

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

Ecole Doctorale : **Sciences et Ingénierie pour l'Information S2I**

Secteur de Recherche : **Mathématiques et leurs interactions**

Présentée par :

Azariel Paul EYIMI MINTO'O EBANG

Sur un problème inverse de type Cauchy en théorie des plaques minces élastiques

Directeur de thèse : **Alain MIRANVILLE**

Co-directeur de thèse : **Alain CIMETIERE**

Soutenue le 20 janvier 2011

devant la commission d'examen

JURY

J. LEBLOND	Directeur de Recherche, INRIA, Sophia-Antipolis	Rapporteur
P. VILLON	Professeur, Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
A. CIMETIERE	Professeur, ENSMA de Poitiers	Co-directeur
F. DELVARE	Maître de Conférences, ENSI de Bourges	Examineur
A. MIRANVILLE	Professeur, Université de Poitiers	Directeur
F. PONS	Maître de Conférences, ENSMA de Poitiers	Examineur

À
*ma défunte mère Jacqueline Abo'o Essimegane,
mon défunt père David Minto'o Ebang,
mon défunt frère Pierre Magloire Abessolo Minto'o.*

Remerciements

Il y a des personnes qu'on oublie jamais pour vous avoir accompagné dans des moments particuliers de votre existence. Je remercie de tout coeur Messieurs les Professeurs Alain Miranville et Alain Cimetière d'avoir accepté d'encadrer ma thèse. Durant ces années écoulées, pour les idées enrichissantes ressorties de nos multiples discussions, pour la minutie, la rigueur scientifique, le soutien et les encouragements qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail, je leur exprime toute ma reconnaissance.

Je remercie vivement Madame Juliette Leblond, Directeur de Recherche à l'INRIA, et Monsieur le Professeur Pierre Villon, d'avoir bien voulu me faire l'honneur de rapporter mon travail.

Ma gratitude revient aussi à Monsieur Delvare Franck, Maître de Conférences, pour la rencontre fructueuse au Laboratoire de Mathématiques de Poitiers, et pour l'honneur qu'il me fait d'être parmi les membres de mon jury. Il a précédé une partie de mes travaux.

Il m'est particulièrement agréable de remercier Monsieur Frédéric Pons, Maître de Conférences, pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail en acceptant de participer à mon jury.

Mes remerciements vont chaleureusement à tous les membres permanents du Laboratoire. En particulier à Monsieur Morgan Pierre, Maître de Conférences, pour sa disponibilité et les échanges édifiants qui ont accompagné nos conversations, à Monsieur le Professeur Pierre Torasso, pour son accueil aimable et ses conseils, à Monsieur le Professeur Pol vanhaecke, Directeur du Laboratoire, à Monsieur le Professeur Abderrazzak Bouaziz et Monsieur le Professeur Marc Arnaudon pour leur attention et leur écoute.

Je tiens à remercier le personnel ita/iatos du département et du laboratoire : Jocelyne Attab à la reprographie et à la bibliothèque, Nathalie Marlet à la bibliothèque, Brigitte Brault au secrétariat, Nathalie Mongin à la comptabilité et Benoît Métrot au service informatique, pour leur disponibilité et tous les services rendus.

Mes remerciements vont amicalement à l'endroit de tous les doctorants : Wesam et Daniel (collègues de bureau), Batoul, Hélène, Houssam, Gang, Le Yang, Apollinaire, Brice, Ali, Jules, Florent et Caroline. Par ailleurs, je n'oublie pas les anciens doctorants parmi lesquels Patience, Guilhem, Armel, Sami, Koléhé (collègue de bureau), Khaoula, Amine (collègue de bureau), Willy, Sami kouki et Caroline.

Enfin, je remercie beaucoup toute ma famille, particulièrement maman Joëlle et papa Macaire pour leur soutien constant et leurs encouragements, papa Boileau pour son

soutien et son aide, sans oublier m'ma Irène, m'ma Bertille, m'ma Julienne, Arna et Léticia. Merci à Magali pour son attention, à tous mes amis et à tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenu durant ces dernières années.

Table des matières

Notations principales	10
1 Introduction générale	15
1.1 Exemples de problèmes inverses pour le laplacien	16
1.2 Exemples de problèmes inverses liés au bilaplacien	20
1.3 Plan de la thèse	22
2 Le problème de complétion de données pour les plaques minces	25
2.1 Introduction	25
2.2 Rappel sur la théorie linéaire des plaques minces élastiques	26
2.3 Enoncé du problème de complétion de données	27
2.4 Nouvelle expression des opérateurs frontières	28
2.4.1 Réécritures du terme $-n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2}$	30
2.4.1.1 En fonction de $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}$ et de $\Delta \zeta$	30
2.4.1.2 En fonction de $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2}$ et de $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$	30
2.4.2 Expression de $\Delta \zeta$ sur le bord	31
2.4.3 Réécriture du terme $n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2}$	31
2.4.4 Une expression pour $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3}$ sur le bord	31
2.4.5 Calcul du terme $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right]$	32
2.4.6 Evaluation de la quantité $\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n}$	33
2.4.7 Expressions finales des lignes 4 et 5 du problème (φ)	34
2.5 Reformulation du problème (φ) en un problème de Cauchy pour le bilaplacien	34
2.5.1 Résultats d'existence et d'unicité	35

3	Le problème de Cauchy biharmonique associé à (φ)	37
3.1	Introduction	37
3.2	Réduction du problème (2.12) à un problème modèle biharmonique	37
3.3	Choix des espaces fonctionnels	40
3.4	Formulation équivalente à (3.6)	41
3.5	Régularisation évanescence	41
3.6	Le problème (3.17) comme problème de point fixe	46
3.7	Description de l'algorithme de point fixe	48
3.8	Cadre numérique abstrait	49
3.8.1	Modélisation par éléments finis	49
3.8.2	Espaces d'approximation	50
3.8.3	Régularisation en dimension finie	51
3.8.4	Le problème de Cauchy discret	51
3.8.5	Convergence du processus régularisé	52
4	Le problème factorisé associé à (φ)	57
4.1	Introduction	57
4.2	Opérations intermédiaires	57
4.3	Factorisation du problème (φ)	59
4.4	Résolution du problème factorisé	60
4.4.1	Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace	60
4.4.2	Le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson	62
4.5	Du problème factorisé au problème initial	65
4.5.1	Rôle des données ϑ_d et β_d	65
4.5.2	Rôle des données φ_d et ψ_d	67
5	Discrétisation du problème factorisé et résultat de convergence	69
5.1	Introduction	69
5.2	Le problème approché pour l'équation de Laplace	69
5.2.1	Formulation variationnelle et espaces d'approximation	69
5.2.2	L'espace d'approximation $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ et la régularisation	72
5.2.3	Le problème de Cauchy discret	74
5.2.4	Orientation	74
5.2.5	Localisation de la suite des itérés	74
5.2.6	Convergence lorsque $k \rightarrow \infty$	75
5.2.7	Convergence lorsque $h \rightarrow 0$	76

5.2.8	Système linéaire caractérisant $\mathcal{L}_h(\Gamma)$	86
5.2.9	L'algorithme discret en dimension finie	88
5.2.9.1	Calcul de la dérivée directionnelle	88
5.2.9.2	Le processus discret à la $(k + 1)^e$ itération	94
5.3	Le problème approché pour l'équation de Poisson	96
5.3.1	Formulation faible	96
5.3.2	L'espace d'approximation $\mathcal{P}_h(\Gamma)$	97
5.3.3	Le problème de Cauchy discret	97
5.3.4	Problème linéaire caractérisant $\mathcal{P}_h(\Gamma)$	98
5.3.5	L'algorithme discret en dimension finie	99
5.3.5.1	Rappel et notations	99
5.3.5.2	L'algorithme discret à la $(k + 1)^e$ itération	100
6	Simulations numériques	101
6.1	Introduction	101
6.2	Reconstructions des traces de ω et des traces $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$	101
6.2.1	Définition des fonctions	102
6.2.2	Premier exemple : cas d'un domaine carré	102
6.2.2.1	Reconstructions des traces de ω	102
6.2.2.2	Impact du paramètre de régularisation	103
6.2.2.3	Reconstructions de $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$	104
6.2.2.4	Rôle du coefficient de régularisation	115
6.2.3	Deuxième exemple : cas d'un domaine circulaire	116
6.2.3.1	Reconstitutions des traces de ω	116
6.2.3.2	Influence du coefficient de régularisation	117
6.2.3.3	Reconstitutions de $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et de $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$	117
6.2.3.4	Impact du paramètre de régularisation	122
6.2.3.5	Influence du rapport \mathfrak{b}	123
6.2.4	Cas de données bruitées	132
6.2.4.1	Bruit sur la donnée ϑ_d	132
6.2.4.2	Bruit sur la donnée β_d	133
6.3	Reconstructions des traces de \bar{u}	138
6.3.1	Choix des fonctions	138
6.3.2	Premier cas : exemple d'un domaine carré	138
6.3.2.1	Reconstitutions des traces de \bar{u}	139
6.3.2.2	Effet du nombre d'itérations	139

6.3.3	Deuxième cas : exemple d'un domaine circulaire	146
6.3.3.1	Reconstructions des traces de \bar{u}	146
6.3.3.2	Influence du coefficient de régularisation	146
6.3.3.3	Influence du rapport \mathfrak{b}	147
6.3.4	Bruit sur les données	154
6.3.4.1	Bruit sur la donnée φ_d	154
6.3.4.2	Bruit sur la donnée ψ_d	155
6.4	Comparaison avec une autre méthode	158
6.4.1	Définition des fonctions et du domaine	158
6.4.2	Reconstructions des traces de u	158
6.4.3	Reconstructions des traces de v	158
	Conclusion générale	163
	Annexe A	165
	Annexe B	169
	Bibliographie	171

Notations principales

Ω	domaine borné de \mathbb{R}^2
Γ	frontière du domaine
Γ_d	partie de la frontière sur laquelle sont fournies les données
Γ_i	partie de la frontière sur laquelle est effectuée la reconstruction
n	vecteur unitaire normal à Γ extérieur à Ω
τ	vecteur unitaire tangent à Γ (dédit de n par une rotation de $\frac{\pi}{2}$)
D	module de rigidité à la flexion de la plaque
D'	inverse du module de rigidité à la flexion de la plaque
ζ	déflexion verticale de la plaque
f	charge transversale supportée par la plaque en flexion
φ_d	trace de la flèche mesurée sur la partie Γ_d de la frontière
ψ_d	pente de la flèche mesurée sur la partie Γ_d de la frontière
ξ_d	moment de flexion de la plaque mesuré sur la partie Γ_d
γ_d	effort tranchant de la plaque mesuré sur la partie Γ_d
$\bar{\zeta}$	déplacement d'une plaque encastrée
$\bar{\xi}_d$	moment de flexion sur Γ_d pour une plaque encastrée
$\bar{\gamma}_d$	effort tranchant de la plaque encastrée sur la partie Γ_d
μ_d	trace d'ordre deux de la déflexion mesurée sur la partie Γ_d
ϕ_d	trace d'ordre trois de la déflexion mesurée sur la partie Γ_d
\bar{u}	$\bar{u} = \zeta - \bar{\zeta}$ est le changement de fonction inconnue du problème biharmonique
χ_d	trace d'ordre deux de la fonction \bar{u} mesurée sur la partie Γ_d
Φ_d	trace d'ordre trois de la fonction \bar{u} mesurée sur la partie Γ_d
κ_d	$\kappa_d = (\varphi_d, \psi_d, \chi_d, \Phi_d)$ est le quadruplet de données compatibles
κ_{d_h}	$\kappa_{d_h} = (\varphi_{d_h}, \psi_{d_h}, \chi_{d_h}, \Phi_{d_h})$ est le quadruplet de données compatibles approchées de κ_d

$\mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega)$	l'espace des fonctions de $\mathbf{H}^2(\Omega)$ qui sont biharmoniques
$\mathbf{H}(\Gamma)$	l'espace des quadruplets de traces compatibles
$\mathbf{H}(\Gamma_d)$	l'espace des restrictions à Γ_d des éléments de l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$
$\mathcal{H}_h(\Gamma)$	l'espace d'approximation de l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$
$\mathcal{H}_h(\Gamma_d)$	l'espace des restrictions à Γ_d des éléments de l'espace $\mathcal{H}_h(\Gamma)$
$\mathcal{N}_h(\Gamma)$	l'espace des solutions du problème discret associé au bilaplacien
$\mathcal{N}_h^\perp(\Gamma)$	l'orthogonal de l'espace $\mathcal{N}_h(\Gamma)$
ω	la fonction harmonique du problème de Laplace
\hat{z}	la fonction harmonique associée au problème de Poisson
ϑ_d	la trace mesurée sur la partie Γ_d de la frontière de la solution ω
β_d	la dérivée normale mesurée sur la partie Γ_d de la frontière de la solution ω
ρ	$\rho = (\vartheta, \beta)$ est la paire de traces compatibles, sur Γ , associée au problème de Laplace
ρ_d	$\rho_d = (\vartheta_d, \beta_d)$ est la paire de données compatibles, sur Γ_d , associée au problème de Laplace
ς	$\varsigma = (\varphi - \bar{\varphi}, \psi - \bar{\psi})$ est la paire de traces compatibles, sur Γ , pour le problème de Poisson
ς_d	$\varsigma_d = (\varphi_d - \bar{\varphi}_d, \psi_d - \bar{\psi}_d)$ est la paire de données compatibles, sur Γ_d , pour le problème de Poisson
$\mathcal{H}_0^0(\Delta, \Omega)$	l'espace des fonctions de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ qui sont harmoniques
$\mathcal{H}^0(\Delta, \Omega)$	l'espace des fonctions de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ à laplacien dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$
$\mathcal{L}(\Gamma)$	l'espace des traces sur Γ des paires compatibles du problème de Laplace
$\mathcal{L}(\Gamma_d)$	l'espace des paires de données compatibles, sur Γ_d , associé au problème de Laplace
$\mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega)$	l'espace des fonctions de $\mathbf{H}^2(\Omega)$ qui sont harmoniques
$\mathcal{H}^2(\Delta, \Omega, \omega)$	l'ensemble des fonctions u de $\mathbf{H}^2(\Omega)$ telles que $-\Delta u = \omega$
$\mathcal{P}(\Gamma)$	l'espace des paires de traces compatibles, sur Γ , pour le problème de Poisson
$\mathcal{P}(\Gamma_d)$	l'espace des paires de données compatibles, sur Γ_d , du problème de Poisson
ρ_h	$\rho_h = (\vartheta_h, \beta_h)$ est la paire de traces compatibles approchée pour le problème de Laplace
ρ_{d_h}	$\rho_{d_h} = (\vartheta_{d_h}, \beta_{d_h})$ est la paire de données compatibles approchée du problème de Laplace

ς_h	$\varsigma_h = (\hat{\varphi}_h, \hat{\psi}_h)$ est la paire de traces compatibles approchée associée au problème de Poisson
ς_{d_h}	$\varsigma_{d_h} = (\hat{\varphi}_{d_h}, \hat{\psi}_{d_h})$ est la paire de données compatibles approchées du problème de Poisson
$\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace d'approximation de l'espace $H^{1/2}(\Gamma)$
$\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$	l'espace d'approximation de l'espace $L^2(\Gamma)$
$\mathcal{L}_h(\Gamma)$	l'espace d'approximation de l'espace $\mathcal{L}(\Gamma)$ des traces des paires compatibles du problème de Laplace
$\mathcal{W}_h(\Gamma)$	l'espace des solutions du problème discret associé au problème de Laplace
$\mathcal{W}_h^\perp(\Gamma)$	l'orthogonal de l'espace $\mathcal{W}_h(\Gamma)$
π_h	la projection orthogonale de $H^{1/2}(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$ sur son sous-espace $\mathcal{L}_h(\Gamma)$
$\mathcal{L}_N(\Gamma)$	l'espace des fonctions harmoniques discrètes associé au problème de Laplace
$\mathcal{P}_h(\Gamma)$	l'espace d'approximation de l'espace $\mathcal{P}(\Gamma)$ des traces des paires compatibles du problème de Poisson
$\mathcal{Z}_h(\Gamma)$	l'espace des solutions du problème discret associé au problème de Poisson
$\mathcal{Z}_h^\perp(\Gamma)$	l'orthogonal de l'espace $\mathcal{Z}_h(\Gamma)$
$\mathcal{P}_N(\Gamma)$	l'espace des fonctions discrètes associé au problème de Poisson
\mathfrak{b}	rapport entre la longueur de Γ_d et la longueur de Γ

Chapitre 1

Introduction générale

En science, un problème inverse est une situation dans laquelle à partir des observations expérimentales, on cherche à déterminer la cause d'un phénomène. Les problèmes inverses sont multiples et leurs applications (cf. P.C.Sabatier [1], Isakov [2, 3], OFTA [4]) se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'électromagnétisme, la géophysique, l'imagerie médicale, le contrôle non destructif des structures, la complétion de données, la mécanique des structures,...

Au contraire des problèmes directs, en général *bien posés*, c'est à dire pour lesquels l'existence, l'unicité et la continuité de la solution par rapport aux données sont garanties, Jacques Hadamard a illustré un exemple patent ⁽¹⁾ qui traduit le caractère *mal posé* des problèmes de Cauchy dans la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques. Le but des problèmes de complétion de données est de reconstituer des données sur tout le bord d'un domaine à partir des mesures accessibles sur une partie de ce bord (cf. [6, 7, 8, 9] à titre d'exemple). Le caractère mal posé fréquemment propre aux problèmes inverses rend leur résolution mathématique assez délicate du fait que d'une part, les mesures expérimentales ne suffisent pas à déterminer fidèlement les paramètres du modèle et que d'autre part, la solution numérique reste très sensible à une faible perturbation de ces mesures souvent inexactes à cause des erreurs d'incertitudes. Pour amoindrir la sensibilité de la solution par rapport aux données finales mesurées, il est souvent nécessaire d'ajouter au problème mathématique qui modélise le phénomène physique à inverser des *informations à priori* ou des *contraintes* sur la solution.

Pour inverser des données gravimétriques, Tikhonov a exposé dans [10] une

¹Cf. Jacques Hadamard [5].

méthode de *régularisation* dont le principe consiste à substituer au problème mal posé une suite de problèmes bien posés dépendant d'un paramètre dit de régularisation. La solution approchée, obtenue en modifiant l'opérateur ou en ajoutant des informations à priori sur la solution du problème mal posé, devient stable vis à vis des données expérimentales. Certains auteurs tels que A.Cimetière et al. [11] en vue de résoudre un problème de Cauchy, Lesnic [12] en élasticité linéaire pour identifier une partie inconnue du bord d'un domaine, U.Tautenhahn [13] afin de proposer un schéma général de régularisation dans certains espaces de Hilbert, B.Hofmann [14] pour obtenir des convergences fortes dans des problèmes mal posés, ont utilisé cette méthode de régularisation qui présente l'inconvénient majeur de faire dépendre la solution du type de régularisation et a incité Delvare [15, 16] à proposer une autre technique de régularisation dénommée *méthode de régularisation évanescence* sur un problème inverse de Cauchy pour l'opérateur de Laplace. La méthode de régularisation évanescence diffère de celle de Tikhonov par le fait que l'opérateur de Laplace du problème de Cauchy n'est pas modifié et que les informations à priori sur la solution ne sont pas nécessaires. Kozlov et al. [17] utilisent une méthode itérative alternative pour résoudre un problème de Cauchy.

1.1 Exemples de problèmes inverses pour le laplacien

La méthode de régularisation évanescence ⁽²⁾ a pour but de résoudre des problèmes inverses de type Cauchy pour des opérateurs elliptiques comme par exemple le problème inverse de Cauchy pour l'équation de Laplace

$$(1.1) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

dans lequel $n = (n_1, n_2)$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure au bord du domaine Ω (ouvert borné de \mathbb{R}^2), le couple (φ_d, ψ_d) enregistré sur la partie Γ_d de ce bord est une *donnée compatible* ⁽³⁾. La fonction harmonique u à reconstruire

²Elle est développée dans [11, 15, 16].

³C'est à dire telle que le problème inverse de Cauchy (1.1) admette une solution dont les traces coïncident avec les données.

est telle que sa trace encore notée u (respectivement la trace de sa dérivée normale notée $\frac{\partial u}{\partial n}$) coïncide avec φ_d (respectivement avec ψ_d) sur la partie Γ_d . La technique de régularisation évanescence reprend l'idée de base de Tikhonov mais dans laquelle la famille de problèmes bien posés (stables par rapport aux données) est une suite de problèmes d'optimisation définis, à chaque étape du processus itératif, de la façon suivante : soient \mathbf{U}_0 une donnée initiale fixée dans l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ des traces des couples compatibles sur tout le bord et $c > 0$ donnés

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{U}_{k+1} = (\mathbf{u}_{k+1}, \frac{\partial \mathbf{u}_{k+1}}{\partial n}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{U}_{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Gamma) \quad \text{avec} \\ J_c^k(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{U}_k\|_{\Gamma}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Gamma) \end{array} \right. .$$

$\phi_d = (\varphi_d, \psi_d)$ et \mathbf{v} est un couple quelconque compatible sur toute la frontière $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ (il n'y a pas de condition sur Γ_i). Elle possède l'avantage que *l'influence* du paramètre de régularisation c , considéré sur tout le bord du domaine, se dissipe (ce qui justifie en un sens le terme *évanescence* apparaissant dans le nom attribué à la méthode) lorsque la suite des solutions des problèmes bien posés en (1.2) converge vers la solution du problème inverse (1.1). La reconstruction numérique de la solution peut utiliser la méthode des éléments finis comme la méthode des équations intégrales de frontière. Une reconstitution *plus précise* de ladite solution est faite par le biais d'une méthode qui utilise des données surabondantes sur la frontière du domaine. Elle est développée dans [15, 16, 18] et porte le nom de *méthode vectorielle d'ordre un* ou simplement *méthode d'ordre un* du fait que les données surabondantes reposent sur les dérivées partielles premières et vérifient les équations

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta u_1 = 0 & \Delta u_2 = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_1 = \varphi_{1d} & u_2 = \varphi_{2d} & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} = \psi_{1d} & \frac{\partial u_2}{\partial n} = \psi_{2d} & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

$$(1.4) \quad \int_{\Gamma} (n_1 u_1 + n_2 u_2) d\sigma = 0 .$$

Moyennant des relations de compatibilité entre les données $\varphi_d, \varphi_{1d}, \varphi_{2d}, \psi_d, \psi_{1d}, \psi_{2d}$ fixées sur la partie Γ_d , u_1 représente la dérivée partielle de u par rapport à la première variable et u_2 sa dérivée partielle par rapport à la seconde variable. L'égalité (1.4) caractérise dans ce cas l'harmonicité de la fonction u . Dans les applications, le problème inverse de Cauchy (1.1) peut modéliser le phénomène qui

consiste à déterminer la répartition de température et de flux de chaleur sur la paroi interne Γ_i d'une conduite, à partir de la température et du flux de chaleur mesurés sur sa paroi externe Γ_d . Il appartient évidemment à la catégorie des problèmes mal posés au sens d'Hadamard [5]. Dans la même lignée, Kozlov et al. [17] se proposent de résoudre le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

$$(1.5) \quad \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u = u^* \text{ sur } S, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = p^* \text{ sur } S$$

où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^p , de bord Γ régulier constitué de deux parties disjointes S et L , le couple (u^*, p^*) est une donnée de Cauchy fixée sur S . L'objectif du problème (1.5), de type (1.1), est d'identifier le potentiel et la dérivée normale de la solution u sur la partie L à partir des valeurs du potentiel et de sa dérivée normale sur la partie S . La résolution se fait par une méthode itérative qui consiste à remplacer le problème de Cauchy par une suite de problèmes mixtes bien posés, en utilisant en alternance la donnée de Dirichlet et de Neumann sur la partie S dont on dispose les informations sur le bord. Dans [17], il est prouvé que la méthode converge et possède une propriété régularisante. Pour identifier un coefficient de Robin sur une partie du bord T d'un domaine D de \mathbb{R}^2 à partir de données surabondantes sur la partie complémentaire de ce bord, S.Chaabane et al. [19, 20] étudient le problème inverse suivant :

Etant donné un flux $\phi \neq 0$ et une mesure u_m sur $K \subset T$, trouver une fonction φ sur $\gamma = T \setminus K$ telle que la solution u de

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ dans } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \phi \text{ sur } K, \quad \frac{\partial u}{\partial n} + \varphi u = 0 \text{ sur } \gamma \end{aligned}$$

vérifie aussi $u|_K = u_m$.

D est borné et simplement connexe. Les parties K et γ sont supposées non vides. Dans [19], est proposée une méthode alternative de régularisation et de résolution (approchée) constructive et stable de (1.1), y compris pour des données non nécessairement compatibles, en termes de problèmes de meilleure approximation sous contrainte en norme, similaire au problème (1.2). Dans [20], sont établis quelques résultats de stabilité de type logarithmique. Faker Ben Belgacem [21] traite un problème de complétion de données pour l'équation de Poisson de la forme :

Trouver une fonction u telle que

$$(1.7) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g_D & \text{sur } \Gamma_D \\ u = g_C & \text{sur } \Gamma_C \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi_C & \text{sur } \Gamma_C \end{cases} .$$

Le bord du domaine ouvert Ω et borné de \mathbb{R}^2 , est partitionné en trois parties de mesures non nulles $\Gamma_D, \Gamma_C, \Gamma_I$ (voir figure 1.1), parmi lesquelles Γ_C et Γ_I n'ont aucun sommet en commun et sont séparées par Γ_D . f est un terme de source, la donnée g_D vérifie la condition de Dirichlet sur la partie Γ_D et la paire (g_C, φ_C) est une donnée compatible sur Γ_C . L'existence et la stabilité de la solution y sont examinées à partir d'une formulation variationnelle du problème inverse de Cauchy sur des espaces de Sobolev non usuels décrits dans l'article. L. Marin [22, 23] étudient un problème inverse de Cauchy en élasticité linéaire. Dans L. Marin [22] la résolution se fait par la méthode des éléments de frontière et dans L. Marin [23] la résolution utilise la méthode des *solutions fondamentales* ⁽⁴⁾.

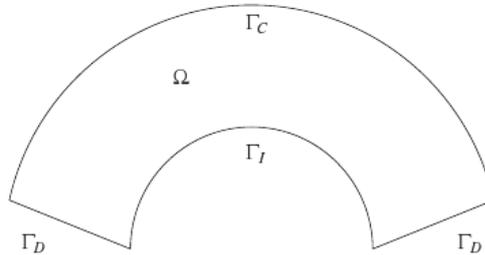


FIG. 1.1 –

En dehors des problèmes inverses précédents concernant l'opérateur de Laplace, il en existe un plus grand nombre dans la littérature que nous ne pourrions pas énumérer dans ce manuscrit. Nous renvoyons par exemple à D. Lesnic [26, 27], Y.C. Hon [28], Potthast [29], S. Andrieux [30, 31] et à E.L.B. Abdellatif [32].

⁴Cf. Kupradze [24] et Fairweather [25].

1.2 Exemples de problèmes inverses liés au bilaplacien

Plusieurs années après l'article de Cecchi et Cannon [33] dans lequel ils étudient un problème inverse associé au bilaplacien avec des conditions aux limites uniquement accessibles sur une partie du bord du domaine de la solution, Lesnic et Marin [34] appliquent une méthode des solutions fondamentales à l'équation biharmonique suivante :

$$(1.8) \quad \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

qui équivaut au système d'équations :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \Delta u(x) = v(x), & x \in \Omega \\ \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

modélisant l'écoulement de Stokes, auquel cas les fonctions u et v sont appelées la fonction courant et le tourbillon de l'écoulement du fluide. L'opérateur biharmonique régit également la flexion des plaques minces en petits déplacements. Comme on le verra, le problème de Cauchy en théorie des plaques minces peut être ramené à une cascade de deux problèmes de Cauchy pour le laplacien. Alors u désigne la déflexion de la plaque et v une fonction auxiliaire qui permet de reconstituer les moments de flexion. L'ouvert Ω est borné dans \mathbb{R}^2 . Son bord $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ est tel que Γ_d et Γ_i soient deux parties disjointes et non vides. Plusieurs formulations relatives aux conditions aux limites portant sur u et v peuvent être prises en compte sur Γ_d (aucune condition n'est donnée sur Γ_i). Par exemple

$$(1.10) \quad u(x)|_{\Gamma_d} = u_o(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_d} = u_1(x), \quad v(x)|_{\Gamma_d} = v_o(x), \quad \frac{\partial v(x)}{\partial n} \Big|_{\Gamma_d} = v_1(x)$$

ou bien

$$(1.11) \quad u(x)|_{\Gamma_d} = u_o(x), \quad \frac{\partial u(x)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = u_1(x) \quad v(x)|_{\Gamma_d} = v_o(x).$$

L'idée principale de la méthode de Lesnic et Marin est de construire une approximation de la solution du problème inverse par une combinaison linéaire de solutions fondamentales en des points de singularité par rapport aux points de source. Ces

derniers sont situés en dehors du domaine Ω . La méthode des solutions fondamentales étant principalement numérique, le problème approché conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires dont la solution inconnue \mathbf{X} satisfait l'égalité :

$$(1.12) \quad \mathbb{A}\mathbf{X} = \mathbf{F}.$$

La matrice des solutions fondamentales \mathbb{A} et le vecteur \mathbf{F} sont donnés par des équations définies dans [34]. Le système linéaire précédent étant mal conditionné à cause du caractère mal posé du problème inverse initial constitué des équations (1.8) ou (1.9) et des conditions aux limites (1.10) sur la frontière, la solution \mathbf{X} est régularisée au moyen d'une fonctionnelle de Tikhonov [10] (dépendant d'un paramètre de régularisation λ choisi strictement positif) de la forme :

$$(1.13) \quad J_\lambda(\mathbf{X}) = \|\mathbb{A}\mathbf{X} - \mathbf{F}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{X}\|_2^2.$$

Sous l'écoulement de Stokes, le problème inverse biharmonique (1.9)–(1.10) consiste à partir des données u_o, u_1 (respectivement v_0, v_1), fixées sur la partie Γ_d de la frontière, à reconstruire la trace et la dérivée normale de la fonction u (respectivement de la fonction v). A.Zeb et D.B.Ingham [35] se proposent de résoudre un problème inverse du même type, mais sur domaine inconnu, en utilisant la méthode des solutions fondamentales. L'objectif est de déterminer la partie inconnue Γ_i du bord d'un domaine à partir des conditions aux limites (1.10) définies sur la partie accessible Γ_d du bord du domaine de la solution biharmonique u , et d'une condition au limite supplémentaire

$$(1.14) \quad u(x)|_{\Gamma_i} = \varrho(x)$$

sur la partie inconnue Γ_i de la frontière. ϱ désigne une fonction donnée sur Γ_i . Dans M.Bonnet [36] un certain nombre de problèmes inverses d'élasticité sont abordés. Ils concernent les plaques minces élastiques, l'identification de modules élastiques, de paramètres modèles ou des fissures.

Notre travail comporte trois volets principaux :

- Extension de la méthode de régularisation évanescence au cas de l'opérateur bilaplacien.
- Factorisation du problème de Cauchy pour le bilaplacien en deux problèmes de Cauchy pour le laplacien. Développement d'un algorithme numérique efficace.
- Convergence de la méthode d'éléments finis lorsque le pas du maillage tend vers zéro.

1.3 Plan de la thèse

Le chapitre 2 rappelle d'abord quelques rudiments sur la théorie des plaques minces élastiques, ensuite, au moyen d'un certain nombre de calculs formels, le problème de complétion de données pour le problème des plaques est transformé en un problème inverse de Cauchy pour le bilaplacien. Deux théorèmes, à savoir celui de Cauchy-Kowalewsky et de Holmgren, sont rappelés pour l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème inverse sous l'hypothèse de données compatibles.

Les troisième et quatrième chapitres sont réservés à l'analyse mathématique des problèmes inverses de Cauchy que nous allons traiter via des outils d'analyse fonctionnelle et la *méthode inverse itérative à effet régularisant évanescent* mentionnée précédemment et développée dans [15].

Au chapitre 3, est traité le problème inverse de Cauchy associé au bilaplacien pour des données non nécessairement compatibles (présence éventuelle de bruits). Il consiste à reconstruire, de manière itérative, les traces qui se rapprochent au mieux des données enregistrées sur une partie du bord du domaine d'une fonction qui vérifie l'équation d'équilibre biharmonique dans le domaine. Nous donnons d'abord un théorème de convergence faible ⁽⁵⁾ de la suite des solutions optimales du processus itératif engendré par le principe de régularisation. Ensuite, nous établissons, via un corollaire, un résultat de convergence forte. Enfin, après avoir traité le problème inverse biharmonique approché par une méthode abstraite d'éléments finis, nous montrons la convergence de la suite des éléments optimaux de l'algorithme régularisé vers la solution du problème modèle discret.

Au chapitre 4, afin de pouvoir utiliser ou adapter des algorithmes élaborés pour les problèmes de Cauchy associés au laplacien, nous proposons une factorisation du problème en deux problèmes inverses de Cauchy pour le laplacien. Le rôle des données mesurées sur la partie accessible Γ_d de la frontière est examiné pour chaque problème inverse ainsi que le lien entre le problème factorisé et le problème de Cauchy pour le bilaplacien.

Le chapitre 5 est consacré à la discrétisation, par la méthode des éléments finis, du problème modèle du chapitre 3 en utilisant la factorisation du chapitre 4. Nous

⁵Un résultat similaire figure dans [11, 15] pour le problème inverse associé au Laplacien mais une autre démonstration sera proposée ici.

commençons par traiter le problème approché lié à l'équation de Laplace pour finir avec le problème discret lié à l'équation de Poisson. Pour chaque problème traité, en plus de la convergence obtenue dans [15, 18], lorsque le nombre d'itérations tend vers l'infini, de la suite des solutions optimales du processus itératif discret vers la solution du problème de Cauchy discret, nous établissons un résultat de convergence, lorsque le pas du maillage tend vers zéro, de la paire compatible au sens discret vers la paire compatible du problème continu.

Au chapitre 6, des implémentations numériques, de chaque problème approché résolu au chapitre 5, illustrent l'efficacité et la robustesse de la méthode de régularisation évanescence.

Chapitre 2

Le problème de complétion de données pour les plaques minces

2.1 Introduction

Deux stratégies sont possibles pour construire le modèle usuel des plaques minces élastiques. La plus ancienne consiste à passer du tridimensionnel au bidimensionnel en imposant à la cinématique de satisfaire *l'hypothèse de Kirchhoff et de Love* : tout segment matériel orthogonal au feuillet moyen avant déformation, reste orthogonal au feuillet moyen après déformation et cela sans se déformer. La cinématique du feuillet moyen gouvernant la cinématique dans l'épaisseur de la plaque, on réussit à réduire le problème tridimensionnel initial au problème bidimensionnel. L'autre stratégie possible est d'étudier le comportement asymptotique des solutions du problème d'élasticité linéaire tridimensionnel lorsque l'épaisseur de la plaque tend vers zéro. On montre alors que la limite asymptotique vérifie l'hypothèse de Kirchhoff et de Love et que le problème limite obtenu est le problème bidimensionnel usuel des plaques minces élastiques en petits déplacements (cf. [37, 38, 39, 40] à titre d'exemple).

Différentes formulations équivalentes sont disponibles. Nous avons retenu celle présentée par G.Duvaut et J.L.Lions dans leur ouvrage "Les inéquations en mécanique et en physique" [41]. Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord ces formulations, ensuite nous définissons et nous transcrivons le problème de complétion de données qui lui est associé sous la forme d'un problème de Cauchy pour le bilaplacien. Enfin nous rappelons les théorèmes de Cauchy-Kowalewsky et de Holmgren

pour le problème obtenu en supposant les données compatibles.

2.2 Rappel sur la théorie linéaire des plaques minces élastiques

Sous l'action d'un champ de forces de volume et d'un champ de forces de surface, une plaque uniforme mince se déforme. Avec les hypothèses de Kirchhoff et de Love, la théorie des plaques minces en élasticité linéaire, bien que basée sur un modèle tridimensionnel, peut être ramenée à un modèle bidimensionnel formulé sur la *surface moyenne* de la plaque. Les fonctions inconnues ne dépendent alors que de deux variables d'espace.

La section médiane de la plaque (ou feuillet moyen) est considérée comme un ouvert Ω borné, connexe et régulier de \mathbb{R}^2 , dont la frontière Γ est régulière. La méthode énergétique due à Landau et Lifschitz [42] conduit à l'équation d'équilibre biharmonique ci-dessous (cf. [41]), régissant la *déflexion verticale* $\zeta(x_1, x_2)$ (ou le déplacement transversal de la plaque pour des petits déplacements de celle-ci) qui à un point p quelconque de la surface moyenne au repos associe le point p' de la surface moyenne dans la configuration déformée

$$D \Delta^2 \zeta = f_3 \quad \text{dans } \Omega$$

et aux **conditions aux limites** suivantes pour les efforts

$$D \left\{ \Delta \zeta + (1 - \nu) \left(2n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) \right\} = -\mathcal{M} \quad \text{sur } \Gamma$$

$$-D \left\{ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} = \mathcal{F} \quad \text{sur } \Gamma$$

où $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ est un coefficient appelé *module de rigidité à la flexion* dépendant du *module de Young* strictement positif E , du coefficient de Poisson ν du matériau dont est formée la plaque avec $0 < \nu < \frac{1}{2}$, et de l'épaisseur h de la plaque. f_3 est la *densité de charge transversale* supportée par la plaque, elle est normale à celle-ci. \mathcal{M} désigne la *moment de flexion* (le moment d'axe porté par la tangente à Γ) et \mathcal{F} représente l'*effort tranchant*. Nous retiendrons que $n = (n_1, n_2)$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure au bord, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ est le vecteur unitaire de la

tangente au bord (dédit de n par une rotation de $\frac{\pi}{2}$) et $\partial/\partial\tau$ représente la dérivée tangentielle le long du bord Γ . Des équations similaires à celles qui précèdent se retrouvent par exemple dans Landau [42] ou Nečas [43]. En dehors des conditions de bord signalées plus haut et qui seront utilisées dans la suite de notre travail, nous donnons ci-après d'autres conditions aux limites couramment rencontrées dans la pratique selon que la plaque soit encastrée, libre, ou simplement posée

- Lorsque la plaque est **encastrée sur toute la frontière** son déplacement ζ et sa pente $\frac{\partial\zeta}{\partial n}$ sont nulles.
- Si la plaque est **encastrée sur une partie Γ_d de la frontière et libre sur la partie complémentaire Γ_i** , les conditions de bord se traduisent par

$$\zeta = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_d \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = 0, \quad \mathcal{F} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_i.$$

- Lorsque la plaque est **simplement posée (ou simplement supportée) sur toute la frontière**, les conditions aux limites sont données par

$$\zeta = 0 \quad , \quad \mathcal{M} = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

2.3 Enoncé du problème de complétion de données

Pour une plaque mince en flexion, nous venons de voir que, sous l'hypothèse de Kirchhoff et Love, l'inconnue est le déplacement transversal du feuillet moyen. Des conditions aux limites en efforts données précédemment, le moment de flexion \mathcal{M} et l'effort tranchant \mathcal{F} de la plaque sont des combinaisons linéaires d'opérateurs définis sur tout le bord du domaine. Au contraire des problèmes directs où les données sont fournies sur toute la frontière du domaine, le problème inverse que nous nous proposons d'étudier dans la suite est un problème inverse de type Cauchy pour le bilaplacien. L'objectif est d'exprimer les opérateurs de bord de la théorie des plaques (moment de flexion, effort tranchant) en fonction de la trace du déplacement ζ sur le bord et de ses dérivées normales d'ordre 1, 2, 3, afin d'obtenir un problème de Cauchy standard pour le bilaplacien.

Désignons par \mathcal{M}_d le moment de flexion de la plaque élastique et par \mathcal{F}_d l'effort tranchant que nous supposons donnés sur une partie Γ_d ouverte, régulière et

analytique⁽¹⁾ du bord Γ du domaine Ω . Posons

$$\xi_d = -\mathcal{M}_d \quad \text{et} \quad \gamma_d = \mathcal{F}_d$$

Nous nous proposons de rechercher la fonction inconnue ζ (représentant la déflexion verticale de la plaque mince élastique) qui est solution du problème

$$(\wp) \left\{ \begin{array}{ll} D \Delta^2 \zeta = f & \text{dans } \Omega \\ \zeta = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ D \left\{ \Delta \zeta + (1 - \nu) \left(2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) \right\} = \xi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ -D \left\{ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \right\} = \gamma_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right.$$

dans lequel f désigne la charge à laquelle la plaque est soumise, φ_d le déplacement transversal et la pente ψ_d imposés. La formulation du problème (\wp) ne fait intervenir (du moins formellement) que la trace et la dérivée normale de la fonction ζ . Ci-dessous, nous transformons les expressions des lignes 4 et 5 du problème (\wp) pour les exprimer en fonction des dérivées seconde et troisième de la fonction ζ , c'est à dire pour faire apparaître les opérateurs différentiels frontière $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}$ et $\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3}$. Ceci nous conduit aux calculs de la section suivante.

2.4 Nouvelle expression des opérateurs frontières

Le bord Γ est parcouru par le point $\overline{M}(s) = (\overline{x}_1(s), \overline{x}_2(s))$. On repère les points de Ω situés dans un voisinage de Γ par le système de coordonnées normales (α, s) tel que :

$$M(\alpha, s) = \overline{M}(s) + \alpha n(s)$$

ou encore

$$x_1(\alpha, s) = \overline{x}_1(s) + \alpha n_1(s) \quad \text{et} \quad x_2(\alpha, s) = \overline{x}_2(s) + \alpha n_2(s) .$$

Pour des raisons de simplicité, les notations seront allégées en omettant les variables α et s dans la suite des calculs. On a

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = n \quad \text{et} \quad \frac{\partial M}{\partial s} = (1 + \alpha/R)\tau .$$

¹C'est à dire d'après R.Dautray [44], que de toute représentation paramétrique locale $(\mathcal{R}, \mathcal{U}, \mathcal{O}, \alpha)$ de Γ_d , la fonction α est analytique sur \mathcal{O} .

On notera que α est l'opposé de la distance des points M et \overline{M} , et que R représente le rayon de courbure.

