèses déterministes, c.-à-d., qu'elles supposent que les résidus sont bornés [GM97, GMT97, WNPLM96, BDC90, HG95, Ram06].

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord une vue d'ensemble des grandes familles des algorithmes d'identification (cf. paragraphe 1.2). Une attention particulière est portée à trois types d'algorithmes : les algorithmes à erreur d'équation, les algorithmes à erreur de sortie et les algorithmes des sous-espaces. Ensuite, nous présentons un état de l'art des méthodes de modélisation de l'erreur du modèle (cf. paragraphe 1.3). Finalement, nous focalisons sur la présentation sur quelques méthodes de caractérisation des domaines

d'incertitude (cf. paragraphe 1.4).

1.2 Identification des systèmes

En automatique, l'identification est une discipline fondamentale et indispensable, qui précède toutes les opérations de simulation, d'observation, d'établissement d'une loi de commande ou de surveillance d'un système. Elle permet de déterminer les caractéristiques dynamiques d'un système dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système performant. Cette technique s'appuie sur l'utilisation de procédures et d'algorithmes issus d'études théoriques dans le but est d'établir les relations entre les variations des entrées de commande d'un système et les variations des sorties mesurées.

Dans cette section, nous présentons une vue d'ensemble des principaux algorithmes d'identification. Plus précisément, nous classons ces algorithmes en trois grandes familles [Lju99c, Lan01] : algorithmes à erreur d'équation [Lju99c], algorithmes à erreur de sortie [RRP71, WP97] et algorithmes des sous-espaces [Kat05, VV07, VD96a].

Considérons le système multivariable (MIMO) discret décrit par

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1}) + \mathbf{v}(t) \quad (1.1)$$

où l'ensemble de données d'entrée-sortie discrètes sur un intervalle de temps $t \in [1, N]$ est donné par

$$\mathbf{u}^t = [\mathbf{u}(1) \quad \mathbf{u}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{u}(t)] \quad (1.2)$$

$$\mathbf{y}^t = [\mathbf{y}(1) \quad \mathbf{y}(2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}(t)] \quad (1.3)$$

tel que l'entrée $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, la sortie $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ et le bruit $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$. \mathbf{F} est une fonction qui traduit le lien entre les données E/S et $\boldsymbol{\theta}$ est le vecteur des paramètres.

Le problème d'identification peut alors se formuler de la façon suivante : étant donné des mesures E/S \mathbf{u}^{t-1} et \mathbf{y}^{t-1} générées par un système représenté sous forme (1.1) sur un horizon fini mais suffisamment large N , estimer le vecteur des paramètres $\boldsymbol{\theta}$.

1.2.1 Algorithmes à erreur d'équation

Le principe de cette méthode repose sur la minimisation d'un critère quadratique, afin d'obtenir une estimation asymptotique non biaisée des paramètres du système (1.1) (cf. figure 1.1).

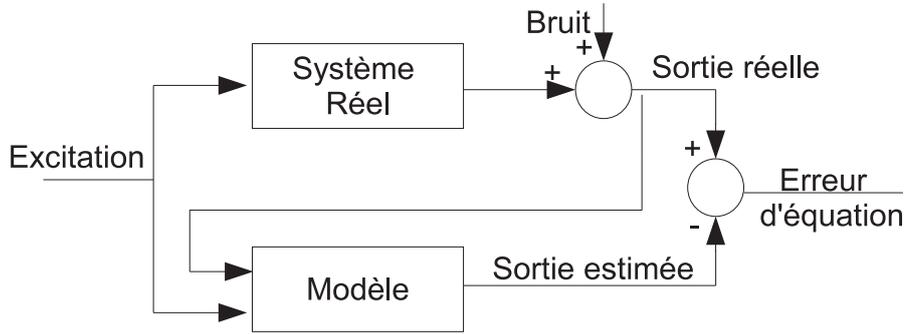


FIG. 1.1 – Principe de la méthode à erreur d'équation.

Ce critère est donné par

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}(t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1}))^\top (\mathbf{y}(t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1})) \quad (1.4a)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta}) \quad (1.4b)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta})$ est l'erreur d'équation. La résolution de cette équation dépend de la paramétrisation du modèle. Ainsi, dans le cas linéaire, le modèle peut être donné sous la forme suivante (cas des modèles ARX par exemple) [Lju99c]

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \boldsymbol{\theta} \quad (1.5)$$

où $\boldsymbol{\Phi}$ est une matrice composée des données entrées / sorties passées appelée le régresseur [Lju99c]. On parle alors de régression linéaire puisque le modèle est linéaire en les paramètres. Cette modélisation est parfois trop restrictive. Il est possible de considérer le vecteur de régression comme dépendant des paramètres du système

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\Phi}^\top(t, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}. \quad (1.6)$$

Il s'agit alors d'une forme pseudo linéaire (cas des modèles ARMAX [Lju99c]). Dans la suite, nous exposons les algorithmes développés pour des régressions linéaires. Ce choix, qui peut être considéré *a priori* comme une restriction, se justifie par le fait que de nombreuses méthodes initialement créées pour des modèles linéaires peuvent être utilisées ou aisément modifiées pour être appliquées à des régressions plus complexes (pseudo linéaires ou non linéaires) [Lan01].

Sous ces hypothèses, le système (1.1) peut être récrit

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}(t) \quad (1.7)$$

où $\mathbf{v}(t)$ est un processus stochastique. Considérant le système (1.7), le critère (1.4) est donné par

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t)\boldsymbol{\theta})^\top (\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t)\boldsymbol{\theta}). \quad (1.8)$$

En supposant que $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t)$ est inversible, le critère (1.8) est minimal pour

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{y}(t) \right). \quad (1.9)$$

Ainsi, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est une estimation consistante si elle tend asymptotiquement vers le vecteur des paramètres réels $\boldsymbol{\theta}^0$, c.-à-d.,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0) = 0. \quad (1.10)$$

L'erreur d'estimation est donnée par

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0 &= \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{y}(t) - \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right) \boldsymbol{\theta}^0 \right) \\ &= \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right)^{-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t) \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

En examinant l'équation (1.11) et en supposant que

- $\bar{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t))$ est non singulière (cette hypothèse est vérifiée si nous supposons que le signal d'entrée est suffisamment excitant),
- $\bar{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\varepsilon}(t)) = 0$, c.-à-d., $\boldsymbol{\Phi}(t)$ est asymptotiquement non corrélée avec $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$,

où $\bar{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\bullet}(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{E}(\boldsymbol{\bullet}(t))$, alors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est une estimation non biaisée de $\boldsymbol{\theta}^0$. La deuxième condition est satisfaite lorsque $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un bruit blanc. Dans le cas contraire, d'autres méthodes d'identification à erreur d'équation sont utilisées telles que la méthode de variable instrumentale.

Lorsque ces deux conditions sont satisfaites, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ suit asymptotiquement une distribution gaussienne, de moyenne $\boldsymbol{\theta}^0$ et de covariance $\lambda \mathbf{Q}_\Phi^{-1}$, λ étant la variance de bruit et

$$\mathbf{Q}_\Phi = \bar{\mathbb{E}}(\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}^\top(t)). \quad (1.12)$$

Autrement dit

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^0, \mathbf{Q}_\Phi^{-1}/\lambda).$$

Ces algorithmes à erreur d'équation présentent le sérieux avantage d'être capable d'éliminer le biais asymptotique lors de l'estimation des paramètres du système. Ils sont simples à appliquer dans le cas où le modèle est linéaire dans les paramètres (LP). Néanmoins, ces algorithmes sont appliqués à des systèmes dont la structure de bruit est bien spécifique. Il est alors intéressant, voire nécessaire, d'avoir des méthodes d'identification qui permettent d'estimer un modèle non linéaire dans les paramètres (NLP) sans tenir compte de la structure de bruit.

1.2.2 Algorithmes à erreur de sortie

Les méthodes à erreur de sortie [RRP71, WP97, TP01] consistent à comparer le comportement du système physique et la simulation de son modèle mathématique. Afin de comparer objectivement ces deux comportements, un critère quadratique est minimisé par une procédure itérative, en utilisant des algorithmes d'optimisation non linéaire. La méthodologie générale de cette méthode est présentée sur la figure 1.2.

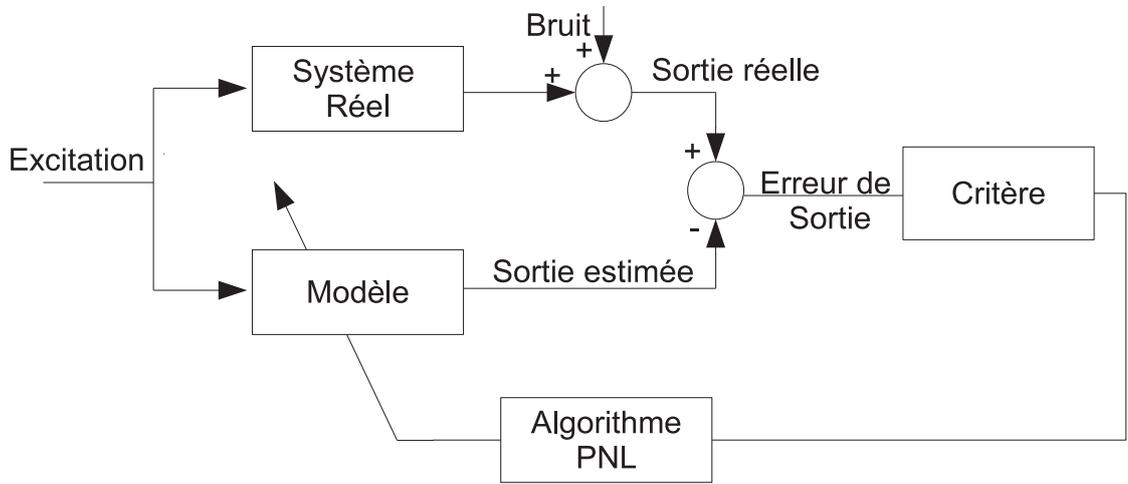


FIG. 1.2 – Principe de la méthode à erreur de sortie.

Rappelons que l'équation du modèle à identifier est donnée par

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1}) + \mathbf{v} \quad (1.13)$$

où \mathbf{F} est une loi issue d'un raisonnement physique qui en général n'est pas linéaire, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'E/S du système. $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est un bruit additive aux sorties du système. Afin d'estimer les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ de ce modèle, une technique d'optimisation non linéaire est utilisée [WP97] en minimisant le critère quadratique

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}(t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^{t-1}, \hat{\mathbf{y}}^{t-1}))^\top (\mathbf{y}(t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}^{t-1}, \hat{\mathbf{y}}^{t-1})) \quad (1.14)$$

où $\hat{\mathbf{y}}^{t-1}$ est la sortie simulée à partir des données d'entrées passées.

Afin de minimiser J , une technique de Programmation Non Linéaire (PNL), appelée algorithme de Marquardt [Mar63], est utilisée. Cette méthode réalise un compromis stabilité/vitesse de convergence entre la technique du Gradient et celle de Gauss-Newton.

A l'itération $l + 1$ nous avons plus particulièrement [Mar63, TP01, VV07]

$$\boldsymbol{\theta}_{l+1} = \boldsymbol{\theta}_l - [J''(\boldsymbol{\theta}_l) + \mu I]^{-1} J'(\boldsymbol{\theta}_l) \quad (1.15)$$

où

$$\begin{aligned} J'(\boldsymbol{\theta}_l) &= -2 \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \varepsilon^i(t, \boldsymbol{\theta}_l) \sigma^i(t, \boldsymbol{\theta}_l) \text{ le Gradient,} \\ J''(\boldsymbol{\theta}_l) &\approx 2 \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \sigma^i(t, \boldsymbol{\theta}_l) \sigma^i(t, \boldsymbol{\theta}_l)^T \text{ le Hessian approché,} \\ \sigma^i(t, \boldsymbol{\theta}_l) &= \frac{\partial y^i(t, \boldsymbol{\theta}_l)}{\partial \boldsymbol{\theta}_l} \quad \forall i \in [1, n_y] \end{aligned}$$

où $\varepsilon^i(t, \boldsymbol{\theta}_l) = y^i(t) - y^i(t, \boldsymbol{\theta}_l)$, y^i est le $i^{\text{ème}}$ sortie, I est la matrice d'identité et μ est un paramètre de réglage. Grâce au réglage du paramètre μ , cet algorithme permet d'évoluer entre une technique de Gradient loin de l'optimum ($\mu \rightarrow \infty$) et une technique de Newton ($\mu \rightarrow 0$) qui conduit à accélérer la convergence de l'algorithme au voisinage de l'optimum [TP01].

Cette méthode d'identification permet d'obtenir une estimation non biaisée indépendamment de la perturbation aléatoire affectant le système. De plus, on remarque qu'aucune hypothèse de linéarité n'est nécessaire. Toutefois, cette méthode est limitée par quelques difficultés

- Le volume de calcul généré par l'optimisation non linéaire est assez important.
- Cette méthode nécessite la connaissance du Gradient et du Hessian que l'on calcule grâce aux fonctions de sensibilité. Dans ce cas, nous sommes confrontés à un problème de simulation numérique des systèmes différentiels pour la simulation de ces fonctions de sensibilité.
- Elles dépendent de l'initialisation des techniques itératives d'optimisation des critères non convexes employés.

Des travaux de recherche proposent d'utiliser une méthode qui s'affranchit du problème d'initialisation telles que les méthodes des sous-espaces.

1.2.3 Algorithmes des sous-espaces

Les méthodes des sous-espaces [Vib95, VD96b, BRS98, BSR98] permettent d'identifier directement un modèle d'état du procédé sans avoir recours à des algorithmes d'optimisation non linéaire. Cette approche gère, de manière équivalente, les systèmes monovariabiles (SISO) et multivariabiles (MIMO).

Ainsi, le problème d'identification traité par ces techniques d'identification des sous-espaces consiste à estimer les matrices d'état \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} du modèle à temps discret du procédé dans le contexte stochastique suivant

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.16a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1.16b)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'E/S, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ le vecteur d'état et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$ le bruit de sortie.

Plusieurs méthodes ont été développées pour estimer les matrices du modèle d'état (1.16) dans un contexte stochastique. Elles se divisent en deux principales classes :

- « Canonical Variate Analysis » (CVA) [Lar83, Lar90], « Numerical algorithm for Sub-Space State Space IDentification » (N4SID) [VD93, VD94, VD96b] et « Predictor-Based Subspace IDentification » (PBSID) [CP05, Chi07b, Chi07a]. Ces méthodes cherchent à estimer les matrices (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D}) à l'aide des régressions linéaires.
- « Multivariable Output Error State sPace » (MOESP) [Bau01, Bau03, VD91, Ver93, Ver94] : ces méthodes estiment la matrice d'observabilité étendue du système à partir des données d'E/S mesurées. Les matrices d'état du système sont alors extraites en deux temps, en utilisant la propriété d'A-invariance de la matrice d'observabilité étendue pour \mathbf{A} et \mathbf{C} puis une régression linéaire classique pour \mathbf{B} et \mathbf{D} [VD92a, VD92b, Ver93, Ver94, Mck95].

Par la suite, nous nous intéressons plus particulièrement aux algorithmes MOESP [Ver94]. Ce choix est justifié par le fait que dans les prochains chapitres nous allons adapter une méthode qui partage de nombreux points communs avec les algorithmes MOESP : estimer la matrice d'observabilité dans une base fixe, puis extraire, en deux temps, les matrices d'état du système.

Le point de départ des algorithmes d'identification MOESP est la relation suivante [VV07]

$$\mathbf{Y}_f(t) = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X}(t) + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_f(t) + \mathbf{V}_f(t) \quad (1.17)$$

où f est un entier choisi tel que $f \geq n_x$ et M est un entier défini de façon compatible avec le nombre total de mesures E/S disponibles. $\mathbf{\Gamma}_f$ et \mathbf{H}_f sont respectivement la matrice d'observabilité et la matrice de Toeplitz données par

$$\mathbf{\Gamma}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{f-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{f-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{f-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

\mathbf{U}_f et \mathbf{V}_f sont construites de manière similaire à \mathbf{Y}_f où

$$\text{où} \quad \mathbf{Y}_f(t) = [\mathbf{y}_f(t) \quad \cdots \quad \mathbf{y}_f(t+M-1)] \quad (1.19)$$

$$\mathbf{y}_f(t) = [\mathbf{y}^\top(t) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^\top(t+f-1)]^\top \quad (1.20)$$

$$\mathbf{X}(t) = [\mathbf{x}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(t+M-1)]. \quad (1.21)$$

Plaçons nous dans un premier temps dans le cas déterministe, c.-à-d.,

$$\mathbf{Y}_f(t) = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X}(t) + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_f(t).$$

Le principe de ces algorithmes d'identification peut être décrit comme suit :

- Suppression du régime forcé en appliquant une projection orthogonal c.-à-d.,

$$\mathbf{Y}_f(t) \mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X}(t) \mathbf{\Pi}^\perp$$

où

$$\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{U}_f^\top (\mathbf{U}_f \mathbf{U}_f^\top)^{-1} \mathbf{U}_f.$$

Le calcul de cette projection orthogonale est réalisable efficacement en appliquant une factorisation QR (cf. chapitre 2) [VV07].

- Estimation de la matrice d'observabilité en appliquant une décomposition en valeurs singulières [GV96] : cette étape permet d'estimer l'ordre du système et d'extraire une base de la matrice d'observabilité étendue en une seule phase. En effet, par simple observation des valeurs singulières de la matrice $\mathbf{Y}_f(t) \mathbf{\Pi}^\perp$, il est possible d'isoler les vecteurs singuliers correspondant aux sous-espaces recherchés. L'application d'une telle opération conduit à l'expression suivante

$$\mathbf{Y}_f(t) \mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s \mathbf{V}_s^\top.$$

Nous pouvons montrer que [Ver93, Vib95]

$$\widehat{\mathbf{\Gamma}}_f = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s^{1/2}.$$

- Extraction de la matrice \mathbf{C} en remarquant que

$$\widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{\Gamma}}_f(1 : n_y, :).$$

- Extraction de la matrice \mathbf{A} en utilisant la propriété d'A-invariance de \mathbf{U}_s [Kun78]

$$\widehat{\mathbf{A}} = \{\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s\}^\dagger \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_s \quad (1.22)$$

où

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{(n_y-1)n_x} \quad \mathbf{0}_{(n_y-1)n_x \times n_y}] \quad , \quad \mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{(n_y-1)n_x \times n_y} \quad \mathbf{I}_{(n_y-1)n_x}]$$

$\mathbf{I}_{(n_y-1)n_x}$ est la matrice identité de dimension $(n_y - 1)n_x$ et $\{\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s\}^\dagger$ est la pseudo inverse de Moore Penrose [GV96].

- Estimation des matrices \mathbf{B} et \mathbf{D} : connaissant \mathbf{A} et \mathbf{C} , \mathbf{B} et \mathbf{D} peuvent être estimées par une simple régression linéaire [VV07] tel que

$$\widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{D}} = \arg \min_{\mathbf{B}, \mathbf{D}} \sum_t \left[\mathbf{y}(t) - \left[\mathbf{u}^\top(t) \otimes \mathbf{I}_{n_y} \quad \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^\top(k) \otimes \widehat{\mathbf{C}} \widehat{\mathbf{A}}^{t-k-1} \right] \begin{bmatrix} \text{vec}(\mathbf{D}) \\ \text{vec}(\mathbf{B}) \end{bmatrix} \right]$$

où \otimes est le produit de kronecker et $\text{vec}(\mathbf{M})$ est le vecteur composé des colonnes empilées de la matrice \mathbf{M} [Bre78].

Dans le cas stochastique, une variable instrumentale est introduite afin de minimiser l'effet du bruit sur les paramètres estimés. Cette variable est décorrélée des perturbations agissant sur le procédé sans altérer l'information utile liée à la dynamique du système [Lar90, VD94, Ver94, CV97]. Ainsi, Le choix de cette variable dépend des propriétés des entrées et des perturbations [VV07].

1.3 Modélisation de l'erreur de modèle

En pratique, il est illusoire de pouvoir représenter un phénomène physique à l'aide d'un modèle exact. Dans cette situation, il apparaît une erreur de modélisation qui peut être prépondérante devant l'erreur de mesure. Pour remédier à ce problème, plusieurs travaux de recherche ont été développés dans le but de modéliser l'erreur du modèle [Lju97, Lju99b, Lju98, BGSA01, RGL01, Bar03]. Dans ce chapitre, nous présentons deux méthodes. La première [Lju97, Lju99b, Lju98, BGSA01] repose sur les propriétés asymptotiques des algorithmes à erreur d'équation afin de modéliser l'erreur de modélisation. La deuxième [Bar03] exploite la méthode des moments dans le but de modéliser l'erreur de modèle. Cette méthode sera améliorée dans le chapitre 4.

1.3.1 Modélisation de l'erreur de modèle en utilisant les propriétés des algorithmes à erreur d'équation

Dans ce paragraphe nous présentons une méthode de modélisation de l'erreur de modèle en utilisant les propriétés des algorithmes d'erreur d'équation. Cette méthode a été développée, en boucle ouverte, par Lennart Ljung [Lju98] puis a été étendue dans le cas de la boucle fermée [GCB99].

La technique développée consiste à identifier le modèle de l'erreur entre un modèle estimé $\mathbf{G}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ et le système réel $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^0)$, où $\boldsymbol{\theta}^0$ est le vecteur de paramètres réels, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est le vecteur des paramètres estimés obtenu en utilisant un algorithme à erreur d'équation tel que l'algorithme à erreur de prédiction et $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur des entrées. En utilisant ces données, les résidus sont donnés par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (1.23)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^0)\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \\ \hat{\mathbf{y}}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= \mathbf{G}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

et $\mathbf{v}(t)$ est un bruit de sortie. Ainsi, l'équation (1.23) peut être réécrite

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \underbrace{(\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}^0) - \mathbf{G}(\hat{\boldsymbol{\theta}}))}_{\delta\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta})} \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (1.24)$$

$\delta\mathbf{G}(\boldsymbol{\eta})$ présente un modèle de l'erreur de modélisation dont le vecteur des paramètres est donné par $\boldsymbol{\eta}$. En supposons que l'entrée de ce modèle $\mathbf{u}(t)$ vérifie la condition d'excitation persistante [Lju99c], $\boldsymbol{\eta}$ peut être estimé par les algorithmes d'identification à erreur

d'équation. Grâce à cet algorithme, une estimation non biaisée $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ du vecteur des paramètres exacts $\boldsymbol{\eta}^0$ peut être obtenue. Par la suite, grâce aux propriétés asymptotiques de cet algorithme (cf. paragraphe 1.4.1.1), le domaine d'incertitude de l'erreur de modélisation \mathcal{D}_{EM} est donné par

$$(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^0)^\top \mathbf{R} (\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta}^0) < \chi$$

où \mathbf{R} est la matrice de covariance. \mathcal{D}_{EM} contient le vrai paramètre $\boldsymbol{\eta}^0$ avec une probabilité $\alpha(k, \chi)$ tel que

$$\alpha(k, \chi) = Pr(\boldsymbol{\theta} \in U) = Pr(\chi^2(k) < \chi)$$

où k est le degré de liberté, $\chi^2(k)$ est une loi à densité de probabilité et α est généralement choisi égal à 95%. Ainsi, ce domaine est une ellipse centrée en $\boldsymbol{\eta}^0$ dont les directions sont définies par la matrice de covariance \mathbf{R} .

1.3.2 Modélisation de l'erreur de modèle en utilisant la méthode des moments

Au sein de la section précédente, il a été présenté une méthode de modélisation d'erreur de modèle en utilisant les propriétés asymptotiques des algorithmes à erreur d'équation. Cette méthode est plus simple à appliquer dans le cas d'un système LP.

Dans ce paragraphe nous considérons le cas général où le système est MLP. Plus précisément, dans [Bar03] une technique d'estimation des paramètres physiques d'un système grâce à un modèle d'ordre réduit est présentée. Lors de l'identification des paramètres de ce modèle, un biais dû à l'erreur de modélisation apparaît. Pour remédier à ce problème, une méthode de réjection du biais est appliquée en approchant l'erreur de modélisation par un ensemble de modèles de types boîtes noires.

La sortie du système réel \mathbf{y} s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}_r(t) + \mathbf{y}_m(t) \\ &= \mathbf{H}_r(s)\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}_m(s)\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

où $s = j\omega$. $\mathbf{y}_r \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^{n_y}$, \mathbf{H}_r et \mathbf{H}_m sont respectivement la sortie du modèle à représentation réduite, la sortie du modèle de l'erreur de modélisation, le modèle d'ordre réduit et le modèle de l'erreur de modélisation. $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrées. Pour identifier l'erreur de modélisation, on définit des modèles \mathbf{G}_m de type boîte noire qui approchent \mathbf{H}_m .

Le but de cette méthode est de caractériser l'erreur de modélisation à l'aide d'un modèle boîte noire, en imposant des contraintes pour ne pas concurrencer l'explication du comportement du modèle d'ordre réduit. Pour des raisons de simplicité, cette méthode utilise des modèles LP de type FIR pour décrire cette erreur de modélisation [GGN92].

Généralement $\mathbf{H}_r(s)$ est une approximation basse fréquence du système réel, c.-à-d., au voisinage de $\omega = 0$, et $\mathbf{H}_m(s)$ représente réciproquement une contribution haute

fréquence. Dans certains cas, on considère au contraire que $\mathbf{H}_r(s)$ représente une approximation hautes fréquences du système réel $\mathbf{H}(s)$ (c.-à-d., ω tend vers une fréquence bien définie ω_0) et $\mathbf{H}_m(s)$ décrit un comportement basses fréquences.

Afin que le modèle de l'erreur de modélisation ne reproduise pas le comportement du modèle d'ordre réduit, cette technique impose des contraintes de non concurrence entre ces deux modèles. Pour cela, un outil mathématique bien adapté est introduit pour la définition de ces contraintes : la méthode des moments. Les moments temporels [Tri00] sont utilisés lorsque $\mathbf{H}_r(s)$ a un comportement basse fréquence et les moments fréquentiels [Poi05] sont employés dans le cas contraire.

Rappel de la méthode des moments

Soit un système de réponse impulsionnelle $\mathbf{h}(t)$ et de transformée de Laplace

$$\mathbf{H}(s) = L \{ \mathbf{h}(t) \}. \quad (1.25)$$

Le développement en série de Taylor de $\mathbf{H}(s)$ au voisinage de $s_0 = j\omega_0$ vaut

$$\mathbf{H}_{\text{Taylor}}(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (j\omega - j\omega_0)^n \mathbf{A}_{n,j\omega_0}(\mathbf{H}(t)) \quad (1.26)$$

où

$$\mathbf{A}_{n,\omega_0}(\mathbf{h}(t)) = \int_0^{\infty} \frac{(t)^n}{n!} \exp^{-j\omega_0 t} \mathbf{h}(t) dt. \quad (1.27)$$

Les coefficients $\mathbf{A}_{n,\omega_0}(\mathbf{h}(t))$ représentent les moments fréquentiels de \mathbf{h} lorsque $\omega_0 \neq 0$ et les moments temporels dans le cas où $\omega_0 = 0$.

$\mathbf{H}_{\text{Taylor}}(j\omega) \rightarrow \mathbf{H}(j\omega)$ dans le rayon de convergence de la série [BPT02]. Les premiers moments peuvent être utilisés pour caractériser l'approximation fréquentielle ou temporelle entre deux fonctions de transfert, autour de $\omega = \omega_0$.

Expression des contraintes en basses fréquences ($\omega_0 = 0$)

Plaçons-nous dans le cas où le modèle $H_r^{ij}(j\omega)$, $i \in [1, n_y]$ et $j \in [1, n_u]$ est une approximation basses fréquences de $H^{ij}(j\omega)$. Alors

$$\begin{cases} H_r^{ij}(j\omega) \rightarrow H^{ij}(j\omega) \\ G_m^{ij}(j\omega) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0. \quad (1.28)$$

A l'aide des premiers moments temporels, on peut quantifier l'approximation (1.28) par

$$\begin{cases} A_n(h_r^{ij}(t)) \rightarrow A_n(H^{ij}(t)) \\ A_n(g_m^{ij}(t)) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0 \quad (1.29)$$

pour $n = 0$ à $K - 1$. Si la condition (1.29) est vérifiée, g_m^{ij} et h_r^{ij} sont non concurrents dans l'explication du comportement de h grâce aux K contraintes sur les paramètres du

modèle boîte noire. D'après l'expression des moments temporels (1.29) et en utilisant une intégration approchée du type rectangle, on peut écrire [Poi05]

$$A_n(g_m^{ij}) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{nk} g_k^{ij} \quad \text{où} \quad C_{n,k} = \frac{(T_e)^{n+1}}{n!} k^n \quad (1.30)$$

où T_e est la période d'échantillonnage et g^{ij} sont les coefficients de la réponse impulsionnelle g_m^{ij} . On détermine les contraintes en exprimant le fait que les moments temporels de g_m^{ij} sont nuls. Cela permet de développer l'expression (1.30) comme suit

$$C_{n,1}g_1^{ij} + C_{n,2}g_2^{ij} + \dots + C_{n,i}g_i^{ij} + \dots + C_{n,\mathcal{I}}g_{\mathcal{I}}^{ij} = 0 \quad (1.31)$$

où n variant de 0 à $K-1$. θ_g^{ij} peut être représenté de la façon suivante

$$\theta_g^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_c^{ij} \\ \mathbf{g}_{id}^{ij} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

où $\mathbf{g}_c^{ij} = [g_1^{ij} \ \dots \ g_K^{ij}]^T$ paramètres contraints et $\mathbf{g}_{id}^{ij} = [g_{K+1}^{ij} \ \dots \ g_{\mathcal{I}}^{ij}]^T$ paramètres indépendants. Le développement de l'équation (1.31) pour $n \in [0, K-1]$ nous donne

$$\underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,1} & \dots & C_{0,K} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{K-1,1} & \dots & C_{K-1,K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1^{ij} \\ \vdots \\ g_K^{ij} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_c^{ij}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,K+1} & \dots & C_{0,\mathcal{I}} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{K-1,K+1} & \dots & C_{K-1,\mathcal{I}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{K+1}^{ij} \\ \vdots \\ g_{\mathcal{I}}^{ij} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_{id}^{ij}} \quad (1.33)$$

ce qui permet d'écrire

$$[\mathbf{E} \ \mathbf{F}] \begin{bmatrix} \mathbf{g}_c^{ij} \\ \mathbf{g}_{id}^{ij} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}_c^{ij} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{g}_{id}^{ij} \quad (1.34)$$

E étant une matrice carrée inversible $\in \mathbb{R}^{K \times K}$. Posons

$$\Phi_c^j(k)^T = [u^j(k-1) \ \dots \ u^j(k-K)] \quad (1.35)$$

$$\Phi_{id}^j(k)^T = [u^j(k-K-1) \ \dots \ u^j(K-\mathcal{I})]. \quad (1.36)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} y_g^{ij}(k) &= \Phi_c^j(k)^T \mathbf{g}_c^{ij} + \Phi_{id}^j(k)^T \mathbf{g}_{id}^{ij} \\ &= [\Phi_{id}^j(k)^T - \Phi_c^j(k)^T \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}] \mathbf{g}_{id}^{ij}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

La sortie du modèle de type boîte noire s'écrit finalement

$$y_g^{ij}(k) = \Psi_{id}^j(k)^T \mathbf{g}_{id}^{ij} \quad (1.38)$$

$$\Psi_{id}^j(k)^T = \Phi_{id}^j(k)^T - \Phi_c^j(k)^T \mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}. \quad (1.39)$$

Cette étude peut être appliquée aussi dans le cas où $\mathbf{H}_r(s)$ représente une approximation hautes fréquences du système réel $\mathbf{H}(s)$. Ainsi, des contraintes de non concurrence sont introduites afin que les modèles ($\mathbf{H}_r(s)$ et $\mathbf{H}_m(s)$) ne deviennent pas concurrents et n'expliquent pas le même comportement.

1.4 Caractérisation des domaines d'incertitude

Dans le domaine de l'automatique, il est essentiel d'évaluer la qualité du modèle obtenu par l'intermédiaire d'un calcul de régions d'incertitude. Pour atteindre ce but, il est nécessaire de résoudre le problème suivant : à partir des données \mathbf{E}/\mathbf{S} , déterminer le domaine d'incertitude \mathcal{D} tel que le vecteur des paramètres exacte $\boldsymbol{\theta}^0 \in \mathcal{D}$.

Dans la littérature, plusieurs travaux ont été développés afin de caractériser les domaines d'incertitude. Jusqu'à la fin des années 1980, la théorie classique de l'identification s'intéresse essentiellement aux propriétés asymptotiques de biais et de variance des estimateurs paramétriques, induits par la modélisation sous forme de processus stochastique des bruits. Des intervalles de confiance paramétriques asymptotiques sont alors obtenus [Lju87, SS89]. Toutefois, en pratique, il est difficile de connaître les caractéristiques statistiques du bruit [De 94]. Cela a poussé les chercheurs à développer d'autres méthodes pour s'affranchir de cette limite [NG95]. Ces travaux ont notamment été motivés par la communauté de la commande robuste car son application nécessite la connaissance d'un modèle nominal et d'une borne supérieure sur l'erreur entre le système physique à commander et ce modèle nominal [MTV97, GM96]. Dans ce contexte, plusieurs techniques ont été développées. Ces méthodes supposent que cette erreur est inconnue mais bornée. Cette idée a donné lieu à un certain nombre de méthodes, les méthodes à erreur bornée « bounded error method » [MV91, FA96, WNPLM96, BG01, MN05] et les méthodes ensemblistes « set membership » [BDC90, HG95, BT96, GVZ00, MT02, Ram06].

Nous présentons au sein de cette section quelques approches de caractérisation des domaines d'incertitude en utilisant la méthode statistique et l'approche à erreur bornée.

1.4.1 Domaines d'incertitude d'un système sous forme de fonction de transfert

1.4.1.1 Approche statistique

Dans la section 1.2.1, nous avons présenté les algorithmes à erreur d'équation. Ces algorithmes permettent d'obtenir asymptotiquement une estimation non biaisée de vecteur des paramètres réels $\boldsymbol{\theta}^0$. Ainsi, le vecteur des paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ suit asymptotiquement une distribution gaussienne telle que

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}^0, \mathbf{Q}_{\Phi}^{-1}/\lambda)$$

où

$$\mathbf{Q}_{\Phi} = \bar{\mathbb{E}}(\Phi(t)\Phi^{\top}(t)). \quad (1.40)$$

En utilisant la définition de la loi khi carré, on peut définir le domaine \mathcal{D} donné par

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0)^{\top} \mathbf{Q}_{\Phi}^{-1} / \lambda (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0) < \chi$$

\mathcal{D} contient le vrai paramètre $\boldsymbol{\theta}^0$ avec une probabilité $\alpha(k, \chi)$ tel que

$$\alpha(k, \chi) = Pr(\boldsymbol{\theta} \in U) = Pr(\chi^2(k) < \chi).$$

où k est le degré de liberté et $\chi^2(k)$ est une loi à densité de probabilité. Ainsi, ce domaine est une ellipse centrée en $\boldsymbol{\theta}^0$ dont les directions sont définies par la matrice \mathbf{Q}_Φ .

Cette méthode permet de caractériser, d'une manière simple, le domaine d'incertitude paramétrique d'un modèle LP représenté par une fonction de transfert. Elle repose principalement sur les propriétés asymptotiques des algorithmes à erreur d'équation. Toutefois, cette méthode est difficilement applicable dans le cas d'un modèle NLP et elle montre ces limites si nous n'avons pas suffisamment de donnée E/S.

Face à ces problèmes, d'autres approches de caractérisation des domaines d'incertitude ont été développées. La plupart de ces méthodes supposent que les résidus sont bornés. Elles sont généralement nommées : méthodes à erreur bornée.

1.4.1.2 Approche à erreur bornée

Cette approche a pour objectif de caractériser l'ensemble \mathcal{A} des vecteurs des paramètres qui sont admissibles, c.-à-d., qui correspondent à des erreurs appartenant à un ensemble acceptable. N'importe quel point de l'ensemble admissible \mathcal{A} est une solution potentielle au problème d'estimation.

Soit $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des paramètres que l'on cherche à estimer, $\mathbf{y}(t)$ est la sortie réelle du système, $\widehat{\mathbf{y}}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ est la sortie estimée et $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ est le vecteur des paramètres estimés. Définissons les résidus

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}(t) - \widehat{\mathbf{y}}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}).$$

Cette approche considère l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ comme acceptable si elle appartient à un ensemble compact donné *a priori*. Supposons que

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) \in [\boldsymbol{\varepsilon}_{min}(t), \boldsymbol{\varepsilon}_{max}(t)]$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_{min}(t)$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{max}(t)$ sont connues. Soit $\Theta(t)$ l'ensemble paramétrique admissible issu de la mesure $\mathbf{y}(t)$, défini par

$$\Theta(t) = \left\{ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\varepsilon}_{min}(t) \leq \mathbf{y}(t) - \widehat{\mathbf{y}}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) \leq \boldsymbol{\varepsilon}_{max}(t) \right\}.$$

En prenant en compte toutes les mesures $\mathbf{y}(t)$, $t = 1, \dots, N$, on obtient l'ensemble paramétrique

$$\mathcal{A} = \bigcap_{t=1}^N \Theta(t).$$

Plaçons nous dans le cas d'un modèle LP

$$\widehat{\mathbf{y}}(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \widehat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Θ est une bande limitée par les deux hyperplans parallèles

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t)^+ &= \left\{ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_{min}(t) \right\} \\ \mathcal{H}(t)^- &= \left\{ \widehat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \widehat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_{max}(t) \right\}. \end{aligned}$$

Une description exacte de l'ensemble admissible \mathcal{A} est possible [BS90, MN90, BT96, WPL90]. Cependant, cette description peut devenir trop complexe pour être réalisable puisque le nombre de sommets de \mathcal{A} croît très vite avec le nombre de paramètre n et les algorithmes de description exacte sont en général très coûteux en temps de calcul. Face à ces problèmes, d'autres algorithmes ont été développés afin d'obtenir une forme plus simple contenant \mathcal{A} [DW01]. Ces techniques consistent à déterminer le plus petit ellipsoïde qui contient \mathcal{A} .

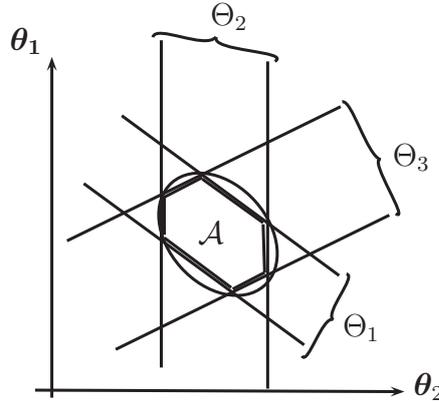


FIG. 1.3 – Approche ellipsoïdale à erreur bornée ($n = 2$).

Afin d'obtenir un algorithme facile à mettre en œuvre en ligne et en temps réel, les données $\mathbf{y}(t)$ sont prises en compte les unes après les autres pour construire récursivement un ellipsoïde $\hat{E}(t)$ contenant l'intersection de $\Theta(t)$ avec l'ellipsoïde $\hat{E}(t-1)$ déterminé à l'étape précédente. Tout ellipsoïde non vide peut s'écrire

$$\hat{E}(\mathbf{c}, \mathbf{P}) = \{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \mid (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{c})^\top \mathbf{P}^{-1} (\boldsymbol{\theta} - \mathbf{c}) \leq 1 \}$$

où \mathbf{c} est son centre et \mathbf{P} une matrice, symétrique définie positive, qui définit son orientation et sa taille. Deux mesures de la taille d'un tel ellipsoïde sont considérées : $\det(\mathbf{P})$ (critère du déterminant) et $\text{tr}(\mathbf{P})$ (critère de trace). Selon le critère retenu, l'ensemble $\mathcal{A}(t)$ est approché récursivement par

$$\hat{E}(t) = \arg \min_{E(\mathbf{c}, \mathbf{P}) \supset \mathcal{I}} \ln \det \mathbf{P}$$

ou par

$$\hat{E}(t) = \arg \min_{E(\mathbf{c}, \mathbf{P}) \supset \mathcal{I}} \text{tr} \mathbf{P}$$

où $\mathcal{I} = \Theta_t \cap \hat{E}(t-1)$.

Différents algorithmes ellipsoïdaux à erreur bornée ont été développés, plus particulièrement par [WP94, BT96]. Une étude comparative de ces algorithmes peut être trouvée

dans [FA96], le plus utilisé étant l'algorithme OBE (outer-bounding Ellipsoid) initialement proposé par Fogel et Huang [FH82].

