



Introduction à la théorie des revêtements et applications.

Sophie LEJEUNE
M2 MFA

Professeur référent : M. Nadir MATRINGE

Année universitaire 2012 - 2013

Table des matières

1	Préliminaires topologiques et homotopie	6
1.1	Généralités topologiques	6
1.1.1	Séparabilité et compacité	6
1.1.2	Topologie quotient	6
1.2	Homotopie et groupe fondamental	8
1.2.1	Homotopie : généralités	8
1.2.2	Homotopie des chemins, des lacets et groupe fondamental	9
1.2.3	Premières propriétés du groupe fondamental	10
1.2.4	Groupe fondamental de $\mathbb{S}_1$ et théorème de Brouwer en dimension 2	14
2	Revêtements et groupe fondamental	17
2.1	Définition d'un revêtement et exemple fondamental	17
2.2	Relèvements	18
2.3	Action du groupe fondamental	19
2.4	Calcul de groupe fondamental	20
3	Groupe fondamental des groupes classiques	22
3.1	Généralités sur le groupe fondamental d'un groupe topologique	22
3.2	Rappel sur les quaternions	24
3.2.1	Définition et premières propriétés	24
3.2.2	Quaternions et rotations dans l'espace	25
3.3	Groupe fondamental des groupes classiques	27

Introduction

En préambule à ce mémoire, je tiens à remercier dans un premier temps toute l'équipe pédagogique de la formation du Master mathématiques fondamentales et applications pour nous avoir permis d'effectuer ce projet. Je tiens aussi à remercier N. MATRINGE, mon encadrant de mémoire, pour ses conseils, sa disponibilité et son orientation tout au long de mon travail.

Ce mémoire constitue une introduction à la théorie du groupe fondamental et des revêtements. Le groupe fondamental est l'une des premières notions de la topologie algébrique, introduite par Henri Poincaré dans son article *Analysis Situs*, paru en 1895. Cette théorie permet d'associer à un espace topologique un groupe, son groupe fondamental, et à une application continue entre espaces topologiques un morphisme de groupes. Nous verrons dans un premier temps ses principales propriétés et certaines applications de cette théorie, notamment l'exemple du théorème du point fixe de Brouwer dans lequel on démontre, par des arguments algébriques, un résultat de nature topologique.

Nous parlerons ensuite de la théorie des revêtements qui est fortement liée à celle du groupe fondamental : les revêtements d'un espace correspondent essentiellement aux sous-groupes du groupe fondamental de cet espace. Nous verrons un revêtement particulier qui nous permettra de calculer les groupes fondamentaux de groupes géométriques classiques.

Chapitre 1

Préliminaires topologiques et homotopie

1.1 Généralités topologiques

Notations : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\|.\|$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$ (on rappelle que $\|(x_1, \dots, x_n)\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$). On note $\mathbb{B}_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ et $\mathbb{S}_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$.

1.1.1 Séparabilité et compacité

Définition 1. Soit X un espace topologique, il est dit **séparé** si pour tout couple (x, x') de points distincts de X , il existe deux ouverts disjoints de X , il existe deux ouverts disjoints U et U' tels que $x \in U$ et $x' \in U'$.

Remarque 1. Si X est séparé et $A \subset X$ alors A , muni de la topologie induite est séparé. En effet, si $a \neq a'$ dans A , comme X est séparé, $a \in U$ et $a' \in U'$ avec U et U' sont deux ouverts disjoints de X . Mais alors $a \in A \cap U$ et $a' \in A \cap U'$ avec $A \cap U$ et $A \cap U'$ sont deux ouverts disjoints de A .

Remarque 2. Tout espace métrique (par exemple $\mathbb{R}^n$) est séparé, donc toutes ses parties aussi.

Définition 2. Soit K un espace topologique, on dit que K est **compact** si :

(1) K est séparé.

(2) Si $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ouverts de K qui recouvre A (i.e. $K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$), alors on peut en extraire un sous-recouvrement fini, i.e. il existe une partie finie B de A , telle que $K \subset \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$

Remarque 3. Si K est une partie d'un espace topologie séparé, elle est compacte si et seulement si tout famille d'ouverts de $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de X qui recouvre K , il existe une partie finie B de A telle que $K \subset \bigcup_{\beta \in B} U_\beta$.

1.1.2 Topologie quotient

On se donne $\mathcal{R}$ une relations d'équivalence sur un ensemble topologique X .

Définition 3. Si A est une partie de X , on note $\text{Sat}(A) = \{x \in X, \exists a \in A, x\mathcal{R}a\}$ le **saturé** de A dans X .

Définition 4. Soit X un espace topologique muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$. On dit qu'une partie A de X est **saturée**, si elle est réunion de classes d'équivalences, i.e. si elle vérifie que $x\mathcal{R}a \in A$ implique que $x \in A$.

On vérifie facilement que A est saturé si et seulement si $A = \text{Sat}(A)$.

Remarque 4. Il est évident que si on note $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la surjection canonique, alors $\text{Sat}(A) = p^{-1}(p(A))$ et si B est une partie de $X/\mathcal{R}$, alors $A = p^{-1}(B)$ est saturée dans X .

Proposition 1. Soit X un espace topologique, muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la surjection canonique. Si A est une partie de X , alors $p(A)$ est un ouvert (resp. un fermé) de $X/\mathcal{R}$ si et seulement si $\text{Sat}(A)$ est un ouvert (resp. un fermé) dans X . En particulier, $p(A)$ est ouvert (resp. fermé) si et seulement si $p^{-1}(p(A)) = \text{Sat}(A)$ est ouvert (resp. fermé).

Corollaire 1. Avec les notations de la proposition précédente, si $A = U$ est un ouvert saturé, $p(U)$ est ouvert, et si $A = F$ est un fermé saturé, $p(F)$ est fermé.

Proposition 2. Si $f : X \rightarrow Y$ est une fonction continue et si pour tous $x, y \in X$ tels que $x\mathcal{R}y$, on a $f(x) = f(y)$, alors f passe au quotient i.e. il existe une fonction $\bar{f}$ de $X/\mathcal{R}$ vers Y telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\mathcal{R} & & \end{array}$$

et $\bar{f}$ est continue.

Lemme 1. Soient X et Y deux espaces topologique, avec Y séparé. On suppose que $f : X \rightarrow Y$ est une application continue, et que $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, alors $X/\mathcal{R}$ est séparé.

Démonstration - Soit p la projection canonique $X \mapsto X/\mathcal{R}$. Soient $p(x)$ et $p(x')$ deux points distincts de $X/\mathcal{R}$, on va montrer qu'ils appartiennent à deux ouverts disjoints.

Par définition de $\mathcal{R}$, la fonction f passe au quotient et définit une injection continue $\tilde{f} : p(x) \mapsto f(x)$ de $X/\mathcal{R}$ dans Y ($\tilde{f} = f \circ p$).

En particulier, $f(x) = \tilde{f}(p(x)) \neq \tilde{f}(p(x')) = f(x')$ par injectivité de $\tilde{f}$. On pose $y = f(x)$, $y' = f(x')$. Par séparabilité de Y , il existe V et V' deux ouverts disjoints tels que $y \in V$ et $y' \in V'$. Alors, on pose $U = f^{-1}(V)$ et $U' = f^{-1}(V')$. Alors U et U' sont deux ouverts de X par continuité de f et ils sont saturés. On en déduit que $p(U)$ et $p(U')$ sont ouverts dans $X/\mathcal{R}$. De plus, $p(x) \in p(U)$ et $p(x') \in p(U')$.

Finalement, comme $\tilde{f}(p(U)) = f(U) = V$ et $\tilde{f}(p(U')) = f(U') = V'$, V et V' sont disjoints et $\tilde{f}$ est injective, on en déduit que $p(U)$ et $p(U')$ sont disjoints. Ainsi $X/\mathcal{R}$ est séparée.

Corollaire 2. Les espaces $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ et $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sont séparés.

Démonstration - Dans le premier cas, on prend $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$, $Y = \mathbb{B}^2 \subset \mathbb{R}^2$ et $f : (x, t) \mapsto (1 - t)x$ qui est compatible avec la relation d'équivalence associée au sous-espace $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$.

Dans le second cas, on prend $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{S}^1$ et $f : t \mapsto e^{2i\pi t}$ qui est bien compatible avec la relation d'équivalence associée à $\mathbb{Z}$.

Proposition 3. Soit X et Y deux espaces topologique, avec Y séparé, et f une application continue de X vers Y . Si X est compact, alors $f(X)$ est compact, et si de plus f est injective, c'est un homéomorphisme de X sur $f(X) \subset Y$.

Corollaire 3. $\mathbb{S}^1 \times [0, 1] / \mathbb{S}^1 \times \{1\}$ est compact et homéomorphe à $\mathbb{B}^2$.

Corollaire 4. $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact et homéomorphe à $\mathbb{S}^1$.

1.2 Homotopie et groupe fondamental

1.2.1 Homotopie : généralités

Définition 5. Soient X et Y deux espaces topologiques.

(1) Deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont **homotopes** s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X . On notera alors $f \sim g$ et on dira que h est une **homotopie** entre f et g .

(2) Si A est une partie de X , deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont **homotopes relativement à A** s'il existe une application continue $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $h(x, 0) = f(x)$ et $h(x, 1) = g(x)$ pour tout x dans X et $h(a, t) = f(a)$ pour tout a dans A et t dans $[0, 1]$. On notera alors $f \sim g \text{ rel } A$.

(3) Un **chemin** dans X est une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Son origine est $x = \alpha(0)$ et son extrémité est $y = \alpha(1)$. On dit que α est un chemin joignant x à y .

(4) Un espace topologique X est connexe par arcs si pour tout $(x, y) \in X^2$, il existe un chemin α de X joignant x à y .

Remarque 5. Il est immédiat que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}(X, Y)$, de même que $\sim \text{ rel } A$.

Définition 6. Un espace topologique X est dit **contractile** s'il est non vide et si l'application identité de X est homotope à une application constante de X dans X .