La base naturelle associée à ce système de coordonnées curvilignes est constituée des vecteurs N et T définis par :

$$N(\alpha, s) = n(s) \quad \text{et} \quad T(\alpha, s) = (1 + \alpha/R)\tau(s) .$$

Ces vecteurs sont respectivement tangents aux lignes de coordonnées $s = cte$ et $\alpha = cte$. A noter que N est de norme 1, tandis que T est de norme $1 + \alpha/R$. Il en résulte que

$$(i) \quad \frac{\partial N}{\partial \alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = \frac{1}{R}\tau$$

$$(ii) \quad \frac{\partial N}{\partial s} = \frac{1}{R}\tau .$$

Soit maintenant une fonction $\overline{\zeta}(x_1, x_2)$ de classe C^3 sur $\overline{\Omega}$. Introduisons la fonction

$$\zeta(\alpha, s) = \overline{\zeta}(x_1(\alpha, s), x_2(\alpha, s)) .$$

On vérifie que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} &= \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_2} \\ &= n_1 \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}(0, s) &= \nabla \overline{\zeta}(\overline{x}_1(s), \overline{x}_2(s)) \cdot n(\overline{x}_1(s), \overline{x}_2(s)) \\ &= \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial n}(\overline{M}(s)) \quad (\text{dérivée normale}) . \end{aligned}$$

De même on vérifie que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial s}(0, s) &= \nabla \overline{\zeta}(\overline{M}(s)) \cdot \frac{d\overline{M}}{ds}(s) \\ &= \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial \tau}(\overline{M}(s)) \quad (\text{dérivée tangentielle}) . \end{aligned}$$

2.4.1 Réécritures du terme $-n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2}$

2.4.1.1 En fonction de $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2}$ et de $\Delta \zeta$

Par définition on a sur Γ , c'est à dire pour $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} \\ &= n_1^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + n_2^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} \\ &= -n_2^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + \Delta \bar{\zeta} \end{aligned}$$

d'où la relation

$$(2.1) \quad -n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - \Delta \zeta.$$

2.4.1.2 En fonction de $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2}$ et de $\frac{\partial \zeta}{\partial n}$

Comme avec la relation (ii) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \left[\alpha \left(\frac{\tau_1}{R} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \frac{\tau_2}{R} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \right) + \tau_1 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \right] \\ &= \alpha \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\tau_1}{R} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \frac{\tau_2}{R} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\tau_1 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \right) \end{aligned}$$

alors sur Γ , c'est à dire pour $\alpha = 0$, il vient que

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} = \frac{d\tau_1}{ds} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \frac{d\tau_2}{ds} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} + \tau_1 \left(\frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \tau_2 \left(\frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} \right).$$

Puisque $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} \Big|_{\alpha=0}$, des égalités $\tau_1 = -n_2$ et $\tau_2 = n_1$, on déduit de la relation ci-dessus que

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} = n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} - 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} + n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n}$$

ou encore sur Γ

$$(2.2) \quad -n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} - n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n}.$$

2.4.2 Expression de $\Delta\zeta$ sur le bord

Les relations (2.1) et (2.2) précédentes fournissent sur Γ

$$(2.3) \quad \Delta\zeta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\zeta}{\partial n} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2}.$$

2.4.3 Réécriture du terme $n_1n_2 \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2}\right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2}$

Nous savons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\zeta}{\partial s\partial\alpha} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(n_1 \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_2} \right) \\ &= n_1 \frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_2 \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + \left(n_1 \frac{\partial x_2}{\partial s} + n_2 \frac{\partial x_1}{\partial s} \right) \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{dn_1}{ds} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_1} + \frac{dn_2}{ds} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

En faisant $\alpha = 0$, on obtient

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau\partial n} = n_1 \frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_2 \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + \left(n_1 \frac{d\bar{x}_2}{ds} + n_2 \frac{d\bar{x}_1}{ds} \right) \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\tau}$$

En vertu du fait que $\tau_1 = -n_2$ et $\tau_2 = n_1$, il s'ensuit que

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau\partial n} = n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\tau}$$

ce qui permet de déduire que sur Γ , on a

$$(2.4) \quad n_1n_2 \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1^2} \right) + (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2\zeta}{\partial x_1\partial x_2} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau\partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}.$$

2.4.4 Une expression pour $\frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3}$ sur le bord

Par définition, sur Γ (c'est à dire pour $\alpha = 0$)

$$\frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} = \frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^3}.$$

En développant le second membre de cette expression, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3\zeta}{\partial\alpha^3} &= n_1^3 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_1^3} + n_2^3 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_2^3} + 3 n_1n_2 \left(n_1 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_1^2\partial x_2} + n_2 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2^2} \right) \\ &= n_1^3 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_1^3} + n_2^3 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_2^3} + 3 n_1n_2 \left(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2} \right) + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2} \right) \right) \end{aligned}$$

d'où

$$(2.5) \quad \frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} = n_1^3 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_1^3} + n_2^3 \frac{\partial^3\bar{\zeta}}{\partial x_2^3} + 3 n_1n_2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial^2\bar{\zeta}}{\partial x_1\partial x_2} \right).$$

2.4.5 Calcul du terme $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right]$

Compte tenu de (ii) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial s} &= n_1 \tau_1 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_2 \tau_2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + n_1 \tau_2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + n_2 \tau_1 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &+ \frac{\alpha}{R} \left[n_1 \tau_1 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_2 \tau_2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + (n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1) \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \\ &- \frac{\alpha}{R^2} \left(\tau_1 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right) &= \frac{n_2^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} - \frac{n_1^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_1 \tau_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^3} + \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \\ &+ \frac{n_1^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} - \frac{n_2^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + n_2 \tau_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_2^3} \right) \\ &- \frac{2n_1 n_2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + n_1 \tau_2 \left(\frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) \\ &- \frac{2n_1 n_2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + n_2 \tau_1 \left(\frac{\partial x_1}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{\partial x_2}{\partial s} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) \\ &+ \alpha \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{R} \left(n_1 \tau_1 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_2 \tau_2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + (n_1 \tau_2 + n_2 \tau_1) \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] \\ &- \alpha \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{1}{R^2} \left(\tau_1 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_1} + \tau_2 \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Comme $\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s \partial \alpha} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial s} \right) \Big|_{\alpha=0}$, pour $\alpha = 0$, la relation précédente donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] &= \frac{n_2^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} - \frac{n_1^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2} + n_1 \tau_1 \left(\frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^3} + \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) \\ &+ \frac{n_1^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} - \frac{n_2^2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_2^2} + n_2 \tau_2 \left(\frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_2^3} \right) \\ &- \frac{2n_1 n_2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + n_1 \tau_2 \left(\frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) \\ &- \frac{2n_1 n_2}{R} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2} + n_2 \tau_1 \left(\frac{d\bar{x}_1}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \frac{d\bar{x}_2}{ds} \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right). \end{aligned}$$

Ce qui, avec les relations $\tau_1 = -n_2$ et $\tau_2 = n_1$, s'écrit encore

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] &= n_1 n_2^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3} + n_1^2 n_2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_2^3} + (n_1^3 - 2 n_1 n_2^2) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2^2} \\ &+ (n_2^3 - 2 n_1^2 n_2) \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^2 \partial x_2} \\ &+ \frac{1}{R} \left[(n_1^2 - n_2^2) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) - 4 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right]. \end{aligned}$$

Or, du fait que $n_1^2 + n_2^2 = 1$, il vient que $n_1 n_2^2 = n_1 - n_1^3$ et $n_1^2 n_2 = n_2 - n_2^3$, par suite

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] &= -n_1^3 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3} + n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} \right) \\ &- n_2^3 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_2^3} - 3 n_1 n_2 \left[n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{R} \left[(n_1^2 - n_2^2) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) - 4 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right] \end{aligned}$$

ce qui, avec la relation (2.5), fournit

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] = -\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} + \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} - \frac{1}{R} \left[(n_2^2 - n_1^2) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + 4 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} \right].$$

Cependant, d'après (2.1) on a

$$2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} = n_2^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + n_1^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - \Delta \zeta$$

soit

$$(n_2^2 - n_1^2) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right) + 4 n_1 n_2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} = 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - \Delta \zeta$$

d'où

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] = -\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} + \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + \frac{1}{R} \left(\Delta \zeta - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \right).$$

2.4.6 Evaluation de la quantité $\frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n}$

De l'égalité (2.3), la relation (2.6) peut encore s'écrire

$$(2.7) \quad \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} = \frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} \right).$$

2.4.7 Expressions finales des lignes 4 et 5 du problème (\wp)

En injectant les relations (2.2) et (2.3) dans la quatrième équation du problème (\wp) , nous obtenons

$$(2.8) \quad D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} = \xi_d - D\nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)$$

et en faisant de même pour les égalités (2.4) et (2.7) dans la cinquième équation du problème (\wp) , il vient

$$-D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} = \gamma_d + D(2 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{R} \left(D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} \right) - \frac{D}{R} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)$$

ce qui, compte tenu du résultat (2.8), s'écrit

$$(2.9) \quad -D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} = \gamma_d + \frac{\xi_d}{R} + D(2 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] - \frac{(\nu + 1)D}{R} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right)$$

2.5 Reformulation du problème (\wp) en un problème de Cauchy pour le bilaplacien

Avec les relations (2.8) et (2.9), le problème (\wp) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} D \Delta^2 \zeta = f \quad \text{dans } \Omega \\ \zeta = \varphi_d \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \psi_d \\ D \frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} = \xi_d - D\nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \\ -D \frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} = \gamma_d + \frac{\xi_d}{R} + D(2 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \psi_d}{\partial \tau} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_d}{\partial \tau} \right) - (\nu + 1) \frac{D}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_d .$$

Posons

$$(2.10) \quad \mu_d = D' \xi_d - \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \quad \text{où } D' = 1/D$$

$$(2.11) \quad \phi_d = -D' \left(\gamma_d + \frac{\xi_d}{R} \right) - (2 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \psi_d}{\partial \tau} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_d}{\partial \tau} \right) + \frac{(\nu + 1)}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right)$$

où μ_d (respectivement ϕ_d) représente la trace d'ordre 2 fixée sur la partie Γ_d (respectivement la trace d'ordre 3 fixée sur la partie Γ_d) du bord du domaine de la

déflexion verticale du problème (\wp) , ce dernier est alors formellement équivalent au problème de Cauchy ci-après associé au bilaplacien

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2\zeta = f & \text{dans } \Omega \\ \zeta = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\zeta}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2} = \mu_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3} = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Il consiste, à partir des données φ_d, ψ_d, μ_d et ϕ_d fixées sur la partie Γ_d (aucune mesure n'est disponible sur $\Gamma \setminus \Gamma_d$) et représentant respectivement le déplacement transversal d'une plaque en flexion, sa dérivée normale, sa trace d'ordre 2 et sa trace d'ordre 3, à rechercher le quadruplet de traces $(\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial n}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial n^2}, \frac{\partial^3\zeta}{\partial n^3})$ sur toute la frontière Γ du domaine de la fonction ζ qui vérifie l'équation d'équilibre $D\Delta^2\zeta = f$, à l'intérieur du domaine Ω , gouvernant la déformation de la plaque en petits déplacements. Le problème (2.12) est mal posé au sens d'Hadamard. Une étude mathématique plus détaillée sera développée dans les chapitres suivants. Pour les questions d'existence et d'unicité d'une solution, nous supposerons les données compatibles (cf. par exemple [21] ou [36]) car la solution n'existe pas en général lorsque ces données sont arbitraires, même si elles sont suffisamment régulières, et nous utiliserons le théorème de Cauchy-Kowalewsky et le théorème de Holmgren (moyennant des hypothèses convenables sur les données et la géométrie des ensembles Ω et Γ_d) que nous énonçons ci-dessous à partir d'une formulation obtenue dans Choi [45].

2.5.1 Résultats d'existence et d'unicité

Théorème 2.1 (De Cauchy-Kowalewsky) *On se donne un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , \mathcal{P} un opérateur différentiel à coefficients analytiques sur Ω et Γ_d une partie régulière, ouverte et analytique de son bord. Pour toutes données de Cauchy analytiques, il existe un voisinage ouvert de Γ_d dans lequel il existe une unique solution analytique au problème de Cauchy.*

A priori, l'unicité locale de la solution dans le théorème de Cauchy-Kowalewsky suppose que cette dernière soit analytique. En fait, l'analyticité de la solution n'est pas un critère nécessaire pour obtenir l'unicité : ceci résulte du théorème d'unicité

de Holmgren que nous formulons ci-après. Ce théorème prolonge de façon unique les solutions sur une courbe non-caractéristique⁽²⁾.

Théorème 2.2 (De Holmgren) *Soit u supposée dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ solution de l'équation $\mathcal{P}(u) = 0$ où \mathcal{P} est un opérateur différentiel à coefficients analytiques et $u = 0$ sur une courbe Γ non-caractéristique de classe C^1 . Alors u est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de Γ .*

Remarque 2.1 *Pour un énoncé plus général avec des démonstrations détaillées du théorème de Cauchy-Kowalewsky et du théorème d'unicité de Holmgren, cf. par exemple R.Dautray, J.-L.Lions [44], Courant et Hilbert [46], Lars Gårding [47], Chazarain [48], Lars Hörmander [49, 50], Jacques Hadamard [51].*

Remarque 2.2 *Le théorème de Holmgren s'applique en particulier aux opérateurs elliptiques puisqu'ils n'admettent pas de courbes caractéristiques.*

²D'après Robert Dautray, J.-L.Lions [44], étant donnés $x^0 \in \Omega$ et $\rho \in C^1(\Omega)$ avec $D\rho(x^0) \neq 0$, la courbe $\Gamma = \{ \rho(x^0) = \rho(x) \}$ est non-caractéristique pour l'opérateur différentiel linéaire \mathcal{P} en x^0 si $\mathcal{P}^\bullet(x^0, D\rho(x^0)) \neq 0$, où \mathcal{P}^\bullet est la partie principale de \mathcal{P} .

Chapitre 3

Le problème de Cauchy biharmonique associé à (\wp)

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une résolution du problème (\wp) en utilisant une formulation équivalente au problème inverse de Cauchy (2.12). Comme cette dernière formulation est mal posée au sens d'Hadamard, après avoir défini un cadre fonctionnel, nous utilisons le principe de régularisation évanescence présenté dans [15, 16] en remplaçant le problème mal posé par une suite de problèmes d'optimisation bien posés au sens d'Hadamard. La suite des solutions optimales obtenue converge vers la solution du problème inverse de Cauchy. Une approche numérique abstraite, de la formulation équivalente au problème (2.12), est abordée par la méthode des éléments finis. Dans le cadre de cette approche, nous montrons la convergence de la suite des éléments optimaux de l'algorithme régularisé vers la solution du problème de Cauchy discret.

3.2 Réduction du problème (2.12) à un problème modèle biharmonique

Soit Ω un ouvert borné, connexe de \mathbb{R}^2 , de frontière Γ régulière et analytique. Soient $\Gamma_d \cup \Gamma_i$ une partition de Γ et des fonctions $f, \varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d$ données et analytiques sur $\Omega \cup \Gamma_d$. ζ étant une fonction inconnue, qui représente la déflexion verticale

d'une plaque mince, nous allons chercher à résoudre le problème de Cauchy (2.12) associé au bilaplacien. Ce dernier consiste, à partir des données $\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d$ supposées compatibles sur la partie Γ_d de la frontière du domaine Ω de la fonction biharmonique ζ , à reconstituer l'information c'est à dire les traces ⁽¹⁾ sur toute la frontière de ce domaine. Dans (2.12), les données $\varphi_d, \psi_d, \mu_d, \phi_d$, fixées sur la partie Γ_d , représentent respectivement la trace, la dérivée normale, la trace d'ordre deux et la trace d'ordre trois de la fonction ζ .

Pour résoudre le problème (2.12) nous allons effectuer un changement de fonction inconnue pour rendre l'équation aux dérivées partielles homogène, en partant d'une solution particulière $\bar{\zeta}$. Grâce à ce changement de fonction inconnue, nous allons établir une **nouvelle formulation** de (2.12) qui constituera notre problème modèle de Cauchy pour l'opérateur biharmonique.

Pour une plaque encastree soumise à un champ de forces ayant une résultante de densité f , nous savons que son déplacement $\bar{\zeta}$ vérifie le problème

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D \Delta^2 \bar{\zeta} = f & \text{dans } \Omega \\ \bar{\zeta} = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \end{array} \right. .$$

Si on pose

$$\bar{u} = \zeta - \bar{\zeta}$$

alors le problème de Cauchy (2.12) se réécrit

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D \Delta^2 \bar{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \mu_d - \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial n^2} & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = \phi_d - \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial n^3} & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Les quantités $\bar{\zeta}$ et $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n}$ dans (3.1) étant nulles sur le bord, leurs dérivées de tous ordres par rapport à la tangente τ s'annulent aussi identiquement. Ainsi, si on note $\bar{\xi}_d$ le moment de flexion et $\bar{\gamma}_d$ l'effort tranchant de la plaque encastree, fixés sur la partie Γ_d , il vient avec les égalités (2.8) et (2.9) que

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial n^2} = D' \bar{\xi}_d \quad \text{et} \quad - \frac{\partial^3 \bar{\zeta}}{\partial n^3} = D' \left(\bar{\gamma}_d + \frac{\bar{\xi}_d}{R} \right)$$

¹Ici la trace sur Γ de la fonction ζ et de ses dérivées normales $\frac{\partial^i \zeta}{\partial n^i}$, pour $i=1...3$.

où la quantité D' définie dans (2.10) représente l'inverse du module de rigidité à la flexion de la plaque. Pour simplifier les notations dans la suite, Nous posons

$$(3.4) \quad \chi_d = \mu_d - D' \bar{\xi}_d$$

$$(3.5) \quad \Phi_d = \phi_d + D' \left(\bar{\gamma}_d + \frac{\bar{\xi}_d}{R} \right)$$

où les données μ_d et ϕ_d fixées sur la partie Γ_d sont définies par les relations (2.10), (2.11) et (2.12). Compte tenu de (3.4) et (3.5), pour des données compatibles φ_d , ψ_d , χ_d et Φ_d fixées sur la partie Γ_d et représentant respectivement la trace, la dérivée normale, la trace d'ordre deux et la trace d'ordre trois de la solution \bar{u} (elle représente la flèche) du problème (3.2), nous allons **rechercher** ses quatre **traces** \bar{u} , $\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}$, $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ sur tout le bord du domaine, en considérant que \bar{u} est solution du **problème modèle** de Cauchy suivant associé à l'opérateur biharmonique

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 \bar{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \chi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = \Phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Le problème (3.6) constitue la formulation du problème de Cauchy (2.12) qui va faire l'objet de l'étude mathématique que nous allons développer dans la suite du chapitre. Notons d'abord quelques remarques.

Remarque 3.1 *Le moment de flexion ξ_d et l'effort tranchant γ_d fixés sur la partie Γ_d du problème (φ) n'apparaissent pas de façon explicite dans le problème (3.6) mais interviennent dans les données χ_d et Φ_d fixées sur la partie Γ_d via les égalités (3.4), (3.5), (2.10) et (2.11).*

Remarque 3.2 *Dans le changement de fonction inconnue, nous aurions pu choisir une plaque simplement posée sur Γ et qui subit un champ de forces de volume de densité f , ce qui se serait traduit dans (3.1) par les conditions aux limites de déplacement transverse et de moment nuls :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{\zeta} & = 0 \quad \text{sur } \Gamma \\ D \left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial n^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial n} \right) & = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. .$$

Compte tenu des relations (2.8) et (2.9), si on notait $\bar{\xi}_d$ et $\bar{\gamma}_d$ respectivement le moment de flexion et l'effort tranchant de la plaque mesurés sur la portion Γ_d de Γ , alors nous aurions obtenu le problème (3.6) mais avec $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \mu_d + \frac{\nu}{R} \psi_d$ et $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = \phi_d + D' \bar{\gamma}_d - \frac{(\nu+1)}{R^2} \psi_d + (2 - \nu) \frac{\partial^2 \psi_d}{\partial \tau^2}$.

3.3 Choix des espaces fonctionnels

L'espace $\mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega)$ dans lequel on considère la solution est

$$(3.7) \quad \mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega) = \{u \in \mathbf{H}^2(\Omega) \ / \ \Delta^2 u = 0\} .$$

C'est un sous-espace fermé de

$$(3.8) \quad \mathcal{H}^2(\Delta^2, \Omega) = \{u \in \mathbf{H}^2(\Omega) \ / \ \Delta^2 u \in L^2(\Omega)\}$$

qui est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^2(\Delta^2, \Omega)}$ définie par

$$(3.9) \quad \|u\|_{\mathcal{H}^2(\Delta^2, \Omega)}^2 = \|u\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 + \|\Delta^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

D'après Lions-Magenes [52], comme l'opérateur bilaplacien est élliptique d'ordre quatre, on peut lui adjoindre un système normal de quatre opérateurs frontières. Pour l'espace $\mathcal{H}^2(\Delta^2, \Omega)$ ces opérateurs frontières sont des éléments de l'espace

$$(3.10) \quad X(\Gamma) = \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma) .$$

avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X(\Gamma)}$ et la norme $\|\cdot\|_{X(\Gamma)}$.

$\mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega)$ étant un sous-espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^2(\Delta^2, \Omega)$, muni du produit scalaire induit, devient lui aussi un espace de Hilbert. On peut ainsi définir l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ des quadruplets de traces compatibles de manière suivante :

$$(3.11) \quad \mathbf{H}(\Gamma) = \left\{ \kappa = (\varphi, \psi, \chi, \Phi) \in X(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } \right. \\ \left. u \in \mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega) \text{ et } \left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} \right)_\Gamma = (\varphi, \psi, \chi, \Phi) \right\} .$$

Il est constitué des éléments de $X(\Gamma)$, représentant les quadruplets $(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3})$ des traces des éléments de $\mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega)$. Soient κ et κ' deux éléments de $\mathbf{H}(\Gamma)$ tels que $\kappa = (\varphi, \psi, \chi, \Phi)$ et $\kappa' = (\varphi', \psi', \chi', \Phi')$. Avec le produit scalaire

$$\langle \kappa, \kappa' \rangle_\Gamma = \langle \varphi, \varphi' \rangle_{3/2, \Gamma} + \langle \psi, \psi' \rangle_{1/2, \Gamma} + \langle \chi, \chi' \rangle_{-1/2, \Gamma} + \langle \Phi, \Phi' \rangle_{-3/2, \Gamma}$$

induit par $X(\Gamma)$ et $\|\cdot\|_\Gamma$ la norme associée à ce produit scalaire, $\mathbf{H}(\Gamma)$ comme sous-espace fermé devient un espace de Hilbert.

Lorsqu'on restreint à Γ_d les éléments de $X(\Gamma)$, on peut également définir l'espace

$$(3.12) \quad X(\Gamma_d) = \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$$

muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X(\Gamma_d)}$ et de la norme $\| \cdot \|_{X(\Gamma_d)}$. On peut aussi définir l'espace $\mathbf{H}(\Gamma_d)$ des quadruplets de données compatibles de la façon suivante :

$$(3.13) \quad \mathbf{H}(\Gamma_d) = \left\{ \kappa_d = (\varphi_d, \psi_d, \chi_d, \Phi_d) \in X(\Gamma_d) \text{ tel qu'il existe} \right. \\ \left. u \in \mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega) \text{ avec } \left(u, \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3} \right)_{\Gamma_d} = (\varphi_d, \psi_d, \chi_d, \Phi_d) \right\}$$

ou de manière équivalente

$$(3.14) \quad \mathbf{H}(\Gamma_d) = \left\{ \kappa_d = (\varphi_d, \psi_d, \chi_d, \Phi_d) \in X(\Gamma_d) \right. \\ \left. \text{tel qu'il existe } \kappa \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ avec } \kappa|_{\Gamma_d} = \kappa_d \right\}$$

avec le produit scalaire ci-dessous induit par $X(\Gamma_d)$ et $\| \cdot \|_{\Gamma_d}$ la norme associée

$$\langle \kappa_d, \kappa'_d \rangle_{\Gamma_d} = \langle \varphi_d, \varphi'_d \rangle_{3/2, \Gamma} + \langle \psi_d, \psi'_d \rangle_{1/2, \Gamma_d} + \langle \chi_d, \chi'_d \rangle_{-1/2, \Gamma_d} + \langle \Phi_d, \Phi'_d \rangle_{-3/2, \Gamma_d} .$$

3.4 Formulation équivalente à (3.6)

Sous la donnée du quadruplet compatible κ_d , en tant qu'élément de $\mathbf{H}(\Gamma_d)$, le problème de Cauchy (3.6) précédent qui consiste à retrouver les traces sur Γ d'une fonction inconnue biharmonique sur Ω , peut alors se formuler de façon équivalente sous la forme :

$$(3.15) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{U} = (\bar{u}|_{\Gamma}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}|_{\Gamma}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}|_{\Gamma}, \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}|_{\Gamma}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{U} = \kappa_d \text{ sur } \mathbf{H}(\Gamma_d) \end{cases} .$$

D'après le théorème de Cauchy-Kowalewsky, le problème inverse (3.6) admet une unique solution analytique sur un voisinage de Γ_d . En vertu du théorème de Holmgren, le problème (3.15) possède une et une seule solution qui correspond à la solution du problème de Cauchy (3.6). Cependant, cette solution ne dépend pas continûment de la donnée κ_d . Le problème (3.15) est donc un problème mal posé au sens d'Hadamard. La résolution de tels problèmes utilise généralement des techniques de régularisation qui suggèrent de perturber l'opérateur afin d'obtenir un problème stable vis à vis des données.

3.5 Régularisation évanescence

Dans l'approche introduite dans [53] pour le laplacien et que nous adaptons ici au cas du bilaplacien, nous agissons au contraire sur les données, en partant du fait

que les appareils de mesure dont elles sont issues comportent souvent des erreurs d'incertitudes et que par conséquent ces données ne peuvent pas être exactes. Dans cette optique, une fois une mesure fixée, nous nous proposons de déterminer la fonction vérifiant l'équilibre et qui se rapproche au mieux de la donnée κ_d . Nous obtenons alors pour le problème (3.6), le problème d'optimisation ci-après :

$$(3.16) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{U} = (\bar{u}|_{\Gamma}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}|_{\Gamma}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}|_{\Gamma}, \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}|_{\Gamma}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J(\mathbf{U}) \leq J(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma) \end{cases}$$

$$\text{avec} \quad J(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma).$$

Le problème (3.16) reste encore mal posé car nous pouvons toujours trouver une solution \mathbf{U} dont la restriction à Γ_d est aussi proche que possible de la donnée κ_d provoquant une solution non stable sur la partie complémentaire Γ_i . Pour se défaire de cette instabilité, nous introduisons un terme de contrôle dans la fonctionnelle J de sorte que cette dernière s'écrive :

$$J_c(\mathbf{V}) = \|\mathbf{V} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{V} - \theta\|_{\Gamma}^2 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma)$$

où c est un réel strictement positif et θ un quadruplet de $X(\Gamma)$. Le problème d'optimisation précédent revient à minimiser la fonctionnelle J_c sur $\mathbf{H}(\Gamma)$ et s'écrit

$$(3.17) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{U} = (\bar{u}|_{\Gamma}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}|_{\Gamma}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}|_{\Gamma}, \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}|_{\Gamma}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c(\mathbf{U}) \leq J_c(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma) \end{cases}.$$

Comme J_c est strictement convexe et tend vers l'infini lorsque $\|\mathbf{V}\|_{\Gamma}$ tend vers l'infini, il existe une unique ⁽²⁾ solution \mathbf{U} au problème (3.17) qui se caractérise par l'équation

$$(3.18) \quad \frac{d}{d\lambda} J_c(\mathbf{U} + \lambda \mathbf{V})|_{\lambda=0} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma)$$

où λ est un paramètre réel. La relation (3.18) entraîne que la solution \mathbf{U} de (3.17) satisfait la relation

$$(3.19) \quad \langle \mathbf{U} - \kappa_d, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{U} - \theta, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma).$$

Le problème d'optimisation (3.17) est bien posé au sens d'Hadamard et la solution, bien que dépendant continûment de la donnée κ_d , dépend également du

²Cela provient du théorème de minimisation des fonctionnelles convexes cf. par exemple [54] ou [55]

coefficient de régularisation et de θ . Afin d'éviter cette dépendance par rapport à c et à θ , l'idée consiste à faire apparaître la solution du problème de Cauchy (3.15) ou bien du problème d'optimisation (3.16) comme la limite des solutions de problèmes d'optimisation du type (3.17). Ceci conduit à considérer la suite itérative suivante :

soient $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés,

$$(3.20) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{u}_{k+1} \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{u}_{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Gamma) \end{cases}$$

avec $J_c^k(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{u}_k\|_{\Gamma}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Gamma)$.

La valeur de θ dans (3.19) est remplacée par la solution \mathbf{u}_k obtenue à l'itération précédente sur toute la frontière du domaine. D'après l'équation (3.19), la solution optimale \mathbf{u}_{k+1} est caractérisée par l'équation :

$$(3.21) \quad \langle \mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Gamma).$$

Dans ce qui suit, nous allons donner un résultat de convergence faible de la suite des solutions optimales du processus (3.20). Ensuite, nous allons établir un résultat de convergence forte. Pour commencer, nous énonçons le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Pour tout entier naturel n , la suite $(\mathbf{u}_k)_k$ constituée des éléments optimaux vérifie :*

$$\|\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_e\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_e\|_{\Gamma}^2$$

où \mathbf{u}_e est la solution compatible du problème de Cauchy (3.15).

Preuve On a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_e\|_{\Gamma}^2 &= \langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_e, \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k + \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_e \rangle_{\Gamma} \\ &= \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_{\Gamma}^2 + \|\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_e\|_{\Gamma}^2 + 2 \langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_e \rangle_{\Gamma}. \end{aligned}$$

Puisque $(\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_e) \in \mathbf{H}(\Gamma)$, il vient de l'égalité (3.21) que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_e \rangle_{\Gamma} &= -\frac{1}{c} \langle \mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{u}_k - \kappa_d \rangle_{\Gamma_d}, \text{ car } \mathbf{u}_e|_{\Gamma_d} = \kappa_d \\ &= -\frac{1}{c} \langle \mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d \rangle_{\Gamma_d} \\ &= -\frac{1}{c} \|\mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + \frac{1}{c} \langle \mathbf{u}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k \rangle_{\Gamma_d}. \end{aligned}$$

A nouveau, de l'équation obtenue en (3.21) avec $(\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \in \mathbf{H}(\Gamma)$

$$(3.22) \quad \langle \mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k \rangle_{\Gamma_d} = -c \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\|_{\Gamma}^2$$

soit

$$\langle \mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k, \mathbf{U}_k - \mathbf{U}_e \rangle_{\Gamma} = -\frac{1}{c} \|\mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 - \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\|_{\Gamma}^2.$$

Par conséquent, en injectant la relation ci-dessus dans la dernière expression précédente de $\|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$,

$$\|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 + \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \|\mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2.$$

En sommant enfin les deux membres de cette égalité, pour $0 \leq k \leq n$

$$\sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 = \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 = \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2.$$

Et comme

$$\sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 = \sum_{k=1}^{n+1} \|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2$$

l'égalité du lemme 3.1 se déduit aisément.

Théorème 3.1 Lorsque $\kappa_d = (\varphi_d, \psi_d, \chi_d, \Phi_d)$ est un quadruplet de données compatibles, c'est à dire un élément de $\mathbf{H}(\Gamma_d)$, associé à la solution compatible \mathbf{U}_e de (3.15), alors la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ définie par l'algorithme itératif (3.20) est telle que :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \kappa_d \quad \text{dans } \mathbf{H}(\Gamma_d) \quad \text{au sens fort} \\ \mathbf{U}_k &\xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{U}_e \quad \text{dans } \mathbf{H}(\Gamma) \quad \text{au sens faible} \end{aligned}$$

Preuve Convergence forte de $(\mathbf{U}_k)_k$ vers κ_d dans $\mathbf{H}(\Gamma_d)$

Du lemme 3.1 on déduit que la série de terme général $\|\mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2$ est bornée, et donc que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 = 0.$$

Nous concluons alors que la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ constituée des éléments optimaux converge fortement vers κ_d sur $\mathbf{H}(\Gamma_d)$.

Convergence faible d'une suite extraite de $(\mathbf{U}_k)_k$ vers \mathbf{U}_L dans $\mathbf{H}(\Gamma)$

Du lemme 3.1, on tire également que la suite $(\|\mathbf{U}_k - \mathbf{U}_e\|_\Gamma^2)$ est bornée, indépendamment de k , dans $\mathbf{H}(\Gamma)$. La suite $(\mathbf{U}_k)_k$ l'est donc aussi et comme $\mathbf{H}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert, elle possède une sous-suite $(\mathbf{U}_{k_\nu})_\nu$ qui converge faiblement dans $\mathbf{H}(\Gamma)$. Ainsi, il existe une limite \mathbf{U}_L dans $\mathbf{H}(\Gamma)$ telle que

$$\mathbf{U}_{k_\nu} \xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} \mathbf{U}_L \quad \text{dans } \mathbf{H}(\Gamma) \quad \text{faible.}$$

Convergence faible de la sous-suite de $(\mathbf{U}_k)_k$ vers \mathbf{U}_e dans $\mathbf{H}(\Gamma)$

Cela revient à montrer que $\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_e$ sur Γ .

Comme nous savons déjà par ce qui précède que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{k_\nu} &\xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} \kappa_d \quad \text{dans } \mathbf{H}(\Gamma_d) \quad (\text{car } \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 = 0) \\ \mathbf{U}_{k_\nu} &\xrightarrow[\nu \rightarrow \infty]{} \mathbf{U}_L \quad \text{dans } \mathbf{H}(\Gamma) \quad \text{faible} \end{aligned}$$

par unicité de la limite sur $\mathbf{H}(\Gamma_d)$, il s'ensuit que

$$\mathbf{U}_L|_{\Gamma_d} = \mathbf{U}_e|_{\Gamma_d} \quad \text{sur } \mathbf{H}(\Gamma_d) \quad (\text{car } \mathbf{U}_e|_{\Gamma_d} = \kappa_d).$$

Le théorème d'unicité du prolongement de Holmgren pour une fonction biharmonique montre alors que $\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_e$ sur tout le bord Γ .

Convergence faible de toute la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ vers \mathbf{U}_e dans $\mathbf{H}(\Gamma)$

Puisque la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ est bornée dans l'espace de Hilbert $\mathbf{H}(\Gamma)$ qui est séparable (car sous-espace de l'espace séparable $X(\Gamma)$), elle est dans un compact métrisable pour la topologie faible de $\mathbf{H}(\Gamma)$ et comme \mathbf{U}_e est la seule valeur d'adhérence (car unique solution du problème inverse (3.15)) de cette suite, nous concluons que

$$\mathbf{U}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbf{U}_e \quad \text{dans } \mathbf{H}(\Gamma) \quad \text{faible.}$$

Finalement, toute la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ converge faiblement vers \mathbf{U}_e dans $\mathbf{H}(\Gamma)$.

Remarque 3.3 Dans [11, 15], il existe un résultat de convergence semblable au théorème 3.1 mais la démonstration développée ici est légèrement différente.

Corollaire 3.1 Les suites formées des deux premières composantes de \mathbf{U}_k (c'est à dire la trace de \mathbf{u}_k et la trace de sa dérivée normale $\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{n}}$) convergent fortement vers les deux premières composantes de \mathbf{U}_e dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma) \times \mathbf{L}^q(\Gamma)$ avec $0 < \alpha < 1$ et $q < \infty$ dans le cas 2D.

Preuve La suite (\mathbf{u}_k) est bornée dans l'espace de Hilbert $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$, elle admet donc une sous-suite (\mathbf{u}_{k_p}) faiblement convergente. Il existe donc \mathbf{u}_1 dans $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$ tel que

$$\mathbf{u}_{k_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{u}_1 \quad \text{dans } \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma) \quad \text{faible}$$

or, comme (\mathbf{u}_{k_p}) est une suite extraite de (\mathbf{u}_k) et que (\mathbf{U}_k) converge fortement vers \mathbf{U}_e dans $\mathbf{H}(\Gamma_d)$, nous déduisons que

$$\mathbf{u}_{k_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{u}_e \quad \text{dans } \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_d).$$

Un raisonnement similaire à celui utilisé précédemment pour montrer l'égalité entre \mathbf{U}_L et \mathbf{U}_e entraîne que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_e$ dans un compact métrisable pour la topologie faible de $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$. Puisque \mathbf{u}_e est unique comme première composante de l'unique solution \mathbf{U}_e du problème de Cauchy (3.15), \mathbf{u}_e est la seule valeur d'adhérence de (\mathbf{u}_k) . Donc

$$\mathbf{u}_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_e \quad \text{dans } \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma) \quad \text{faible}.$$

Comme, en dimension 2, l'inclusion de $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$ dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$ est compacte ⁽³⁾ pour $\alpha < 1$, il vient que

$$\mathbf{u}_{k_p} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{u}_e \quad \text{dans } \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma).$$

Puisque la sous-suite (\mathbf{u}_{k_p}) converge fortement vers \mathbf{u}_e dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$, \mathbf{u}_e est donc une valeur d'adhérence de la suite (\mathbf{u}_k) dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$. Comme \mathbf{u}_e est unique, (\mathbf{u}_k) converge alors vers \mathbf{u}_e dans $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$.

Un raisonnement analogue conduit à la convergence de $(\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{n}})$ vers $\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \mathbf{n}}$ dans $\mathbf{L}^q(\Gamma)$ car, en dimension 2, l'inclusion de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ dans $\mathbf{L}^q(\Gamma)$ est compacte pour $q < \infty$.

3.6 Le problème (3.17) comme problème de point fixe

Dans le paragraphe 3.5, nous rappelons que nous avons à résoudre le problème d'optimisation (3.17) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{U} = (u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma}, \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{\Gamma}, \frac{\partial^3 u}{\partial n^3}|_{\Gamma}) \in \mathbf{H}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c(\mathbf{U}) \leq J_c(\mathbf{V}), \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma) \end{array} \right.$$

³Cf. Adams [56]

avec $J_c(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \theta\|_{\Gamma}^2$.

En remplaçant θ par Φ dans l'expression de J_c , soit \mathbb{T} l'opérateur

$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{T} : \mathbf{H}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}(\Gamma) \\ \Phi \mapsto \mathbf{U}_{\Phi} \end{array} \right.$$

pour lequel \mathbf{U}_{Φ} est la solution du problème d'optimisation (3.17) pour la donnée κ_d sur Γ_d et pour Φ donné dans $\mathbf{H}(\Gamma)$. Le résultat d'existence et d'unicité d'un point fixe pour \mathbb{T} , établi dans [11], s'étend ici au cas du bilaplacien.

Théorème 3.2 *Si κ_d est un élément de $H(\Gamma_d)$, c'est à dire que κ_d est un quadruplet de données compatibles, alors l'opérateur \mathbb{T} admet un unique point fixe \mathbf{U}_e qui est l'unique solution du problème de Cauchy (3.15).*

Preuve *Existence d'un point fixe pour \mathbb{T}*

Comme $\kappa_d \in \mathbf{H}(\Gamma)$ et que \mathbf{U}_e est solution de (3.15), $\mathbf{U}_e|_{\Gamma_d} = \kappa_d$.

$$\begin{aligned} J_c(\mathbf{U}_e) &= \|\mathbf{U}_e|_{\Gamma_d} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_e\|_{\Gamma}^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

\mathbf{U}_e est donc solution de (3.17). Par définition de \mathbb{T} on a

$$\mathbb{T}(\mathbf{U}_e) = \mathbf{U}_e$$

\mathbf{U}_e est donc un point fixe de \mathbb{T} .

Unicité du point fixe pour \mathbb{T}

Soit \mathbf{U}_{δ} un autre point fixe de \mathbb{T} , \mathbf{U}_{δ} est solution de (3.17) et donc

$$\|\mathbf{U}_{\delta} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{U}_{\delta} - \mathbf{U}_{\delta}\|_{\Gamma}^2 \leq \|\mathbf{v} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{U}_{\delta}\|_{\Gamma}^2, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\Gamma)$$

Posant $\mathbf{v} = (1 - \lambda)\mathbf{U}_e + \lambda\mathbf{U}_{\delta}$, $\forall \lambda \in]0, 1[$, alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_{\delta} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 &\leq \|(1 - \lambda)\kappa_d + \lambda\mathbf{U}_{\delta} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|(1 - \lambda)(\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_{\delta})\|_{\Gamma}^2 \\ \|\mathbf{U}_{\delta} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 &\leq \lambda^2\|\mathbf{U}_{\delta} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 + c(1 - \lambda)^2\|\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_{\delta}\|_{\Gamma}^2 \end{aligned}$$

par suite, puisque $0 < \lambda < 1$, on a

$$\|\mathbf{U}_{\delta} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 \leq c \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \|\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_{\delta}\|_{\Gamma}^2.$$

Dans cette dernière inégalité, en passant à la limite lorsque λ tend vers 1, nous obtenons $\|\mathbf{U}_\delta|_{\Gamma_d} - \kappa_d\|_{\Gamma_d}^2 = 0$. Par conséquent $\mathbf{U}_\delta|_{\Gamma_d} = \kappa_d$, c'est à dire que

$$\mathbf{U}_\delta|_{\Gamma_d} = \mathbf{U}_e|_{\Gamma_d}.$$

Le théorème d'unicité du prolongement de Holmgren montre alors que $\mathbf{U}_\delta = \mathbf{U}_e$ sur $\mathbf{H}(\Gamma)$. Donc l'unique point fixe de \mathbb{T} est bien la solution du problème de Cauchy (3.15).

Remarque 3.4 Une conséquence immédiate du théorème 3.2 est que, comme dans A.Cimetère et al. [11], la solution du problème de Cauchy (3.15) en tant qu'unique point fixe de \mathbb{T} prolonge la donnée compatible κ_d sur toute la frontière du domaine.

Théorème 3.3 Soit κ_d un quadruplet de données compatibles de $\mathbf{H}(\Gamma_d)$, alors la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ définie par l'algorithme itératif (3.11) converge fortement vers l'unique point fixe de \mathbb{T} dans $\mathbf{H}(\Gamma_d)$ et faiblement dans $\mathbf{H}(\Gamma)$.

Preuve Le théorème 3.1 indique que la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ converge fortement vers la solution \mathbf{U}_e du problème de Cauchy (3.15). Or, il vient du théorème 3.2 que \mathbf{U}_e est l'unique point fixe de \mathbb{T} . Ce qui entraîne le théorème 3.3.

3.7 Description de l'algorithme de point fixe

D'après le théorème 3.1, la suite $(\mathbf{U}_k)_k$ définie par l'algorithme itératif (3.20) converge faiblement vers la solution compatible \mathbf{U}_e du problème de Cauchy (3.15). Compte tenu du théorème 3.2, nous pouvons considérer comme dans Delvare [15] la suite récurrente qui vérifie :

- Pour une donnée initiale \mathbf{U}_0 prise dans $\mathbf{H}(\Gamma)$
- La solution optimale $\mathbf{U}_{k+1} = \mathbb{T}(\mathbf{U}_k)$ obtenue à la k^e itération (après avoir résolu le problème (3.20) au sens des moindres carrés), est caractérisée par l'équation

$$(3.12) \quad \langle \mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k, \mathbf{V} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H}(\Gamma).$$

En particulier pour $\mathbf{V} = (\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k) \in \mathbf{H}(\Gamma)$, nous déduisons avec (3.22) que toute solution optimale est telle que

$$\langle \mathbf{U}_{k+1} - \kappa_d, \mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k \rangle_{\Gamma_d} < 0.$$

- Lorsque le produit scalaire précédent est positif, le point fixe que nous retenons est la solution optimale obtenue à l'itération précédente.