Ces techniques nécessitent une connaissance *a priori* sur la forme de l'ellipsoïde initiale. En plus, la mise en œuvre de ces algorithmes est difficile dans le cas de systèmes NLP et des systèmes MIMO.

1.4.2 Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système sous forme d'état

Dans le cas d'un système MIMO, il est plus simple de décrire le système par une représentation d'état. Cette représentation, qui gère d'une manière équivalente les systèmes SISO et MIMO, est bien adaptée à la théorie de la commande. Elle permet d'analyser, d'une manière simple, la stabilité, l'observabilité et la commandabilité des processus à identifier. Ces qualités ont rapidement conduit les chercheurs à développer des techniques de caractérisation des domaines d'incertitude des systèmes à représentation d'état. Ces derniers utilisent principalement les algorithmes des sous-espaces pour identifier les paramètres du système [Vib91, Lov97, Gil00]. Vu que ces algorithmes d'identification estiment les paramètres à un changement de base près, il est difficile de caractériser les incertitudes sur les coefficients des matrices d'état. Pour résoudre cette problématique, ces techniques caractérisent les incertitudes sur les paramètres invariants du système tel que les valeurs propres et les fonctions de transfert. Nous considérons dans cette section le système décrit par

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.41a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1.41b)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'E/S, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ le vecteur d'état et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$ le bruit de sortie.

1.4.2.1 Variation des valeurs propres du système

En 1991, Mats Viberg a proposé de déterminer les incertitudes sur les valeurs propres d'un système à représentation d'état [Vib91].

A partir de l'équation (1.22), l'erreur d'estimation de \mathbf{A} peut être donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A} &= (\mathbf{J}_1 \hat{\mathbf{U}}_s)^\dagger (\mathbf{J}_2 \hat{\mathbf{U}}_s - \mathbf{J}_1 \hat{\mathbf{U}}_s \mathbf{A}) \\ &\approx (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^\dagger (\mathbf{J}_2 \hat{\mathbf{U}}_s - \mathbf{J}_1 \hat{\mathbf{U}}_s \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.42)$$

où \mathbf{M}^\dagger est la pseudo inverse de Moore Penrose [GV96] d'une matrice \mathbf{M} .

Supposons que le système possède des pôles distincts, alors \mathbf{A} peut être diagonalisée. L'erreur sur le $k^{\text{ième}}$ valeur propre $\tilde{\mu}_k$ est par ailleurs donnée par

$$\tilde{\mu}_k \approx \mathbf{T}_{.k} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T}_{.k}^{-1} \quad (1.43)$$

où $\mathbf{M}_{.k}$ et $\mathbf{M}_{.k}$ représentent respectivement le $k^{\text{ième}}$ colonne et le $k^{\text{ième}}$ ligne d'une matrice \mathbf{M} . En utilisant les équations (1.42) et (1.43), il est facile de vérifier que (cf. annexe A pour la preuve)

$$\tilde{\mu}_k \approx \mathbf{T}_{k.}(\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^\dagger (\mathbf{J}_2 - \mu_k \mathbf{J}_1) \tilde{\mathbf{U}}_s \mathbf{T}_{.k}^{-1}. \quad (1.44)$$

De plus, nous savons que

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_1 \mathbf{\Gamma}_f \quad (1.45)$$

ce qui implique que (cf. annexe A pour la preuve)

$$\mathbf{T}_{k.}(\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^\dagger = (\mathbf{J}_1 \mathbf{\Gamma}_{f,k})^\dagger. \quad (1.46)$$

De la même manière on peut montrer que

$$\mathbf{T}_{.k}^{-1} = \mathbf{U}_s^* \mathbf{\Gamma}_{f,k}. \quad (1.47)$$

où $*$ représente la transposée conjuguée d'une matrice. En associant les équations (1.44), (1.46) et (1.47), il est facile de montrer que [Vib91, Lov97]

$$\tilde{\mu}_k \approx (\mathbf{J}_1 \mathbf{\Gamma}_{f,k})^\dagger (\mathbf{J}_2 - \mu_k \mathbf{J}_1) \tilde{\mathbf{U}}_s \mathbf{U}_s^* \mathbf{\Gamma}_{f,k}.$$

Cette méthode permet de déterminer l'erreur sur les valeurs propres d'un système à représentation d'état en utilisant les propriétés de A-invariance. Il est cependant important de noter que cette méthode présente certaines limites puisqu'elle suppose que le système possède des pôles distincts et elle détermine seulement l'erreur sur les valeurs propres du système. Ces limites ont conduit à développer d'autres méthodes de caractérisation d'incertitude de la réponse fréquentielle du système.

1.4.2.2 Caractérisation des incertitudes de la réponse fréquentielle du système

Au sein de ce paragraphe, nous allons présenter une méthode de caractérisation des incertitudes de la réponse fréquentielle du système. Cette méthode statistique, appelée méthode de rééchantillonnage ou méthode de bootstrap [Lov97], se base sur le rééchantillonnage des données \mathbf{E}/\mathbf{S} à partir d'un échantillon initial dans le but d'estimer la variance de l'estimateur. Dans [Lov97], cette technique a été adaptée au problème de caractérisation des incertitudes de la réponse fréquentielle du système. Son principe peut être récapitulé comme suit :

- Estimer les matrices d'état $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}})$ en utilisant les algorithmes des sous-espaces puis calculer, à partir de ces estimés, la réponse fréquentielle estimée $\hat{\mathbf{G}}(e^{j\omega_k})$, $k = 1, \dots, N$.
- Calculer l'erreur d'équation

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t).$$

- En supposant que $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, la distribution $\hat{\mathbf{F}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$ de $\boldsymbol{\varepsilon}$ peut être déduite.

- Générer B fois les données $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{y}})$ tel que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ et $\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ou $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ est calculé à partir de la distribution $\hat{F}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$.
- Estimer B fois le système et calculer $\bar{\mathbf{G}}(e^{j\omega_k})$, $k = 1, \dots, N$.
- L'estimation de l'erreur de la réponse fréquentielle du modèle est donnée par

$$\hat{\sigma}_{\bar{\mathbf{G}}(e^{j\omega_k})} = \frac{1}{\sqrt{B-1}} \left(\sum_{i=1}^B (\bar{\mathbf{G}}^{(i)}(e^{j\omega_k}) - \mathbf{H}^{(i)}(e^{j\omega_k}))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où

$$\mathbf{H}^{(i)}(e^{j\omega_k}) = \frac{\sum_{i=1}^B \bar{\mathbf{G}}^{(i)}(e^{j\omega_k})}{B}.$$

Cette technique estime l'erreur de la réponse fréquentielle du modèle en utilisant la méthode de bootstrap. Elle permet également de déterminer l'erreur sur les pôles et les zéros du modèle. Toutefois cette approche n'est applicable qu'en faisant l'hypothèse que les résidus sont un bruit blanc gaussien.

1.4.2.3 Variation paramétrique de la représentation canonique du système

La technique de variation paramétrique de la représentation canonique du système se fonde sur une comparaison du critère 4SID en boucle fermée avec les techniques les plus usuelles telles que les méthodes visant à minimiser une fonction de l'erreur d'équation [Gil00]. Ainsi cette méthode fait apparaître une régression LP du modèle estimé et calcul la région d'incertitude paramétrique à partir de cette nouvelle formulation. Puisque dans les sections 1.4.2.1 et 1.4.2.2 nous avons présenté deux méthodes de caractérisation des domaines d'incertitude en boucle ouverte, nous présentons alors la méthode de variation paramétrique de la représentation canonique en boucle ouverte.

On considère un processus, représenté par le modèle d'état linéaire, invariant, à temps discret, défini par les équations suivantes

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1.48a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1.48b)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'E/S, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ le vecteur d'état, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$ le bruit de sortie et $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_x}$ le bruit sur l'état.

Afin de caractériser les incertitudes, un nouveau modèle $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$ est construit sur la base nominale estimée $(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}})$, tel que par exemple la forme canonique de façon à pouvoir accéder facilement aux pôles. On a alors

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}_m &= \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{T} \\ \hat{\mathbf{B}}_m &= \mathbf{T}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \\ \hat{\mathbf{C}}_m &= \hat{\mathbf{C}} \mathbf{T} \end{aligned}$$

où \mathbf{T} est une matrice inversible. Les pôles du modèle apparaissent directement dans la matrice $\hat{\mathbf{A}}_m$. Cette méthode cherche à écrire le critère d'identification non pas en termes d'erreur de simulation mais d'erreur de prédiction à un pas. On définit alors le critère

$$J = \left\| \widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} |_{\Delta m} | m (\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} | m \right\|_F^2 \quad (1.49)$$

où $\mathbf{\Pi}$ est une projection oblique qui permet de diminuer l'effet des perturbations $\mathbf{v}(t)$ et $\mathbf{w}(t)$ sur l'estimation des matrices d'état et $\widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} | m$ sont les données simulées à partir du modèle. La structure de $\widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} |_{\Delta m} | m (\boldsymbol{\theta})$ est identique à celle de \mathbf{Y}_f (cf. équation (1.19)) et dont chaque élément est construit suivant un modèle de prédiction. Pour des raisons de simplicité, on considère le cas d'un système SISO. La sortie prédite peut s'écrire

$$\widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} |_{\Delta m} | m (\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \widehat{\varphi}_f \boldsymbol{\theta} & \cdots & \widehat{\varphi}_{f+M-1} \boldsymbol{\theta} \\ \vdots & & \vdots \\ \widehat{\varphi}_{2f-1} \boldsymbol{\theta} & \cdots & \widehat{\varphi}_{2f+M-2} \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \mathbf{\Pi} |_{\Delta m} | m$$

où $\widehat{\varphi}$ est constitué des E/S simulées à partir du modèle $(\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m, \mathbf{C}_m)$. Dans le cas d'une réalisation sous forme canonique observable, $\boldsymbol{\theta}$ regroupe les éléments des matrices $(\mathbf{A}_m + \Delta \mathbf{A}_m, \mathbf{C}_m + \Delta \mathbf{C}_m)$. De plus

$$\widehat{\varphi}_t \boldsymbol{\theta} = \widehat{y}(t-1)\theta_1 + \cdots + \widehat{y}(t-n_x)\theta_{n_x} + \widehat{u}(t-1)\theta_{n_x+1} + \cdots + \widehat{u}(t-n_x)\theta_{2n_x}.$$

Ceci permet d'écrire

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} |_{\Delta m} | m (\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} | m &= \widehat{\mathbf{Y}}_f(f-1)\mathbf{\Pi}\theta_1 + \cdots + \widehat{\mathbf{Y}}_f(f-n_x)\mathbf{\Pi}\theta_{n_x} \\ &+ \widehat{\mathbf{U}}_f(f-1)\mathbf{\Pi}\theta_{n_x+1} + \cdots + \widehat{\mathbf{U}}_f(f-n_x)\mathbf{\Pi}\theta_{2n_x} - \widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} | m. \end{aligned}$$

Par définition, on a

$$\|\mathbf{Z}\|_F^2 = \|\text{vec}(\mathbf{Z})\|_2^2.$$

Donc, (1.49) peut être réécrite

$$J = \left\| \text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} | m) - \begin{bmatrix} \text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}_f(f-1)\mathbf{\Pi}) & \cdots & \text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}_f(f-n_x)\mathbf{\Pi}) \\ \text{vec}(\widehat{\mathbf{U}}_f(f-1)\mathbf{\Pi}) & \cdots & \text{vec}(\widehat{\mathbf{U}}_f(f-n_x)\mathbf{\Pi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_{n_x} \\ \theta_{n_x+1} \\ \vdots \\ \theta_{2n_x} \end{bmatrix} \right\|_2^2.$$

Ce critère est similaire au critère de l'erreur de prédiction [Lju99c, SS89] et les régions d'incertitude peuvent être définies comme suit

$$\widehat{\delta}_{\boldsymbol{\theta}}^2 = \widehat{\delta}_{\varepsilon}^2 (\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Psi}^T)^{-1}$$

où

$$\widehat{\delta}_{\varepsilon}^2 = \left\| \mathbf{Y}_f \mathbf{\Pi} - \widehat{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi} | m \right\|_F^2$$

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} \text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}_f(f-1)\mathbf{\Pi}) & \cdots & \text{vec}(\widehat{\mathbf{Y}}_f(f-n_x)\mathbf{\Pi}) \\ & & \text{vec}(\widehat{\mathbf{U}}_f(f-1)\mathbf{\Pi}) & \cdots & \text{vec}(\widehat{\mathbf{U}}_f(f-n_x)\mathbf{\Pi}) \end{bmatrix}.$$

1.5 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de présenter une vue d'ensemble des algorithmes d'identification, des méthodes de description des domaines d'incertitude paramétriques et des techniques de modélisation d'erreur de modélisation.

Ainsi, au sein de ce chapitre nous avons classé les algorithmes d'identifications en trois familles à savoir : les algorithmes à erreur d'équation, les algorithmes à erreur de sortie et les algorithmes des sous-espaces.

Lors de l'identification du système, deux sources d'erreurs peuvent affecter le système : erreur de mesure et erreur de modélisation. Afin de caractériser ces erreurs, il est nécessaire d'évaluer les régions d'incertitude et de modéliser l'erreur de modélisation. Ainsi, la procédure d'identification doit fournir non seulement un modèle nominal, mais aussi une estimation fiable des domaines d'incertitude. Dans ce contexte, plusieurs travaux de recherche ont été développés. Ils sont généralement classés en deux catégories : approche stochastique et approche à erreur bornée. En plus, nous avons présenté deux méthodes de modélisation d'erreur de modèle. La première repose sur les propriétés statistiques des algorithmes à erreur d'équation. La deuxième s'inspire de la méthode des moments dans le but de modéliser l'erreur de modélisation.

Chapitre 2

Identification de modèles d'état linéaires structurés

2.1 Introduction

Comme annoncé dans l'introduction générale de ce manuscrit, l'un des objectifs de cette thèse est de caractériser les domaines d'incertitude d'un système MIMO représenté par un modèle d'état. Les méthodes des sous-espaces sont désormais considérées par la communauté automatique comme une solution très intéressante pour obtenir un modèle d'état fiable d'un système multivariable linéaire à temps invariant [Lju96, Lju08]. Le principal apport de ces méthodes par rapport aux techniques plus traditionnelles d'erreur de prédiction [Lju99c] est qu'elles permettent l'estimation directe de représentations minimales d'état sans recourir à des formes canoniques parfois mal conditionnées [VD96b, Kat05, VV07]. De plus, la forme d'état est souvent préférée au modèle E/S pour la compacité avec laquelle elle encode les paramètres des systèmes MIMO. La forme d'état se prête finalement plus facilement à l'analyse de systèmes en termes d'observabilité, de commande... L'efficacité de ces méthodes a été expérimentée [Lar90, Bau05, VD94, Vib95] et reconnue au travers de nombreuses applications réelles : aéronautique [VVG94], mécanique [KHW⁺95, AVVD98, MHV99], processus industriel [FDV00].

Bien qu'intéressantes d'un point de vue pratique et numérique, l'application des méthodes des sous-espaces peut s'accompagner d'un certain nombre de difficultés techniques.

- La plupart des méthodes des sous-espaces passent par une étape de DVS pour estimer un ou plusieurs sous-espaces nécessaires à l'extraction des matrices d'état du système. Intéressante d'un point de vue robustesse numérique,
 - elle est très couteuse numériquement ce qui la rend inutilisable dans un contexte d'identification récursive,
 - elle rend difficile le choix de la base de la réalisation d'état à estimer,
 - elle peut conduire, pour différents jeux de données d'entrée-sortie d'un même système, à différentes représentations d'état similaires à un changement de base près.
- Elles conduisent à des formes d'état sur-paramétrées [MH97] puisque, dans tous les cas, les matrices d'état estimées sont pleines. Les formes d'état identifiées ne sont donc pas parcimonieuses puisqu'elles contiennent $n_x^2 + n_x(n_u + n_y) + n_u n_y$ paramètres.

Ces caractéristiques rendent difficile

- l'introduction d'information *a priori* au sein des algorithmes des sous-espaces,
- l'étude des propriétés statistiques de ces techniques,
- la caractérisation des paramètres identifiés puisque, par construction, ces paramètres ne sont pas des invariants du système.

Notre objectif dans ce chapitre est de proposer une méthode fondée sur le principe des sous-espaces qui assure une estimation des paramètres du système à temps discret et à temps continu dans une base fixe. La solution présentée au sein de ce chapitre permet d'avoir une structure particulière du modèle d'état avec un nombre minimal de paramètres [MH97]. Pour cela, nous proposons de remédier aux problèmes mentionnés ci-dessus à travers la présentation de l'algorithme du propagateur. Par rapport à la littérature existante [Kat05, VD96b], cette méthode possède entre autres les caractéristiques intéressantes de ne nécessiter aucune DVS et de permettre un choix *a priori* de la base des matrices à estimer dans l'espace d'état. Ces qualités, comme nous le verrons dans le chapitre 3, sont essentielles pour la caractérisation des domaines d'incertitude des coefficients des matrices

d'état.

Dans ce chapitre, nous introduisons deux méthodes d'identification d'un modèle d'état à temps discret : la méthode du propagateur [MD91, Mer04] (cf. section 2.2.2) et la méthode "Predictor-based Subspace Identification" (cf. section 2.2.3). Dans le cas d'un système continu, la méthode du propagateur est adaptée en utilisant la méthode de filtrage pour calculer les dérivées successives des signaux E/S (cf. paragraphe 2.3). Des simulations numériques permettent à la section 2.4 d'illustrer la faisabilité de ces méthodes d'identification.

2.2 Identification d'un modèle d'état à temps discret

2.2.1 Notation et problématique

Considérons un système linéaire à temps invariant, représenté par la forme d'état à temps discret suivante

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (2.1b)$$

Les vecteurs $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représentent respectivement les signaux d'entrée, de sortie et d'état du procédé. Les matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ sont les matrices du système relativement à une certaine base de l'espace d'état. Les perturbations agissant sur le procédé sont réparties en deux signaux $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représentant respectivement les bruits agissant sur les états du système et les bruits de sortie. Ces deux signaux sont supposés être des réalisations de variables aléatoires statistiquement indépendantes de valeur moyenne nulle. Notons que, lorsque \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des bruits blancs gaussiens indépendants de moyenne nulle et de variance finie, la représentation d'état précédente peut se récrire sous forme d'innovation [Lju99c]

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (2.2b)$$

où \mathbf{K} est le gain du filtre de Kalman et \mathbf{e} le vecteur d'innovation. Pour toute réalisation de \mathbf{v} et \mathbf{w} , il existe une unique matrice \mathbf{K} et un unique vecteur \mathbf{e} tels que les représentations (2.1) et (2.2) aient le même comportement entrée-sortie [Hav01].

Le problème d'identification considéré peut alors se formuler de la façon suivante : étant donné des mesures E/S $\{\mathbf{u}(t)\}_{t=1}^N$ et $\{\mathbf{y}(t)\}_{t=1}^N$ générées par un système représenté sous la forme (2.1) sur un horizon fini mais suffisamment large N , estimer les matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ à un changement de base près.

Les méthodes d'identification présentées au sein de chapitre, qui s'apparentent par construction aux méthodes des sous-espaces, font appel à un certain nombre de notations relativement classiques dans le domaine. Ces dernières sont résumées ci-après. Plus

précisément, commençons par définir les vecteurs d'entrée, de sortie et de bruit décalés

$$\mathbf{u}_f(t) = [\mathbf{u}^\top(t) \ \cdots \ \mathbf{u}^\top(t+f-1)]^\top \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}_f(t) = [\mathbf{y}^\top(t) \ \cdots \ \mathbf{y}^\top(t+f-1)]^\top \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}_f(t) = [\mathbf{v}^\top(t) \ \cdots \ \mathbf{v}^\top(t+f-1)]^\top \quad (2.5)$$

$$\mathbf{w}_f(t) = [\mathbf{w}^\top(t) \ \cdots \ \mathbf{w}^\top(t+f-1)]^\top \quad (2.6)$$

où f est un entier (choisi par l'utilisateur) tel que $f \geq n_x$. A partir de l'équation récurrente (2.1), on obtient facilement, par substitutions successives sur un horizon temporel f [VV07], l'équation suivante

$$\mathbf{y}_f(t) = \mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \mathbf{u}_f(t) + \mathbf{n}_f(t) \quad (2.7)$$

où

$$\mathbf{n}_f(t) = \mathbf{G}_f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \mathbf{w}_f(t) + \mathbf{v}_f(t). \quad (2.8)$$

Au sein de cette équation, les matrices d'observabilité étendue $\mathbf{\Gamma}_f$, de commande bloc Toeplitz \mathbf{H}_f et de bruit bloc Toeplitz \mathbf{G}_f sont définies comme suit [VV07]

$$\mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{f-1} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{f-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{f-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{G}_f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CA} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{f-2} & \mathbf{CA}^{f-3} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Posons maintenant

$$\mathbf{X}_{t,M} = [\mathbf{x}(t) \ \cdots \ \mathbf{x}(t+M-1)] \quad (2.12)$$

$$\mathbf{U}_{t,f,M} = [\mathbf{u}_f(t) \ \cdots \ \mathbf{u}_f(t+M-1)] \quad (2.13)$$

$$\mathbf{Y}_{t,f,M} = [\mathbf{y}_f(t) \ \cdots \ \mathbf{y}_f(t+M-1)] \quad (2.14)$$

$$\mathbf{N}_{t,f,M} = [\mathbf{n}_f(t) \ \cdots \ \mathbf{n}_f(t+M-1)] \quad (2.15)$$

où M est un entier tel que $f \ll M$ et défini de façon compatible avec le nombre total de mesures E/S disponibles. Par la suite, l'équation (2.7) peut être étendue à l'équation matricielle suivante [Vib95]

$$\mathbf{Y}_{t,f,M} = \mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) \mathbf{X}_{t,M} + \mathbf{H}_f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \mathbf{U}_{t,f,M} + \mathbf{N}_{t,f,M}. \quad (2.16)$$

Remarque 1. Afin d'alléger les équations, nous utiliserons le plus souvent possible les notations condensées suivantes

$$\mathbf{Y}_{t,f,M} = \mathbf{Y}_f \quad (2.17)$$

$$\mathbf{U}_{t,f,M} = \mathbf{U}_f \quad (2.18)$$

$$\mathbf{N}_{t,f,M} = \mathbf{N}_f \quad (2.19)$$

$$\mathbf{X}_{t,M} = \mathbf{X} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{C}) = \mathbf{\Gamma}_f \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \mathbf{H}_f. \quad (2.22)$$

Ainsi, l'équation (2.16) peut s'écrire

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X} + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_f + \mathbf{N}_f. \quad (2.23)$$

Partant de l'équation (2.23), les méthodes classiques des sous-espaces s'attachent à extraire dans un premier temps, soit la séquence d'état \mathbf{X} , soit la matrice d'observabilité étendue $\mathbf{\Gamma}_f$ au moyen de techniques de projection géométrique et de DVS [VD96b, VV07, Qin06]. Une seconde étape consiste à déduire de $\mathbf{\Gamma}_f$ ou de \mathbf{X} les matrices du système dans une base "arbitraire" de coordonnées de l'espace d'état. Bien qu'ayant prouvé leur applicabilité dans un très grand nombre de situations [AL97, BAB00, BNSR98, VVG94], les techniques classiques des sous-espaces peuvent souffrir de quelques problèmes techniques liés

- à la multiplicité des bases possibles pour l'état du système,
- à l'obtention de représentations d'état complètement paramétrées.

Comme expliqué au sein de la Section 2.1, ces deux caractéristiques peuvent avoir des conséquences fâcheuses dans certains contextes d'utilisation. La multiplicité des bases possibles rend l'utilisation des méthodes des sous-espaces classiques problématique dans le cas de modèles déterminés à l'aide de sous-modèles linéaires locaux (cas des modèles LPV ou de certains modèles de systèmes hybrides). Combinée à la surparamétrisation, cette multiplicité rend l'étude des domaines d'incertitude des paramètres estimés très complexe. Les solutions proposées jusqu'ici sont restreintes à l'analyse d'invariants de la représentation d'état tels que les pôles ou la réponse fréquentielle du système [Vib91, Lov97]. Afin de remédier à ce problème, la méthode du propagateur [MD91] est présentée dans la suite de ce chapitre. Par rapport à la littérature existante [VD96b, Kat05], cette méthode possède entre autres les caractéristiques intéressantes suivantes

- aucune DVS n'est nécessaire,
- un choix *a priori* de la base des matrices à estimer dans l'espace d'état,
- l'obtention directe d'une forme canonique à partir des données d'E/S accessibles à la mesure, c'est-à-dire l'accès à
 - des paramètres invariants du système,
 - une représentation d'état parcimonieuse.

Dans un premier temps, afin de présenter le principe des méthodes des sous-espaces développée durant cette thèse, l'adaptation de la méthode du propagateur [MD91] est réalisée pour l'identification de systèmes MISO (cf. section 2.2.2.1). L'extension au cas des systèmes

MIMO est ensuite considérée au sein du paragraphe 2.2.2.2. Le rejet du biais inhérent à l'utilisation de données bruitées est traité dans la section 2.2.2.7. Une extension aux systèmes bouclés est finalement proposée dans le paragraphe 2.2.3. Cette extension consiste en une adaptation de l'algorithme PBSID développé par A. Chiuso [Chi07b, Chi07a]. Comme son homologue, elle peut également être utilisée à partir de données acquises en boucle ouverte.

2.2.2 Méthode du propagateur

Le problème des perturbations étant traité dans la section 2.2.2.7, nous faisons pour l'instant abstraction du bruit, ce qui signifie que nous considérons désormais la relation

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X} + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_f. \quad (2.24)$$

Nous supposons également que le système à identifier est observable et commandable.

Afin d'éliminer le régime forcé $\mathbf{H}_f \mathbf{U}_f$, la première étape de la méthode du propagateur consiste à projeter orthogonalement l'ensemble de cette équation sur le sous-espace orthogonal à l'espace des lignes de \mathbf{U}_f . Dans ces conditions, en supposant que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} (\mathbf{U}_f \mathbf{U}_f^\top) = n_u f, \quad (2.25)$$

l'équation (2.24) peut être réécrite comme suit

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp \quad (2.26)$$

où

$$\mathbf{\Pi}^\perp = \mathbf{I}_M - \mathbf{U}_f^\top (\mathbf{U}_f \mathbf{U}_f^\top)^{-1} \mathbf{U}_f, \quad (2.27)$$

\mathbf{I}_M étant la matrice identité. Le calcul d'une telle projection orthogonale peut être réalisée en appliquant une factorisation RQ [HJ90] au bloc matriciel $[\mathbf{U}_f^\top \ \mathbf{Y}_f^\top]^\top$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

où $\mathbf{R}_{11} \in \mathbb{R}^{n_u f \times n_u f}$ et $\mathbf{R}_{22} \in \mathbb{R}^{n_y f \times n_y f}$ sont des matrices triangulaires inférieures, $\mathbf{R}_{21} \in \mathbb{R}^{n_y f \times n_u f}$ est une matrice pleine et $\mathbf{Q}_1 \in \mathbb{R}^{n_u f \times M}$, $\mathbf{Q}_2 \in \mathbb{R}^{n_y f \times M}$ des matrices orthogonales.

La méthode du propagateur se différencie des autres techniques des sous-espaces lors de la phase d'extraction de l'espace d'observabilité. Elle demande essentiellement que le système à identifier soit observable. Cette propriété se traduit mathématiquement par le fait que, pour tout $i \geq n_x$,

$$\text{rang}(\mathbf{\Gamma}_i) = n_x, \quad (2.29)$$

que le système soit MISO ou MIMO. Bien que cette propriété soit utilisée quelle que soit le nombre de sorties du système, sa traduction et la construction de l'espace d'observabilité est plus ou moins complexe selon que le système soit MISO ou MIMO. Ces deux situations sont présentées et étudiées en détail dans les sections 2.2.2.1 et 2.2.2.2. L'extraction des matrices d'état du système à partir de l'estimée de la matrice d'observabilité étendue est quant à elle présentée dans la section 2.2.2.4 et la section 2.2.2.5.

2.2.2.1 Méthode du propagateur : cas d'un système MISO

Le système étant MISO et observable, en supposant que $f \geq n_x$, il est clair que¹

- $\mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top) \in \mathbb{R}^{f \times n_x}$ est une matrice de rang plein,
- les n_x premières lignes de cette matrice sont linéairement indépendantes.

On peut alors partitionner la matrice d'observabilité étendue $\mathbf{\Gamma}_f$ de la façon suivante

$$\mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top) \\ \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \} \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \\ \} \mathbb{R}^{(f-n_x) \times n_x} \end{array} \quad (2.30)$$

où $\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top)$ contient les n_x premières lignes linéairement indépendantes et $\mathbf{\Lambda}$ les lignes complémentaires. Puisque $\mathbf{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top)$ est de rang plein n_x , on peut écrire $\mathbf{\Lambda}$ comme une combinaison linéaire des lignes de $\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top)$. Il existe donc un unique opérateur \mathbf{P} , appelé propagateur [MD91, Mer04], tel que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top).$$

Il est alors aisé de vérifier que

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top) \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp. \quad (2.31)$$

Comme $\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}^\top)$ est une matrice carrée de rang plein, elle peut être utilisée comme matrice de changement de base \mathbf{T} . En introduisant $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{T}\mathbf{X}$, on obtient

$$\mathbf{Y}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp. \quad (2.32)$$

Cette dernière équation indique qu'il suffit d'estimer la matrice \mathbf{P} pour disposer d'une base de l'espace colonne de $\mathbf{\Gamma}_f$. L'estimation de la matrice propagateur \mathbf{P} peut être réalisée en considérant le partitionnement suivant

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp \quad (2.33)$$

où les blocs \mathbf{Z}_1 et \mathbf{Z}_2 résultent d'une partition de \mathbf{Z} semblable à celle de $\mathbf{\Gamma}_f$. En effet, à partir de l'équation précédente, il s'ensuit que

$$\hat{\mathbf{P}} = \arg \min_{\mathbf{P}} \|\mathbf{Z}_2 - \mathbf{P}\mathbf{Z}_1\|_F^2 \quad (2.34)$$

où $\|\bullet\|_F$ est la norme matricielle de Frobenius de \bullet .

¹Dans le cas MISO, la matrice \mathbf{C} est un vecteur ligne. Ce dernier est noté \mathbf{c}^\top dans la suite de ce paragraphe.

2.2.2.2 Extension de la méthode du propagateur aux systèmes multivariés

La méthode du propagateur présentée dans la section précédente est fondée sur un partitionnement de la matrice d'observabilité étendue sous la forme (2.30). Dans le cas d'un système MISO, les n_x premières lignes de $\mathbf{\Gamma}_f$ sont linéairement indépendantes. La sélection d'un bloc matriciel composé de n_x lignes linéairement indépendantes est donc simplifiée. Dans le cas des systèmes MIMO, le problème est plus complexe. En effet, il n'existe aucun moyen de s'assurer que les n_x premières lignes de $\mathbf{\Gamma}_f$ soient linéairement indépendantes ou que les dynamiques du système soient observables depuis une sortie particulière. Pour résoudre ce problème, les solutions développées jusqu'ici sont principalement fondées sur l'emploi des indices de Kronecker [Kai80, Lue67, GW74]. L'idée de base de ces solutions consiste à sélectionner, d'une manière itérative, généralement à l'aide de tests de rang, des vecteurs linéairement indépendants des matrices d'observabilité ou de commandabilité estimées afin d'obtenir une matrice carrée de rang plein employée, dans un second temps, comme matrice de changement de base. Malheureusement, cette approche

- demande d'avoir accès à des matrices d'état du système,
- conduit à différentes formes canoniques en fonction de l'implémentation de la méthode de sélection (cf. [Kai80, Chapitre 6] pour une présentation détaillée et claire de ces approches).

Notons également que l'application d'une telle technique de sélection est difficile à réaliser lorsque, $\forall i \in \{1, \dots, n_x\}$, $\text{rang}\{\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{c}_i^\top)\} < n_x$ et $\text{rang}\{\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}^\top, \mathbf{b}_i)\} < n_x$, où \mathbf{c}_i^\top et \mathbf{b}_i représentent respectivement les vecteurs lignes de \mathbf{C} et les vecteurs colonnes de \mathbf{B} .

Les travaux proposés dans [MBL08] et [Bak08] permettent de surmonter cette difficulté grâce à une transformation du système initial (MIMO) en un système intermédiaire assimilable à un système MISO observable. Plus particulièrement, cette méthode repose sur la proposition suivante (cf. [BML09, Lemme 1])

Proposition 1. *Supposons que le système soit observable et que la matrice \mathbf{A} soit non dérogatoire [HJ90]. Soit $\boldsymbol{\kappa}^\top = [\kappa_1 \ \kappa_2 \ \dots \ \kappa_{n_y}] \in \mathbb{R}^{1 \times n_y}$ un vecteur généré de façon aléatoire selon une distribution uniforme. Alors, avec une probabilité de un, on a*

$$\text{rang}\{\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})\} = n_x. \quad (2.35)$$

Avant d'expliquer les conséquences pratiques de cette proposition, il est essentiel de définir ce qu'est une matrice non dérogatoire.

Définition 2.2.1. *Une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est non dérogatoire si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite*

- \mathbf{A} est similaire à une matrice compagne,
- le polynôme caractéristique de la matrice \mathbf{A} est égal à son polynôme minimal, les deux polynômes étant unitaires,
- il existe un vecteur $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tel que la matrice $[\mathbf{w} \ \mathbf{A}\mathbf{w} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{w}]$ est de rang plein,
- pour toute valeur propre λ de \mathbf{A} , $\dim(\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n)) = 1$.

Ces propriétés ont quelques implications pratiques importantes en théorie des systèmes linéaires. Par exemple, tout système observable MISO (resp. commandable SIMO) peut

être réalisé à l'aide d'une représentation d'état ayant une matrice \mathbf{A} non dérogatoire. De même, si le système étudié présente n pôles distincts, la matrice d'état du système est semblable à une matrice non dérogatoire. De nombreux systèmes ayant de pôles multiples peuvent également être réalisés par une représentation vérifiant cette propriété. Notons cependant qu'un système ayant au moins un pôle double et réalisé à l'aide d'une forme d'état à matrice d'état diagonalisable ne peut pas être représenté via une forme d'état à matrice \mathbf{A} non dérogatoire. Ces différents exemples illustrent l'applicabilité de l'approche considérée dans ce chapitre.

La proposition 1 indique qu'en introduisant un vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ généré aléatoirement, il est possible d'assurer que la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$ soit de rang plein avec une probabilité 1 lorsque le système est observable et réalisable par une forme d'état à matrice \mathbf{A} non dérogatoire. Comme dans le cas MIS0, le principe de la méthode du propagateur présentée ci-après consiste à introduire une matrice de changement de base extraite de la matrice d'observabilité étendue. Dans le cas des systèmes MIMO, cette matrice de changement de base est plus précisément $\boldsymbol{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$. La construction d'une telle matrice demande de modifier l'équation matricielle des données (2.24). Pour atteindre cet objectif, introduisons la matrice \mathbf{K} définie comme suit

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \cdots & \kappa_{n_y} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}. \quad (2.36)$$

L'application de cette matrice à l'équation de sortie (2.1) conduit à un vecteur de sortie modifié $\bar{\mathbf{y}}$ vérifiant

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)) = \bar{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \quad (2.37)$$

où $\bar{\mathbf{y}}$, $\bar{\mathbf{C}}$ et $\bar{\mathbf{D}}$ sont respectivement obtenus à partir \mathbf{y} , \mathbf{C} et \mathbf{D} en substituant leur 1^{er} ligne respective par $\boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{y}$, $\boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}$ et $\boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{D}$. En suivant la même procédure que celle introduite au sein du paragraphe 2.2.2.1, l'équation (2.26) devient

$$\bar{\mathbf{Y}}_f \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_f \mathbf{X} \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp \quad (2.38)$$

où

$$\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_f = \boldsymbol{\Gamma}_f(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}) \quad (2.39a)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}_1 \\ \bar{\mathbf{c}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{c}}_{n_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n_y} \kappa_j \mathbf{c}_j \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \end{bmatrix} \quad (2.39b)$$

et \mathbf{c}_j , $j \in [1, n_y]$, sont les lignes de \mathbf{C} . Notant que $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_f$ est une matrice de rang plein, une matrice de permutation \mathbf{S} peut être introduite afin d'ordonner les lignes de $\bar{\boldsymbol{\Gamma}}_f$ et d'assurer

que les n_x premières lignes soient linéairement indépendantes

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y f}(1, :) \\ \mathbf{I}_{n_y f}(n_y + 1, :) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_y f}((f-1)n_y + 1, :) \\ \mathbf{I}_{n_y f}(2 : n_y, :) \\ \mathbf{I}_{n_y f}(n_y + 2 : 2n_y, :) \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{n_y f}((f-1)n_y + 2 : fn_y, :) \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Plus particulièrement, la pré-multiplication de l'équation (2.38) par la matrice de permutation \mathbf{S} conduit à

$$\mathbf{S}\bar{\Gamma}_f = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \\ \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \mathbf{A} \\ \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{A}^{f-1} \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^{f-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \mathbf{A}^{f-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{c}}_1 \\ \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{c}}_1 \mathbf{A}^{f-1} \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^{f-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \\ \mathbf{c}_{n_y} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \mathbf{A}^{f-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{c}}_1) \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \\ \Psi \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Or, en supposant qu'un vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ vérifiant les conditions de la proposition 1 soit accessible, nous savons que $\text{rang}\{\Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{c}}_1)\} = n_x$. Cette matrice $\Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{c}}_1)$ peut alors être utilisée comme un changement de base \mathbf{T} . En suivant la même procédure que dans le cas MISO, il est facile de montrer que

$$\mathbf{S}\bar{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \mathbf{S}\bar{\Gamma}_f \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \bar{\mathbf{c}}_1) \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp \quad (2.42)$$

où $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_y f - n_x \times n_x}$ est la matrice propagateur. L'estimation d'une telle matrice est réalisable en considérant le problème des moindres carrés suivant

$$\|\mathbf{Z}_2 - \mathbf{P}\mathbf{Z}_1\|_F^2 \quad (2.43)$$

où les blocs \mathbf{Z}_1 et \mathbf{Z}_2 résultent d'une partition de $\mathbf{S}\bar{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp$ semblable à celle de $\bar{\Gamma}_f$.

2.2.2.3 Discussion concernant le choix de $\boldsymbol{\kappa}$

Dans le cas de systèmes MIMO, l'adaptation de la méthode du propagateur repose entre autre sur la possibilité de générer un vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ tel que $\text{rang}\{\Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})\} = n_x$. A

première vue, cette condition est fonction des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} inconnues lorsque cette approche est employée. Une étude récente [MB10] montre que la génération d'un tel vecteur n'est pas si complexe que cela y paraît. Elle montre plus précisément que

- tout vecteur généré aléatoirement est un candidat fiable lorsque les données d'E/S sont non bruitées,
- une heuristique, basée sur les données d'E/S, peut être employée pour générer le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ lorsque le vecteur de sortie est bruité.

La génération du vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ dans le cas de données bruitées repose sur une observation simple : choisir un vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ suffisamment corrélé avec les colonnes de \mathbf{C} , \mathbf{CA} , ..., \mathbf{CA}^{f-1} .

Pour atteindre cet objectif, deux solutions sont possibles.

- Estimer l'espace d'observabilité du système à l'aide d'une autre méthode des sous-espaces puis en déduire le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ (à l'aide des informations fournies par la DVS des données d'E/S).
- Sélectionner directement le vecteur à partir des données d'E/S accessibles.

La première solution, qui est par définition la plus fiable, demande d'utiliser un premier algorithme des sous-espaces rendant ainsi l'algorithme d'identification fondé sur le propagateur obsolète². Au contraire, choisir

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{Mn_y} \boldsymbol{\Phi}_i \boldsymbol{\Phi}_i^\top \mathbf{1}_{n_y}, \quad (2.44)$$

où $\mathbf{1}_{n_y}$ représente le vecteur unitaire de taille n_y et où chaque matrice $\boldsymbol{\Phi}_i$ contient n_y lignes obtenues par partition de $\mathbf{Y}_f \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp$ comme suit

$$\mathbf{Y}_f \boldsymbol{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = [\boldsymbol{\Phi}_1^\top \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Phi}_f^\top]^\top \quad (2.45)$$

est une solution qui réalise un bon compromis entre complexité et efficacité. Notons en effet que cette relation n'est fonction que des données d'E/S du système. Une comparaison de cette heuristique avec d'autres techniques est proposée dans [MB10].