Remarque 6. Un convexe non vide C dans un espace vectoriel topologique est contractile.

La plupart des espaces topologiques que l'on rencontre sont **localement contractiles**.

Définition 7. Un espace topologique X est **simplement connexe** s'il est connexe par arcs et si toute application continue du cercle $\mathbb{S}_1$ dans X se prolonge (continûment) en une application du disque $\mathbb{B}_2$ dans X .

Remarque 7. Un espace contractile est simplement connexe.

Démonstration- Soit X un espace contractile. Il est connexe par arcs. En effet, il existe $x_0 \in X$ et une application continue $h : [0, 1] \times X \rightarrow X$ telle que pour tout $x \in X$, $h(x, 0) = x$ et $h(x, 1) = x_0$. Si on se donne $x, y \in X$, l'application γ_1 définie par $t \mapsto h(x, t)$ est continue donc définit un chemin joignant x à x_0 . On construit de même un chemin γ_2 joignant y à x_0 . L'application $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ est un chemin joignant x à y donc X est bien connexe par arcs.

Soit maintenant $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ une application continue. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] &\rightarrow X \\ (z, t) &\mapsto h(\alpha(z), t) \end{aligned}$$

β est compatible avec la relation d'équivalence associée au sous-espace $\mathbb{S}_1 \times \{1\}$ donc on peut factoriser β de manière à ce que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_1 \times [0, 1] & \xrightarrow{\beta} & Y \\ \downarrow & \searrow \tilde{\beta} & \\ \mathbb{S}_1 \times [0, 1] / \mathbb{S}_1 \times \{1\} & & \end{array}$$

et $\bar{\beta}$ est continue. Comme, de plus, on a montré que $\mathbb{S}_1 \times [0, 1] / \mathbb{S}_1 \times \{1\}$ est homéomorphe à $\mathbb{B}_2$ par l'application $\bar{f}$ associée à la factorisation de l'application $f : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}_2 ; (x, t) \mapsto (1-t)x$. On pose $\tilde{\alpha} = \beta \circ \bar{f}^{-1}$. Elle est continue et pour tout $x \in \mathbb{S}_1$, $\tilde{\alpha}(x) = \beta((x, 0)) = h(\alpha(x), 0) = \alpha(x)$ puisque pour tout $x \in \mathbb{S}_1$, $\alpha(x) \in X$.

Définition 8. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application $f : X \rightarrow Y$ est une **équivalence d'homotopie** s'il existe $g : X \rightarrow Y$ continue telle que $f \circ g$ soit homotope à l'application identique de Y et $g \circ f$ soit homotope à l'application identique de X . S'il existe une équivalence d'homotopie entre X et Y , on dit que X et Y ont le même **type d'homotopie**.

Exemple 1. Un espace topologique non vide est contractile si et seulement s'il a le même type d'homotopie qu'un singleton.

1.2.2 Homotopie des chemins, des lacets et groupe fondamental

Définition 9. Soit X un espace topologique.

(1) Un **chemin** dans X est une application continue $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$. Son origine est $x = \alpha(0)$ et son extrémité est $y = \alpha(1)$. On dit que α est un chemin joignant x à y .

(2) Si α est un chemin joignant x à y , on appelle chemin inverse de α le chemin $\bar{\alpha}$, joignant y à x , défini par $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$ pour tout t dans $[0, 1]$.

(3) Soient α et β deux chemins dans X tels que $\alpha(1) = \alpha(0)$. On note le chemin $\alpha.\beta$ le chemin

$$t \mapsto \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

On dit que $\alpha.\beta$ est le chemin composé de α et β .

(4) Deux chemins α et β dans X d'origine x_0 et d'extrémité x_1 sont homotopes et on note $\alpha \sim \beta$ si les applications α et β sont homotopes relativement à la partie $\{0, 1\}$ de $[0, 1]$, c'est-à-dire s'il existe une application continue $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que :

- $h(t, 0) = \alpha(t)$ et $h(t, 1) = \beta(t)$ pour tout t dans $[0, 1]$.
- $h(0, s) = x_0$ et $h(1, s) = x_1$ pour tout s dans $[0, 1]$.

Une telle application est appelée une **homotopie** de α à β .

(5) Pour tout x dans X , on appelle chemin constant en x le chemin $c_x(t) = x$.

Remarque 8. La relation d'homotopie induit une relation d'équivalence sur les chemins joignant $x_0 \in X$ à $x_1 \in X$. On note $[\alpha]$ la classe d'homotopie d'un chemin α .

Lemme 2. Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ des chemins de X .

- (1) Si $\alpha \sim \beta$, alors $\bar{\alpha} \sim \bar{\beta}$.
- (2) Si $c \sim \alpha, b \sim \beta$ et $c(1) = b(0)$, alors $c.b \sim \alpha.\beta$.
- (3) Soient α un chemin joignant x à y , β un chemin joignant y à z , γ un chemin joignant z à w . Alors $(\alpha.\beta).\gamma \sim \alpha.(\beta.\gamma)$.
- (4) Si α est un chemin joignant x à y , alors $c_x.\alpha \sim \alpha$ et $\alpha.c_y \sim \alpha$.
- (5) Si α est un chemin joignant x à y , alors $\alpha.\bar{\alpha}$ et $\bar{\alpha}.\alpha$ sont homotopes à c_x et c_y respectivement.

Démonstration - (1) Si h est une homotopie relative de α à β , alors $(t, s) \mapsto h(1-t, s)$ est une homotopie relative de $\bar{\alpha}$ à $\bar{\beta}$

(2) Soit h une homotopie relative de c à α et k une homotopie de b à β . Alors, l'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} h(2t, s) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ k(2t - 1, s) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

est une homotopie relative de $c.b$ à $\alpha.\beta$.

(3) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t - s - 1) & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma(\frac{4t-s-2}{2-s}) & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie relative de $(\alpha.\beta).\gamma$ à $\alpha.(\beta.\gamma)$.

(4) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+s}) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie relative de $\alpha.c_y$ à α . On construit de même une homotopie relative de $c_x.\alpha$ à α .

(5) L'application

$$(t, s) \mapsto \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ \alpha(2t - s) & \text{si } \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2 - 2t - s) & \text{si } \frac{1}{2} \geq t \geq \frac{2-s}{2} \\ x & \text{si } \frac{2-s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

est une homotopie relative de $\alpha.\bar{\alpha}$ à c_x . On construit de même une homotopie relative de $\bar{\alpha}.\alpha$ à c_y .

Définition 10. (1) Soit x un point de X . Un **lacet** de x dans X est un chemin d'origine et d'extrémité x . Le point x est appelé le point de base de ce lacet.

Deux lacets sont dits *homotopes* s'ils sont homotopes en tant que chemins.

(2) Sur l'ensemble $L(X, x)$ des lacets en x , la relation "être homotope" est une relation d'équivalence, d'ensemble quotient noté $\pi_1(X, x)$.

Proposition 4. La composition des chemins induit une structure de groupe sur l'ensemble $\pi_1(X, x)$ des classes d'homotopie de lacets dans X de base x . Le groupe $\pi_1(X, x)$ s'appelle le **groupe fondamental** de X en x .

Démonstration - Toutes les assertions utilisent les homotopies démontrées dans le lemme précédent.

1.2.3 Premières propriétés du groupe fondamental

Proposition 5. *Changement de point de base*

Soit c un chemin d'origine x et d'extrémité y dans X . L'application $\phi_c : [\alpha] \mapsto [c.\alpha.\bar{c}]$ est un isomorphisme de groupes de $\pi_1(X, y)$ dans $\pi_1(X, x)$, qui ne dépend que de la classe d'homotopie (relativement aux extrémités) de c . Si ℓ est un autre chemin joignant x à y , alors les isomorphismes ϕ_c et ϕ_ℓ sont conjugués.

Démonstration - C'est un morphisme d'après l'assertion (3) du lemme 2. Pour c un chemin d'origine x et d'extrémité y dans X , $\phi_{\bar{c}}$ est son morphisme inverse. C'est donc un isomorphisme.

Soit maintenant ℓ un autre chemin d'origine x et d'extrémité y . On note g la classe du lacet $\ell \cdot \bar{c}$ de base x . Alors :

$$\phi_{\ell}([\alpha]) = [\ell \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \alpha \cdot \bar{c} \cdot c \cdot \bar{\ell}] = g \phi_c([\alpha]) g^{-1}.$$

Corollaire 5. *Si X est connexe par arcs, et $x, y \in X$, alors $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes. Si $\pi(X, x)$ est abélien, cet isomorphisme est canonique.*

Proposition 6. *(Propriétés fonctorielles du groupe fondamental)*

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme de groupes $f_ : [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$ de $\pi_1(X, x)$ dans $\pi_1(Y, f(x))$.*

De plus, si f est l'application identique de X , alors f_ est l'application identique de $\pi_1(X, x)$; si g est une application continue de Y dans un espace topologique Z , alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Démonstration - Si X et Y deux espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. La composition $c \mapsto f \circ c$ est compatible avec l'homotopie (relativement aux extrémités) des chemins : si $\alpha \sim \beta$, alors $f \circ \alpha \sim f \circ \beta$ (car $f \circ h : [0, 1]^2 \rightarrow Y$ est une homotopie entre $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ si $h : [0, 1]^2 \rightarrow X$ est une homotopie entre α et β) et la composition des chemins donne $f \circ (\alpha \cdot \beta) = (f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)$.

Proposition 7. *Soient $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues homotopes. Pour tout $x \in X$, il existe un isomorphisme de groupes $u : \pi_1(Y, g(x)) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ tel que $f_* = u \circ g_*$.*

Démonstration - Soit h une homotopie entre f et g . Soit c le chemin $s \mapsto h_s(x) = h(x, s)$ dans Y entre $f(x)$ et $g(x)$. En utilisant la proposition 4, l'application $u : [\beta] \mapsto [c \cdot \beta \cdot \bar{c}]$ est un isomorphisme de $\pi_1(Y, g(x))$ dans $\pi_1(Y, f(x))$. Pour montrer que $f_* = u \circ g_*$, il suffit de montrer que pour tout lacet α d'origine x dans X , les lacet $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$ et $f \circ \alpha$ sont homotopes (relativement aux extrémités).