3.8 Cadre numérique abstrait

En utilisant la méthode des éléments finis, nous allons proposer une résolution approchée du problème inverse (3.6) ou (3.15) dans un espace d'approximation de l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ des quadruplets compatibles. Cet espace d'approximation sera noté $\mathcal{H}_h(\Gamma)$. Nous montrerons aussi la convergence des solutions optimales du processus itératif régularisé vers la solution du problème modèle de Cauchy discret que nous expliciterons ultérieurement.

3.8.1 Modélisation par éléments finis

Soit u supposée dans $\mathbf{H}^4(\Omega)$, après avoir multiplié l'équation

$$\Delta^2 u = 0$$

du problème (3.6) par une fonction test v , la formule de Stokes (cf. par exemple [44] ou [57]) donne

$$(3.23) \quad \int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Gamma} \left(\Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial \Delta u}{\partial n} v \right) d\sigma \quad \forall v \in \mathbf{H}^2(\Omega).$$

Comme l'expression de Δu dans la relation (2.3) et l'écriture de $\partial \Delta u / \partial n$ dans (2.7) donnent sur Γ

$$\begin{aligned} \Delta u \frac{\partial v}{\partial n} - \frac{\partial \Delta u}{\partial n} v &= \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \\ &\quad - \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial n^3} + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial n^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} \right) \right) v \end{aligned}$$

Compte tenu du problème de Cauchy (3.6), de l'égalité ci-dessous et de la relation (3.23), nous pouvons de **nouveau définir** l'espace $\mathbf{H}(\Gamma)$ des quadruplets compatibles de manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\Gamma) = \left\{ \kappa = (\varphi, \psi, \chi, \Phi) \in \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma) \right. \\ \left. \begin{aligned} &\text{tel qu'il existe } u \in \mathbf{H}^2(\Omega) \quad u|_{\Gamma} = \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \psi \text{ et} \\ &\int_{\Omega} \Delta u \Delta v \, dx = \int_{\Gamma} \left(\chi + \frac{\psi}{R} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \left(\Phi + \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right] + \frac{\chi}{R} - \frac{\psi}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right) v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathbf{H}^2(\Omega) \right\} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

3.8.2 Espaces d'approximation

Comme à la section 5.2.1, l'ouvert Ω est supposé polygonal et nous considérons une famille régulière de triangulations $(\mathcal{T}_{ih})_i$ qui satisfait les propriétés habituelles (1),(2),(3) et (5.6) du paragraphe 5.2.1. Le paramètre h désigne le pas du maillage à l'intérieur et sur le bord du domaine. Dans ce qui suit, $\varphi_h, \psi_h, \chi_h$ et Φ_h représentent respectivement les approximations des données φ, ψ, χ et Φ du problème (3.6) ou (3.15) et \bar{u}_h représente la solution approchée de la solution \bar{u} du problème (3.6). Cette solution approchée est obtenue dans l'**espace d'approximation** $\mathcal{X}_h(\Omega)$ ⁽⁴⁾ de $H^2(\Omega)$ défini par :

$$(3.24) \quad \mathcal{X}_h(\Omega) = \{ \bar{u}_h \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) / \bar{u}_h|_{\mathcal{K}_{ih}^j} \in \mathcal{P}_3, \quad \forall i \quad \text{et} \quad \forall j = 1, \dots, 3 \}$$

où chaque triangle \mathcal{T}_{ih} est découpé en trois triangles $\mathcal{K}_{ih}^j, j = 1, \dots, 3$, en connectant ses trois sommets en son centre de gravité.

Nous nous proposons d'obtenir une **approximation** \mathbf{U}_h de la solution \mathbf{U} du problème (3.15) dans un sous-espace de dimension finie que nous définirons dans la suite et que nous noterons $\mathcal{H}_h(\Gamma)$. Sous les conditions (5.9) et (5.10), nous notons d'une part $\mathcal{H}_h^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \mathcal{H}_h^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}_h^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ les **espaces d'approximation** respectivement des espaces $H^{3/2}(\Gamma), H^{1/2}(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma), H^{-3/2}(\Gamma)$ avec

$$(3.25) \quad \mathcal{H}_h^{\frac{3}{2}}(\Gamma) = \{ \varphi_h / \varphi_h \text{ soit cubique sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \}$$

$$(3.26) \quad \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{ \psi_h / \psi_h \text{ soit de degré deux sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \}$$

$$(3.27) \quad \mathcal{H}_h^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{ \chi_h / \chi_h \text{ soit affine sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \}$$

$$(3.28) \quad \mathcal{H}_h^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) = \{ \Phi_h / \Phi_h \text{ soit constante sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \}$$

et nous notons d'autre part $\mathcal{H}_h^{\frac{3}{2}}(\Gamma_d), \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma_d), \mathcal{H}_h^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_d), \mathcal{H}_h^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_d)$ les **espaces d'approximation** respectivement des espaces $H^{3/2}(\Gamma_d), H^{1/2}(\Gamma_d), H^{-1/2}(\Gamma_d), H^{-3/2}(\Gamma_d)$. Dans la suite, les **notations** $\bar{u}_h, \bar{u}'_h, \bar{u}''_h$ et \bar{u}'''_h désignerons les traces approchées respectivement des traces $\bar{u}, \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}, \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ du problème (3.6) ou (3.15). Compte tenu des relations (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16), nous pouvons définir l'**espace d'approximation** $\mathcal{H}_h(\Gamma)$ de $H(\Gamma)$ de manière suivante :

⁴C'est l'élément fini de Hsiegh-Clough-Tocher cf. J-L.Lions [58] ou Ciarlet [57, 59]

$$\mathcal{H}_h(\Gamma) = \left\{ \kappa_h = (\varphi_h, \psi_h, \chi_h, \Phi_h) \in \mathcal{H}_h^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \right. \\ \left. \begin{array}{l} \text{tel qu'il existe } \bar{u}_h \in \mathcal{X}_h(\Omega) \quad \bar{u}_h|_\Gamma = \varphi_h, \quad \bar{u}'_h|_\Gamma = \psi_h \quad \text{avec} \\ \int_\Omega \Delta \bar{u}_h \Delta v_h dx = \int_\Gamma (\chi_h + \frac{\psi_h}{R} + \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial \tau^2}) v'_h d\sigma \\ - \int_\Gamma (\Phi_h + \frac{\partial}{\partial \tau} [\frac{\partial \psi_h}{\partial \tau} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_h}{\partial \tau}] + \frac{\chi_h}{R} - \frac{\psi_h}{R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial \tau^2}) v_h d\sigma \quad \forall v_h \in \mathcal{X}_h(\Omega) \end{array} \right\}$$

Le quadruplet κ_h représente une approximation de κ dans $\mathcal{H}_h(\Gamma)$. Soient κ_{d_h} la donnée compatible approchée sur Γ_d de la donnée κ_d et $\mathcal{H}_h(\Gamma_d)$ l'espace des restrictions à Γ_d des éléments de $\mathcal{H}_h(\Gamma)$, le problème inverse (3.6) qui équivaut au problème inverse (3.15) s'écrit sous forme approchée

$$(3.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{U}_h = (\bar{u}_h|_\Gamma, \bar{u}'_h|_\Gamma, \bar{u}''_h|_\Gamma, \bar{u}'''_h|_\Gamma) \in \mathcal{H}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{U}_h = \kappa_{d_h} \quad \text{sur } \mathcal{H}_h(\Gamma_d) \end{array} \right.$$

3.8.3 Régularisation en dimension finie

La méthode de régularisation évanescence de la section 3.5 nous a amené à considérer la suite itérative de type (3.20) constituée de problèmes d'optimisation bien posés au sens d'Hadamard. Ci-dessous, nous utilisons la notation $\mathbf{U}_{h,k+1} = (u_{h,k+1}, u'_{h,k+1}, u''_{h,k+1}, u'''_{h,k+1})$ pour désigner une solution approchée de $\mathbf{U}_{k+1} = (u_{k+1}, u'_{k+1}, u''_{k+1}, u'''_{k+1})$ obtenue à la $(k+1)^e$ étape du processus itératif. En dimension finie, le **processus itératif régularisé** s'écrit

soient $\mathbf{U}_{h,0} \in \mathcal{H}_h(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés,

$$(3.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{U}_{h,k+1} \in \mathcal{H}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{J}_c^k(\mathbf{U}_{h,k+1}) \leq \mathbf{J}_c^k(\mathbf{V}_h) \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{H}_h(\Gamma) . \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{J}_c^k(\mathbf{V}_h) = \|\mathbf{V}_h - \kappa_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c \|\mathbf{V}_h - \mathbf{U}_{h,k}\|_\Gamma^2$.

3.8.4 Le problème de Cauchy discret

Le problème de Cauchy discret que nous considérons consiste à trouver dans $\mathcal{H}_h(\Gamma)$ les éléments qui concordent au mieux avec les N_d données observées sur la partie Γ_d . Soit N la dimension de l'espace $\mathcal{H}_h(\Gamma)$. Si N_d est strictement supérieur à N , cette solution ne peut être obtenue qu'au sens des moindres carrés. Si tel

n'est pas le cas, il y a une infinité de solutions. Ces solutions sont définies à un élément du noyau près $\mathcal{N}_h(\Gamma)$ donné par

$$(3.31) \quad \mathcal{N}_h(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v}_h = (v_h, v'_h, v''_h, v'''_h) \in \mathcal{H}_h(\Gamma) \text{ tel que } \mathbf{v}_h|_{\Gamma_d} = 0 \right\}.$$

Notons $\mathcal{N}_h^\perp(\Gamma)$ l'orthogonal de $\mathcal{N}_h(\Gamma)$ dans $\mathcal{H}_h(\Gamma)$, on a

$$(3.32) \quad \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma) = \left\{ \mathbf{u}_h \in \mathcal{H}_h(\Gamma) / \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{N}_h(\Gamma) \right\}.$$

Comme dans [11, 53], on introduit le problème de Cauchy discret :

$$(3.33) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{u}_{h,e} \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma) \text{ tel que} \\ \langle \mathbf{u}_{h,e} - \kappa_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma) \end{cases}.$$

Il possède une et une seule solution.

3.8.5 Convergence du processus régularisé

Cette section vise, au moyen d'une hypothèse sur la donnée initiale de l'algorithme régularisé (3.30) et une hypothèse de compatibilité entre les données et la solution du problème (3.33), à montrer la convergence de la suite des solutions optimales du processus itératif (3.30) vers la solution du problème de Cauchy (3.33). Avant tout, nous commençons par énoncer deux lemmes.

Lemme 3.2 *Pour $h > 0$ fixé, soient $(\mathbf{u}_{h,k})$ la suite des solutions optimales du processus itératif (3.30), $(\mathbf{c}_{h,k})$ la suite des composantes de $(\mathbf{u}_{h,k})$ dans $\mathcal{N}_h^\perp(\Gamma)$ et $(\mathbf{c}'_{h,k})$ la suite des composantes de $(\mathbf{u}_{h,k})$ dans $\mathcal{N}_h(\Gamma)$. Si on suppose dans (3.30) que $\mathbf{u}_{h,0} = 0$, alors on a la propriété suivante :*

La suite $(\mathbf{c}'_{h,k})$ est nulle, ou encore la suite $(\mathbf{u}_{h,k})$ est dans $\mathcal{N}_h^\perp(\Gamma)$.

Preuve Grâce à l'équation obtenue en (3.21), nous déduisons qu'à la $(k+1)^e$ étape de l'algorithme itératif régularisé (3.30) et pour h fixé, la solution optimale vérifie la relation

$$(3.34) \quad \langle \mathbf{u}_{h,k+1} - \kappa_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{u}_{h,k+1} - \mathbf{u}_{h,k}, \mathbf{v}_h \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{H}_h(\Gamma).$$

Utilisant les décompositions orthogonales suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_h &= \mathbf{D}_h + \mathbf{D}'_h && \text{avec } \mathbf{D}_h \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}'_h \in \mathcal{N}_h(\Gamma) \\ \mathbf{u}_{h,k+1} &= \mathbf{c}_{h,k+1} + \mathbf{c}'_{h,k+1} && \text{avec } \mathbf{c}_{h,k+1} \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma) \quad \text{et} \quad \mathbf{c}'_{h,k+1} \in \mathcal{N}_h(\Gamma) \end{aligned}$$

la relation (3.34) se réécrit

$$(3.35) \quad \langle \mathbf{C}_{h,k+1} + \mathbf{C}'_{h,k+1} - \kappa_{d_h}, \mathbf{D}_h + \mathbf{D}'_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{C}_{h,k+1} - \mathbf{C}_{h,k} + \mathbf{C}'_{h,k+1} - \mathbf{C}'_{h,k}, \mathbf{D}_h + \mathbf{D}'_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{H}_h(\Gamma).$$

Par définition de $\mathcal{N}_h(\Gamma)$ on sait que $\mathbf{D}'_h = 0$ et $\mathbf{C}'_{h,k+1} = 0$ sur Γ_d . Ainsi, en développant le premier terme du premier membre de (3.35) on obtient

$$\langle \mathbf{C}_{h,k+1} + \mathbf{C}'_{h,k+1} - \kappa_{d_h}, \mathbf{D}_h + \mathbf{D}'_h \rangle_{\Gamma_d} = \langle \mathbf{C}_{h,k+1} - \kappa_{d_h}, \mathbf{D}_h \rangle_{\Gamma_d} \quad \forall \mathbf{D}_h \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma).$$

Compte tenu de la définition de $\mathcal{N}_h^\perp(\Gamma)$, en développant le second terme du premier membre de (3.35), il vient que

$$c \langle \mathbf{C}_{h,k+1} - \mathbf{C}_{h,k} + \mathbf{C}'_{h,k+1} - \mathbf{C}'_{h,k}, \mathbf{D}_h + \mathbf{D}'_h \rangle_{\Gamma} = c \langle \mathbf{C}_{h,k+1} - \mathbf{C}_{h,k}, \mathbf{D}_h \rangle_{\Gamma} + c \langle \mathbf{C}'_{h,k+1} - \mathbf{C}'_{h,k}, \mathbf{D}'_h \rangle_{\Gamma} \quad \forall \mathbf{D}_h \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma), \forall \mathbf{D}'_h \in \mathcal{N}_h(\Gamma).$$

Comme par ailleurs de la relation (3.34) on déduit que

$$\langle \mathbf{C}_{h,k+1} - \kappa_{d_h}, \mathbf{D}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{C}_{h,k+1} - \mathbf{C}_{h,k}, \mathbf{D}_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{D}_h \in \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma).$$

Puisque $c > 0$, la relation (3.35) fournit avec les égalités ci-dessus

$$(3.36) \quad \langle \mathbf{C}'_{h,k+1} - \mathbf{C}'_{h,k}, \mathbf{D}'_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{D}'_h \in \mathcal{N}_h(\Gamma).$$

Pour h fixé, la suite $(\mathbf{C}'_{h,k})$ est donc constante dans $\mathcal{N}_h(\Gamma)$ et on a

$$(3.37) \quad \mathbf{C}'_{h,k+1} = \mathbf{C}'_{h,k} = \dots = \mathbf{C}'_{h,0}.$$

Or, comme $\mathbf{U}_{h,0} = 0$, nécessairement on a $\mathbf{C}'_{h,0} = 0$. On tire donc de (3.37) que la suite $(\mathbf{C}'_{h,k})$ est nulle. En outre de (3.37) il découle que $\mathbf{C}'_{h,k+1} = 0$. Par conséquent, pour h fixé, il s'ensuit avec ce qui précède que

$$(3.38) \quad \mathbf{U}_{h,k+1} = \mathbf{C}_{h,k+1} \quad \text{dans } \mathcal{N}_h^\perp(\Gamma) \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

Ce qui prouve le lemme 3.2.

Le lemme 3.2 précédent utilise comme hypothèse principale $\mathbf{U}_{h,0} = 0$ dans l'algorithme itératif (3.30). Nous montrons ci-après un autre lemme qui tient compte d'une hypothèse de compatibilité entre les données et la solution du problème de Cauchy (3.33). Ce dernier est la variante du lemme 3.1 pour la dimension finie.

Lemme 3.3 *Pour $th > 0$ fixé et pour une donnée initiale de (3.30) qui vérifie $\mathbf{U}_{h,0} = 0$, si la solution $\mathbf{U}_{h,e}$ du problème de Cauchy (3.33) vérifie l'hypothèse de compatibilité $\mathbf{U}_{h,e} = \kappa_{d_h}$ sur Γ_d , alors la suite $(\mathbf{U}_{h,k})$ du lemme 3.2 satisfait pour tout entier naturel n*

$$\|\mathbf{U}_{h,n+1} - \mathbf{U}_{h,e}\|_{\Gamma}^2 + \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_{h,k+1} - \mathbf{U}_{h,k}\|_{\Gamma}^2 + \frac{2}{c} \sum_{k=0}^n \|\mathbf{U}_{h,k+1} - \kappa_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 = \|\mathbf{U}_{h,e}\|_{\Gamma}^2 .$$

Preuve *La preuve est similaire, aux notations près, à celle faite pour démontrer le lemme 3.1.*

Nous donnons maintenant le **résultat** de convergence du processus régularisé (3.30).

Théorème 3.4 *Pour $h > 0$ fixé, on suppose que $\mathbf{U}_{h,0} = 0$ dans (3.30). Si κ_{d_h} est un quadruplet de données compatibles associé à la solution $\mathbf{U}_{h,e}$ du problème de Cauchy (3.33), alors la suite $(\mathbf{U}_{h,k})$ définie par le processus itératif régularisé (3.30) converge vers $\mathbf{U}_{h,e}$.*

Preuve *Comme $\mathbf{U}_{h,0} = 0$, d'après le lemme 3.2, pour $h > 0$ fixé, la suite $(\mathbf{U}_{h,k})$ est dans $\mathcal{N}_h^+(\Gamma)$. Par ailleurs, compte tenu de l'égalité du lemme 3.3 on déduit que la série de terme général $\|\mathbf{U}_{h,k} - \kappa_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2$ est bornée. Par conséquent*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_{h,k} - \kappa_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 = 0 .$$

L'hypothèse de données compatibles du théorème est celle du lemme 3.3 entre les données et la solution du problème de Cauchy (3.33). Elle se traduit par $\mathbf{U}_{h,e} = \kappa_{d_h}$ sur Γ_d . La relation ci-dessus s'écrit donc encore

$$(3.39) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{U}_{h,k} - \mathbf{U}_{h,e}\|_{\Gamma_d}^2 = 0 .$$

Comme l'espace $\mathcal{N}_h^+(\Gamma)$ est de dimension finie, les normes $\|\cdot\|_{\Gamma_d}$ et $\|\cdot\|_{\Gamma}$ sont équivalentes. Il existe alors une constante strictement positive δ_h telle que

$$(3.40) \quad \|\mathbf{U}_{h,k} - \mathbf{U}_{h,e}\|_{\Gamma}^2 \leq \delta_h \|\mathbf{U}_{h,k} - \mathbf{U}_{h,e}\|_{\Gamma_d}^2 .$$

En passant à la limite lorsque k tend vers l'infini dans (3.40) et en utilisant (3.39), on déduit, pour h fixé, que la suite $(\mathbf{U}_{h,k})$ des solutions du processus itératif (3.30) converge vers la solution $\mathbf{U}_{h,e}$ du problème de Cauchy (3.33).

Remarque 3.5 *Un résultat de convergence similaire au théorème 3.4 se trouve dans [53] pour le problème inverse de Cauchy associé à l'opérateur de Laplace mais la démonstration présentée ici est différente.*

Remarque 3.6 *La mise en oeuvre numérique du problème (3.15) par la méthode des éléments finis reste délicate car les espaces d'approximation de la section 3.8.2 présupposent des bases polynomiales de haut degré.*

Chapitre 4

Le problème factorisé associé à (\wp)

4.1 Introduction

Pour résoudre le problème inverse de Cauchy (3.6), équivalent formellement au problème (2.12) et au problème (\wp) du paragraphe 2.3, nous avons en particulier besoin de mesurer les données χ_d et Φ_d compatibles, fixées sur la partie Γ_d de la frontière, représentant les traces d'ordre deux et trois de la solution biharmonique \bar{u} . Cependant, dans les applications, ces traces sur la partie Γ_d ne sont pas souvent accessibles sous les hypothèses de Kirchhoff et Love mais plutôt le laplacien et la dérivée normale du laplacien de la solution. Pour cette raison, nous nous proposons de résoudre le problème (3.6) en le factorisant en deux problèmes inverses de Cauchy associés à l'opérateur de Laplace. Tout d'abord, nous commençons par modifier les équations des lignes 4 et 5 du problème (\wp) pour arriver à la formulation du problème factorisé. Ensuite, après avoir défini les espaces fonctionnels, nous résolvons chaque problème inverse de Cauchy du problème factorisé en utilisant le principe de régularisation à effet évanescent de la section 3.5. Enfin, nous montrons de quelle manière la résolution du problème factorisé conduit à la résolution du problème inverse de Cauchy (3.6).

4.2 Opérations intermédiaires

Rappelons que compte tenu des relations (2.2) et (2.4), les équations des quatrième et cinquième lignes du problème (\wp) s'écrivent

$$(4.1) \quad D \left\{ \Delta \zeta + (1 - \nu) \left(-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) \right\} = \xi_d \quad \text{sur } \Gamma_d$$

$$(4.2) \quad -D \left\{ \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} + (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right] \right\} = \gamma_d \quad \text{sur } \Gamma_d .$$

D'après ces équations, il s'ensuit que le problème (\wp) équivaut (tout au moins de façon formelle) au problème suivant :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D \Delta \Delta \zeta = f & \text{dans } \Omega \\ \zeta = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \zeta}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ D \Delta \zeta = \xi_d + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) & \text{sur } \Gamma_d \\ -D \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial n} = \gamma_d + D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right) & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Comme au chapitre 3, les **hypothèses sur les données**, sur la géométrie de l'ouvert Ω et de son bord **restent inchangées**. Dans ce qui suit, si nous considérons le changement de fonction inconnue de la section 3.2, c'est à dire si nous posons

$$\bar{u} = \zeta - \bar{\zeta}$$

où $\bar{\zeta}$ est la solution du problème (3.1), alors le **problème** (4.3), équivalent au problème (\wp) , devient à son tour équivalent au problème :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D \Delta \Delta \bar{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ D \Delta \bar{u} = \xi_d + D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \right) - D \Delta \bar{\zeta} & \text{sur } \Gamma_d \\ -D \frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial n} = \gamma_d + D(1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau \partial n} - \frac{1}{R} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right) + D \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Cependant comme $D \neq 0$, d'après les relations (4.1), (4.2) et le fait que $\bar{\zeta}$ soit la solution du problème (3.1), il vient que

$$(4.5) \quad \Delta \bar{\zeta} = D' \bar{\xi}_d \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Delta \bar{\zeta}}{\partial n} = -D' \bar{\gamma}_d \quad \text{sur } \Gamma_d$$

où D' définie dans (2.10) est l'inverse du module de rigidité à la flexion de la plaque, $\bar{\xi}_d$ et $\bar{\gamma}_d$ sont les données fixées sur la partie Γ_d et désignent (section 3.2) respectivement le moment de flexion et l'effort tranchant du problème de la plaque

encastrée (3.1). Compte tenu de (4.5), le **problème** (4.4), équivalent au problème (\wp), s'écrit

$$(4.6) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\Delta\bar{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \Delta\bar{u} = D'(\xi_d - \bar{\xi}_d) + (1 - \nu)\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial n}\right) & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\Delta\bar{u}}{\partial n} = D'(\bar{\gamma}_d - \gamma_d) - (1 - \nu)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\tau\partial n} - \frac{1}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}\right) & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

4.3 Factorisation du problème (\wp)

Dans le problème (4.6) on fait le changement de fonction inconnue

$$(4.7) \quad -\Delta\bar{u} = \omega$$

où ω est supposée par exemple dans $L^2(\Omega)$ et dans les lignes 4 et 5 on pose

$$(4.8) \quad \vartheta_d = D'(\bar{\xi}_d - \xi_d) - (1 - \nu)\left(\frac{\partial^2\varphi_d}{\partial\tau^2} + \frac{\psi_d}{R}\right) \quad \text{sur } \Gamma_d$$

$$(4.9) \quad \beta_d = D'(\gamma_d - \bar{\gamma}_d) + (1 - \nu)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\psi_d}{\partial\tau} - \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi_d}{\partial\tau}\right) \quad \text{sur } \Gamma_d .$$

Le problème (4.6) est équivalent au **problème factorisé** ci-dessous :

$$(4.10) \quad \left\| \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\omega = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega = \vartheta_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\omega}{\partial n} = \beta_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \right. \\ \text{et} \\ \left\| \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\bar{u} = \omega & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. \right.$$

constitué de **deux problèmes inverses** de type Cauchy. Le premier problème est associé à l'**équation de Laplace**. Les données ϑ_d et β_d fixées sur la partie Γ_d représentent respectivement la trace et la dérivée normale de la fonction ω . Il consiste à reconstituer, sur tout le bord du domaine, la trace (respectivement la dérivée normale) de la fonction ω à partir de la donnée ϑ_d (respectivement de la donnée β_d) et correspond au problème traité par A.Cimetière et al. [11, 53]. Le deuxième problème est lié à l'**équation de Poisson**. Les données φ_d et ψ_d fixées sur la partie Γ_d représentent respectivement la trace et la dérivée normale de la fonction \bar{u} .

Le problème factorisé (4.10) se retrouve aussi dans L.Marin et D.Lesnic [34] pour l'écoulement de Stokes, régi par le système d'équations (1.9) et les conditions aux limites (1.10). Dans A.Zeb et D.B.Ingham [35] on trouve également une variante du problème (4.10). Dans les lignes suivantes, nous nous intéressons à chacun des deux problèmes inverses de Cauchy figurant dans (4.10). La résolution numérique du problème factorisé (4.10) sera effectuée au chapitre suivant. Signalons d'abord une remarque.

Remarque 4.1 *Le moment de flexion ξ_d fixé sur la partie Γ_d du problème (\wp) intervient dans la donnée ϑ_d par la relation (4.8) et l'effort tranchant γ_d fixé sur la partie Γ_d du problème (\wp) intervient dans la donnée β_d via l'égalité (4.9).*

4.4 Résolution du problème factorisé

4.4.1 Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

Nous rappelons que le premier problème dans (4.10) est un problème de Cauchy pour l'équation de Laplace qui s'écrit

$$(4.11) \quad \begin{cases} -\Delta\omega = 0 & \text{dans } \Omega \\ \omega = \vartheta_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial\omega}{\partial n} = \beta_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

dans lequel les données ϑ_d et β_d sur la partie Γ_d sont définies par (4.8) et (4.9). Puisque la fonction $\omega = -\Delta\bar{u}$ est supposée dans $L^2(\Omega)$, la solution du problème (4.11) est à rechercher, au sens des distributions, dans l'espace

$$(4.12) \quad \mathcal{H}_0^0(\Delta, \Omega) = \{ \omega \in L^2(\Omega) \ / \ \Delta\omega = 0 \} .$$

C'est un sous espace fermé de l'espace

$$(4.13) \quad \mathcal{H}^0(\Delta, \Omega) = \{ \omega \in L^2(\Omega) \ / \ \Delta\omega \in L^2(\Omega) \}$$

qui est espace de Hilbert muni la norme du graphe

$$(4.14) \quad \|\omega\|_{\mathcal{H}^0(\Delta, \Omega)}^2 = \|\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

D'après J.L.Lions et E-Magenes [52] ou P.Grisvard [60, 61] ⁽¹⁾, la trace et la dérivée normale des fonctions de l'espace $\mathcal{H}^0(\Delta, \Omega)$ sont respectivement des éléments

¹En supposant de plus que Ω soit polygonal.

de $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ et $\mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma)$. Nous notons respectivement $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$ et $\mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$ les espaces des restrictions à Γ_d des traces précédentes.

Comme à la section 3.3, on définit d'abord l'espace

$$(4.15) \quad \mathcal{X}(\Gamma_d) = \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$$

muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}(\Gamma_d)}$ et de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{X}(\Gamma_d)}$. $\mathcal{X}(\Gamma_d)$ est l'espace des restrictions à Γ_d de l'espace

$$(4.16) \quad \mathcal{X}(\Gamma) = \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma)$$

muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{X}(\Gamma)}$ et de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{X}(\Gamma)}$. On définit ensuite l'espace des paires de données compatibles par :

$$(4.17) \quad \mathcal{L}(\Gamma_d) = \left\{ \rho_d = (\vartheta_d, \beta_d) \in \mathcal{X}(\Gamma_d) \text{ tel qu'il existe } \omega \in \mathcal{H}_0^0(\Delta, \Omega) \text{ et } \omega|_{\Gamma_d} = \vartheta_d, \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma_d} = \beta_d \right\}$$

muni du produit scalaire

$$\langle \rho_d, \rho'_d \rangle_{\Gamma_d} = \langle \vartheta_d, \vartheta'_d \rangle_{-1/2, \Gamma_d} + \langle \beta_d, \beta'_d \rangle_{-3/2, \Gamma_d}$$

induit par $\mathcal{X}(\Gamma_d)$ et $\| \cdot \|_{\Gamma_d}$ la norme associée à ce produit scalaire. $\mathcal{L}(\Gamma_d)$ est l'espace des restrictions à Γ_d de l'espace $\mathcal{L}(\Gamma)$ des paires compatibles défini par :

$$(4.18) \quad \mathcal{L}(\Gamma) = \left\{ \rho = (\vartheta, \beta) \in \mathcal{X}(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } \omega \in \mathcal{H}_0^0(\Delta, \Omega) \text{ et } \omega|_{\Gamma} = \vartheta, \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = \beta \right\}$$

avec le produit scalaire

$$\langle \rho, \rho' \rangle_{\Gamma} = \langle \vartheta, \vartheta' \rangle_{-1/2, \Gamma} + \langle \beta, \beta' \rangle_{-3/2, \Gamma}$$

induit par $\mathcal{X}(\Gamma)$ et $\| \cdot \|_{\Gamma}$ la norme associée à ce produit scalaire.

Comme pour les formulations (3.6) et (3.15), le problème de Cauchy (4.11) se met sous la forme équivalente

$$(4.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{w} = (\omega|_{\Gamma}, \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma}) \in \mathcal{L}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{w} = \rho_d \text{ sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Ce problème est également "mal posé" au sens d'Hadamard parce que la solution ne dépend pas continûment de la donnée ρ_d . En appliquant la méthode de régularisation évanescence de la section 3.5, nous construisons une suite de problèmes d'optimisation bien posés au sens d'Hadamard de type (3.20) et de la forme :

soient $\mathbf{w}_0 \in \mathcal{L}(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés,

$$(4.20) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_{k+1} = (\omega_{k+1}, \frac{\partial \omega_{k+1}}{\partial n}) \in \mathcal{L}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{w}_{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\Gamma) \quad \text{avec} \\ J_c^k(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \rho_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{w}_k\|_{\Gamma}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\Gamma) \end{cases}$$

pour laquelle la suite $(\mathbf{w}_k)_k$ des solutions optimales vérifie le lemme 3.1 et converge, grâce au théorème 3.1, fortement dans $\mathcal{L}(\Gamma_d)$ vers la paire de données compatibles ρ_d et faiblement dans $\mathcal{L}(\Gamma)$ vers la solution compatible \mathbf{w}_e du problème inverse de Cauchy (4.19).

4.4.2 Le problème de Cauchy pour l'équation de Poisson

Nous rappelons que le deuxième problème dans (4.10) est un problème de Cauchy pour l'équation de Poisson. Il s'écrit

$$(4.21) \quad \begin{cases} -\Delta \bar{u} = \omega & \text{dans } \Omega \\ \bar{u} = \varphi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} .$$

Etant donné que $\omega = -\Delta \bar{u}$ est dans $L^2(\Omega)$ et que les données φ_d, ψ_d , fixées sur la partie Γ_d sont analytiques et appartiennent respectivement à $H^{3/2}(\Gamma_d)$ et $H^{1/2}(\Gamma_d)$, un résultat de régularité des solutions des problèmes elliptiques nous suggère d'envisager la solution de (4.21) dans $H^2(\Omega)$. Cette solution est à rechercher dans l'ensemble $\mathcal{H}^2(\Delta, \Omega, \omega)$ défini par :

$$(4.22) \quad \mathcal{H}^2(\Delta, \Omega, \omega) = \{\bar{u} \in H^2(\Omega) \mid -\Delta \bar{u} = \omega\}$$

où ω est solution de (4.11). Pour résoudre (4.21) nous procédons à un relèvement de \bar{u} , c'est à dire que nous partons d'une solution particulière z ⁽²⁾ telle que

$$(4.23) \quad \begin{cases} -\Delta z = \omega & \text{dans } \Omega \\ z = \bar{\varphi}_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial z}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma \setminus \Gamma_d \end{cases} .$$

²Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution z . Cf. par exemple Dautray [44], Nicaise [62].

Posant $\hat{z} = \bar{u} - z$, il vient pour (4.21) que \hat{z} vérifie le problème de Cauchy harmonique

$$(4.24) \quad \begin{cases} -\Delta \hat{z} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \hat{z} = \hat{\varphi}_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial n} = \hat{\psi}_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

avec

$$(4.25) \quad \hat{\varphi}_d = \varphi_d - \bar{\varphi}_d \text{ et } \hat{\psi}_d = \psi_d - \bar{\psi}_d \text{ sur } \Gamma_d$$

où $\bar{\psi}_d$ représente la dérivée normale de z sur la partie Γ_d de la frontière. L'espace dans lequel on considère la solution \hat{z} est défini par :

$$(4.26) \quad \mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega) = \{u \in \mathbf{H}^2(\Omega) \mid \Delta u = 0\}.$$

Comme sous-espace fermé de $\mathcal{H}^0(\Delta, \Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, avec la norme du graphe induite par $\mathcal{H}^0(\Delta, \Omega)$, $\mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega)$ est un espace de Hilbert.

Pour résoudre le problème (4.24) nous allons utiliser un raisonnement semblable à celui effectué dans les sections 3.3, 3.4 et 3.5 pour traiter le problème (3.6).

Nous posons successivement

$$(4.27) \quad \mathcal{T}(\Gamma) = \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$$

l'espace des traces des fonctions de $\mathcal{H}^0(\Delta, \Omega)$ et de leur dérivée normale, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}(\Gamma)}$ et de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{T}(\Gamma)}$,

$$(4.28) \quad \mathcal{T}(\Gamma_d) = \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$$

l'espace des restrictions à Γ_d des éléments de l'espace $\mathcal{T}(\Gamma)$, avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{T}(\Gamma_d)}$ et la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{T}(\Gamma_d)}$,

$$(4.29) \quad \mathcal{P}(\Gamma) = \left\{ \varsigma = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \in \mathcal{T}(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } \hat{z} \in \mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega) \text{ et } \hat{z}|_{\Gamma} = \hat{\varphi}, \frac{\partial \hat{z}}{\partial n}|_{\Gamma} = \hat{\psi} \right\}$$

l'espace des paires compatibles qui représentent les couples $(\hat{z}|_{\Gamma}, \frac{\partial \hat{z}}{\partial n}|_{\Gamma})$ des traces des éléments de $\mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega)$. Muni du produit scalaire

$$\langle \varsigma, \varsigma' \rangle_{\Gamma} = \langle \hat{\varphi}, \hat{\varphi}' \rangle_{3/2, \Gamma} + \langle \hat{\psi}, \hat{\psi}' \rangle_{1/2, \Gamma}$$

induit par $\mathcal{T}(\Gamma)$ et de la norme $\|\cdot\|_\Gamma$, comme sous-espace fermé de $\mathcal{T}(\Gamma)$, $\mathcal{P}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert. Nous posons également

$$(4.30) \quad \mathcal{P}(\Gamma_d) = \left\{ \varsigma_d = (\hat{\varphi}_d, \hat{\psi}_d) \in \mathcal{T}(\Gamma_d) \text{ tel qu'il existe} \right. \\ \left. \hat{z} \in \mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega) \text{ et } \hat{z}|_{\Gamma_d} = \hat{\varphi}_d, \frac{\partial \hat{z}}{\partial n}|_{\Gamma_d} = \hat{\psi}_d \right\}$$

l'espace des paires de données compatibles. C'est l'espace des restrictions à Γ_d des éléments de $\mathcal{P}(\Gamma)$. Il peut encore être défini de la façon suivante :

$$(4.31) \quad \mathcal{P}(\Gamma_d) = \left\{ \varsigma_d = (\hat{\varphi}_d, \hat{\psi}_d) \in \mathcal{T}(\Gamma_d) \right. \\ \left. \text{tel qu'il existe } \varsigma \in \mathcal{P}(\Gamma) \text{ et } \varsigma|_{\Gamma_d} = \varsigma_d \right\}.$$

avec le produit scalaire ci-dessous induit par $\mathcal{T}(\Gamma_d)$

$$\langle \varsigma_d, \varsigma'_d \rangle_{\Gamma_d} = \langle \hat{\varphi}_d, \hat{\varphi}'_d \rangle_{3/2, \Gamma_d} + \langle \hat{\psi}_d, \hat{\psi}'_d \rangle_{1/2, \Gamma_d}$$

et $\|\cdot\|_{\Gamma_d}$ la norme associée à ce produit scalaire. Par analogie avec l'équivalence qu'il y a entre les formulations (4.11) et (4.19), le problème de Cauchy (4.24) s'écrit sous la forme équivalente

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{z} = (\hat{z}|_\Gamma, \frac{\partial \hat{z}}{\partial n}|_\Gamma) \in \mathcal{P}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{z} = \varsigma_d \text{ sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

Comme la solution ne dépend pas continûment de la donnée ς_d , ce problème n'est pas bien posé au sens d'Hadamard. En appliquant à nouveau le principe de régularisation de la section 3.5, nous aboutissons à la suite itérative de problèmes d'optimisation suivante :

soient $\mathbf{z}_0 \in \mathcal{P}(\Gamma)$ et $c > 0$ donnés,

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{z}_{k+1} = (\hat{\mathbf{z}}_{k+1}, \frac{\partial \hat{\mathbf{z}}_{k+1}}{\partial n}) \in \mathcal{P}(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{z}_{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}(\Gamma) \text{ avec} \\ J_c^k(\mathbf{v}) = \|\mathbf{v} - \varsigma_d\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v} - \mathbf{z}_k\|_\Gamma^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{P}(\Gamma) \end{array} \right.$$

semblable à (3.20) ou (4.20), constituée, à chaque étape du processus, de problèmes bien posés au sens d'Hadamard. Dans (4.33), la suite (\mathbf{z}_k) des éléments optimaux satisfait le lemme 3.1 et converge, via le théorème 3.1, fortement sur $\mathcal{P}(\Gamma_d)$ vers la paire de données compatibles ς_d et faiblement sur $\mathcal{P}(\Gamma)$ vers la solution compatible \mathbf{z}_e du problème inverse de Cauchy (4.24) ou (4.32).

4.5 Du problème factorisé au problème initial

Dans ce paragraphe, nous construisons la solution de (3.6) à partir de la solution (ω, \bar{u}) du problème (4.10). Nous montrons comment reconstituer les traces d'ordre deux et trois du problème inverse (3.6) à partir de la trace et de la dérivée normale de la fonction ω du problème inverse (4.11), issu du problème (4.10). Nous montrons également le lien entre la résolution du problème factorisé (4.10) et la résolution du problème inverse de Cauchy (3.6).

4.5.1 Rôle des données ϑ_d et β_d

Nous savons avec Delvare [11] que la résolution du problème de Cauchy (4.11) ou (4.19) permet de reconstituer le couple compatible $(\omega, \frac{\partial \omega}{\partial n})_\Gamma$ des traces de la fonction ω à partir de la paire (ϑ_d, β_d) de données compatibles mesurée sur la partie Γ_d . Le changement de fonction inconnue dans (4.7) est valable jusqu'au bord, c'est à dire que pour ω et \bar{u} solutions du problème (4.10) on a

$$-\Delta \bar{u} = \omega \quad \text{dans } H^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \Delta \bar{u}}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial n} \quad \text{dans } H^{-3/2}(\Gamma).$$

Grâce aux formules (2.3) et (2.7), la restriction à Γ_d des égalités précédentes donne

$$(4.34) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = -\omega|_{\Gamma_d} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \\ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = -\frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma_d} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \psi_d}{\partial \tau} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_d}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{R} \left(\omega|_{\Gamma_d} + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \right) \end{cases}.$$

Comme la solution \bar{u} du problème (4.10) est solution du problème inverse de Cauchy (4.21) et que nous la recherchions dans l'espace $\mathcal{H}^2(\Delta, \Omega, \omega)$, il s'ensuit avec l'harmonicité de la fonction ω que

$$\Delta^2 \bar{u} = 0$$

donc $\bar{u} \in \mathcal{H}_0^2(\Delta^2, \Omega)$.