2.2.2.4 Extraction des matrices \mathcal{A} et \mathcal{C}

Dans les paragraphes 2.2.2.1 et 2.2.2.2, deux méthodes d'identification de l'opérateur \mathbf{P} ont été présentées, chacune dédiée respectivement aux systèmes MISO et MIMO. Connaissant la matrice \mathbf{P} , les matrices \mathcal{A} et \mathcal{C} peuvent être déduites relativement simplement sans faire appel à la technique classique d'A-invariance [Kun78]. En effet, il est facile de constater que

$$\boldsymbol{\Upsilon}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \bar{\boldsymbol{\Gamma}}_f \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{S} \boldsymbol{\Gamma}_f (\mathbf{A}, \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{S} \boldsymbol{\Gamma}_f (\mathcal{A}, \mathcal{C}) \quad (2.46)$$

où

$$\mathcal{A} = \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \quad (2.47a)$$

$$\mathcal{C} = \mathbf{C} \mathbf{T}^{-1} \quad (2.47b)$$

²L'idée du propagateur n'est utilisée dans ce cas uniquement comme un changement de base.

et \mathbf{T} représente la matrice de changement de base $\Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ dans le cas MIS0 et $\Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$ dans le cas MIMO. En faisant de nouveau appel à la définition de la matrice de permutation \mathbf{S} , on obtient

$$\Upsilon_f = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{f-1} \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_2 \mathbf{A}^{f-1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \\ \mathbf{c}_{n_y} \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \mathbf{A}^{f-1} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

En observant l'équation (2.48), il est facile de montrer que la matrice \mathbf{C} est composée de

$$\mathbf{c}_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] \quad (2.49)$$

$$\mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} ((j-1)f+1, :) \text{ pour } j \in [2, n_y]. \quad (2.50)$$

En outre, en utilisant les notations de MATLAB[©], nous avons

$$\Upsilon_f(2:n_x+1, :) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \mathbf{A} \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{n_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1, :) \\ \mathbf{A}^2(1, :) \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{n_x}(1, :) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \mathbf{P}(1,1) & \mathbf{P}(1,2) & \mathbf{P}(1,3) & \cdots & \mathbf{P}(1,n_x) \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

En appliquant le théorème Cayley-Hamilton [HJ90], on peut montrer que

$$\mathbf{A}^{n_x} = -a_{n_x-1} \mathbf{A}^{n_x-1} - a_{n_x-2} \mathbf{A}^{n_x-2} - \cdots - a_0 \mathbf{I}_{n_x} \quad (2.53)$$

où les a_j , $j \in [0, n_x - 1]$, sont les coefficients du polynôme caractéristique de \mathbf{A} . Par conséquent, en utilisant les équations (2.52) et (2.53), nous pouvons écrire

$$\mathbf{c}_1 \mathbf{A}^{n_x} = \mathbf{P}(1, :) = [\mathbf{P}(1,1) \ \mathbf{P}(1,2) \ \cdots \ \mathbf{P}(1,n)] \quad (2.54a)$$

$$= -a_{n_x-1} \mathbf{c} \mathbf{A}^{n_x-1} - a_{n_x-2} \mathbf{c} \mathbf{A}^{n_x-2} - \cdots - a_0 \mathbf{c} \quad (2.54b)$$

$$= -a_{n_x-1} \mathbf{A}^{n_x-1}(1, :) - a_{n_x-2} \mathbf{A}^{n_x-2}(1, :) - \cdots - a_0 \mathbf{c} \quad (2.54c)$$

$$= [-a_0 \ -a_1 \ \cdots \ -a_{n_x-1}]. \quad (2.54d)$$

Finalement, en utilisant le calcul itératif suivant

$$\mathcal{A}^2(1, :) = \mathcal{A}(1, :)\mathcal{A} = \mathcal{A}(2, :) \quad (2.55a)$$

$$\mathcal{A}^3(1, :) = \mathcal{A}(1, :)\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}^2(2, :) = \mathcal{A}(2, :)\mathcal{A} = \mathcal{A}(3, :) \quad (2.55b)$$

$$\vdots \quad (2.55c)$$

$$\mathcal{A}^{n_x-1}(1, :) = \dots = \mathcal{A}(n_x - 1, :), \quad (2.55d)$$

nous obtenons la matrice \mathcal{A} sous une forme compagne horizontale [Kai80]

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n_x-1} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Il est intéressant de noter que, pour un système MISO, seule la première ligne de la matrice \mathbf{P} est nécessaire à la détermination des matrices \mathcal{A} et \mathbf{c} . On peut donc poser $f = n_x + 1$ pour éviter l'estimation inutile des lignes supplémentaires de \mathbf{P} . Remarquons également que, dans le cas MISO, les calculs précédents montrent que la représentation d'état estimée est décrite à l'aide d'une forme canonique observable [Kai80]. Cette forme peut être justifiée *a posteriori* par le fait que la matrice de changement de base employée est $\mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$. Comme ceci est prouvé dans [MB10], la technique du propagateur conduit également à une forme canonique dans le cas MIMO. Cette propriété qui assure que

- la réalisation considérée est parsimonieuse,
- les matrices de la représentation d'état estimée sont composées d'invariants,

est particulièrement intéressante dans un objectif de caractérisation des domaines d'incertitude des paramètres estimés.

2.2.2.5 Extraction des matrices \mathcal{B} et \mathcal{D}

Dans un objectif de simplification de la description des domaines d'incertitude, la technique employée pour extraire les matrices \mathcal{B} et \mathcal{D} est fondée sur une régression linéaire. Plus particulièrement, en notant que la sortie du modèle identifié est donnée par

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \sum_{k=0}^{t-1} \hat{\mathbf{c}} \hat{\mathcal{A}}^{t-k-1} \hat{\mathcal{B}} \mathbf{u}(k) + \mathcal{D} \mathbf{u}(t), \quad (2.57)$$

il est relativement facile de montrer que cette équation peut s'écrire comme suit [Mck95, VV07]

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = [\mathbf{u}^\top(t) \otimes \mathbf{I}_{n_y}] \text{vec}(\mathcal{D}) + \left(\sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^\top(k) \otimes \hat{\mathcal{A}}^{t-k-1} \right) \text{vec}(\hat{\mathcal{B}}) \quad (2.58)$$

en exploitant la propriété du produit de Kronecker \otimes suivante [HJ90]

$$\text{vec}(\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_3) = \mathbf{M}_3^\top \otimes \mathbf{M}_1 \text{vec}(\mathbf{M}_2) \quad (2.59)$$

où $\text{vec}(\bullet)$ est l'opérateur vectorisation [HJ90]. Les matrices \mathbf{B} et \mathbf{D} sont alors estimées en minimisant le critère

$$\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{D}} = \arg \min_{\mathbf{B}, \mathbf{D}} \sum_t [\mathbf{y}(t) - \left[\mathbf{u}^T(t) \otimes \mathbf{I}_{n_y} \quad \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{A}}^{t-k-1} \right] \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{D}}) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{B}}) \end{bmatrix}]. \quad (2.60)$$

L'emploi d'une telle régression linéaire assure que les matrices $\hat{\mathbf{B}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ soient exprimées dans la même base que les matrices estimées $\hat{\mathbf{A}}$ et $\hat{\mathbf{C}}$.

2.2.2.6 Propriétés de la représentation d'état estimée à partir du propagateur

La représentation d'état obtenue à l'aide de la méthode du propagateur présente un certain nombre de caractéristiques structurelles intéressantes pour la caractérisation des incertitudes. Plus précisément

- La paramétrisation obtenue après estimation est caractérisée de manière unique par les n_y valeurs composant le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ généré par l'utilisateur.
- La procédure d'identification développée conduit à une structure de modèle contenant $n_x(n_u + n_y) + n_u n_y$ paramètres. $n_x(n_u + n_y) + n_u n_y$ est la dimension de la classe de fonctions de transfert rationnelles causales d'un système MIMO de degré de McMillan n_x [MH97]. Cette paramétrisation a donc le nombre minimal de paramètres assurant l'identifiabilité de la structure lorsque le système est commandable et observable.
- Une fois le vecteur $\boldsymbol{\kappa}$ généré, la structure identifiée est une forme canonique pour la classe des systèmes linéaire à temps invariant MIMO observable, commandable et à matrice \mathbf{A} non dérogatoire.

Ces différentes propriétés sont démontrées dans [MB10]. Elles seront d'une très grande utilité lors de la caractérisation des incertitudes.

2.2.2.7 Adaptation de la méthode du propagateur en présence de perturbations

En présence de bruit d'état et de sortie, l'équation des données E/S pour un système MIMO est donnée par

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X} + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_f + \mathbf{N}_f. \quad (2.61)$$

En suivant les différentes étapes décrites dans la section 2.2.2.2, il est facile de montrer que³

$$\mathbf{S} \bar{\mathbf{Y}}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp + \mathbf{S} \bar{\mathbf{N}}_f \mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp. \quad (2.62)$$

³La matrice $\bar{\mathbf{N}}_f$ est définie de manière similaire à $\bar{\mathbf{Y}}_f$.

En considérant le partitionnement suivant

$$\mathbf{S}\bar{\mathbf{Y}}_f\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathbf{X}\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp + \begin{bmatrix} \mathcal{N}_1 \\ \mathcal{N}_2 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

où \mathcal{N}_1 représente les n_x premières lignes de $\mathbf{S}\bar{\mathbf{N}}_f\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp$ et \mathcal{N}_2 son complément, on montre que

$$\mathbf{Z}_2 = \mathbf{P}\mathbf{Z}_1 + \mathcal{N}_2 - \mathbf{P}\mathcal{N}_1. \quad (2.64)$$

Quelle que soient les propriétés de blancheur initiales des bruits \mathbf{v} et \mathbf{w} , cette équation montre que le bruit résultant $\mathcal{N}_2 - \mathbf{P}\mathcal{N}_1$ est nécessairement coloré. Par conséquent, une estimation immédiate du propagateur par régression linéaire à partir de l'équation (2.62) est biaisée. Pour atténuer cet effet du bruit, une technique de type variable instrumentale [Cai76] est introduite. Elle consiste plus précisément à construire une matrice d'instruments (que nous noterons $\mathbf{\Xi}$) décorrélée des perturbations agissant sur le procédé sans altérer l'information utile liée à la dynamique du système. Cette idée est déjà employée dans un grand nombre d'algorithmes des sous-espaces (par exemple, CVA [Lar90], N4SID [VD94], PI MOESP [Ver93], PO MOESP [Ver94], PO EIV MOESP [CV97], ...). En s'inspirant de ces méthodes, nous étendons la méthode du propagateur dans le cas stochastique afin d'avoir une estimation consistante des matrices d'état du système dans un contexte bruité. Plus particulièrement, en multipliant la relation (2.62) à droite par la matrice d'instruments $\mathbf{\Xi}$ et en la divisant par N , on obtient

$$\frac{1}{N}\mathbf{S}\bar{\mathbf{Y}}_f\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp\mathbf{\Xi} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathbf{X}\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp\mathbf{\Xi} + \frac{1}{N}\mathbf{S}\bar{\mathbf{N}}_f\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp\mathbf{\Xi}. \quad (2.65)$$

Il apparaît que, pour obtenir une estimée consistante de \mathbf{P} , la matrice d'instruments $\mathbf{\Xi}$ doit être conçue de façon à réaliser les deux conditions suivantes

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \bar{\mathbf{N}}_f \mathbf{\Xi} \right) = 0 \quad (2.66a)$$

$$\text{rang} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{X} \mathbf{\Xi} \right) = n_x. \quad (2.66b)$$

Lorsque $\mathbf{\Xi}$ satisfait aux conditions (2.66), il est facile de vérifier la relation asymptotique suivante

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{S}\bar{\mathbf{Y}}_f\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp\mathbf{\Xi} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \Gamma_{n_x}(\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathbf{X}\mathbf{\Pi}_{\mathbf{U}_f}^\perp\mathbf{\Xi}. \quad (2.67)$$

Ainsi, une estimation consistante de la matrice \mathbf{P} peut être obtenue en minimisant le critère quadratique suivant

$$\|\mathbf{Z}_2\mathbf{\Xi} - \mathbf{P}\mathbf{Z}_1\mathbf{\Xi}\|_F^2. \quad (2.68)$$

Plusieurs solutions sont proposées dans la littérature [Lar90, VD94, VD92a, Ver93, Ver94, CV97] pour construire une variable instrumentale vérifiant les conditions (2.66). La solution naturelle serait d'utiliser le signal d'entrée comme instrument puisque ce dernier est

décorrélé du bruit de sortie (en boucle ouverte) et suffisamment lié à l'état. Malheureusement, en identification des sous-espaces, la variable instrumentale doit également être orthogonale à la matrice de Hankel des entrées afin d'isoler le terme $\mathbf{H}_f \mathbf{U}_f$. Cette condition est donc incompatible avec le choix de variable instrumentale énoncé précédemment. L'artifice, proposé par plusieurs auteurs [Ver93, VD94, OV94, CK95], consiste à scinder les données accessibles à la mesure en deux blocs afin de créer des matrices de Hankel passées et futures. Par exemple, selon [CV97], on peut choisir $\Xi = \mathbf{U}_p$ tel que

$$\mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t-p) & \cdots & \mathbf{u}(t+M-1-p) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}(t-1) & \cdots & \mathbf{u}(t+M-2) \end{bmatrix} \quad (2.69)$$

où p est un indice passé. Afin d'améliorer la variance de l'estimation, il a été montré dans [CV97] que la concaténation des entrées et sorties passées, $\Xi = [\mathbf{U}_p^\top \quad \mathbf{Y}_p^\top]^\top$, constitue un choix valide d'instruments⁴.

Remarque 2. La projection orthogonale associée au variable instrumentale $\Pi_{\mathbf{U}_f}^\perp \Xi$, peut être calculée d'une manière efficace en utilisant la factorisation RQ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \Xi \\ \mathbf{Y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

2.2.3 Méthode “Predictor-based Subspace Identification” et propagateur

Au sein de la section 2.2.2, la méthode du propagateur a été présentée pour l'identification de systèmes MISO et MIMO fonctionnant en boucle ouverte. Comme la plupart des techniques des sous-espaces développées dans un contexte boucle ouverte (CVA, N4SID et MOESP par exemple), cette méthode donne des résultats biaisés lorsque les données utilisées sont acquises en boucle fermée. Ce biais est lié au fait que le bouclage conduit à rendre le signal de commande \mathbf{u} et les bruits de sorties \mathbf{v} corrélés. L'hypothèse d'orthogonalité des matrices \mathbf{N}_p et \mathbf{U}_p n'est alors plus vérifiée. Pour remédier à ce problème, plusieurs auteurs ont proposés des solutions qui peuvent être regroupées en deux familles :

- des méthodes dites “de décorrélation” qui cherchent à modifier les factorisations RQ classiques dans l'objectif d'extraire ou de reconstruire des signaux d'excitation décorrélés des perturbations [CV99, GV05],
- des méthodes dites “de prédiction” qui utilisent une étape intermédiaire de génération d'un modèle (V)ARX pour s'affranchir du problème de corrélation [LM96, Jan05, Chi07b].

Initiées en 1996 par les travaux de L. Ljung et T. McKelvey [LM96], les méthodes dites de prédiction ont connu un nouvel essor ces dernières années grâce à

- M. Jansson en 2003 et 2005 et son algorithme SSARX [Jan03, Jan05],

⁴ \mathbf{Y}_p est obtenue de la même manière que \mathbf{U}_p .

- A. Chiuso et G. Picci dès 2004 et la technique Predictor-based Subspace Identification (PBSID) [CP05, Chi05, Chi07b].

Comme démontré par A. Chiuso en 2010 [Chi10], ces techniques peuvent être aisément comparées aux algorithmes CCA [Chi07a] et présentent des propriétés asymptotiques équivalentes à ces derniers. Des études poussées des propriétés statistiques de méthode PBSID sont proposées au sein des références [CP05, Chi07b]. Il est intéressant de noter que ces techniques présentent l'avantage d'être utilisables à la fois en boucle ouverte et en boucle fermée. Cette propriété, associée à un lien fort avec les méthodes d'erreur de prédiction et de maximum de vraisemblance classiques [CP05, Chi06, Chi07b], explique très probablement leur succès.

Bien que très intéressante d'un point de vue pratique et théorique, les techniques telles que PBSID connaissent des difficultés à figer la base dans laquelle les matrices sont estimées. Comme explicité par A. Chiuso dans l'introduction de son article [Chi10], les comparaisons proposées au sein de cette référence ainsi que les différentes expressions de variance asymptotique étudiées ne peuvent être analysées qu'en considérant des invariants du système (pôles, fonctions de transfert) ou en fixant la base de la représentation d'état *a posteriori*. Dans la suite de ce paragraphe, ce problème d'invariance est traité en adaptant la méthode PBSID à l'aide du propagateur. Cette méthode est appelée la méthode des sous-espaces basée sur les moindres carrés SBMC.

Contrairement à l'approche présentée précédemment (cf. 2.2.2), le modèle considéré est désormais sous une forme d'innovation

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \quad (2.71a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (2.71b)$$

où $\mathbf{e}(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et \mathbf{K} le gain de Kalman [HK66]. Comme précisé précédemment, l'algorithme développé ci-après peut être utilisé en boucle ouverte et en boucle fermée. Dans ce dernier cas, il est nécessaire de supposer que la boucle contienne un retard. Si le correcteur n'en présente pas, il est nécessaire de supposer que $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Cette hypothèse, pas vraiment restrictive d'un point de vue pratique, sera faite dans la suite de ce paragraphe. Il est de plus supposé que le système à identifier est commandable et observable.

Partant de l'équation (2.71), la première phase de l'algorithme PBSID (et SSARX) consiste à transformer la forme d'innovation en forme de prédiction (compacte)

$$\mathbf{x}(t+1) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{z}(t) \quad (2.72a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (2.72b)$$

où $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \ \mathbf{K}]$ et $\mathbf{z}^\top(t) = [\mathbf{u}^\top(t) \ \mathbf{y}^\top(t)]^\top$. De cette équation de récurrence, on obtient facilement, par substitutions successives sur un horizon p [Knu01, Chi07b, PSD96]

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{A}}^p \mathbf{x}(t-p) + \mathbb{K} \mathbf{z}_p(t)$$

où

$$\mathbb{K} = [\tilde{\mathbf{A}}^{p-1} \tilde{\mathbf{B}} \ \dots \ \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{B}} \ \mathbf{B}] \quad (2.73)$$

$$\mathbf{z}_p(t) = [\mathbf{z}^\top(t-p) \ \dots \ \mathbf{z}^\top(t-1)]^\top, \quad (2.74)$$

et p est un indice dit passé. En supposant que le modèle (2.72) soit celui d'un système stable, il existe un indice j tel que $\mathbf{A}^j \approx 0$. L'hypothèse clé de la méthode PBSID est la suivante

Hypothèse 2.2.1. $\tilde{\mathbf{A}}^j \approx 0$ pour tout $j \geq p$.

Notons que, lorsque le système (2.72) est uniformément exponentiellement stable, il est possible d'assurer que l'erreur d'approximation liée à l'hypothèse 2.2.1 soit négligeable [Knu01, CP05, Chi07b].

En utilisant cette hypothèse, le vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$ peut être approximé par [HWV09]

$$\mathbf{x}(t) \approx \mathbb{K}\mathbf{z}_p(t) \quad (2.75)$$

où \mathbb{K} est une matrice à coefficients inconnus (cf. équation (2.73)). N'ayant pas accès à cette matrice, son estimation, plus particulièrement le produit $\mathbb{K}\mathbf{z}_p(t)$ est réalisée en quatre étapes.

Étape 1 : Estimation de la matrice $\mathbf{C}\mathbb{K}$

Connaissant l'équation de sortie du système (2.71), il est facile de montrer que la sortie du système peut être réécrite comme suit

$$\mathbf{y}(t) \approx \mathbf{C}\mathbb{K}\mathbf{z}_p(t) + \mathbf{e}(t).$$

Par conséquent, puisque $\mathbf{e}(t)$ est un bruit blanc gaussien pour la forme d'innovation considérée, une estimation consistante de la matrice $\mathbf{C}\mathbb{K}$ peut être obtenue en résolvant

$$\min_{\mathbf{C}\mathbb{K}} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbb{K}\mathbf{z}_p(t)\|_F^2.$$

Notons que, pour une petite valeur de p , la solution de ce problème sera biaisée à cause de l'approximation faite à l'équation (2.75). Il est donc nécessaire de choisir une valeur de l'indice p relativement conséquente.

Étape 2 : Construction de la matrice $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_p\mathbb{K}$

En utilisant l'approximation donnée dans l'équation (2.75), par récurrence, on peut écrire l'équation de données suivantes

$$\mathbf{y}_p(t+p) \approx \tilde{\mathbf{\Gamma}}_p\mathbb{K}\mathbf{z}_p(t) + \tilde{\mathbf{H}}_p\mathbf{z}_p(t+p) + \mathbf{e}_p(t+p)$$

où

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}_p = [(\mathbf{C})^\top \quad (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}})^\top \quad \dots \quad (\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1})^\top]^\top$$

$$\tilde{\mathbf{H}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-2}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-3}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

les vecteurs \mathbf{y}_p , \mathbf{z}_p et \mathbf{e}_p étant définis comme dans l'équation (2.74). Le produit $\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}$ est donné par [Win08]

$$\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-2}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^p\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}} & \ddots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{2p-2}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}.$$

En utilisant l'hypothèse 2.2.1, cette expression peut être approchée comme suit

$$\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-2}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}} & \ddots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

L'intérêt principal de cette réécriture réside dans le fait que le premier bloc ligne de cette matrice peut être utilisé pour construire les autres blocs lignes, c'est-à-dire,

$$\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K} \approx \begin{bmatrix} & \mathbf{C}\mathbb{K} & \\ \text{zeros}(n_u + n_y, n_u + n_y) & \mathbf{C}\mathbb{K}(:, 1 : (n_u + n_y)(p-1)) & \\ \vdots & \vdots & \\ \text{zeros}(n_u + n_y, (n_u + n_y)(p-1)) & \mathbf{C}\mathbb{K}(:, 1 : (n_u + n_y)) & \end{bmatrix}. \quad (2.77)$$

Ainsi, connaissant $\mathbf{C}\mathbb{K}$, la matrice $\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}$ peut être construite.

Étape 3 : Construction de la matrice $\Gamma_p \mathbb{K}$

Il est important de remarquer que cette matrice $\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}$ ne fait pas directement appel aux matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} recherchées mais aux matrices $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ et \mathbf{C} . Il est donc nécessaire de transformer la matrice $\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}$ en matrice $\Gamma_p \mathbb{K}$. Pour cela, la transformation suivante est utilisée [HWV09]

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_p \mathbb{K}_0 \\ \Gamma_p \mathbb{K}_1 \\ \vdots \\ \Gamma_p \mathbb{K}_{p-1} \end{bmatrix}}_{\Gamma_p \mathbb{K}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_y} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbb{K} & \mathbf{I}_{n_y} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-2}\mathbb{K} & \mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{p-1}\mathbb{K} & \dots & \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}_0 \\ \tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}_{p-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}}.$$

Plus particulièrement, en utilisant l'approche développée dans [DVH08], il est possible de montrer que

$$\Gamma_p \mathbb{K}_i = \tilde{\Gamma}_p \mathbb{K}_i + \sum_{j=0}^{i-1} [\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{i-j-1}\mathbb{K} \quad \Gamma_p \mathbb{K}_j]$$

où $\mathbf{C}\tilde{\mathbf{A}}^{i-j-1}\mathbb{K} = \mathbf{C}\mathbb{K}(:, (p-i+j)(n_u + n_y) + n_u + (1 : n_y))$, $i = 0 \dots p-1$. La matrice recherchée $\Gamma_p \mathbb{K}$ est donc générée exclusivement à partir de $\mathbf{C}\mathbb{K}$.

Étape 4 : Estimation du vecteur d'état

C'est plus particulièrement dans cette dernière étape que le propagateur va être employé. Une nouvelle fois, grâce à cet outil, la base de l'espace d'état va être fixée par l'utilisateur et, par extension, la structure des matrices estimées.

Ayant accès à une estimation fiable du produit $\Gamma_p \mathbb{K}$, il est possible de construire le vecteur γ défini comme suit

$$\gamma(t) = \Gamma_p \mathbb{K} \mathbf{z}_p(t). \quad (2.78)$$

Comme dans le paragraphe 2.2.2.2, nous introduisons la matrice \mathbf{K} (cf. équation (2.36)) afin d'assurer que le système soit observable à partir d'une seule sortie tel que

$$\bar{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{K} \mathbf{y}(t). \quad (2.79)$$

En supposant que le système (2.71) soit observable, nous savons que la matrice $\Gamma_p (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$ est de rang plein colonne et possède, au minimum, n_x lignes linéairement indépendantes. Comme dans le paragraphe 2.2.2.2, une matrice de permutation $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n_{yp} \times n_{yp}}$ (cf. équation (2.40)) peut être introduite afin d'ordonner les lignes de Γ_p et d'assurer que les n_x premières lignes linéairement indépendantes. En notant $\Gamma_{n_x} (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$ la matrice constituée de ces n_x lignes soient linéairement indépendantes, en suivant la procédure présentée dans la section 2.2.2.2, on montre que

$$\mathbf{S} \mathbf{K} \gamma(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} \Gamma_{n_x} (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathbb{K} \mathbf{z}_p(t). \quad (2.80)$$

Cette dernière équation nous donne alors directement accès à une estimation du vecteur d'état dans la base fixée par la matrice de changement de base $\Gamma_{n_x} (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \Gamma_{n_x} (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathbb{K} \mathbf{z}_p(t). \quad (2.81)$$

Connaissant \mathbf{y} , \mathbf{u} et $\hat{\mathbf{x}}$, les matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ peuvent être estimées en résolvant le problème des moindres carrés suivant

$$\min_{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \left\| \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t+1) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \right\|_F^2.$$

Notons que l'emploi d'une estimée $\hat{\mathbf{x}}$ obtenue par l'approche décrite précédemment assure, comme dans la section 2.2.2, que les matrices d'état du modèle soient représentées dans une forme canonique. Comme dans le cas précédent, cette propriété facilite la détermination des domaines d'incertitude.

2.3 Identification d'un modèle d'état à temps continu

Dans de nombreuses applications (modélisation, diagnostic, commande), il est souhaitable d'estimer un modèle à temps continu afin d'avoir accès aux paramètres physiques du système. Ce choix peut être justifié par le fait que la plupart des phénomènes physiques

sont observés dans un contexte continu. Au cours de ces dernières années, le problème d'identification à temps continu a fait l'objet d'une attention particulière [MDV91, GW08]. Ainsi, dans la littérature plusieurs techniques ont été développées. Ces approches sont généralement classées en deux catégories : approche indirecte et approche directe. L'approche indirecte consiste à déterminer un modèle à temps discret à l'aide des techniques conventionnelles telles que la méthode à erreur de prédiction [Lju99c], puis de convertir ce dernier en un modèle à temps continu. Cette méthode souffre d'un certain nombre de limitations :

- le choix délicat de la période d'échantillonnage,
- le calcul du logarithme d'une matrice qui peut déboucher sur des résultats complexes et donner lieu à des erreurs importantes.

Ces limites peuvent être palliées en utilisant l'approche directe. Cette technique consiste à identifier le modèle à temps continu directement à partir des données échantillonnées [GW08]. Le problème majeur de ces méthodes est le calcul des dérivées successives des signaux E/S. Les solutions proposées à cette problématique reposent sur l'utilisation des filtres linéaires, des méthodes intégrales ou des fonctions modulantes [GMR03].

Les méthodes d'estimation directe de modèles à temps continu ont essentiellement été développées dans le cas monovarié. Le contexte multivarié reste relativement peu étudié [HCVJ96, JVC99, BGS01, Hav01, OKY02, LRS03, MOGG07]. Les premières études [HCVJ96, JVC99] proposent d'introduire des opérateurs de conversion discret / continu particuliers pour analyser et récrire le problème d'identification à temps continu à l'aide d'une approche algébrique. Une étude approfondie de cette conversion est proposée dans [Hav01, BGS01]. Ces travaux combinent un préfiltrage de type moment de poisson à l'algorithme des sous-espaces décrit dans [MDV91] pour compenser les bruits colorés. [OKY02] traitent le problème d'identification en présence de bruit d'état et de mesure en décrivant les dérivées de bruits blancs gaussiens via le concept de distribution aléatoire de Itô Schwartz. [LRS03] proposent finalement d'utiliser l'approche des sous-espaces associée à un filtrage intégral pour estimer un modèle résidu sans estimer préalablement un modèle d'état du système.

Dans ce manuscrit, nous adaptons les techniques de filtrage au méthode du propagateur afin d'estimer les matrices d'état d'un système à temps continu.

2.3.1 Problématique

Considérons un système linéaire invariant à temps continu représenté par la forme d'état suivante

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.82a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (2.82b)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'entrée, sortie du système. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$ est bruit de sortie. Ce bruit est supposé décorrélé

du signal d'entrée, de moyenne nulle, de variance finie, constant entre deux échantillons [HJ90, JVC99], c.-à-d.,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(kT_s)$$

pour $kT_s \leq t < (k+1)T_s$ où T_s est la période d'échantillonnage. Plus précisément, $\mathbf{v}(kT_s)$ est un bruit blanc à temps discret de moyenne nulle qui satisfait

$$\mathbb{E} [\mathbf{v}(kT_s)\mathbf{v}^\top(lT_s)] = \mathbf{R}_v\delta(k, l)$$

où $\delta(k, l)$ est la fonction Dirac discrète et $\mathbb{E}[\bullet]$ désigne l'espérance mathématique [Lju99c]. Le problème d'identification considéré ci-après consiste à estimer les matrices $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ à un changement de base près, à partir d'un nombre fini de données E/S échantillonnées $\{\mathbf{u}(t_k), \mathbf{y}(t_k)\}_{k=1}^N$ où $t_k = kT_s$.

Afin d'introduire la problématique liée à l'identification de modèles à temps continu, nous supposons que les signaux E/S soient dérivables jusqu'à un ordre $f > n_x$. On peut alors montrer que

$$\mathbf{y}(t_k) = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{H}_f \mathbf{u}_f(t_k) + \mathbf{v}_f(t_k) \quad (2.83)$$

où $\mathbf{y}(t_k)$ (respectivement $\mathbf{u}_f(t_k)$ et $\mathbf{v}_f(t_k)$) est le vecteur contenant les dérivées successives des sorties (respectivement des entrées et de bruit) à l'instant $t = t_k$ défini par

$$\mathbf{y}_f(t_k) = \left[\mathbf{y}^\top(t_k) \quad \dot{\mathbf{y}}^\top(t_k) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^{(i-1)\top}(t_k) \right]^\top$$

$\mathbf{u}_f(t_k)$ et $\mathbf{v}_f(t_k)$ sont donnés de la même manière que $\mathbf{y}_f(t_k)$, $\mathbf{\Gamma}_f$ la matrice d'observabilité étendue d'ordre f du système (cf. équation (2.9)) et \mathbf{H}_f une matrice bloc Toeplitz composée des paramètres de Markov du système (cf. équation (2.10)). Pour N échantillons, l'équation (2.83) peut s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbf{Y}_{cf} = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X}_c + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_{cf} + \mathbf{V}_{cf} \quad (2.84)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{cf} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_f(t_1) & \mathbf{y}_f(t_2) & \cdots & \mathbf{y}_f(t_N) \end{bmatrix} \\ \mathbf{U}_{cf} &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_f(t_1) & \mathbf{u}_f(t_2) & \cdots & \mathbf{u}_f(t_N) \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}_{cf} &= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_f(t_1) & \mathbf{v}_f(t_2) & \cdots & \mathbf{v}_f(t_N) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{X}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_1) & \mathbf{x}(t_2) & \cdots & \mathbf{x}(t_N) \end{bmatrix}.$$

L'équation (2.84) présente la particularité d'être équivalente à l'équation discrète de données (cf. équation (2.23)). En supposant que les données d'entrées et de sorties soient différentiables à un ordre suffisant, il semble alors possible d'adapter cette méthode pour estimer efficacement les matrices d'état du système dans un contexte continu. Le principal problème lors de l'identification d'un système à temps continu est le calcul des dérivées

successives des signaux E/S. Ainsi, en pratique, l'acquisition de ces dérivées successives est très rarement réalisable, en particulier en présence de perturbations. Il est donc nécessaire de faire appel à des techniques contournant ce problème d'évaluation des dérivées et utilisant seulement l'information contenue dans les données E/S échantillonnées. Plusieurs algorithmes ont été développés aux cours des trois dernières décennies [GMR03]. Une étude à l'aide de simulations de Monte Carlo a permis de faire ressortir six méthodes présentant des performances nettement supérieures aux autres [GMR03]

- Méthodes de filtrage [MDV91, UR87]
 - Filtres à Variables d'Etat FVE
 - Moment de Poisson Généralisé MPG.
- Méthodes intégrales [SZ90, Tri87]
 - Filtre Linéaire Intégral FLI
 - Moments Partiels Réinitialisés MPR.
- Méthodes de fonctions modulante [PSK94, UR98]
 - Fonctions Modulantes de Fourier FMF
 - Fonctions Modulantes de Hartley FMH.

Au sein de ce manuscrit, le problème d'identification de modèles d'état à temps continu de systèmes multivariables est considéré en associant les filtres de variable d'état [You81] et les moments partiels réinitialisés [Tri87, Toh08] à la méthode du propagateur. Ces deux techniques de filtrage présentent l'intérêt d'appartenir à une même classe de méthodes (méthode de filtrage) et de fournir une solution au problème de calcul des dérivées des signaux E/S relativement simple.

2.3.2 Approximation des dérivées des données E/S

La mesure des signaux E/S ainsi que leurs dérivées est une condition nécessaire à l'obtention de l'équation (2.84). Pour remédier à ce problème, nous proposons deux techniques qui permettent d'approximer les dérivées des données E/S, à savoir : la méthode des moments partiels réinitialisés et celle des filtres à variables d'état.

2.3.2.1 Filtres des moments partiels réinitialisés (MPR)

Les moments partiels réinitialisés reposent sur le calcul d'intégrales des signaux E/S pondérés sur un intervalle d'intégration $[0, T]$ choisi. Cette approche présente l'avantage de posséder une valeur optimale d'horizon d'observation \hat{T} pour laquelle la variance de l'erreur d'estimation est minimale [Tri87, MOGG07, Toh08]. Afin de profiter de cette propriété quel que soit t , le calcul de l'intégrale est réinitialisé à chaque instant t en considérant un intervalle d'intégration $[0, \hat{T}]$ mobile.

Le MPR d'ordre n est plus précisément défini comme suit

$$A_n(s(t)) = \int_0^{\hat{T}} \frac{\theta^n}{n!} s(t - \hat{T} + \theta) d\theta. \quad (2.85)$$

Appliquer les MPR à une équation différentielle revient à filtrer les signaux E/S par un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF). Afin de mettre en évidence cette propriété

relativement simplement, considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$\dot{y} = -a_0 y(t) + b_0 u(t). \quad (2.86)$$

Le MPR d'ordre 1 de cette équation différentielle s'écrit

$$\int_0^{\hat{T}} \theta \dot{y}(t - \hat{T} + \theta) d\theta = -a_0 \int_0^{\hat{T}} \theta y(t - \hat{T} + \theta) d\theta + b_0 \int_0^{\hat{T}} \theta u(t - \hat{T} + \theta) d\theta. \quad (2.87)$$

En utilisant l'intégration par partie du membre de gauche de l'équation (2.87), on montre que

$$\hat{T} y(t) - \int_0^{\hat{T}} y(t - \hat{T} + \theta) d\theta = -a_0 \int_0^{\hat{T}} \theta y(t - \hat{T} + \theta) d\theta + b_0 \int_0^{\hat{T}} \theta u(t - \hat{T} + \theta) d\theta. \quad (2.88)$$

Après un changement de variable $\tau = \hat{T} - \theta$, une formulation sous forme de produit de convolution apparaît

$$y(t) = -a_0 \int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \tau}{\hat{T}} y(t - \tau) d\tau + b_0 \int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \tau}{\hat{T}} u(t - \tau) d\tau + \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\hat{T}} y(t - \tau) d\tau \quad (2.89)$$

où intervient le filtre RIF $h_1(t) = \frac{\hat{T} - t}{\hat{T}}$, appelé filtre MPR d'ordre 1. La généralisation à l'ordre n du calcul précédent [Tri87] conduit au produit de convolution suivant

$$\mathcal{M}_n \{s(t)\} = \int_0^{\hat{T}} \frac{(\hat{T} - \tau)^n t^{n-1}}{\hat{T}^n (n-1)!} s(t - \tau) d\tau = [h_n \star s](t) \quad (2.90)$$

où $h_n(\tau)$ est défini par

$$h_n(t) = \frac{(\hat{T} - t)^n t^{n-1}}{\hat{T}^n (n-1)!} \text{ pour } t \in [0, \hat{T}] \quad (2.91a)$$

$$h_n(t) = 0 \text{ sinon.} \quad (2.91b)$$

L'utilisation des moments permet, par intégration, de faire disparaître les dérivées successives de l'entrée et de la sortie. Mais l'utilisation de ces moments particuliers revient également à filtrer l'entrée et la sortie par un filtre RIF. Les MPR appartiennent donc à deux classes de méthodes de transformation : les méthodes intégrales et les méthodes de filtrage. Cette approche présente également la propriété de voir l'effet transitoire du filtre disparaître après \hat{T} échantillons du fait de l'utilisation d'un filtre RIF. Cette technique n'est donc pas sensible aux conditions initiales.

2.3.2.2 Filtres à variables d'état (FVE)

La méthode des filtres à variables d'état consiste à appliquer un filtre linéaire particulier aux dérivées des signaux E/S pour les transformer en un équivalent algébrique [You81]. L'évaluation des dérivées est ainsi évitée. Le filtre considéré ici est constitué d'une cascade de filtres du premier ordre

$$F(p) = \frac{\lambda}{p + \lambda}.$$

La structure chaînée particulière des FVE permet d'obtenir les signaux filtrés à l'ordre désiré en sortie des filtres concaténés. En tant que filtre, l'application des FVE peut aisément se récrire sous la forme d'un produit de convolution

$$\mathcal{M}_n \{s(t)\} = \int_0^t g_n(\tau) s(t - \tau) d\tau = [g_n \star s](t) \quad (2.92)$$

où

$$g_n(t) = \lambda^{n+1} \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (2.93)$$

Contrairement aux moments partiels réinitialisés, l'emploi du filtre à variables d'état nécessite une gestion précise des conditions initiales puisque celui-ci présente une réponse impulsionnelle infinie. Il est cependant important de noter que les coefficients de cette réponse impulsionnelle décroissent exponentiellement [GMR03]. En pratique, afin d'éliminer l'influence des conditions initiales, les premiers points obtenus après filtrage des données E/S sont éliminés.

2.3.3 Adaptation de la méthode du propagateur dans le cas d'un système continu

Initialement développées dans un contexte discret [VV07, MD91, MBL08], les méthodes des sous-espaces ont été étendues dans le cas des systèmes continus [GW08]. Ces techniques ont permis une estimation directe des matrices d'état d'un système continu à partir des données E/S [GW08, LGGY08, MOGG07]. La plupart de ces algorithmes reposent sur ces deux étapes

- récrire l'équation des données E/S (2.16) dans un contexte continu en introduisant des filtres linéaires, des méthodes intégrales ou des fonctions modulantes [GMR03] dans le but de calculer les dérivées successives des signaux E/S.
- adapter les outils mathématiques utilisés dans le cas des systèmes discrets (DVS, la factorisation RQ) à l'équation des données E/S modifiée en vue d'extraire d'une manière efficace les matrices d'état estimées.

Ces techniques d'identification ont connu une attention particulière puisqu'elles permettent une estimation des matrices d'état directement à partir des données E/S sans utiliser les méthodes d'optimisation non linéaire. Néanmoins, la plupart de ces méthodes des sous-espaces estiment les matrices d'état dans une base arbitraire de réalisation. Afin de surmonter cette difficulté, nous étendons dans cette section la méthode du propagateur, présenté dans la section 2.2, au cas du système continu. Cette méthode présente l'avantage remarquable d'affranchir les matrices d'état identifiées de l'aléa de la base d'état.

En supposant que le signal d'entrée soit suffisamment excitant [JW98], que les conditions initiales soient nulles et que $f > n_x$, il devient théoriquement possible d'adapter

les algorithmes discrets des sous-espaces au problème d'identification à temps continu. Le choix s'est plus précisément porté sur la méthode du propagateur [MBL08].