Pour tout $s \in [0, 1]$, considérons le chemin $c_s : t \mapsto h(x, st)$. L'application $(s, t) \mapsto ((c_s \cdot (h_s \circ \alpha)) \cdot \bar{c}_s)(t)$ est continue. En $s = 0$, elle vaut $(c_{f(x)} \cdot (f \circ \alpha)) \cdot c_{f(x)}$, qui est homotope à $f \circ \alpha$. En $s = 1$, elle vaut $(c \cdot (g \circ \alpha)) \cdot \bar{c}$.

Corollaire 6. *Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, alors $f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ est un isomorphisme de groupes.*

Corollaire 7. *Les groupes fondamentaux en un point quelconque de deux espaces connexes par arcs, ayant même type d'homotopie, sont isomorphes.*

Corollaire 8. *Tout groupe fondamental d'espace contractile est trivial.*

Considérons un espace topologique X et $x \in X$. On peut identifier l'espace topologique quotient $[0, 1] / \sim \subset \{0, 1\}$ avec $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par l'homéomorphisme $[\theta] \mapsto e^{2i\pi\theta}$. Ainsi, à toute application continue α de $\mathbb{S}_1$ dans X telle que $\alpha(1) = x$ est associée $\gamma_\alpha : [0, 1] \rightarrow X$, définie par $t \mapsto \alpha(e^{2i\pi t})$ de telle sorte que γ_α est un lacet de X en x .

Proposition 8. *Soit $\alpha : \mathbb{S}_1 \rightarrow X$ une application continue, telle que $\alpha(1) = x$. Alors $[\gamma_\alpha] = 1$ dans $\pi_1(X, x)$ si et seulement si α s'étend continûment en une application continue $\mathbb{B}_2 \rightarrow X$.*

Démonstration - Si α s'étend continûment en $f : \mathbb{B}_2 \rightarrow X$, si $i : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{B}_2$ est l'inclusion, alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) & & \\ \alpha_* \downarrow & \searrow i_* & \\ \pi_1(X, x) & \xleftarrow{f_*} & \pi_1(\mathbb{B}_2, 1) \end{array}$$

Or si, $\beta : t \mapsto e^{2i\pi t}$ le lacet induit par passage au quotient de l'identité de $[0, 1]$, alors $\alpha_*([\beta]) = [\gamma_\alpha]$. Or, on a déjà vu que tout groupe fondamental d'espace contractile est trivial. $\mathbb{B}_2$ est contractile car $id_{\mathbb{B}_2} \sim c_{x_0}$ où $x_0 \in \mathbb{B}_2$ (on considère l'homotopie $h(t, x) = tx + (1 - t)x_0$, fonction continue de $[0, 1] \times \mathbb{B}_2$ dans $\mathbb{B}_2$). Comme $\alpha_* = f_* \circ i_*$, $[\alpha] = 1$ dans $\pi_1(X, x)$. En effet, $\mathbb{B}_2$ est un convexe non vide donc il est contractile et $\pi_1(\mathbb{B}_2, 1) = \{1\}$.

Réciproquement, si $[\gamma_\alpha] = 1$, alors soit $h : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow X$ une homotopie entre α et l'application constante. On note $i : \mathbb{S}_1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1 \times [0, 1] / \mathbb{S}_1 \times \{1\} =: Y$ la projection canonique.

Comme, pour tous $x, y \in \mathbb{S}_1$, $h(x, 1) = \alpha(1) = h(y, 1)$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}_1 \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & X \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{h} & \\ Y & & \end{array}$$

où $\tilde{h} = h \circ i : Y \rightarrow X$ est continue avec

$$Y = \mathbb{S}_1 \times [0, 1] / \mathbb{S}_1 \times \{1\}$$

Or, Y est homéomorphe à $\mathbb{B}_2$ par $\varphi : (z, t) \mapsto (1 - t)z$. On pose $\tilde{\alpha} = \tilde{h} \circ \varphi^{-1}$ on a bien une application continue de $\mathbb{B}_2$ vers X qui prolonge α .

Corollaire 9. *Soit X un espace connexe par arcs. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- X est simplement connexe
- il existe x dans X tel que $\pi_1(X, x)$ trivial.
- $\pi_1(X, x)$ trivial pour tout x dans X
- deux chemins de même origine et même extrémité sont homotopes (relativement aux extrémités).

Proposition 9. *Soient (X, d) un espace métrique, U et V deux ouverts connexes par arcs de X , tels que $X = U \cup V$ et tel que $U \cap V$ soit connexe par arcs. Pour tout x dans $U \cap V$, si $i : U \rightarrow X$ et $j : V \rightarrow X$ sont les inclusions canoniques, alors $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ engendrent $\pi_1(X, x)$. En particulier, si U et V sont de plus simplement connexes d'intersection non vide, alors X est simplement connexe.*

Démonstration- Soient $x \in U \cap V$ et $\alpha : [0, 1] \rightarrow X = U \cup V$ une application continue telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. On va montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset U$ ou V .

Commençons par poser $K = \alpha([0, 1])$. On va montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $B(x, \varepsilon) \subset U$ ou V . Dans le cas contraire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in K$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U$ et $\not\subset V$. Il existe donc $y_n \in B(x_n, \frac{1}{n})$ avec $y_n \notin U$ et $y_n \notin V$. On

peut prendre t_n tel que $x_n = \alpha(t_n)$ avec $t_n \in [0, 1]$. Comme $[0, 1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite convergente de la suite $(t_n)_n$, on la note $t_{\varphi(n)}$ et on a $t_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t \in [0, 1]$. Par continuité de α , $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y = \alpha(t) \in K$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(y_{\varphi(n)}, y) \leq d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) \leq \frac{1}{\varphi(n)} + d(x_{\varphi(n)}, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y \in K \subset U \cup V$. Si $y \in U$, comme U est un ouvert, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $y_{\varphi(n)} \in U$ ce qui est absurde. De la même manière, si $y \in V$, pour n assez grand, $y_{\varphi(n)} \in V$ ce qui est aussi exclu.

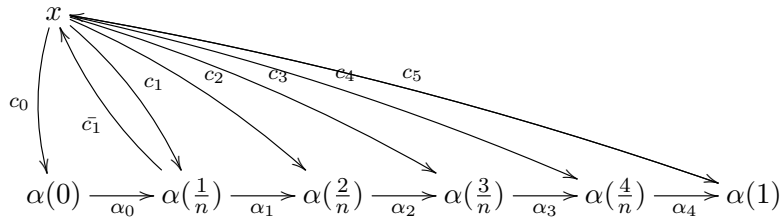
Le théorème de Heine nous dit que α est uniformément continue puisque c'est une application continue sur le compact $[0, 1]$ et ainsi, en choisissant $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in K$, $B(x, \varepsilon) \subset U$ ou V , il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$, $|t_1 - t_2| < \eta$ implique que $|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $\frac{1}{n} < \eta$, on a $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]) \subset B(\alpha(i), \varepsilon) \subset U$ ou V pour tout $i = 0, \dots, n-1$.

Finalement, on a bien montré qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha([\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}])$ soit contenu dans U ou dans V pour tout $i = 0, \dots, n-1$. Pour tout $i = 0, \dots, n$, on note $\alpha_i : t \mapsto \alpha(\frac{i+t}{n})$ chemin de $\alpha(\frac{i}{n})$ vers $\alpha(\frac{i+1}{n})$ contenu dans U sur V . Si $\alpha(\frac{i}{n}) \in U, V$ ou $U \cap V$, on construit un chemin entre x et $\alpha(\frac{i}{n})$ que l'on note c_i contenu dans U, V ou $U \cap V$ (car U, V et $U \cap V$ sont connexes par arcs). On a c_0 et c_n sont constants.

$\alpha = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ donc le lacet α en x est homotope à :

$$\alpha = c_0 \cdot \alpha_0 \cdot \overline{c_1} \cdot c_1 \cdot \alpha_1 \cdot \overline{c_2} \cdot \dots \cdot c_{n-1} \cdot \alpha_{n-1} \cdot \overline{c_n}$$

avec $c_i \cdot \alpha_i \cdot \overline{c_{i+1}}$ est un lacet en x pour tout $i = 0, \dots, n-1$, il est contenu dans U ou dans V . donc appartient à $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ d'où, par construction, $i_*\pi_1(U, x) \cup j_*\pi_1(V, x)$ engendre $\pi_1(X, x)$. Par exemple, pour $n = 5$,



Si, de plus U et V sont simplement connexes et d'intersection non vide, si on se donne $x \in U \cap V$, alors $\pi_1(U, x) = \{1\}$ et $\pi_1(V, x) = \{1\}$ Ainsi, on a aussi $\pi_1(X, x) = \{1\}$.

Corollaire 10. Pour $n \geq 2$, la sphère $\mathbb{S}_n$ est simplement connexe.

Démonstration- On note $N = (0, \dots, 0, 1)$ le pôle nord et $S = (0, \dots, 0, -1)$ le pôle sud de la sphère. On note $U = \mathbb{S}_n - N$ et $V = \mathbb{S}_n - S$. Ce sont deux ouverts, connexes par arcs ainsi que leur réunion et leur intersection. Il reste à montrer que les ouverts U et V sont simplement connexes. Démontrons-le pour U par exemple. Soit $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{S}_n - N$. Notons D la droite déterminée par x et N ; elle n'est pas parallèle à l'hyperplan H d'équation $x_{n+1} = 0$, parce que seules les droites tangentes à la sphère en N sont parallèles à H . En particulier, D n'est pas entièrement contenue dans H et il existe un unique point d'intersection de D avec H . Ce point est appelé image de x par projection stéréographique. Pour établir que la projection stéréographique

p_N est un homéomorphisme de $\mathbb{S}_n - N$ sur $\mathbb{R}^n$, on l'exprime en fonction des coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^{n+1}$ et $\mathbb{R}^n$. Les applications seront donc vues comme restrictions d'applications continues. Elles seront donc continues pour la topologie induite.