Dans (4.34) puisque $\omega|_{\Gamma_d} = \vartheta_d$ et $\frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma_d} = \beta_d$, en remplaçant ϑ_d (respectivement β_d) par son expression donnée par (4.8) (respectivement donnée par (4.9)) on a

$$(4.35) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = D'(\xi_d - \bar{\xi}_d) - \nu \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \\ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = D'(\bar{\gamma}_d - \gamma_d + \frac{1}{R}(\bar{\xi}_d - \xi_d)) \\ \quad - (2 - \nu) \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \psi_d}{\partial \tau} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_d}{\partial \tau} \right) + \frac{(\nu+1)}{R} \left(\frac{\partial^2 \varphi_d}{\partial \tau^2} + \frac{\psi_d}{R} \right) \end{cases}.$$

En se rappelant les relations (2.10) et (2.11), nous obtenons

$$(4.36) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \mu_d - D' \bar{\xi}_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = \phi_d + D'(\bar{\gamma}_d + \frac{\bar{\xi}_d}{R}) & \text{sur } \Gamma_d \end{cases}$$

ce qui donne avec (3.4) et (3.5)

$$(4.37) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} = \chi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3} = \Phi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} .$$

Des équations (4.34) nous savons que dans (4.37) la donnée χ_d mesurée sur Γ_d appartient à $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$ et la donnée Φ_d prédéfinie sur Γ_d est dans $\mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$. Nous savons également que dans (4.21), la donnée φ_d observée sur Γ_d est dans $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_d)$ et la donnée ψ_d enregistrée sur Γ_d appartient à $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$. Par conséquent, compte tenu de la relation $\Delta^2 \bar{u} = 0$ et des équations fournies par (4.21) combinées avec celles obtenues dans (4.37), nous déduisons que \bar{u} est solution du problème inverse de Cauchy (3.6). Les espaces dans lesquels les données et les solutions sont prises en compte dans le problème (4.10) et dans le problème (3.6) sont les mêmes. Nous venons donc de montrer que

Corollaire 4.1 *Si les données (ϑ_d, β_d) du problème (4.10) ont une régularité telles que ω soit solution du problème inverse (4.11) ou (4.19) pour l'équation de Laplace, c'est à dire telles que $(\vartheta_d, \beta_d) \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{H}^{-3/2}(\Gamma_d)$, alors la résolution du problème (4.10) se ramène à la résolution du problème inverse (3.6) pour l'opérateur biharmonique.*

Remarque 4.2 *Ce corollaire entraîne, d'un point de vue numérique, que la résolution du problème inverse (3.6) ou (3.15) dont les espaces d'approximations par la méthode des éléments finis nécessitent des fonctions polynomiales de degrés assez élevés, se substitue à la résolution du problème factorisé (4.10) pour lequel les espaces d'approximations requièrent des fonctions polynomiales de degrés moins élevés. Pour cela, nous résolvons (4.11) afin de reconstruire les traces de la fonction ω . Les reconstructions des traces d'ordre deux et trois de la solution de (3.6) se déduisent des équations dans (4.34). Les reconstitutions de la trace de la fonction \bar{u} et de sa dérivée normale s'obtiennent via la résolution du problème inverse (4.21).*

4.5.2 Rôle des données φ_d et ψ_d

Le problème (4.24) peut être traité en recherchant la solution dans l'espace $\mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega) = \{ u \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \Delta u = 0 \}$ qui est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}^1(\Delta, \Omega)$ avec $\mathcal{H}^1(\Delta, \Omega) = \{ u \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega) \}$. La restriction à Γ_d des traces et des dérivées normales des fonctions de cet espace sont respectivement dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$. Par conséquent, les données sur Γ_d représentant la trace et la dérivée normale de la solution seraient dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_d)$ respectivement, et pas nécessairement dans $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_d)$ et $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ respectivement. L'hypothèse de régularité $\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma_d)$ et $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ de la paire de données compatibles (φ_d, ψ_d) du problème de Cauchy (3.6) a donc joué un rôle essentiel pour que la solution du problème (4.24) (respectivement du problème factorisé ou du problème (4.21)) soit à rechercher dans l'espace $\mathcal{H}_0^2(\Delta, \Omega)$ (respectivement dans $\mathcal{H}^2(\Delta, \Omega, \omega)$).

Chapitre 5

Discrétisation du problème factorisé et résultat de convergence

5.1 Introduction

En combinant la méthode des éléments finis et la méthode de régularisation évanescence, nous nous proposons de résoudre numériquement le problème (3.6) en résolvant le problème factorisé (4.10). En premier lieu, nous traitons le problème inverse associé à l'équation de Laplace, en second lieu, le problème inverse associé à l'équation de Poisson. Pour chaque problème résolu, nous montrons d'abord, comme dans Delvare [15], la convergence de l'algorithme discret vers la solution du problème discret. Ensuite nous complétons ce résultat en prouvant la convergence de la solution discrète vers la solution continue. Enfin nous donnons la formulation de l'algorithme discret en dimension finie.

5.2 Le problème approché pour l'équation de Laplace

5.2.1 Formulation variationnelle et espaces d'approximation

On introduit l'espace

$$(5.1) \quad \mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) / \Delta u = 0 \}.$$

Comme sous-espace de $\mathcal{H}^1(\Delta, \Omega) = \{ u \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \Delta u \in L^2(\Omega) \}$, les traces et les dérivées normales des fonctions de $\mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega)$ sont respectivement dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Soit $\mathcal{L}(\Gamma)$ l'espace des paires compatibles de (4.18) **défini cette fois-ci** par

$$(5.2) \quad \mathcal{L}(\Gamma) = \left\{ \rho = (\vartheta, \beta) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } \omega \in \mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega) \text{ } \omega|_{\Gamma} = \vartheta \text{ et } \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = \beta \right\} .$$

Comme sous-espace fermé de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$, $\mathcal{L}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \rho, \rho' \rangle_{\Gamma} = \langle \vartheta, \vartheta' \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \langle \beta, \beta' \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$$

Dans ce cas, l'espace $\mathcal{L}(\Gamma_d)$ des restrictions à Γ_d des éléments de $\mathcal{L}(\Gamma)$ se définit par :

$$(5.3) \quad \mathcal{L}(\Gamma_d) = \left\{ \rho_d = (\vartheta_d, \beta_d) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{L}^2(\Gamma_d) \text{ tel qu'il existe } \omega \in \mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega) \text{ } \omega|_{\Gamma_d} = \vartheta_d \text{ et } \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma_d} = \beta_d \right\} .$$

Nous pouvons redéfinir l'espace $\mathcal{L}(\Gamma)$ de la façon suivante :

Proposition 5.1

$$(5.4) \quad \mathcal{L}(\Gamma) = \left\{ \rho = (\vartheta, \beta) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ tel qu'il existe } \omega \in \mathbf{H}^1(\Omega), \omega|_{\Gamma} = \vartheta \text{ et } \int_{\Omega} \nabla \omega \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} \beta v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \right\} .$$

Preuve Soit $\mathcal{L}(\Gamma)$ défini par (5.2) et $\rho = (\vartheta, \beta) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Il existe $\omega \in \mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega)$ tel que $\omega|_{\Gamma} = \vartheta$ et $\frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = \beta$. Après avoir multiplié l'équation $\Delta \omega = 0$ par une fonction test v dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, la formule de Green donne

$$(5.5) \quad \int_{\Omega} \nabla \omega \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} \beta v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) .$$

En considérant la définition de $\mathcal{L}(\Gamma)$ dans (5.4), on déduit que $\rho = (\vartheta, \beta) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Réciproquement, soit $\mathcal{L}(\Gamma)$ défini par (5.4) et soit $\rho = (\vartheta, \beta) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Partant de (5.5), la formule de Green fournit à nouveau

$$\int_{\Omega} \Delta \omega v \, dx = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Il en résulte que $\Delta \omega = 0$ sur Ω . En utilisant ensuite la formule de Green pour $v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, on en déduit que $\frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = \beta$. Par conséquent $\rho = (\vartheta, \beta) \in \mathcal{L}(\Gamma)$ où $\mathcal{L}(\Gamma)$ est défini par (5.2). Ce qui achève la preuve de la proposition 5.1.

Nous supposons désormais que l'ouvert Ω est **polygonaal** ⁽¹⁾ et nous nous proposons d'obtenir une approximation \mathbf{w}_h de la solution \mathbf{w} du problème (4.19) dans un sous-espace de dimension finie $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$, à partir d'une solution approchée ω_h de ω obtenue dans un espace d'approximation $\mathcal{V}_h(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$. Le paramètre h représente le pas de discrétisation sur la frontière et dans le domaine Ω . Les espaces $\mathcal{V}_h(\Omega)$ et $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ seront précisés ultérieurement.

Pour cela, considérons une famille régulière ⁽²⁾ de triangles $(\mathcal{T}_{ih})_i$ qui vérifie

- (1) La famille \mathcal{T}_{ih} est finie
- (2) si $i \neq j$ et $\mathcal{T}_{ih} \cap \mathcal{T}_{jh} \neq \emptyset$, alors ou bien les triangles \mathcal{T}_{ih} et \mathcal{T}_{jh} ont un coté commun, ou bien ils ont un sommet commun.
- (3) si σ_i est le diamètre de \mathcal{T}_{ih} et ς_i est le diamètre du cercle inscrit dans \mathcal{T}_{ih} , alors il existe une constante $\nu > 0$ telle que

$$\frac{\sigma_i}{\varsigma_i} \leq \nu$$

et posons enfin

$$(5.6) \quad \Omega_h = \bigcup_i \mathcal{T}_{ih}$$

la triangulation associée au domaine Ω qui comporte M noeuds intérieurs et N noeuds sur la frontière du domaine. L'espace d'approximation $\mathcal{V}_h(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$ est caractérisé comme suit :

$$(5.7) \quad \mathcal{V}_h(\Omega) = \{ \omega_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) / \omega_h \text{ soit affine dans chaque } \mathcal{T}_{ih}, \forall i \} .$$

Dans $\mathcal{V}_h(\Omega)$, la formule (5.5) (avec $\beta = \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma}$) s'écrit sous forme discrétisée

$$(5.8) \quad \int_{\Omega} \nabla \omega_h \nabla v_h \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_h}{\partial n} v_h \, d\sigma \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) .$$

Comme nous travaillons en dimension 2 et que l'ouvert Ω est polygonal, il est loisible de mailler la partie Γ_d de sa frontière en N_d éléments rectilignes Γ_j telle que

$$(5.9) \quad \Gamma_d = \bigcup_{j=1}^{N_d} \Gamma_j .$$

¹Selon [58], si Ω a une **frontière courbe**, une triangulation "exacte" s'obtient en supposant que Γ est subdivisée en un nombre fini d'arcs, chacun paramétré par rapport à l'abscisse curviligne s . Une triangulation "approchée" du domaine Ω est construite en paramétrant chaque triangle ayant au plus un coté courbe situé sur un arc par des fonctions polynomiales .

²Cf. par exemple Ciarlet [57] ou Brezzi [63].

La frontière Γ , supposée **polygonale**, est à son tour subdivisée en N éléments de sorte que

$$(5.10) \quad \Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j .$$

Désignons par $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ respectivement les **espaces d'approximation** des espaces $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathbf{L}^2(\Gamma)$, avec

$$(5.11) \quad \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{ \vartheta_h \in \mathcal{C}^0(\Gamma) / \vartheta_h \text{ soit affine sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \}$$

$$(5.12) \quad \mathcal{H}_h^0(\Gamma) = \{ \beta_h \in \mathbf{L}^2(\Gamma) / \beta_h \text{ soit constante sur } \Gamma_j, j = 1 \dots N \}$$

ϑ_h (respectivement β_h) représente la donnée approchée de la donnée ϑ (respectivement de la donnée β) du problème (4.11) ou (4.19) sur toute la frontière. Ces deux espaces sont respectivement **inclus** dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ et $\mathbf{L}^2(\Gamma)$.

5.2.2 L'espace d'approximation $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ et la régularisation

Nous posons $\rho_h = (\vartheta_h, \beta_h)$. Compte tenu des relations (5.4), (5.7), (5.8), (5.11) et (5.12), l'**espace d'approximation** $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ de $\mathcal{L}(\Gamma)$ se caractérise par :

$$(5.13) \quad \mathcal{L}_h(\Gamma) = \left\{ \rho_h = (\vartheta_h, \beta_h) \in \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^0(\Gamma) \text{ tel qu'il} \right. \\ \left. \text{existe } \omega_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \text{ avec } \omega_h|_{\Gamma} = \vartheta_h \text{ et} \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla \omega_h \nabla v_h \, dx = \int_{\Gamma} \beta_h v_h \, d\sigma \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \right\} .$$

Soient $\rho_h = (\vartheta_h, \beta_h)$ et $\rho'_h = (\vartheta'_h, \beta'_h)$ deux éléments de $\mathcal{L}_h(\Gamma)$. Comme pour $\mathcal{L}(\Gamma)$, on munit $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ du produit scalaire ⁽³⁾ de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$ suivant :

$$\langle \rho_h, \rho'_h \rangle_{\Gamma} = \langle \vartheta_h, \vartheta'_h \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \langle \beta_h, \beta'_h \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} .$$

On munit l'ensemble des traces sur Γ_d des éléments de $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ du produit scalaire et de la norme induits par $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$.

Si par ailleurs on note ρ_{d_h} l'approximation donnée sur Γ_d de la restriction à Γ_d de la solution ρ exacte, la **formulation approchée** du problème inverse (4.19) pour l'équation de Laplace s'écrit

$$(5.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{w}_h = (\omega_h, \omega'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{w}_h = \rho_{d_h} \quad \text{sur } \Gamma_d \end{array} \right. .$$

³Pour simplifier la mise en oeuvre de l'algorithme numérique, c'est le produit scalaire de $\mathbf{L}^2(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$ qui sera utilisé au chapitre suivant.

où ω_h (respectivement ω'_h) représente la trace approchée (respectivement la dérivée normale approchée) de la solution ω du problème inverse (4.11).

Définition 5.1 *L'espace d'approximation $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ est appelé l'espace des paires compatibles au sens discret, associé à l'équation de Laplace. Si un couple (ϑ_h, β_h) appartient à $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ on dira qu'il est compatible au sens discret.*

Comme pour le problème (3.15), le problème en dimension finie (5.14) peut encore être réécrit :

$$(5.15) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_h = (\omega_h, \omega'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ J(\mathbf{w}_h) \leq J(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \end{cases}$$

avec $J(\mathbf{v}_h) = \|\mathbf{v}_h - \rho_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2$ pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma)$.

Compte tenu du fait que (5.15) est un problème mal posé, nous remplaçons ce problème par le problème régularisé

$$(5.16) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_h = (\omega_h, \omega'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c(\mathbf{w}_h) \leq J_c(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \end{cases}$$

avec $c > 0$ et $J_c(\mathbf{v}_h) = \|\mathbf{v}_h - \rho_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v}_h - \Lambda_h\|_{\Gamma}^2$ pour tout $\mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma)$ et Λ_h donné dans $\mathcal{L}_h(\Gamma)$. La solution \mathbf{w}_h du problème (5.16) est caractérisée par :

$$(5.17) \quad \langle \mathbf{w}_h - \rho_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{w}_h - \Lambda_h, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma) .$$

Afin de s'affranchir de l'influence du choix de Λ_h sur la solution \mathbf{w}_h , nous introduisons le **processus itératif** suivant :

soient $\mathbf{w}_{h,0} = 0$ et $c > 0$ donnés,

$$(5.18) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_{h,k+1} \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{w}_{h,k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \end{cases}$$

avec $J_c^k(\mathbf{v}_h) = \|\mathbf{v}_h - \rho_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v}_h - \mathbf{w}_{h,k}\|_{\Gamma}^2$.

Remarque 5.1 *Ce processus itératif peut être interprété comme un algorithme de point fixe (cf. A.Cimetière et al. dans [53]).*

5.2.3 Le problème de Cauchy discret

Lorsque le nombre N_d de données est strictement inférieur à la dimension N de l'espace $\mathcal{L}_h(\Gamma)$, il y a une infinité de prolongements possibles sur Γ_i . Ces prolongements sont déterminés à un élément du noyau $\mathcal{W}_h(\Gamma)$ près, défini par :

$$(5.19) \quad \mathcal{W}_h(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v}_h = (v_h, v'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que } \mathbf{v}_h|_{\Gamma_d} = 0 \right\}.$$

Soit $\mathcal{W}_h^\perp(\Gamma)$, l'espace orthogonal de $\mathcal{W}_h(\Gamma)$ dans $\mathcal{L}_h(\Gamma)$, on a

$$(5.20) \quad \mathcal{W}_h^\perp(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v}_h = (v_h, v'_h) \in \mathcal{L}_h(\Gamma) / \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{W}_h(\Gamma) \right\}.$$

Le problème de Cauchy discret écrit dans $\mathcal{W}_h^\perp(\Gamma)$

$$(5.21) \quad \begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_h \in \mathcal{W}_h^\perp(\Gamma) \text{ tel que} \\ \langle \mathbf{w}_h - \rho_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_h^\perp(\Gamma) \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

5.2.4 Orientation

Soit $\mathbf{w}_{h,k} = (\omega_{h,k}, \omega'_{h,k})$ la solution approchée de $\mathbf{w}_k = (\omega_k, \omega'_k)$ obtenue à la k^e itération de l'algorithme (5.18). Après avoir énoncé un théorème de convergence qui a été prouvé dans [11, 15] lorsque le nombre d'itérations k tend vers l'infini, c'est à dire la convergence de l'algorithme (5.18) vers la solution du problème de Cauchy discret (5.21), nous allons établir le **résultat de convergence**, lorsque le pas h du maillage tend vers zéro, qui constitue le résultat principal du mémoire.

5.2.5 Localisation de la suite des itérés

Proposition 5.2 *Soit $h > 0$ fixé. Pour la donnée initiale $\mathbf{w}_{h,0} = 0$ et pour tout $k \geq 0$, la suite des itérés $(\mathbf{w}_{h,k})$ du problème (5.18) se trouve dans $\mathcal{W}_h^\perp(\Gamma)$.*

Preuve *La solution $\mathbf{w}_{h,k}$ du problème (5.18) est caractérisée par*

$$(5.22) \quad \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \rho_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}, \mathbf{v}_h \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma).$$

Par conséquent

$$(5.23) \quad \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \rho_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}, \mathbf{v}_h \rangle_\Gamma = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{W}_h(\Gamma).$$

Comme par définition de $\mathscr{W}_h(\Gamma)$, $\mathbf{v}_h|_{\Gamma_d} = 0$, l'égalité précédente donne avec $c > 0$

$$\langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathscr{W}_h(\Gamma)$$

puisque $(\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}) \in \mathcal{L}_h(\Gamma)$, la définition de $\mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma)$ par (5.20) entraîne que

$$(5.24) \quad (\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}) \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma) \quad \forall k \geq 0.$$

Une récurrence immédiate sur k fournit en particulier que

$$(\mathbf{w}_{h,1} - \mathbf{w}_{h,0}) \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma) \quad \text{pour } k = 0.$$

A partir de la condition de départ $\mathbf{w}_{h,0} = 0$, nous déduisons de la relation précédente que

$$\mathbf{w}_{h,1} \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma).$$

Mais alors pour $k = 1$, nous obtenons avec (5.24) que $\mathbf{w}_{h,2} \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma)$.

En réitérant ce procédé jusqu'à l'ordre $k - 1$, nous concluons sans peine que $\mathbf{w}_{h,k} \in \mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma)$ pour tout $k \geq 0$.

5.2.6 Convergence lorsque $k \rightarrow \infty$

Théorème 5.1 *Pour $h > 0$ fixé, la suite des itérés $(\mathbf{w}_{h,k})$ du problème (5.18) converge vers la solution \mathbf{w}_h du problème de Cauchy (5.21) dans $\mathscr{W}_h^{\perp}(\Gamma)$.*

Preuve *Pour $h > 0$ fixé, la suite $(\mathbf{w}_{h,k})$ vérifie la proposition (Cf. [11] ou [15]) : il existe une constante $M_{h,c} \in]0, 1[$, dépendant du coefficient de régularisation c et du pas de discrétisation h , telle que la suite $(\mathbf{w}_{h,k})$ de l'algorithme (5.18) satisfasse*

$$\|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}_h\|_{\Gamma} \leq M_{h,c}^k \|\mathbf{w}_{h,0} - \mathbf{w}_h\|_{\Gamma} \quad \forall k \geq 0.$$

Puisque la constante $M_{h,c}$ est strictement inférieure à 1, la suite itérative $(\|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}_h\|_{\Gamma})$ tend vers zéro.

Nous passons maintenant à l'**apport principal** du mémoire.

5.2.7 Convergence lorsque $h \rightarrow 0$

Hypothèse 1 Le couple inconnu $\mathbf{w} = (\vartheta, \beta) \in \mathcal{L}(\Gamma)$. Soit ω la fonction harmonique solution du problème (4.11). On suppose que $\omega \in \mathbf{H}^1(\Omega)$.

Hypothèse 2 On suppose donnée une famille (\mathcal{D}_h) d'opérateurs d'approximation sur le bord

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_h : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) &\longrightarrow \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^0(\Gamma) \\ (v, v') &\longmapsto (v_h, v'_h) \end{aligned}$$

au sens suivant :

$$(5.25) \quad \|(v, v') - \mathcal{D}_h(v, v')\|_{\Gamma} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

On introduit

$$\pi_h : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{L}_h(\Gamma)$$

la projection orthogonale de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$ sur son sous-espace $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ pour le produit scalaire de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$.

Hypothèse 3 On suppose que la restriction de $\pi_h \mathbf{w} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}$ à Γ_d vérifie :

$$(5.26) \quad \langle \pi_h \mathbf{w} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma).$$

Autrement dit, $\mathcal{D}_h \mathbf{w}$ représente suffisamment bien ω et $\partial\omega/\partial n$ sur Γ_d pour que $\pi_h \mathbf{w}$ et $\mathcal{D}_h \mathbf{w}$ ne diffèrent pas sur Γ_d de la trace et de la dérivée normale d'une fonction harmonique discrète.

Remarque 5.2 En particulier, si $\pi_h \mathbf{w} = \mathcal{D}_h \mathbf{w}$ sur Γ_d , alors l'égalité ci-dessus est vraie.

Nous rappelons que l'algorithme discret s'écrit : soient $\mathbf{w}_{h,0} = 0$ et $c > 0$ donnés,

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_{h,k+1} \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ \mathbf{J}_c^k(\mathbf{w}_{h,k+1}) \leq \mathbf{J}_c^k(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \end{cases}$$

avec $\mathbf{J}_c^k(\mathbf{v}_h) = \|\mathbf{v}_h - \rho_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v}_h - \mathbf{w}_{h,k}\|_{\Gamma}^2$ et $\rho_{d_h} = (\mathcal{D}_h \mathbf{w})|_{\Gamma_d}$.

Nous rappelons aussi que la solution $\mathbf{w}_{h,k+1}$ est caractérisée par l'équation d'optimalité :

$$(5.27) \quad \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \rho_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} + c \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma).$$

Nous commençons par prouver la proposition suivante :

Proposition 5.3 *Pour tout $h > 0$ et tout $k \geq 0$, la suite $(\|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma)$ est décroissante.*

Preuve *Pour tout $h > 0$ et pour tout $k \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 &= \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k} + \mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}, \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k} + \mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w} \rangle_\Gamma \\ &= \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma^2 + \|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 + 2 \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}, \mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w} \rangle_\Gamma \\ &= \|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 - \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma^2 + 2 \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}, \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k} \rangle_\Gamma \\ &= \|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 - \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma^2 + 2 \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}, \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k} \rangle_\Gamma \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{w}_{h,k+1}$ satisfait l'équation d'optimalité (5.27) avec $\rho_{d_h} = (\mathcal{D}_h \mathbf{w})|_{\Gamma_d}$, et $\mathbf{v}_h = (\mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}) \in \mathcal{L}_h(\Gamma)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}, \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k} \rangle_\Gamma &= -\frac{1}{c} \langle \mathbf{w}_{h,k+1} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}, \mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_d} \\ &= -\frac{1}{c} \langle (\mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}) + (\pi_h \mathbf{w} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}), \mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_d} \\ &= -\frac{1}{c} \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}\|_{\Gamma_d}^2 - \frac{1}{c} \langle \pi_h \mathbf{w} - \mathcal{D}_h \mathbf{w}, \mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_d}. \end{aligned}$$

Comme $(\mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}) \in \mathcal{L}_h(\Gamma)$, compte tenu de l'hypothèse (5.26), le dernier produit scalaire est nul. Ainsi

$$\|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 = \|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 - \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma^2 - \frac{2}{c} \|\mathbf{w}_{h,k+1} - \pi_h \mathbf{w}\|_{\Gamma_d}^2.$$

Par conséquent

$$\|\mathbf{w}_{h,k+1} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2 \leq \|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma^2.$$

Donc pour chaque $h > 0$ donné, la suite $(\|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma)$ est décroissante.

Nous énonçons ensuite le corollaire ci-dessous, fondamental pour ce qui suit :

Corollaire 5.1 *La famille $(\mathbf{w}_{h,k})$ est bornée, c'est à dire que*

$$\exists A \geq 0 / \forall h > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma \leq A.$$

Preuve *Il résulte de la proposition 5.3 que pour tout $h > 0$ et pour tout $k \geq 0$*

$$\|\mathbf{w}_{h,k} - \mathbf{w}\|_\Gamma \leq \|\mathbf{w}\|_\Gamma \quad (\text{car } \mathbf{w}_{h,0} = 0).$$

Il vient donc que

$$\|\mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma \leq 2 \|\mathbf{w}\|_\Gamma.$$

En posant $A = 2 \|\mathbf{w}\|_\Gamma$, on déduit que la famille $(\mathbf{w}_{h,k})$ est bornée.

Nous démontrons maintenant le **résultat de convergence** suivant quand $h \rightarrow 0$:

Théorème 5.2 Soit $\mathbf{w} = (\vartheta, \beta)$ la paire compatible associée à la fonction harmonique ω supposée telle que $(\vartheta, \beta) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Soit $\mathbf{w}_h = (\vartheta_h, \beta_h)$ la solution du problème de Cauchy discret (5.21). Alors

$$(5.28) \quad \begin{cases} \vartheta_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \vartheta & \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) & \text{au sens fort} \\ \beta_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \beta & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Gamma) & \text{au sens faible} \end{cases} .$$

Ou encore

$$(5.29) \quad \mathbf{w}_h \xrightarrow[h \rightarrow 0]{} \mathbf{w} \quad \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \quad \text{au sens de (5.28)} .$$

Preuve Nous rappelons que, pour tout $h > 0$ fixé, la suite $(\mathbf{w}_{h,k})$ converge dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Sa limite \mathbf{w}_h vérifie :

$$\begin{cases} \mathbf{w}_h \in \mathscr{W}_h^\perp(\Gamma) \\ \langle \mathbf{w}_h - \rho_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathscr{W}_h^\perp(\Gamma) \end{cases}$$

(Ce résultat provient du problème de Cauchy (5.21) et du théorème 5.1. Il a également été montré dans A.Cimetière et al. [11, 15]).

La famille $(\|\mathbf{w}_{h,k}\|_\Gamma)$ étant uniformément bornée par A (cf. corollaire 5.1 précédent), on a, pour tout $h > 0$

$$\|\mathbf{w}_h\|_\Gamma \leq A \quad (\text{car } \mathbf{w}_h = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}_{h,k}).$$

Soit h_1, h_2, \dots, h_n une suite de réels strictement positifs, convergeant vers zéro. Dans toute la suite, afin d'alléger les notations, nous posons

$$\mathbf{w}_n := \mathbf{w}_{h_n}, \quad \mathcal{L}_n(\Gamma) := \mathcal{L}_{h_n}(\Gamma), \quad \pi_n := \pi_{h_n}, \quad \mathcal{V}_n(\Omega) := \mathcal{V}_{h_n}(\Omega), \quad \mathscr{W}_n^\perp(\Gamma) := \mathscr{W}_{h_n}^\perp(\Gamma)$$

$$\mathbf{V}_n := \mathbf{V}_{h_n}, \quad \rho_{d_n} := \rho_{d_{h_n}}, \quad \mathcal{D}_n \mathbf{w} := \mathcal{D}_{h_n} \mathbf{w} .$$

On a donc

$$\|\mathbf{w}_n\|_\Gamma \leq A \quad \forall n \in \mathbb{N}^* .$$

Pour chaque entier $n > 0$, \mathbf{w}_n est un élément de $\mathcal{L}_n(\Gamma)$, donc un élément de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Il en résulte qu'il existe une sous-suite, encore notée \mathbf{w}_n , et un élément ρ^* de $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$ tels que

$$(5.30) \quad \mathbf{w}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \rho^* \quad \text{dans } \mathbf{H}^{1/2} \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \quad \text{faible}$$

ou encore, en posant $\mathbf{w}_n = (\vartheta_n, \beta_n)$, $\rho^* = (\vartheta^*, \beta^*)$

$$\begin{cases} \vartheta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vartheta^* & \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ faible} \\ \beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \beta^* & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ faible} \end{cases} .$$

A cette étape du raisonnement, il reste à montrer que :

(1*) $\rho^* \in \mathcal{L}(\Gamma)$ (c'est à dire que ρ^* est une paire compatible associée à une fonction harmonique ω^*).

(2*) $\mathbf{w} = \rho^* = \rho$ sur Γ , où \mathbf{w} est la solution du problème (4.19) telle que $\mathbf{w}|_{\Gamma_d} = \rho_d$ sur Γ_d .

Pour traiter le point (1*), nous aurons besoin de la proposition suivante :

Proposition 5.4 Soit (ϑ_n, β_n) une suite d'éléments compatibles (au sens discret).

Il existe une unique fonction harmonique discrète ω_n qui vérifie :

$$(5.31) \quad \begin{cases} \omega_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) \\ \omega_n|_{\Gamma} = \vartheta_n \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_n \nabla z_n \, dx = \int_{\Gamma} \beta_n z_n \, d\sigma \quad \forall z_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) \end{cases} .$$

On suppose que

$$(5.32) \quad \begin{cases} \vartheta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vartheta^* & \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ au sens faible} \\ \beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \beta^* & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ au sens faible} \end{cases} .$$

Soit ω^* l'élément de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, solution du problème :

$$(5.33) \quad \begin{cases} \omega^* \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \int_{\Gamma} \omega^* \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vartheta^* \, d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla \omega^* \nabla z \, dx = \int_{\Gamma} \beta^* z \, d\sigma \quad \forall z \in \mathbf{H}^1(\Omega) \end{cases} .$$

Alors la suite (ω_n) converge fortement vers ω^* dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

Remarque 5.3 En posant $z_n = 1$ dans (5.31), on a $\int_{\Gamma} \beta_n \, d\sigma = 0$. Cette relation, connue sous le nom de théorème de Gauss, caractérise la fonction harmonique ω_n .

Remarque 5.4 L'existence et l'unicité de la solution du problème (5.33) résultent du théorème de Lax-Milgram. En effet, la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$ est continue et coercive sur l'espace de Hilbert

$$\Xi = \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \int_{\Gamma} v \, d\sigma = 0 \right\}$$

lorsqu'on le munit de la norme : $v \mapsto |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, où $|v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, équivalente à la norme usuelle de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ (pour la démonstration cf. annexe B).

Preuve (de la proposition 5.4)

Première étape

La solution du problème (5.31) est solution du problème

$$(5.34) \quad \begin{cases} \omega_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) \\ \int_{\Gamma} \omega_n d\sigma = \int_{\Gamma} \vartheta_n d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_n \nabla z_n dx = \int_{\Gamma} \beta_n z_n d\sigma \quad \forall z_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) \end{cases} .$$

Or le problème (5.34) admet une et une seule solution (ici $\int_{\Gamma} \beta_n d\sigma = 0$). Donc les problèmes (5.31) et (5.34) admettent la même solution.

Deuxième étape

Soit ω_n^* la solution du problème

$$(5.35) \quad \begin{cases} \omega_n^* \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \int_{\Gamma} \omega_n^* d\sigma = \int_{\Gamma} \vartheta^* d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_n^* \nabla z dx = \int_{\Gamma} \beta_n z d\sigma \quad \forall z \in \mathbf{H}^1(\Omega) \end{cases} .$$

Alors la différence $\omega^* - \omega_n^*$ vérifie :

$$(5.36) \quad \begin{cases} \omega^* - \omega_n^* \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \int_{\Gamma} (\omega^* - \omega_n^*) d\sigma = 0 \\ \int_{\Omega} \nabla (\omega^* - \omega_n^*) \nabla z dx = \int_{\Gamma} (\beta^* - \beta_n) z d\sigma \quad \forall z \in \mathbf{H}^1(\Omega) \end{cases} .$$

Posant $z = \omega^* - \omega_n^*$, on obtient

$$\int_{\Omega} \nabla (\omega^* - \omega_n^*) \nabla (\omega^* - \omega_n^*) dx = \int_{\Gamma} (\beta^* - \beta_n) (\omega^* - \omega_n^*) d\sigma .$$

La suite (β_n) convergeant faiblement vers β^* dans $\mathbf{L}^2(\Gamma)$, elle converge fortement vers β^* dans $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} (\beta^* - \beta_n) (\omega^* - \omega_n^*) d\sigma \right| &\leq \| \beta^* - \beta_n \|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \| \omega^* - \omega_n^* \|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq A \| \beta^* - \beta_n \|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \| \omega^* - \omega_n^* \|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

La forme bilinéaire $a(u, z) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla z dx$ de la remarque 5.4 étant coercive, pour la norme de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, sur le sous-espace de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ formé des fonctions d'intégrale nulle sur Γ , on obtient :

$$(5.37) \quad \omega_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \omega^* \quad \text{dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ au sens fort} .$$

Troisième étape

Soit $\tilde{\omega}_n$ tel que

$$(5.38) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) \\ \int_{\Gamma} \tilde{\omega}_n d\sigma = \int_{\Gamma} \vartheta^* d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla \tilde{\omega}_n \nabla z_n dx = \int_{\Gamma} \beta_n z_n d\sigma \quad \forall z_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) \end{cases} .$$

Alors

$$(5.39) \quad \|\tilde{\omega}_n - \omega_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

En effet $\tilde{\omega}_n$ et ω_n diffèrent d'une constante que nous notons k_n et $\int_{\Gamma} k_n d\sigma \rightarrow 0$.
Donc la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Quatrième étape

Pour finir, montrons que

$$(5.40) \quad \|\tilde{\omega}_n - \omega_n^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

On a

$$\int_{\Gamma} (\tilde{\omega}_n - \omega_n^*) d\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \nabla (\tilde{\omega}_n - \omega_n^*) \nabla z_n dx = 0 \quad \forall z_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) .$$

Avec $\omega_n = \tilde{\omega}_n + \text{cste}$, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla (\omega_n^* - \tilde{\omega}_n) \nabla (\omega_n^* - \tilde{\omega}_n) dx &= \int_{\Omega} \nabla (\omega_n^* - \tilde{\omega}_n) \nabla (\omega_n^* - p_n(\omega^*)) dx \\ &+ \int_{\Omega} \nabla (\omega_n^* - \omega_n) \nabla (p_n(\omega^*) - \tilde{\omega}_n) dx \end{aligned}$$

où $p_n(\omega^*)$ est la projection orthogonale de ω^* sur $\mathcal{V}_n(\Omega)$ au sens de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Comme $p_n(\omega^*) \in \mathcal{V}_n(\Omega)$, la dernière intégrale est nulle et

$$\int_{\Omega} \nabla (\omega_n^* - \tilde{\omega}_n) \nabla (\omega_n^* - \tilde{\omega}_n) dx \leq \|\tilde{\omega}_n^* - \tilde{\omega}_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\omega_n^* - p_n(\omega^*)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} .$$

La forme bilinéaire a (cf. remarque 5.4) étant coercive sur le sous-ensemble des fonctions de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ d'intégrale nulle sur Γ , il vient

$$(5.41) \quad \alpha \|\omega_n^* - \tilde{\omega}_n\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\omega_n^* - p_n(\omega^*)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} .$$

Comme

$$\|\omega_n^* - p_n(\omega^*)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \|\omega_n^* - \omega^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\omega^* - p_n(\omega^*)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$$

et que $\|\omega_n^* - \omega^*\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ (d'après (5.37)), on a $\|\omega^* - p_n(\omega^*)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. La relation (5.41) donne (5.40). Pour conclure, puisque

$$\omega_n = (\omega_n - \tilde{\omega}_n) + (\tilde{\omega}_n - \omega_n^*) + \omega_n^*$$

compte tenu des relations (5.39), (5.40) et (5.37), on déduit que

$$\omega_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \omega^* \quad \text{dans } \mathbf{H}^1(\Omega) \text{ au sens fort.}$$

D'où la proposition 5.4.

Donc pour l'instant, pour une suite extraite, la proposition 5.4 fournit

$$(5.42) \quad \begin{cases} \vartheta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \vartheta^* & \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ au sens fort} \\ \beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \beta^* & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ au sens faible} \end{cases} .$$

Comme $\mathbf{w}_n = (\vartheta_n, \beta_n)$, nous réécrivons la relation ci-dessus de la façon suivante :

$$(5.43) \quad \mathbf{w}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\vartheta^*, \beta^*) \quad \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \quad \text{au sens de (5.42).}$$

Nous montrons maintenant le point (1*), c'est à dire que $\rho^* \in \mathcal{L}(\Gamma)$.

Proposition 5.5 *La paire (ϑ^*, β^*) est compatible, ou encore $\rho^* = (\vartheta^*, \beta^*)$ appartient à $\mathcal{L}(\Gamma)$.*

Preuve *D'après la définition de ω_n dans (5.31), on a*

$$\int_{\Omega} \nabla \omega_n \nabla z_n \, dx = \int_{\Gamma} \beta_n z_n \, d\sigma \quad \forall z_n \in \mathcal{V}_n(\Omega) .$$

Soit $z \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Notons \hat{z}_n la projection orthogonale de z au sens de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ sur le sous-espace $\mathcal{V}_n(\Omega)$. L'égalité ci-dessus se réécrit

$$\int_{\Omega} \nabla \omega_n \nabla z \, dx + \int_{\Omega} \nabla \omega_n \nabla (\hat{z}_n - z) \, dx = \int_{\Gamma} \beta_n z \, d\sigma + \int_{\Gamma} \beta_n (\hat{z}_n - z) \, d\sigma .$$

Les suites (ω_n) et (β_n) étant respectivement bornées dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$ et $\mathbf{L}^2(\Gamma)$, et utilisant le fait que la suite (\hat{z}_n) converge vers z dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, il en résulte que la seconde et la quatrième intégrales de l'égalité ci-dessus tendent vers zéro. Par ailleurs (ω_n) converge fortement vers ω^* dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$, et (β_n) converge faiblement vers β^* dans $\mathbf{L}^2(\Gamma)$. Donc par passage à la limite dans l'égalité ci-dessus, il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla \omega^* \nabla z \, dx = \int_{\Gamma} \beta^* z \, d\sigma \quad \forall z \in \mathbf{H}^1(\Omega) .$$

D'autre part, ϑ^* est la trace de ω^* sur Γ . Donc le couple $\rho^* = (\vartheta^*, \beta^*)$ est compatible, ou encore est un élément de $\mathcal{L}(\Gamma)$. Ceci termine la preuve de la proposition 5.5.

Proposition 5.6 Soit $\rho = (\vartheta, \beta)$ un couple compatible tel que ρ appartienne à $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Alors

$$(5.44) \quad \pi_h(\rho) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \rho \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \quad \text{au sens fort.}$$

Preuve Puisque $\rho = (\vartheta, \beta)$ est compatible, il existe $u \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u|_{\Gamma} = \vartheta \\ \int_{\Omega} \nabla \omega_n \nabla v_n \, dx = \int_{\Gamma} \beta v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \end{cases} .$$

On note que $\int_{\Gamma} \beta \, d\sigma = 0$.

Pour chaque h donné, on considère une fonction β_h de $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ avec $\int_{\Gamma} \beta_h \, d\sigma = 0$, de sorte que la famille (β_h) vérifie :

$$(5.45) \quad \beta_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \beta \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\Gamma) \quad \text{au sens fort.}$$

Soit \mathbf{u}_h la solution du problème "continu"

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \int_{\Gamma} \mathbf{u}_h \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vartheta \, d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} \beta_h v \, d\sigma \quad \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \end{cases} .$$

On a la convergence (cf. deuxième étape de la preuve de la proposition 5.4)

$$(5.46) \quad \mathbf{u}_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u \quad \text{dans} \quad \mathbf{H}^1(\Omega) \quad \text{au sens fort.}$$

Soit u_h la solution du problème "discret"

$$\begin{cases} u_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \\ \int_{\Gamma} u_h \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vartheta \, d\sigma \\ \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \, dx = \int_{\Gamma} \beta_h v_h \, d\sigma \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \end{cases} .$$

On a la convergence

$$(5.47) \quad \|\mathbf{u}_h - u_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 .$$

En effet

$$(5.48) \quad \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}_h - u_h) \nabla(\mathbf{u}_h - u_h) dx = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}_h - u_h) \nabla(\mathbf{u}_h - p_h(u)) dx \\ + \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}_h - u_h) \nabla(p_h(u) - u_h) dx$$

avec $p_h(u)$ la projection orthogonale de u sur $\mathcal{V}_h(\Omega)$ au sens de $\mathbf{H}^1(\Omega)$. La troisième intégrale ci-dessus est nulle, et la seconde peut être majorée de la façon suivante :

$$\left| \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}_h - u_h) \nabla(\mathbf{u}_h - p_h(u)) dx \right| \leq \|\mathbf{u}_h - u_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_h - p_h(u)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Mais, pour tout h , $\int_{\Gamma} (\mathbf{u}_h - u_h) d\sigma = 0$. Comme $\|\mathbf{u}_h - p_h(u)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, avec la coercivité de la forme bilinéaire a sur le sous-ensemble de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ formé des fonctions d'intégrale nulle sur le bord (cf. remarque 5.4), la relation (5.48) donne (5.47). Par conséquent, avec (5.46) et (5.47), on a

$$(5.49) \quad \|u_h - u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

En particulier $\|u_h|_{\Gamma} - \vartheta\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Par ailleurs, avec la relation (5.45), on a $\|\beta_h|_{\Gamma} - \beta\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Posons $\vartheta_h = u_h|_{\Gamma}$. Alors la famille de couples compatibles (ϑ_h, β_h) converge fortement vers le couple (ϑ, β) dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$. D'où la proposition 5.6.

Nous montrons maintenant le point (2*), c'est à dire que $\mathbf{w} = \rho^* = \rho$ sur Γ .

Proposition 5.7 *La solution \mathbf{w} du problème (4.19) et les paires compatibles $\rho^* = (\vartheta^*, \beta^*)$ et $\rho = (\vartheta, \beta)$ coïncident sur Γ .*

Preuve *Nous rappelons que \mathbf{w}_n vérifie*

$$\begin{cases} \mathbf{w}_n \in \mathcal{W}_n^{\perp}(\Gamma) \\ \langle \mathbf{w}_n - \rho_{d_n}, \mathbf{v}_n \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_n \in \mathcal{W}_n^{\perp}(\Gamma) \end{cases}$$

où $\rho_{d_n} = (\mathcal{D}_n \mathbf{w})|_{\Gamma_d}$ et où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_d}$ désigne le produit scalaire induit sur Γ_d . On a, pour tout $\mathbf{v}_n \in \mathcal{W}_n^{\perp}(\Gamma)$

$$\langle \mathbf{w}_n - \rho_{d_n}, \mathbf{v}_n \rangle_{\Gamma_d} = \langle \mathbf{w}_n - \pi_n \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle_{\Gamma_d} + \langle \pi_n \mathbf{w} - \mathcal{D}_n \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle_{\Gamma_d}.$$

Compte tenu de l'hypothèse (5.26), on sait que $\langle \pi_n \mathbf{w} - \mathcal{D}_n \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle_{\Gamma_d} = 0$. On déduit donc que

$$\langle \mathbf{w}_n - \pi_n \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_n \in \mathcal{W}_n^\perp(\Gamma).$$

Or $\pi_n \mathbf{w}$ est un élément de $\mathcal{L}_n(\Gamma)$ qui se décompose sous la forme

$$\pi_n \mathbf{w} = g_n \mathbf{w} + q_n \mathbf{w} \quad \text{avec } g_n \mathbf{w} \in \mathcal{W}_n^\perp(\Gamma) \text{ et } q_n \mathbf{w} \in \mathcal{W}_n(\Gamma).$$

Par conséquent, en posant $\mathbf{v}_n = \mathbf{w}_n - g_n \mathbf{w}$ (qui appartient à $\mathcal{W}_n^\perp(\Gamma)$ car \mathbf{w}_n appartient à $\mathcal{W}_n^\perp(\Gamma)$) et comme les éléments de $\mathcal{W}_n(\Gamma)$ sont nuls sur Γ_d , il s'ensuit que

$$\langle \mathbf{w}_n - g_n \mathbf{w}, \mathbf{w}_n - g_n \mathbf{w} \rangle_{\Gamma_d} = 0$$

ou encore $\mathbf{w}_n = g_n \mathbf{w}$ sur Γ_d . Or sur Γ_d , on a $\pi_n \mathbf{w} = g_n \mathbf{w}$ puisque $q_n \mathbf{w} = 0$ sur Γ_d . Ainsi sur Γ_d , on a $\mathbf{w}_n = \pi_n \mathbf{w}$. Par suite, avec les relations (5.43) et (5.44), on a les convergences

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\vartheta^*, \beta^*)|_{\Gamma_d} && \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{L}^2(\Gamma_d) \\ \mathbf{w}_n &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{w}|_{\Gamma_d} && \text{dans } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d) \times \mathbf{L}^2(\Gamma_d) \end{aligned} .$$

La première convergence a lieu au sens où la première composante de \mathbf{w}_n converge fortement vers ϑ^* dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_d)$ et la deuxième composante de \mathbf{w}_n converge faiblement vers β^* dans $\mathbf{L}^2(\Gamma_d)$. Par unicité de la limite sur Γ_d , il s'ensuit que

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_d} = (\vartheta^*, \beta^*) \quad \text{sur } \Gamma_d .$$

Par ailleurs, comme \mathbf{w} est la solution du problème (4.19) on sait que

$$\mathbf{w}|_{\Gamma_d} = (\vartheta_d, \beta_d) \quad \text{sur } \Gamma_d .$$

D'après le théorème du prolongement unique de Holmgren pour une fonction harmonique, on déduit que

$$\mathbf{w} = \rho^* = \rho \quad \text{sur } \Gamma .$$

Ce qui achève la preuve de la proposition 5.7 et des points (1*) et (2*). Ces derniers points prouvés donnent le théorème 5.2.