Comme dans le cas des systèmes à temps discret, le point de départ de cette méthode est la relation suivante [BGS01, MOGG07]

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_{cf}\} = \mathbf{\Gamma}_f \mathcal{M}\{\mathbf{X}_c\} + \mathbf{H}_f \mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\} + \mathcal{M}\{\mathbf{V}_{cf}\} \quad (2.94)$$

où ⁵

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_{cf}\} = \begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{y}(t_k)\} & \cdots & M_0^n \{\mathbf{y}(t_N)\} \\ M_1^n \{\mathbf{y}(t_k)\} & \cdots & M_1^n \{\mathbf{y}(t_N)\} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{f-1}^n \{\mathbf{y}(t_k)\} & \cdots & M_{f-1}^n \{\mathbf{y}(t_N)\} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

et

$$\mathcal{M}\{\mathbf{X}_c\} = [M_0^n \{\mathbf{x}(t_k)\} \quad \cdots \quad M_0^n \{\mathbf{x}(t_N)\}] \quad (2.96)$$

où $\mathcal{M}[\bullet]$ symbolise la transformation appliquée aux données échantillonnées pour évaluer les dérivées des données E/S, c.-à-d.,

$$\begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{z}(t)\} \\ M_1^n \{\mathbf{z}(t)\} \\ \vdots \\ M_{f-1}^n \{\mathbf{z}(t)\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{z} \star m_n](t) \\ [\mathbf{z} \star m_n^{(1)}](t) \\ \vdots \\ [\mathbf{z} \star m_n^{(f-1)}](t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{z} \star m_n](t) \\ [\mathbf{z}^{(1)} \star m_n](t) \\ \vdots \\ [\mathbf{z}^{(f-1)} \star m_n](t) \end{bmatrix} = [\mathbf{z}_f \star m_n](t) \quad (2.97)$$

pour tout vecteur $\mathbf{z}_f(t) \in \mathbb{R}^{n_z f}$ défini comme suit⁶

$$\mathbf{z}_f(t) = [\mathbf{z}^\top(t) \quad \mathbf{z}^{(1)\top}(t) \quad \cdots \quad \mathbf{z}^{(f-1)\top}(t)]^\top \quad (2.98)$$

où $m_n(t)$ est la réponse impulsionnelle du filtre et \star est le produit de convolution, c.-à-d.,

$$[\mathbf{z} \star m_n](t) = \int_0^t m_n(\tau) \mathbf{z}(t - \tau) d\tau. \quad (2.99)$$

Remarque 3.

$$m_n(t) = h_n(t) \text{ pour les MPR} \quad (2.100)$$

$$m_n(t) = g_n(t) \text{ pour les FVE.} \quad (2.101)$$

L'équation (2.94) est équivalente à l'équation des données E/S dans le cas d'un système à temps discret (cf. équation (2.23)). Ainsi, afin de supprimer le régime forcé, une projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}$ est appliquée à l'équation (2.94)

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_{cf}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp = \mathbf{\Gamma}_f \mathcal{M}\{\mathbf{X}_c\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp + \mathcal{M}\{\mathbf{V}_{cf}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp \quad (2.102)$$

⁵ $\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}$ est définie de la même manière.

⁶ $\mathbf{z}_f(t) \in \mathbb{R}^{n_z f}$ représente le $f^{\text{ème}}$ dérivée de $\mathbf{z}(t)$.

où

$$\mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp = \mathbf{I} - \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\} (\mathcal{M} \{\mathbf{U}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\})^{-1} \mathcal{M} \{\mathbf{U}_{cf}\}. \quad (2.103)$$

Afin d'avoir une estimation consistante des matrices d'état, nous introduisons la méthode de variable instrumentale. Cette technique permet d'annuler l'effet des perturbations en conservant les informations utiles liées à la dynamique du système.

En notant $\mathbf{\Xi}$ la matrice d'instruments, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{Y}_{cf}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp \mathbf{\Xi} = \Gamma_f \frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{X}_c\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp \mathbf{\Xi} + \frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp \mathbf{\Xi}. \quad (2.104)$$

Cette matrice d'instruments doit être choisie telle que

$$\text{rang} \left\{ \mathcal{M} \{\mathbf{X}_c\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp \mathbf{\Xi} \right\} = n_x \quad (2.105)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_{cf}\}}^\perp \mathbf{\Xi} = 0. \quad (2.106)$$

En utilisant la définition de la projection orthogonale (2.103), la condition (2.106) peut être réécrite comme suit

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathbf{\Xi} - \\ & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\} (\mathcal{M} \{\mathbf{U}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\})^{-1} \mathcal{M} \{\mathbf{U}_{cf}\} \mathbf{\Xi} = 0. \end{aligned} \quad (2.107)$$

En choisissant une variable instrumentale décorrélée des perturbations, le premier terme composant la partie droite de l'équation précédente est asymptotiquement nul.

Etudions maintenant le deuxième terme de l'équation (2.107) c.-à-d.,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\} (\mathcal{M} \{\mathbf{U}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\})^{-1} \mathcal{M} \{\mathbf{U}_{cf}\} \mathbf{\Xi} \quad (2.108)$$

et plus précisément $\frac{1}{N} \mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\}$. Ce dernier est composé de blocs dont la forme générique s'écrit

$$\frac{1}{N} (\mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\})_{qr} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N M_q^n \{\mathbf{v}(t_j)\} M_r^{n\top} \{\mathbf{u}(t_j)\} \quad (2.109)$$

pour $q, r \in [1, f]$. Par définition des opérateurs $M_q^n \{\bullet\}$ et $M_r^n \{\bullet\}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \frac{1}{N} (\mathcal{M} \{\mathbf{V}_{cf}\} \mathcal{M}^\top \{\mathbf{U}_{cf}\})_{qr} = \\ & \int_0^\theta \int_0^\theta m_n^{(q)}(\tau) \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{v}(t_j - \tau) \mathbf{u}^\top(t_j - \nu) \right) m_n^{(r)\top}(\nu) d\tau d\nu \end{aligned} \quad (2.110)$$

où θ et m_n sont choisis selon le filtre utilisé. Sachant par hypothèse que les signaux d'entrées sont décorrélés de bruit \mathbf{v} , on peut alors écrire

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{v}(t_j - \tau) \mathbf{u}^\top(t_j - \nu) = 0 \quad (2.111)$$

et par extension

$$\frac{1}{N} \mathcal{M} \{ \mathbf{V}_{cf} \} \mathcal{M}^\top \{ \mathbf{U}_{cf} \} = 0. \quad (2.112)$$

Dans ces conditions, nous proposons d'utiliser comme variable instrumentale la matrice composée des données d'entrées passées

$$\mathbf{\Xi} = \mathbf{U}_{cp} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}((k-p)Te) & \mathbf{u}((k+1-p)Te) & \dots & \mathbf{u}((N-p)Te) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{u}((k-1)Te) & \mathbf{u}(kTe) & \dots & \mathbf{u}((N-1)Te) \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

p est un indice passé. Ce choix permet de satisfaire les deux conditions (2.105) et (2.106). En revenant à notre problème d'estimation des matrices d'état, l'équation des données peut être réécrite comme suit

$$\mathcal{M} \{ \mathbf{Y}_{cf} \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}}^\perp \mathbf{\Xi} = \mathbf{\Gamma}_f \mathcal{M} \{ \mathbf{X}_c \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}}^\perp \mathbf{\Xi}. \quad (2.114)$$

Cette équation est équivalente à l'équation des données dans le cas discret. Par la suite, la même démarche présentée au sein du paragraphe 2.2 peut être facilement adaptée au cas d'un système continu, afin d'estimer les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} , en remplaçant \mathbf{Y}_f par $\mathcal{M} \{ \mathbf{Y}_{cf} \}$, \mathbf{U}_f par $\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}$ et \mathbf{V}_f par $\mathcal{M} \{ \mathbf{V}_{cf} \}$.

Ainsi, nous introduisons la matrice \mathbf{K} (cf. équation (2.36)) afin que le système soit observable à partir d'une seule sortie tel que

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{K} \mathbf{y} \quad (2.115)$$

et

$$\mathcal{M} \{ \bar{\mathbf{Y}}_{cf} \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}}^\perp = \mathbf{\Gamma}_f (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathcal{M} \{ \mathbf{X}_c \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}}^\perp. \quad (2.116)$$

De la même manière, une matrice de permutation \mathbf{S} peut être introduite afin d'ordonner les lignes de $\mathbf{\Gamma}_f (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C})$ et d'assurer que les n_x premières lignes soient linéairement indépendantes. Par la suite, nous obtenons

$$\mathbf{S} \mathcal{M} \{ \bar{\mathbf{Y}}_{cf} \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}}^\perp = \mathbf{S} \mathbf{\Gamma}_f (\mathbf{A}, \boldsymbol{\kappa}^\top \mathbf{C}) \mathcal{M} \{ \mathbf{X}_c \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M} \{ \mathbf{U}_{cf} \}}^\perp. \quad (2.117)$$

Comme dans le cas discret et à partir de l'équation (2.117), nous pouvons extraire les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} . Connaissant \mathbf{A} et \mathbf{C} , les matrices \mathbf{B} et \mathbf{D} peuvent être obtenue par régression linéaire [Hav01]

$$\hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{D}} = \arg \min_{\mathbf{B}, \mathbf{D}} \sum_t [\mathbf{y}(t) - \left[\begin{array}{c} \mathbf{u}^T(t) \otimes \mathbf{I}_{n_y} \quad \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{A}}^{t-k-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \text{vec}(\hat{\mathbf{D}}) \\ \text{vec}(\hat{\mathbf{B}}) \end{bmatrix}]^2. \quad (2.118)$$

2.4 Exemple de simulation

2.4.1 Système discret

Afin d'évaluer les performances de la méthode du propagateur, nous considérons ici un exemple de système linéaire à temps discret d'ordre trois avec deux entrées et deux sorties. Les matrices du système considéré sont données par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & -0.5 \\ 0.1 & 0 & 0.4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.119a)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}. \quad (2.119b)$$

L'entrée d'excitation est choisie comme un bruit blanc gaussien, centré, de variance unité et de longueur 1000. Le bruit de sortie \mathbf{v} est un bruit blanc gaussien de rapport signal sur bruit 20 dB. L'ordre n_x du système est supposé connu. Nous procédons alors à une simulation de Monte Carlo de 1000 tirages afin d'identifier les paramètres du système. Dans un objectif de comparaison, nous identifions le même système à l'aide de

- La méthode du propagateur (présentée dans la section 2.2.2) :
 - Le paramètre f est pris égal à 5.
 - Afin d'atténuer l'effet de bruit de sortie sur les paramètres estimés, nous introduisons la variable instrumentale $\Xi = [\mathbf{U}_p \quad \mathbf{Y}_p]$.
- La méthode des sous-espaces basée sur les moindres carrés (SBMC) (présentée dans la section 2.2.3) : Dans le but de satisfaire l'hypothèse 2.2.1, le paramètre f est choisi égal 20.
- La méthode MOESP [VD92a] : Comme la sortie du système est perturbée par un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance finie et le bruit d'état est nul, l'utilisation de l'algorithme `Ordinary MOESP`⁷ est suffisante pour avoir une estimation consistante des paramètres du système. Dans ce cas, le paramètre f est choisi égal à 5 et 20 afin de comparer cet algorithme à l'algorithme du propagateur et l'algorithme `Ordinary MOESP`.

Ces étapes sont récapitulés dans le tableau suivant

	Méthode du propagateur	SBMC	Ordinary MOESP
$p = 5$	×		×
$p = 20$		×	×

TAB. 2.1 – Algorithmes d'identification.

Etant donné que les algorithmes MOESP estiment les matrices d'état à un changement de base près, nous nous intéressons alors aux paramètres invariants du système tels que les

⁷Le Toolbox d'identification des sous-espaces développé dans [Hav01] est employée afin d'estimer les matrices d'état.

valeurs propres. Dans le tableau 2.2, nous dressons un récapitulatif des résultats trouvés lors de l'estimation des valeurs propres de système (2.119) en utilisant **Ordinary MOESP** [VD92a, Mer04] et la méthode du propagateur. En examinant ce tableau, on peut remarquer qu'il y a une légère différence entre ces deux méthodes.

Valeurs propres réelles	Algorithme MOESP		Algorithme du propagateur	
	Valeurs propres estimées	Ecart type	Valeurs propres estimées	Ecart type
0.6081	0.6080	0.016	0.6088	0.0074
0.1460 ± 0.2029i	0.1559 ± 0.2029i	0.043	0.1420 ± 0.2030i	0.0292

TAB. 2.2 – Identification des valeurs propres du système à l'aide de l'algorithme MOESP et de l'algorithme du propagateur ($p = 5$).

En plus, pour évaluer la qualité de modèle nous introduisons % BFT : Best Fit [Lju99c] et % VAF : Variance Accounted For [VV02]. Ces deux critères sont défini par

$$\text{BFT} = 100\% \times \max \left(1 - \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_m\|_2}, 0 \right) \quad (2.120)$$

$$\text{VAF} = 100\% \times \max \left(1 - \frac{\text{var}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{\text{var}(\mathbf{y})}, 0 \right) \quad (2.121)$$

où $\hat{\mathbf{y}}$ est la sortie simulée et \mathbf{y}_m est la valeur moyenne de \mathbf{y} . Le tableau 2.3, compare l'algorithme **Ordinary MOESP** et l'algorithme du propagateur en calculant % BFT et le % VAF.

Algorithme	Sortie 1		Sortie 2	
	% BFT	% VAF	% BFT	% VAF
Algorithme MOESP	98.4290	99.9754	98.8826	99.9875
Algorithme du propagateur	98.4275	99.9753	98.7623	99.9847

TAB. 2.3 – % BFT et % VAF.

Ce tableau montre que ces deux méthodes donnent des résultats comparables. Ainsi, pour la première sortie et la deuxième sortie % BFT et % VAF sont pratiquement les mêmes pour ces deux méthodes.

De la même manière, nous présentons dans le tableau 2.4, les valeurs propres estimées pour le même système (2.119) en utilisant la méthode MOESP et la méthode SBMC. En examinant ce tableau nous constatons que ces deux algorithmes d'identification donnent des résultats proches. En plus l'algorithme MOESP donne pratiquement le même résultat pour $p = 5$ et $p = 20$.

Valeurs propres réelles	Algorithme MOESP		Algorithme SBMC	
	Valeurs propres estimées	Ecart type	Valeurs propres estimées	Ecart type
0.6081	0.6081	0.0016	0.6087	0.0067
$0.1460 \pm 0.2029i$	$0.1556 \pm 0.2029i$	0.0042	$0.1436 \pm 0.2032i$	0.0277

TAB. 2.4 – Identification des valeurs propres du système à l’aide de l’algorithme MOESP et de l’algorithme SBMC ($p = 20$).

Le tableau 2.5 présente le % BFT et % VAF. Ces critères sont pratiquement les mêmes quelque soit la méthode d’identification.

Algorithme	Sortie 1		Sortie 2	
	% BFT	% VAF	% BFT	% VAF
Algorithme MOESP	98.4799	99.9769	99.0088	99.9902
Algorithme SBMC	98.4803	99.9769	98.9343	99.9886

TAB. 2.5 – % BFT et % VAF.

D’après toutes ces simulations, les deux méthodes d’identification (la méthode du propagateur et la méthode SBMC) permettent d’avoir des résultats similaires à l’algorithme MOESP. Néanmoins, l’utilisation de ces méthodes permet d’avoir les matrices d’état estimées sous la forme canonique suivante

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.038 & -0.24 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 9.1776 & -0.0996 \\ 3.0375 & -4.1843 \\ 2.0150 & -3.4518 \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0985 & -3.8901 & 4.4232 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \mathbf{0}. \quad (2.123)$$

Contrairement aux algorithmes MOESP, ces deux méthodes permettent d’estimer les paramètres du système dans une base canonique fixe. Grâce à l’utilisation de cette base, nous obtenons un nombre de paramètres minimal.

2.4.2 Système continu

Le système considéré au sein de cette section est un exemple de simulation proposé au sein de la boîte à Outils Matlab CONTSID. Sa représentation d’état s’écrit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2.124a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (2.124b)$$

L'entrée d'excitation est choisie comme un bruit blanc gaussien, centré, de variance unité de longueur $N = 1000$. La période d'échantillonnage est égale $0.1s$. Le bruit de mesure \mathbf{v} est un bruit blanc gaussien de rapport signal sur bruit égal 35dB . La valeur initiale du vecteur d'état est fixée à zéro. Les résultats présentés ci-après sont obtenus après un tirage de Monte Carlo de taille 200. Afin de réduire l'effet de bruit sur les paramètres estimés du système, nous introduisons la variable instrumentale suivante [MOGG07]

$$\Xi = \mathcal{U}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{u}((k-p)T_s) & \mathbf{u}((k+1-p)T_s) & \cdots & \mathbf{u}((N-p)T_s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}((k-1)T_s) & \mathbf{u}(kT_s) & \cdots & \mathbf{u}((N-1)T_s) \end{bmatrix}. \quad (2.125)$$

La méthode d'identification présentée dans la section 2.3 est utilisée afin d'identifier les paramètres du système. Pour cela, nous utilisons les filtres MPR (cf. 2.3.2.1) et les FVE (cf. 2.3.2.2).

	Algorithme du propagateur en utilisant les filtres MPR		Algorithme du propagateur en utilisant les FVE	
Valeurs propres réelles	Valeurs propres estimées	Ecart type	Valeurs propres estimées	Ecart type
-2	-1.8672	0.0742	-1.8272	0.0889
$-0.5 \pm 0.866i$	$-0.4979 \pm 0.8736i$	0.0060	$0.498 \pm 0.8791i$	0.0068

TAB. 2.6 – Identification des valeurs propres du système à l'aide de l'algorithme du propagateur en utilisant les filtres MPR et les FVE.

En examinant le tableau 2.6, nous constatons que ces méthodes fournissent de bonnes estimations des pôles de système. Néanmoins, les filtres MPR conduit à des estimées présentant une variance plus faible que les filtres FVE. En plus, l'approche MPR présente l'avantage d'être relativement plus simple que l'approche FVE.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé des méthodes d'estimation des matrices d'état d'un système MIMO linéaire, avec comme objectif envisagé dans le prochain chapitre la caractérisation des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} .

Ces méthodes se basent principalement sur la méthode du propagateur. Une caractéristique de ces méthodes des sous-espaces est qu'elles fournissent une réalisation d'état du système considéré dans une base arbitraire. Le terme arbitraire qualifie ici le fait qu'on ne peut pas prévoir la base de représentation dans l'espace d'état. Contrairement à ces méthodes, la caractéristique principale de la méthode du propagateur permet d'affranchir les matrices d'état identifiées de l'aléa de la base d'état. Cela est effectué en introduisant l'opérateur propagateur afin d'éliminer l'inconnue que représente la séquence d'état dans un modèle d'état. Par la suite, le problème d'identification des sous-espaces est transformé

en un problème de moindres carrés ordinaires et on peut désormais fixer la base d'état et en avoir une maîtrise complète. De plus, cette base d'état a la propriété d'être sous forme canonique observable. Par conséquent, les coefficients des matrices d'état estimés représentent des paramètres invariants du système. Un autre avantage de l'utilisation de cette matrice comme un changement de base, est qu'elle permet d'avoir un nombre de paramètres minimal. Finalement, la méthode du propagateur ne nécessite pas l'utilisation du très coûteux algorithme de DVS contrairement à la plupart des méthodes des sous-espaces existantes.

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode du propagateur dans le cas d'un système à temps discret. Comme dans de nombreuses applications l'utilisation des systèmes continus est préférable, nous avons donc étendu la méthode du propagateur au cas continu. Le problème majeur de cette technique est le calcul successif des dérivées des signaux E/S du système. Pour lever cette difficulté, nous proposons des techniques d'approximation des dérivées.

Cette méthode s'avère, comme nous le verrons dans le chapitre 3, être d'un grand intérêt dans la résolution du problème de description des domaines d'incertitude.

Chapitre 3

Caractérisation des domaines d'incertitude de modèles d'état linéaires structurés

3.1 Introduction

Jusqu'ici, notre étude s'est principalement focalisée sur l'estimation des matrices d'état du système. Les méthodes d'identification proposées dans le chapitre précédent sont principalement caractérisées par les propriétés suivantes :

- elles fournissent un modèle d'état sous forme canonique,
- elles ne nécessitent aucune DVS,
- elles permettent un choix *a priori* de la base des matrices à estimer dans l'espace d'état,
- elles permettent de gérer d'une manière équivalente les systèmes SISO et MIMO.

Bien que fournissant des paramètres estimés fiables, l'identification d'un modèle ne présente intrinsèquement que peu d'intérêt si elle ne s'accompagne pas d'informations relatives à la précision de l'estimation ou à la sensibilité paramétrique de l'optimum [Poi05]. De plus, dans un objectif d'identification pour la commande, les techniques d'identification doivent fournir non seulement un modèle nominal, mais aussi une quantification des incertitudes sur les paramètres du système pour permettre la synthèse de correcteurs robustes à ces incertitudes.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la caractérisation des incertitudes des paramètres obtenus à partir des techniques de sous-espaces décrites au chapitre 2. Comme nous l'avons déjà signalé au chapitre 1, il n'existe à notre connaissance aucune méthode pour caractériser les incertitudes des paramètres des représentations d'état estimées à l'aide d'algorithmes de type sous-espaces. Les techniques proposées permettent seulement de caractériser la précision d'invariants du système tels que les valeurs propres ou les fonctions de transfert. Nous proposons ici de reprendre une technique développée initialement pour caractériser l'incertitude des paramètres de fonctions de transfert dans le cas SISO [BPT01, BTT03, Poi05] et de l'étendre au cas des modèles MIMO sous forme d'état. Cette méthode appartient à la classe des techniques à erreur bornée puisqu'elle suppose que les résidus sont bornés. Elle ne nécessite ainsi aucune hypothèse sur le bruit et permet d'englober dans la même borne l'erreur due au bruit de mesure et celle due à l'inévitable erreur de modélisation. Bien qu'utilisable dans le cas de modèles non linéaires par rapport aux paramètres, cette technique est plus simple à utiliser lorsque le modèle est linéaire par rapport aux paramètres. Ainsi, les extensions proposées ont été développées dans l'objectif d'obtenir une modélisation LP pour pouvoir caractériser aisément les domaines d'incertitude selon l'algorithme d'identification utilisé. Trois méthodes sont plus particulièrement proposées.

- La première méthode, nommée ici approche indirecte, consiste à transformer le modèle d'état estimé en un modèle entrée(s) / sortie(s) linéaire par rapport aux paramètres. Les régions d'incertitude de ce modèle sont alors décrites en utilisant directement l'approche à erreur bornée développée dans [BTT03, Poi05]. Finalement, connaissant le lien entre les paramètres du modèle d'état et ceux du modèle E/S, on en déduit les domaines d'incertitude des paramètres du modèle d'état.
- La deuxième approche est plus directe et exploite les propriétés de la méthode du propagateur afin d'obtenir un modèle LP et par la suite déterminer directement les domaines d'incertitudes des coefficients des matrices d'état. A noter que cette méthode peut être étendue au cas des systèmes à représentation à temps continu.

– Finalement, on s'intéresse à la caractérisation des incertitudes pour l'algorithme des sous-espaces basé sur les moindres carrés, cet algorithme étant une version modifiée de l'algorithme « Predictor-Based Subspace IDentification » PBSID [Chi07b] adaptée à la méthode du propagateur. Cette technique fournit un modèle LP et la technique de caractérisation des incertitudes des paramètres peut être directement appliquée. Notons que la première partie de ce chapitre rappelle le principe de la méthode de caractérisation des domaines d'incertitudes dans le cas de modèles linéaires par rapport aux paramètres (cf. section 3.2). Nous présentons ensuite les différentes extensions proposées pour la détermination des incertitudes sur les paramètres des matrices d'état (cf. section 3.3, section 3.4 et section 3.5).

3.2 Caractérisation des domaines d'incertitude d'un modèle LP

Dans ce paragraphe, nous allons considérer la description des domaines d'incertitude des paramètres d'un modèle LP décrit par

$$\mathbf{y} = \Phi^\top \boldsymbol{\theta} + \mathbf{w} \quad (3.1)$$

où $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_y}$ est un processus stochastique, Φ est le régresseur et $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ est le vecteur de paramètres. L'objectif de la méthode développée [BPT01, BTT03, Poi05] consiste à déterminer un domaine d'incertitude \mathcal{D} tel que le vecteur des paramètres exacts $\boldsymbol{\theta}^0$ soit inclus dans \mathcal{D} .

En utilisant le modèle (3.1), une estimation du vecteur des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ peut être obtenue en minimisant la fonction coût suivante [Lju99c] :

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}(t) - \Phi^\top(t)\boldsymbol{\theta})^\top (\mathbf{y}(t) - \Phi^\top(t)\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta}) \quad (3.2)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta})$ est l'erreur de prédiction. De plus, en supposant que :

- Φ est asymptotiquement non corrélé avec \mathbf{w} ,
- la séquence d'entrée vérifie la condition d'excitation persistante [Lju99c] afin d'avoir $\bar{\mathbb{E}}(\Phi(t)\Phi^\top(t))$ comme une matrice non singulière, où $\bar{\mathbb{E}}(\bullet(t)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbb{E}(\bullet(t))$,

alors $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est une estimation consistante du vecteur des paramètres $\boldsymbol{\theta}^0$ et il suit asymptotiquement une distribution gaussienne, de moyenne $\boldsymbol{\theta}^0$ et de covariance $\lambda \mathbf{Q}_\Phi^{-1}$, λ étant la variance de bruit et

$$\mathbf{Q}_\Phi = \bar{\mathbb{E}}(\Phi(t)\Phi^\top(t)). \quad (3.3)$$

On a donc,

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \in N(\boldsymbol{\theta}^0, \mathbf{Q}_\Phi^{-1}/\lambda).$$

Cette caractérisation permet de représenter les domaines d'incertitude comme suit

$$\mathcal{E}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\lambda, \mathbf{Q}_\Phi, \alpha) = \left\{ \hat{\boldsymbol{\theta}} \in \mathbb{R}^{\theta} \mid \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0 \right)^\top \frac{\mathbf{Q}_\Phi^{-1}}{\lambda} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0 \right) < \chi_\alpha^2(n_\theta) \right\} \quad (3.4)$$

où α est généralement choisi égal à 95% et où χ_α^2 est la loi khi carré. Ces régions sont des ellipses centrées en $\boldsymbol{\theta}^0$ dont les directions sont définies par la matrice $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t))$.

Toutefois, la description de ces régions de confiance dépend de la connaissance *a priori* de la variance de bruit. Le problème majeur de cette méthode est qu'il est souvent difficile d'avoir une bonne estimation de la variance de bruit. Comme notre objectif est de caractériser les domaines d'incertitude sans aucune hypothèse sur le bruit mais en utilisant seulement l'information contenue dans les résidus, une version modifiée de l'approche présentée dans [Lju99c] est introduite ci-après.

En examinant l'équation (3.2), il est aisé de montrer que [Lju99c]

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^\top \left(\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \\ &\quad + \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right)^\top \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right) \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right)^\top \mathbf{R}_\Phi \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ représente le résidu et

$$\mathbf{R}_\Phi = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right). \quad (3.6)$$

En examinant l'équation (3.5), on remarque que la fonction coût $J(\boldsymbol{\theta})$ est composée

- de la valeur moyenne des résidus au carrée $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ qui est une grandeur connue,
- du terme $\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right)^\top \mathbf{R}_\Phi \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \right)$ qui représente un domaine ellipsoïdal centré en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dont les directions sont définies par la matrice \mathbf{R}_Φ .

L'idée de la méthode développée est de déterminer le niveau de critère $J(\boldsymbol{\theta})$ qui permet de garantir que le domaine ellipsoïdal contienne les paramètres réels du système $\boldsymbol{\theta}^0$. Ainsi, pour $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0$, nous avons

$$\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0 \right)^\top \mathbf{R}_\Phi \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0 \right) = J(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.7)$$

En choisissant

$$M^2 = J(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (3.8)$$

le vecteur des paramètres réels est situé sur la frontière du domaine \mathcal{D} . Pour être sûr que $\boldsymbol{\theta}^0 \in \mathcal{D}$, la borne M doit être choisie telle que (cf. Fig. 3.1)

$$M^2 > J(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right). \quad (3.9)$$

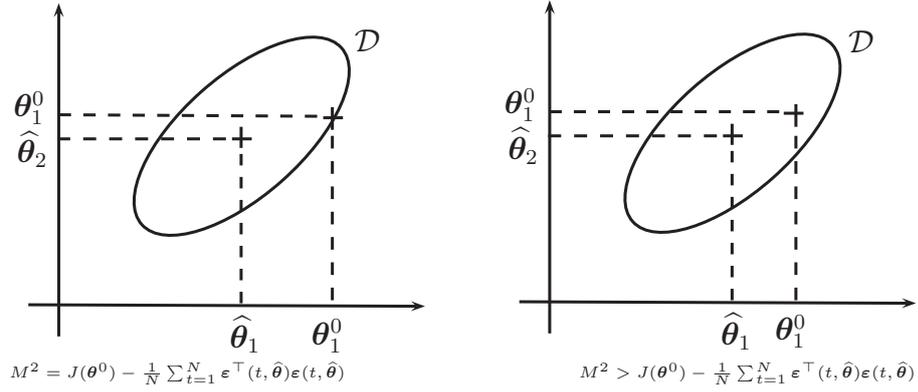


FIG. 3.1 – Approche ellipsoïdale

Ainsi,

$$J(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) < J(\boldsymbol{\theta}^0). \quad (3.10)$$

Rappelons que, quelles que soient les propriétés de \mathbf{w} , nous avons

$$J(\boldsymbol{\theta}^0) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{w}^\top(t) \mathbf{w}(t). \quad (3.11)$$

Alors,

$$J(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) < \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{w}^\top(t) \mathbf{w}(t) \quad (3.12)$$

et les domaines d'incertitude peuvent être donnés par

$$J(\boldsymbol{\theta}^0) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)^\top \left(\mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) < \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{w}^\top(t) \mathbf{w}(t).$$

Par conséquent, nous pouvons choisir le niveau M tel que

$$M^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{w}^\top(t) \mathbf{w}(t) \quad (3.13)$$

Comme il est difficile d'avoir accès au bruit \mathbf{w} , nous proposons de fixer la taille de l'ellipse en utilisant l'information contenue dans les résidus $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Nous savons que les résidus $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ sont donnés par

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (3.14)$$

$$= \mathbf{w}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.15)$$

Définissons

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right) \quad (3.16)$$

$$= \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{w}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)^\top \left(\mathbf{w}(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right). \quad (3.17)$$

Alors, en supposant que $\boldsymbol{\Phi}$ est non corrélé au bruit \mathbf{w} , nous pouvons écrire

$$\tilde{M}^2 \leq \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N (\mathbf{w}^\top(t) \mathbf{w}(t)) + \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}})^\top \boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t) (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.18)$$

En supposant de plus que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est une estimation non biaisée de $\boldsymbol{\theta}^0$, nous obtenons

$$\bar{\mathbb{E}} \left\{ \left| \boldsymbol{\Phi}^\top(t) (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right| \right\} = |\boldsymbol{\Phi}^\top(t)| \bar{\mathbb{E}} \left\{ (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\} = 0. \quad (3.19)$$

Ainsi, la valeur moyenne de $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ tend vers \mathbf{w} . De plus, \tilde{M} est une estimation non biaisée de M si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est une estimation non biaisée de $\boldsymbol{\theta}^0$.

Lorsque $\bar{\mathbb{E}} \left\{ (\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\} \neq 0$, \tilde{M} contient l'erreur due au bruit \mathbf{w} ainsi que l'erreur de modélisation $(\boldsymbol{\theta}^0 - \hat{\boldsymbol{\theta}})$. Cette propriété représente l'avantage majeur de cette méthode de description des domaines d'incertitude. En effet, ces régions permettent d'intégrer l'erreur due au bruit de sortie mais aussi l'erreur de modélisation.

Finalement, les domaines d'incertitude sont donnés par

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0)^\top \mathbf{R}_\Phi (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0) < \tilde{M}^2 \quad (3.20)$$

où

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.21)$$

Ainsi, cette méthode permet la caractérisation des domaines d'incertitude paramétriques en utilisant seulement l'information contenue dans les résidus et sans hypothèse particulière sur la nature du bruit.

3.3 Approche indirecte

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la description des domaines d'incertitude des coefficients des matrices d'état. Plus particulièrement, en utilisant la méthode du propagateur présentée dans le chapitre 2, ces matrices sont données par

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n_x-1} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1^1 & \cdots & b_1^{n_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_x}^1 & \cdots & b_{n_x}^{n_u} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{n_y} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\text{tel que } \mathbf{c}_1 = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]; \quad \mathbf{c}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} ((j-1)f + 1, :) \text{ pour } j \in [2, n_y]$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1^1 & \cdots & d_1^{n_u} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n_y}^1 & \cdots & d_{n_y}^{n_u} \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Ainsi, nous nous intéressons à la détermination des incertitudes sur les coefficients des matrices $-a_i$, b_i^j , c_i^k et d_j^l , $i \in [0, n_x - 1]$, $j \in [1, n_u]$, $k \in [2, n_y]$ et $l \in [1, n_y]$ du matrices (3.22), (3.23), (3.24) et (3.25).

La méthode présentée dans la section 3.2 suppose que le modèle du système est décrit par l'intermédiaire d'une régression linéaire. Or, ce n'est pas le cas ici. En effet, le modèle d'état n'est pas linéaire par rapport aux coefficients $-a_i$, b_i^j , c_i^k et d_j^l . Pour contourner ce problème, nous proposons de suivre les étapes suivantes :

1. nous allons tout d'abord transformer le modèle d'état en une représentation linéaire dans les paramètres. Notons que les paramètres de ce modèle modifié seront des combinaisons des paramètres $-a_i$, b_i^j , c_i^k et d_j^l du modèle initial ;
2. la méthode développée dans la section 3.2 va nous permettre de caractériser les incertitudes des paramètres du modèle LP ;
3. enfin, de la description obtenue à l'étape précédente, on déduit les domaines d'incertitude des coefficients $-a_i$, b_i^j , c_i^k et d_j^l .

Toutes ces étapes sont présentées dans les sous-sections suivantes.

3.3.1 Obtention d'un modèle E/S ARMAX

Considérons un système linéaire à temps invariant, représenté par le modèle d'état à temps discret suivant

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.26b)$$

où $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs des entrées, des sorties, d'état et de bruit de sortie. $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ sont ici les matrices du système décrite dans la base canonique fournie par le propagateur, c.-à-d., donnée par les équations (3.22), (3.23), (3.24) et (3.25).

Dans ce paragraphe, nous proposons une nouvelle représentation du modèle d'état. Plus particulièrement, un modèle E/S est obtenu à partir du modèle d'état (3.26). Ainsi, au lieu d'exprimer la sortie sur une fenêtre f , comme dans l'équation des données (cf. (2.23))

$$\mathbf{Y}_f = \mathbf{\Gamma}_f \mathbf{X} + \mathbf{H}_f \mathbf{U}_f + \mathbf{V}_f \quad (3.27)$$

nous considérons cette fois une expression directe de la sortie $\mathbf{y}(t)$ en fonction de données passées du système. Cette réécriture du modèle d'état est utilisée comme une étape intermédiaire pour caractériser les domaines d'incertitude. Il est important de noter que les paramètres du modèle E/S ne sont pas identifiés, mais calculés à partir du modèle d'état estimé.

Pour $t > n_x$ et par substitutions successives dans la première équation de (3.26), on peut écrire

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^{n_x} \mathbf{x}(t - n_x) + [\mathbf{A}^{n_x-1} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{B}] \mathbf{u}_{n_x}(t - n_x) \quad (3.28)$$

où

$$\mathbf{u}_{n_x}(t - n_x) = [\mathbf{u}^\top(t - n_x) \cdots \mathbf{u}^\top(t - 1)]^\top. \quad (3.29)$$

En portant l'expression de $\mathbf{x}(t)$ dans l'équation (3.26b), on a

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.30a)$$

$$= \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_x} \mathbf{x}(t - n_x) + \mathbf{C} [\mathbf{A}^{n_x-1} \mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{B}] \mathbf{u}_{n_x}(t - n_x) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (3.30b)$$

Par ailleurs, le théorème de Cayley-Hamilton [HJ90] permet d'obtenir

$$\mathbf{A}^{n_x} = -a_0 \mathbf{I}_{n_x} - a_1 \mathbf{A} - \dots - a_{n_x-1} \mathbf{A}^{n_x-1}. \quad (3.31)$$

Ainsi

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^{n_x} \mathbf{x}(t - n_x) = -(a_0 \mathbf{C} + a_1 \mathbf{C}\mathbf{A} + \dots + a_{n_x-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{n_x-1}) \mathbf{x}(t - n_x). \quad (3.32)$$

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 (cf. équation (2.54))

$$\mathbf{P}(1, :) = [-a_0 \quad -a_1 \quad \cdots \quad -a_{n_x-1}]. \quad (3.33)$$

L'équation (3.32) peut alors être réécrite comme suit

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^{n_x}\mathbf{x}(t - n_x) = (\mathbf{P}(1, :) \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{\Gamma}_{n_x}\mathbf{x}(t - n_x). \quad (3.34)$$

En utilisant la relation récurrente (3.26), il est facile de vérifier que $\mathbf{y}_{n_x}(t - n_x)$ peut être écrit comme

$$\mathbf{y}_{n_x}(t - n_x) = \mathbf{\Gamma}_{n_x}\mathbf{x}(t - n_x) + \mathbf{H}_{n_x}\mathbf{u}_{n_x}(t - n_x) + \mathbf{v}_{n_x}(t - n_x) \quad (3.35)$$

$\mathbf{y}_{n_x}(t - n_x)$ et $\mathbf{v}_{n_x}(t - n_x)$ sont construits d'une manière similaire à $\mathbf{u}_{n_x}(t - n_x)$. $\mathbf{\Gamma}_{n_x}\mathbf{x}(t - n_x)$ peut être exprimée comme une combinaison des E/S passées et du bruit, c.-à-d.,

$$\mathbf{\Gamma}_{n_x}\mathbf{x}(t - n_x) = \mathbf{y}_{n_x}(t - n_x) - \mathbf{H}_{n_x}\mathbf{u}_{n_x}(t - n_x) - \mathbf{v}_{n_x}(t - n_x). \quad (3.36)$$

Finalement, en combinant les équations (3.30b), (3.34) et (3.36), le vecteur d'état est éliminé de l'équation de sortie et

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{P}(1, :) \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{y}_{n_x}(t - n_x) + \mathbf{F}\mathbf{u}_{n_x+1}(t - n_x) + \boldsymbol{\eta}(t) \quad (3.37)$$

où

$$\mathbf{F} = [\mathbf{C}[\mathbf{A}^{n_x-1}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{B}] - (\mathbf{P}(1, :) \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{H}_{n_x} \quad \mathbf{D}] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_x+1)n_u} \quad (3.38)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = (-\mathbf{P}(1, :) \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{v}_{n_x}(t - n_x) + \mathbf{v}(t). \quad (3.39)$$

Dans le but d'écrire le modèle estimé sous une forme LP, l'équation (3.37) peut être réécrite comme une régression linéaire classique. Pour cette raison, nous introduisons l'égalité $\text{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{A})\text{vec}(\mathbf{X})$ [HJ90] et nous aurons

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(t - n_x) & \cdots & \mathbf{y}(t - 1) & \mathbf{u}_{n_x+1}^\top(t - n_x) \otimes \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}^\top(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{P}(1, :))^\top \\ \text{vec}(\mathbf{F}) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\eta}(t). \quad (3.40)$$

Proposition 2. *Considérant le modèle de sous-espaces (3.26). Ce modèle peut être écrit comme un modèle ARMAX*

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{a}^\top \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{y}_{n_x}(t - n_x) + \mathbf{F}\mathbf{u}_{n_x+1}(t - n_x) + \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^\top(t)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\eta}(t) \quad (3.41)$$

où

$$\boldsymbol{\eta}(t) = (-\mathbf{P}(1, :) \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{v}_{n_x}(t - n_x) + \mathbf{v}(t) \quad (3.42a)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^\top(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t - n_x) & \cdots & \mathbf{y}(t - 1) & \mathbf{u}_{n_x+1}^\top(t - n_x) \otimes \mathbf{I}_{n_y} \end{bmatrix} \quad (3.42b)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \text{vec}(\mathbf{F}) \end{bmatrix} \quad (3.42c)$$

$$\mathbf{a}^\top = [-a_0 \quad -a_1 \quad \cdots \quad -a_{n_x-1}] \quad (3.42d)$$

$$\mathbf{F} = [(\mathbf{a}^\top \otimes \mathbf{I}_{n_y})\mathbf{H}_{n_x} + \mathbf{C}\mathbf{\Delta}_{n_x} \quad \mathbf{D}] \in \mathbb{R}^{n_y \times (n_x+1)n_u} \quad (3.42e)$$

$$\mathbf{\Delta}_{n_x} = [\mathbf{A}^{n_x-1}\mathbf{B} \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x n_u}. \quad (3.42f)$$

On notera que si le système initial (3.26) est minimal, l'ordre du modèle E/S (3.41) est égal à n_x si et seulement si \mathbf{A} est non dérogatoire (cf. [BML09] pour la démonstration).