Les coordonnées $(y_1, \dots, y_n)$ de la projection stéréographique par rapport au pôle nord du point de coordonnées $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ sont

$$y_i = \frac{x_i}{1 - x_{n+1}}$$

puisque les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} - 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ -1 \end{pmatrix}$ sont liés (on calcule le coefficient en utilisant la dernière coordonnée). Ainsi, p_N est bien continue.

Réciproquement, comme $\sum x_i^2 = 1$, $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} = \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}}$. Ainsi, $x_{n+1} = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$ et pour tout i ($1 \leq i \leq n$), $x_i = \frac{2y_i}{1+\|y\|^2}$ et on en déduit que la réciproque de p_N est continue. Ainsi, $\mathbb{S}_n - N$ et H sont homéomorphes et $H \simeq \mathbb{R}^n$ donc $\mathbb{S}_n - N$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ qui est simplement connexe donc U simplement connexe. De la même manière, V est simplement connexe. De plus, $U \cap V = \mathbb{S}_n - \{N, S\}$ est homéomorphe à H privé d'un point (en utilisant par exemple que $\mathbb{S}_n - N$ homéomorphe à H et puisqu'on exclu S de l'ensemble de départ, comme on a une bijection, on garde le caractère homéomorphe en excluant l'image de S , réduite à un point, dans l'ensemble d'arrivée). Il est clair que H privé d'un point est connexe par arcs et finalement, on a bien $\mathbb{S}_n = U \cup V$ simplement connexe.

1.2.4 Groupe fondamental de $\mathbb{S}_1$ et théorème de Brouwer en dimension 2

On va calculer un premier groupe fondamental avec les outils que l'on a déjà.

Proposition 10.

$$\pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \simeq \mathbb{Z}$$

On utilisera le théorème de relèvement des applications et des homotopies à valeurs dans le cercle (on en verra une forme plus générale dans le chapitre 2).

Lemme 3. (Relèvement des applications et des homotopies à valeurs dans un cercle)

- Si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application continue, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(0) = e^{2i\pi t_0}$, il existe une et une seule application continue $\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}(0) = t_0$ et $f(t) = e^{2i\pi \tilde{f}(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

- Si $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}_1$ est une application continue, et si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue telle que $h(0, t) = e^{2i\pi f(t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors il existe une et une seule application continue $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{h}(0, t) = f(t)$ et $h(s, t) = e^{2i\pi \tilde{h}(s, t)}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Le but est de montrer que pour tout $x \in \mathbb{S}_1$, l'application

$$\begin{aligned} \varphi_x : \pi_1(\mathbb{S}_1, x) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] &\mapsto \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma}$ est un relèvement du lacet γ est un isomorphisme de groupes.

Soient $x = e^{2i\pi t_0}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}_1, x)$. On a $\tilde{\gamma}(0) = t_0$ et $\gamma(t) = e^{2i\pi\tilde{\gamma}(t)}$, pour tout $t \in [0, 1]$. On va commencer par montrer que φ_x est bien **définie**.

$$e^{2i\pi(\tilde{\gamma}(1)-\tilde{\gamma}(0))} = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = 1 \text{ donc } \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in \mathbb{Z}.$$

Pour continuer, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 4. *Si $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ sont deux relèvements continues d'une même application f avec $\tilde{f}(0) = t_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}'(0) = u_0 \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f} - \tilde{f}'$ est constante, égale à $t_0 - u_0 \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration- On se donne une application f et deux relèvements $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ comme dans l'énoncé. Comme $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ relèvent la même application,

$$e^{2i\pi(\tilde{f}(t)-\tilde{f}'(t))} = \frac{f(t)}{f(t)} = 1 \text{ pour tout } t \in [0, 1] \text{ donc } \tilde{f}(t) - \tilde{f}'(t) \in \mathbb{Z} \text{ et par continuité et connexité}$$

de $[0, 1]$, $\tilde{f} - \tilde{f}'$ est constant égal à $t_0 - u_0$.

Retour à l'exercice - Soient γ et γ' deux lacets d'origine $x = e^{2i\pi t_0}$ homotopes par h . Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ des relèvements respectifs de γ et γ' tels que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(0) = t_0$. Considérons $\tilde{h}$ l'unique relèvement de h tel que $\tilde{h}(t, 0) = \tilde{\gamma}(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $\tilde{h}(t, s) = e^{2i\pi\tilde{h}(t,s)}$ pour tout $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Posons $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{h}(t, 1)$ pour tout $t \in [0, 1]$. C'est un autre relèvement de γ' puisque $e^{2i\pi\tilde{\gamma}_1(t)} = e^{2i\pi\tilde{h}(t,1)} = h(t, 1) = \gamma'(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. De plus, $e^{2i\pi\tilde{\gamma}_1(0)} = \gamma'(0) = e^{2i\pi t_0}$ donc $\tilde{\gamma}_1(0) = kt_0$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Le lemme nous donne donc que $\tilde{\gamma}_1 - \tilde{\gamma}'$ est constant, égal à $(k - 1)t_0$. Ainsi, $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}_1(0) - \tilde{\gamma}'(0)$ et $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}'(1) - \tilde{\gamma}'(0)$.

Comme $\tilde{\gamma}_1$ est un relèvement de γ' , $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) \in \mathbb{Z}$. D'autre part, $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}(1) - (\tilde{\gamma}_1(0) - \tilde{\gamma}(0)) = \tilde{h}(1, 1) - \tilde{h}(0, 1) - \tilde{h}(1, 0) + \tilde{h}(0, 0)$.

Or pour tout $s \in [0, 1]$, $\tilde{h}(0, s) = \gamma(0) = \gamma'(0) = e^{2i\pi\tilde{h}(0,s)}$ et $\tilde{h}(1, s) = \gamma(1) = \gamma'(1) = e^{2i\pi\tilde{h}(1,s)}$ donc par continuité de $\tilde{h}$, $\tilde{h}(0, \cdot)$ et $\tilde{h}(1, \cdot)$ sont constantes et $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}(1) - (\tilde{\gamma}_1(0) - \tilde{\gamma}(0)) = 0$.

Finalement, $\tilde{\gamma}_1(1) - \tilde{\gamma}_1(0) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}'(1) - \tilde{\gamma}'(0)$ et $\varphi_x(\gamma) = \varphi_x(\gamma')$.

Montrons maintenant que φ_x est un **morphisme**. Soient $[\gamma]$ et $[\gamma']$ dans $\pi_1(\mathbb{S}_1, x)$ et leur relèvement respectifs $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ valant t_0 en 0. Posons l'application suivante :

$$a(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\gamma}'(2t - 1) + \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- $a(0) = \tilde{\gamma}(0) = t_0$ avec $\gamma \cdot \gamma'(0) = \gamma(0) = e^{2i\pi t_0}$
- Si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, $e^{2i\pi a(t)} = e^{2i\pi\tilde{\gamma}(2t)} = \gamma(2t)$ et si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, $e^{2i\pi\tilde{\gamma}'(2t-1)} e^{2i\pi(\tilde{\gamma}(1)-\tilde{\gamma}(0))} = e^{2i\pi\tilde{\gamma}'(2t-1)} = \gamma'(2t - 1)$ puisque $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, a est l'unique relèvement de $\gamma \cdot \gamma'$ qui vaut t_0 en 0 donc $a(t) = \widetilde{\gamma \cdot \gamma'}(t)$.

Finalement, $\varphi_x([\gamma \cdot \gamma']) = \widetilde{\gamma \cdot \gamma'}(1) - \widetilde{\gamma \cdot \gamma'}(0) = \tilde{\gamma}'(1) + \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) - \tilde{\gamma}(0) = \varphi_x([\gamma']) + \varphi_x([\gamma])$ puisque $\tilde{\gamma}(0) = \gamma'(0)$.

On va maintenant expliciter le **morphisme inverse**.

$$\begin{aligned} c : \mathbb{Z} &\rightarrow \pi_1(\mathbb{S}_1, x) \\ n &\mapsto (t \mapsto e^{2i\pi(nt+t_0)}) \end{aligned}$$

La vérification de la définition de cette application est simple ainsi que la vérification de $\varphi_x \circ c = \text{id}_{\mathbb{N}}$. Pour $c \circ \varphi_x = \text{id}_{\pi_1(\mathbb{S}_1, x)}$, on se donne $[\gamma] \in \pi_1(\mathbb{S}_1, x)$, $c \circ \varphi_x([\gamma]) = [t \mapsto e^{2i\pi((\tilde{\gamma}(1)-\tilde{\gamma}(0))t+t_0)}]$. Or $\tilde{h}(t, s) = s((\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0))t + t_0) + (1 - s)\tilde{\gamma}(t)$ est une homotopie entre $t \mapsto ((\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0))t + t_0)$ et $\tilde{\gamma}$ donc $h := e^{2i\pi\tilde{h}}$ est une homotopie entre γ et $t \mapsto e^{2i\pi((\tilde{\gamma}(1)-\tilde{\gamma}(0))t+t_0)}$ et $c \circ \varphi_x([\gamma]) = [\gamma]$.

Finalement, on a bien $\pi_1(\mathbb{S}_1, x) \simeq \mathbb{Z}$

Corollaire 11. (Théorème de Brouwer en dimension 2) Toute application continue de $\mathbb{B}_2$ dans $\mathbb{B}_2$ admet un point fixe.

Démonstration - Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'une définition et d'un lemme préliminaire :

Définition 11. Soit A une partie d'un espace topologique X et $i : A \rightarrow X$ est l'inclusion. Une **rétraction** de X dans A est une application continue $r : X \rightarrow A$ telle que $r \circ i = id_A$.

Lemme 5. Il n'existe pas de rétraction $r : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$.