5.2.8 Système linéaire caractérisant $\mathcal{L}_h(\Gamma)$

Une base de l'espace $\mathcal{V}_h(\Omega)$ est construite en associant à chaque sommet intérieur de la triangulation la fonction qui vaut 1 au *i*ème noeud intérieur et zéro aux autres noeuds. Posons

$$\mathcal{W}_I = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_M)^T$$

le vecteur ⁽⁴⁾ dont les coordonnées représentent les valeurs de ω_h dans cette base.

Une base de l'espace $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ (défini dans (5.11)), que nous expliciterons dans la suite, est constituée des fonctions qui valent 1 au noeud correspondant du maillage sur la frontière et qui sont nulles aux autres noeuds. Dans cette base nous notons

$$\mathcal{W} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3, \dots, \bar{\omega}_N)^T$$

le vecteur constitué des valeurs nodales de ω_h .

Une base de l'espace $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ (défini dans (5.12)) est formée des fonctions constantes par morceaux sur Γ . Désignons par

$$\mathcal{W}' = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_N)^T$$

le vecteur dont les coordonnées représentent les valeurs de β_h dans cette base. D'après la relation (5.8) (encore observée dans (5.13) où β_h représente $\partial\omega_h/\partial n$), $\mathcal{W}_I, \mathcal{W}$ et \mathcal{W}' vérifient le système linéaire

$$(5.50) \quad \mathbb{A} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_I \\ \mathcal{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbb{B} \mathcal{W}' \end{bmatrix}.$$

La matrice de rigidité \mathbb{A} ⁽⁵⁾ du système peut se réécrire sous la forme :

$$(5.51) \quad \mathbb{A} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{ii} & \mathbb{A}_{ie} \\ \mathbb{A}_{ei} & \mathbb{A}_{ee} \end{bmatrix}$$

\mathbb{A}_{ii} est la matrice de rigidité inversible, obtenue lors de la résolution d'un problème de Dirichlet homogène. Les matrices \mathbb{A}_{ie} et \mathbb{A}_{ei} correspondent à un couplage des noeuds intérieurs de la triangulation avec les noeuds sur le bord du domaine tandis que la matrice \mathbb{A}_{ee} est constituée des termes de rigidité sur les noeuds de la frontière. Les relations (5.50) et (5.51) conduisent au **système linéaire**

$$(5.52) \quad \mathbb{H} \mathcal{W} + \mathbb{B} \mathcal{W}' = 0$$

⁴T désigne la transposée du vecteur correspondant et ce sera le cas dans toute la suite.

⁵L'écriture de \mathbb{A} sous cette forme rappelle la méthode de condensation évoquée dans [15]

dans lequel on a

$$(5.53) \quad \mathbb{H} = \mathbb{A}_{ee} - \mathbb{A}_{ei} \mathbb{A}_{ii}^{-1} \mathbb{A}_{ie}.$$

Compte tenu de (5.52), nous pouvons définir un opérateur linéaire \mathcal{A}_h de façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longmapsto \mathbb{R}^N \\ (\mathcal{W}, \mathcal{W}') &\longmapsto \mathbb{H} \mathcal{W} + \mathbb{B} \mathcal{W}' \end{aligned} .$$

Il est immédiat avec (5.52) que

$$(5.54) \quad \mathcal{A}_h(\mathcal{W}, \mathcal{W}') = 0 .$$

Ce qui permet d'introduire l'espace des solutions du système linéaire (5.52) ou (5.54). Nous le notons $\mathcal{L}_N(\Gamma)$ et nous le définissons de manière suivante :

$$(5.55) \quad \mathcal{L}_N(\Gamma) = \left\{ (\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N / \mathcal{A}_h(\mathcal{W}, \mathcal{W}') = 0 \right\} .$$

L'espace $\mathcal{L}_N(\Gamma)$ est appelé *l'espace des fonctions harmoniques discrètes* ⁽⁶⁾.

L'équation $\mathcal{A}_h(\mathcal{W}, \mathcal{W}') = 0$ s'écrit encore :

$$\mathbb{H}_i \mathcal{W} + \mathbb{B}_i \mathcal{W}' = 0 \text{ pour tout } i = 1 \dots N$$

où \mathbb{H}_i (respectivement \mathbb{B}_i) est le i ème vecteur ligne de la matrice \mathbb{H} (respectivement de la matrice \mathbb{B}). Les égalités (5.52) et (5.54) sont équivalentes au système des **N équations suivantes** à $2N$ inconnues \mathcal{W} et \mathcal{W}'

$$(5.56) \quad \mathcal{A}_{h_i}(\mathcal{W}, \mathcal{W}') = 0 \text{ pour tout } i = 1 \dots N$$

où pour tout $i = 1 \dots N$, l'opérateur linéaire \mathcal{A}_{h_i} est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{h_i} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N &\longmapsto \mathbb{R} \\ (\mathcal{W}, \mathcal{W}') &\longmapsto \mathbb{H}_i \mathcal{W} + \mathbb{B}_i \mathcal{W}' . \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, l'espace $\mathcal{L}_N(\Gamma)$ se réécrit

$$(5.57) \quad \mathcal{L}_N(\Gamma) = \left\{ (\mathcal{W}, \mathcal{W}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N / \mathcal{A}_{h_i}(\mathcal{W}, \mathcal{W}') = 0, \forall i = 1 \dots N \right\} .$$

⁶C'est l'appellation utilisée dans [11, 53]

5.2.9 L'algorithme discret en dimension finie

Nous rappelons que pour traiter le problème (5.14), le principe de régularisation nous a conduit à la suite itérative (5.18) ci-dessous :

soient $\mathbf{w}_{h,0} = 0$ et $c > 0$ donnés,

$$\begin{cases} \text{trouver } \mathbf{w}_{h,k+1} \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{w}_{h,k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h(\Gamma) \end{cases} .$$

Cette suite consiste à minimiser, à chaque itération, la fonctionnelle J_c^k définie par :

$$(5.58) \quad J_c^k(\mathbf{v}_h) = \|\mathbf{v}_h - \rho_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{v}_h - \mathbf{w}_{h,k}\|_{\Gamma}^2 .$$

Ici, nous considérons que $\mathbf{v}_h = (v_h, v'_h)$, $\rho_{d_h} = (\vartheta_{d_h}, \beta_{d_h})$ est la donnée approchée de la donnée $\rho_d = (\vartheta_d, \beta_d)$ et que la solution optimale $\mathbf{w}_{h,k} = (\omega_{h,k}, \omega'_{h,k})$ est une approximation de la solution $\mathbf{w}_k = (\omega_k, \omega'_k)$ obtenue à la k^e itération. Dans ce cas, la relation (5.58) s'écrit encore :

$$(5.59) \quad J_c^k(\mathbf{v}_h) = \|v_h - \vartheta_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + \|v'_h - \beta_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|v_h - w_{h,k}\|_{\Gamma}^2 + c\|v'_h - w'_{h,k}\|_{\Gamma}^2 .$$

Dans ce paragraphe, nous allons reformuler le problème (5.18), en dimension finie, comme un problème d'optimisation sous la **contrainte égalité** (5.54) ou les contraintes égalités (5.56). Pour cela, nous calculerons d'abord la dérivée directionnelle de J_c^k . Ensuite, nous écrirons l'expression de cette dérivée directionnelle dans des bases des espaces $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ définis par (5.11) et (5.12). Nous préciserons ces bases au cours de notre développement et nous prendrons en compte les égalités (5.57).

5.2.9.1 Calcul de la dérivée directionnelle

Compte tenu de (5.59), lorsque la partie Γ_d (respectivement Γ) est munie de la norme $L^2(\Gamma_d)$ (respectivement $L^2(\Gamma)$) et λ est un paramètre réel, la dérivée de J_c^k en $\mathbf{v}_h = (v_h, v'_h)$ dans la direction $\mathbf{U}_h = (u_h, u'_h)$ s'écrit

$$(5.60) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J_c^k(\mathbf{v}_h + \lambda \mathbf{U}_h) \Big|_{\lambda=0} &= 2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds + 2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds \\ &+ 2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s) u'_h(s) ds + 2c \int_{\Gamma} v'_h(s) u'_h(s) ds \\ &- 2 \int_{\Gamma_d} \vartheta_{d_h}(s) u_h(s) ds - 2c \int_{\Gamma} w_{h,k}(s) u_h(s) ds \\ &- 2 \int_{\Gamma_d} \beta_{d_h}(s) u'_h(s) ds - 2c \int_{\Gamma} w'_{h,k}(s) u'_h(s) ds . \end{aligned}$$

Dans le calcul effectif qui va suivre, nous allons maintenant écrire les expressions des intégrales du second membre de (5.60) dans les bases des espaces $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ définis par les relations (5.11) et (5.12).

Considérons les fonctions $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ de la base nodale de $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ qui vérifient

$$(5.61) \quad \phi_i(s) = \begin{cases} \frac{s}{l_{i-1}} & \text{si } s \in \Gamma_{i-1} \\ 1 - \frac{s}{l_i} & \text{si } s \in \Gamma_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous supposons dans (5.61) que chaque élément rectiligne Γ_i est de **longueur** l_i pour tout $i = 1 \dots N$ et nous posons

$$\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots, v_N)^T$$

le vecteur dont les composantes sont les valeurs de v_h aux noeuds $(s_i)_{1 \leq i \leq N}$. La base de $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ est formée de la famille de fonctions constantes par morceaux que nous notons $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$. Nous posons aussi

$$\mathcal{V}' = (v'_1, v'_2, \dots, v'_N)^T$$

le vecteur dont les composantes sont les valeurs respectives de v'_h sur chaque segment Γ_i , pour tout $i = 1 \dots N$.

Calcul de la quantité $2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds$.

Supposons que Γ_d contient un nombre entier d'intervalles. Dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_d}$, on a $v_h(s) = \sum_{j=1}^{N_d} v_j \phi_j(s)$. Comme u_h est quelconque dans $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma_d)$, il vient que pour $u_h = \phi_i, i = 1 \dots N_d$

$$(5.62) \quad 2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds = 2 \sum_{j=1}^{N_d} v_j \int_{\Gamma_d} \phi_j(s) \phi_i(s) ds, \quad i = 1 \dots N_d$$

$$(5.63) \quad 2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds = 2 \sum_{j=1}^{N_d} a_{ij} v_j, \quad i = 1 \dots N_d$$

où l'on a posé $a_{ij} = \int_{\Gamma_d} \phi_j(s) \phi_i(s) ds$. On remarque d'après (5.63) que $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1 \dots N_d$ et que si $|j - i| \geq 2$, ϕ_i et ϕ_j n'ont aucun support en commun ce qui entraîne que $a_{ij} = 0$. Dans le **cas où** $|j - i| \leq 1$, **pour** $i = j$ nous

obtenons successivement

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \int_{\Gamma_1} \phi_1^2(s) ds = \int_0^{l_1} \left(1 - \frac{s}{l_1}\right)^2 ds = \frac{l_1}{3} \\
a_{ii} &= \int_{\Gamma_{i-1}} \phi_i^2(s) ds + \int_{\Gamma_i} \phi_i^2(s) ds \\
&= \int_0^{l_{i-1}} \left(1 - \frac{s}{l_{i-1}}\right)^2 ds + \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{s}{l_i}\right)^2 ds = \frac{l_{i-1} + l_i}{3} \\
a_{N_d N_d} &= \int_{\Gamma_{N_d-1}} \phi_{N_d}^2(s) ds = \int_0^{l_{N_d-1}} \left(1 - \frac{s}{l_{N_d-1}}\right)^2 ds = \frac{l_{N_d-1}}{3}.
\end{aligned}$$

Dans le cas où $|j - i| \leq 1$, pour $i \neq j$

$$\begin{aligned}
a_{ii+1} &= \int_{\Gamma_i} \phi_i(s) \phi_{i+1}(s) ds = \int_0^{l_i} \left(\frac{s}{l_i} - \frac{s^2}{l_i^2}\right) ds = \frac{l_i}{6} \\
a_{ii-1} &= \int_{\Gamma_{i-1}} \phi_{i-1}(s) \phi_i(s) ds = \frac{l_{i-1}}{6}.
\end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (5.63) et des calculs précédents, nous posons

$$\mathbb{A}_{N_d N_d} = (2a_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_d} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}_{NN} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{N_d N_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le "0" représente la matrice nulle d'ordre $(N - N_d)$, et nous obtenons

$$(5.64) \quad 2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds = \mathbb{A}_{NN} \mathcal{V}.$$

Calcul de la quantité $2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds$.

Après avoir écrit l'expression de la fonction v_h dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ et après avoir posé $u_h = \phi_i, i = 1 \dots N$, on a

$$(5.65) \quad 2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds = 2c \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma} \phi_j(s) \phi_i(s) ds v_j, \quad i = 1 \dots N$$

$$(5.66) \quad 2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds = 2c \sum_{j=1}^N c_{ij} v_j, \quad i = 1 \dots N$$

égalité dans laquelle $c_{ij} = \int_{\Gamma} \phi_j(s) \phi_i(s) ds$. On a $c_{ij} = c_{ji}$ pour tout $i, j = 1 \dots N$ et nous savons par définition de ϕ_i et ϕ_j que $c_{ij} = 0$ dès que $|j - i| \geq 2$ avec $i \notin \{1, N\}$ et $j \notin \{1, N\}$. Ainsi si $i, j \in \{1, N\}$

$$c_{1N} = \int_{\Gamma_N} \phi_1(s) \phi_N(s) ds = \int_0^{l_N} \left(1 - \frac{s}{l_N}\right) \frac{s}{l_N} ds = \frac{l_N}{6}.$$

Si $|j - i| \leq 1$, et $i = j$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \int_{\Gamma_N} \phi_N^2(s) ds + \int_{\Gamma_1} \phi_1^2(s) ds \\
&= \int_0^{l_N} \left(1 - \frac{s}{l_N}\right)^2 ds + \int_0^{l_1} \left(1 - \frac{s}{l_1}\right)^2 ds = \frac{l_N + l_1}{3} \\
c_{ii} &= \int_{\Gamma_{i-1}} \phi_i^2(s) ds + \int_{\Gamma_i} \phi_i^2(s) ds \\
&= \int_0^{l_{i-1}} \left(1 - \frac{s}{l_{i-1}}\right)^2 ds + \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{s}{l_i}\right)^2 ds = \frac{l_{i-1} + l_i}{3} \\
c_{NN} &= \int_{\Gamma_{N-1}} \phi_N^2(s) ds + \int_{\Gamma_N} \phi_N^2(s) ds \\
&= \int_0^{l_{N-1}} \left(1 - \frac{s}{l_{N-1}}\right)^2 ds + \int_0^{l_N} \left(1 - \frac{s}{l_N}\right)^2 ds = \frac{l_{N-1} + l_N}{3}.
\end{aligned}$$

Si $|j - i| \leq 1$, et $i \neq j$

$$\begin{aligned}
c_{ii+1} &= \int_{\Gamma_i} \phi_i(s) \phi_{i+1}(s) ds = \int_0^{l_i} \left(\frac{s}{l_i} - \frac{s^2}{l_i^2}\right) ds = \frac{l_i}{6} \\
c_{ii-1} &= \int_{\Gamma_{i-1}} \phi_{i-1}(s) \phi_i(s) ds = \frac{l_{i-1}}{6}.
\end{aligned}$$

D'après les différentes expressions précédentes des c_{ij} pour tout $i, j = 1 \dots N$, nous posons

$$\mathbb{C}_{NN} = (2c_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$$

ce qui, grâce à l'égalité (5.66), fournit

$$(5.67) \quad 2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds = c \mathbb{C}_{NN} \mathcal{V}.$$

Calcul de la quantité $2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s) u'_h(s) ds$.

En écrivant v'_h dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N_d}$, on a $v'_h(s) = \sum_{j=1}^{N_d} v'_j v_j(s)$. Comme u'_h est quelconque dans $\mathcal{H}_h^0(\Gamma_d)$, pour $u'_h = v_i, i = 1 \dots N_d$, il s'ensuit que

$$(5.68) \quad 2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s) u'_h(s) ds = 2 \sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_d} v_j(s) v_i(s) ds v'_j, \quad i = 1 \dots N_d$$

$$(5.69) \quad 2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s) u'_h(s) ds = 2 \sum_{j=1}^{N_d} a'_{ij} v'_j, \quad i = 1 \dots N_d.$$

Dans (5.69), $a'_{ij} = \int_{\Gamma_d} v_j(s)v_i(s) ds$. comme pour tout $i, j = 1 \dots N_d$ v_i et v_j ont des supports disjoints lorsque $|j - i| \geq 1$, nous avons $a'_{ij} = 0$ dès que $|j - i| \geq 1$. Dans le cas contraire

$$a'_{ii} = \int_{\Gamma_i} v_i^2(s) ds = l_i, \quad i = 1 \dots N_d.$$

Compte tenu de la relation (5.69), nous posons

$$\mathbb{A}'_{N_d N_d} = (2a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq N_d} \quad \text{et} \quad \mathbb{A}'_{NN} = \begin{bmatrix} \mathbb{A}'_{N_d N_d} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

le "0" désigne comme précédemment la matrice nulle d'ordre $(N - N_d)$, et nous déduisons que

$$(5.70) \quad 2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s)u'_h(s) ds = \mathbb{A}'_{NN} \mathcal{V}'.$$

Calcul de la quantité $2c \int_{\Gamma} v'_h(s)u'_h(s) ds$.

Après avoir, comme dans le calcul précédent de $2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s)u'_h(s) ds$, écrit l'expression de v'_h dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, et posé $u'_h = v_i, i = 1 \dots N$ car u'_h est quelconque dans $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$, il s'ensuit que

$$(5.71) \quad 2c \int_{\Gamma_d} v'_h(s)u'_h(s) ds = 2c \sum_{j=1}^{N_d} \int_{\Gamma_d} v_j(s)v_i(s) ds v'_j, \quad i = 1 \dots N$$

$$(5.72) \quad 2c \int_{\Gamma_d} v'_h(s)u'_h(s) ds = 2c \sum_{j=1}^{N_d} c'_{ij} v'_j, \quad i = 1 \dots N.$$

Dans (5.72), $c'_{ij} = \int_{\Gamma} v_j(s)v_i(s) ds$. Vu que v_i et v_j sont à supports disjoints lorsque $|j - i| \geq 1$ pour tout $i, j = 1 \dots N$, nous en tirons que $c'_{ij} = 0$ lorsque $|j - i| \geq 1$. Sinon

$$c'_{ii} = \int_{\Gamma_i} v_i^2(s) ds = l_i, \quad i = 1 \dots N.$$

Nous posons

$$\mathbb{C}'_{NN} = (2c'_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}.$$

D'après l'égalité (5.72), nous obtenons

$$(5.73) \quad 2c \int_{\Gamma} v'_h(s)u'_h(s) ds = c \mathbb{C}'_{NN} \mathcal{V}'.$$

A ce stade du calcul, il ne reste qu'à transcrire les termes $2 \int_{\Gamma_d} \vartheta_{d_h}(s) u_h(s) ds$, $2c \int_{\Gamma} w_{h,k}(s) u_h(s) ds$, $2 \int_{\Gamma_d} \beta_{d_h}(s) u'_h(s) ds$ et $2c \int_{\Gamma} w'_{h,k}(s) u'_h(s) ds$ dans les bases indiquées antérieurement. Pour cela, nous posons successivement

$$\mathcal{Y} = (\vartheta_{h,1}, \vartheta_{h,2}, \dots, \vartheta_{h,N})^T$$

le vecteur dont les composantes dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont les valeurs respectives de ϑ_h aux noeuds $(s_i)_{1 \leq i \leq N}$.

$$\mathcal{W}_k = (w_{k,1}, w_{k,2}, \dots, w_{k,N})^T$$

le vecteur dont les composantes dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont, à la k^e itération, les valeurs respectives de $w_{h,k}$ aux noeuds $(s_i)_{1 \leq i \leq N}$.

$$\mathcal{Y}' = (\beta_{h,1}, \beta_{h,2}, \dots, \beta_{h,N})^T$$

le vecteur dont les composantes dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont les valeurs respectives de β_h sur chaque segment Γ_i , pour tout $i = 1 \dots N$.

$$\mathcal{W}'_k = (w'_{k,1}, w'_{k,2}, \dots, w'_{k,N})^T$$

le vecteur dont les composantes dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont, à la k^{ieme} itération, les valeurs respectives de $w'_{h,k}$ sur de chaque segment Γ_i , pour tout $i = 1 \dots N$.

Calcul de la quantité $2 \int_{\Gamma_d} \vartheta_{d_h}(s) u_h(s) ds$.

Compte tenu du calcul de la quantité $2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds$, il s'ensuit que

$$(5.74) \quad 2 \int_{\Gamma_d} \vartheta_{d_h}(s) u_h(s) ds = \mathbb{A}_{NN} \mathcal{Y}.$$

Calcul de la quantité $2c \int_{\Gamma} w_{h,k}(s) u_h(s) ds$.

D'après le calcul de $2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds$ nous déduisons que

$$(5.75) \quad 2c \int_{\Gamma} w_{h,k}(s) u_h(s) ds = c \mathbb{C}_{NN} \mathcal{W}_k.$$

Calcul de la quantité $2 \int_{\Gamma_d} \beta_{d_h}(s) u'_h(s) ds$.

Le calcul du terme $2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s) u'_h(s) ds$ conduit à la relation

$$(5.76) \quad 2 \int_{\Gamma_d} \beta_{d_h}(s) u_h(s) ds = \mathbb{A}'_{NN} \mathcal{Y}'.$$

Calcul de la quantité $2c \int_{\Gamma} w'_{h,k}(s) u'_h(s) ds$.

D'après le calcul du terme $2c \int_{\Gamma} v'_h(s) u'_h(s) ds$, il vient que

$$(5.77) \quad 2c \int_{\Gamma} w'_{h,k}(s) u'_h(s) ds = c \mathbb{C}'_{NN} \mathcal{W}'_k .$$

D'après les expressions (5.64) , (5.67), (5.70), (5.73) et les égalités (5.74) à (5.77), la relation (5.60) qui exprime la dérivée de J_c^k en \mathbf{v}_h dans la direction \mathbf{U}_h se formule **en dimension finie**

$$(5.78) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J_c^k(\mathbf{v}_h + \lambda \mathbf{U}_h) \Big|_{\lambda=0} &= (\mathbb{A}_{NN} + c \mathbb{C}_{NN}) \mathcal{V} + (\mathbb{A}'_{NN} + c \mathbb{C}'_{NN}) \mathcal{V}' \\ &- c \mathbb{C}_{NN} \mathcal{W}_k - c \mathbb{C}'_{NN} \mathcal{W}'_k - \mathbb{A}_{NN} \mathcal{Y} - \mathbb{A}'_{NN} \mathcal{Y}' . \end{aligned}$$

5.2.9.2 Le processus discret à la $(k+1)^e$ itération

Dans (5.78) nous tirons en particulier que pour $\mathbf{v}_h = \mathbf{w}_{h,k+1}$ solution de (5.18), à la $(k+1)^e$ itération de l'algorithme, on a

$$(5.79) \quad \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J_c^k(\mathbf{w}_{h,k+1} + \lambda \mathbf{U}_h) \Big|_{\lambda=0} &= (\mathbb{A}_{NN} + c \mathbb{C}_{NN}) \mathcal{W}_{k+1} + (\mathbb{A}'_{NN} + c \mathbb{C}'_{NN}) \mathcal{W}'_{k+1} \\ &- c \mathbb{C}_{NN} \mathcal{W}_k - c \mathbb{C}'_{NN} \mathcal{W}'_k - \mathbb{A}_{NN} \mathcal{Y} - \mathbb{A}'_{NN} \mathcal{Y}' . \end{aligned}$$

Nous introduisons à la $(k+1)^e$ itération, l'opérateur \mathcal{G}_{k+1} défini sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et à valeurs dans \mathbb{R}^N défini par :

$$(5.80) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) &= (\mathbb{A}_{NN} + c \mathbb{C}_{NN}) \mathcal{W}_{k+1} + (\mathbb{A}'_{NN} + c \mathbb{C}'_{NN}) \mathcal{W}'_{k+1} \\ &- c \mathbb{C}_{NN} \mathcal{W}_k - c \mathbb{C}'_{NN} \mathcal{W}'_k - \mathbb{A}_{NN} \mathcal{Y} - \mathbb{A}'_{NN} \mathcal{Y}' . \end{aligned}$$

Comme la solution optimale approchée $(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) \in \mathcal{H}_N(\Gamma)$, il découle de (5.54) que

$$(5.81) \quad \mathcal{A}_h(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) = 0 \quad .$$

D'après Ciarlet [64], Collatz [65] ou Culioli [66], l'espace $\mathcal{L}_N(\Gamma)$ défini dans (5.55) apparaît comme l'espace des contraintes. Nous introduisons un multiplicateur de Lagrange que nous notons $\mu_{k+1} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T$ associé à la contrainte égalité (5.81). Le problème de **minimisation** (5.18) de la fonctionnelle J_c^k dans $\mathcal{L}_h(\Gamma)$ se transforme, à la $(k+1)^e$ itération, en un problème d'optimisation sous **la contrainte égalité** (5.81) et se formule de la façon suivante :

soient $(\mathcal{W}_0, \mathcal{W}'_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$(5.82) \quad \begin{cases} \text{trouver } (\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}, \mu_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N \text{ tels que} \\ \mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) + \mathcal{J}(\mathcal{A}_h)(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1})^T \mu_{k+1} = 0 \\ \mathcal{W}_{k+1} + \mathcal{W}'_{k+1} = 0 \end{cases} .$$

$\mathcal{J}(\mathcal{A}_h)(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1})$ représente la matrice jacobienne associée à \mathcal{A}_h en $(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1})$. Comme par ailleurs il s'ensuit de (5.56) que la solution optimale $(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1})$ doit vérifier les N contraintes égalités

$$(5.83) \quad \mathcal{A}_{h_i}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) = 0 \text{ pour tout } i = 1 \dots N$$

le problème d'optimisation (5.82) revient à minimiser la fonctionnelle convexe J_c^k , au sens des moindres carrés, sous les contraintes égalités (5.83) dans l'espace des contraintes $\mathcal{L}_N(\Gamma)$ défini par la relation (5.57) et se réécrit à la $(k+1)^e$ itération de l'algorithme

soient $(\mathcal{W}_0, \mathcal{W}'_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$(5.84) \quad \begin{cases} \text{trouver } (\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}, \mu_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N \text{ tels que} \\ \mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) + \sum_{i=1}^N \nabla(\mathcal{A}_{h_i})(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) \mu_i = 0 \\ \mathcal{A}_{h_1}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) = 0 \\ \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \mathcal{A}_{h_N}(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}) = 0 \end{cases} .$$

Nous rappelons que $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux N contraintes égalités de type (5.83). Le problème (5.81) comme le problème (5.84) est un **système linéaire** de $3N$ équations à $3N$ inconnues $(\mathcal{W}_{k+1}, \mathcal{W}'_{k+1}, \mu_{k+1})$ à résoudre à chaque pas du processus itératif. Ces équations s'écrivent sous **forme matricielle**

$$(5.85) \quad \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{NN} + c\mathbb{C}_{NN} & 0 & \mathbb{H}^T \\ 0 & \mathbb{A}'_{NN} + c\mathbb{C}'_{NN} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{H} & \mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{k+1} \\ \mathcal{W}'_{k+1} \\ \mu_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\mathbb{C}_{NN} & 0 & 0 \\ 0 & c\mathbb{C}'_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_k \\ \mathcal{W}'_k \\ \mu_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{NN}\mathcal{Y} \\ \mathbb{A}'_{NN}\mathcal{Y}' \\ 0 \end{bmatrix}$$

les matrices $\mathbb{A}_{NN}, \mathbb{A}'_{NN}, \mathbb{C}_{NN}, \mathbb{C}'_{NN}$ précédentes interviennent dans la définition de \mathcal{G}_{k+1} et dans le calcul des quantités du second membre de (5.60). Elles sont données sous forme explicite en annexe A ainsi que la matrice \mathbb{B} . Pour les implémentations qui seront présentées dans la suite, la matrice \mathbb{H} est calculée par le logiciel Scilab à partir de la formule (5.53). Dans (5.85), nous notons \mathbb{G}_N la matrice du premier membre Nous notons \mathbb{S}_N la matrice du second membre. Les matrices \mathbb{G}_N et \mathbb{S}_N n'ont pas à être réactualisées au cours du processus itératif.

Remarque 5.5 *Au début de la section 4.4.2, la résolution du problème pour l'équation de poisson (4.21) a nécessité un changement de fonction inconnue de la solution et a conduit à l'étude du problème inverse (4.24) dont la formulation équivalente est (4.32). Comme la formulation du problème inverse de Cauchy (4.24) est (formellement) semblable à celle du problème inverse de Cauchy (4.11) pour l'équation de Laplace, nous allons aborder la partie numérique du problème (4.24) en utilisant des raisonnements similaires (choix des espaces d'approximation, démonstrations des convergences...) à ceux développés dans la section 5.2 rattachée au problème approché pour l'équation de Laplace.*

5.3 Le problème approché pour l'équation de Poisson

5.3.1 Formulation faible

Les problèmes (4.11) et (4.24) sont exactement de même nature. Il suffit de supposer que la solution \hat{z} du problème de Cauchy (4.24) est dans

$$\mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega) = \{ u \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \Delta u = 0 \} .$$

On définit l'espace $\mathcal{P}(\Gamma)$ des paires compatibles de la façon suivante :

$$(5.86) \quad \mathcal{P}(\Gamma) = \left\{ \varsigma = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ tel qu'il existe} \right. \\ \left. \hat{z} \in \mathcal{H}_0^1(\Delta, \Omega), \hat{z}|_{\Gamma} = \hat{\varphi} \text{ et } \frac{\partial \hat{z}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \hat{\psi} \right\} .$$

dans lequel, à partir des relations dans (4.25), on a

$$(5.87) \quad \hat{\varphi} = \varphi - \bar{\varphi} \quad \text{et} \quad \hat{\psi} = \psi - \bar{\psi} .$$

Proposition 5.8

$$(5.88) \quad \mathcal{P}(\Gamma) = \left\{ \varsigma = (\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma) \text{ tel qu'il existe} \right. \\ \left. \hat{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \hat{z}|_{\Gamma} = \hat{\varphi} \text{ et } \int_{\Omega} \nabla \hat{z} \nabla v \, dx = \int_{\Gamma} \hat{\psi} v \, d\sigma \, \forall v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \right\} .$$

Preuve *Il suffit d'utiliser une démarche identique à celle de la preuve de la proposition 5.1 en remplaçant $\mathcal{L}(\Gamma)$ par $\mathcal{P}(\Gamma)$, $\rho = (\vartheta, \beta)$ par $\varsigma = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ et ω par \hat{z} .*

5.3.2 L'espace d'approximation $\mathcal{P}_h(\Gamma)$

Soit $\varsigma_h = (\hat{\varphi}_h, \hat{\psi}_h)$ une approximation de la paire compatible $\varsigma = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ où $\hat{\varphi}$ (respectivement $\hat{\psi}$) représente la trace (respectivement la dérivée normale) de la fonction \hat{z} . Nous définissons l'espace d'approximation $\mathcal{P}_h(\Gamma)$ de $\mathcal{P}(\Gamma)$ de la façon suivante :

$$(5.89) \quad \mathcal{P}_h(\Gamma) = \left\{ \varsigma_h = (\hat{\varphi}_h, \hat{\psi}_h) \in \mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \times \mathcal{H}_h^0(\Gamma) \text{ tel qu'il} \right. \\ \left. \text{existe } \hat{z}_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \text{ avec } \hat{z}_h|_{\Gamma} = \hat{\varphi}_h \text{ et} \right. \\ \left. \int_{\Omega} \nabla \hat{z}_h \nabla v_h \, dx = \int_{\Gamma} \hat{\psi}_h v_h \, d\sigma \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega) \right\}.$$

où les espaces $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$ et $\mathcal{V}_h(\Omega)$, respectivement définis par (5.11), (5.12) et (5.7), sont respectivement les approximations des espaces $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ et $\mathbf{H}^1(\Omega)$.

5.3.3 Le problème de Cauchy discret

Nous désignons toujours par N_d le nombre de données et par N la dimension de l'espace $\mathcal{P}_h(\Gamma)$. La résolution du problème de Cauchy discret consiste à trouver dans $\mathcal{P}_h(\Gamma)$ les éléments qui coïncident parfaitement avec ces données. Lorsque N_d est strictement supérieur à N , cette solution n'est obtenue qu'au sens des moindres carrés. Dans le cas contraire, il y a une infinité de prolongements possibles sur Γ_i . On introduit l'espace $\mathcal{Z}_h(\Gamma)$ défini par :

$$(5.90) \quad \mathcal{Z}_h(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v}_h = (v_h, v'_h) \in \mathcal{P}_h(\Gamma) \text{ tel que } \mathbf{v}_h|_{\Gamma_d} = 0 \right\}.$$

Soit $\mathcal{Z}_h^{\perp}(\Gamma)$, l'espace orthogonal de $\mathcal{Z}_h(\Gamma)$ dans $\mathcal{P}_h(\Gamma)$, on a

$$(5.91) \quad \mathcal{Z}_h^{\perp}(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathcal{P}_h(\Gamma) / \langle \mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h \rangle_{\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{z}_h \in \mathcal{Z}_h(\Gamma) \right\}.$$

Le problème de Cauchy discret s'écrit dans $\mathcal{Z}_h^{\perp}(\Gamma)$

$$(5.92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{z}_h \in \mathcal{Z}_h^{\perp}(\Gamma) \text{ tel que} \\ \langle \mathbf{z}_h - \varsigma_{d_h}, \mathbf{v}_h \rangle_{\Gamma_d} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{Z}_h^{\perp}(\Gamma) \end{array} \right.$$

et possède une et une seule solution.

Remarque 5.6 *En utilisant, aux notations près, un raisonnement semblable à celui effectué au paragraphe 5.2.7 pour démontrer le théorème 5.2, on démontre que la solution $\mathbf{z}_h = (\hat{\varphi}_h, \hat{\psi}_h)$ du problème de Cauchy discret (5.92) converge vers la paire compatible $\mathbf{z} = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$, associée à la fonction harmonique \hat{z} , dans $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{L}^2(\Gamma)$ au sens de (5.28).*

5.3.4 Problème linéaire caractérisant $\mathcal{P}_h(\Gamma)$

Dans cette partie, compte tenu de la remarque 5.5, nous allons reprendre les grandes lignes abordées à la section 5.2.8 pour mettre en évidence les problèmes linéaires correspondant au problème inverse (4.11) ou (4.19).

Comme pour le choix des vecteurs considérés au début de la section 5.2.8, nous posons successivement

$$\mathcal{U}_I = (u_{I,1}, u_{I,2}, u_{I,3}, \dots, u_{I,M})^T$$

le vecteur dont les coordonnées représentent les valeurs respectives de u_h dans la base de $\mathcal{V}_h(\Omega)$. Cette base est constituée des fonctions qui valent 1 au i ème noeud intérieur de la triangulation et zéro aux autres noeuds.

$$\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_N)^T$$

le vecteur dont les composantes sont les valeurs nodales de u_h dans la base de $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Cette base est formée des fonctions qui valent 1 au noeud correspondant du maillage sur la frontière et zéro aux autres noeuds. C'est la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ définie dans (5.61).

$$\mathcal{U}' = (u'_1, u'_2, u'_3, \dots, u'_N)^T$$

le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs respectives de u'_h dans la base de $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$. Elle est constituée des fonctions constantes sur chaque segment Γ_i et correspond à la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$ de la section 5.2.9.

Comme nous savons que les solutions \bar{u} , z et \hat{z} respectivement des problèmes (4.21), (4.23) et (4.24) sont reliées par l'égalité

$$\hat{z} = \bar{u} - z$$

la relation (5.8) (également dans (5.89) où ω est remplacée par \hat{z}) équivaut à

$$(5.93) \quad \int_{\Omega} \nabla \bar{u}_h \nabla v_h \, dx - \int_{\Omega} \omega_h v_h \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial \bar{u}_h}{\partial n} v_h \, d\sigma \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h(\Omega).$$

où $\mathcal{V}_h(\Omega)$ est défini par (5.7). D'après (5.51) et (5.93), il découle que si \mathcal{W}_I et \mathcal{W} sont solutions de (5.50), alors \mathcal{U}_I , \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont solutions du **système linéaire**

$$(5.94) \quad \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{ii} & \mathbb{A}_{ie} \\ \mathbb{A}_{ei} & \mathbb{A}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_I \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{ii} & \mathbb{G}_{ie} \\ \mathbb{G}_{ei} & \mathbb{G}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_I \\ \mathcal{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbb{B}\mathcal{U}' \end{bmatrix}.$$

Les matrices \mathbb{A}_{ii} , \mathbb{A}_{ie} , \mathbb{A}_{ei} et \mathbb{A}_{ee} du système sont celles données dans (5.51). La matrice \mathbb{G}_{ii} est constituée des termes situés aux noeuds intérieurs de la triangulation. Elle est

obtenue lors de la résolution d'un problème de Dirichlet. Les matrices \mathbb{G}_{ie} et \mathbb{G}_{ei} sont formées des termes correspondant à un couplage entre les noeuds intérieurs et les noeuds sur la frontière du domaine. La matrice \mathbb{G}_{ee} contient les termes situés sur les noeuds de la frontière. En utilisant une technique de condensation sur la frontière, laquelle vise à éliminer les valeurs nodales à l'intérieur du domaine pour se ramener à un problème de valeurs nodales sur la frontière du domaine, des relations (5.51) et (5.52), l'égalité (5.94) s'écrit :

$$(5.95) \quad \mathbb{H}\mathcal{U} + \mathbb{B}\mathcal{U}' = \mathbb{D}\mathcal{W}.$$

C'est un **problème linéaire** de N équations à $2N$ inconnues \mathcal{U} et \mathcal{U}' dans lequel la matrice \mathbb{H} , définie par (5.53), est calculée par le logiciel et la matrice \mathbb{B} est donnée en annexe A. La matrice \mathbb{D} , calculée en annexe A, est donnée par la formule :

$$(5.96) \quad \mathbb{D} = \mathbb{G}_{ee} - \mathbb{G}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie} - \mathbb{A}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}(\mathbb{G}_{ie} - \mathbb{G}_{ii}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}).$$

Nous introduisons l'opérateur \mathcal{B}_h défini sur $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ et à valeurs dans \mathbb{R}^N tel que

$$(5.97) \quad \mathcal{B}_h(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = \mathbb{D}\mathcal{W}$$

et nous considérons l'espace des fonctions discrètes pour l'équation de Poisson. Nous le notons $\mathcal{P}_N(\Gamma)$ et nous le définissons de manière suivante :

$$(5.98) \quad \mathcal{P}_N(\Gamma) = \left\{ (\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N / \mathcal{B}_h(\mathcal{U}, \mathcal{U}') = \mathbb{D}\mathcal{W} \right\}.$$

5.3.5 L'algorithme discret en dimension finie

5.3.5.1 Rappel et notations

En dimension finie, l'**algorithme itératif** régularisé s'écrit :
soient $\mathbf{U}_{h,0} = 0$ et $c > 0$ donnés,

$$(5.99) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \mathbf{U}_{h,k+1} \in \mathcal{P}_h(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{U}_{h,k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{V}_h) \quad \forall \mathbf{V}_h \in \mathcal{P}_h(\Gamma) \end{array} \right. .$$

Il consiste, à chaque étape, à minimiser au sens des moindres carrées la fonctionnelle J_c^k strictement convexe définie par :

$$(5.100) \quad J_c^k(\mathbf{V}_h) = \|\mathbf{V}_h - q_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|\mathbf{V}_h - \mathbf{U}_{h,k}\|_{\Gamma}^2.$$

La solution optimale $\mathbf{U}_{h,k} = (u_{h,k}, u'_{h,k})$ est une approximation de $\mathbf{U}_k = (u_k, u'_k)$ obtenue à la k^e itération et la donnée $q_{d_h} = (\varphi_{d_h}, \psi_{d_h})$ est une approximation de la donnée

$q_d = (\varphi_d, \psi_d)$ du problème (4.21). Nous posons $\mathbf{v}_h = (v_h, v'_h)$. Avec ces notations, la relation (5.100) se réécrit :

$$(5.101) \quad J_c^k(\mathbf{v}_h) = \|v_h - \varphi_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + \|v'_h - \psi_{d_h}\|_{\Gamma_d}^2 + c\|v_h - u_{h,k}\|_{\Gamma}^2 + c\|v'_h - u'_{h,k}\|_{\Gamma}^2.$$

Comme à la section 5.2.9.1, le calcul de la dérivée directionnelle de J_c^k est donné, aux notations près, par (5.60). L'expression de cette dérivée directionnelle dans les bases $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ et $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$, respectivement des espaces $\mathcal{H}_h^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $\mathcal{H}_h^0(\Gamma)$, est donnée, aux notations près, à la section 5.2.9.2 par (5.80).