Il est important de noter que, dans cette étude, la condition “ \mathbf{A} est non dérogatoire” est satisfaite. La matrice d'état \mathbf{A} considérée est en effet donnée par la forme compagne (3.22).

Exemple d'obtention d'un modèle E/S ARMAX

Considerons le modèle SISO suivant

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_0^1 \\ b_1^1 \\ b_2^1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Le modèle d'E/S satisfait

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_2 y(t-1) - a_1 y(t-2) - a_0 y(t-3) + b_0^1 u(t-1) \\ &\quad + (-a_2 b_0^1 + b_1^1) u(t-2) + (-a_1 b_0^1 - a_2 b_1^1 + b_2^1) u(t-3). \end{aligned}$$

Soit

$$y(t) = \Phi^\top(t) \boldsymbol{\theta}$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi^\top(t) &= [y(t-1) \ y(t-2) \ y(t-3) \ u(t-1) \ u(t-2) \ u(t-2)] \\ \boldsymbol{\theta}^\top &= [-a_2 \ -a_1 \ -a_0 \ b_0^1 \ (-a_2 b_0^1 + b_1^1) \ (-a_1 b_0^1 - a_2 b_1^1 + b_2^1)]. \end{aligned}$$

Il est clair que le modèle E/S est linéaire en $\boldsymbol{\theta}$ mais non linéaire en $-a_i, b_i^j$ et c_i^k .

Grâce à la forme linéaire du modèle (3.40), la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude présentée dans la section 3.2 peut être directement appliquée. Ces régions sont données par

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0)^\top \mathbf{R} (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0) < \tilde{M}^2 \quad (3.44)$$

où $\boldsymbol{\theta}^0$ est le vecteur de paramètres réels du modèle E/S et

$$\mathbf{R} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Phi(t) \Phi^\top(t). \quad (3.45)$$

Ces domaines sont des ellipsoïdes centrés en $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ dont les directions sont définies par la matrice $\left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Phi(t) \Phi^\top(t) \right)$. De la même manière, la borne \tilde{M} est définie par

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)$$

où les résidus sont donnés par $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}(t) - \Phi^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Rappelons encore une fois que nous identifions seulement les paramètres du modèle d'état en utilisant la méthode du propagateur présentée dans le chapitre 2. Les paramètres du modèle E/S (3.41) ne sont pas identifiés. Le modèle E/S représente juste une réécriture du modèle d'état afin de pouvoir appliquer la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude. Par la suite, les paramètres estimés $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ seront calculés à partir des paramètres estimés du modèle d'état.

3.3.2 Extension de la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude à un modèle non linéaire dans les paramètres

Jusqu'ici, nous avons déterminé les domaines d'incertitude des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ du modèle E/S (3.41). Rappelons que notre objectif final est de caractériser les domaines d'incertitude des coefficients $-a_i$, b_i^j , c_i^k et d_j^l , $i \in [0, n_x - 1]$, $j \in [1, n_u]$, $k \in [2, n_y]$ et $l \in [1, n_y]$. Pour cela, nous introduisons $\boldsymbol{\theta}_E$ comme le vecteur de paramètres du modèle d'état, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{\theta}_E = [-a_0 \cdots -a_{n_x-1} \ b_0^1 \cdots b_0^{n_u} \ b_{n_x-1}^1 \cdots b_{n_x-1}^{n_u} \ c_0^2 \cdots c_{n_x-1}^2 \ c_0^{n_y} \cdots c_{n_x-1}^{n_y} \ d_1^1 \cdots d_1^{n_u} \cdots d_1^{n_y} \cdots d_{n_u}^{n_y}]^\top. \quad (3.46)$$

$\boldsymbol{\theta}_E$ et $\boldsymbol{\theta}$ peuvent être reliés par l'intermédiaire d'une fonction f connue *a priori* (cf. équation (3.42c)), soit $\boldsymbol{\theta} = f(\boldsymbol{\theta}_E)$. En utilisant un développement en série de Taylor au premier ordre, nous obtenons

$$d\boldsymbol{\theta} \approx \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}_E} \right)_{\boldsymbol{\theta}_E = \hat{\boldsymbol{\theta}}_E} d\boldsymbol{\theta}_E \quad (3.47)$$

où $d\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}^0$, $d\boldsymbol{\theta}_E = \hat{\boldsymbol{\theta}}_E - \boldsymbol{\theta}_E^0$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_E$ et $\boldsymbol{\theta}_E^0$ sont respectivement les vecteurs de paramètres estimés et réels du modèle d'état. En combinant cette relation avec l'équation (3.20), nous obtenons

$$d\boldsymbol{\theta}_E^\top \mathbf{R}_E d\boldsymbol{\theta}_E < \tilde{M}^2 \quad (3.48)$$

où

$$\mathbf{R}_E = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}_E} \right)_{\boldsymbol{\theta}_E = \hat{\boldsymbol{\theta}}_E}^\top \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \right) \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}_E} \right)_{\boldsymbol{\theta}_E = \hat{\boldsymbol{\theta}}_E}. \quad (3.49)$$

Ainsi

$$\mathbf{R}_E = \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}_E} \right)_{\boldsymbol{\theta}_E = \hat{\boldsymbol{\theta}}_E}^\top \mathbf{R} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\theta}_E} \right)_{\boldsymbol{\theta}_E = \hat{\boldsymbol{\theta}}_E}. \quad (3.50)$$

Les domaines d'incertitude obtenus sont aussi des paraboloides dont les principales orientations sont données par \mathbf{R}_E , c'est-à-dire une version modifiée de \mathbf{R} . Par conséquent, la procédure décrite dans le cas LP peut être facilement étendue pour $\boldsymbol{\theta}_E$.

3.3.3 Exemple numérique

Considérons un système linéaire à temps invariant, représenté par le modèle d'état à temps discret suivant

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -1 \\ 1 & 0.3 & 5 \\ -2 & -0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.51a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.51b)$$

où $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2$ sont les entrées et sorties du système. Ces données sont générées de la manière suivante

- le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien, centré, de variance unité et de longueur 1000,
- une simulation de Monte Carlo de 1000 tirages est effectuée,
- le bruit $\mathbf{v}(t)$ est obtenu en filtrant un bruit blanc gaussien $\mathbf{e}(t)$ de moyenne nulle

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{0.8 + q} \mathbf{e}(t) \quad (3.52)$$

tel que le rapport signal sur bruit soit égal à 20dB.

La méthode du propagateur est appliquée pour estimer les matrices de système. Afin de réduire l'effet du bruit, les données d'entrées passées sont utilisées comme variable instrumentale (comme dans le cas de l'algorithme PI MOESP [VV07]). Les horizons passés et futurs sont choisis égaux à 5. Les valeurs moyennes et les écarts-types des paramètres estimés obtenus par cette méthode d'identification sont présentés dans le tableau 3.1.

	Paramètres réels	Paramètres estimés
$-a_0$	0.1640	$0.1640 \pm 4.83 \cdot 10^{-7}$
$-a_1$	0.2400	$0.2400 \pm 6.78 \cdot 10^{-7}$
$-a_2$	-0.1000	$-0.1000 \pm 1.13 \cdot 10^{-6}$
b_0^1	7.3776	$7.3782 \pm 2.90 \cdot 10^{-4}$
b_0^2	0.2004	$0.2001 \pm 9.40 \cdot 10^{-5}$
b_1^1	-0.3934	$-0.3944 \pm 2.34 \cdot 10^{-4}$
b_1^2	-6.9679	$-6.9678 \pm 8.44 \cdot 10^{-5}$
b_2^1	-14.6092	$-14.6088 \pm 2.50 \cdot 10^{-4}$
b_2^2	-2.0070	$-2.0072 \pm 6.13 \cdot 10^{-5}$
c_0^2	1.0406	$1.0406 \pm 1.74 \cdot 10^{-6}$
c_1^2	-0.3068	$-0.3068 \pm 2.57 \cdot 10^{-6}$
c_2^2	0.6707	$0.6707 \pm 4.53 \cdot 10^{-6}$

TAB. 3.1 – Paramètres estimés en utilisant la méthode du propagateur.

$(-a_0, -a_1)$	$(-a_2, b_0^1)$	$(-a_1, c_0^1)$
1.8%	2.4%	8.4%

TAB. 3.2 – Taux de défaillance.

En observant le tableau 3.1, on remarque que cette méthode d'identification permet d'avoir une bonne estimation des paramètres du système. Ces résultats d'identification sont aussi donnés sur la figure 3.2. Ainsi, sur cette figure, les paramètres estimés (symbolisés par $(*)$) sont représentés pour chaque simulation de Monte Carlo. La croix noire $(+)$ et la croix rouge (\times) représentent respectivement la valeur moyenne des paramètres estimés et la valeur réelle.

Afin d'évaluer la qualité des domaines d'incertitude obtenus, nous introduisons le taux de défaillance de cette méthode. Ce taux est défini par le nombre de réalisations pour lesquelles les paramètres réels ne sont pas inclus à l'intérieur de la région d'incertitude \mathcal{D} , divisé par le nombre total de réalisations. Les paramètres estimés correspondant à une réalisation où les paramètres réels sont à l'extérieur de \mathcal{D} sont repérés par des disques noirs (\bullet) sur la figure 3.2. Le tableau 3.2 fournit le taux de défaillance obtenu pour les couples de paramètres $(-a_0, -a_1)$, $(-a_2, b_0^1)$ et $(-a_1, c_0^1)$. Ces valeurs montrent que, malgré les approximations réalisées pour déterminer ces incertitudes, la méthode conduit à des domaines d'incertitude relativement fiables.

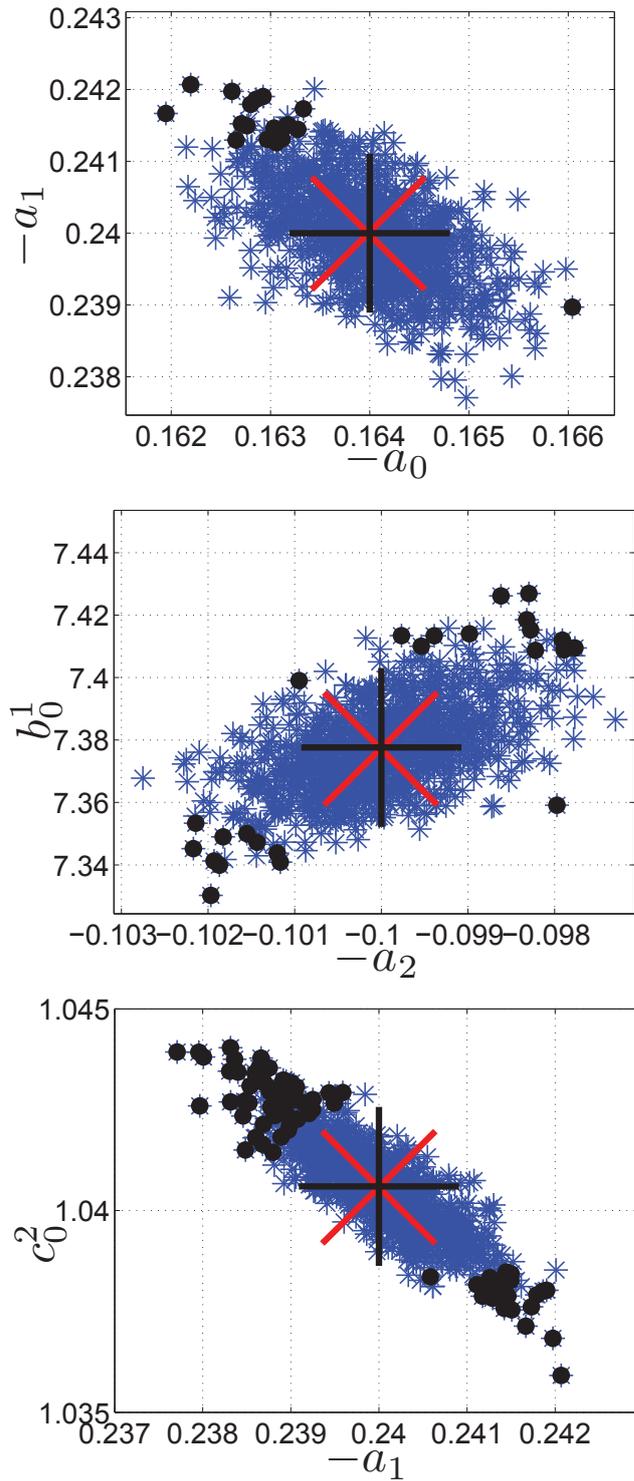


FIG. 3.2 – Estimation paramétrique du modèle d'état. Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (x), les paramètres estimés par des croix bleues (*) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (•) représentent les valeurs défailtantes.

3.3.4 Conclusion

La solution proposée dans cette partie nécessite la transformation du modèle d'état non linéaire dans les paramètres en un modèle linéaire dans les paramètres. Les domaines d'incertitude sont tout d'abord déterminés sur les paramètres du modèle LP. Puis, en utilisant un développement en série de Taylor, les domaines d'incertitude des paramètres du modèle LP sont propagés sur les coefficients de la représentation d'état (cf. figure 3.3). Cette méthode fournit des résultats très satisfaisants. Toutefois, elle nécessite une caractérisation en deux temps qui peut entraîner des erreurs et faire croître le taux de défaillance de l'approche. Afin de remédier à ce problème, nous proposons une autre méthodes de caractérisation des domaines d'incertitude.

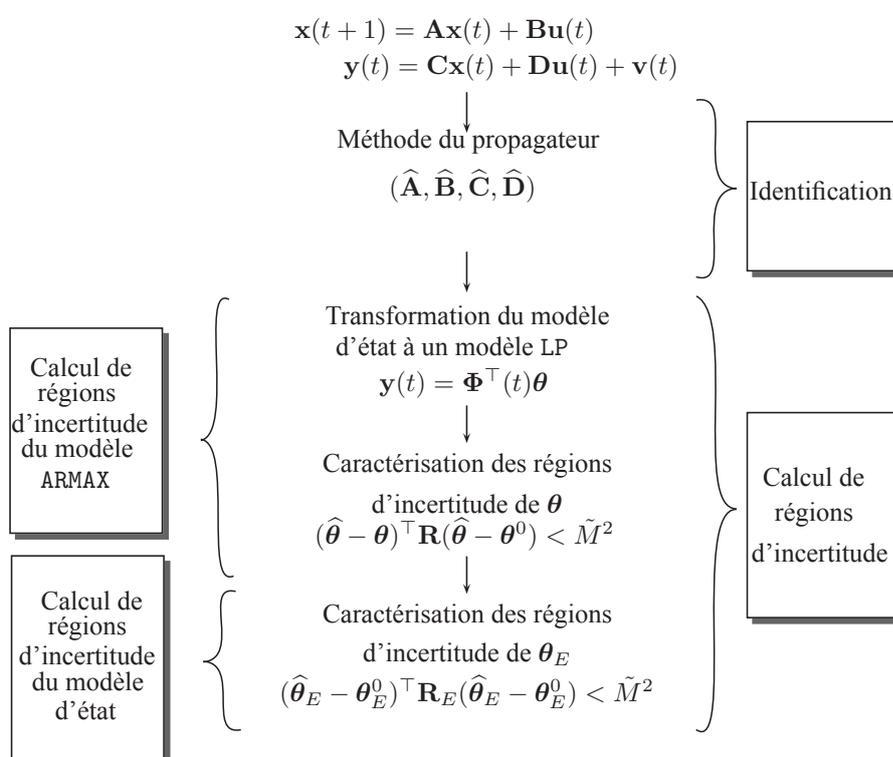


FIG. 3.3 – Caractérisation des domaines d'incertitude : approche indirecte.

3.4 Approche directe

Dans la section précédente, la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude présentée est basée sur la transformation du modèle d'état en un modèle LP. Afin de s'affranchir de cette transformation, nous proposons une deuxième méthode qui permet de décrire directement ces régions d'incertitude. Cette méthode se base sur les propriétés de la méthode du propagateur. Elle permet de quantifier les régions d'incertitude en deux temps, tout d'abord pour les paramètres des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} puis pour ceux de \mathbf{B} . Dans cette section, afin de simplifier les calculs nous considérons $\mathbf{D} = \mathbf{0}$.

3.4.1 Détermination des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{A} et \mathbf{C}

Afin de déterminer les domaines d'incertitudes des coefficients des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} , nous exploitons les propriétés de la méthode du propagateur. Comme les $n_x - 1$ premières lignes de la matrice \mathbf{A} estimée et la première ligne de la matrice \mathbf{C} estimée sont constituées de 0 et de 1 (cf. équation (3.22) et équation (3.24)), les domaines d'incertitude pour ces paramètres ne sont pas déterminés.

Une version modifiée de la matrice du propagateur peut être donnée par

$$\widehat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}(n_x + 1, :) \\ \widehat{\mathbf{P}}((j-1)i + 1, :) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(n_x, :) \\ \mathbf{C}(j, :) \end{bmatrix}, \quad j \in [2, n_y]. \quad (3.53)$$

Cette matrice peut être estimée en utilisant la régression linéaire suivante

$$\left\| \tilde{\mathbf{Z}}_2 - \widehat{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{Z}}_1 \right\|_F^2 \quad (3.54)$$

où $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ et $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ sont respectivement déduites de \mathbf{Z}_1 et \mathbf{Z}_2 d'une manière compatible avec $\widehat{\mathbf{P}}$. En utilisant la vectorisation et le produit de Kronecker, il est facile de vérifier que

$$\underbrace{\text{vec}(\tilde{\mathbf{Z}}_2^\top)}_{\mathbf{Z}_{\widehat{\mathbf{P}}}} = \underbrace{(\mathbf{I}_{(n_y, n_y)} \otimes \tilde{\mathbf{Z}}_1^\top)}_{\Phi_{\widehat{\mathbf{P}}}^\top} \underbrace{\text{vec}(\tilde{\mathbf{P}}^\top)}_{\theta_{\widehat{\mathbf{P}}}}. \quad (3.55)$$

soit

$$\text{vec}(\tilde{\mathbf{Z}}_2^\top) = \Phi_{\widehat{\mathbf{P}}}^\top \theta_{\widehat{\mathbf{P}}}. \quad (3.56)$$

Le modèle étant LP, en appliquant la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude présentée dans le paragraphe 3.2, on peut montrer que

$$(\widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}} - \theta_{\widehat{\mathbf{P}}}^0)^\top \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Phi_{\widehat{\mathbf{P}}}(t) \Phi_{\widehat{\mathbf{P}}}^\top(t) \right) (\widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}} - \theta_{\widehat{\mathbf{P}}}^0) < \tilde{M}_{\widehat{\mathbf{P}}}^2 \quad (3.57)$$

où $\theta_{\widehat{\mathbf{P}}}^0$ et $\widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}}$ sont respectivement les vecteurs de paramètres exacts et estimés. La borne $\tilde{M}_{\widehat{\mathbf{P}}}$ est donnée par

$$\tilde{M}_{\widehat{\mathbf{P}}}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\varepsilon_{\widehat{\mathbf{P}}}^\top(t, \widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}}) \varepsilon_{\widehat{\mathbf{P}}}(t, \widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}}) \right)$$

où $\varepsilon_{\widehat{\mathbf{P}}}(t, \widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}}) = \mathbf{Z}_{\widehat{\mathbf{P}}} - \Phi_{\widehat{\mathbf{P}}}^\top(t) \widehat{\theta}_{\widehat{\mathbf{P}}}$.

3.4.2 Détermination des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{B}

La matrice \mathbf{B} peut être estimée en minimisant la fonction coût suivante

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^{\top}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \mathbf{C} \mathbf{A}^{t-k-1} \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right)^{\top} \left(\mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \mathbf{C} \mathbf{A}^{t-k-1} \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} = \text{vec}(\mathbf{B})$. Connaissant les incertitudes sur les paramètres de \mathbf{A} et \mathbf{C} (cf. section 3.4.1) et en utilisant le résultat de l'annexe B, la fonction coût peut être approchée par l'équation suivante

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{b}(t) - \underbrace{\left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^{\top}(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right)}_{\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}^{\top}} (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \right)^{\top} \\ \left(\mathbf{b}(t) - \underbrace{\left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^{\top}(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right)}_{\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}^{\top}} (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \right) \end{aligned} \quad (3.58)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) = \mathbf{y}(t) - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^{\top}(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \left(d\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^{\top}(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \\ - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^{\top}(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\mathbf{A}(t-\tau) d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec $d\mathbf{A} = \mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}}$ et $d\mathbf{C} = \mathbf{C} - \widehat{\mathbf{C}}$. En appliquant la même procédure que celle utilisée dans la section 3.2, les régions de confiance des paramètres de la matrice \mathbf{B} peuvent être données par

$$(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}^0)^{\top} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}(t) \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}^{\top}(t) \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}^0) < \tilde{M}_{\mathbf{B}}^2 \quad (3.60)$$

où

$$\tilde{M}_{\mathbf{B}}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^{\top}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \right). \quad (3.61)$$

Ces régions sont des ellipses centrées en $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}$ dont les directions sont définies par la matrice $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}(t) \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}^{\top}(t))$.

3.4.3 Extension de l'approche directe au cas d'un système continu

Dans les sections 3.3 et 3.4, nous avons présenté des méthodes de caractérisation des domaines d'incertitude pour un modèle MIMO à temps discret. Comme dans de nombreuses applications (estimation de paramètres physiques, diagnostic, ...), il est préférable d'utiliser une modélisation à temps continu, nous adaptons la méthode précédente au cas de systèmes à temps continu. Rappelons que cette méthode permet l'estimation directe de représentation minimale d'état dans une base canonique observable fixe. Ceci permet de faciliter la description des régions d'incertitude des paramètres du système.

Ainsi, considérons le système linéaire invariant à temps continu suivant

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.62a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (3.62b)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie du système. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur d'état et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le bruit de sortie. Dans cette section, nous considérons $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. Cette simplification peut être justifiée par le fait que ce cas est habituellement utilisé dans la pratique. Néanmoins, tous les calculs introduits dans cette section peuvent être aisément étendus au cas où $\mathbf{D} \neq \mathbf{0}$. En plus, nous supposons que les résidus sont bornés. Ce cas particulier peut être justifié par le fait que dans de nombreuses situations pratiques, les résidus sont liés à des dynamiques complexes non prises en compte dans le modèle linéaire à temps invariant. Dans ce cas, les résidus contiennent des parties déterministes qu'une hypothèse classique de processus stochastique ne peut pas englober. Sous ces conditions, l'hypothèse "résidus bornés" est plus efficace.

La méthode de caractérisation des régions d'incertitude présentée dans la section 3.2 est appliquée pour déterminer dans un premier temps les régions de confiance des coefficients des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} puis les régions de confiance des paramètres de la matrice \mathbf{B} .

3.4.3.1 Détermination des domaines d'incertitude des coefficients \mathbf{A} et \mathbf{C}

L'objectif de ce paragraphe est de caractériser les domaines d'incertitude des paramètres des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} . Comme nous avons vu dans le paragraphe 2.2.2.2, ces paramètres peuvent être directement extraits de la matrice du propagateur \mathbf{P} . Comme pour les systèmes discrets, sachant que les $n_x - 1$ premières lignes de \mathbf{A} et la première ligne de \mathbf{C} sont constituées de 0 et de 1, les domaines d'incertitude pour ces paramètres ne seront pas déterminés. Les paramètres à estimer sont rassemblés dans la matrice suivante

$$\widehat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{P}}(n_x + 1, :) \\ \widehat{\mathbf{P}}((j-1)i + 1, :) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(n_x, :) \\ \mathbf{C}(j, :) \end{bmatrix}, \quad j \in [2, n_y]. \quad (3.63)$$

Cette matrice peut être estimée en utilisant

$$\left\| \tilde{\mathbf{Z}}_2 - \widehat{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{Z}}_1 \right\|_F^2 \quad (3.64)$$

où $\tilde{\mathbf{Z}}_1$ et $\tilde{\mathbf{Z}}_2$ sont respectivement déduites de \mathbf{Z}_1 et \mathbf{Z}_2 d'une manière compatible avec $\hat{\mathbf{P}}$.

Ainsi, il est facile de vérifier que

$$\underbrace{\text{vec}(\tilde{\mathbf{Z}}_2^\top)}_{\mathbf{Z}_{\hat{\mathbf{P}}}} = \underbrace{(\mathbf{I}_{(n_y, n_y)} \otimes \tilde{\mathbf{Z}}_1^\top)}_{\Phi_{\hat{\mathbf{P}}}^\top} \underbrace{\text{vec}(\tilde{\mathbf{P}}^\top)}_{\boldsymbol{\theta}_{\hat{\mathbf{P}}}}. \quad (3.65)$$

En appliquant la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude présentée dans le paragraphe 3.2, on peut montrer que

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}} - \boldsymbol{\theta}_{\hat{\mathbf{P}}}^0)^\top \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Phi_{\hat{\mathbf{P}}}(t) \Phi_{\hat{\mathbf{P}}}^\top(t) \right) (\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}} - \boldsymbol{\theta}_{\hat{\mathbf{P}}}^0) < \tilde{M}_{\hat{\mathbf{P}}}^2 \quad (3.66)$$

où $\boldsymbol{\theta}_{\hat{\mathbf{P}}}^0$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}}$ sont les vecteurs de paramètres exactes et estimés. La borne $M_{\hat{\mathbf{P}}}$ est donnée par

$$\tilde{M}_{\hat{\mathbf{P}}}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{\mathbf{P}}}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{\mathbf{P}}}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}}) \right)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}_{\hat{\mathbf{P}}}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}}) = \mathbf{Z}_{\hat{\mathbf{P}}} - \Phi_{\hat{\mathbf{P}}}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{P}}}$.

3.4.3.2 Détermination des domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{B}

Notons que \mathbf{B} peut être estimée en minimisant la fonction coût suivante

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^\top(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{y}(t) - \left(\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \right) \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right)^\top \\ &\quad \left(\mathbf{y}(t) - \left(\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \right) \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} = \text{vec}(\mathbf{B})$. Comme cela est montré dans l'annexe C, la fonction coût peut être approchée par l'équation suivante

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &\approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{b}(t) - \underbrace{\left(\hat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\hat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right)}_{\Phi_{\hat{\mathbf{B}}}^\top} (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \right)^\top \\ &\quad \left(\mathbf{b}(t) - \underbrace{\left(\hat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\hat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right)}_{\Phi_{\hat{\mathbf{B}}}^\top} (\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \right) \quad (3.67) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) = \mathbf{y}(t) - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \left(d\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \\ - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\mathbf{A}(t-\tau) d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \end{aligned} \quad (3.68)$$

où $d\mathbf{A} = \mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}}$ et $d\mathbf{C} = \mathbf{C} - \widehat{\mathbf{C}}$.

En appliquant la même procédure que celle utilisée dans la section 3.2, les régions de confiance des paramètres de la matrice \mathbf{B} peuvent être données par

$$(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}^0)^\top \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}(t) \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}^\top(t) \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}^0) < \widetilde{M}_{\mathbf{B}}^2 \quad (3.69)$$

où

$$\widetilde{M}_{\mathbf{B}}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^\top(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}) \right). \quad (3.70)$$

Ces régions sont des ellipses centrées en $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}$ dont les directions sont définies par la matrice $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}(t) \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{B}}^\top(t)$.

3.4.4 Exemple numérique

3.4.4.1 Cas discret

Dans ce paragraphe, nous considérant le même système présenté dans 3.3.3 donné par

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -1 \\ 1 & 0.3 & 5 \\ -2 & -0.4 & -0.6 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.71)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (3.72)$$

Le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien, centré, de variance unité et de longueur 1000. Une simulation de Monte Carlo de 1000 tirages est effectuée. Le bruit $\mathbf{v}(t)$ est obtenu en filtrant un bruit blanc gaussien $\mathbf{e}(t)$ de moyenne nulle

$$\mathbf{v}(t) = \frac{1}{0.8 + q} \mathbf{e}(t) \quad (3.73)$$

tel que le rapport signal sur bruit est égal à 20dB. Nous appliquons la même méthode d'identification utilisé dans l'exemple 3.3.3, c.-à-d., la méthode du propagateur, afin d'identifier les paramètres du système. L'approche directe de caractérisation des domaines d'incertitude d'un système discret est utilisée pour déterminer les régions d'incertitude des

coefficients des matrices d'état. De la même manière que l'approche indirecte, nous introduisons le taux de défaillance afin d'évaluer les performances de cette méthode.

	$(-a_0, -a_1)$	$(-a_2, b_0^1)$	$(-a_1, c_0^1)$
approche indirecte	1.8%	2.4%	8.4%
approche directe	1.5%	1.9%	6.3%

TABLE 3.3 – Taux de défaillance.

Dans le tableau 3.3, le taux de défaillance obtenu par l'approche directe est comparé à celui obtenu par l'approche indirecte (cf. section 3.3.3). En examinant ce tableau, nous remarquons que la méthode directe est plus fiable que l'approche indirecte. Ceci peut être expliqué par le fait que l'approche indirecte nécessite une caractérisation des domaines d'incertitude en deux temps qui peut entraîner des erreurs et faire croître le taux de défaillance de l'approche.

3.4.4.2 Cas continu

Afin d'évaluer la méthode de quantification des régions d'incertitude présentée dans cette section, nous considérons ici un exemple de système linéaire continu dans le temps d'ordre trois avec deux entrées et deux sorties, donné par

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.74a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (3.74b)$$

L'entrée d'excitation est choisie comme un bruit blanc gaussien, centré et de variance unité de longueur $N = 1000$. La période d'échantillonnage est égale $0.1s$. Le bruit de mesure \mathbf{v} est un bruit blanc gaussien de rapport signal sur bruit égal 35dB. La valeur initiale du vecteur d'état est fixée à zéro. Les résultats présentés ci-après sont obtenus après un tirage de Monte Carlo de taille 200. Afin de réduire l'effet de bruit sur les paramètres estimés du système, nous introduisons la variable instrumentale suivante [MOGG07]

$$\Xi = \mathbf{U}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{u}((k-p)T_s) & \mathbf{u}((k+1-p)T_s) & \cdots & \mathbf{u}((N-p)T_s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{u}((k-1)T_s) & \mathbf{u}(kT_s) & \cdots & \mathbf{u}((N-1)T_s) \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

La méthode du propagateur est utilisée pour estimer les paramètres du système. Dans cette méthode, les dérivées des données E/S sont données par le filtre des moments partiels réinitialisés. Ainsi, le paramètre de synthèse \hat{T} peut être fixé de façon à minimiser la variance de l'erreur de prédiction. Pour un système du premier ordre, cette valeur optimale vaut approximativement $\sqrt{3\tau}$ où τ est la constante de temps du système [Tri87]. Pour les systèmes d'ordre supérieur, une valeur de l'ordre des 2/3 du temps de réponse à

95% conduit généralement à de bons résultats.

Afin d'illustrer les performances de l'approche développée, l'algorithme du propagateur à temps continu (cf. chapitre 2 sous-section 2.3) est comparé à l'algorithme MPR+PIMOESP [MOGG07]. Cet algorithme est une extension de l'algorithme MOESP dans le cas discret en filtrant les données E/S par un filtre MPR. Dans ces deux cas, les horizons passés et futurs sont égaux à 4.

Les figures 3.4 et 3.5 présentent les pôles estimés par la méthode du propagateur et la méthode MPR+PIMOESP. Les pôles du système simulé sont symbolisés par $+$. Ces différents tracés montrent clairement que ces deux méthodes donnent de bons résultats.

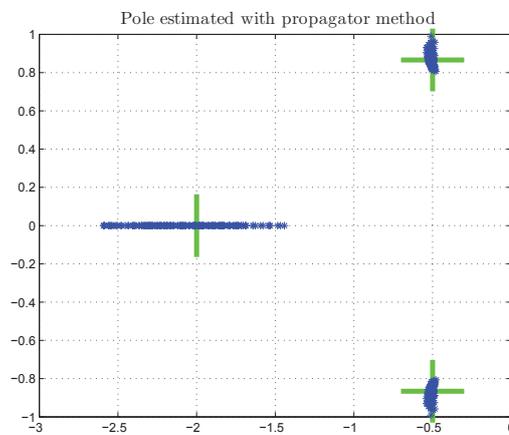


FIG. 3.4 – Pôles estimés à l'aide de la méthode du propagateur

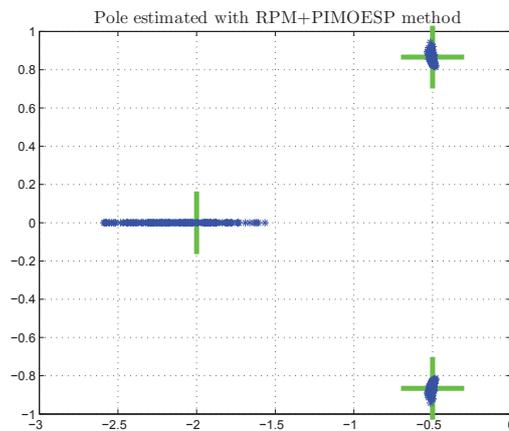


FIG. 3.5 – Pôles estimés à l'aide de la méthode MPR+PIMOESP.

La figure 3.6 présente les paramètres estimés ($\mathbf{A}(3,1)$, $\mathbf{A}(3,2)$), symbolisés par (*) pour chaque simulation de monte carlo, les paramètres réels (\times) et la valeur moyenne des paramètres estimés (+). Le taux de défaillance de ($\mathbf{A}(3,1)$, $\mathbf{A}(3,1)$) est égal à 7%.

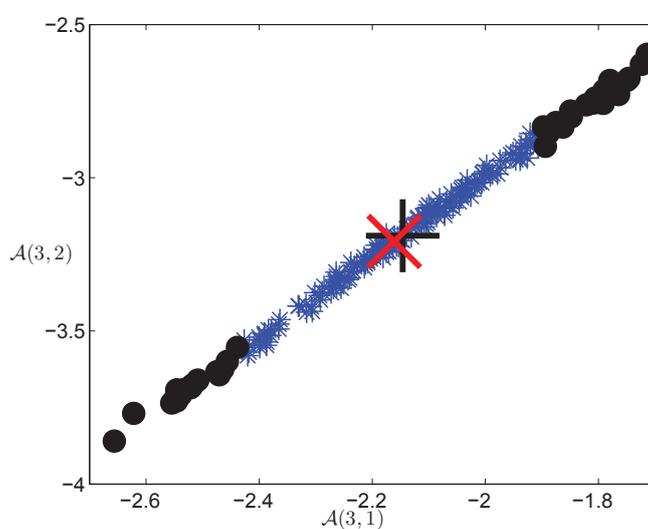


FIG. 3.6 – Estimation paramétrique du ($\mathbf{A}(3,1)$, $\mathbf{A}(3,1)$). Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (\times), les paramètres estimés par des croix bleues (*) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (\bullet) représentent des valeurs défailtantes.

De la même manière nous présentons sur la figure 3.7 les paramètres estimés ($\mathbf{B}(1,1)$, $\mathbf{B}(1,2)$) symbolisés par (*), les paramètres réels (\times) et la valeur moyenne des paramètres estimés (+). Le taux de défaillance est ici égal à 10%.

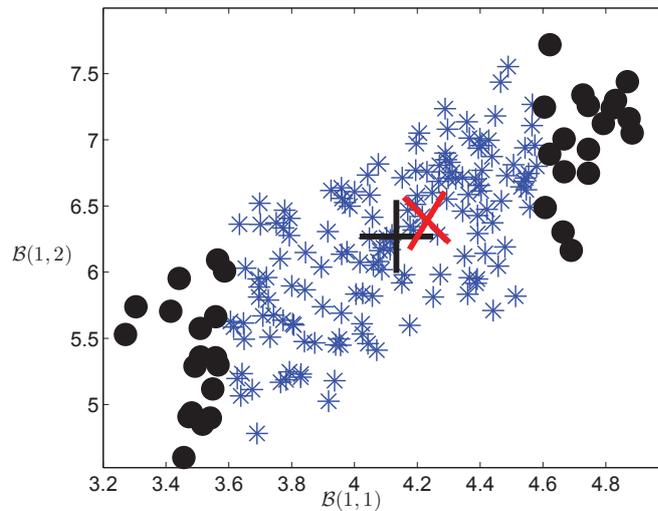


FIG. 3.7 – Estimation paramétrique du $(\mathbf{B}(1, 1), \mathbf{B}(1, 2))$. Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (\times), les paramètres estimés par des croix bleues ($*$) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire ($+$). Les disques noirs (\bullet) représentent des valeurs défailtantes.

Ces deux figures montrent que la méthode proposée pour déterminer les régions d'incertitude paramétrique donne de bons résultats. On peut toutefois noter un taux de défaillance de la méthode relativement important, même si ce taux n'indique pas de combien le vecteur paramètre exact est éloigné de l'ellipse d'incertitude.

3.4.5 Conclusion

Dans ce paragraphe nous avons présenté une méthode directe qui permet de caractériser les domaines d'incertitudes paramétrique d'un système discret (cf. figure 3.8) et d'un système continu (cf. figure 3.9). Grâce aux propriétés de la méthode du propagateur, cette méthode permet de fournir les régions d'incertitude des matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} puis \mathbf{B} et \mathbf{D} . Contrairement à l'approche indirecte, cette méthode ne nécessite pas la transformation du modèle d'état en un modèle LP. Ceci permet d'avoir des résultats meilleurs et un taux de défaillance plus petit.

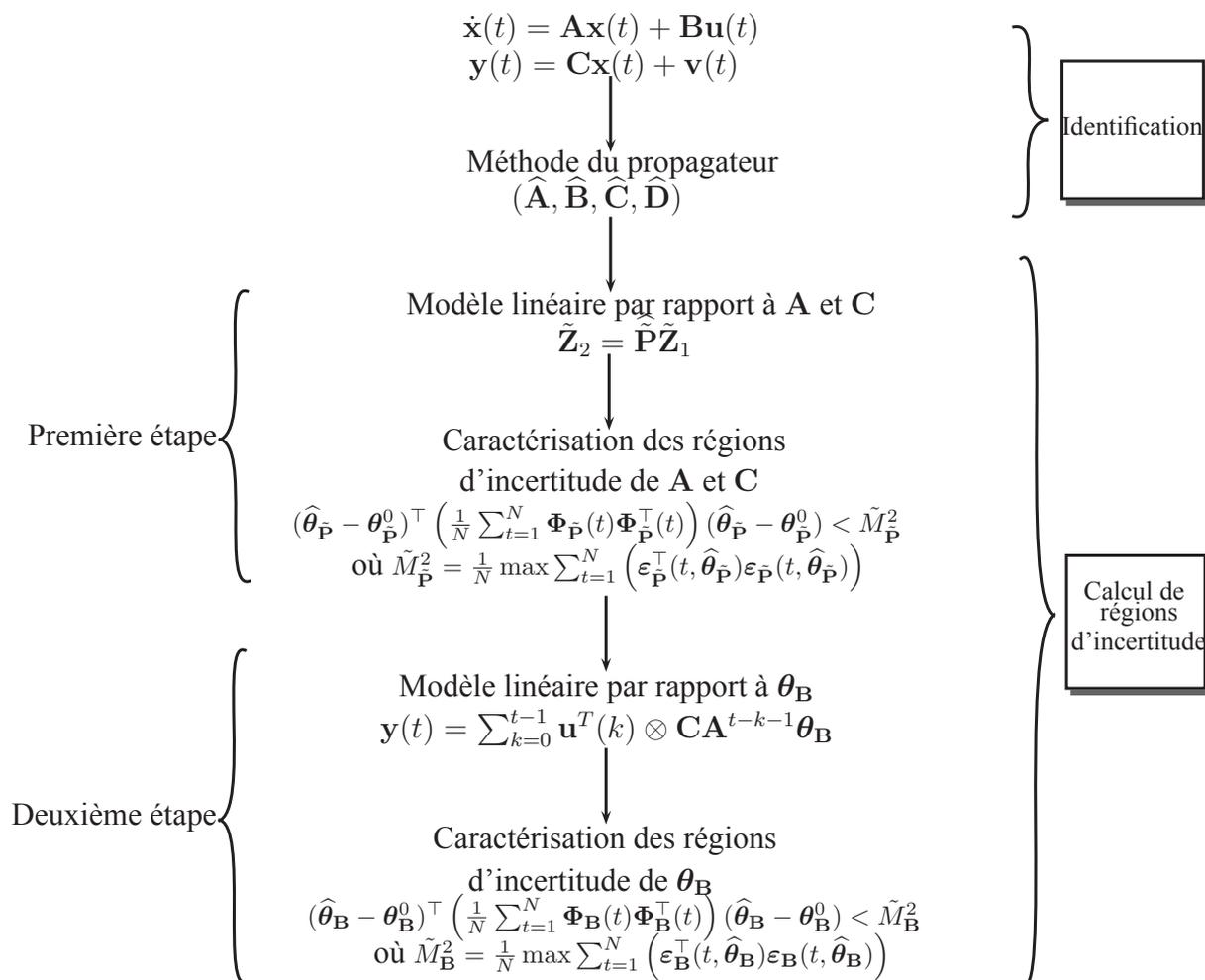


FIG. 3.8 – Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système discret : approche directe.