Démonstration du lemme : Supposons par l'absurde que c'est le cas. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}_2 & & \\ \uparrow i & \searrow r & \\ \mathbb{S}_1 & \xrightarrow{id_{\mathbb{S}_1}} & \mathbb{S}_1 \end{array}$$

et par propriétés fonctorielles du groupe fondamental, le diagramme suivant est aussi commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{B}_2, 1) & & \\ \uparrow i_* & \searrow r_* & \\ \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) & \xrightarrow{id_{\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)}} & \pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \end{array}$$

Or $\mathbb{B}_2$ est convexe donc contractile et donc simplement connexe. Il est aussi connexe par arcs. Ainsi $\pi_1(\mathbb{B}_2, 1) = \{1\}$. Or, $\pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ donc i_* non injective, ce qui contredit l'injectivité de $id_{\pi_1(\mathbb{S}_1, 1)}$ d'où le résultat.

Supposons maintenant qu'il existe une application continue $f : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{B}_2$ qui n'admet pas de point fixe, i.e. $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{B}_2$. La droite passant par les points x et $f(x)$ est donc parfaitement définie et nous considérons la demi-droite ouverte, d'origine $f(x)$ dirigée vers x . L'intersection de cette demi-droite avec le cercle unité $\mathbb{S}_1$ est notée $r(x)$. Cette association définit une application continue $r : \mathbb{B}_2 \rightarrow \mathbb{S}_1$ dont la restriction à $\mathbb{S}_1$ est l'application identité. En conséquence, r est une rétraction de $\mathbb{B}_2$ sur $\mathbb{S}_1$ ce qui est absurde d'après le lemme préliminaire.

Chapitre 2

Revêtements et groupe fondamental

2.1 Définition d'un revêtement et exemple fondamental

Définition 12. Soit $p : X \rightarrow B$ où X et B sont des espaces topologiques.

On dit que p est un revêtement si pour tout $b \in B$, il existe U_b un voisinage ouvert de b tel que $p^{-1}(U_b)$ est la réunion disjointe d'ouverts V_α de X , pour α dans un ensemble I , et tel que $p|_{V_\alpha}$ soit un homéomorphisme entre V_α et U_b .

Définition 13. L'espace $p^{-1}(\{b\})$ s'appelle la fibre au-dessus de $b \in B$, l'espace X l'espace total et l'espace B la base du revêtement. L'ouvert U_b est appelé ouvert trivialisant de b et les V_α les feuillets de $p^{-1}(U_b)$.

Rappelons quelques définitions :

Définition 14. Un groupe Γ est dit **discret** si pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\{\gamma\}$ est un ouvert.

Désormais, Γ désignera toujours un groupe discret.

Définition 15. Une action de groupe de Γ sur X , un espace topologique, est dite :

- **libre** si pour $x \in X$ et $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.x = x \Leftrightarrow \gamma = e_\Gamma$.
- **propre** si pour tout compact K de X , $|\{\gamma \in \Gamma, \gamma.X \cap K \neq \emptyset\}| < \infty$
- **continue** si pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $\varphi_\gamma : X \rightarrow X ; x \mapsto \gamma.x$ est continue.

Exemple 2. Soit X un espace topologique localement compact. Prenons un groupe discret Γ qui agit continûment à droite sur X proprement et librement. Alors la projection canonique $p : X \rightarrow \Gamma \backslash X (= B)$ muni de la topologie quotient est un revêtement.

Supposons pour le moment que pour tout $x \in X$, on peut trouver un voisinage V ouvert de x "assez petit" c'est-à-dire tel que $\gamma.V \cap V = \emptyset$ pour $\gamma \neq e_\Gamma$.

Soit alors $x \in X$ et un tel voisinage V . Alors, $U = p(V)$ est un ouvert pour la topologie quotient puisque $Sat(V)$ est un ouvert dans X ($Sat(V) = p^{-1}(p(V)) = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.V$ est une réunion d'ouvert car on a une action continue).

S'il existe $y \in \gamma_1.V \cap \gamma_2.V$, alors $\gamma_2^{-1}.y \in (\gamma_2^{-1}.\gamma_1).V \cap V$ donc $(\gamma_2^{-1}.\gamma_1).V \cap V \neq \emptyset$ et $\gamma_2 = \gamma_1$.

De plus, l'application $p|_{\gamma.V}$ est continue et surjective sur U car $U = p(V) = p(\gamma.V)$.

Elle est ouverte. En effet, si $U \subset X$ ouvert, $p(U)$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(p(U))$ est ouvert dans X . Or, on a $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma.U$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma.U$ est un ouvert parce que $\varphi : \gamma : x \mapsto \gamma.x$ est un homéomorphisme (Γ agit continûment, proprement et librement). Ainsi,

$p(U)$ est un ouvert et p est une application ouverte de X . Si on regarde la restriction à $\gamma.V$, pour tout U ouvert de V , $p|_{\gamma.V}(U) = p(U)$ est un ouvert de V donc un ouvert et on a bien $p|_{\gamma.V}$ est une application ouverte. Elle est injective car si on se donne $x, x' \in \gamma.V$, $\gamma \in \Gamma$, $x = x'$ dans X/Γ signifie que $x = \gamma'.x'$ avec $\gamma' \in \Gamma$ donc $x \in (\gamma.V) \cap (\gamma\gamma').V$ et comme précédemment, en utilisant la partie non encore démontrée, $\gamma = \gamma'\gamma$ donc $\gamma' = e_\Gamma$ et $x = x'$.

Ainsi, $p|_{\gamma.V}$ est une application ouverte et bijective donc c'est un homéomorphisme.

Il reste donc à prouver qu'on peut prendre V "assez petit" :

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'application $X \rightarrow X$; $x \mapsto \gamma.x$ est continue. Comme X est localement compacte, X est séparé et pour tout $x \in X$, pour tout ouvert U contenant x , il existe un compact $K \subset U$ tel que $x \in \overset{\circ}{K}$.

Soit $x \in X$ et soit U un voisinage de x d'adhérence K compact. L'action est propre donc $|\{\gamma \in \Gamma | \gamma.K \cap K \neq \emptyset\}| < +\infty$, On note les éléments de cet ensemble $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ où $\gamma_1 = e_\Gamma$. Comme l'action est libre, les $x_i = \gamma_i x$ sont distincts pour $i \in \{1, \dots, t\}$.

Comme X est séparé, pour tout x_i , il existe $U_i \subset \gamma_i.U$ des voisinages des x_i tels que $U_i \cap U_j = \emptyset$ dès que $i \neq j$. Posons alors :

$$V = \bigcap_{i=1}^t \gamma_i^{-1}.U_i$$

Si $\gamma.V \cap V \neq \emptyset$, alors comme $V \subset U \subset K$, on a $\gamma.K \cap K \neq \emptyset$ et il existe $j \in \{1, \dots, t\}$ tel que $\gamma = \gamma_j$. D'autre part, $V \subset U_1$ et $\gamma_j.V \subset U_j$ donc $V \cap \gamma_j V \subset U_1 \cap U_j$. Ainsi, $U_1 \cap U_j \neq \emptyset$ et $j = 1$ donc $\gamma_j = e_\Gamma$. Ainsi, $\gamma_j U_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ et comme l'action est libre, $\gamma_j = e_\Gamma$. Finalement, $\gamma = \gamma_j = e_\Gamma$.

2.2 Relèvements

Définition 16. Soit X un espace topologique et $p : X \rightarrow B$ un revêtement et soit $f : Y \rightarrow B$ une application continue. On dit que $\tilde{f} : Y \rightarrow X$ relève f si $\tilde{f}$ est continue et que $p \circ \tilde{f} = f$.

Proposition 11. Si Y est connexe et $\tilde{f}_1$ un autre relèvement de f qui coïncide en un point avec $\tilde{f}$, alors $\tilde{f}_1 = \tilde{f}$.

Démonstration- $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}$ sont deux relèvements de f coïncidant en $y_0 \in Y$ fixé. Notons $F = \{y \in Y | \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}(y)\}$. Si F est ouvert et fermé, comme Y est connexe, F est vide ou égal à Y tout entier.

F est un ouvert car si on se donne $y \in F$, $x = p(\tilde{f}(y)) \in B$, alors il existe un voisinage ouvert U de x tel que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha \subset X$ avec, pour tout $\alpha \in I$, $p|_{V_\alpha}$ est un homéomorphisme entre V_α et U . Soit donc α l'unique élément de I tel que $\tilde{f}(y) \in V_\alpha$. Par hypothèse, on a donc $y \in \tilde{f}^{-1}(V_\alpha) \cap \tilde{f}_1^{-1}(V_\alpha)$ (c'est un ouvert par continuité des relèvements) et comme $p|_{V_\alpha}$ est un homéomorphisme entre V_α et U , $\tilde{f}^{-1}(V_\alpha) \cap \tilde{f}_1^{-1}(V_\alpha)$ est inclu dans F . Ainsi F est bien ouvert.

F est fermé car $Y - F$ est un ouvert. En effet, si on se donne $y \notin F$ et U un voisinage ouvert de $x = p(\tilde{f}(y)) \in B$ tel que $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\alpha \in I} V_\alpha \subset X$ et $p|_{V_\alpha}$ est un homéomorphisme sur U . Les points $\tilde{f}(y)$ et $\tilde{f}_1(y)$ appartiennent à des feuillettes différents V_α et V_β de $p^{-1}(U)$. Ainsi, l'ouvert $\tilde{f}^{-1}(V_\alpha) \cap \tilde{f}_1^{-1}(V_\beta)$ contient y mais ne rencontre pas F car V_α et V_β sont disjoints.

Par hypothèse, F est non vide donc F est l'ensemble Y entier c'est-à-dire que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}$.

Théorème 1. Soit X un espace topologique et $p : X \rightarrow B$ un revêtement.

a. $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin (resp. un lacet) de B et $x \in p^{-1}(\{b\})$. Alors il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow X$ relevant γ et $\tilde{\gamma}(0) = x$.

b. Soit $f : Y \rightarrow B$ une application continue, admettant un relèvement $\tilde{f} : Y \rightarrow X$. Pour toute application continue $h : Y \times [0, 1] \rightarrow B$ telle que $h(\cdot, 0) = f$, il existe un unique relèvement $\tilde{h}$ de h tel que $\tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{f}$.

c. Si $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow B$ une homotopie entre $\gamma_1 = h(\cdot, 0)$ et $\gamma_2 = h(\cdot, 1)$. Soit $\tilde{\gamma}_1$ un relèvement de γ_1 , alors il existe une unique homotopie $\tilde{h} : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ qui relève h et telle que $\tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}_1$.