5.3.5.2 L'algorithme discret à la $(k+1)^e$ itération

Compte tenu de (5.80) et (5.97), le problème d'optimisation (5.99) qui consiste à minimiser la fonctionnelle J_c^k , définie par (5.101), s'écrit à la $(k+1)^e$ itération de l'algorithme

soient $(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}'_0) = (0, 0) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$

$$(5.102) \quad \begin{cases} \text{trouver } (\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1}, \lambda_{k+1}) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^N \text{ tels que} \\ \mathcal{G}_{k+1}(\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1}) + \mathcal{J}(\mathcal{B}_h)(\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1})^T \lambda_{k+1} = 0 \\ \mathcal{B}_h(\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1}) = \mathbb{D}\mathcal{W}_{k+1} \end{cases}.$$

C'est un problème d'optimisation sous la **contrainte égalité** (5.98). $\mathcal{J}(\mathcal{B}_h)(\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1})$ est la matrice jacobienne associée à l'opérateur \mathcal{B}_h dans (5.97), \mathcal{W}_{k+1} est le vecteur à N composantes solution du processus discret (5.85) (c'est l'itéré le plus proche de la trace analytique du problème (4.11)), $\lambda_{k+1} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T$ est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte égalité (5.97). Le problème à résoudre dans (5.102) est un **système linéaire** de $3N$ équations à $3N$ inconnues $(\mathcal{U}_{k+1}, \mathcal{U}'_{k+1}, \lambda_{k+1})$ à traiter à chaque itération de l'algorithme. Il se met sous la **forme matricielle**

$$(5.103) \quad \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{NN} + c\mathbb{C}_{NN} & 0 & \mathbb{H}^T \\ 0 & \mathbb{A}'_{NN} + c\mathbb{C}'_{NN} & \mathbb{B}^T \\ \mathbb{H} & \mathbb{B} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{k+1} \\ \mathcal{U}'_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\mathbb{C}_{NN} & 0 & 0 \\ 0 & c\mathbb{C}'_{NN} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_k \\ \mathcal{U}'_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{NN}\mathcal{Y} \\ \mathbb{A}'_{NN}\mathcal{Y}' \\ \mathbb{D}\mathcal{W}_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Les différentes matrices $\mathbb{A}_{NN}, \mathbb{A}'_{NN}, \mathbb{C}_{NN}, \mathbb{C}'_{NN}$ et \mathbb{B} sont fournies en annexe A. Lors des implémentations, les matrices \mathbb{H} et \mathbb{D} non fournies en annexe sont calculées de façon explicite par le logiciel à partir des formules (5.53) et (5.96). Dans (5.103), nous désignons par \mathbb{G}_N la matrice inversible du premier membre et par \mathbb{S}_N la matrice du second membre. Ces matrices restent inchangées à chaque étape de l'algorithme.

Chapitre 6

Simulations numériques

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats numériques obtenus sur les reconstructions des différentes traces du problème inverse de Cauchy du chapitre 3, en combinant la méthode de régularisation et la factorisation du chapitre 4. Tout d'abord, les implémentations sont réalisées sur un domaine à points anguleux (cas du carré), via les processus itératifs (5.85) et (5.103). Nous étudions l'influence du paramètre de régularisation c et du nombre d'itérations k . Ensuite, nous reprenons le travail précédent sur un domaine à frontière courbe (cas du cercle) pour lequel nous examinons l'influence du rapport entre la taille de Γ_d et celle de Γ , puis la stabilité numérique des algorithmes (5.85) et (5.103). Enfin, nous comparons brièvement quelques uns des résultats numériques avec ceux obtenus par Marin et Lesnic dans [34].

6.2 Reconstructions des traces de ω et des traces

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2} \text{ et } \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$$

Dans cette partie, nous reconstruisons d'abord les traces de la solution analytique ω du problème inverse (4.11) en utilisant le processus itératif (5.85). Nous reconstruisons ensuite les traces d'ordre deux et trois de la solution \bar{u} du problème inverse (4.21) en utilisant les relations dans (4.34) (valables sur tout le bord du domaine). En premier lieu, les implémentations sont faites sur un domaine carré pour lequel nous examinons l'influence du paramètre de régularisation sur la reconstitution des traces précitées. En second lieu, nous réalisons les simulations sur un domaine circulaire et nous étudions

l'effet du paramètre de régularisation, du rapport \mathfrak{b} entre la taille de Γ_d et celle de Γ , et la stabilité numérique de l'algorithme itératif (5.85) pour des données bruitées.

6.2.1 Définition des fonctions

Nous avons considéré la fonction biharmonique \bar{u} pour laquelle la fonction ω est harmonique et vérifie l'égalité $-\Delta\bar{u} = \omega$ donnée par (4.7). Ces fonctions sont définies analytiquement par

$$\begin{aligned}\bar{u}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2} x_1 (\cos x_1 \sinh x_2 - \sin x_1 \cosh x_2) \\ \omega(x_1, x_2) &= \cos x_1 \cosh x_2 + \sin x_1 \sinh x_2.\end{aligned}$$

6.2.2 Premier exemple : cas d'un domaine carré

Le domaine Ω est le carré $]0, 1[\times]0, 1[$. La partie Γ_d qui contient les données observées sur la frontière est le coté de ce carré qui satisfait l'équation $x_1 = 0$. La direction normale n est celle des x_1 négatifs et la direction tangentielle τ est celle des x_2 positifs. Le bord du carré possède des singularités aux points $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ et $(1,0)$. Dans les figures ci-après, ces points sont respectivement représentés par les abscisses curvilignes 0.0, 1.0, 2.0 et 3.0, N_d désigne le nombre de données sur la partie Γ_d , N le nombre d'éléments sur le périmètre du carré et c le coefficient de régularisation.

6.2.2.1 Reconstructions des traces de ω

Pour reconstruire la trace et la dérivée normale de la fonction ω , nous avons évalué l'erreur notée $erreur(0)$ (respectivement l'erreur notée $erreur(1)$) en norme L^2 de la trace (respectivement de la dérivée normale) de cette fonction. Ces erreurs sont calculées par les formules

$$\begin{aligned}erreur(0) &= \frac{\|\mathbf{w}_{ana} - \mathbf{w}_{num}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\mathbf{w}_{ana}\|_{L^2(\Gamma)}} \\ erreur(1) &= \frac{\|\mathbf{w}'_{ana} - \mathbf{w}'_{num}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\mathbf{w}'_{ana}\|_{L^2(\Gamma)}}\end{aligned}$$

où $\mathbf{w}_{ana} = \omega$ (respectivement $\mathbf{w}'_{ana} = \partial\omega/\partial n$) est la valeur exacte de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction sur la frontière et $\mathbf{w}_{num} = \mathcal{W}_{k+1}$ (respectivement $\mathbf{w}'_{num} = \mathcal{W}'_{k+1}$) est la valeur numérique la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction fournie à la fin de la gestion de l'algorithme itératif (5.85) par le logiciel.

La figure 6.1 et la figure 6.2 donnent les reconstitutions de la trace de la fonction ω . Nous remarquons que l'algorithme gomme la singularité aux noeuds (0,1) et (1,1) représentés respectivement par les abscisses curvilignes 1.0 et 2.0. Cependant il sent la singularité sur la partie complémentaire Γ_i du périmètre du carré au noeud (1,0) ou l'abscisse curviligne 3.0. L'erreur relative $erreur(0)$ en norme L^2 de la trace de la fonction vaut 0.048 à la figure 6.1 et 0.049 à la figure 6.2.

La figure 6.3 et la figure 6.4 montrent les reconstructions de la dérivée normale de la fonction ω . Le processus itératif gère la discontinuité des dérivées au noeud (0,1) de la partie complémentaire Γ_i et semble rétablir la discontinuité au noeud (1,1). L'erreur relative $erreur(1)$ en norme L^2 de la dérivée normale vaut 0.509 à la figure 6.3 (respectivement 0.505 à la figure 6.4). Les reconstructions ne sont pas très précises lorsque la partie Γ_i n'est pas régulière. Le même constat est mentionné dans Delvare [15], Koslov [17] et Lesnic [67].

Remarque 6.1 *Le cas où Γ_d consiste en deux côtés consécutifs ou parallèles a été traité dans [15, 16]. Les reconstructions obtenues sont nettement améliorées lorsque les données sont sur deux côtés parallèles. Le cas où Γ_d consiste en trois côtés ne pose pas de problème.*

6.2.2.2 Influence du paramètre de régularisation

Nous avons observé l'effet du coefficient de régularisation c par rapport à la reconstruction de l'itéré le plus proche de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la solution analytique ω . Pour cela, nous avons fixé le nombre N_d (respectivement N) de données sur la partie Γ_d du carré (respectivement sur la frontière Γ du carré) et le nombre k d'itérations. Les tableaux suivants donnent les différentes erreurs obtenues sur les reconstructions de la trace et de la dérivée normale de la fonction pour les valeurs de c correspondantes.

Valeurs de c	erreur(0)
10^{-2}	0.082
10^{-3}	0.076
10^{-4}	0.059
10^{-5}	0.053
10^{-6}	0.048

Valeurs de c	erreur(1)
10^{-2}	0.573
10^{-3}	0.558
10^{-4}	0.536
10^{-5}	0.523
10^{-6}	0.508

Pour $c = 10^{-4}$ ou $c = 10^{-5}$ nous constatons que l'erreur varie très peu et que les allures graphiques des figures 6.7 et 6.9 qui montrent les reconstitutions de la trace de la fonction sont semblables. Ce constat demeure pour les représentations graphiques des figures 6.8 et 6.10 qui illustrent les reconstructions de la dérivée normale de la fonction. Ainsi, quand

le paramètre de régularisation c vaut 10^{-4} ou 10^{-5} , nous voyons la *quasi indépendance de ce paramètre sur la qualité des reconstructions* des traces de la fonction.

Pour les valeurs de c supérieures à 10^{-4} les erreurs en norme L^2 grandissent et les solutions numériques sont moins précises. C'est le cas de la figure 6.5 (respectivement de la figure 6.6) qui représente la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction. Pour $c = 10^{-6}$ la convergence est optimale. Pour des valeurs de c inférieures à 10^{-6} nous avons constaté que le logiciel prend en charge la reconstruction des fonctions en reconditionnant la matrice \mathbb{G}_N du premier membre de (5.85). Cela multiplie les erreurs numériques et conduit à une divergence. Le coefficient de régularisation c n'interfère plus sur la reconstitution des fonctions car son effet est perdu.

6.2.2.3 Reconstructions de $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et de $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$

Nous rappelons que les reconstitutions des traces d'ordre deux et d'ordre trois de la fonction biharmonique \bar{u} sont obtenues à partir des égalités fournies par la relation (4.34). Ces égalités restent vraies sur tout le bord du domaine. Pour analyser les solutions numériques obtenues, nous avons déterminé l'erreur notée *erreur(2)* (respectivement l'erreur notée *erreur(3)*) en norme L^2 de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la solution biharmonique \bar{u} . Nous avons défini ces erreurs de la façon suivante :

$$\text{erreur(2)} = \frac{\|\mathbf{u}_{ana}'' - \mathbf{u}_{num}''\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\mathbf{u}_{ana}''\|_{L^2(\Gamma)}}$$

$$\text{erreur(3)} = \frac{\|\mathbf{u}_{ana}''' - \mathbf{u}_{num}'''\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\mathbf{u}_{ana}'''\|_{L^2(\Gamma)}}$$

où $\mathbf{u}_{ana}'' = \partial^2 \bar{u} / \partial n^2$ (respectivement $\mathbf{u}_{ana}''' = \partial^3 \bar{u} / \partial n^3$) est la valeur exacte de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction sur la frontière et $\mathbf{u}_{num}'' = \mathcal{W}_{k+1}$ (respectivement $\mathbf{u}_{num}''' = \mathcal{W}'_{k+1}$) est la valeur numérique de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction.

Les figures 6.11 et 6.13 montrent les reconstructions de la trace d'ordre deux de la fonction \bar{u} . Nous constatons que la fonction reconstruite présente des sauts, provenant de la discontinuité des dérivées sur la partie complémentaire Γ_i du bord du carré, aux noeuds (0,1), (1,1) et (1,0). A la figure 6.11, l'erreur L^2 est de 0.085 et à la figure 6.13 elle est égale à 0.097.

Les figures 6.12 et 6.14 représentent les reconstitutions de la trace d'ordre trois de la fonction. Nous observons des sauts aux points (1,1) et (1,0) dus à la discontinuité des dérivées sur la partie Γ_i de la frontière. L'erreur L^2 vaut 0.088 à la figure 6.12 et 0.078 à la figure 6.14.

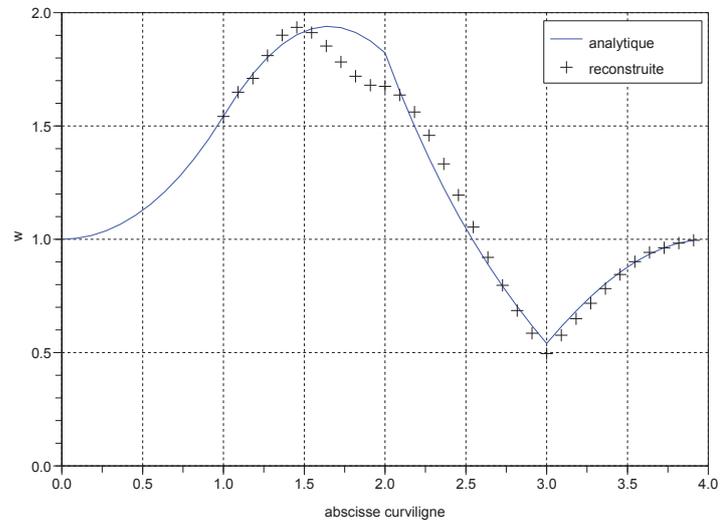


FIG. 6.1 – Reconstruction de la trace de ω avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-6}$; $k = 40000$.

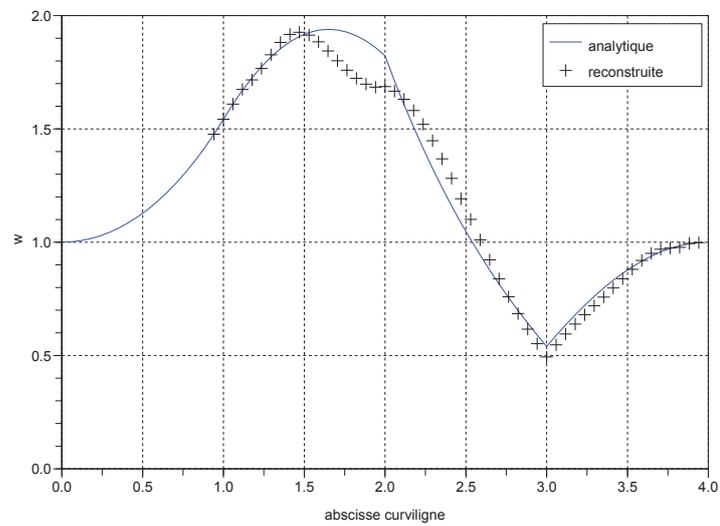


FIG. 6.2 – Reconstruction de la trace de ω avec $N_d = 17$; $N = 68$; $c = 10^{-6}$; $k = 40000$.

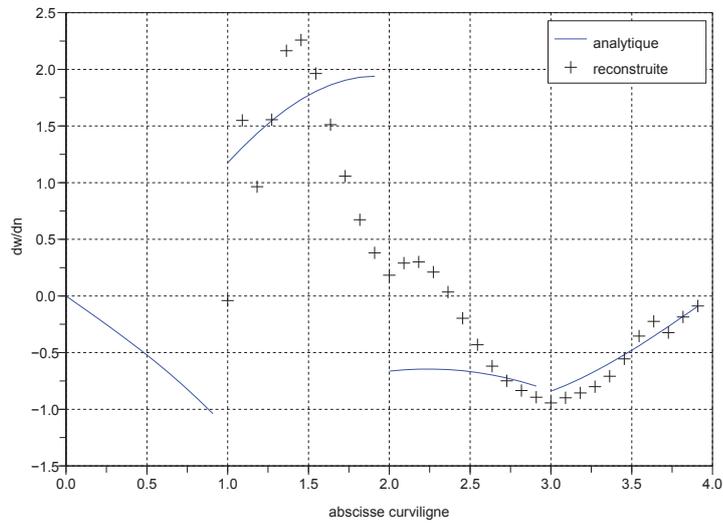


FIG. 6.3 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-6}$; $k = 40000$.

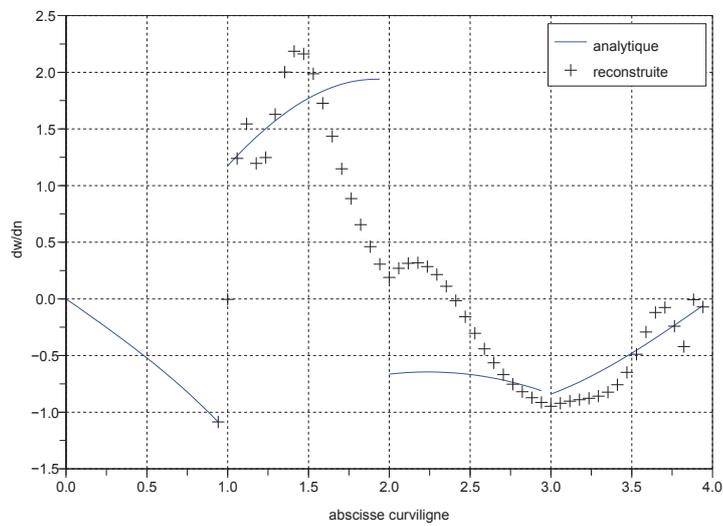


FIG. 6.4 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 17$; $N = 68$; $c = 10^{-6}$; $k = 40000$.

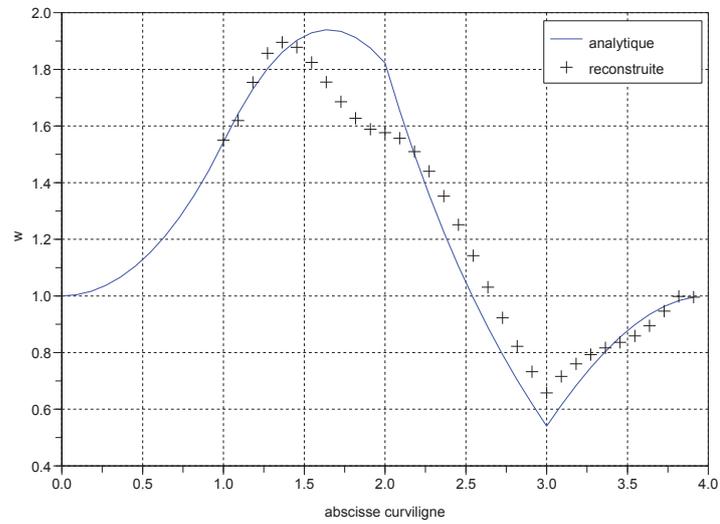


FIG. 6.5 – Reconstruction de la trace de ω avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-2}$; $k = 55000$.

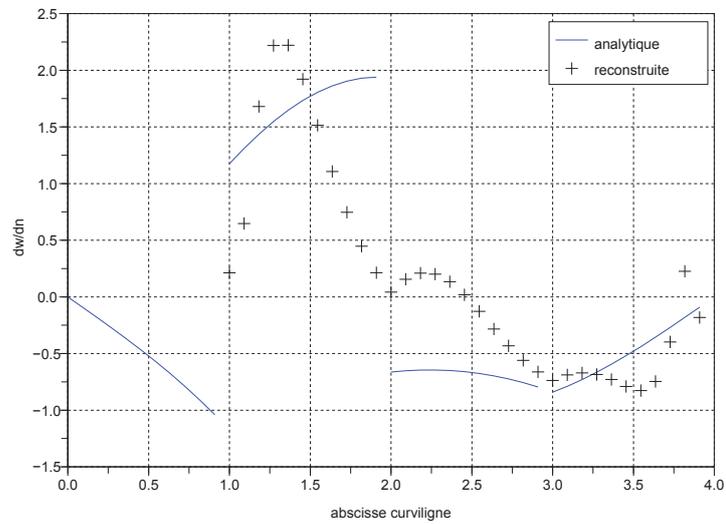


FIG. 6.6 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-2}$; $k = 55000$.

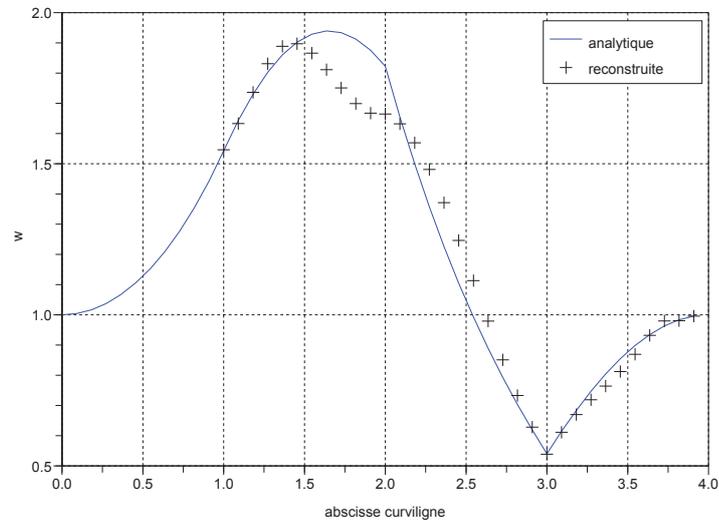


FIG. 6.7 – Reconstruction de la trace de ω avec
 $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-4}$; $k = 55000$.

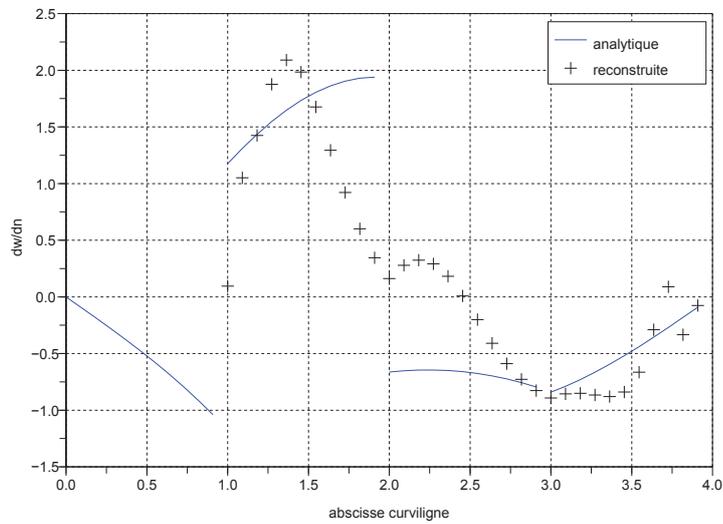


FIG. 6.8 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec
 $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-4}$; $k = 55000$.

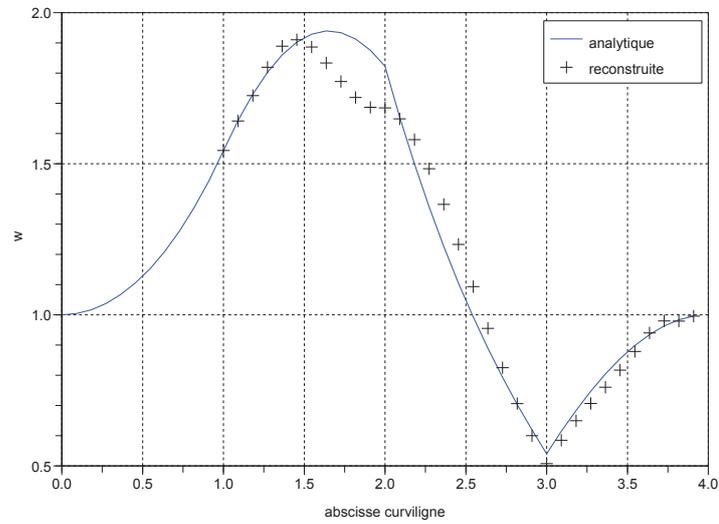


FIG. 6.9 – Reconstruction de la trace de ω avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-5}$; $k = 55000$.

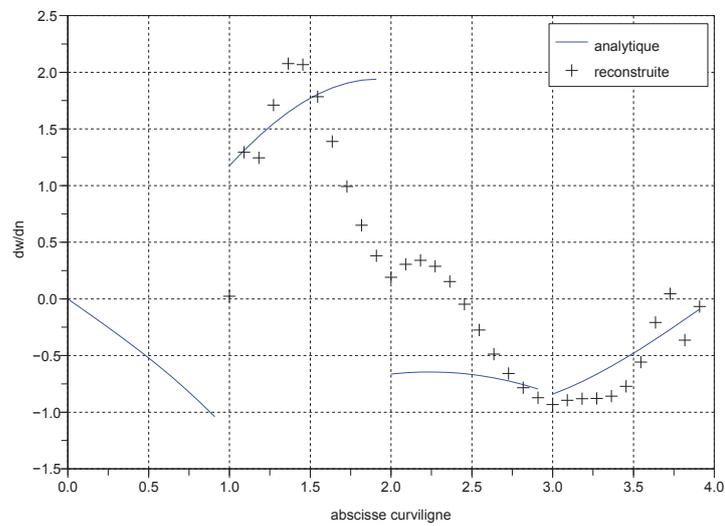


FIG. 6.10 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-5}$; $k = 55000$.

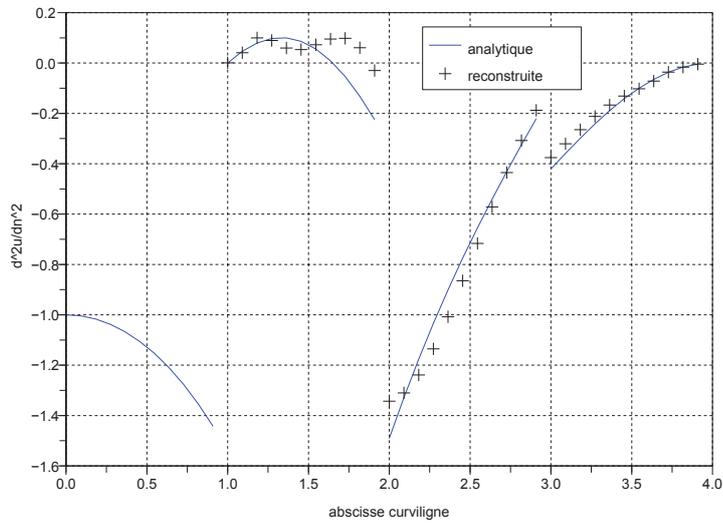


FIG. 6.11 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-6}$; $k = 40000$.

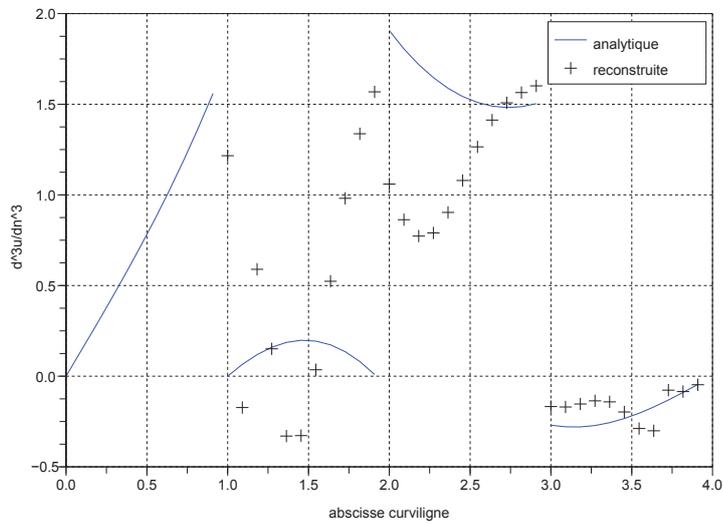


FIG. 6.12 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-6}$; $k = 40000$.

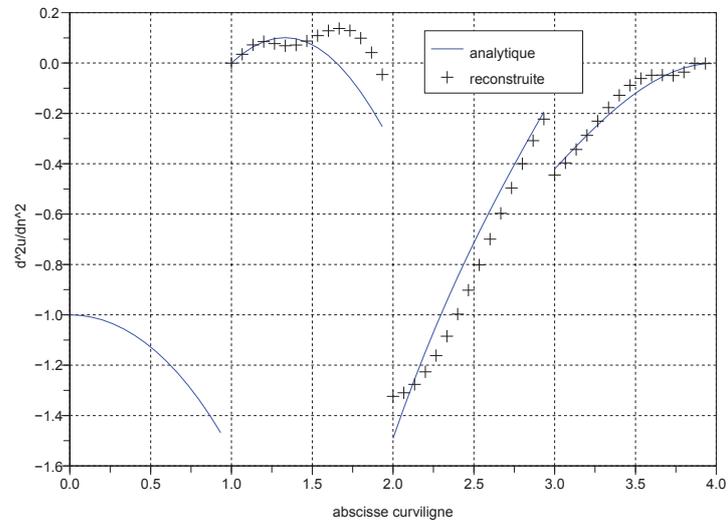


FIG. 6.13 – Reconstitution de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 15$; $N = 60$; $c = 10^{-5}$; $k = 35000$.

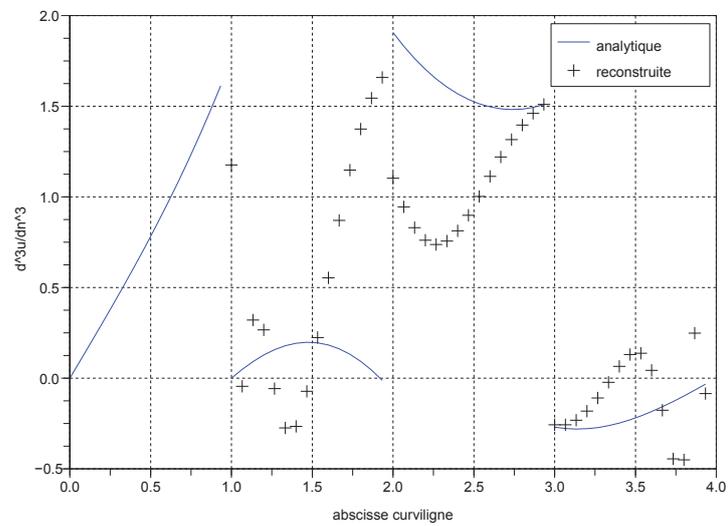


FIG. 6.14 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 15$; $N = 60$; $c = 10^{-5}$; $k = 35000$.

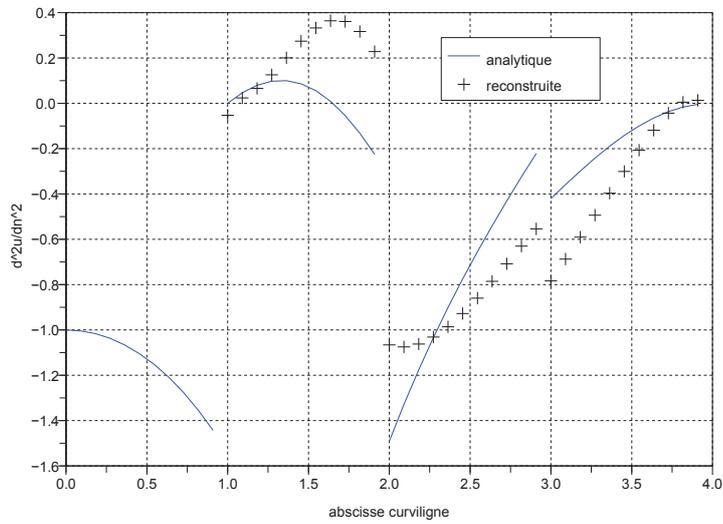


FIG. 6.15 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10$; $k = 55000$.

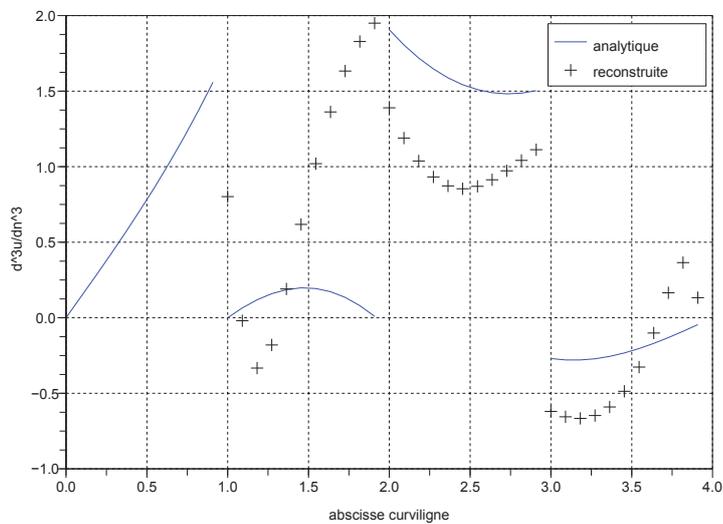


FIG. 6.16 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10$; $k = 55000$.

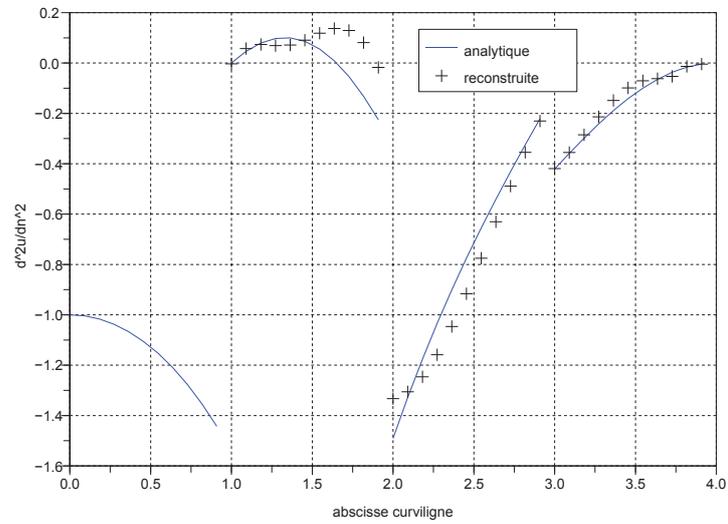


FIG. 6.17 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-4}$; $k = 55000$.

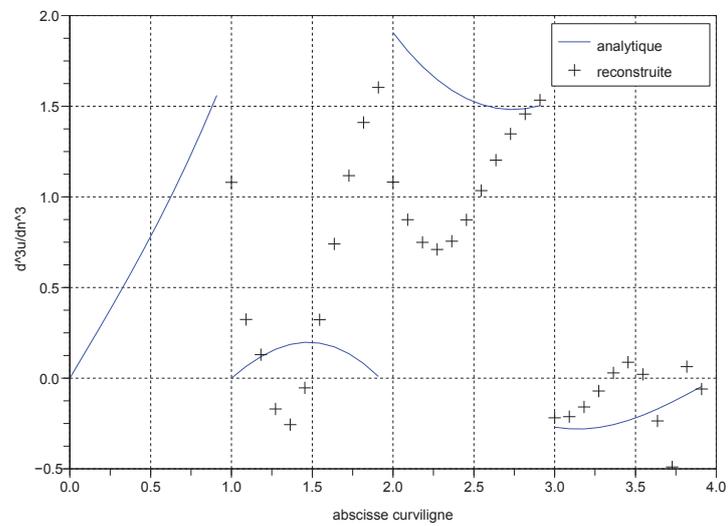


FIG. 6.18 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-4}$; $k = 55000$.

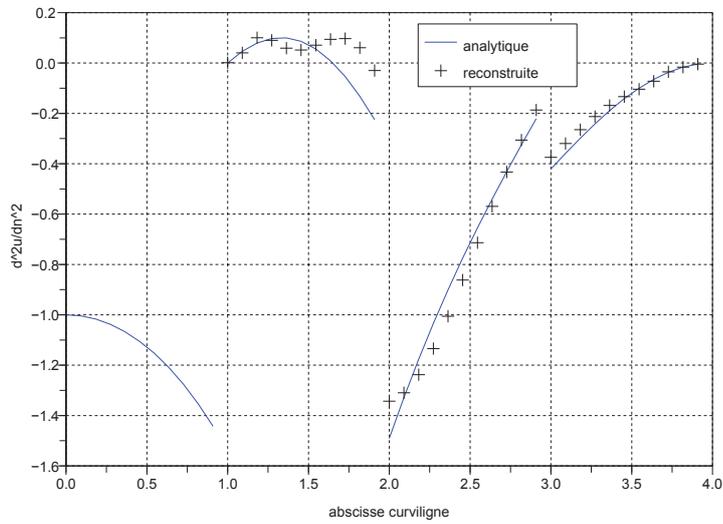


FIG. 6.19 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-6}$; $k = 55000$.

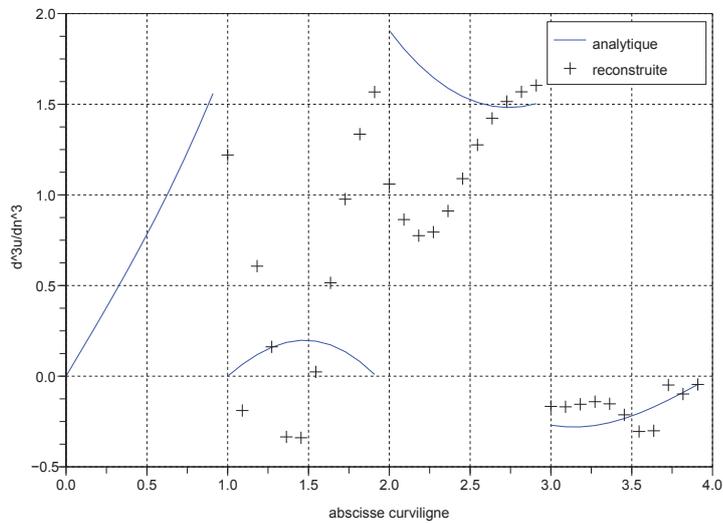


FIG. 6.20 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 11$; $N = 44$; $c = 10^{-6}$; $k = 55000$.

6.2.2.4 Rôle du coefficient de régularisation

Compte tenu de la section 6.2.2.2, nous avons continué d'observer l'influence du paramètre de régularisation c par rapport à la reconstruction de l'itéré le plus proche de la trace d'ordre deux (respectivement d'ordre trois) de la solution analytique \bar{u} en fixant le nombre N_d (respectivement N) de données sur la partie Γ_d du carré (respectivement sur le périmètre du carré) et le nombre d'itérations. Les tableaux ci-dessous récapitulent les différentes erreurs calculées, pour des valeurs de c , sur les reconstructions des traces d'ordre deux et trois de la fonction \bar{u} . Nous avons fourni quelques implémentations qui correspondent aux valeurs de c indiquées dans les tableaux suivants :

Valeurs de c	erreur(2)
10	0.286
10^{-2}	0.145
10^{-3}	0.135
10^{-4}	0.104
10^{-5}	0.094
10^{-6}	0.084
10^{-7}	0.399

Valeurs de c	erreur(3)
10	0.109
10^{-2}	0.099
10^{-3}	0.097
10^{-4}	0.093
10^{-5}	0.091
10^{-6}	0.088
10^{-7}	0.334

nous voyons que l'erreur L^2 sur la reconstruction de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction est moindre lorsque le coefficient c vaut 10^{-6} . La convergence est donc optimale pour cette valeur de c . C'est le cas de la figure 6.19 qui représente la trace d'ordre deux reconstruite par rapport à la trace d'ordre deux analytique. C'est également le cas de la figure 6.20 qui montre la trace d'ordre trois reconstruite par rapport à la trace d'ordre trois analytique.

La figure 6.17 pour laquelle c vaut 10^{-4} (respectivement la figure 6.15 où $c = 10$) représente la reconstruction de la trace d'ordre deux de la fonction. La figure 6.18 pour laquelle c est égale à 10^{-4} (respectivement la figure 6.16 où $c = 10$) montre la reconstruction de la trace d'ordre trois de la fonction. Nous constatons que pour les valeurs de c supérieures à 10^{-6} l'erreur L^2 sur la reconstruction de la trace d'ordre deux évolue plus vite que l'erreur sur la reconstruction de la trace d'ordre trois de la fonction. Cette augmentation des erreurs produit des reconstructions de moins en moins précises et entraîne une divergence lente sur la reconstruction de la trace d'ordre deux de la fonction.

Lorsque le paramètre de régularisation c est inférieur ou égale à 10^{-7} le logiciel conditionne la matrice \mathbb{G}_N du premier membre de (5.85). Cela produit des erreurs plus grandes sur les fonctions reconstruites et fait perdre la convergence. L'influence du paramètre de régularisation c est perdu.

6.2.3 Deuxième exemple : cas d'un domaine circulaire

Ici, le domaine Ω est le disque centré à l'origine et de rayon $R = 1$. La partie Γ_d sur laquelle sont mesurées les données est définie par : $\Gamma_d = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1 / x_2 \leq 0 \}$. Les fonctions ω et \bar{u} étant définies à la section 6.2.1, nous avons repris les étapes de la section 6.2.2 basées sur les reconstructions de la trace (respectivement de la trace d'ordre deux) et de la dérivée normale (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction ω (respectivement de la fonction \bar{u}). L'influence du paramètre de régularisation et du rapport \mathfrak{b} , c'est à dire le rapport entre la longueur de Γ_d et la longueur de Γ , sont étudiés. Comme à la section 6.2.2, les paramètres N_d , N , c et k des figures illustratives désignent respectivement le nombre de données sur la partie Γ_d , le nombre d'éléments sur toute la frontière, le coefficient de régularisation et le nombre d'itérations.

6.2.3.1 Reconstitutions des traces de ω

Pour déterminer les erreurs en norme L^2 liées aux reconstructions de la trace et de la dérivée normale de la fonction harmonique ω , nous avons considéré les erreurs notées $erreur(0)$ et $erreur(1)$ de la section 6.2.2.1.

Les figures 6.21 et 6.22 représentent les reconstructions de la trace de la fonction ω . L'erreur relative en norme L^2 de la trace de la fonction vaut 0.013 à la figure 6.21 et 0.009 à la figure 6.22. Cela montre une reconstruction assez fiable de la trace de la fonction sur la partie inconnue Γ_i de la frontière.

La figure 6.23 (respectivement la figure 6.24) illustre la reconstruction de la dérivée normale de la fonction ω . L'erreur relative en norme L^2 de la dérivée normale de la fonction vaut 0.064 à la figure 6.23 (respectivement 0.042 à la figure 6.24). La qualité des reconstructions de la dérivée normale sur la partie inconnue Γ_i reste très satisfaisante même si l'erreur sur la reconstruction de cette dernière est un peu plus grande que l'erreur sur la reconstruction de la trace de la fonction.