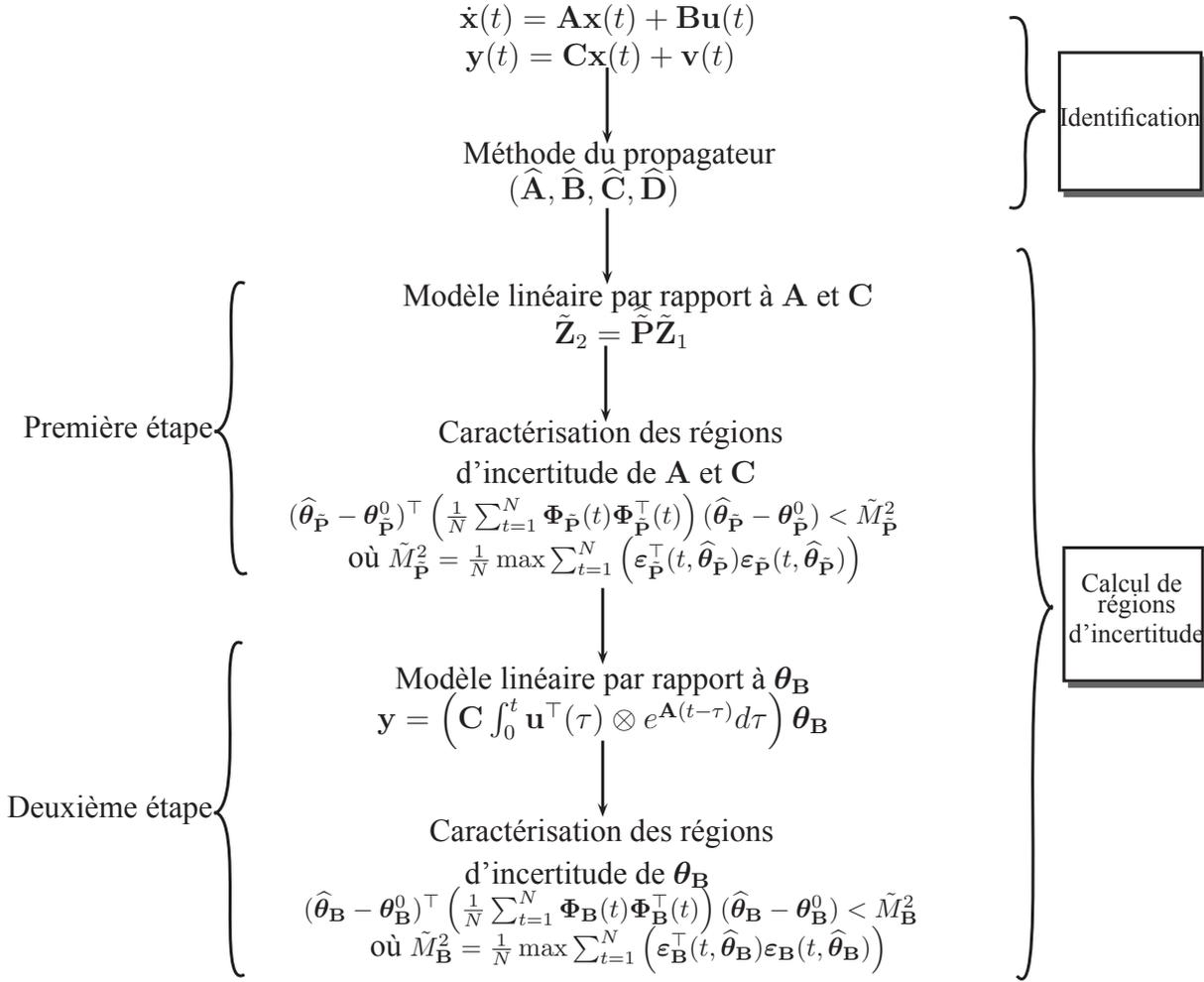


FIG. 3.9 – Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système à temps continu : Approche directe.

3.5 Quantification des incertitudes en utilisant l'algorithme des sous-espaces basé sur les moindres carrés

Dans cette section, nous proposons d'estimer le vecteur d'état en utilisant l'algorithme des sous-espaces basé sur les moindres carrés. Cet algorithme est une version modifiée de l'algorithme PBSID [Chi07b] et adaptée à la méthode du propagateur. Connaissant le vecteur d'état, les domaines d'incertitude sont directement déduits en appliquant la méthode proposée dans la section 3.2.

3.5.1 Caractérisation des domaines d'incertitudes

En utilisant l'algorithme des sous-espaces fondé sur les moindres carrés, nous obtenons directement un modèle LP. Par la suite, la technique présentée dans la section 3.2 peut être directement appliquée afin de décrire les régions d'incertitude des paramètres du modèle d'état.

Connaissant \mathbf{y} , \mathbf{u} et $\hat{\mathbf{x}}$, le modèle d'état (3.26) peut être transformé comme suit

$$\underbrace{\text{vec} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^\top(t+1) & \mathbf{y}^\top(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_M(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x+n_y} \otimes [\hat{\mathbf{x}}^\top(t) & \mathbf{u}^\top(t)]^\top \end{bmatrix}}_{\Phi^\top(t)} \underbrace{\text{vec} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top & \mathbf{C}^\top \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{D}^\top \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_E} + \text{vec} \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & \mathbf{v}^\top(t) \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Il est évident que l'estimation des matrices d'état peut être obtenue en utilisant l'algorithme des moindres carrés et en minimisant la fonction coût suivante [Lju99c, Appendix II]

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\theta}_E) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\mathbf{y}_M(t) - \Phi_M^\top(t) \boldsymbol{\theta}_E)^\top (\mathbf{y}_M(t) - \Phi_M^\top(t) \boldsymbol{\theta}_E) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \boldsymbol{\theta}_E) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{\theta}_E). \end{aligned}$$

En appliquant la même démarche que celle utilisée dans la section 3.2, on peut montrer que les domaines d'incertitudes sont donnés par l'équation suivante

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}}_E - \boldsymbol{\theta}_E^0)^\top \mathbf{R}_E (\hat{\boldsymbol{\theta}}_E - \boldsymbol{\theta}_E^0) < \tilde{M}^2 \quad (3.77)$$

où $\boldsymbol{\theta}_E^0$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}_E$ sont respectivement les vecteurs de paramètres réels et estimés et $\mathbf{R}_E = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Phi_M(t) \Phi_M^\top(t)$. Ces régions sont des ellipsoïdes centrés en $\hat{\boldsymbol{\theta}}_E$ dont les directions sont définies par la matrice \mathbf{R}_E . La borne \tilde{M} est donnée par

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)$$

où les résidus sont donnés par $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}_M(t) - \Phi_M^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}_E$.

3.5.2 Exemple de simulation

Nous considérons le même exemple que celui donné dans la section 3.3.3, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & -1 \\ 1 & 0.3 & 5 \\ -2 & -0.4 & -0.6 \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ces matrices peuvent être réécrites comme suit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0.2 & -0.1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 \\ -0.3 & -6.9 \\ -14.6 & -2.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 1.0 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

en utilisant

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -1 & -0.4 & -5.6 \\ 10.6 & 2.12 & 2.36 \end{bmatrix}$$

comme matrice de changement de base. Le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien, centré et de variance unité de longueur 1000. Nous procédons à une simulation de Monte Carlo de 1000 tirages afin d'identifier les matrices d'état par la méthode des sous-espaces basée sur les moindres carrés (cf. 2.2.3). Le bruit de sortie \mathbf{v} est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de rapport signal sur bruit égal 20dB. Afin de satisfaire l'hypothèse $\mathbf{A}^j \approx 0$ pour tous $j \geq p$, l'indice passé est choisi tel que $p = 20$.

Dans le tableau 3.4, nous présentons les valeurs moyennes et les écarts-types des paramètres estimés du modèle d'état en utilisant la méthode développée dans la section 2.2.3. Ce tableau montre que la méthode des sous-espaces basée sur les moindres carrés permet d'avoir une bonne estimation des matrices d'état (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C}).

	Paramètres réels	Paramètres estimés
$-a_0$	0.1640	$0.1640 \pm 2.60 \cdot 10^{-7}$
$-a_1$	0.2400	$0.2400 \pm 3 \cdot 10^{-7}$
$-a_2$	-0.1000	$-0.1000 \pm 3.30 \cdot 10^{-7}$
b_0^1	7.3777	$7.3775 \pm 8.57 \cdot 10^{-5}$
b_0^2	0.2006	$0.2007 \pm 8.93 \cdot 10^{-5}$
b_1^1	-0.3933	$-0.3936 \pm 9.77 \cdot 10^{-5}$
b_1^2	-6.9678	$-6.9682 \pm 8.53 \cdot 10^{-5}$
b_2^1	-14.6091	$-14.6093 \pm 9.02 \cdot 10^{-5}$
b_2^2	-2.0070	$-2.0070 \pm 8.09 \cdot 10^{-5}$
c_0^2	1.0406	$1.0406 \pm 3.2 \cdot 10^{-7}$
c_1^2	-0.3068	$-0.3068 \pm 4.3 \cdot 10^{-7}$
c_2^2	0.6707	$0.6706 \pm 6.4 \cdot 10^{-7}$

TAB. 3.4 – Paramètres estimés en utilisant la méthode des sous-espaces basée sur les moindres carrés.

Les résultats d'identification sont aussi donnés sur la figure 3.10. Ainsi, la croix noire (+) représente la valeur moyenne des paramètres estimés, la croix rouge (×) symbolise

les paramètres réels et les croix bleues (*) représentent les paramètres estimés du système pour 1000 tirages de Monte Carlo.

De la même manière que pour l'exemple 3.3.3, le tableau 3.5 présente le taux de défaillance pour $(-a_0, -a_1)$, $(-a_2, b_0^1)$ et $(-a_1, c_0^1)$. Ces valeurs montrent l'efficacité de la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude présentée dans cette section.

$(-a_0, -a_1)$	$(-a_2, b_0^1)$	$(-a_1, c_0^1)$
0.8%	2%	6.7%

TAB. 3.5 – Taux de défaillance.

3.5.3 Application à un prototype d'éolienne

Le système considéré est un prototype d'un banc éolien, accessible à l'Université Technique de Delft [VHB⁺08, HVB⁺10, VHB⁺10], constitué d'un rotor comprenant deux pales, comme indiqué sur la figure 3.11.



FIG. 3.11 – Photo de l'éolienne à deux pales. La personne à côté de cette éolienne illustre la taille du système.

Ces pales sont équipées d'un certain nombre de dispositifs de commande qui permettent de changer localement le profil de soulèvement des pales afin de supprimer certaines vibrations. Ces perturbations sont principalement dues au mouvement de rotation. Les dispositifs de contrôle sont composés, pour chaque pale, de deux volets de bord de fuite. Ces volets s'ouvrent automatiquement si la vitesse du vent devient excessive ou si un problème est décelé. Ils ralentissent alors les pales en provoquant un décrochage aérodynamique. La commande des volets est réalisée à l'aide de deux actionneurs placés sur

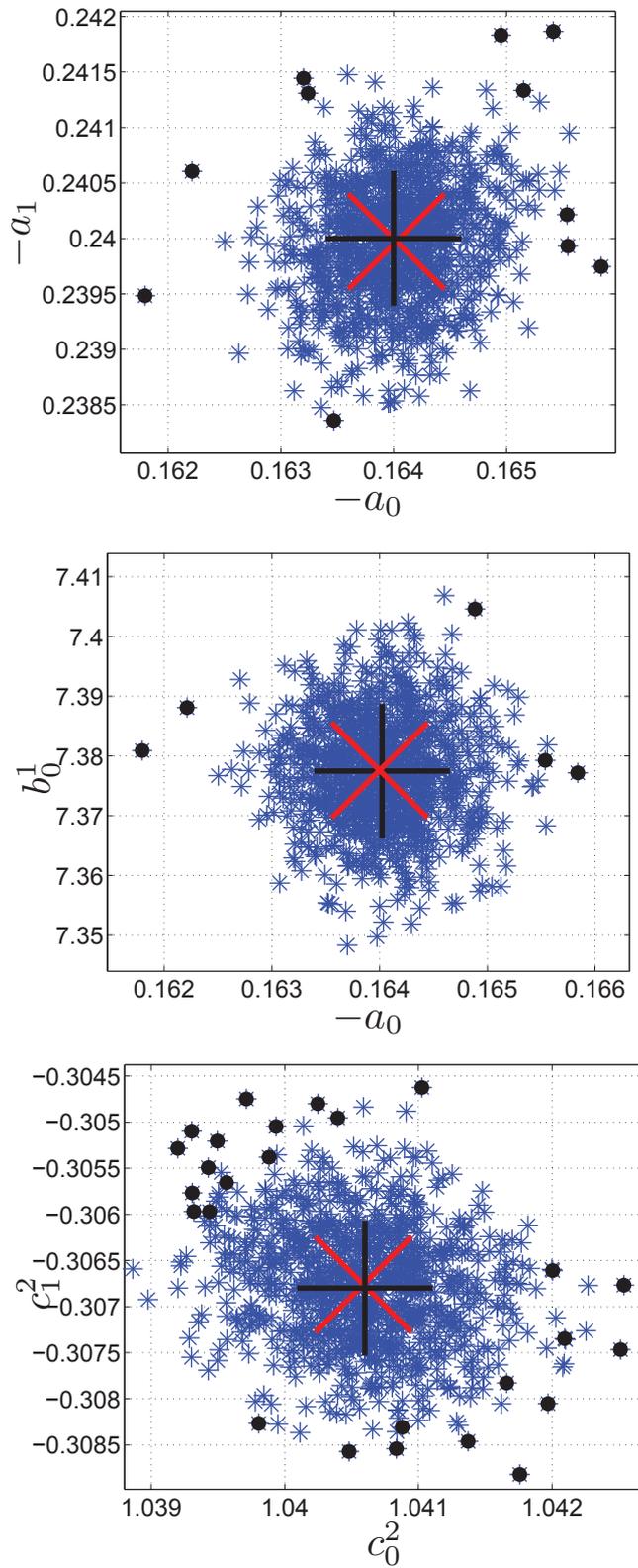


FIG. 3.10 – Estimation paramétrique du modèle d'état. Les paramètres réels sont symbolisés par une croix rouge (x), les paramètres estimés par des croix bleues (*) et la valeur moyenne des paramètres estimés par une croix noire (+). Les disques noirs (•) représentent des valeurs défailtantes.

chaque pale. Chaque actionneur est situé sur un volet de bord. Cette proximité permet d'appliquer le même signal de commande \mathbf{u} aux deux actionneurs de chaque pale. Deux capteurs (de type macro fibre patch) sont employés pour mesurer les mouvements de pales \mathbf{y} (voir figure 3.12).

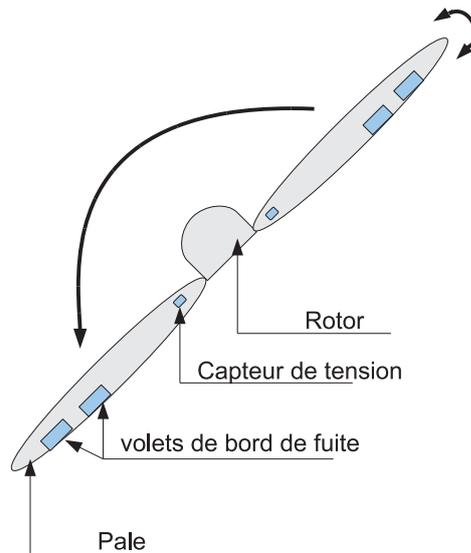


FIG. 3.12 – Schéma de principe de l'éolienne.

Il est intéressant d'identifier le modèle entre le signal d'entrée (\mathbf{u}) et le signal de sortie (\mathbf{y}) et de caractériser les domaines d'incertitude paramétrique dans le but d'élaborer une loi de commande qui permette de supprimer la vibration des deux pales.

3.5.3.1 Identification du modèle

Considérons un système à deux entrées $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2]$ et deux sorties $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2]$ décrit par (cf. figure 3.13)

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{d}(t) + \mathbf{K}\mathbf{e}(t) \quad (3.78a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (3.78b)$$

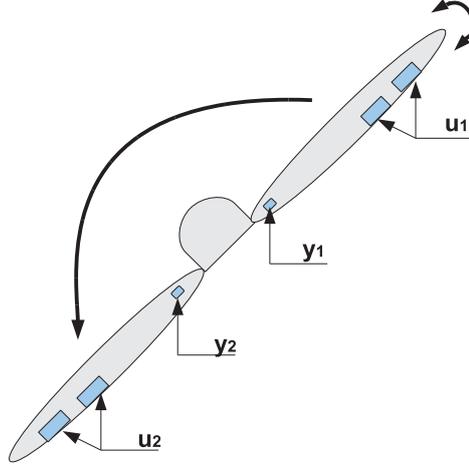


FIG. 3.13 – Les entrées et sorties de l'éolienne.

où $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$, sont les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie du système. $\mathbf{e}(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le processus d'innovation simulé à un bruit blanc de moyenne nulle. Le système considéré présente par construction des perturbations de charge périodiques ($\mathbf{d}(t)$) multiple de la vitesse de rotation. Dans la suite de cette étude, ces perturbations sont prises en compte à l'aide d'une combinaison linéaire de fonctions périodiques connues *a priori*. Une étude des propriétés aérodynamiques de l'éolienne présentée dans [Win08] permet de justifier une telle hypothèse.

La méthode PBSID est basée sur la forme de prédiction suivante

$$\mathbf{x}(t+1) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{z}(t) \quad (3.79a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{e}(t) \quad (3.79b)$$

où $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C}$, $\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \ \mathbf{G} \ \mathbf{K}]$ et $\mathbf{z}^\top(t) = [\mathbf{u}^\top(t) \ \mathbf{d}^\top(t) \ \mathbf{y}^\top(t)]^\top$. C'est la même forme que le modèle (2.72) en remplaçant les matrices

$$\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \ \mathbf{K}] \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^\top(t) = [\mathbf{u}^\top(t) \ \mathbf{y}^\top(t)]^\top \quad (3.80)$$

par

$$\tilde{\mathbf{B}} = [\mathbf{B} \ \mathbf{G} \ \mathbf{K}] \quad \text{et} \quad \mathbf{z}^\top(t) = [\mathbf{u}^\top(t) \ \mathbf{d}^\top(t) \ \mathbf{y}^\top(t)]^\top. \quad (3.81)$$

Ainsi, nous appliquons la méthode présentée dans le chapitre 2 (cf. paragraphe 2.2.3) afin d'identifier les matrices d'état du système. Les données expérimentales ont été obtenues pour une vitesse de rotation égale à 430 tours par minute. L'ordre de système est estimé égal à 12. Rappelons que cette méthode repose sur les quatre étapes suivantes [VHB⁺08, HWV09, FMPV10]

- Étape 1 : Estimation de la matrice $\mathbf{C}\mathbb{K}$.
- Étape 2 : Construction de la matrice $\tilde{\mathbf{\Gamma}}_p\mathbb{K}$.
- Étape 3 : Construction de la matrice $\mathbf{\Gamma}_p\mathbb{K}$.
- Étape 4 : Estimation du vecteur d'état.

Connaissant \mathbf{y} , \mathbf{u} et $\hat{\mathbf{x}}$, les matrices (\mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{G} , \mathbf{C}) peuvent être estimées en résolvant le problème des moindres carrés. Les sorties estimées sont présentées sur la figure 3.14

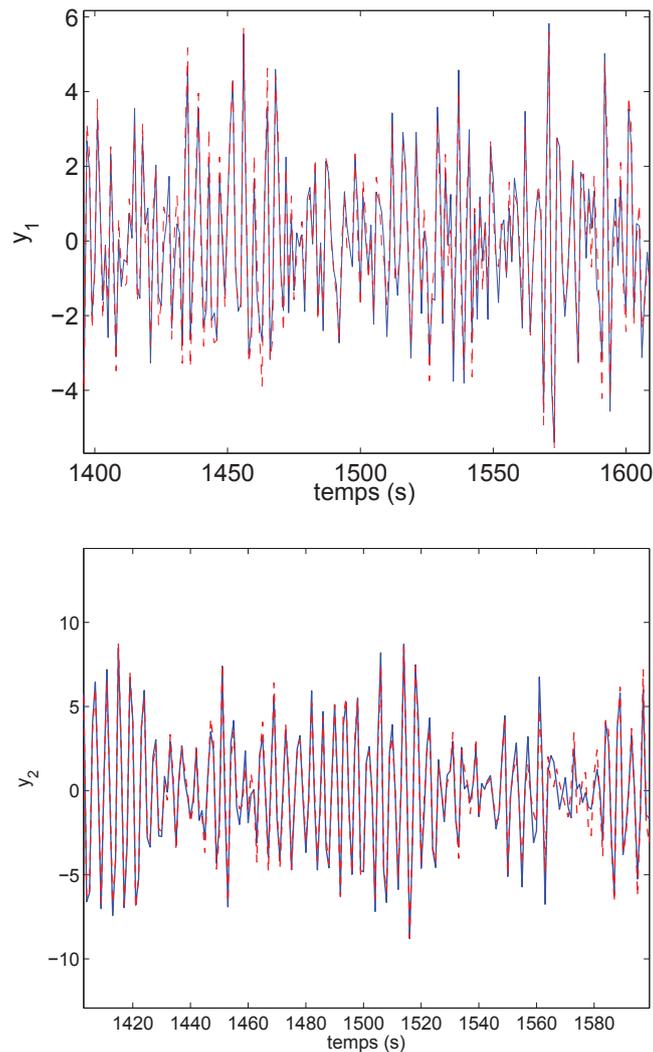


FIG. 3.14 – Sortie réelle (trait plein bleu) et sortie estimée (trait pointillé rouge) du système.

Ces deux figures montrent que nous avons une bonne estimation de la sortie du système. En plus, afin de montrer les performances du modèle identifié, nous définissons “the Best Fit” (% BFT) [Lju99c] et “the Percent Variance Accounted For”(% VAF) [VV02].

Ces critères sont définis comme suit

$$\text{BFT} = 100\% \times \max \left(1 - \frac{\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|_2}{\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_m\|_2}, 0 \right) \quad (3.82)$$

$$\text{VAF} = 100\% \times \max \left(1 - \frac{\text{var}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{\text{var}(\mathbf{y})}, 0 \right) \quad (3.83)$$

où $\hat{\mathbf{y}}$ est la sortie simulé et \mathbf{y}_m est la valeur moyenne de \mathbf{y} . Dans le tableau 3.6, la méthode SBMC adaptée à la méthode du propagateur est comparée à la méthode PO-MOESP [VV07] en examinant % VAF et % BFT.

	Pale 1		Pale 2	
Algorithm	% BFT	% VAF	% BFT	% VAF
SBMC	73.93	93.20	72.15	96.01
PO-MOESP	66.57	88.82	71.72	95.43

TAB. 3.6 – % BFT et % VAF pour differents algorithmes d'identification.

Le tableau 3.6 montre que la méthode SBMC adaptée à la méthode du propagateur donne des résultats meilleurs que la méthode PO-MOESP.

3.5.3.2 Détermination des domaines d'incertitude

Connaissant $\hat{\mathbf{x}}$, le modèle (3.78) peut être récrit sous la forme LP suivante

$$\underbrace{\text{vec} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t+1)^\top & \mathbf{y}(t)^\top \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_M(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_x+n_y} \otimes [\mathbf{x}(t)^\top & \mathbf{u}(t)^\top & \mathbf{d}(t)^\top]^\top \end{bmatrix}}_{\Phi^\top(t)} \underbrace{\text{vec} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^\top & \mathbf{C}^\top \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{G}^\top & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}} + \underbrace{\text{vec}([\mathcal{K}\mathbf{e}(t)^\top \quad \mathbf{e}(t)^\top])}_{\mathbf{v}(t)}. \quad (3.84)$$

En appliquant la technique de caractérisation des domaines d'incertitude présentée dans le chapitre 3 (cf. paragraphe 3.5), nous pouvons écrire

$$(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^\top \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \Phi^\top(t) \Phi(t) \right) (\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) < \tilde{M}^2$$

où

$$\tilde{M}^2 = \frac{1}{N} \max \sum_{t=1}^N \left(\boldsymbol{\varepsilon}^\top(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\varepsilon}(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) \right)$$

et les résidus $\varepsilon(t, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \mathbf{y}_M(t) - \boldsymbol{\Phi}^\top(t) \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Vu le nombre important de paramètres du modèle, il est difficile de représenter leurs domaines d'incertitude. Il est plus intéressant de représenter le domaine d'incertitude de la réponse fréquentielle du système. Ceci peut être obtenue en utilisant la relation suivante

$$\text{cov}(\Delta \mathbf{G} \Delta \mathbf{G}^*) = \frac{\delta \hat{\mathbf{G}}}{\delta \boldsymbol{\theta}} \mathbf{R} \frac{\delta \hat{\mathbf{G}}^*}{\delta \boldsymbol{\theta}} \quad (3.85)$$

où $\mathbf{G}(\omega) = \mathbf{C}(j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$. Dans le cas de la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude présentée dans [Lju99c]

$$\mathbf{R} = \lambda \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t))$$

où λ est la variance de bruit. Dans notre cas (cf. section 3.5), la matrice \mathbf{R} est donnée par

$$\mathbf{R} = \tilde{M}^2 \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\Phi}(t) \boldsymbol{\Phi}^\top(t)).$$

Le domaine d'incertitude de la réponse fréquentielle donné par ces deux méthodes est présenté sur la figure 3.15.

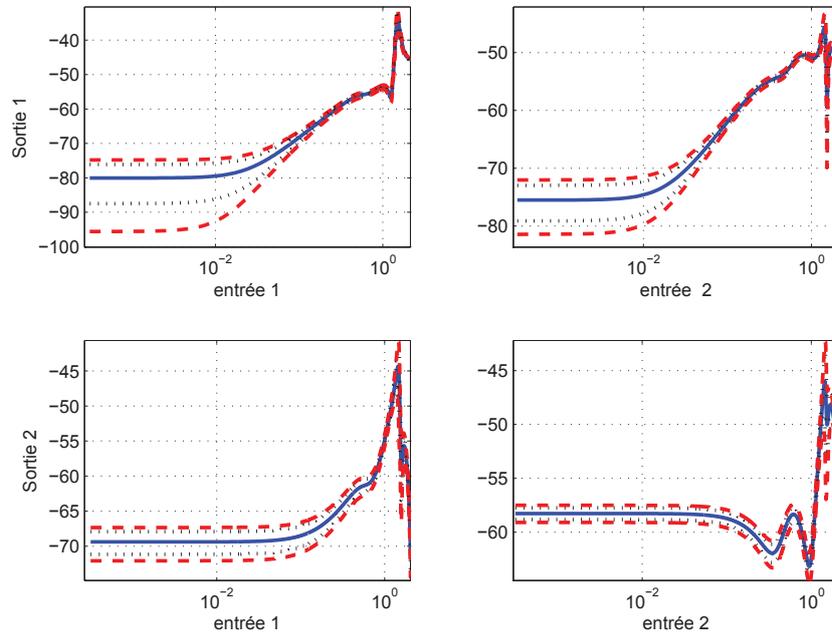


FIG. 3.15 – réponse fréquentielle estimé (trait plein bleu) avec un domaine d'incertitude obtenu par la méthode développée (trait interrompu rouge) et par la méthode de Ljung (trait pointillé noir).

Cette figure montre que notre méthode est plus conservatrice que la méthode présentée dans [Lju99c]. Néanmoins, cette méthode présente l'avantage de tenir compte de l'erreur due au bruit et de l'erreur de modélisation dans ces régions d'incertitude. Ces domaines d'incertitude présentent un grand intérêt dans un objectif de commande robuste.

3.5.4 Synthèse

L'approche proposée dans cette section permet d'obtenir des domaines d'incertitude réalistes (cf. figure 3.16). Notons que dans cette méthode, nous n'avons pas tenu compte des incertitudes sur le vecteur d'état. Cette étape est en cours d'étude. Elle permettra très probablement d'améliorer la caractérisation des domaines d'incertitude. Rappelons aussi que l'avantage de la méthode d'identification est son utilisation possible en boucle fermée. Ainsi, la caractérisation des incertitudes paramétriques peut être étendue au cas de la boucle fermée.

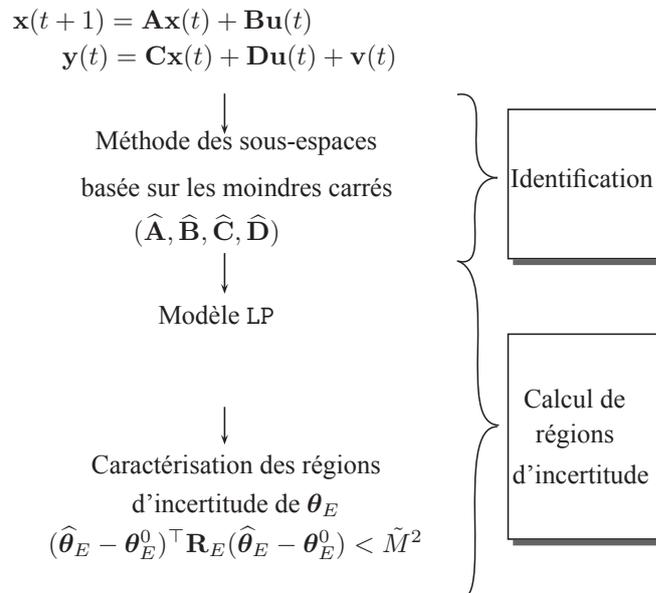


FIG. 3.16 – Caractérisation des domaines d'incertitude pour un système à temps discret.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode de caractérisation des domaines d'incertitude. Cette technique repose sur l'approche à erreur bornée. Ainsi, aucune hypothèse n'est faite sur le bruit mais nous supposons que les résidus sont bornés. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle tient compte de l'erreur due au bruit et de l'erreur de modélisation dans ces régions d'incertitude.

Dans ce contexte, nous avons développé trois techniques de caractérisation des domaines d'incertitude des paramètres d'un système MIMO représenté par un modèle d'état.

La première méthode utilise la méthode du propagateur pour identifier les matrices d'état du système. Cette méthode a la particularité d'estimer les paramètres dans une base canonique fixe. Ceci facilite la description des domaines d'incertitude. Comme il est plus simple d'appliquer la méthode de caractérisation des domaines d'incertitude au système LP, une transformation du modèle d'état vers un modèle LP est faite. Les régions d'incertitude de ce modèle LP sont alors déterminées. A partir de ces régions, les domaines d'incertitude des coefficients des matrices d'état sont déduits. La deuxième exploite les propriétés de la méthode du propagateur afin d'avoir un modèle LP et par la suite déterminé les domaines d'incertitude. Cette méthode est étendu au cas du système continu. La troisième méthode estime les paramètres du système à l'aide d'un algorithme des sous-espaces basé sur les moindres carrés. Cet algorithme permet d'obtenir une estimation du vecteur d'état en utilisant les propriétés de la méthode du propagateur. Par la suite, nous obtenons directement un modèle LP et les domaines d'incertitude sont facilement déterminés.

Chapitre 4

Réjection du biais dû à l'erreur de modèle dans le cas de systèmes multivariables

4.1 Introduction

Dans le domaine de l'automatique, le choix de la structure et du type de représentation (à temps continu ou à temps discret) d'un modèle est fortement lié au système et à l'application souhaitée par l'utilisateur. On peut décrire un procédé par un modèle dont les paramètres sont déterminés en les ajustant aux données mesurées sans chercher à refléter la réalité physique du système. On parle alors de modèles de type boîte noire. Ce type de représentation peut être utilisée pour élaborer une loi de commande [Lju99c, Bom00]. Lorsque l'on souhaite avoir un modèle dont les paramètres ont un sens physique, il est préférable d'utiliser un modèle de type boîte blanche à temps continu. Il est cependant illusoire de vouloir représenter un phénomène physique à l'aide d'un modèle exact. On utilise alors un modèle de type boîte grise [BG94], approximation du système réel, si possible linéaire, que l'on peut caractériser de modèle réduit. Ce modèle d'ordre réduit est une représentation simplifiée des phénomènes mis en jeu dans un domaine fréquentiel restreint. Aussi, dans cette situation, il apparaît une erreur de modélisation qui peut être importante et souvent prépondérante devant l'erreur de mesure liée aux perturbations agissant sur le processus. Les paramètres estimés à l'aide du modèle d'ordre réduit peuvent différer notablement des valeurs exactes. L'erreur de modélisation crée un véritable biais dépendant de l'excitation [BPT02].

Pour remédier à ce problème, plusieurs travaux de recherche ont été développés. Une première solution consiste à augmenter la complexité du modèle. Cette démarche a pour inconvénient de nécessiter l'emploi de routines d'optimisation plus difficiles à mettre en œuvre et conduit généralement à des paramètres dont la variance croit fortement [Bai91][HL92][PTL97][GGN92]. Une deuxième solution consiste à introduire de la connaissance *a priori* [TP01] afin de réduire le biais d'estimation en utilisant toute connaissance initiale telles que les valeurs nominales, la précision... Des travaux récents [BPTB02] cherchent à reproduire la dynamique du système réel par un modèle d'ordre réduit (de complexité réduite), tout en modélisant l'erreur de modélisation, inhérente à cette approximation, à l'aide d'un modèle de type boîte noire non concurrent du modèle d'ordre réduit, autrement dit un modèle qui explique ce qui n'est pas pris en compte par le modèle d'ordre réduit.

Dans ce chapitre, nous allons étendre cette méthodologie au cas multivariable. Plus particulièrement un modèle multivariable va être considéré pour décrire le modèle d'ordre réduit et des modèles de type boîtes noires pour modéliser l'erreur de modélisation. Dans le cas général, la plupart des modèles sont des modèles MLP. Pour estimer les paramètres de tels modèles, nous utilisons des algorithmes d'identification basés sur la minimisation d'un critère quadratique par approche de type erreur de sortie [WP94].

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 4.2, nous introduisons la problématique et les principales notations. Dans la section 4.3, nous analysons le biais dû à l'erreur de modélisation. Par la suite (section 4.4), nous nous intéressons à la réjection de ce biais en caractérisant l'erreur de modélisation par un modèle de type boîte noire en lui imposant des contraintes de non concurrence avec le modèle d'ordre réduit. Dans la section 4.5, nous présentons un algorithme d'identification estimant les paramètres du modèle d'ordre réduit en tenant compte des contraintes de non concurrence. La Section 4.6 est consacrée à la validation sur des données de simulation de cette méthode d'estimation

de paramètres.

4.2 Problématique et notations

Considérons un système réel continu multivariable d'ordre inconnu, modélisable comme suit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = g(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie, f et g sont des fonctions non linéaires et $\boldsymbol{\theta}$ représente le vecteur des paramètres du système.

En pratique, la structure du système réel multivariable étant généralement très complexe, d'ordre relativement élevé, voire infini, des modèles d'ordre réduit caractérisés par le vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}_r$, sont traditionnellement employés pour modéliser le comportement du procédé. La relation d'entrée sortie de tels modèles peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} y_r^1(s) \\ \vdots \\ y_r^{n_y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r^{11}(s) & \cdots & H_r^{1n_u}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ H_r^{n_y1}(s) & \cdots & H_r^{n_y n_u}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^1(s) \\ \vdots \\ u^{n_u}(s) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où $H_r^{ij}(s)$, $i \in [1, n_y]$ et $j \in [1, n_u]$, est la transmittance du modèle d'ordre réduit entre la sortie i et l'entrée j et s est la variable de Laplace. Lors de l'estimation des paramètres des modèles d'ordre réduit, un biais apparaît. Ce dernier peut être répertorié selon deux catégories :

- La première cause de biais sur les estimées est liée à la présence de bruits sur les mesures d'entrée et/ou sortie.
- La seconde, nommée erreur de modélisation, est inhérente aux erreurs de structure lors du choix du modèle représentant le comportement du procédé.

Dans la suite de ce manuscrit, le problème du biais dû aux perturbations est omis afin de focaliser l'attention sur l'erreur de modélisation qui est, dans certaines situations, prépondérante devant l'erreur de mesure. On peut écrire, pour tout $i \in [1, n_y]$

$$y^i(s) = \sum_{j=1}^{n_u} H^{ij}(s) u^j(s) \quad (4.3)$$

où u^j est la $j^{\text{ème}}$ entrée et y^i est la $i^{\text{ème}}$ sortie. En pratique, il est difficile de représenter, à l'aide d'un modèle exact, tous les phénomènes physiques intervenant dans ce système. Lors de l'estimation de ces paramètres, un biais créé par l'erreur de modélisation apparaît. Pour supprimer ou au moins réduire ce biais, on approche l'erreur de modélisation par un modèle boîte noire. Pour cela, nous décomposons notre système en deux parties :

- un modèle d'ordre réduit \mathbf{H}_r afin de modéliser les paramètres physiques du système,
- un modèle de type boîte noire pour approcher l'erreur de modélisation.

Par la suite, nous pouvons écrire (cf. figure 4.2)

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{H}_r(s) + \mathbf{H}_m(s). \quad (4.4)$$

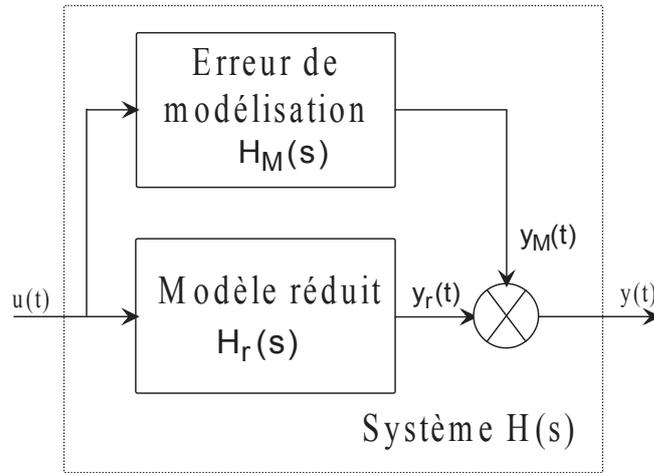


FIG. 4.1 – Modélisation du système à l'aide d'un modèle d'ordre réduit et d'un modèle boîte noire.

La sortie de ce système est donnée par

$$y^i(s) = y_r^i(s) + y_m^i(s) \quad (4.5)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_u} H_r^{ij}(s)w^j(s) + \sum_{j=1}^{n_u} H_m^{ij}(s)w^j(s) \quad (4.6)$$

où $H_m^{ij}(s)$ est le modèle de l'erreur de modélisation.

L'objectif principal de ce chapitre est le traitement du biais provenant de l'erreur de modélisation. Ce dernier traduit le fait que la structure utilisée pour le modèle est généralement une approximation de la réalité. On s'intéresse alors à sa réjection au moyen d'une caractérisation boîte noire contrainte et on présente un algorithme d'identification estimant implicitement les paramètres du modèle boîte noire.

4.3 Estimation des paramètres des modèles d'ordre réduit

4.3.1 Estimation des modèles d'ordre réduit

On suppose disposer de N couples de données expérimentales $\{u^j(t_k), y^i(t_k)\}$, $k \in [1, N]$, $j \in [1, n_u]$ et $i \in [1, n_y]$. On souhaite dans un premier temps estimer $\boldsymbol{\theta}_r$. Une approche classique consiste à minimiser le critère quadratique

$$J(\boldsymbol{\theta}_r) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(t_k, \boldsymbol{\theta}) - y_r^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_r))^2 \quad (4.7)$$

$$= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (\varepsilon^i(t_k))^2 \quad (4.8)$$

où l'erreur $\varepsilon^i(t_k) = y^i(t_k, \boldsymbol{\theta}) - y_r^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_r)$ et $\boldsymbol{\theta}$ représente le vecteur paramètres du système réel et y_r^i est la sortie i du modèle d'ordre réduit.

Comme nous avons vu dans le chapitre 1, il existe deux catégories d'algorithmes d'identification qui peuvent être utilisés pour minimiser ce critère : les algorithmes d'identification à erreur d'équation et les algorithmes d'identification à erreur de sortie. Les algorithmes à erreur d'équation dépendent de la structure du bruit. Pour cette raison, nous préférons utiliser un algorithme d'identification à erreur de sortie [Mar63] malgré le volume de calculs qu'il nécessite. Pour estimer les paramètres d'un modèle NLP, une technique d'optimisation non linéaire doit être utilisée [WP97]. Plusieurs choix sont possibles [Him72]. Le notre s'est porté sur l'algorithme de Marquardt [Mar63] qui réalise un compromis stabilité/vitesse de convergence entre la technique du gradient et celle de Newton.