Démonstration - Admis

2.3 Action du groupe fondamental

On déduit des résultats précédent un résultat important pour la suite.

Proposition 12. Soit $p : X \rightarrow B$ un revêtement, alors $\pi_1(B, b)$ agit à droite sur $p^{-1}(\{b\})$.

Démonstration - Soit $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ (X est connexe par arcs). Soient $x \in p^{-1}(\{b\})$ et γ un représentant de $[\gamma]$, un lacet en b . Soit $\tilde{\gamma}$ un relevé de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$. On pose alors :

$$x \cdot [\gamma] = \tilde{\gamma}(1)$$

On peut d'abord remarquer que $\tilde{\gamma}(1) \in p^{-1}(\{b\})$ pour tout $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ car $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$

De plus, $x \cdot [\gamma]$ ne dépend pas du représentant choisi. En effet, si on se donne $\gamma' \in [\gamma]$. On note h l'homotopie entre γ et γ' donc $h(\cdot, 0) = \gamma$, $h(\cdot, 1) = \gamma'$ et $h(0, s) = h(1, s) = b$ pour tout $s \in [0, 1]$.

D'une part, le chemin constant en x relève le chemin constant à b car c_x est continue et $p \circ c_x(t) = p(x) = b = c_b(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Considérons le relèvement $\tilde{h}$ de h . Remarquons que $\tilde{h}(\cdot, 0) = \tilde{\gamma}$. On va tenter de trouver un autre chemin qui relève le chemin constant à b .

$\tilde{h}(0, \cdot)$ est un chemin de X vérifiant $\tilde{h}(0, 0) = \tilde{\gamma}(0) = x$ et $p \circ \tilde{h}(0, s) = h(0, s) = b$ pour tout $s \in [0, 1]$ donc $s \rightarrow \tilde{h}(0, s)$ relève le chemin constant en b . Comme $[0, 1]$ est connexe et les deux relèvements coïncident en un point (en 0, ils valent tous les deux x), on en déduit qu'ils sont égaux.

$$\forall s \in [0, 1], \tilde{h}(0, s) = x$$

Par le même raisonnement, le chemin constant en $\tilde{\gamma}(1)$ relève le chemin constant en b car il est continu et $p \circ c_{\tilde{\gamma}(1)}(t) = p(x) = b = c_b(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

D'autre part, $s \rightarrow \tilde{h}(1, s)$ est un chemin de X vérifiant $\tilde{h}(1, 0) = \tilde{\gamma}(1)$. Il relève le chemin constant en b car $p \circ \tilde{h}(1, s) = h(1, s) = b$ pour tout $s \in [0, 1]$. Comme ils coïncident en 0, ils sont égaux :

$$\forall s \in [0, 1], \tilde{h}(1, s) = \tilde{\gamma}(1)$$

De plus, $p \circ \tilde{\gamma}' = \gamma'$ et $p \circ \tilde{h}(\cdot, 1) = h(\cdot, 1) = \gamma'$ et $\tilde{h}(0, 1) = x = \tilde{\gamma}'(0)$ donc l'unicité des relèvements donne :

$$\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{h}(1, 1) = \tilde{\gamma}(1)$$

La définition de $x \cdot [\gamma]$ ne dépend donc pas du représentant choisi.

Il reste à montrer qu'il s'agit bien d'une action de groupe à droite. Soit $[\gamma]$ et $[\gamma']$ dans $\pi_1(B, b)$. Soit $\tilde{\gamma}$ le relèvement de γ tel que $\tilde{\gamma}(0) = x$ et $\tilde{\gamma}'$ le relèvement de γ' tel que $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(1) = x.[\gamma]$. Il est clair que $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}'$ relève $\gamma \cdot \gamma'$ et $\tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}'(0) = \tilde{\gamma}(0) = x$. Ainsi, $x.[\gamma \cdot \gamma'] = \tilde{\gamma} \cdot \tilde{\gamma}'(1)$ par définition, i.e. $x.[\gamma \cdot \gamma'] = \tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}'(0).[\gamma'] = (x.[\gamma]).[\gamma']$ ce qui prouve bien le résultat.

Proposition 13. $x.[\gamma] = x \Leftrightarrow [\gamma] \in p_*(\pi_1(X, x))$

Preuve :

$\Leftarrow$: Si $[\gamma] \in p_*(\pi_1(X, x))$, il existe $\tilde{\gamma} \in \pi_1(X, x)$ tel que $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$. Ainsi, le relèvement est un lacet et $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{\gamma}(0) = x$.

$\Rightarrow$: Si $x.[\gamma] = x$, alors le relevé $\tilde{\gamma}$ de γ vérifiant $\tilde{\gamma}(0) = x$ vérifie $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$ donc $\tilde{\gamma} \in \pi_1(X, x)$ et $\gamma = p \circ \tilde{\gamma} \in p_*(\pi_1(X, x))$.

Remarque 9. Quand X est connexe par arcs, $\pi_1(B, b)$ agit transitivement sur $p^{-1}(\{b\})$.

En effet, il ne peut y avoir deux orbites distinctes puisque deux éléments de $p^{-1}(\{b\})$ dans deux orbites disjointes seraient reliés par un chemin donc seraient dans la même orbite.

Proposition 14. Quand X est connexe par arcs,

$$p_*(\pi_1(X, x)) \backslash \pi_1(B, b) \simeq p^{-1}(\{b\})$$

Démonstration - Le résultat vient du fait que pour un groupe G et pour $x \in X$, si on a une action de groupe transitive, $\text{Stab}(x) \backslash G \simeq X$ avec $g_2 = g_1$ dans $\text{Stab}(x) \backslash G \simeq X$ si et seulement si $xg_1 = xg_2$.

Corollaire 12. Si X est connexe par arcs et simplement connexe alors l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $p^{-1}(\{b\})$ est libre et transitive.

Démonstration - Dire que X est simplement connexe signifie que $\pi_1(X, x) = \{1\}$ pour tout $x \in X$, $p_*(\pi_1(X, x)) = \{1\}$ et le stabilisateur de tout élément x de $p^{-1}(\{b\})$ est bien réduit à l'élément neutre d'où la liberté.

Revenons à notre revêtement $p : X \rightarrow \Gamma \backslash X$.

2.4 Calcul de groupe fondamental

Théorème 2. Soit X localement compact, connexe par arcs et simplement connexe. Γ un groupe agissant sur X de manière continue, propre et libre de telle sorte que $X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est un revêtement. Alors si on note $B = \Gamma \backslash X$ et si on prend $b \in B$, alors :

$$\pi_1(B, b) \simeq \Gamma$$

.

Démonstration - Soit $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ et $x \in p^{-1}(\{b\})$ (fixé).

$x.[\gamma] \in p^{-1}(\{b\})$. Or $p^{-1}(\{b\}) = \Gamma.x = \{g.x, g \in \Gamma\}$ donc il existe $g_\gamma \in \Gamma$ tel que $x.[\gamma] = g_\gamma.x$

g_γ ne dépend que de la classe de $[\gamma]$ car c'est le cas de $x.[\gamma]$.

g_γ est bien unique. En effet, soit $g' \in \Gamma$ tel que $x[\gamma] = g'.x$. Alors, $g'.x = g_\gamma.x$ et comme l'action est libre, $g_\gamma = g'$.

L'application définie par : $\psi : \pi_1(B, b) \rightarrow \Gamma; [\gamma] \mapsto g_\gamma$ est un morphisme. En effet, on remarque d'abord que pour tout $g \in G$ et $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$, $(g.x).[\gamma] = g.(x.[\gamma])$. On note pour cela $\tilde{\gamma}$ le relevé de γ d'origine x et d'extrémité $\tilde{\gamma}(1) = y \in X$. Par continuité, $g.\tilde{\gamma}$ est un chemin d'origine $g.x$ et d'extrémité $g.y$. Par unicité du relevé, on a $(g.x).[\gamma] = g.(x.[\gamma])$. Revenons-en à notre morphisme. Soient $[\gamma]$ et $[\gamma']$ deux éléments de $\pi_1(B, b)$ et $x \in X$. Alors $x.[\gamma . \gamma'] = (x.[\gamma]).[\gamma'] = (g_\gamma.x).[\gamma'] = g_\gamma.(x.[\gamma']) = g_\gamma.g_{\gamma'}.x$. D'autre part, $x.[\gamma . \gamma'] = g_{\gamma.\gamma'}.x$ donc par liberté de l'action de Γ sur X , $g_{\gamma.\gamma'} = g_\gamma.g_{\gamma'}$.

C'est un morphisme injectif car $g_\gamma = e_\Gamma$ implique $x.[\gamma] = x$ et donc $[\gamma] = 1_{\pi_1(B, b)}$ puisque l'action de $\pi_1(B, b)$ sur $p^{-1}(\{b\})$ est libre (X est supposé connexe par arcs et simplement connexe).

Il est surjectif car si on se donne $g \in \Gamma$, $g.x \in p^{-1}(\{b\})$. Comme $\pi_1(B, b)$ agit transitivement sur $p^{-1}(\{b\})$, il existe $[\gamma] \in \pi_1(B, b)$ tel que $x.[\gamma] = g.x$.

Exemple 3. Comme la projection canonique $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est un revêtement et puisque que $\mathbb{S}_1$ est homéomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, nous avons donc

$$\pi_1(\mathbb{S}_1, 1) \simeq \mathbb{Z}$$

Plus généralement, $\pi_1((\mathbb{S}_1)^n) \simeq \mathbb{Z}^n$ car $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \simeq (\mathbb{S}_1)^n$

Remarque 10. Soit X un espace topologique connexe par arcs et localement simplement connexe. Alors, il existe $\tilde{X}$ un espace simplement connexe et $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement. De plus, $\tilde{X}$ est unique à homéomorphisme près. On appelle $p : \tilde{X} \rightarrow X$ un revêtement universel de X .