6.2.3.2 Influence du coefficient de régularisation

Dans cette partie, nous avons observé le rôle du coefficient de régularisation c sur la reconstruction de l'itéré le plus proche de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction harmonique ω . Pour un nombre fixé de données (60) sur Γ_d , un nombre fixé d'éléments sur le cercle (120) et un nombre fixé d'itérations (110), nous avons considéré plusieurs valeurs du paramètre de régularisation pour évaluer les erreurs, $erreur(0)$ et $erreur(1)$, en norme L^2 obtenues. Les résultats sont dans les tableaux ci-dessous :

Valeurs de c	erreur(0)	Valeurs de c	erreur(1)
10^{-1}	0.128	10^{-1}	0.381
10^{-2}	0.069	10^{-2}	0.249
10^{-3}	0.040	10^{-3}	0.168
10^{-4}	0.017	10^{-4}	0.086
10^{-5}	0.009	10^{-5}	0.042
10^{-6}	0.056	10^{-6}	0.316

L'erreur sur la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction est optimale pour $c = 10^{-5}$ et la convergence est rapide. Pour des valeurs de c supérieures à 10^{-5} l'erreur sur la reconstruction des traces devient plus grande et la divergence est lente. Par contre, pour des valeurs de c inférieures ou égales à 10^{-6} , nous avons constaté que le logiciel reconditionne la matrice \mathbb{G}_N du premier membre de (5.85). Cela augmente considérablement les erreurs sur la reconstitution de la dérivée normale, accélère la divergence et fait disparaître les effets de c tandis que les erreurs sur la reconstruction de la trace augmente moins vite et la divergence est moins rapide.

Pour les valeurs de c des figures 6.25 et 6.26 qui représentent la reconstruction de la trace de la fonction et des figures 6.27 et 6.28 qui montrent la reconstitution de la dérivée normale de la fonction, nous remarquons l'absence d'influence du paramètre de régularisation sur la qualité des reconstructions des traces de la fonction ω .

6.2.3.3 Reconstitutions de $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et de $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$

Pour reconstruire la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ et la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ de la fonction \bar{u} , nous avons utilisé les égalités de la relation (4.34). Ces dernières

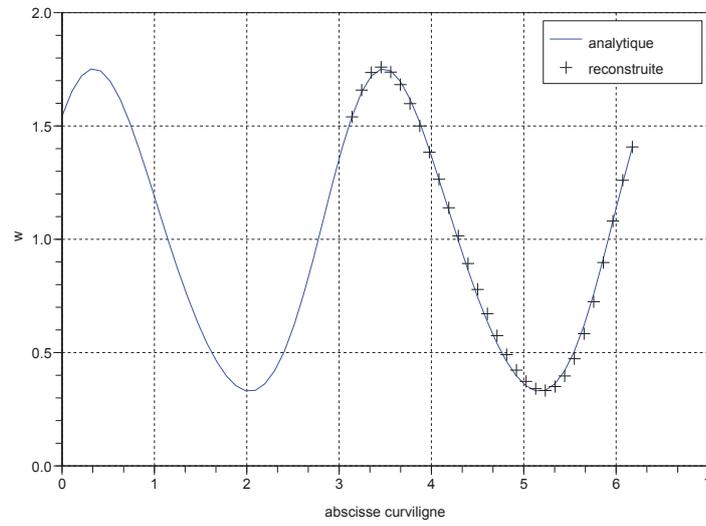


FIG. 6.21 – Reconstruction de la trace de ω avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 25 \cdot 10^{-4}$; $k = 3200$.

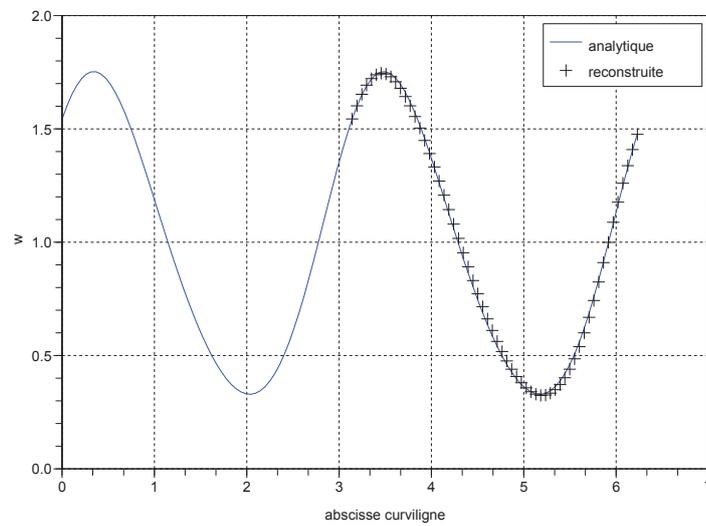


FIG. 6.22 – Reconstruction de la trace de ω avec
 $N_d = 60$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $k = 110$.

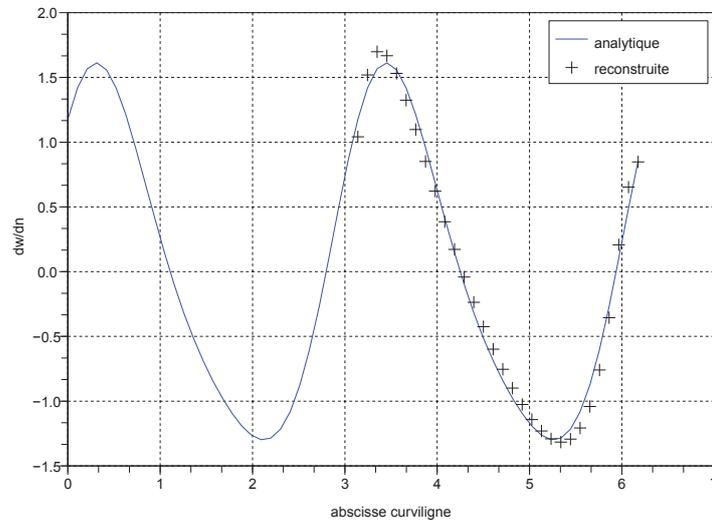


FIG. 6.23 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 25 \cdot 10^{-4}$; $k = 3200$.

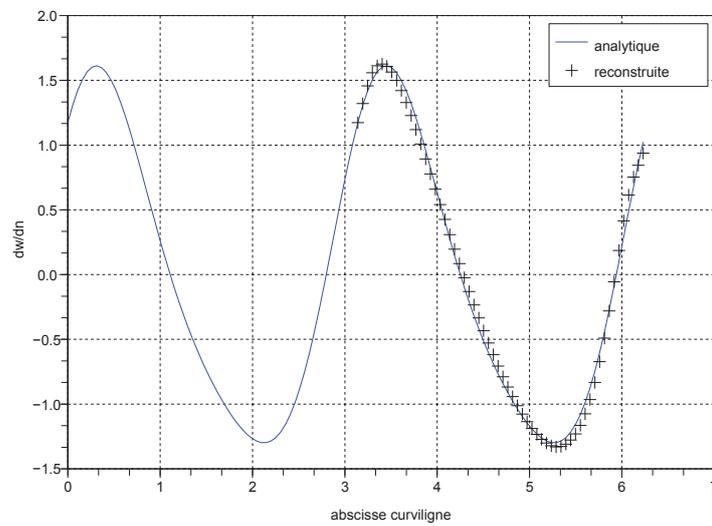


FIG. 6.24 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 60$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $k = 110$.

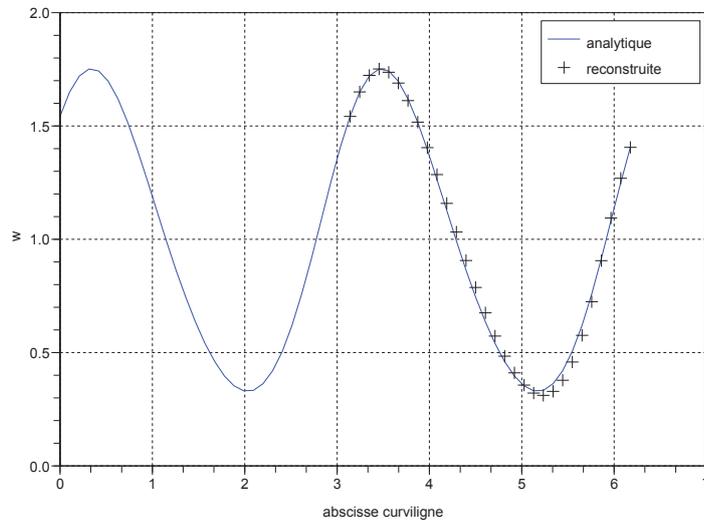


FIG. 6.25 – Reconstitution de la trace de ω avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 10^{-3}$

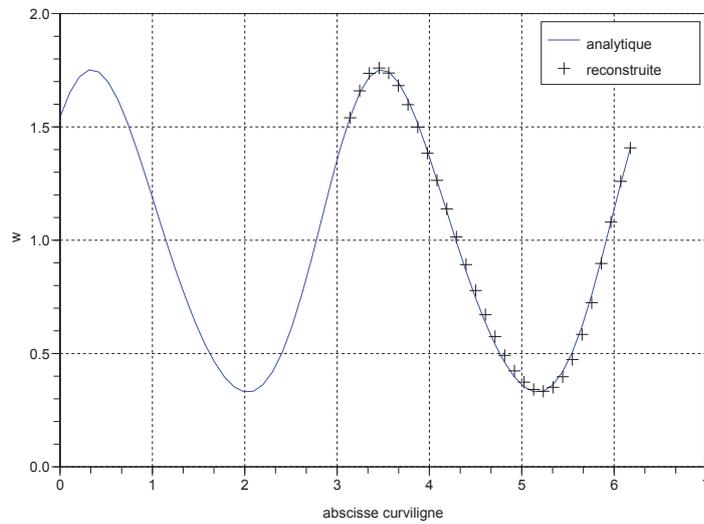


FIG. 6.26 – Reconstitution de la trace de ω avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 95 \cdot 10^{-5}$

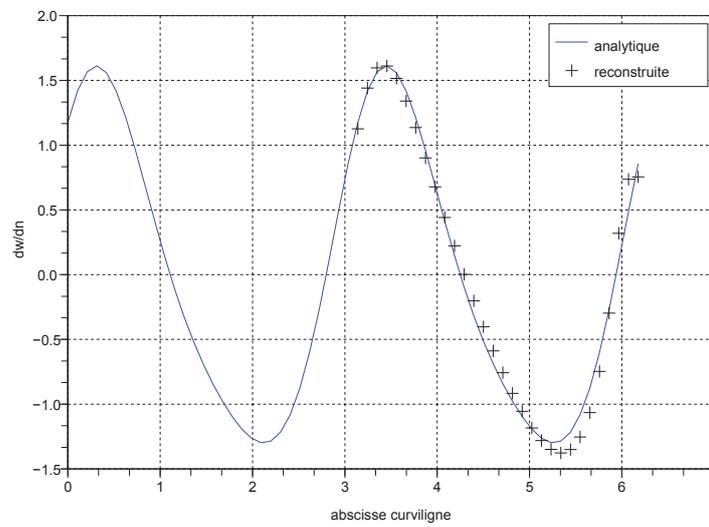


FIG. 6.27 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 10^{-3}$

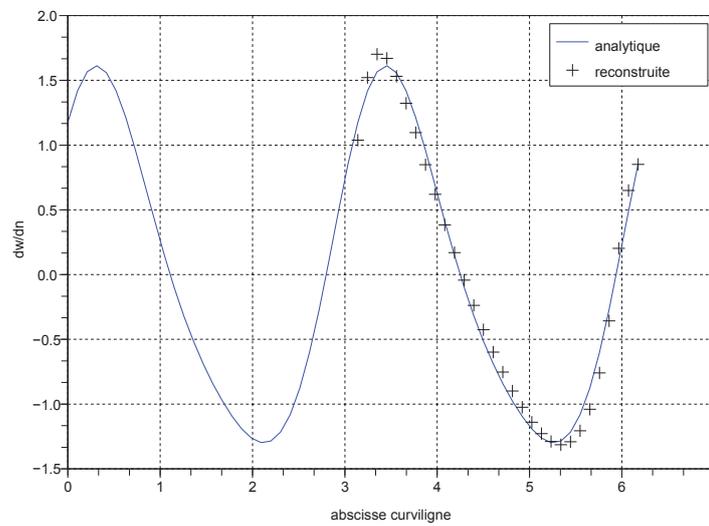


FIG. 6.28 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 95.10^{-5}$

s'appliquent sur toute la frontière du domaine. Pour obtenir les erreurs en norme L^2 sur la reconstruction de ces traces, nous avons considéré les erreurs relatives notées $erreur(2)$ et $erreur(3)$ de la section 6.2.2.3.

Les figures 6.29 et 6.30 représentent les reconstructions de la trace d'ordre deux de la fonction \bar{u} . L'erreur en norme L^2 est de 0.022 à la figure 6.29 et de 0.016 à la figure 6.30. Les reconstructions obtenues sur la partie complémentaire Γ_i du bord sont donc assez bonnes.

Les figures 6.31 et 6.32 montrent les reconstitutions de la trace d'ordre trois de la fonction \bar{u} . A la figure 6.31 l'erreur L^2 vaut 0.005 et à la figure 6.32 elle vaut 0.002. L'erreur (plus petite) de la figure 6.32 justifie une reconstruction plus précise de la trace d'ordre trois de la fonction sur la partie inconnue Γ_i .

6.2.3.4 Impact du paramètre de régularisation

Ici, nous avons observé l'influence du coefficient de régularisation sur la reconstruction de l'itéré le plus proche de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la solution biharmonique \bar{u} . Dans les tableaux ci-après indiquant les erreurs relatives, notées $erreur(2)$ et $erreur(3)$, en norme L^2 sur les reconstructions de ces traces, nous avons fixé le nombre de données sur la partie Γ_d à 60, le nombre d'éléments sur le cercle à 120 et le nombre d'itérations à 110.

Valeurs de c	erreur(2)	Valeurs de c	erreur(3)
10^{-1}	0.216	10^{-1}	0.022
10^{-2}	0.117	10^{-2}	0.014
10^{-3}	0.067	10^{-3}	0.009
10^{-4}	0.029	10^{-4}	0.005
10^{-5}	0.016	10^{-5}	0.002
10^{-6}	0.094	10^{-6}	0.018

L'erreur liée à la reconstruction de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction \bar{u} est moindre pour $c = 10^{-5}$ et la convergence est rapide. Pour des valeurs de c supérieures à 10^{-5} comme pour des valeurs de c inférieures ou égales à 10^{-6} nous remarquons que l'erreur sur la reconstruction de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction augmente et fait diverger la solution numérique. Toutefois, il apparaît une divergence

plus rapide de la solution numérique lorsque les valeurs de c sont inférieures ou égales à 10^{-6} car le logiciel reconditionne la matrice \mathbb{G}_N du premier dans (5.85). Dans ce dernier cas, l'impact du paramètre c disparaît.

Pour des valeurs de c précisées sur les représentations graphiques correspondantes, les figures 6.33 et 6.34 représentent la reconstruction de la trace d'ordre deux de la fonction \bar{u} et les figures 6.35 et 6.36 représentent la reconstitution de la trace d'ordre trois de la fonction \bar{u} . Aux figures 6.33 et 6.34 (respectivement aux figures 6.35 et 6.36), nous observons des *reconstructions qui ne dépendent pratiquement pas du paramètre de régularisation*.

6.2.3.5 Influence du rapport \mathfrak{b}

Le rapport \mathfrak{b} désigne le quotient entre la taille de Γ_d et celle de Γ . Nous avons remarqué qu'il joue un rôle essentiel sur la qualité des reconstructions des traces de la fonction. Pour ce faire, nous avons fixé le nombre d'éléments sur le cercle ainsi que le paramètre de régularisation et nous avons considéré des valeurs de \mathfrak{b} distinctes.

La figure 6.37 (erreur $L^2=0.089$) et la figure 6.38 (erreur $L^2=0.256$) montrent les reconstructions de la trace de la fonction harmonique ω . La figure 6.39 (respectivement la figure 6.40) pour laquelle l'erreur en norme L^2 vaut 0.304 (respectivement 0.649) représente la reconstruction de la dérivée normale de la fonction ω .

Les figures 6.41 et 6.42 ayant pour erreurs en norme L^2 respectives 0.150 et 0.430 montrent la reconstruction de la trace d'ordre deux de la fonction biharmonique \bar{u} . La figure 6.43 (erreur $L^2=0.0174354$) et la figure 6.44 (erreur $L^2=0.037$) représente la reconstruction de la trace d'ordre trois de la fonction \bar{u} . Nous constatons que la qualité des reconstructions se dégrade (les reconstructions deviennent imprécises) lorsque le rapport \mathfrak{b} diminue et les erreurs en norme L^2 augmentent.

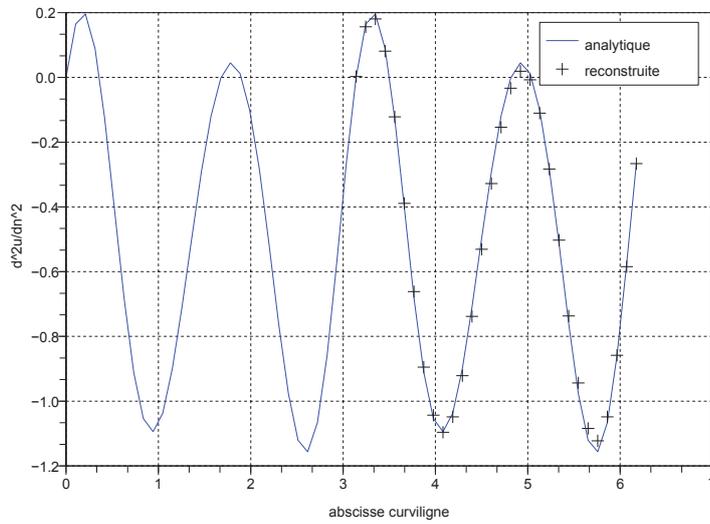


FIG. 6.29 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 25 \cdot 10^{-4}$; $k = 3200$.

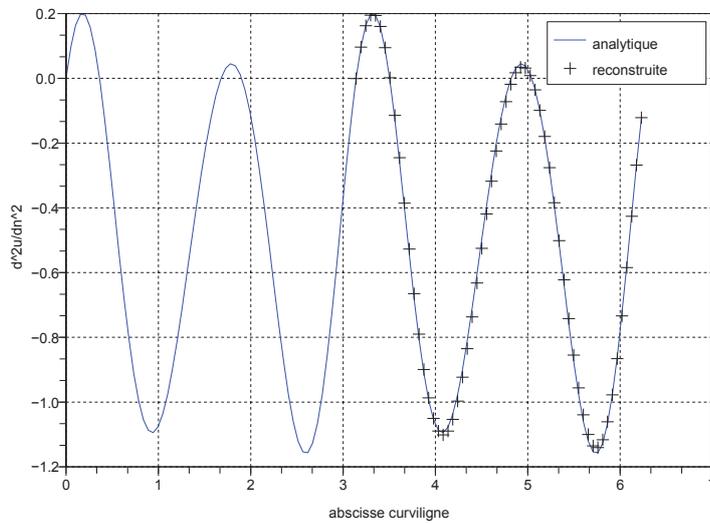


FIG. 6.30 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 60$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $k = 110$.

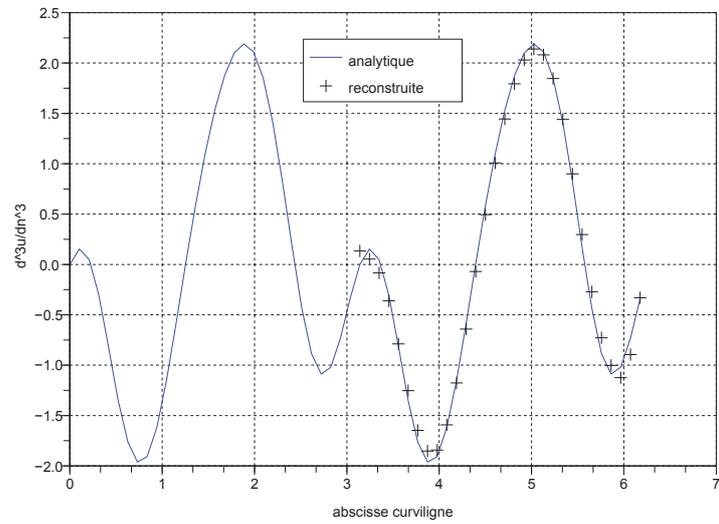


FIG. 6.31 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 25.10^{-4}$; $k = 3200$.

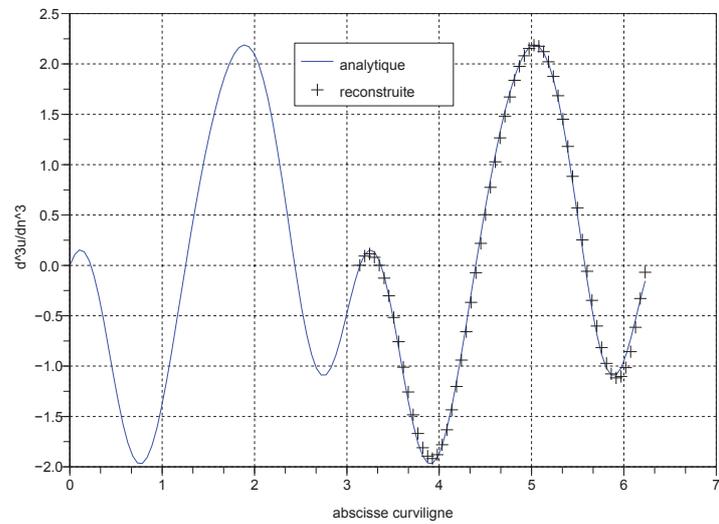


FIG. 6.32 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 60$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $k = 110$.

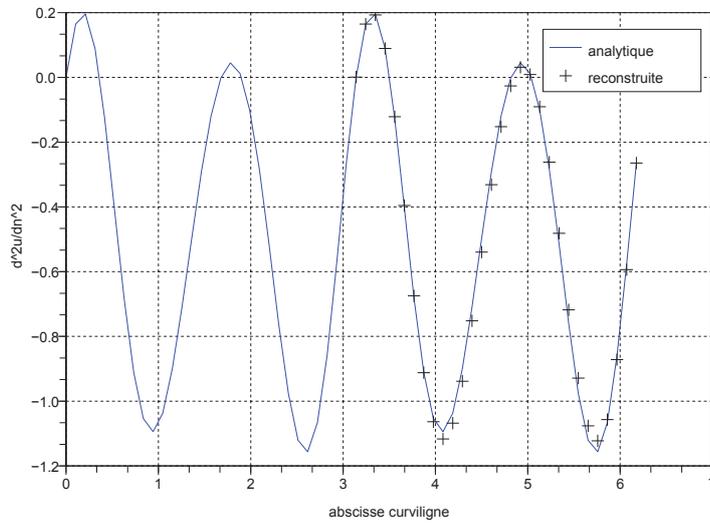


FIG. 6.33 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 10^{-3}$.

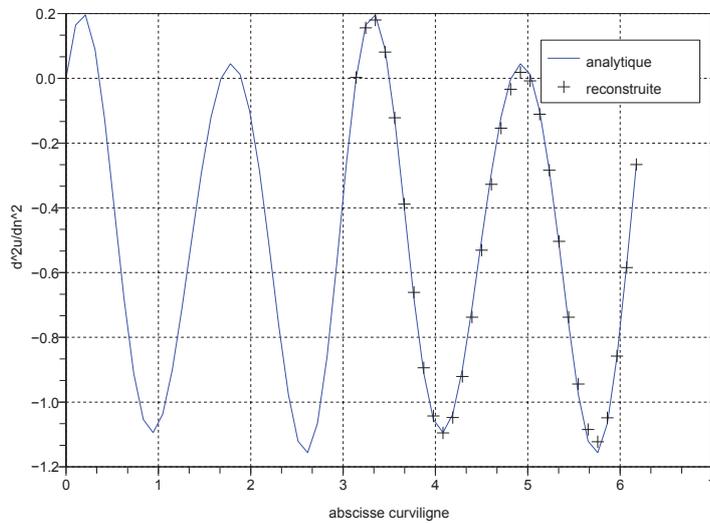


FIG. 6.34 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 95 \cdot 10^{-5}$.

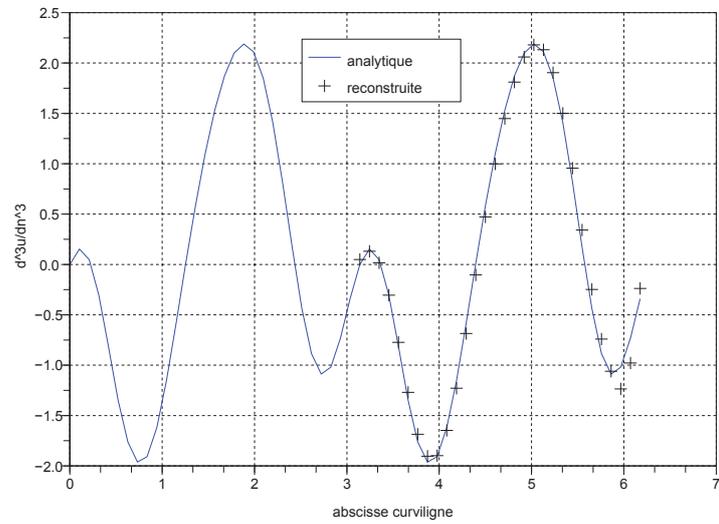


FIG. 6.35 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 10^{-3}$.

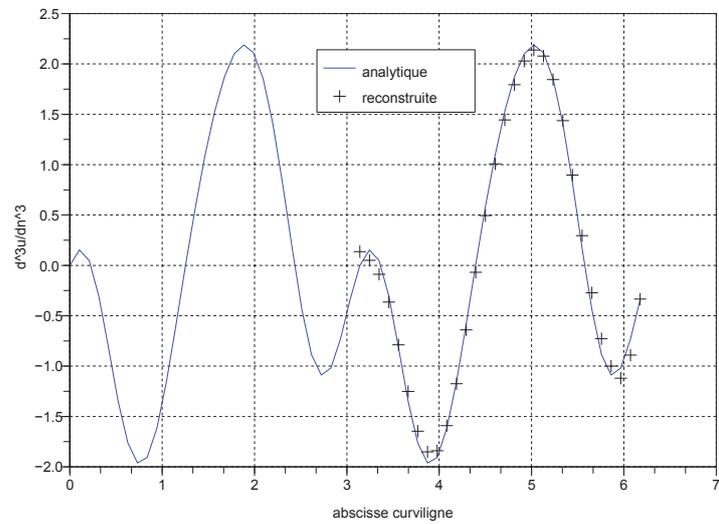


FIG. 6.36 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 95.10^{-5}$.

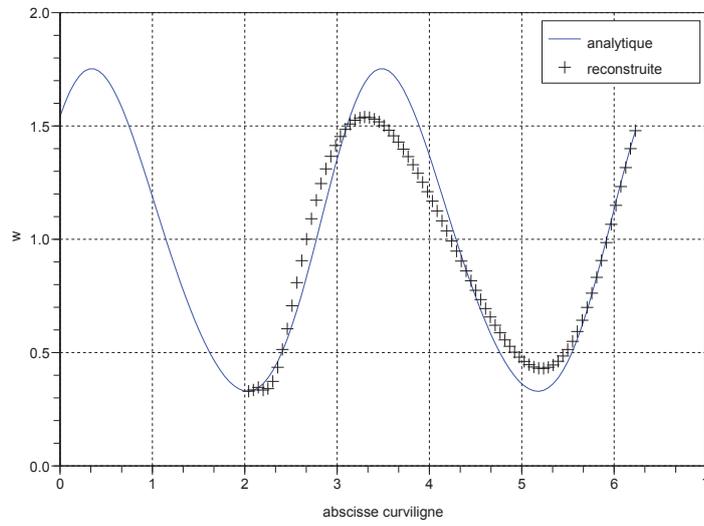


FIG. 6.37 – Reconstruction de la trace de ω avec
 $N_d = 40$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/3$.

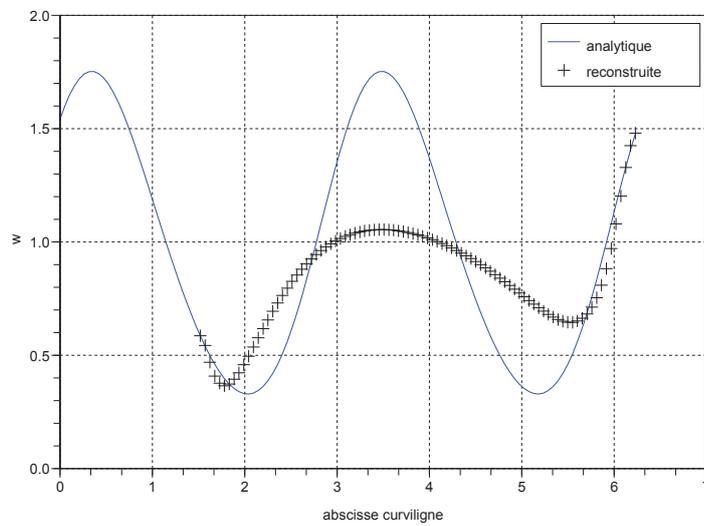


FIG. 6.38 – Reconstruction de la trace de ω avec
 $N_d = 30$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/4$.

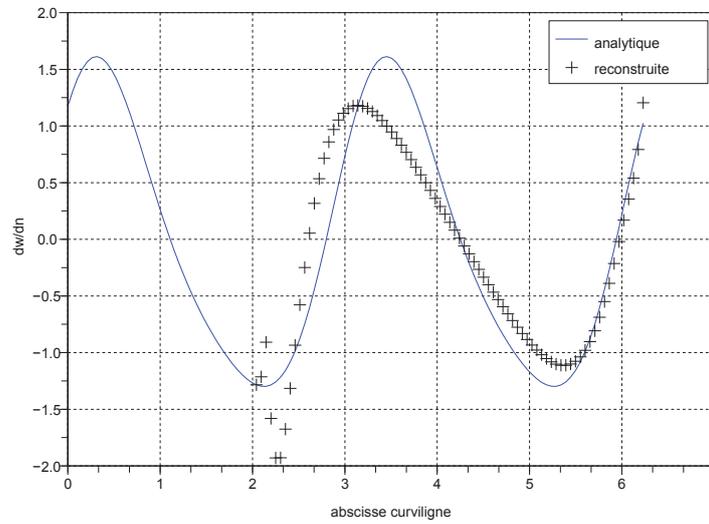


FIG. 6.39 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 40$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/3$.

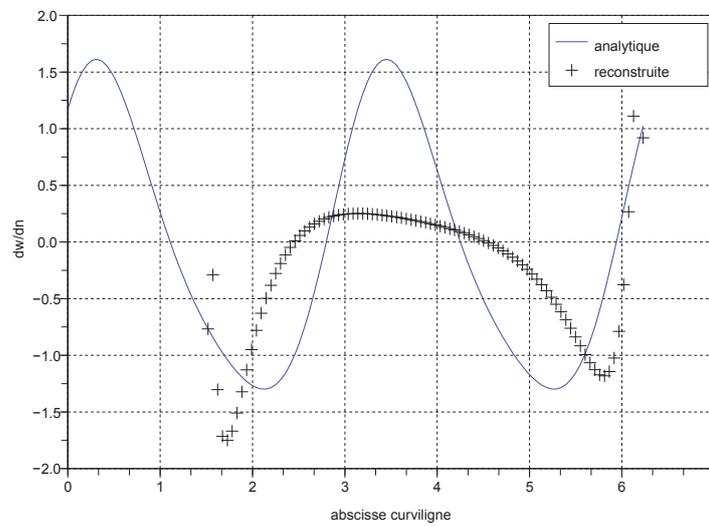


FIG. 6.40 – Reconstitution de la dérivée normale de ω avec $N_d = 30$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/4$.

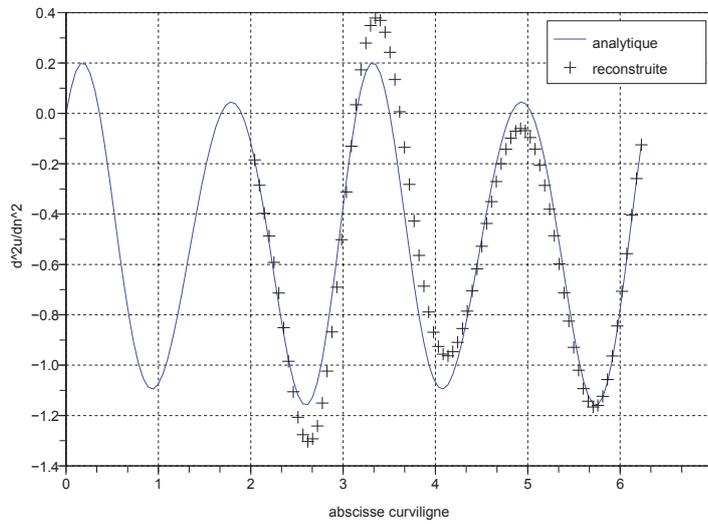


FIG. 6.41 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 40$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/3$.

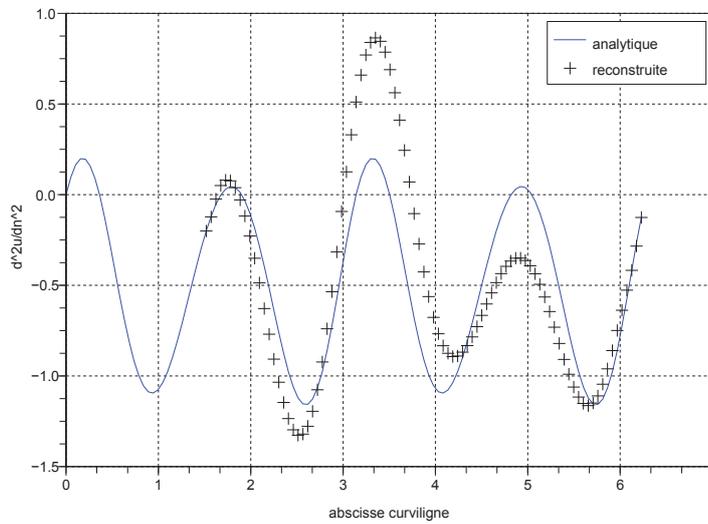


FIG. 6.42 – Reconstruction de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec $N_d = 30$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/4$.

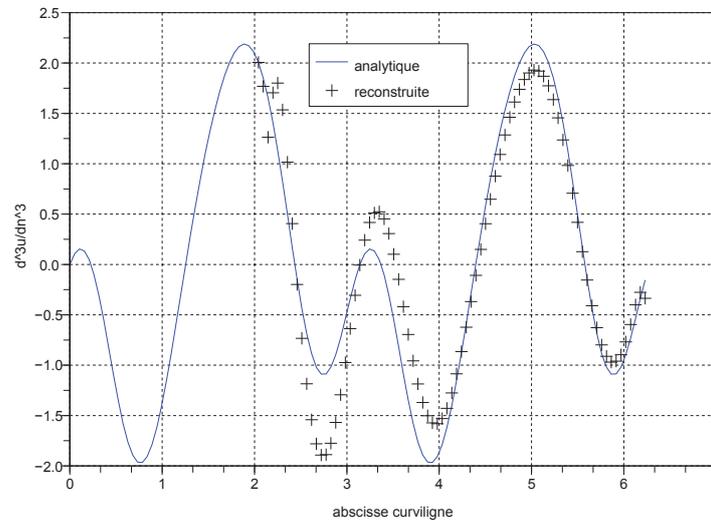


FIG. 6.43 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 40$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/3$.

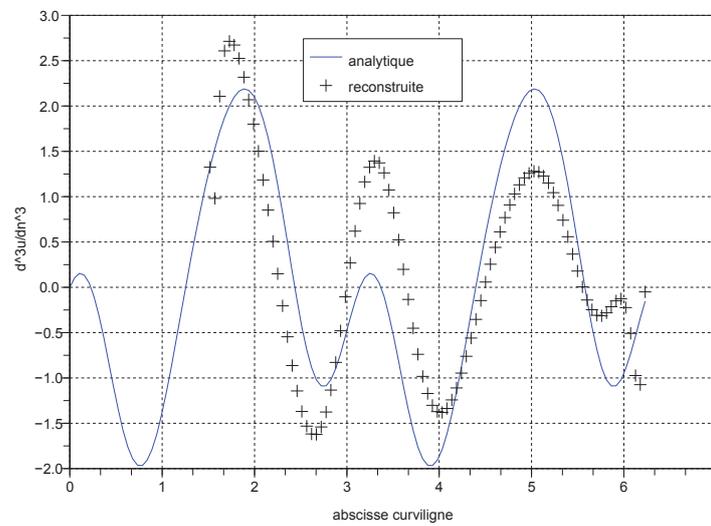


FIG. 6.44 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec $N_d = 30$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/4$.

6.2.4 Cas de données bruitées

Ici, nous étudions la stabilité de l'algorithme (5.85) en bruitant les données ϑ_d et β_d du problème (4.11) et en choisissant pour reconstruction la solution numérique la plus proche des traces de la solution analytique ω . Le domaine est le disque unité centré à l'origine. La partie du bord du disque est le demi-cercle défini par : $\Gamma_d = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1 / x_2 \leq 0 \}$. Le nombre d'éléments sur la frontière vaut 120. Le nombre de données sur Γ_d est fixé à 60. Les erreurs en norme L^2 obtenues sur les reconstitutions de la trace et de la dérivée normale de la solution ω (respectivement sur les reconstitutions des traces d'ordre deux et trois de la solution \bar{u}), notées *erreur(0)* et *erreur(1)* (respectivement *erreur(2)* et *erreur(3)*), sont celles de la section 6.2.2.1 (respectivement de la section 6.2.2.3).

6.2.4.1 Bruit sur la donnée ϑ_d

Nous avons d'abord regardé la stabilité de l'algorithme lorsque la donnée ϑ_d est perturbée par un bruit qui suit une loi uniforme et qui possède une amplitude qui correspond à un pourcentage de la valeur maximale de la trace de la fonction sur toute la frontière. La figure 6.45 dont l'erreur L^2 vaut 0.069 (respectivement la figure 6.46 pour laquelle l'erreur L^2 est de 0.189) montre la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction ω pour la donnée ϑ_d bruitée à 10%. La figure 6.47 pour laquelle l'erreur L^2 est de 0.116 (respectivement la figure 6.48 dont l'erreur L^2 vaut 0.015) représente la reconstitution de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction \bar{u} pour la donnée ϑ_d bruitée à 10%. Nous avons constaté que *l'algorithme débruite les données sur la partie Γ_d et produit une reconstruction précise des traces de la fonction sur la partie complémentaire Γ_i de la frontière*. Pour une amplitude de bruit comprise entre 2% et 13%, le tableau suivant donne les erreurs en norme L^2 obtenues.

Amplitude du bruit	erreur(0)	erreur(1)	erreur(2)	erreur(3)
2%	0.013	0.045	0.022	0.004
5%	0.035	0.105	0.059	0.008
8%	0.062	0.169	0.103	0.013
10%	0.069	0.189	0.116	0.015
13%	0.087	0.233	0.145	0.019

L'erreur sur les reconstructions augmente au fur et à mesure que l'amplitude du bruit croît. Quand le niveau de bruit est supérieur à 13%, les erreurs grandissent et les reconstructions sont moins précises.

6.2.4.2 Bruit sur la donnée β_d

Nous avons ensuite regardé la stabilité de l'algorithme quand la donnée β_d est générée par un bruit qui suit une loi uniforme avec une amplitude correspondant à un pourcentage de la valeur maximale de la dérivée normale de la fonction sur tout le bord du domaine. Pour la donnée β_d bruitée à 10%, la figure 6.49 avec une erreur L^2 de 0.066 (respectivement la figure 6.50 dont l'erreur L^2 vaut 0.278) représente la reconstitution de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction ω et la figure 6.51 avec une erreur L^2 de 0.111 (respectivement la figure 6.52 avec une erreur L^2 de 0.022) montre la reconstruction de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction \bar{u} . Nous avons remarqué, comme dans le cas de la donnée ϑ_d bruitée, que l'algorithme débruite les données sur la partie Γ_d et donne une assez bonne reconstruction des traces de la fonction sur la partie inconnue Γ_i de la frontière. Pour une amplitude de bruit qui varie entre 2% et 13%, nous avons regroupé les erreurs trouvées dans le tableau suivant :

Amplitude du bruit	erreur(0)	erreur(1)	erreur(2)	erreur(3)
2%	0.029	0.110	0.049	0.009
5%	0.055	0.209	0.093	0.017
8%	0.065	0.271	0.109	0.022
10%	0.066	0.278	0.111	0.022
13%	0.072	0.302	0.121	0.024

lorsque les données ϑ_d et β_d sont de même amplitude, les erreurs obtenues sur les reconstitutions des traces sont plus élevées quand la donnée β_d est perturbée que quand la donnée ϑ_d est perturbée. La reconstruction est donc plus sensible aux erreurs sur la donnée ϑ_d .

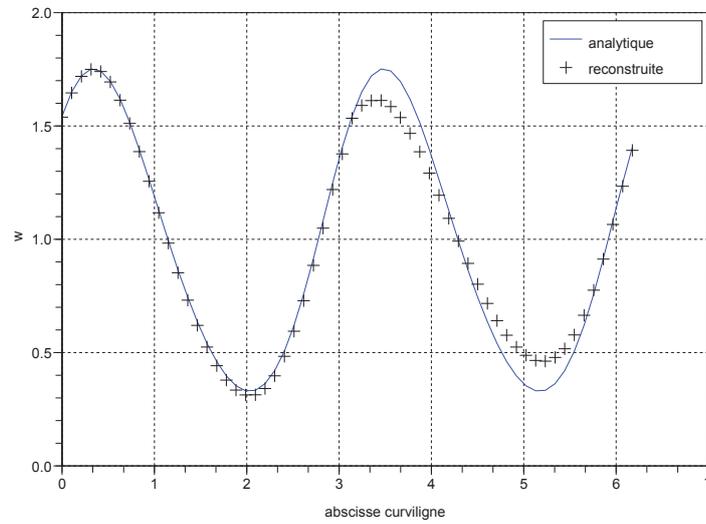


FIG. 6.45 – Reconstruction de la trace de ω avec une donnée ϑ_d bruitée de 10% et $c = 25 \cdot 10^{-3}$.