A l'itération $l + 1$ nous avons plus particulièrement (cf. chapitre 1)

$$\boldsymbol{\theta}_{r_{l+1}} = \boldsymbol{\theta}_{r_l} - [J''(\boldsymbol{\theta}_{r_l}) + \mu I]^{-1} \mathbf{J}'(\boldsymbol{\theta}_{r_l}) \quad (4.9)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{J}'(\boldsymbol{\theta}_{r_l}) &= -2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \varepsilon^i(t_k) \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{r_l}) \text{ le gradient,} \\ \mathbf{J}''(\boldsymbol{\theta}_{r_l}) &\approx 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{r_l}) \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{r_l})^T \text{ le Hessian approché,} \\ \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{r_l}) &= \frac{\partial y^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{r_l})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{r_l}} \quad \forall i \in [1, n_y] \end{aligned}$$

où I est la matrice d'identité et μ est un paramètre de réglage [TP01].

4.3.2 Erreur de modélisation

On définit

$$\boldsymbol{\theta}_{r\text{opt}} = \boldsymbol{\theta}_r + \Delta\boldsymbol{\theta}_r \quad (4.10)$$

où $\boldsymbol{\theta}_{r\text{opt}}$ est la valeur optimale de $\boldsymbol{\theta}_r$ et $\Delta\boldsymbol{\theta}_r$ est l'erreur d'estimation. Pour déterminer cette erreur, on se place dans l'hypothèse d'une linéarité autour de l'optimum $\boldsymbol{\theta}_{r\text{opt}}$. Alors, en utilisant l'algorithme de Marquardt $\Delta\boldsymbol{\theta}_r$, est fourni par

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_r = -(J''_{\theta\theta})^{-1}(J'_{\theta})_{\boldsymbol{\theta}_r}. \quad (4.11)$$

On démontre alors que

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_r = \left(\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{rl}) \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{rl})^T \right)^{-1} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^{n_y} \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{rl}) y_m^i(t_k) \right). \quad (4.12)$$

Cette relation montre que l'erreur d'estimation dépend directement de $y_m^i(t_k)$. Il est aisé de vérifier qu'asymptotiquement

$$\left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{rl}) \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{rl})^T \right) \right] \Delta\boldsymbol{\theta}_{r\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^{n_y} \boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_{rl}) y_m^i(t_k) \right). \quad (4.13)$$

Cette erreur est asymptotiquement nulle si $\boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_r)$ n'est pas corrélé avec $y_m^i(t_k)$. Or, $\boldsymbol{\sigma}^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_r)$ et $y_m^i(t_k)$ sont tous les deux corrélés avec $u^i(t_k)$. L'estimateur de $\boldsymbol{\theta}_r$ est donc asymptotiquement biaisé. Pour éliminer ce biais, nous proposons d'approcher l'erreur de modélisation par un ensemble de modèles de type boîte noire.

4.4 Réjection du biais dû à l'erreur de modélisation

Au paragraphe précédent, il a été montré qu'un biais créé par l'erreur de modélisation apparaît lors de l'estimation des paramètres du modèle d'ordre réduit. Pour réduire ce biais, il est possible de mettre au point une technique de réjection de biais basée sur la caractérisation de l'erreur de modélisation à l'aide d'un modèle boîte noire, en imposant des contraintes pour ne pas concurrencer l'explication du comportement du modèle d'ordre réduit. Pour des raisons de simplicité, nous choisissons des modèles LP de type FIR pour décrire cette erreur de modélisation [GGN92].

4.4.1 Modèle étendu prenant en compte l'erreur de modélisation

Pour identifier l'erreur de modélisation, nous imposons à $H_m^{ij}(s)$ une structure particulière de type boîte noire, notée dans la suite de ce manuscrit $G_m^{ij}(s)$ (pour la différencier

de l'erreur de modèle réelle).

Définissons le modèle étendu

$$y_e^i(s) = \sum_{j=1}^{n_u} [H_r^{ij}(s)w^j(s) + G_m^{ij}(s)w^j(s)] \quad (4.14)$$

$$= y_r^i(s) + \sum_{j=1}^{n_u} y_g^{ij}(s) \quad \forall i \in [1, n_y] \quad (4.15)$$

où

$$y_g^{ij}(s) = G_m^{ij}(s)w^j(s). \quad (4.16)$$

Pour estimer les paramètres du modèle étendu, le critère à minimiser s'écrit

$$J_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(t_k, \boldsymbol{\theta}) - y_e^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_e))^2 \quad (4.17)$$

$$= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(t_k, \boldsymbol{\theta}) - y_r^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_r) - \sum_{j=1}^{n_u} y_g^{ij}(t_k, \boldsymbol{\theta}_g))^2 \quad (4.18)$$

où

$$\boldsymbol{\theta}_e^T = [\boldsymbol{\theta}_r^T \quad \boldsymbol{\theta}_g^T].$$

Certains travaux de recherche décrivent le modèle de l'erreur de modélisation à l'aide de fonctions de Laguerre [Wah91]. Néanmoins, l'utilisation de ce type de fonction présente un problème si l'erreur de modélisation a un caractère oscillant amorti. La qualité de l'approximation dépend en effet du choix du pôle de Laguerre. Nous proposons dans ce travail un modèle FIR, où le coefficient de réglage est le nombre de paramètres du modèle FIR [GGN92]. L'expression du modèle FIR est définie par

$$y_g^{ij}(t_k, \boldsymbol{\theta}_g) = \boldsymbol{\varphi}_g^j(t_k)^T \boldsymbol{\theta}_g^{ij} \quad (4.19)$$

où

$$\boldsymbol{\varphi}_g^j(t_k) = [u^j(t_k - 1) \cdots u^j(t_k - \mathcal{I}_{ij})]^T \quad (4.20)$$

$$\boldsymbol{\theta}_g^T = [g_1^{ij} \cdots g_{\mathcal{I}_{ij}}^{ij}] \quad (4.21)$$

où \mathcal{I}_{ij} représente le nombre de paramètres du modèle FIR pour une sortie i et une entrée j . Pour simplifier les calculs, nous supposons que tous les modèles $H_r^{ij}(s)$ et G_m^{ij} ont respectivement le même nombre de paramètres K et $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{ij}$.

4.4.2 Contrainte de non concurrence par les moments

Généralement $H_r^{ij}(s)$ est une approximation basse fréquence du système réel et $H_m^{ij}(s)$ représente réciproquement une contribution haute fréquence. Dans certains cas, tel que par exemple dans un contexte de commande où on veut avoir un modèle précis dans une bande de fréquences donnée, on considère au contraire que $H_r^{ij}(s)$ représente une approximation hautes fréquences du système réel $H^{ij}(s)$ et $H_m^{ij}(s)$ décrit un comportement basses fréquences.

Afin que le modèle de l'erreur de modélisation ne reproduise pas le comportement du modèle d'ordre réduit, nous imposons des contraintes de non concurrence entre ces deux modèles. Pour cela, on va utiliser un outil mathématique bien adapté à la définition de ces contraintes : la méthode des moments. Nous utilisons les moments temporels [Tri00] lorsque $H_r^{ij}(s)$ a un comportement basse fréquence et les moments fréquentiels [Poi05, BPTB02] dans le cas contraire.

4.4.2.1 Les moments temporels

Soit un système linéaire stable, multivariable de réponse impulsionnelle $h^{ij}(t)$ (la réponse impulsionnelle entre la sortie i et l'entrée j) et de transformée de Laplace

$$H^{ij}(s) = L\{h^{ij}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} h^{ij}(t) dt. \quad (4.22)$$

$H^{ij}(s)$ peut s'exprimer par un développement en série de Taylor au voisinage de $s = 0$

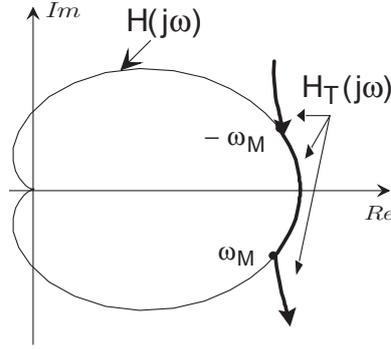
$$H_T^{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n s^n A_n(h^{ij}) \quad (4.23)$$

où les coefficients $A_n(h^{ij})$ sont les moments temporels de $h^{ij}(t)$ définis par

$$A_n(h^{ij}) = \int_0^{\infty} \frac{t^n}{n!} h^{ij}(t) dt. \quad (4.24)$$

$H_T^{ij}(j\omega)$ coïncide avec la réponse harmonique $H^{ij}(j\omega)$ uniquement dans l'intervalle fréquentiel (cf. figure 4.2)

$$-\omega_M < \omega < \omega_M \quad (4.25)$$

FIG. 4.2 – Approximation de $H^{ij}(s)$ par les moments temporels

La série $H_T^{ij}(j\omega)$ ne peut coïncider avec la réponse harmonique exacte qu'en basses fréquences, c.-à-d., au voisinage de $\omega = 0$. Le moment $A_n(h^{ij})$ d'ordre n peut être calculé par une intégration approchée du type rectangle. On a alors

$$A_n(h^{ij}) = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} h^{ij}(t) dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(kT_e)^n}{n!} h_k^{ij} T_e \quad (4.26)$$

où T_e est la période d'échantillonnage. Soit

$$A_n(h^{ij}) \approx \frac{T_e^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} k^n h_k^{ij} = \sum_{k=0}^{N-1} C_{n,k} h_k^{ij} \quad (4.27)$$

avec

$$C_{n,k} = \frac{T_e^{n+1}}{n!} k^n. \quad (4.28)$$

4.4.2.2 Les moments fréquentiels

$H^{ij}(s)$ peut s'exprimer par un développement en série de Taylor au voisinage de $s = s_0$ et en particulier avec $s_0 = j\omega_0$. On peut alors écrire

$$H_T^{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (j\omega - j\omega_0)^n A_{n,\omega_0}(h^{ij}) \quad (4.29)$$

où les coefficients $A_{n,\omega_0}(h^{ij})$ sont les moments fréquentiels d'ordre n de $h^{ij}(t)$ tel que

$$A_{n,\omega_0}(h^{ij}) = \int_0^\infty \frac{(t)^n}{n!} e^{-j\omega_0 t} h^{ij}(t) dt. \quad (4.30)$$

Soit

$$A_{n,\omega_0}(h^{ij}) = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} \cos(\omega_0 t) h^{ij}(t) dt - j \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} \sin(\omega_0 t) h^{ij}(t) dt. \quad (4.31)$$

$H_{T,\omega_0}^{ij}(j\omega)$ coïncide avec la réponse harmonique $H^{ij}(j\omega)$ uniquement dans l'intervalle fréquentiel (cf. figure 4.3)

$$\omega_0 - \omega_M < \omega < \omega_0 + \omega_M \quad (4.32)$$

soit

$$\omega_{min} < \omega < \omega_{Max}. \quad (4.33)$$

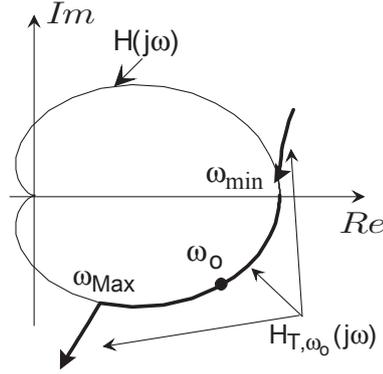


FIG. 4.3 – Approximation de $H^{ij}(s)$ par les moments fréquentiels

Comme pour les moments temporels, le moment fréquentiel $A_{n,\omega_0}(h^{ij})$ d'ordre n peut être calculé par une intégration approchée du type rectangle. On a alors

$$A_{n,\omega_0}(h^{ij}) \approx \frac{T_e^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} k^n \cos(\omega_0 k T_e) h_k - \frac{T_e^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{N-1} k^n \sin(\omega_0 k T_e) h_k \quad (4.34)$$

$$\approx \sum_{k=0}^{N-1} C_{n,k} h_k - \sum_{k=0}^{N-1} S_{n,k} h_k \quad (4.35)$$

avec

$$C_{n,k} = \frac{T_e^{n+1}}{n!} k^n \cos \omega_0 k T_e \quad (4.36)$$

$$S_{n,k} = \frac{T_e^{n+1}}{n!} k^n \sin \omega_0 k T_e. \quad (4.37)$$

4.4.2.3 Expression des contraintes en basses fréquences ($\omega_0 = 0$)

Plaçons-nous dans le cas où le modèle $H_r^{ij}(j\omega)$ est une approximation basses fréquences de $H^{ij}(j\omega)$. Alors, on impose les contraintes suivantes

$$\begin{cases} H_r^{ij}(j\omega) \rightarrow H^{ij}(j\omega) \\ G_m^{ij}(j\omega) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0. \quad (4.38)$$

A l'aide des premiers moments temporels, on peut quantifier l'approximation (4.38) par

$$\begin{cases} A_n(h_r^{ij}(t)) \rightarrow A_n(h^{ij}(t)) \\ A_n(g_m^{ij}(t)) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0 \quad (4.39)$$

pour $n = 0$ à $K - 1$. Si la condition (4.39) est vérifiée, g_m^{ij} et h_r^{ij} sont non concurrents dans l'explication du comportement de h^{ij} grâce aux K contraintes sur les paramètres du modèle boîte boire. D'après l'expression des moments temporels (4.39) et en utilisant une intégration approchée du type rectangle, on peut écrire [Poi05]

$$A_n(g_m^{ij}) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{n,k} g_k^{ij} \text{ où } C_{n,k} = \frac{T^{n+1}}{n!} k^n \quad (4.40)$$

où g^{ij} sont les coefficients de la réponse impulsionnelle g_m^{ij} . On détermine les contraintes en exprimant le fait que les moments temporels de g_m^{ij} sont nuls. Cela permet de développer l'expression (4.40) comme suit

$$C_{n,1}g_1^{ij} + C_{n,2}g_2^{ij} + \dots + C_{n,i}g_i^{ij} + \dots + C_{n,I}g_I^{ij} = 0 \quad (4.41)$$

où n variant de 0 à $K - 1$. θ_g^{ij} peut être représenté de la façon suivante

$$\theta_g^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_c^{ij} \\ \mathbf{g}_{id}^{ij} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

où $\mathbf{g}_c^{ij} = [g_1^{ij} \ \dots \ g_K^{ij}]^T$ sont les paramètres contraints et $\mathbf{g}_{id}^{ij} = [g_{K+1}^{ij} \ \dots \ g_I^{ij}]^T$ les paramètres indépendants. Le développement de l'équation (4.41) pour $n \in [0, K - 1]$ nous donne

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,1} & \dots & C_{0,K} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{K-1,1} & \dots & C_{K-1,K} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1^{ij} \\ \vdots \\ g_K^{ij} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_c^{ij}} \\ = - & \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,K+1} & \dots & C_{0,I} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{K-1,K+1} & \dots & C_{K,I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{K+1}^{ij} \\ \vdots \\ g_I^{ij} \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}_{id}^{ij}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_c^{ij} \\ \mathbf{g}_{id}^{ij} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}_c^{ij} = -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{g}_{id}^{ij}, \quad (4.44)$$

\mathbf{E} étant une matrice carrée inversible $\in \mathbb{R}^{K \times K}$. Posons

$$\varphi_c^j(t_k)^T = [u^j(t_k - 1) \ \dots \ u^j(t_k - K)] \quad (4.45)$$

$$\varphi_{id}^j(k)^T = [u^j(k - K - 1) \ \dots \ u^j(k - I)]. \quad (4.46)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} y_g^{ij}(t_k) &= \boldsymbol{\varphi}_c^j(t_k)^T \mathbf{g}_c^{ij} + \boldsymbol{\varphi}_{id}^j(t_k)^T \mathbf{g}_{id}^{ij} \\ &= [\boldsymbol{\varphi}_{id}^j(t_k)^T - \boldsymbol{\varphi}_c^j(t_k)^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}] \mathbf{g}_{id}^{ij}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

La sortie du modèle de type boîte noire s'écrit finalement

$$y_g^{ij}(t_k) = \boldsymbol{\psi}_{id}^j(t_k)^T \mathbf{g}_{id}^{ij} \quad (4.48)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{id}^j(t_k)^T = \boldsymbol{\varphi}_{id}^j(t_k)^T - \boldsymbol{\varphi}_c^j(t_k)^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}. \quad (4.49)$$

4.4.2.4 Expression des contraintes en hautes fréquences ($\omega_o \neq 0$)

Grâce aux moments fréquentiels, on peut généraliser la formulation des contraintes au cas où le modèle d'ordre réduit $H_r(j\omega)$ coïncide avec le système en haute fréquence, c.-à-d., au voisinage de $\omega = \omega_o$. A l'aide des premiers moments fréquentiels, on obtient la quantification de l'approximation haute fréquence par

$$A_{n,\omega_o}(h_r^{ij}(t)) \xrightarrow{\omega=\omega_o} A_{n,\omega_o}(h^{ij}(t)) \quad \text{pour } n = 0 \quad \text{à } K - 1$$

et réciproquement pour le modèle boîte noire

$$A_{n,\omega_o}(g_m^{ij}(t)) \xrightarrow{\omega=\omega_o} 0 \quad \text{pour } n = 0 \quad \text{à } K - 1$$

où [Bar03]

$$A_{n,\omega_o}(g_m^{ij}(t)) \approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(kT_e)^n}{n!} \cos(\omega_o kT_e) g_k^{ij} T_e - j \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(kT_e)^n}{n!} \sin(\omega_o kT_e) g_k^{ij} T_e. \quad (4.50)$$

Dans ces conditions d'approximation, g_m^{ij} est non concurrent de h_r^{ij} grâce aux $K_c = 2K$ contraintes sur les paramètres du modèle FIR. On impose deux fois plus de contraintes que dans le cas basse fréquence car on doit annuler les parties réelles et imaginaires des moments fréquentiels. En nous référant à la démarche de calcul relative aux moments temporels, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,1} & \cdots & C_{0,K_c} \\ S_{0,1} & \cdots & S_{0,K_c} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{K_c-1,1} & \cdots & C_{K_c-1,K_c} \\ S_{K_c-1,1} & \cdots & S_{K_c-1,K_c} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1^{ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{K_c}^{ij} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}_c^{ij}} \\ & = - \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,K_c+1} & \cdots & C_{0,\mathcal{I}} \\ S_{0,K_c+1} & \cdots & S_{0,\mathcal{I}} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{K_c-1,K_c+1} & \cdots & C_{K_c-1,\mathcal{I}} \\ S_{K_c-1,K_c+1} & \cdots & S_{K_c-1,\mathcal{I}} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{F}}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{K_c+1}^{ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{\mathcal{I}}^{ij} \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij}} \end{aligned} \quad (4.51)$$

où

$$C_{n,k} = k^n \cos(\omega_o k T_e) \quad (4.52)$$

$$S_{n,k} = k^n \sin(\omega_o k T_e) \quad (4.53)$$

ce qui permet d'écrire

$$\tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{g}}_c^{ij} = -\tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij} \quad (4.54)$$

où $\tilde{\mathbf{E}}$ une matrice carrée $\in \mathbb{R}^{K_c \times K_c}$ et $\tilde{\mathbf{g}}_c^{ij}$ un vecteur de dimension K_c . Alors

$$\tilde{\mathbf{g}}_c^{ij} = -\tilde{\mathbf{E}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij}. \quad (4.55)$$

En définissant

$$\boldsymbol{\varphi}_g^j = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c^j \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{id}^j \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

où

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c^j(t_k)^T = [u^j(t_k - 1) \quad \dots \quad u^j(t_k - K_c)] \quad (4.57)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{id}^j(t_k)^T = [u^j(t_k - K_c - 1) \quad \dots \quad u^j(t_k - \mathcal{I})] \quad (4.58)$$

on obtient

$$y_g^{ij}(t_k) = \boldsymbol{\varphi}_g^j(t_k)^T \boldsymbol{\theta}_g^{ij}. \quad (4.59)$$

Or, on a décomposé $\boldsymbol{\varphi}_g^j(t_k)$ et $\boldsymbol{\theta}_g^{ij}$ de l'équation (4.59), ce qui permet d'écrire

$$y_g^{ij}(t_k) = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c^j(t_k)^T \tilde{\mathbf{g}}_c^{ij} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{id}^j(t_k)^T \tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij}. \quad (4.60)$$

A partir de l'expression de $\tilde{\mathbf{g}}_c^{ij}$, on exprime $y_g^{ij}(t_k)$ en fonction des paramètres contraints, soit

$$y_g^{ij}(t_k) = [\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{id}^j(t_k)^T - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c^j(t_k)^T \tilde{\mathbf{E}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}] \tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij}. \quad (4.61)$$

On pose

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{id}^j(t_k)^T = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{id}^j(t_k)^T - \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_c^j(t_k)^T \tilde{\mathbf{E}}^{-1} \tilde{\mathbf{F}}. \quad (4.62)$$

La nouvelle expression de la sortie $y_g^{ij}(t_k)$ s'écrit alors

$$y_g^{ij}(t_k) = \tilde{\boldsymbol{\psi}}_{id}^j(t_k)^T \tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij}. \quad (4.63)$$

Remarque : Les expressions sont équivalentes à celles obtenues avec les moments temporels. Toutefois, les matrices $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$ et les vecteurs $\tilde{\mathbf{g}}_c^{ij}$ et $\tilde{\mathbf{g}}_{id}^{ij}$ ont des dimensions différentes.

4.5 Algorithme d'identification

Dans la Section 4.4, nous avons modélisé notre système par un modèle d'ordre réduit NLP et un modèle boîte noire qui permet d'estimer l'erreur de modélisation. En appliquant un algorithme à erreur de sortie, nous aurons un nombre important de paramètres à identifier. Nous allons alors récrire l'algorithme d'identification afin d'estimer les paramètres du modèle d'ordre réduit et d'identifier implicitement les paramètres du modèle boîte noire. Le critère quadratique à minimiser s'écrit

$$J_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(t_k) - y_e^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_e))^2. \quad (4.64)$$

Le modèle étendu $y_e^i(t_k, \boldsymbol{\theta})$ est composé de deux parties : une LP et une autre NLP

$$y_e^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_e) = \underbrace{y_r^i(t_k, \boldsymbol{\theta}_r)}_{\text{NLP}} + \sum_{j=1}^{n_u} \underbrace{y_g^{ij}(t_k, \mathbf{g}_{id}^{ij})}_{\text{LP}}. \quad (4.65)$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_u} y_g^{ij}(t_k, \mathbf{g}_{id}^{ij}) &= \boldsymbol{\psi}_{id}^1(t_k)^T \mathbf{g}_{id}^{i1} + \cdots + \boldsymbol{\psi}_{id}^{n_u}(t_k)^T \mathbf{g}_{id}^{in_u} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{id}^1(t_k)^T & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{id}^{n_u}(t_k)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{id}^{i1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{id}^{in_u} \end{bmatrix} \\ &= \boldsymbol{\Psi}(t_k)^T \mathbf{g}_{id}^i. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Définissons $\check{y}^i(t_k) = y^i(t_k) - y_r^i(t_k)$, alors le critère (4.64) devient

$$\bar{J}_e(\mathbf{g}_{id}) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (\check{y}^i(t_k) - \boldsymbol{\Psi}(t_k)^T \mathbf{g}_{id}^i)^2. \quad (4.67)$$

Les paramètres \mathbf{g}_{id}^i peuvent être estimés par l'algorithme des moindres carrés

$$\hat{\mathbf{g}}_{id_{MC}}^i = R^{-1} \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\Psi}(t_k)^T \check{y}^i(k) \quad (4.68)$$

$$\text{où } R = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\Psi}(t_k) \boldsymbol{\Psi}(t_k)^T. \quad (4.69)$$

A partir de l'estimation de $\hat{\mathbf{g}}_{id}^i$, nous pouvons reformuler le critère (4.64)

$$\begin{aligned} \bar{J}_e(\hat{\boldsymbol{\theta}}_r) &= \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(t_k) - \hat{y}_r^i(t_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_r) - \boldsymbol{\Psi}(t_k)^T R^{-1} \\ &\quad \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\Psi}(k) (y^i(t_k) - \hat{y}_r^i(t_k, \hat{\boldsymbol{\theta}}_r)))^2. \end{aligned} \quad (4.70)$$

On remarque bien que ce critère dépend seulement de $\hat{\theta}_r$. Les paramètres $\hat{\mathbf{g}}_{id}^i$ sont estimés implicitement.

Posons

$$\hat{y}_e^i(t_k) = \hat{y}_r^i(t_k, \hat{\theta}_r) + \Psi(t_k)^T R^{-1} \sum_{k=1}^N \Psi(t_k) (y^i(t_k) - \hat{y}_r^i(t_k, \hat{\theta}_r)). \quad (4.71)$$

Les fonctions de sensibilité du modèle étendu s'écrivent alors

$$\sigma_e^i(t_k) = \frac{\partial \hat{y}_e^i(t_k, \hat{\theta}_r)}{\partial \hat{\theta}_r^i} \quad (4.72)$$

$$= \sigma_r^i(t_k, \hat{\theta}_r) - \Psi(t_k)^T R^{-1} \sum_{k=1}^N \Psi(t_k) \sigma_r^i(t_k, \hat{\theta}_r). \quad (4.73)$$

Ainsi, nous pouvons écrire le gradient et le hessien

$$\bar{J}'_e(\hat{\theta}_{r_l}) = -2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(t_k) - \hat{y}_e^i(t_k)) \sigma_e^i(t_k, \hat{\theta}_{r_l}) \quad (4.74)$$

$$\bar{J}''_e(\hat{\theta}_{r_l}) \approx 2 \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_y} \sigma_e^i(t_k, \hat{\theta}_{r_l}) \sigma_e^i(t_k, \hat{\theta}_{r_l})^T. \quad (4.75)$$

On minimise ensuite \bar{J}_e par un algorithme de PNL tel que celui de Marquardt [Mar63]

$$\hat{\theta}_{r_{l+1}} = \hat{\theta}_{r_l} - [\bar{J}''_e(\hat{\theta}_{r_l}) + \mu \mathcal{I}_d]^{-1} \bar{J}'_e(\hat{\theta}_{r_l}). \quad (4.76)$$

4.6 Simulation numérique

Afin d'illustrer les propriétés de la méthodologie décrite précédemment, nous allons considérer un système multivariable à deux entrées et une sortie

$$\begin{aligned} y^1(s) &= \frac{1}{0.001s^3 + 0.107s^2 + 0.71s + 1} u^1(s) + \frac{1}{0.0012s^3 + 0.127s^2 + 0.71s + 1} u^2(s) \\ &= H^{11}(s)u^1(s) + H^{12}(s)u^2(s) \end{aligned} \quad (4.77)$$

où les pôles de $H^{11}(s)$ sont

$$s_1^{11} = -1/0.5, \quad s_2^{11} = -1/0.2 \quad \text{et} \quad s_3^{11} = -1/0.01 \quad (4.78)$$

et de $H^{12}(s)$ sont

$$s_1^{12} = -1/0.5, \quad s_2^{12} = -1/0.2 \quad \text{et} \quad s_3^{12} = -1/0.01. \quad (4.79)$$

En basse fréquence, nous pouvons négliger l'influence des pôles s_3^{11} et s_3^{12} sur le comportement du système. On obtient alors le modèle d'ordre réduit suivant

$$y_r^1(s) = \frac{1}{0.1s^2 + 0.7s + 1}u^1(s) + \frac{1}{0.12s^2 + 0.7s + 1}u^2(s) \quad (4.80)$$

ainsi que le vecteur paramètres correspondant

$$\boldsymbol{\theta}_r^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] = [0.1 \ 0.7 \ 0.12 \ 0.7]. \quad (4.81)$$

Pour identifier les paramètres du modèle d'ordre réduit, on va appliquer deux excitations différentes de type S.B.P.A et de période d'échantillonnage $T_e = 5ms$. En supposant que la sortie du système soit perturbée par un bruit blanc de rapport Signal sur Bruit (variance du signal/variance du bruit) de 10 et en appliquant dans un premier temps l'algorithme d'identification décrit dans la Section 4.3, nous calculons les valeurs moyennes des paramètres estimés (en faisant 300 tirages de Monte Carlo).

Paramètres	Valeurs exactes	Valeurs estimées	Ecart type
a_0	0.1	0.1119	0.0340
a_1	0.7	0.7278	0.0713
a_2	0.12	0.1220	0.0322
a_3	0.7	0.7134	0.0821

TAB. 4.1 – Estimation des paramètres du modèle d'ordre réduit seul

D'après le Tableau 4.1, on remarque bien l'existence d'un biais. Afin de réduire l'erreur de modélisation, on associe deux modèles FIR, de longueur \mathcal{I} au modèle d'ordre réduit. On introduit deux contraintes sur chaque paramètre g^1 et g^2 de FIR (puisque l'on a quatre paramètres à estimer) afin que les moments $A_0(g^1)$, $A_1(g^1)$ et $A_0(g^2)$, $A_1(g^2)$ soient nuls. le tableau 4.2 représente les paramètres du modèle estimé en tenant compte de l'erreur de modélisation. En comparant ce tableau au tableau 4.1, on remarque que le biais dû à l'erreur de modélisation est diminué. La Figure 4.4 représente les différentes estimations de $\boldsymbol{\theta}_r$ et de l'écart type en fonction de la longueur \mathcal{I} du FIR.

Paramètres	Valeurs exactes	Valeurs estimées
a_0	0.1	0.1023
a_1	0.7	0.7021
a_2	0.12	0.1207
a_3	0.7	0.7048

TAB. 4.2 – Estimation des paramètres du modèle étendu

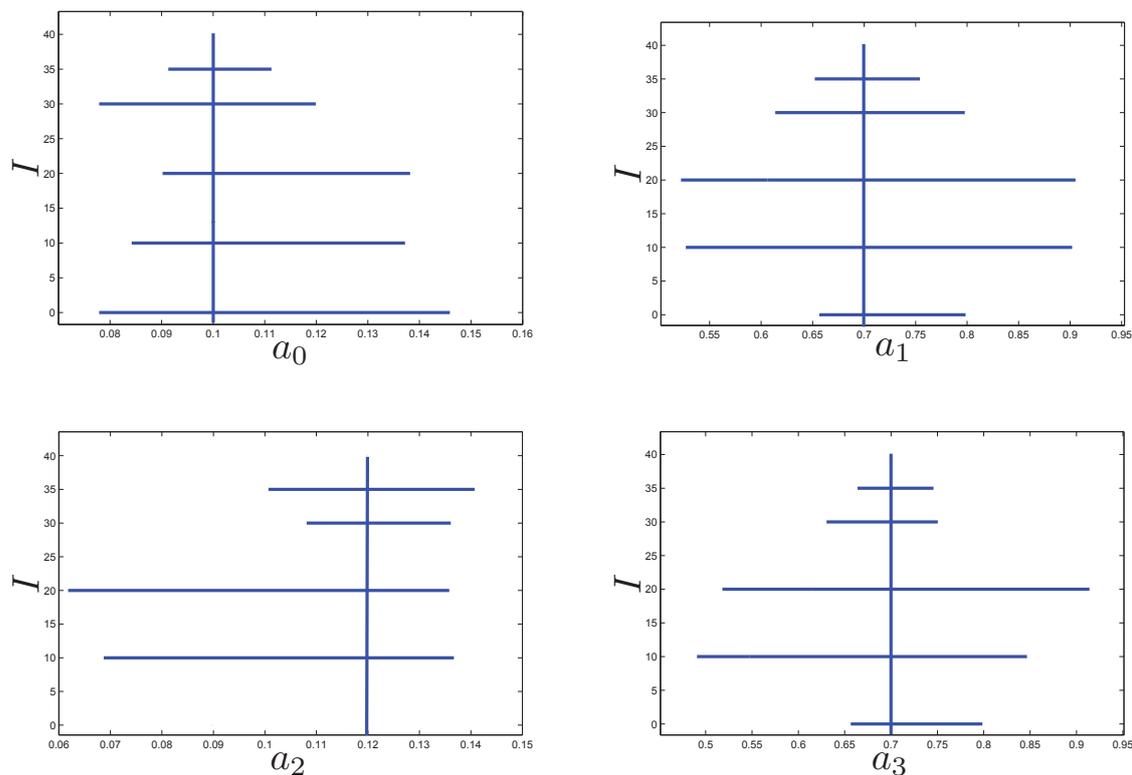


FIG. 4.4 – Estimation des paramètres du modèle étendu

Le biais sur l'estimation des paramètres décroît lorsque \mathcal{I} augmente. Le modèle FIR permet de diminuer le biais dû à l'erreur de modélisation. D'après la Figure 4.5, nous vérifions que le modèle d'ordre réduit explique la dynamique du système en basse fréquence, tandis que le modèle étendu permet de prendre en compte les deux dynamiques (en basse et haute fréquence).

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une technique de réjection du biais afin de minimiser l'erreur de modélisation. Pour éviter la concurrence entre les modèles d'ordre réduit et les modèles de l'erreur de modélisation, on a dû exprimer des contraintes de non concurrence entre modèles d'ordre réduit et modèles d'erreur. La minimisation d'un critère quadratique prenant en compte un modèle étendu du système est obtenu grâce à une technique évitant la minimisation explicite par rapport au vecteur des paramètres du modèle étendu. Pour illustrer les performances de cette technique, nous avons appliqué cette méthodologie en simulation à un système multivariable. On constate que la méthodologie proposée permet d'estimer sans biais les paramètres des modèles d'ordres réduits. Les paramètres des modèles de l'erreur de modélisation, non estimés explicitement, peuvent l'être *a posteriori* si on souhaite définir une borne de cette erreur de modélisation dans

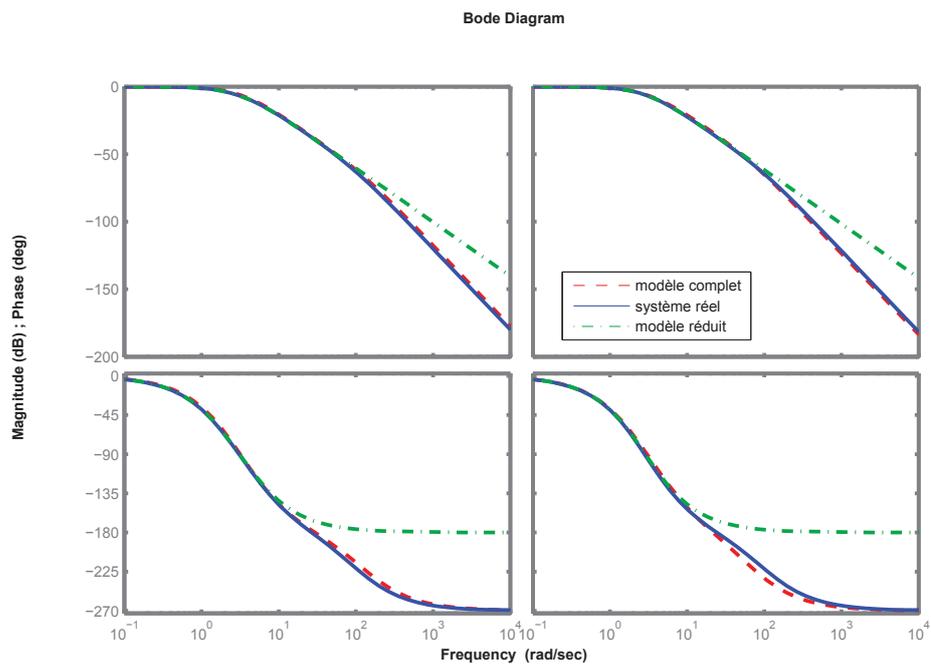


FIG. 4.5 – Signal de sortie du système réel, modèle réduit et modèle étendu

un objectif de commande, par exemple.

Conclusion générale

Le développement de nouvelles méthodes de caractérisation des régions d'incertitude dues aux bruits et aux erreurs de modèles constitue la principale motivation de cette thèse. Ce travail s'articule plus particulièrement autour de deux problématiques

- la détermination d'intervalles d'incertitude réalistes des coefficients des matrices d'état estimées à l'aide d'algorithmes de type sous-espaces. Cette méthode ne nécessite aucune hypothèse sur le bruit et permet d'englober dans la même borne l'erreur due aux bruits de mesure et celle due à l'inévitable erreur de modélisation.
- la réjection du biais dû à l'existence d'erreurs de modélisation. Ce type d'erreur apparaît généralement lors de l'estimation des paramètres physiques à l'aide de modèles de complexité réduite.

Afin de présenter au mieux les développements réalisés au cours de ces trois années de thèse, la démarche suivie dans ce manuscrit a débuté par une synthèse bibliographique des principales familles d'algorithmes d'identification permettant l'identification de modèles multivariés : les algorithmes à erreur d'équation, les algorithmes à erreur de sortie et les algorithmes des sous-espaces. Cette étude a permis de mettre en évidence les points forts et les points faibles de chaque approche, en insistant plus particulièrement sur les difficultés rencontrées pour caractériser les domaines d'incertitudes et les erreurs de modèles inhérentes à de telles techniques. S'intéressant plus précisément aux modèles linéaires sous forme d'état, notre attention s'est ensuite portée plus particulièrement sur les méthodes des sous-espaces qui sont désormais considérées comme une alternative efficace (et même, dans certaines situations, comme une étape initiale) aux techniques d'erreur de prédiction ou d'erreur de sortie. Bien qu'intéressantes d'un point de vue robustesse numérique, les méthodes classiques des sous-espaces souffrent de deux problèmes importants pour la caractérisation des incertitudes :

- la grande difficulté à fixer la base dans laquelle les matrices d'état sont estimées,
- l'obtention de formes d'état sur-paramétrées non parcimonieuses.

Pour résoudre ces problèmes, de nouvelles techniques d'identification des sous-espaces sont présentées dans cette thèse. Fondées sur le principe de la méthode du propagateur, Les algorithmes proposés assurent une estimation des paramètres du système à temps discret et à temps continu dans une base fixe. De plus, la structure du modèle d'état estimé présente l'avantage de posséder un nombre minimal de paramètres. Ces qualités sont essentielles pour la caractérisation des domaines d'incertitude des coefficients des matrices d'état. Une extension aux systèmes fonctionnant en boucle fermée est également considérée via l'adaptation de la méthode PBSID à l'aide de la technique du propagateur.

Dans un objectif d'identification pour la commande, les techniques d'identification doivent fournir une information relative à la précision de l'estimation. Dans ce contexte, nous avons étendu une méthode de caractérisation des incertitudes paramétriques initialement développée pour des fonctions de transfert monovariées au cas de modèles MIMO sous forme d'état. Cette méthode suppose exclusivement que les résidus sont bornés et ne font aucune hypothèse statistique sur les bruits agissant sur le procédé. Trois méthodes de quantification des incertitudes des paramètres des coefficients des matrices d'état estimés ont plus précisément été présentées

- Approche indirecte : cette approche consiste à transformer le modèle d'état en une représentation linéaire en les paramètres puis à étendre les domaines d'incertitude de ce modèle linéaire en les paramètres au modèle initial. Plus précisément, dans un premier temps, les régions d'incertitude du modèle linéaire en les paramètres sont déterminées en utilisant directement une méthode à erreur bornée dédiée. Dans un second temps, les régions d'incertitude du modèle d'état sont déduites à partir des domaines d'incertitude des paramètres du modèle initial.
- Approche directe : contrairement à l'approche indirecte, l'approche directe exploite directement les propriétés de la méthode du propagateur afin d'obtenir un modèle LP. Cette méthode est étendue au cas des systèmes continus.
- Méthode de caractérisation des incertitudes en utilisant l'algorithme PBSID adaptée à la méthode du propagateur : cette technique permet d'avoir un modèle LP en estimant le vecteur d'état. La technique de caractérisation des incertitudes des paramètres est alors appliquée directement.

La fin de cette thèse est dédiée à la réjection du biais due à l'erreur de modélisation. La technique présentée permet de reproduire la dynamique du système réel par un modèle de complexité réduite. Dans ce contexte, l'erreur de modélisation est estimée à l'aide d'un modèle de type boîte noire. Pour éviter des problèmes de concurrence entre le modèle d'ordre réduit et l'erreur de modélisation, on impose des contraintes. Ces dernières sont déterminées à partir de la méthode des moments.

Afin de montrer les performances de nos méthodes, des exemples de simulation numérique et un exemple expérimental ont été employés.