Par exemple, le revêtement, $p : X \rightarrow \Gamma \backslash X$ est le revêtement universel de $\Gamma \backslash X$ pour X un espace topologique localement compact et simplement connexe et Γ agissant continûment, proprement et librement.

Chapitre 3

Groupe fondamental des groupes classiques

Rappelons quelques définitions de groupes fondamentaux de $GL_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$O(n, \mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t M M = I_n\}$$

$$SO(n, \mathbb{K}) = \{M \in O(n, \mathbb{K}), \det(M) = 1\}$$

$$U(n) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), {}^t \bar{M} M = I_n\}$$

$$SU(n) = \{M \in U(n), \det(M) = 1\}$$

3.1 Généralités sur le groupe fondamental d'un groupe topologique

Définition 17. Dire que G est un groupe topologique signifie que G est un groupe muni d'une topologie et que les applications
$$\begin{array}{ccc} G \times G & \rightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & gh \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$
 sont continues.

Exemple 4. (1) $GL(n, \mathbb{C})$, $n \geq 1$ est un groupe topologique car la première application est polynômiale et la deuxième est rationnelle puisque pour tout $M \in GL(n, \mathbb{C})$, $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{Com} M$.

(2) Si H est un sous-groupe fermé d'un groupe topologique G , H est un groupe topologique.

(3) De là, $SU(n)$, $n \geq 1$ est une groupe topologique car $SU(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) | {}^t \bar{M} M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$ sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$ puisque $M \mapsto {}^t \bar{M} M$ et $\det$ sont continues et $\{I_n\}$ et $\{1\}$ sont des fermés.

(4) De même, $SO(n, \mathbb{R})$, $n \geq 1$ est un groupe topologique car c'est un sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$. En effet, $SO(n, \mathbb{R}) = GL(n, \mathbb{R}) \cap SU(n)$ et $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) | \bar{M} - M = 0\}$ sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$, c'est donc aussi le cas de $GL(n, \mathbb{R}) \cap SU(n)$.

Proposition 15. Si G est un groupe topologique, alors $\pi_1(G, e)$ est abélien (e est l'élément neutre de G).

Pour démontrer ça, nous avons besoin d'un lemme préliminaire.

Lemme 6. Si c et c' sont deux lacets de G en e homotopes respectivement à γ et γ' , alors le produit des lacets cc' défini par $cc' : t \mapsto c(t)c'(t)$ est homotope à $\gamma\gamma'$

Démonstration - Soient h et h' des homotopies respectivement de c à γ et de c' à γ' . On vérifie simplement que l'application
$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \rightarrow & G \\ (t, s) & \mapsto & h(t, s)h'(t, s) \end{array}$$
 est bien une homotopie en e de cc' à $\gamma\gamma'$ (la continuité vient du fait que G est un groupe topologique).

Démonstration de la proposition - On note c_e le chemin constant à e dans G . Le lemme 2 du premier chapitre nous donne les deux relations suivantes : $c \sim c \cdot c_e$ et $c' \sim c_e \cdot c'$ où $\cdot$ désigne la concaténation des chemins. Le lemme précédent nous donne : $cc' \sim (c \cdot c_e)(c_e \cdot c') = c \cdot c'$.

De la même manière, puisque c et c' sont des lacets, $c \sim c_e \cdot c$ et $c' \sim c' \cdot c_e$ et $cc' \sim c' \cdot c$ et donc $c \cdot c' \sim c' \cdot c$ et $\pi_1(G, e)$ est bien abélien.

Remarque 11. C'est bien le cas du groupe fondamental de $\mathbb{S}_1$ qui est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Définition 18. Soit X un espace topologique. On dit que D est un **sous-espace discret** de X si pour tout $d \in D$, il existe un voisinage ouvert V de d tel que $V \cap D = \{d\}$.

Proposition 16. Soit G un groupe topologique séparé. Si H est un sous-groupe discret de G , alors H est fermé dans G .

Démonstration - Soit U un voisinage de e tel que $U \cap H = \{e\}$ (puisque H est un sous-groupe discret). Soit V un voisinage de l'identité tel que $VV^{-1} \subset U$ (par continuité de $(x, y) \mapsto xy^{-1}$). Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in \overline{H} - H$. Alors Vg est un voisinage de g , qui rencontre H en au moins deux éléments distincts h et h' (car G séparé). Soient v et v' dans V tels que $vg = h$ et $v'g = h'$. Alors $h'h^{-1} = v'v^{-1} \neq e$ car $h \neq h'$ et appartient à U puisque $v'v^{-1} \in V'V^{-1} \subset U$. D'où la contradiction. H est donc fermé.

Proposition 17. Soit H un sous-groupe discret de G un groupe topologique séparé (H est donc aussi un groupe topologique). Alors :

$$\begin{aligned} H \times G &\rightarrow G \\ (h, g) &\mapsto hg \end{aligned}$$

est une action de groupe propre et libre.

Démonstration - Elle est bien définie, le caractère d'action de groupe et sa liberté sont évidents. De plus, donnons-nous un compact K dans G . On a alors $\{h \in H | hK \cap K \neq \emptyset\} = \{h \in H | h \in KK^{-1}\} = H \cap KK^{-1}$, or $KK^{-1} = \varphi(K \times K)$ où $\varphi : G \times G \rightarrow G$; $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ continue donc KK^{-1} est compact. Comme en plus H est discret, $H \cap KK^{-1}$ est fini et l'action est bien propre.

Conclusion. Si H est un sous-groupe discret dans un groupe topologique localement compact G , l'application $p : G \rightarrow H \backslash G$ est un revêtement. (voir chapitre 2).

On s'intéresse maintenant à $\pi_1(H \backslash G, e)$ quand G/H est un groupe c'est-à-dire quand H est un sous-groupe distingué de G :

Lemme 7. Soit H un sous-groupe discret de G un groupe topologique séparé et connexe tel que H soit distingué dans G , alors H est un sous-groupe du centre de G noté $Z(G)$.

Démonstration - Soit $h \in H$. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_h : G &\rightarrow H \\ g &\mapsto g^{-1}hg \in H \end{aligned}$$

φ_h est continue car G et H sont des groupes topologiques. Comme G est connexe, $\varphi_h(G)$ l'est aussi. $\varphi_h(G)$ est donc un connexe inclu dans un groupe discret H . Il est donc réduit à un singleton. Effectivement, les singletons sont à la fois des ouverts et des fermés pour la topologie discrète. Or, les seules parties ouvertes et fermées d'un ensemble connexe sont l'ensemble vide et l'ensemble entier. $\{h\}$ est une partie de $\varphi_h(G)$ (puisque $h = \varphi_h(e)$) ouverte, fermée et non vide donc $\varphi_h(G) = \{h\}$. Ainsi, pour tout $g \in G$, $g^{-1}hg = h$ i.e. $hg = gh$ et $h \in Z(G)$.

Proposition 18. *Si H est un sous-groupe discret dans un groupe topologique séparé G , avec G simplement connexe, alors*

$$\pi_1(H \backslash G, \bar{e}) \simeq H$$

Démonstration- On utilise le théorème 2. G est localement compact, connexe par arcs et simplement connexe. H est un groupe agissant sur G de manière continue (puisque ce sont des groupes topologiques) propre et libre (proposition 25). Ainsi, $\pi_1(H \backslash G, \bar{e}) \simeq H$.

3.2 Rappel sur les quaternions

3.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 19. *Un quaternion est un élément q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tel que $q = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{H}$ l'ensemble des quaternions.*

Proposition 19. *C'est une sous- $\mathbb{R}$ -algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de dimension 4. Elle admet pour base la famille $(1, i, j, k)$ avec*

$$1 = I_2 \ ; \ i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \ ; \ j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \ k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 12. - *Ce n'est pas une $\mathbb{C}$ -algèbre.*

La notation i pour le deuxième élément de la base est abusif, il ne faut pas le confondre avec le nombre imaginaire i , on fera attention au contexte.

Proposition 20. *$ij = k$; $jk = i$; $ki = j$
 $ji = -ij$; $ki = -ik$; $jk = -kj$*

Définition 20. *Un quaternion $q \in \mathbb{H}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$q = a + bi + cj + dk \text{ avec } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$$

On appelle a la partie réelle de q et $bi + cj + dk$ la partie quaternionique pure de q . On note $\mathbb{H}_p$ l'ensemble des quaternions purs.

On note $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ le conjugué de q dans $\mathbb{H}$.

On vérifie avec les relations de la proposition 14 que pour tout $q \in \mathbb{H}$, $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ avec $q = a + ib + jc + kd$ ($(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$).

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{H}$, $q = 0 \Leftrightarrow q\bar{q} = 0$ donc l'application $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}_+$; $q \mapsto q\bar{q}$ définit le carré d'une norme que l'on notera N , et qu'on appellera la norme de H .

Proposition 21. *$\mathbb{H}$ est un corps (non commutatif)*

Démonstration - Si $q \neq 0$ dans $\mathbb{H}$, alors $N(q) \neq 0$. On a ainsi $\frac{\bar{q}}{N(q)} \in \mathbb{H}$ et $q \frac{\bar{q}}{N(q)} = \frac{\bar{q}}{N(q)} q = 1$ donc q est inversible.

Remarque 13. *On démontre facilement avec les résultats précédents :*

- (1) *L'application $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$; $q \mapsto \bar{q}$ est un anti-automorphisme de corps.*
- (2) *$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{H}_p$*

(3)

$$\begin{cases} q = \bar{q} \Leftrightarrow q \in \mathbb{R} \\ q = -\bar{q} \Leftrightarrow q \in \mathbb{H}_p \end{cases}$$

(4) $\mathbb{H} - \{0\} = \mathbb{H}^*$ est un groupe multiplicatif non abélien.