Perspectives

Bien que des résultats expérimentaux encourageants aient été obtenus, il demeure plusieurs questions ouvertes qui méritent d'être explorées dans le cadre de futures recherches. Ces questions se rapportent dans un premier temps au choix du niveau d'iso-critère. Plus particulièrement, dans le cadre de l'approche indirecte et l'approche directe, il sera intéressant d'utiliser le développement du second ordre et du troisième ordre en série de Taylor afin de vérifier l'influence de ces approximations sur les domaines d'incertitude. Dans un second temps, il serait intéressant d'explorer plus profondément la caractérisation des domaines d'incertitude en exploitant les propriétés de la méthode PBSID. Il serait en effet souhaitable de tenir compte des incertitudes données par l'estimation du vecteur d'état. Ces incertitudes peuvent avoir une influence sur les domaines d'incertitude paramétrique. Un autre point à étudier porte sur la qualification de la méthode de caractérisation des

incertitudes. En effet, comme on a pu le voir dans les simulation stochastiques proposées, cette méthode présente un taux de défaillance qui peut parfois être non négligeable. Toutefois, ce taux de défaillance n'indique aucunement la distance entre le vecteur paramètre exact et le domaine d'incertitude et ne permet donc pas de qualifier précisément la méthode. Ainsi, il sera intéressant de définir des critères permettant de quantifier cette distance afin de valider (ou d'invalidier) plus sûrement la méthode proposée. Enfin, des futures recherches doivent être menées dans un objectif d'application des approches directes et indirectes de caractérisation des incertitudes de modèle d'état à l'exemple de procédé réel introduit dans ce manuscrit : l'éolienne. Rappelons que cette étude s'inscrit au sein d'une collaboration initiée en avril 2010 avec plusieurs collègues du Delft Center for Systems and Control Engineering (<http://www.dsc.tudelft.nl/index.html>).

Dans le cadre de la réjection du biais dû à l'erreur de modélisation, un important travail reste à accomplir. En particulier, il sera nécessaire de définir des conditions qualitatives et quantitatives quant à la possibilité ou à l'impossibilité de rejeter un biais à l'aide d'un modèle boîte noire contraint. La méthode de réjection du biais présentée dans ce mémoire a été développé pour les systèmes multivariables représentés par des fonctions de transfert. Son extension au cas des systèmes multivariables représentés par des modèles d'état ouvrira des perspectives intéressantes pour identifier des modèles d'état de structure réduite sans biaiser l'estimation paramétrique. Dans ce cas, le modèle à réponse impulsionnelle finie utilisé dans cette thèse pour caractériser l'erreur de modélisation ne sera peut-être pas le mieux adapté et une étude portant sur différents types de modèles devra être menée. De même, l'utilisation de l'outil moment (temporel et fréquentiel) pour imposer les contraintes de non concurrence entre les modèles sera peut-être à reconsidérer.

Finalement, le travail proposé dans cette thèse permet de caractériser l'erreur d'estimation et la précision des paramètres du modèle. L'association de ces deux techniques devrait permettre de définir des incertitudes utilisables dans un objectif de commande et une étude en ce sens devra être menée. Ces incertitudes pourraient également fournir une information *a priori* fiable dans le cadre d'une estimation bayésienne.

Annexe A

Variation des valeurs propres du système

En supposant que $\mathbf{E}_1 = \mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s$, $\widehat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{J}_1 \widehat{\mathbf{U}}_s$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{U}_s$ et $\widehat{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{J}_2 \widehat{\mathbf{U}}_s$, l'équation (1.42) peut être réécrite

$$\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{E}_1^\dagger (\widehat{\mathbf{E}}_2 - \widehat{\mathbf{E}}_1 \mathbf{A}). \quad (\text{A.1})$$

Définissons maintenant $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \widehat{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{E}$ et $\tilde{\mathbf{E}}_2 = \widehat{\mathbf{E}}_2 - \mathbf{E}$. A partir de l'équation (A.1), nous pouvons écrire

$$\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{E}_1^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_2 + \mathbf{E}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{A} - \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) \quad (\text{A.2})$$

$$= \mathbf{E}_1^\dagger (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{A}) + \mathbf{E}_1^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{A}). \quad (\text{A.3})$$

Or, nous avons $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^\dagger \mathbf{E}_2$ (cf. équation (1.22)). Par suite, nous aurons

$$\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{E}_1^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{A}). \quad (\text{A.4})$$

Comme \mathbf{A} est une matrice diagonalisable, alors l'erreur sur le k^{ime} valeur propre $\tilde{\mu}_k$ est donnée par

$$\tilde{\mu}_k \approx \mathbf{T}_{k.} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{T}_{.k}^{-1} \quad (\text{A.5})$$

$$\approx \mathbf{T}_{k.} \mathbf{E}_1^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{A}) \mathbf{T}_{.k}^{-1} \quad (\text{A.6})$$

$$\approx \mathbf{T}_{k.} \mathbf{E}_1^\dagger (\tilde{\mathbf{E}}_2 - \tilde{\mathbf{E}}_1 \mu_k) \mathbf{T}_{.k}^{-1} \quad (\text{A.7})$$

$$\approx \mathbf{T}_{k.} (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^\dagger (\mathbf{J}_2 - \mu_k \mathbf{J}_1) \tilde{\mathbf{U}}_s \mathbf{T}_{.k}^{-1}. \quad (\text{A.8})$$

De plus, sachant que $\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{J}_1 \Gamma_f$ et en appliquant la définition la pseudo inverse de Moore Penrose, on peut écrire

$$\mathbf{T}_{k.} (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^\dagger = \mathbf{T}_{k.} ((\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^* (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s))^{-1} (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^* \quad (\text{A.9})$$

$$= (\mathbf{T}_{k.}^{-1*} (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^* (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s) \mathbf{T}_{k.}^{-1})^{-1} \mathbf{T}_{k.}^{-1*} (\mathbf{J}_1 \mathbf{U}_s)^* \quad (\text{A.10})$$

$$= (\mathbf{T}_{k.}^{-1*} (\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k} \mathbf{T}_{k.})^* (\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k} \mathbf{T}_{k.}) \mathbf{T}_{k.}^{-1})^{-1} \mathbf{T}_{k.}^{-1*} (\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k} \mathbf{T}_{k.})^* \quad (\text{A.11})$$

$$= ((\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k})^* (\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k}))^{-1} (\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k})^* \quad (\text{A.12})$$

$$= (\mathbf{J}_1 \Gamma_{f,k})^\dagger. \quad (\text{A.13})$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\mathbf{T}_{.k}^{-1} = \mathbf{U}_s^* \mathbf{\Gamma}_{f,k}. \quad (\text{A.14})$$

Finalement, en utilisant les équations (A.8), (A.13) et (A.14), nous pouvons écrire

$$\tilde{\mu}_k \approx (\mathbf{J}_1 \mathbf{\Gamma}_{f,k})^\dagger (\mathbf{J}_2 - \mu_k \mathbf{J}_1) \tilde{\mathbf{U}}_s \mathbf{U}_s^* \mathbf{\Gamma}_{f,k}. \quad (\text{A.15})$$

Annexe B

Approximation de la fonction coût $J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ pour un système discret

Dans cette annexe, nous déterminons une approximation de la fonction coût $J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ dans le cas d'un système discret. Ainsi, l'erreur $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ est donnée par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \mathbf{C} \mathbf{A}^{t-k-1} \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \quad (\text{B.1})$$

En définissant $d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}$, $d\mathbf{A} = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$ et $d\mathbf{C} = \mathbf{C} - \hat{\mathbf{C}}$, l'équation (B.1) peut être réécrit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &= \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes (\hat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C})(\hat{\mathbf{A}} + d\mathbf{A})^{t-k-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes (\hat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C})\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{A}}^{-1}d\mathbf{A})^{t-k-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

En tenant en compte de développement en série de Taylor à l'ordre 1 de $(1 + \hat{\mathbf{A}}^{-1}d\mathbf{A})^{t-k-1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ peut être approximer par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &\approx \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes (\hat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C})\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}(\mathbf{I} + (t-k-1)\hat{\mathbf{A}}^{-1}d\mathbf{A})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &\approx \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes (\hat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C})\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes (\hat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C})(t-k-1)\hat{\mathbf{A}}^{t-k-2}d\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

En supposant que $d\mathbf{A}d\mathbf{B} \approx 0$, $d\mathbf{A}d\mathbf{C} \approx 0$, $d\mathbf{B}d\mathbf{C} \approx 0$, $d\mathbf{A}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \approx 0$, $d\mathbf{B}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \approx 0$ et $d\mathbf{C}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \approx 0$, nous aurons

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &\approx \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \sum_{k=0}^{t-1} (t-k-1)\mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-2}d\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes d\mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \\ &\approx \mathbf{b}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \mathbf{y}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \sum_{k=0}^{t-1} (t-k-1)\mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-2}d\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes d\mathbf{C}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}. \end{aligned}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^{\top}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})) \\ &\approx \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \left(\mathbf{b}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right)^{\top} \left(\mathbf{b}(t) - \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{u}^T(k) \otimes \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{t-k-1}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right) \end{aligned}$$

Grâce à ces approximations, $J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^{\top}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}))$ est écrit de la même manière que le critère présenté dans la section 3.2. Nous pouvons alors déduire facilement les domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{B} .

Annexe C

Approximation de la fonction coût $J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ pour un système continu

Dans cette annexe, nous déterminons une approximation de la fonction coût $J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$. Ainsi, nous pouvons écrire l'équation suivante

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) = \mathbf{y}(t) - \left(\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \right) \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}.$$

En définissant

$d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} - \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}$, $d\mathbf{A} = \mathbf{A} - \widehat{\mathbf{A}}$ et $d\mathbf{C} = \mathbf{C} - \widehat{\mathbf{C}}$. En utilisant ces définitions, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ peut être récrit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &= \mathbf{y}(t) - \left((\widehat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C}) \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{(\widehat{\mathbf{A}} + d\mathbf{A})(t-\tau)} d\tau \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &= \mathbf{y}(t) - \left((\widehat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C}) \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} e^{d\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

En tenant en compte de développement en série de Taylor à l'ordre 1 de la fonction exponentiel, $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})$ peut être approximer par

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &\approx \mathbf{y}(t) - \left((\widehat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C}) \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} (\mathbf{I} + d\mathbf{A}(t-\tau)) d\tau \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &\approx \mathbf{y}(t) - \left((\widehat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C}) \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \\ &\quad - \left((\widehat{\mathbf{C}} + d\mathbf{C}) \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\mathbf{A}(t-\tau) d\tau \right) (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} + d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}). \end{aligned}$$

En supposant que $d\mathbf{A}d\mathbf{B} \approx 0$, $d\mathbf{A}d\mathbf{C} \approx 0$, $d\mathbf{B}d\mathbf{C} \approx 0$, $d\mathbf{A}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \approx 0$, $d\mathbf{B}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \approx 0$ et

$d\mathbf{C}d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \approx 0$, nous aurons

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &\approx \mathbf{y}(t) - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \left(d\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \\ &\quad - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\mathbf{A}(t-\tau) d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \\ &\approx \mathbf{b}(t) - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(t) &= \mathbf{y}(t) - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} - \left(d\mathbf{C} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}} \\ &\quad - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\mathbf{A}(t-\tau) d\tau \right) \widehat{\boldsymbol{\theta}}_{\mathbf{B}}.\end{aligned}$$

Par la suite,

$$\begin{aligned}J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^\top(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}})) \\ &\approx \left(\mathbf{b}(t) - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right)^\top \left(\mathbf{b} - \left(\widehat{\mathbf{C}} \int_0^t \mathbf{u}^\top(\tau) \otimes e^{\widehat{\mathbf{A}}(t-\tau)} d\tau \right) d\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}} \right)\end{aligned}$$

Grâce à ces approximations, $J_{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}^\top(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{B}}(t, \boldsymbol{\theta}_{\mathbf{B}}))$ est écrit de la même manière que le critère présenté dans la section 3.2. Nous pouvons alors déduire facilement les domaines d'incertitude des coefficients de \mathbf{B} .

Annexe D

Bibliographie personnelle

W. Farah, G. Mercère and T. Poinot. Estimation des paramètres d'un système multivariable à partir de modèles d'ordre réduit. *Journées Doctorales GRD MACS*. Angers, France. March 2009.

W. Farah, G. Mercère and T. Poinot. System identification and uncertainty domain determination : a subspace-based approach. *American Control Conference*. Baltimore, USA. June 2010.

W. Farah, G. Mercère, J. van Wingerden and T. Poinot. Quantification of model uncertainty for a state-space system. *Mathematical Theory of Networks and Systems*. Budapest, Hungary. July 2010.

W. Farah, G. Mercère and T. Poinot. Uncertainty domain quantification for continuous-time state-space model. *Journées Identification Modélisation Expérimentale*. Douai, France. April 2011

W. Farah, G. Mercère, I. Houtzager, J. van Wingerden and T. Poinot. Identification and uncertainty domain quantification : experimental validation on a smart wind turbine. *The 18th IFAC World Congress*. Milano, Italy. August 2011.

W. Farah, G. Mercère and T. Poinot. Bounded error uncertainty domain description for continuous-time state-space model. Soumis à *IET Control Theory and Application*.

Bibliographie

- [AL97] R. Amirthalingam and J. Lee, *Subspace identification based inferential control of a continuous pulp digester*, Computers Chemical Engineering **21** (1997), 1143–1148.
- [AVVD98] M. Abdelghani, M. Verhaegen, P. Van Overschee, and B. De Moor, *Comparison study of subspace identification methods applied to flexible structures*, Mechanical Systems and Signal Processing **12** (1998), 679–692.
- [BAB00] M. Basseville, M. Abdelghani, and A. Benveniste, *Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring*, Automatica **36** (2000), 101–109.
- [Bai91] E. Bai, *Adaptive quantification of model uncertainties by rational approximation*, IEEE Transactions on Automatic Control **36**(4) (1991), 441–453.
- [Bak08] L. Bako, *Contribution à l'identification de systèmes hybrides*, Ph.D. thesis, Université des sciences et technologies de Lille, Douai, France, 2008.
- [Bar03] C. Baron, *Contribution à l'estimation de paramètres physiques à l'aide de modèles d'ordre réduit*, Ph.D. thesis, Université de Poitiers, Poitiers, France, 2003.
- [Bau01] D. Bauer, *Order estimation for subspace methods*, Automatica **37** (2001), 1561–1573.
- [Bau03] ———, *Subspace algorithms*, Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification (Rotterdam, The Netherlands), August 2003.
- [Bau05] ———, *Asymptotic properties of subspace estimators*, Automatica **41** (2005), 359–376.
- [BDC90] G. Belforte, B. Dona, and V. Cerone, *Parameter estimation algorithms for a set-membership description of uncertainty*, Automatica **26** (1990), 887–898.
- [BDRaZ92] P. Borne, G. Dauphin Tanguy, J. P. Richard, and F. Rotella and I. Zambetakis, *Modélisation et identification des processus*, Technip, 1992.
- [BG94] T. Bohlin and S. Graebe, *Issues in non-linear stochastic grey-box identification*, Proceedings of the 10th IFAC Symposium on System Identification (Denmark), July 1994.
- [BG01] G. Belforte and P. Gay, *Discrete time hammerstein model identification with unknown but bounded errors*, IET Control Theory and Applications **148** (2001), 523–529.

- [BGS01] T. Bastogne, H. Garnier, and P. Sibille, *A PMF-based subspace method for continuous-time model identification. application to a multivariable winding process*, International Journal of Control **74** (2001), 118–132.
- [BGSA01] X. Bombois, M. Gevers, G. Scorletti, and B. D. O. Anderson, *Robustness analysis tools for uncertainty set obtained by prediction error identification*, Automatica **37** (2001), 1629–1636.
- [BML09] L. Bako, G. Mercère, and S. Lecoecuche, *Identification of multivariable canonical state-space representations*, Proceedings of the 15th IFAC Symposium on System Identification (Saint Malo, France), July 2009.
- [BNSR98] T. Bastogne, H. Noura, P. Sibille, and A. Richard, *Multivariable identification of a winding process by subspace methods for tension control*, Control Engineering Practice **6** (1998), 1077–1088.
- [Bom00] X. Bombois, *Connecting prediction error identification and robust control analysis : a new framework*, Ph.D. thesis, Université Catholique de Louvain, Louvain la Neuve, Belgium, 2000.
- [BPT01] C. Baron, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, *Determination of parametric uncertainty domains using least-squares technique and bounded errors*, Methods and Models in Automation and Control **2** (2001), 1003–1008.
- [BPT02] ———, *Estimation de paramètres physiques à l'aide de modèles d'ordre réduit : Application à un système électromécanique*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique (Nantes, France), July 2002.
- [BPTB02] C. Baron, T. Poinot, J. C. Trigeassou, and O. Bachelier, *Physical parameter estimation using reduced order models*, Methods and Models in Automation and Robotics **1** (2002), 445–450.
- [Bre78] J. W. Brewer, *Kronecker product and matrix calculus in system theory*, IEEE Transactions on Circuits and Systems **25** (1978), 772–781.
- [BRS98] T. Bastogne, A. Richard, and P. Sibille., *Identification des systèmes multivariables : méthodes des sous-espaces. partie 1 : état de l'art*, Journal Européen des Systèmes Automatisés **32** (1998), 207–234.
- [BS90] V. Broman and M. J. Shensa, *A compact algorithm for the intersection and approximation of n-dimensional polytopes*, Mathematics and Computer in Simulation **32** (1990), 469–480.
- [BSR98] T. Bastogne, P. Sibille, and A. Richard, *Identification des systèmes multivariables : méthodes des sous-espaces. partie 2 : applicabilité et intérêt.*, Journal Européen des Systèmes Automatisés **32** (1998), 235–365.
- [BT96] G. Belforte and T. T. Tay, *Recursive estimation algorithms for linear models with set-membership error, bounding approaches to system identification*, Plenum Press, 1996.
- [BTT03] C. Baron, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, *Estimation de paramètres physiques en présence d'erreur de modélisation*, JDA (2003), 173–178.

-
- [Cai76] P. Caines, *On the asymptotic normality of instrumental variable and least squares estimators*, IEEE Transactions on Automatic Control **21** (1976), 598–600.
- [Chi05] A. Chiuso, *Prediction error vs. subspace methods in closed-loop identification*, Proceedings of the 16th IFAC World Congress (Prague), July 2005.
- [Chi06] ———, *Asymptotic equivalence of certain closed-loop subspace identification methods*, Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification (Newcastle, Australia), March 2006.
- [Chi07a] ———, *On the relation between CCA and predictor based subspace identification*, IEEE Transactions on Automatic Control **52** (2007), 1795–1812.
- [Chi07b] ———, *The role of vector auto regressive modeling in predictor based subspace identification*, Automatica **43** (2007), 1034–1048.
- [Chi10] ———, *On the asymptotic properties of closed loop cca-type subspace algorithms : equivalence results and choice of the future horizon*, IEEE Transactions on Automatic Control **3** (2010), 634–649.
- [CK95] Y. Cho and T. Kailath, *Fast subspace-based system identification : an instrumental variable approach*, Automatica **31** (1995), 903–905.
- [CP05] A. Chiuso and G. Picci, *Consistency analysis of some closed loop subspace identification methods*, Automatica **41** (2005), 377–391.
- [CV97] C. Chou and M. Verhaegen, *Subspace algorithms for the identification of multivariable dynamic errors-in-variables models*, Automatica **33** (1997), 1857–1869.
- [CV99] ———, *Closed loop identification using canonical correlation analysis*, Proceedings of the 5th European Control Conference, 1999.
- [De 94] D. De Vries, *Identification of model uncertainty for control design*, Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1994.
- [DVH08] J. Dong, M. Verhaegen, and E. Holweg, *Closed-loop subspace predictive control for fault tolerant MPC design.*, Proceedings of the 17th IFAC World Congress (Seoul, Korea), February 2008.
- [DW01] C. Durieu and E. Walter, *Identification des systèmes*, ch. Estimation ellipsoïdale à erreur bornée, pp. 131–154, Hermes Science, 2001.
- [Enq05] M. Enqvist, *Linear models of nonlinear systems*, Ph.D. thesis, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, 2005.
- [FA96] G. Favier and L. V. R. Arruda, *Review and comparison of ellipsoidal bounding algorithms*, Plenum Press, 1996.
- [FDV00] W. Favoreel, B. De Moor, and P. Van Overschee, *Subspace state-space system identification for industrial processes*, Journal of Process Control **10** (2000), 149–155.
- [FH82] E. Fogel and Y. F. Huang, *On the value of information in system identification - bounded noise case*, Automatica **18** (1982), 229–238.

- [FMPV10] W. Farah, G. Mercère, T. Poinot, and J. Van Wingerden, *Quantification of model uncertainty for a state-space system*, 19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (Hungary, Budapest), July 2010.
- [GCB99] M. Givers, B. Codrons, and F. De Bruyne, *Model validation in closed-loop*, Proceedings of the American Control Conference (California, USA), June 1999.
- [GGN92] G. Goodwin, M. Gevers, and B. Ninness, *Quantifying the error in estimated transfer functions with application to model order selection*, IEEE Transactions on Automatic Control **37** (1992), 913–928.
- [Gil00] M. Gilson, *Identification des systèmes en boucle fermée. contributions aux méthodes de compensation de biais et des sous-espaces*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy, France, 2000.
- [GM96] L. Giarré and M. Milanese, *SM identification of approximating models for H_∞ robust control*, Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control (Kobe, Japan), December 1996.
- [GM97] ———, *Model quality evaluation in H_2 identification*, IEEE Transactions on Automatic Control **42** (1997), 691–698.
- [GMR03] H. Garnier, M. Mensler, and A. Richard, *Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation*, International Journal of Control **76** (2003), 1337–1357.
- [GMT97] L. Giarré, M. Milanese, and M. Taragna, *H_∞ identification and model quality evaluation*, IEEE Transaction on Automatic Control **42** (1997), 188–199.
- [GV96] H. Golub and F. Van Loan, *Matrix computation*, The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [GV05] M. Gilson and P. Van den Hof, *Instrumental variable methods for closed loop system identification*, Automatica **41** (2005), 241–249.
- [GVZ00] A. Garulli, A. Vicino, and G. Zappa, *Conditional central algorithms for worst-case set-membership identification and filtering*, IEEE Transaction on Automatic Control **45** (2000), 14–23.
- [GW74] K. Glover and J. C. Willems, *Parametrizations of linear dynamical systems : canonical forms and identifiability*, IEEE Transactions on Automatic Control **19** (1974), 640–646.
- [GW08] H. Garnier and L. Wang, *Identification of continuous-time models from sampled data*, Springer-Verlag, 2008.
- [Ham10] F. Hamon, *Modélisation du comportement mécanique en fissuration d’alliages aéronautiques*, Ph.D. thesis, Ecole nationale supérieure de mécanique et d’aérotechnique, Poitiers, France, 2010.
- [Hav01] B. Haverkamp, *State-space identification : theory and practice*, Ph.D. thesis, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 2001.

-
- [HCVJ96] B. Haverkamp, C. Chou, M. Verhaegen, and R. Johansson, *Identification of continuous-time MIMO state-space models from sampled data in the presence of process and measurement noise*, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control (Kobe, Japan), December 1996.
- [HG95] Y. Huang and S. Gollamudi, *Set-membership identification for adaptive equalization*, Proceedings of the 38th Midwest Symposium on Circuits and Systems (Rio de Janeiro, Brazil), August 1995.
- [Him72] D. M. Himmelblau, *Applied non linear programming*, Mc Graw Hill, 1972.
- [HJ90] R. Horn and C. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1990.
- [HK66] B. Ho and R. Kalman, *Effective construction of linear state variable models from input output data*, Regelungstechnik **14** (1966), 545–592.
- [HL92] H. Hjalmarsson and L. Ljung, *Estimating model variance in the case of undermodeling*, IEEE Transactions on Automatic Control **37**(7) (1992), 1004–1008.
- [HV97] R. Hakvoort and P. Van den Hof, *Identification of probabilistic system uncertainty regions by explicit evaluation of bias and variance errors*, IEEE Transaction on Automatic Control **42** (1997), 1516–1528.
- [HVB⁺10] A. Hulskamp, J. Van Wingerden, T. Barlas, H. Champlaud, G. Van Kuik, H. Bersee, and M. Verhaegen, *Dynamic load mitigation experiments on a scale model of a wind turbine with a smart rotor*, Wind Energy (2010).
- [HWV09] I. Houtzager, J. W. V. Wingerden, and M. Verhaegen, *Fast-array recursive closed-loop subspace model identification*, Proceedings of the 15th IFAC symposium identification (Saint-Malo, France), July 2009.
- [Jan03] M. Jansson, *Subspace identification and arx modeling*, Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification (Rotterdam, The Netherlands), August 2003.
- [Jan05] ———, *A new subspace identification method for open and closed loop data*, Proceedings of the 16th IFAC World Congress (Prague, Czech Republic), July 2005.
- [JVC99] R. Johansson, M. Verhaegen, and C. Chou, *Stochastic theory of continuous-time state-space identification*, IEEE Transactions on Signal Processing **47** (1999), 41–51.
- [JW98] M. Jansson and B. Wahlberg, *On consistency of subspace methods for system identification*, Automatica **34** (1998), 1507–1519.
- [Kai80] T. Kailath, *Linear systems*, Engelwood Cliffs : Prentice Hall, 1980.
- [Kat05] T. Katayama, *Subspace methods for system identification*, Springer-Verlag, 2005.
- [KHW⁺95] S. Kukreja, B Haverkamp, D. Westwick, R. Kearney, H. Galiana, and M. Verhaegen, *Subspace identification method for ankle mechanics*, IEEE Engineering in Medicine and Biology Society **17** (1995), 1413–1414.

- [Knu01] T. Knudsen, *Consistency analysis of subspace identification methods based on a linear regression approach*, *Automatica* **37** (2001), 81–89.
- [Kun78] S. Kung, *A new identification and model reduction algorithm via singular value decomposition*, Proceedings of the 12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computer (California, USA), November 1978.
- [Lan01] I. Landau, *Identification des systèmes*, ch. Les bases de l'identification des systèmes, pp. 19–130, Hermes science publication, 2001.
- [Lar83] W. Larimore, *System identification, reduced order filters and modeling via canonical variate analysis*, Proceedings of the American Control Conference (California, USA), June 1983.
- [Lar90] ———, *Canonical variate analysis in identification, filtering and adaptive control*, Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control (Hawaii, USA), December 1990.
- [LGGY08] V. Laurain, M. Gilson, H. Garnier, and P. Young, *Refined instrumental variable methods for identification of hammerstein continuous–time box–jenkins models*, Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control (Cancun, Mexico), December 2008.
- [Lju87] L. Ljung, *System identification : theory for the user*, Prentice Hall, 1987.
- [Lju96] ———, *Development of system identification*, Proceedings of the 13th IFAC World Congress (San Francisco, California, USA), July 1996.
- [Lju97] ———, *Identification model validation and control*, Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control (California, USA), December 1997.
- [Lju98] ———, *Identification for control-what is there to learn ?*, Tech. report, 1998.
- [Lju99a] ———, *Comments on model validation as set membership identification*, Proceedings of the Workshop on Robustness in Identification and Control (Siena, Italy), July 1999.
- [Lju99b] ———, *Model validation and model error modeling*, Proceedings of the Aström Symposium on Control (Lund, Sweden), August 1999.
- [Lju99c] ———, *System identification : theory for the user (2nd edition)*, Prentice Hall, 1999.
- [Lju01] ———, *Estimating linear time-invariant models of nonlinear time–varying systems*, *European Journal of Control* **7** (2001), 203–219.
- [Lju08] ———, *Perspectives on system identification*, Proceedings of the 17th IFAC World Congress (Seoul, Korea), July 2008.
- [LM96] L. Ljung and T. McKelvey, *Subspace identification from closed loop data*, *Signal Processing* **52** (1996), 209–215.
- [Lov97] M. Lovera, *Subspace identification methods : theory and applications*, Ph.D. thesis, Ecole polytechnique de Milan, Milan, Italy, 1997.
- [LRS03] W. Li, H. Raghavan, and S. Shah, *Subspace identification of continuous-time models for process fault detection and isolation*, *Journal of Process Control* **13** (2003), 407–421.

-
- [Lue67] D. Luenberger, *Canonical forms for linear multivariable systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **12** (1967), 290–293.
- [Mar63] D. W. Marquardt, *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics **11** (1963), 431–441.
- [MB10] G. Mercère and L. Bako, *Parameterization and identification of multivariable state-space systems : a canonical approach*, Automatica (2010).
- [MBL08] G. Mercère, L. Bako, and S. Lecœuche, *Propagator-based methods for recursive subspace model identification*, Signal Processing **88** (2008), 468–491.
- [Mck95] T. Mckelvey, *Identification of state-space models from time and frequency data*, Ph.D. thesis, Linköping university, Linköping, Sweden, 1995.
- [MD91] J. Munier and G. Y. Delisle, *Spatial analysis using new properties of the cross spectral matrix*, IEEE Transactions on Signal Processing **39** (1991), 746–749.
- [MDV91] M. Moonen, B. De Moor, and J. Vandewalle, *Svd-based subspace methods for multivariable continuous-time systems identification*, ch. Identification of Continuous-Time Systems, pp. 473–488, Kluwer Academic Publications, 1991.
- [Mer04] G. Mercère, *Contribution à l'identification récursive des systèmes par l'approche des sous-espaces*, Ph.D. thesis, l'Université des sciences et technologies de Lille, Lille, France, 2004.
- [MH97] T. Mckelvey and A. Helmersson, *System identification using an over-parametrized model class*, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control (San Diego, California USA), December 1997.
- [MHV99] L. Mevel, L. Hermans, and H. Van der Auweraer, *On the application of subspace-based fault detection methods to industrial structures*, Mechanical Systems and Signal Processing **13** (1999), 823–838.
- [MN90] S. H. Mo and J. P. Norton, *Fast and robust algorithm to compute exact polytope parameter bounds*, Mathematics and Computer in Simulation **32** (1990), 481–493.
- [MN05] M. Milanese and C. Novara, *Model quality in identification of nonlinear systems*, IEEE Transactions on Automatic Control **50** (2005), 1606–1611.
- [MOGG07] G. Mercère, R. Ouvrard, M. Gilson, and H. Garnier, *Subspace-based methods for continuous-time model identification of MIMO systems from filtered sampled data*, European Control Conference (Kos, Greece), July 2007.
- [MT02] M. Milanese and M. Taragna, *Optimality, approximation, and complexity in set-membership H_∞ identification*, IEEE Transactions on Automatic Control **47** (2002), 1682–1690.
- [MTV97] M. Milanese, M. Taragna, and P. Van den Hof, *Closed-loop identification of uncertainty models for robust control design : a set-membership approach*, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control (San Diego , USA), December 1997.

- [MV91] M. Milanese and A. Vicino, *Optimal estimation theory for dynamic system with unknown but bounded uncertainty : an overview*, Automatica **27** (1991), 997–1009.
- [NG95] B. Ninness and G. Goodwin, *Estimation of model quality*, Automatica **31** (1995), 1771–1797.
- [OKY02] A. Ohsumi, K. Kameyama, and K. Yamagushi, *Subspace identification for continuous-time stochastic systems via distribution based approach*, Automatica **38** (2002), 63–79.
- [OV94] B. Ottersten and M. Viberg, *A subspace-based instrumental variable method for state space system identification*, Proceedings of the 10th IFAC Symposium on System Identification (Copenhagen, Denmark), July 1994.
- [Poi05] T. Poinot, *Contribution à l'identification des systèmes à représentation continue et des systèmes fractionnaires*, HDR, Poitiers, France, November 2005.
- [PSD96] K. Peternell, W. Sherrer, and M. Deistler, *Statistical analysis of novel subspace identification methods*, Signal Processing **52** (1996), 161–177.
- [PSK94] E. Pearson, Y. Shen, and V. Klein, *Application of fourier modulation function to parameter estimation of a multivariable linear differential system*, Proceedings of the 10th IFAC Symposium on System Identification (Copenhagen, Denmark), July 1994.
- [PTL97] T. Poinot, J. C. Trigeassou, and E. Lenger, *Estimation paramétrique d'un système continu avec quantification des erreurs de variances et de modélisation*, Automatique Génie Informatique, Image et Signal (Angers, France), December 1997.
- [Qin06] S. Qin, *An overview of subspace identification*, Computers and Chemical Engineering **30** (2006), 1502–1513.
- [Ram06] P. P. N. Ramdani, *Experimental parallel robot dynamic model evaluation with set-membership estimation*, Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification (Newcastle, Australia), March 2006.
- [RGL01] W. Reinelt, G. Garulli, and L. Ljung, *Comparing different approaches to model error modeling in robust identification*, Automatica **38** (2001), 787–803.
- [RRP71] J. Richalet, A. Rault, and R. Pouliquen, *Identification des processus par la méthode du modèle*, Gordon Breach, 1971.
- [SS89] T. Söderström and P. Stoica, *System identification*, Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering, New York, 1989.
- [SZ90] S. Sagara and Z. Zhao, *Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems*, Automatica **26** (1990), 63–74.
- [Tah03] M. Tahir, *Modélisation thermique des composants magnétiques utilisés en électronique de puissance*, Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, Lyon, France, 2003.

-
- [Toh08] E. Tohme, *Initialization of output error identification algorithms*, Ph.D. thesis, Poitiers University, Poitiers, France, 2008.
- [TP01] J. C. Trigeassou and T. Poinot, *Identification des systèmes*, ch. Identification des systèmes à représentation continue, pp. 177–211, Hermes science publication, 2001.
- [Tri87] J. C. Trigeassou, *Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique*, Ph.D. thesis, Université de Poitiers, Poitiers, France, 1987.
- [Tri00] J.-C. Trigeassou, *La méthode des moments en automatique*, Conférence Internationale Francophone d'Automatique (Lille, France), July 2000.
- [UR87] H. Unbehauen and G. Rao, *Identification of continuous systems*, North Holland System and Control Series **10** (1987).
- [UR98] ———, *A review of identification in continuous-time systems*, Annual Reviews in control **22** (1998), 145–171.
- [VD91] M. Verhaegen and E. Deprettere, *A fast recursive MIMO state space model identification algorithm*, Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control (Brighton, United Kingdom), December 1991.
- [VD92a] M. Verhaegen and P. Dewilde, *Subspace model identification part 1 : output error state space model identification class of algorithms*, International Journal of Control **56** (1992), 1187–1210.
- [VD92b] ———, *Subspace model identification part 2 : analysis of the elementary output error state space model identification algorithm*, International Journal of Control **56** (1992), 1211–1241.
- [VD93] P. Van Overschee and B. De Moor, *N4SID : numerical algorithms for state space subspace system identification*, Proceedings of the 12th IFAC World Congress (Sydney, Australia), July 1993.
- [VD94] ———, *N4SID : subspace algorithms for the identification of combined deterministic stochastic systems*, Automatica **30** (1994), 75–93.
- [VD96a] ———, *Closed loop subspace system identification*, Tech. report, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, 1996.
- [VD96b] ———, *Subspace identification for linear systems theory, implementation, applications*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [Ver93] M. Verhaegen, *Subspace model identification part 3 : analysis of the ordinary output error state space model identification algorithm*, International Journal of Control **58** (1993), 555–586.
- [Ver94] ———, *Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input output data*, Automatica **30** (1994), 61–74.
- [VHB⁺08] J. Van Wingerden, A. Hulskamp, T. Barlas, G. Van Kuik, D. Molenaar, H. Bersee, and M. Verhaegen, *On the proof of concept of a smart wind turbine rotor blade for load alleviation*, Wind Energy **11** (2008), 265–280.

- [VHB⁺10] J. Van Wingerden, A. Hulskamp, T. Barlas, I. Houtzager, H. Bersee, G. Van Kuik, and M. Verhaegen, *Two-degree-of-freedom active vibration control of a prototyped smart rotor*, IEEE Transactions on Control Systems Technology (2010).
- [Vib91] M. Viberg, *A statistical perspective on state-space modeling using subspace methods*, Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control (Brighton, United Kingdom), December 1991.
- [Vib95] ———, *Subspace based methods for the identification of linear time invariant systems*, Automatica **31** (1995), 1835–1851.
- [VV02] V. Verdult and M. Verhaegen, *Subspace identification of multivariable linear parameter varying systems*, Automatica **38** (2002), 805–814.
- [VV07] M. Verhaegen and V. Verdult, *Filtering and system identification : a least squares approach*, Cambridge University Press, 2007.
- [VVG94] M. Verhaegen, A. Varga, and G. Grübel, *Some experience with the MOESP class of subspace model identification methods in identifying the BO105 helicopter*, Technical report, German Aerospace Research Establishment, Laboratory for Flight Systems Dynamics, Wessling, Germany 1994.
- [Wah91] B. Wahlberg, *System identification using laguerre model*, IEEE Transactions on Automatic Control **36**(5) (1991), 551–562.
- [WE99] K. Wisama and D. Etienne, *Modelisation identification et commande des robots*, 1999.
- [Win08] J. W. V. Wingerden, *Control of wind turbines with smart rotors : proof of concept and LPV subspace identification*, Ph.D. thesis, Delft University, Delft, Netherlands, 2008.
- [WNPLM96] E. Walter, J. Norton, H. Piet–Lahanier, and M. Milanese, *Bounding approaches to system identification*, Plenum Press, 1996.
- [WP94] E. Walter and L. Pronzato, *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*, Masson, 1994.
- [WP97] ———, *Identification of parametric models from experimental data. communications and control engineering series*, Springer, 1997.
- [WPL90] E. Walter and H. Piet-Lahanier, *Exact recursive characterization of feasible parameter sets in the linear case*, Mathematics and Computer in Simulation **32** (1990), 495–504.
- [XL02] L. Xie and L. Ljung, *Estimate physical parameters by black box modeling*, Proceedings of the Chinese Control Conference (Hangzhou, China), June 2002.
- [You81] P. Young, *Parameter estimation for continuous-time models. a survey*, Automatica **17** (1981), 23–39.

Résumé

Dans cette thèse, le problème de détermination des domaines d'incertitude et de modélisation de l'erreur du modèle de systèmes représentés à l'aide de formes d'état linéaires à temps invariant est considéré. Les solutions proposées se décomposent en deux étapes. La première consiste à identifier un modèle d'état à l'aide d'algorithmes des sous-espaces à temps continu et discret. Contrairement aux approches classiques conduisant à une représentation totalement paramétrée, les techniques considérées dans cette thèse présentent la particularité de fournir une forme canonique parcimonieuse composée d'invariants du système. Ayant accès à une estimation consistante des paramètres du système, la seconde phase cherche à caractériser les domaines d'incertitude des paramètres estimés. Une approche de type erreur bornée est plus précisément employée. Cette approche est utilisée afin de déterminer ces domaines par des régions ellipsoïdales. Dans ce contexte, pour chaque algorithme d'identification développé, nous proposons une méthode de caractérisation des domaines d'incertitude des coefficients des matrices d'état. Le problème de modélisation de l'erreur du modèle est également considéré au sein de cette thèse. Nous proposons une technique d'estimation des paramètres physiques d'un système multivariable grâce à un modèle d'ordre réduit. Lors de l'identification des paramètres de ce modèle, un biais dû à l'erreur de modélisation apparaît. Pour remédier à ce problème, une méthode de réjection du biais est appliquée en approchant l'erreur de modélisation par un ensemble de modèles de types boîtes noires contraints. Les méthodologies développées au sein du manuscrit sont illustrées à l'aide d'exemples de simulation numérique mais également à partir de données réelles acquises sur un banc éolien accessible à l'Université Technique de Delft.

Mots-clés: identification, systèmes multivariables, représentation d'état structurée, algorithmes des sous-espaces, erreur de sortie, incertitudes, erreur de modèle.

Abstract

This work deals with uncertainty domain determination and error model modeling for linear time-invariant state-space systems. The developed solutions are based on a two-step approach. The first step consists in estimating the state-space models using discrete-time and a continuous-time subspace-based algorithms. Contrary to the classic subspace-based approaches which lead to over-parameterized state-space representations, the considered identification techniques estimate state matrices in a canonical state-space coordinates basis which are composed of the invariant parameters. From these consistent estimates, the second step consists in determining the uncertainty domains related to the estimated parameters. A hard error bounding approach is considered. This approach is used in order to determine specific ellipsoidal surfaces. More precisely, for each developed identification algorithm, a specific method is introduced in order to build the uncertainty domains of the estimated state-space matrices coefficients. The model error modeling problem is also considered in this manuscript. To solve this problem, a technique is introduced in order to estimate the physical parameters of system thanks to a reduced order model. During the estimation of these parameters, a bias created by the modeling errors appears. This work proposes a solution to remove this bias. Its principle is to characterize the model errors by constrained black box models. All these developments are illustrated with the help of numerical examples as well as real data acquired on a wind turbine test-bed available at Delft University of Technology.

Keywords: system identification, multi-input multi-output systems, structured state-space representation, subspace-based algorithms, output-error, uncertainties, model error modeling.