(5) $\mathbb{H}_u = \{x \in \mathbb{H}, N(q) = 1\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{H}^*$

Proposition 22. *Caractérisation de $\mathbb{H}_u$*

Soit $q = \begin{pmatrix} \bar{x} & -\bar{y} \\ y & x \end{pmatrix} = \alpha.1 + \gamma i + \delta j + \beta k$. On a $x = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $y = \gamma + i\delta$.
 $\bar{q} = \alpha.1 - \gamma i - \delta j - \beta k$

Remarque 14. Pour tout $q \in \mathbb{H}$, $N(q) = \det(q)1$ et $\mathbb{H}_u \simeq SU(2)$. En effet, si on explicite les conditions d'appartenance d'une matrice à $SU(2)$, on est ramené à la définition des quaternions.

Proposition 23. Si $q \in \mathbb{H}^*$ et $x \in \mathbb{H}_p$, alors $q^{-1}xq \in \mathbb{H}_p$

Démonstration - Soit $q \in \mathbb{H}^*$ et $x \in \mathbb{H}_p$.

$\bar{q}xq + \overline{\bar{q}xq} = \bar{q}xq + \bar{q}\bar{x}\bar{q} = \bar{q}xq + \bar{q}\bar{x}q = \bar{q}(x + \bar{x})q = 0$ d'où le résultat.

3.2.2 Quaternions et rotations dans l'espace

Nous allons voir que la conjugaison par un élément du groupe $\mathbb{H}_u$ peut s'interpréter comme une rotation dans l'espace. La conjugaison par un quaternion $q \in \mathbb{H}_u^*$ est l'application φ_q définie sur $\mathbb{H}_p$ par :

$$\varphi_q : x \mapsto q^{-1}xq = \bar{q}xq$$

D'après ce que l'on a déjà vu, pour tout $q \in \mathbb{H}^*$, $\varphi_q \in GL(\mathbb{H}_p) \simeq GL(3, \mathbb{R})$.

De plus, pour tout $q \in \mathbb{H}^*$, φ_q conserve la norme de N de $\mathbb{H}$. Nous avons déjà vu que $\mathbb{H}_p \simeq \mathbb{R}^3$ par $xi + yj + zk \in \mathbb{H}_p \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On peut identifier la norme N de $\mathbb{H}$ au carré de la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$ et ainsi, pour tout $q \in \mathbb{H}^*$, φ_q conserve la norme euclidienne. Autrement dit, en notant φ l'application qui à $q \in \mathbb{H}_u$ associe φ_q ,

Proposition 24.

$$\varphi : \mathbb{H}_u \rightarrow O(N : \mathbb{H}_p \rightarrow \mathbb{R}) \simeq O(3, \mathbb{R})$$

Pour tout $q \in \mathbb{H}_u$, φ_q définit donc une isométrie vectorielle de $\mathbb{H}_p$ c'est-à-dire une symétrie ou une rotation. On peut en fait montrer que c'est une rotation.

Proposition 25. Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, et $\theta \in [0, 2\pi[$. Alors la rotation d'axe $\vec{u}$ et d'angle θ (dans le sens direct) correspond à l'application φ_q où q est le quaternion :

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + x \sin \frac{\theta}{2} i + y \sin \frac{\theta}{2} j + z \sin \frac{\theta}{2} k$$

(Ce quaternion peut être noté $(\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \vec{u})$)

Démonstration - Notons u le quaternion $xi + yj + zk$. On a donc $q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}u$. On a $u \in \mathbb{H}_p \cap \mathbb{H}_u$ puisque $\vec{u}$ est unitaire.

Alors

$$\varphi_q(u) = (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}u)u(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}u) = (\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2})u = u$$

On se donne maintenant $\vec{v}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{u}$ et on l'identifie directement à un élément de norme 1 noté v dans les quaternions purs (comme nous avons identifié $\vec{u}$ et u). On a les relations suivantes $u^2 = v^2 = -1$ puisque $\bar{u} = -u$ et $\bar{v} = -v$.

De plus, grâce à l'identification des normes et à l'identité de polarisation, $(\vec{u}|\vec{v}) = \frac{1}{2}((u + v)(\overline{u + v}) - u\bar{u} - v\bar{v}) = \frac{1}{2}(u\bar{v} + v\bar{u})$ et ainsi, $0 = -uv - vu$ et $uv = -vu$. Posons alors $w = uv$. C'est encore un quaternion pur car en faisant le calcul, si $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$, la partie réelle de w est $xx_1 + yy_1 + zz_1 = (\vec{u}|\vec{v}) = 0$. Il est de norme 1 et on a $uw = u^2v = -v$ et $wu = uvu = -vu^2 = v$, i.e. $uw = -wu$, donc w orthogonal à u (en reprenant le calcul avec le produit scalaire). On montre de même que w est orthogonal à v .

On a aussi $w^2 = -1$, et on vérifie facilement que $vw = u$ et $wu = v$. On a donc construit une base orthonormée de $\mathbb{H}_p$.

De plus, $quq^{-1} = u$, $qvq^{-1} = qv\bar{q} = (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2}u)v(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}u) = \cos^2 \frac{\theta}{2}v + 2\cos \frac{\theta}{2}\sin \frac{\theta}{2}uv - \sin^2 \frac{\theta}{2}v$ car $uv = -vu$ et $uvu = -vu^2 = v$. Ainsi, $qvq^{-1} = \cos \theta v + \sin \theta w$.

De même, on montre que $qwq^{-1} = -\sin \theta v + \cos \theta w$. Ainsi, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de la conjugaison par un quaternion unitaire mis sous la forme $\cos \frac{\theta}{2} +$

$x \sin \frac{\theta}{2}i + y \sin \frac{\theta}{2}j + z \sin \frac{\theta}{2}k$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. C'est donc bien une rotation d'angle θ .

Proposition 26.

$$\varphi : \mathbb{H}_u \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$$

et $\text{Ker}(\varphi) = \{-1, +1\}$

Démonstration - On a déjà vu qu'il s'agissait d'un morphisme surjectif de groupe et que l'image est bien incluse dans $SO(3, \mathbb{R})$. C'est une application continue.

Regardons son noyau. Soit $q \in \mathbb{H}_u$ tel que pour tout $x \in \mathbb{H}_p$, $\varphi_q(x) = x$ i.e. $q^{-1}xq = x$ et $xq = qx$ pour tout $x \in \mathbb{H}_p$. En particulier, q commute avec i .

Notons $q = a + bi + cj + dk$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. $qi = iq \Rightarrow ai + bi^2 + cji + dki = ai + bi^2 + cij + dik \Rightarrow c = 0$ et $d = 0$. En utilisant de la même manière la commutativité avec j , on obtient $b = 0$, ainsi $q \in \mathbb{R}$. Réciproquement, les éléments de $\mathbb{R}$ commutent bien avec les éléments de $\mathbb{H}$ (c'est une $\mathbb{R}$ -algèbre). Ainsi, $q \in \mathbb{R} \cap \mathbb{H}_u = \{\pm 1\}$ et $\text{Ker}(\varphi) = \{\pm 1\}$. Le théorème d'isomorphisme donne :

Corollaire 13.

$$\mathbb{H}_u / \{\pm I_2\} \simeq SO(3, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad SU(2) / \{\pm I_2\} \simeq SO(3, \mathbb{R})$$

Remarque 15. Si G est un groupe topologique connexe par arcs et localement simplement connexe, il existe $\tilde{G}$ un groupe et $p : \tilde{G} \rightarrow G$ un revêtement tels que p soit un morphisme de groupe. On a

3.3 Groupe fondamental des groupes classiques

Théorème 3.

$$\pi_1(SO(3, \mathbb{R}), id) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Démonstration - On a vu que $SU(2)/\{\pm I_2\} \simeq SO(3, \mathbb{R})$. L'isomorphisme est continu car l'application $\varphi : SU(2) \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ est continue. On va montrer que c'est un homéomorphisme. En effet, on remarque que $SU(2)$ est compact et $SO(3, \mathbb{R})$ est séparé ($SO(3, \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$ métrique). De plus, pour tout $(x, y) \in SU(2)^2$, $\varphi(x) = \varphi(y)$ si et seulement si $x = \pm y$ donc, d'après la proposition 2 du chapitre 1, $\frac{SU(2)}{\{\pm I_2\}}$ est séparé, donc compact car $SU(2)$ est compact. Ainsi, la proposition 3 du chapitre 1 donne que $\bar{\varphi} : \frac{SU(2)}{\{\pm I_2\}} \rightarrow SO(3, \mathbb{R})$ est un homéomorphisme. On en déduit que $SO(3, \mathbb{R})$ et $\frac{SU(2)}{\{\pm I_2\}}$ ont même type d'homotopie donc même groupe fondamental. Mais $\{\pm I_2\}$ est un sous-groupe discret de $SU(2)$, car $SU(2)$ est séparé et $\{I_2\}$ est fini. On en déduit que $\pi_1(\frac{SU(2)}{\{\pm I_2\}}, e) \simeq \{\pm I_2\} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ d'après la proposition 18, i.e. $\pi_1(SO(3, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Conclusion

Pour conclure, avec les outils utilisés dans ce mémoire, il est possible de démontrer par récurrence que :

$$\pi_1(SU(n), I_n) \simeq \{1\} \quad \text{pour tous } n \geq 2$$

et

$$\pi_1(SO(n, \mathbb{R}), I_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{pour tous } n \geq 3$$

On a montré le premier résultat pour $n = 2$ puisque $SU(2) \simeq \mathbb{H}_u \simeq \mathbb{S}_3$ et $\mathbb{S}_3$ est simplement connexe et le deuxième pour $n = 3$.

Bibliographie

- [1] Y. FÉLIX, D. TANRÉ *Topologie Algébrique*. Sciences Sup. 2010

- [2] C. GODBILLON. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann. 1971

- [3] F. PAULIN. *Topologie algébrique élémentaire*. http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_topoalg.pdf

- [4] D. PERRIN. *Cours d'algèbre*. Ellipses. 1996