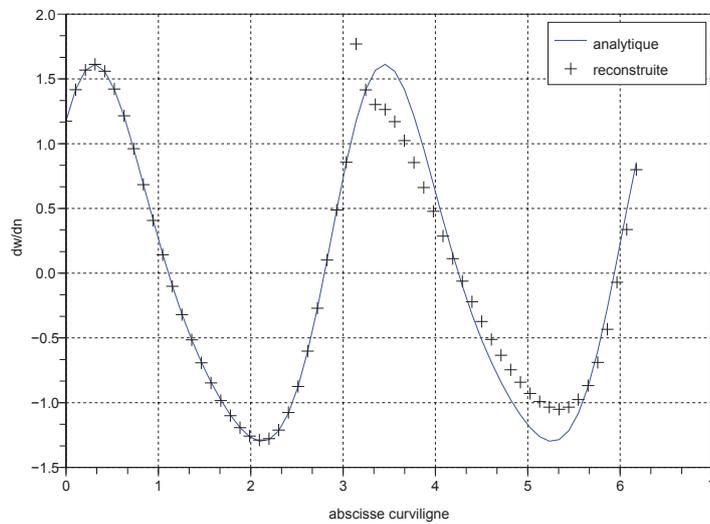


FIG. 6.46 – Reconstruction de la dérivée normale de ω avec une donnée ϑ_d bruitée de 10% et $c = 25 \cdot 10^{-3}$.

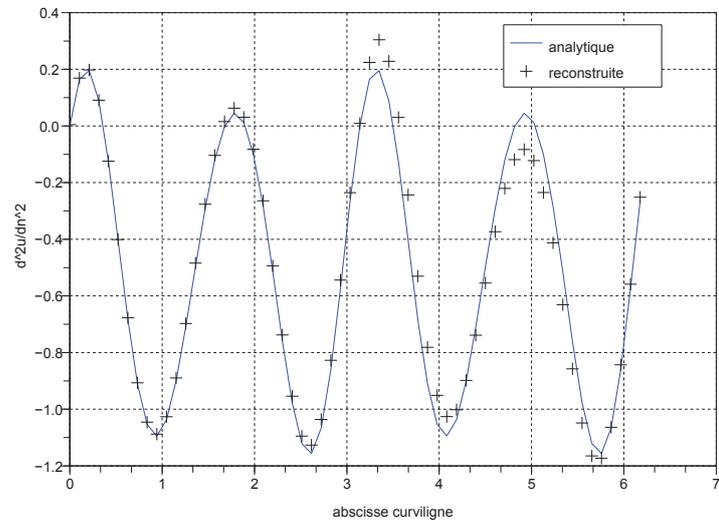


FIG. 6.47 – Reconstitution de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec une donnée ϑ_d bruitée à 10% et $c = 25 \cdot 10^{-3}$.

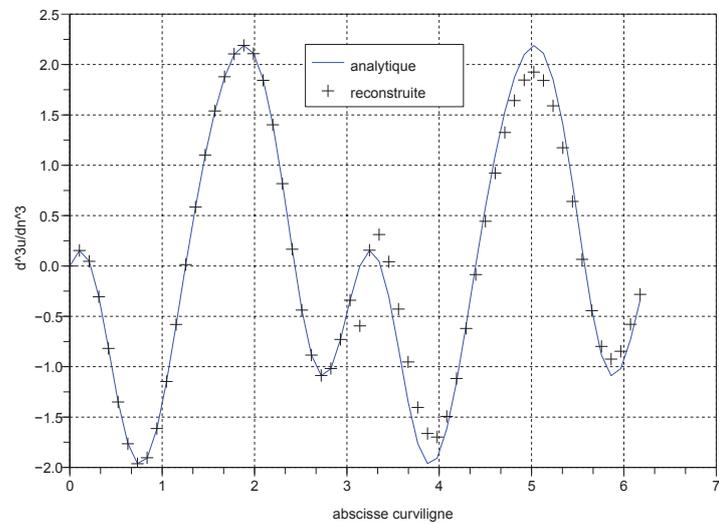


FIG. 6.48 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec une donnée ϑ_d bruitée de 10% et $c = 25 \cdot 10^{-3}$.

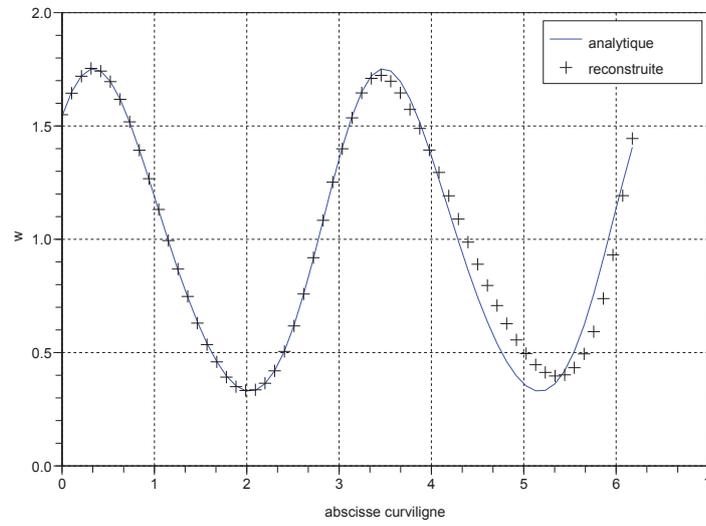


FIG. 6.49 – Reconstruction de la trace de ω avec une donnée β_d bruitée de 10% et $c = 95.10^{-4}$.

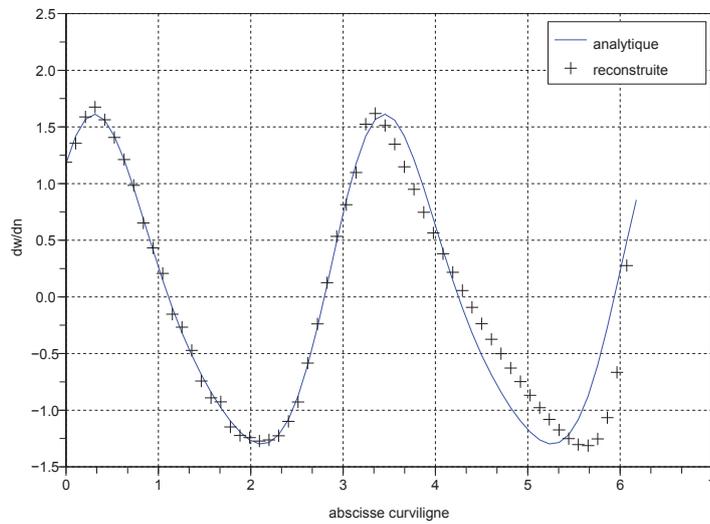


FIG. 6.50 – Reconstruction de la dérivée normale de ω avec une donnée β_d bruitée de 10% et $c = 95.10^{-4}$.

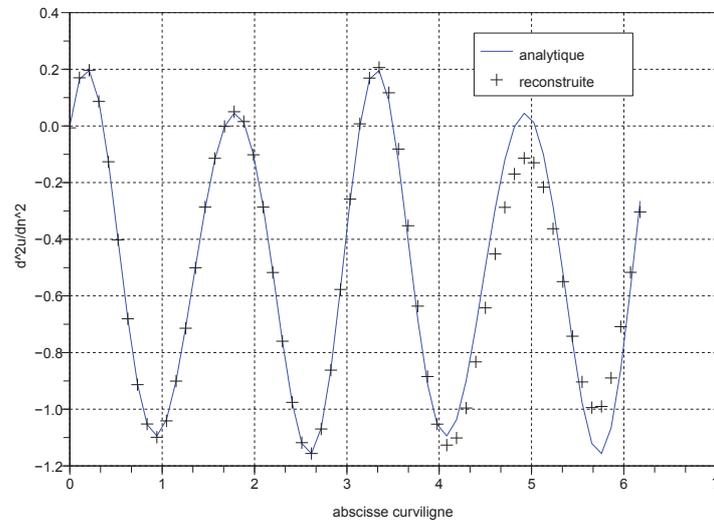


FIG. 6.51 – Reconstitution de la trace d'ordre deux $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial n^2}$ avec une donnée β_d bruitée de 10% et $c = 95 \cdot 10^{-4}$.

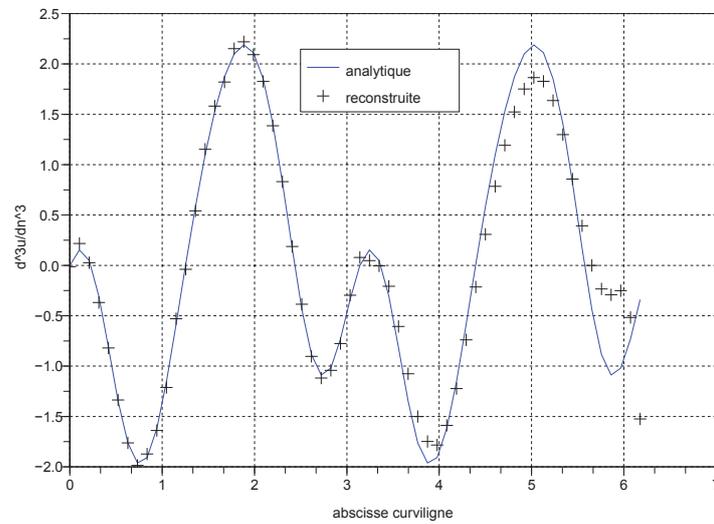


FIG. 6.52 – Reconstitution de la trace d'ordre trois $\frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial n^3}$ avec une donnée β_d bruitée de 10% et $c = 95 \cdot 10^{-4}$.

6.3 Reconstructions des traces de \bar{u}

Ici, nous nous proposons de reconstituer les traces de la solution analytique \bar{u} du problème inverse (4.21). Nous avons utilisé l'algorithme discret (5.103) en retenant pour reconstruction, l'itéré le plus proche de la trace et de la dérivée normale de la solution \bar{u} . Dans un premier temps, les tests numériques sont effectués sur un domaine carré pour lequel nous avons observé l'impact du nombre d'itérations. Dans un deuxième temps, les implémentations sont réalisées sur un domaine circulaire pour lequel nous avons étudié l'impact du paramètre de régularisation, du rapport entre la taille de Γ_d et la taille de Γ , noté \mathfrak{b} , puis la stabilité numérique de l'algorithme (5.103) pour des données bruitées.

6.3.1 Choix des fonctions

Comme à la section 6.2.1, nous avons considéré le cas de la fonction biharmonique \bar{u} et de la fonction harmonique ω définies analytiquement par

$$\bar{u}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1 (\cos x_1 \sinh x_2 - \sin x_1 \cosh x_2)$$

$$\omega(x_1, x_2) = \cos x_1 \cosh x_2 + \sin x_1 \sinh x_2 .$$

6.3.2 Premier cas : exemple d'un domaine carré

Le domaine est le carré $]0, 1[\times]0, 1[$. La partie Γ_d est le coté de l'angle droit du carré qui vérifie l'équation $x_1 = 0$. La direction normale n est celle des x_1 négatifs et la direction tangentielle τ est celle des x_2 positifs. Dans chacune des figures ci-après fournies par le logiciel à la fin des processus discrets (5.85) et (5.103), nous avons noté N_d le nombre de données sur la partie Γ_d et N le nombre d'éléments sur le périmètre du carré. Les points (0,0), (0,1), (1,1) et (1,0) du bord du carré sont représentés respectivement par les abscisses curvilignes 0.0, 1.0, 2.0 et 3.0. Pour évaluer les résultats numériques, nous avons calculé l'erreur notée $err(0)$ (respectivement l'erreur notée $err(1)$) en norme L^2 de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction \bar{u} sur Γ . Nous les avons définies par

$$err(0) = \frac{\|\mathbf{u}_{ana} - \mathbf{u}_{num}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\mathbf{u}_{ana}\|_{L^2(\Gamma)}}$$

$$\text{err}(1) = \frac{\|\mathbf{u}'_{ana} - \mathbf{u}'_{num}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|\mathbf{u}'_{ana}\|_{L^2(\Gamma)}}$$

où $\mathbf{u}_{ana} = \bar{u}$ (respectivement $\mathbf{u}'_{ana} = \partial\bar{u}/\partial n$) est la valeur exacte de la trace (respectivement de la pente) de la fonction sur la partie Γ_d du bord du domaine et $\mathbf{u}_{num} = \mathcal{U}_{k+1}$ (respectivement $\mathbf{u}'_{num} = \mathcal{U}'_{k+1}$) est la valeur numérique de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction.

6.3.2.1 Reconstitutions des traces de \bar{u}

La figure 6.53 (respectivement la figure 6.54) représente la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction \bar{u} . A la figure 6.53 la trace reconstruite conserve la singularité sur la partie complémentaire Γ_i de la frontière avec une erreur de 0.214 en norme L^2 tandis qu'à la figure 6.54 la dérivée normale reconstruite absorbe la discontinuité des dérivées aux différents noeuds de la partie Γ_i avec une erreur L^2 de 0.588. Par conséquent, la reconstruction de la dérivée normale est nettement moins précise que la reconstruction de la trace de la fonction \bar{u} .

La figure 6.55 présente une meilleure reconstruction de la trace de la fonction par rapport à la figure 6.53. L'erreur en norme L^2 est tombée à 0.146. La remarque faite ci-dessus pour la figure 6.54 reste valable pour la figure 6.56 dont l'erreur en norme L^2 a également diminué (par rapport à la figure 6.54) puisqu'elle vaut 0.539. En dépit de cette légère baisse, les erreurs demeurent quand même importantes.

6.3.2.2 Effet du nombre d'itérations

Au lieu de regarder, comme à la section 6.2.2, l'influence du paramètre c de régularisation pour lequel nous avons vu que les fonctions reconstruites sont optimales pour $c = 10^{-6}$, nous avons plutôt observé l'impact du nombre k d'itérations sur la reconstitution de l'itéré le plus proche de la solution analytique en fixant le nombre d'éléments sur la partie Γ_d du périmètre du carré, le nombre d'éléments sur le périmètre du carré, le terme de régularisation et en faisant varier le nombre k d'itérations. Nous avons regroupé dans les tableaux ci-dessous, les différentes erreurs obtenues sur les reconstructions de la trace de la fonction \bar{u} et de sa dérivée normale, à partir des schémas itératifs (5.85) et (5.103).

Valeurs de k	err(0)
50	0.213
2000	0.194
15000	0.164
18000	0.161
32000	0.153
55000	0.147
112000	0.143

Valeurs de k	err(1)
50	0.588
2000	0.554
6000	0.539
18000	0.536
32000	0.536
61000	0.539
112000	0.545

Dans la suite, nous avons illustré quelques représentations graphiques correspondant à certaines valeurs de k indiquées dans les tableaux.

Les figures 6.57, 6.58, 6.59 et 6.60 montrent la reconstruction de la trace de la fonction pour des valeurs croissantes de k . Nous remarquons, de la figure 6.57 jusqu'à la figure 6.60, que les allures graphiques et les erreurs en norme L^2 (cf. tableaux ci-dessus) de la fonction reconstruite sur la partie complémentaire Γ_i sont de meilleure qualité au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente. Pour des valeurs de k supérieures à 32000 l'erreur en norme L^2 varie peu et la convergence nécessite plus de temps.

Remarque 6.2 *En fait, si on ne s'intéressait pas à l'impact du nombre d'itérations sur la reconstruction de la fonction, on verrait que la convergence est rapide pour $c = 10^{-6}$. C'est le cas de la figure 6.53 où $k = 50$.*

La figure 6.61 et la figure 6.62 représentent la dérivée normale reconstruite par rapport à la dérivée normale analytique de la fonction pour des valeurs de k de plus en plus grandes. Compte tenu des informations dans les tableaux, nous voyons que l'erreur en norme L^2 est optimale pour $k = 18000$. Pour des valeurs de k supérieures ou inférieures à 18000 l'erreur L^2 augmente. Ce point diffère de la reconstruction de la trace de la fonction pour laquelle l'erreur diminue au fil des itérations. A la figure 6.61 comme à la figure 6.62, nous voyons également que le nombre d'itérations influence peu sur la qualité des fonctions reconstruites.

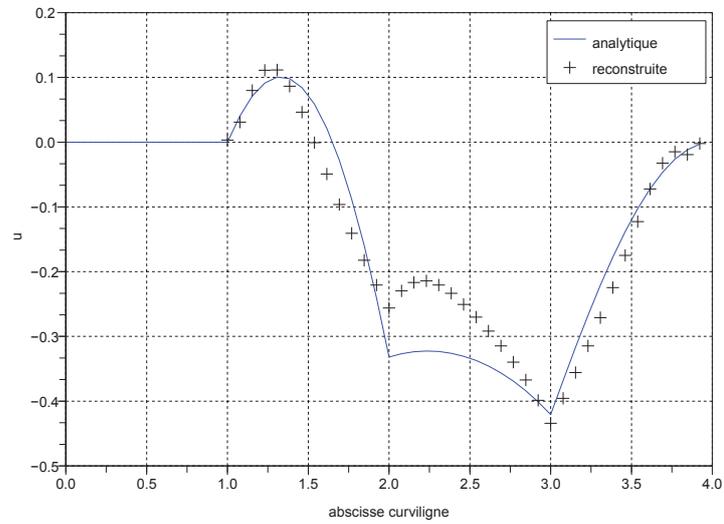


FIG. 6.53 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 50$.

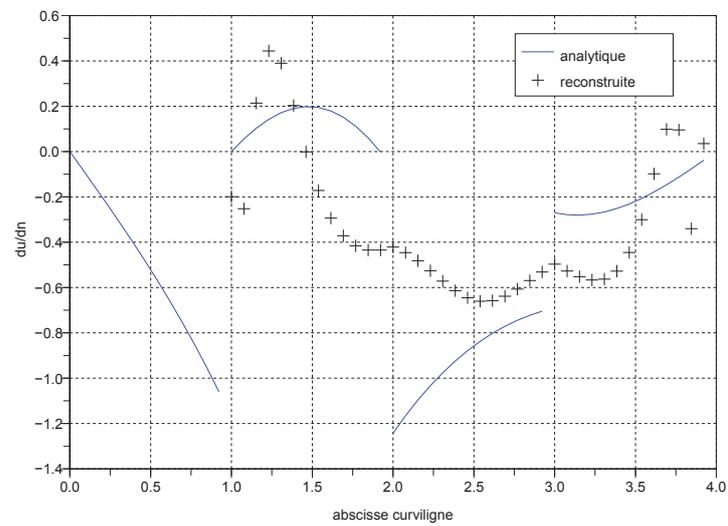


FIG. 6.54 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 50$.

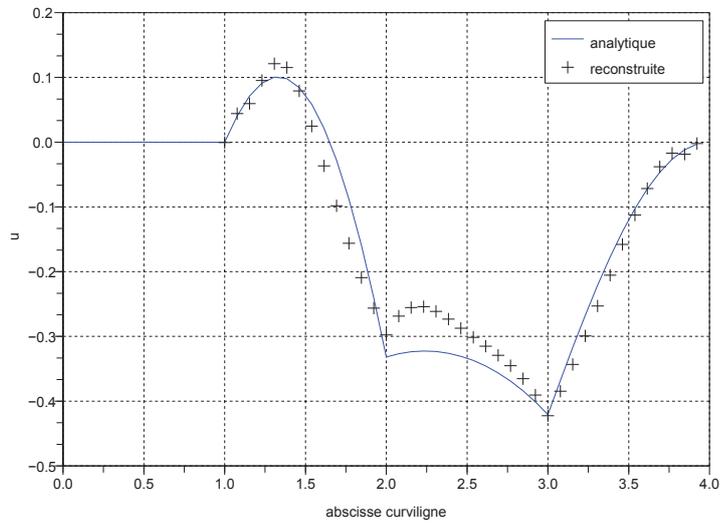


FIG. 6.55 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 61000$.

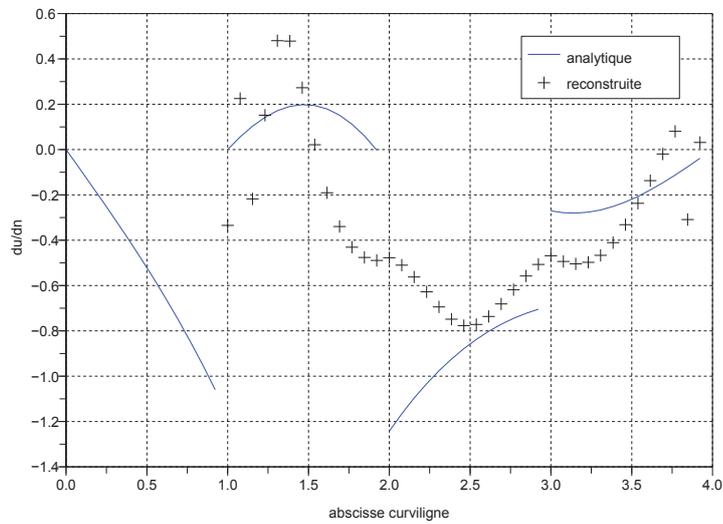


FIG. 6.56 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 61000$.

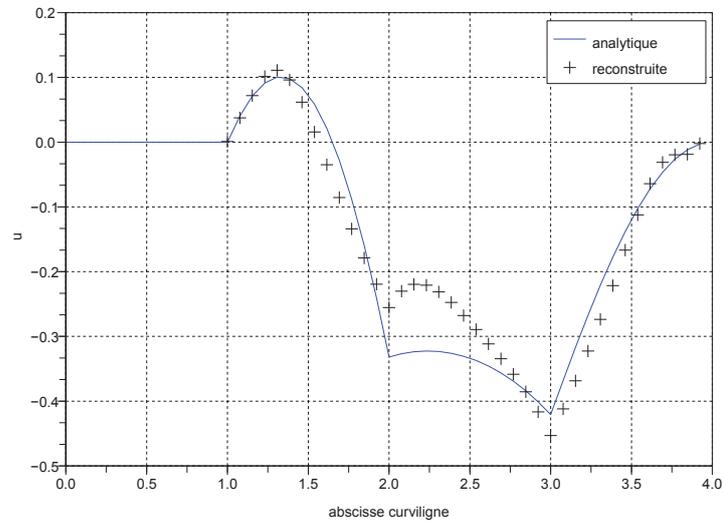


FIG. 6.57 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 2000$.

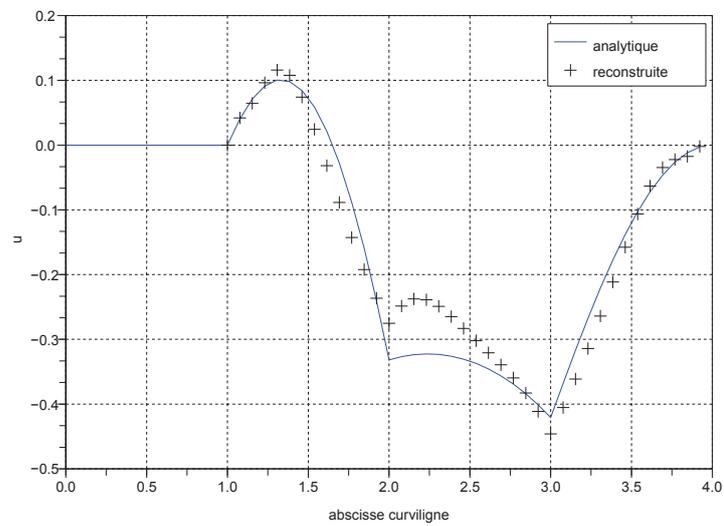


FIG. 6.58 – Reconstitution de la trace de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 18000$.

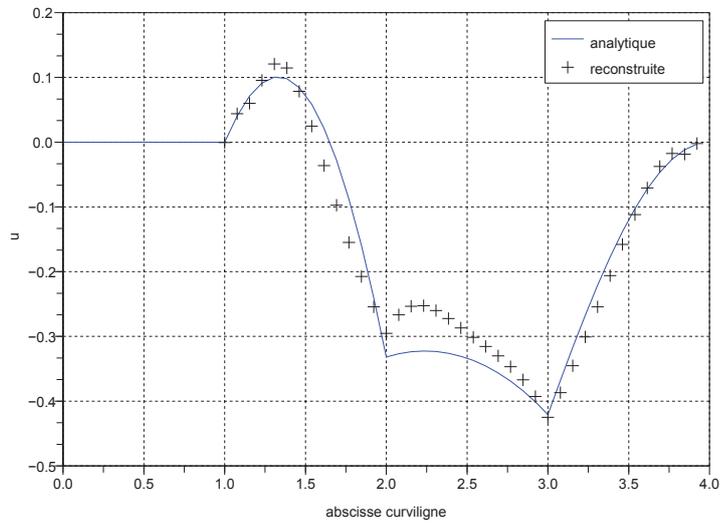


FIG. 6.59 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec
 $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 55000$.

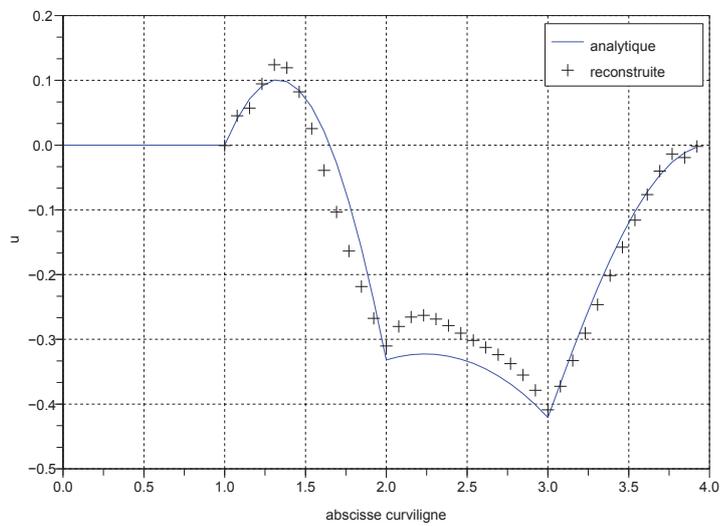


FIG. 6.60 – Reconstitution de la trace de \bar{u} avec
 $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 112000$.

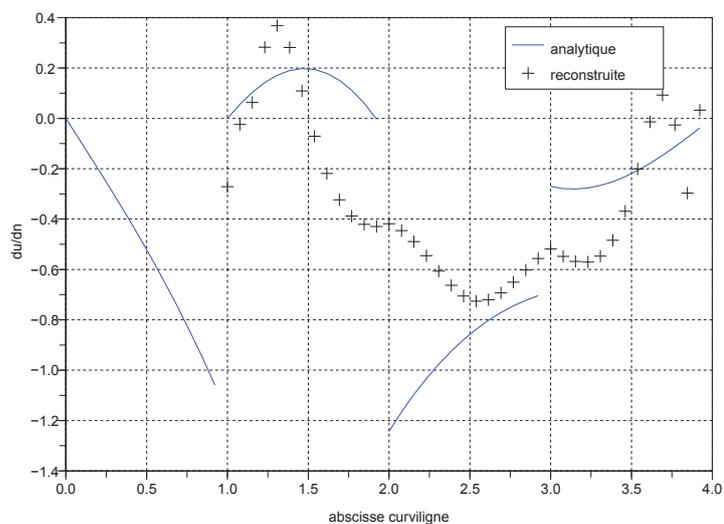


FIG. 6.61 – Reconstruction de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 2000$.

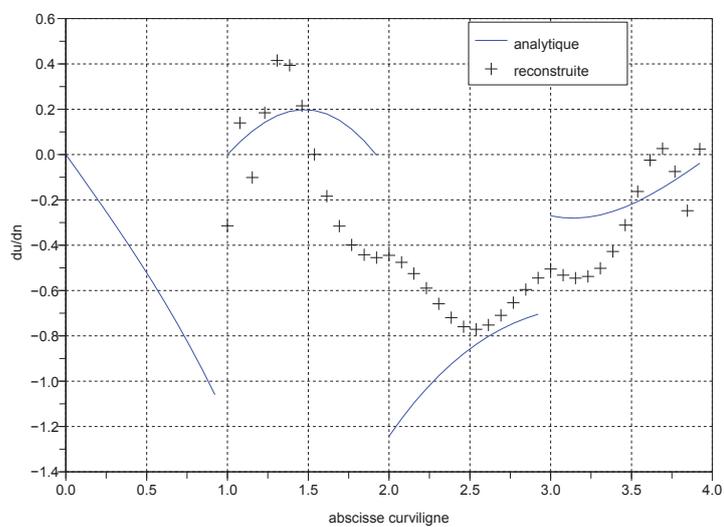


FIG. 6.62 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 13$; $N = 52$; $c = 10^{-6}$; $k = 18000$.

6.3.3 Deuxième cas : exemple d'un domaine circulaire

Nous avons continué nos tests numériques sur le disque centré à l'origine et de rayon un. La partie Γ_d sur laquelle sont fixées les données est toujours le demi-cercle défini de manière suivante : $\Gamma_d = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1 / x_2 \leq 0 \}$. Les fonctions \bar{u} et ω sont celles de la section 6.3.1. Les erreurs en norme L^2 , notées $err(0)$ et $err(1)$, sont celles de la section 6.3.2. Les paramètres N_d , N , c et k des représentations graphiques dans la suite représentent respectivement le nombre de données sur la partie Γ_d , le nombre d'éléments sur tout le bord, le coefficient de régularisation et le nombre d'itérations.

6.3.3.1 Reconstructions des traces de \bar{u}

La figure 6.63 (respectivement la figure 6.64) illustre la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction \bar{u} . A la figure 6.63 (respectivement à la figure 6.64) l'erreur en norme L^2 est de 0.030 (respectivement de 0.062).

Ainsi, la reconstruction de la trace de la fonction \bar{u} présente une meilleure précision que la reconstruction de sa dérivée normale.

Les figures 6.65 et 6.66 représentent respectivement les reconstructions de la trace et de la dérivée normale de la fonction \bar{u} . Les erreurs en norme L^2 sont du même ordre aux figures 6.63 (0.030) et 6.65 (0.034). La même remarque demeure pour les erreurs L^2 observées aux figures 6.64 (0.062) et 6.66 (0.077).

6.3.3.2 Influence du coefficient de régularisation

Après avoir regardé le rôle du coefficient de régularisation c sur la reconstruction de l'itéré le plus proche de la trace d'ordre deux (respectivement de la trace d'ordre trois) de la fonction biharmonique \bar{u} (section 6.2.3.4), nous nous sommes intéressés à l'impact de ce paramètre sur la reconstruction de l'itéré le plus proche de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction \bar{u} . Pour différentes valeurs de c , nous avons évalué les erreurs $err(0)$ et $err(1)$ en norme L^2 en fixant le nombre de données sur la partie Γ_d , le nombre total d'éléments sur le cercle et le nombre d'itérations. Les erreurs trouvées figurent dans les tableaux suivants :

Valeurs de c	err(0)
10^{-1}	0.314
10^{-2}	0.140
10^{-3}	0.064
10^{-4}	0.024
10^{-5}	0.034
10^{-6}	0.061

Valeurs de c	err(1)
10^{-1}	0.336
10^{-2}	0.216
10^{-3}	0.135
10^{-4}	0.074
10^{-5}	0.077
10^{-6}	0.137

ici, nous constatons que les erreurs relatives à la reconstruction de la trace et de la dérivée normale de la fonction \bar{u} sont du même ordre pour $c = 10^{-4}$ et $c = 10^{-5}$. Cependant ces erreurs sont optimales pour $c = 10^{-4}$ et la convergence est plus rapide. Pour des valeurs de c supérieures à 10^{-4} l'erreur sur la reconstruction de la trace évolue moins vite que l'erreur sur la reconstruction de la dérivée normale. Cela a pour conséquence une divergence lente. Pour des valeurs de c inférieures ou égales à 10^{-5} l'erreur sur la reconstruction de la trace augmente toujours moins vite que l'erreur sur la reconstruction de la dérivée normale de la fonction mais la divergence est plus rapide car le logiciel reconditionne la matrice \mathbb{G}_N du premier membre de (5.103) à chaque étape du processus itératif et les effets du paramètre de régularisation s'estompent.

Pour les valeurs de c des figures 6.67 et 6.68 qui montrent les reconstructions de la trace de la fonction biharmonique \bar{u} et des figures 6.35 et 6.70 qui représentent les reconstitutions de sa trace d'ordre trois, nous observons que *la qualité des reconstructions des traces de la fonction ne dépend pratiquement pas du coefficient de régularisation*.

6.3.3.3 Influence du rapport \mathfrak{b}

Nous rappelons que le rapport \mathfrak{b} est le quotient entre la longueur de Γ_d et la longueur de Γ . Suite à la section 6.2.3.5, nous avons continué d'observer l'influence de ce rapport sur la reconstitution de la trace et de la dérivée normale de la fonction biharmonique \bar{u} .

La figure 6.71 (respectivement la figure 6.72) pour laquelle l'erreur en norme L^2 vaut 0.095 (respectivement vaut 0.319) représente la trace numérique et la trace analytique de la fonction \bar{u} . La figure 6.73 (erreur en norme $L^2=0.188$) et la figure 6.74 (erreur en norme $L^2=0.378$) montrent les reconstructions de la dérivée normale de la fonction \bar{u} . Ici, nous voyons encore que pour des valeurs de plus en plus petites du rapport \mathfrak{b} , les erreurs sur les reconstructions augmentent. Cela se traduit par une mauvaise qualité des traces numériques obtenues.

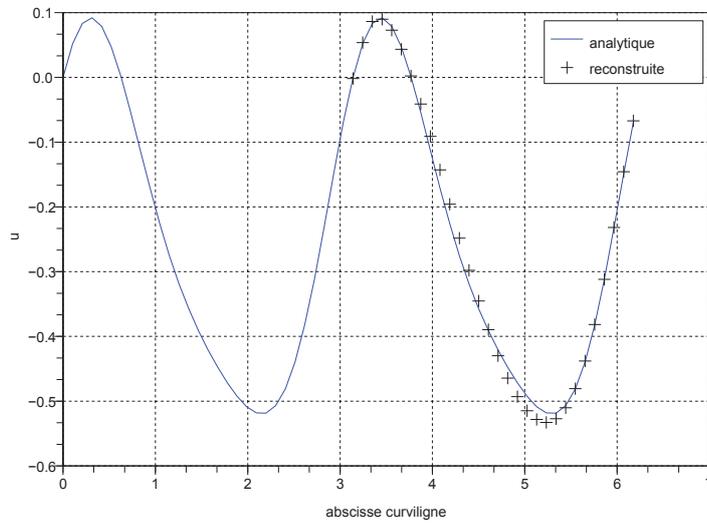


FIG. 6.63 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 25 \cdot 10^{-4}$; $k = 1100$.

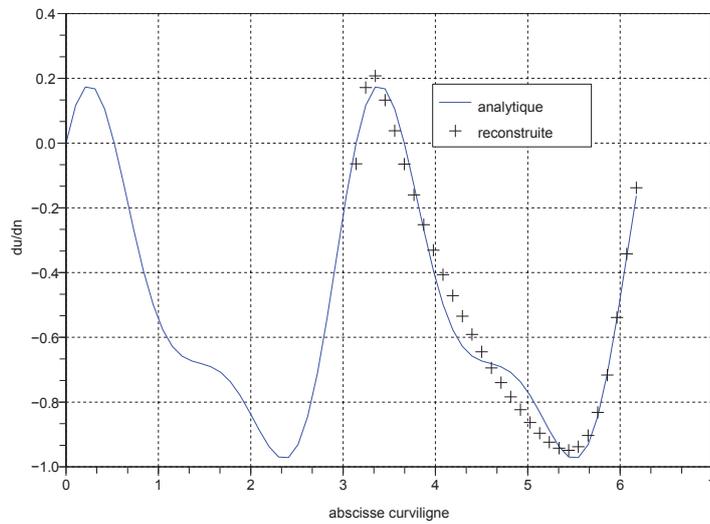


FIG. 6.64 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 25 \cdot 10^{-4}$; $k = 1100$.

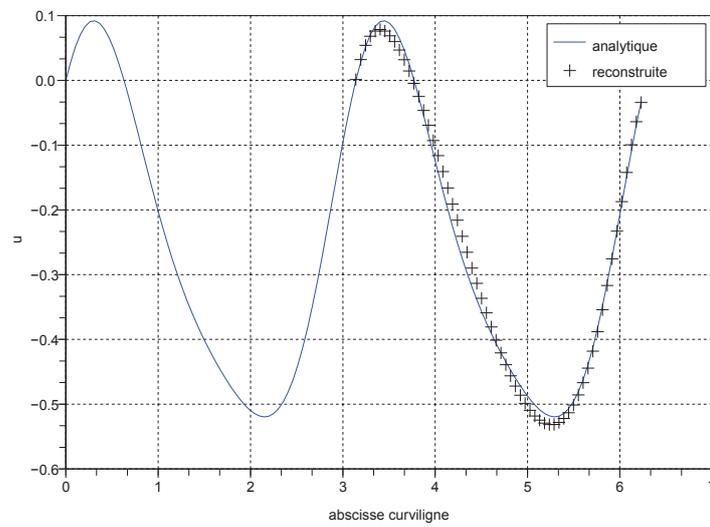


FIG. 6.65 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec $N_d = 60$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $k = 12$.

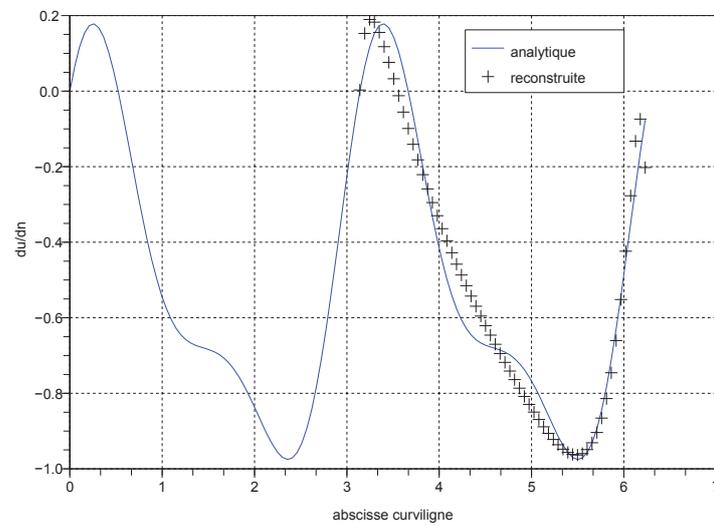


FIG. 6.66 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 60$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $k = 12$.

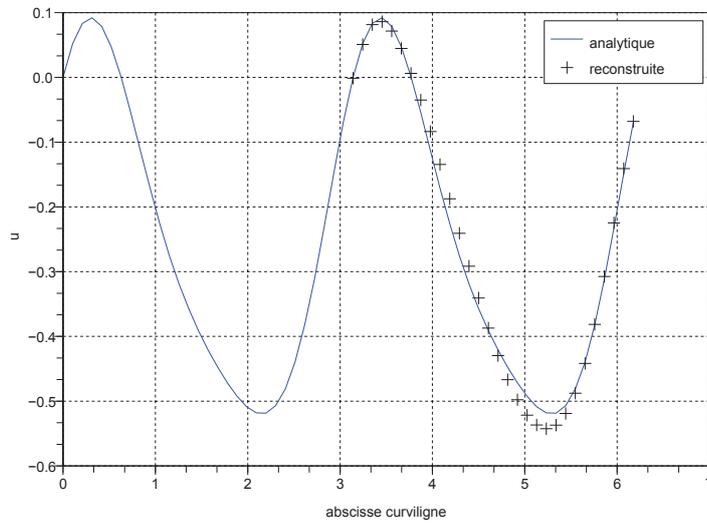


FIG. 6.67 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 10^{-3}$

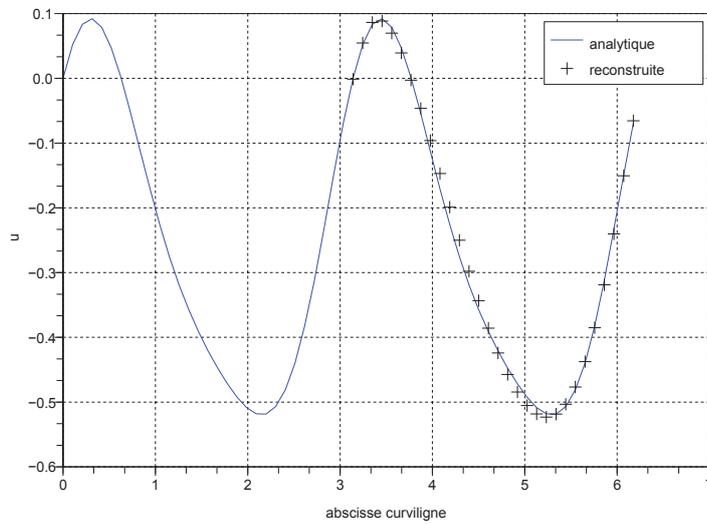


FIG. 6.68 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec
 $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 95 \cdot 10^{-5}$

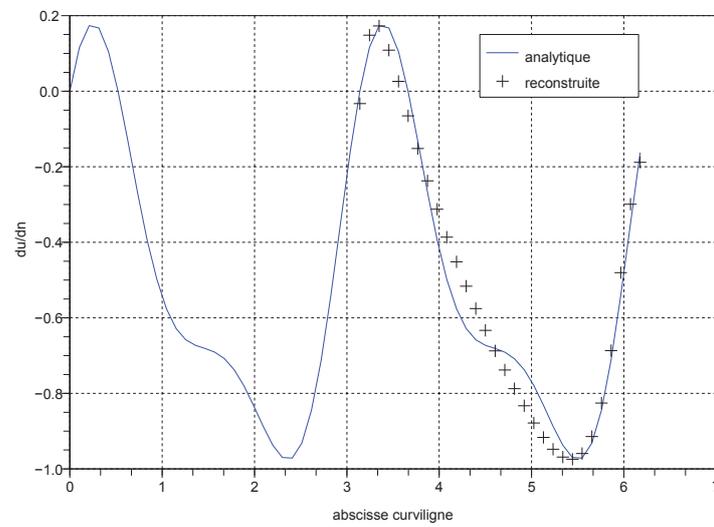


FIG. 6.69 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 10^{-3}$

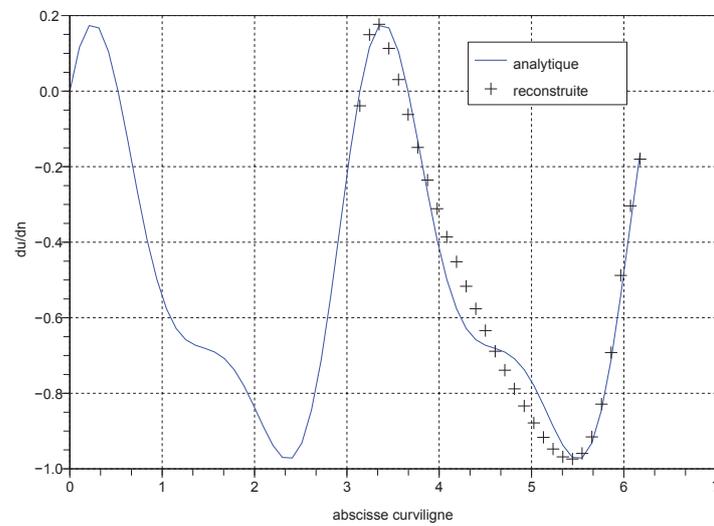


FIG. 6.70 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 30$; $N = 60$; $c = 95.10^{-5}$

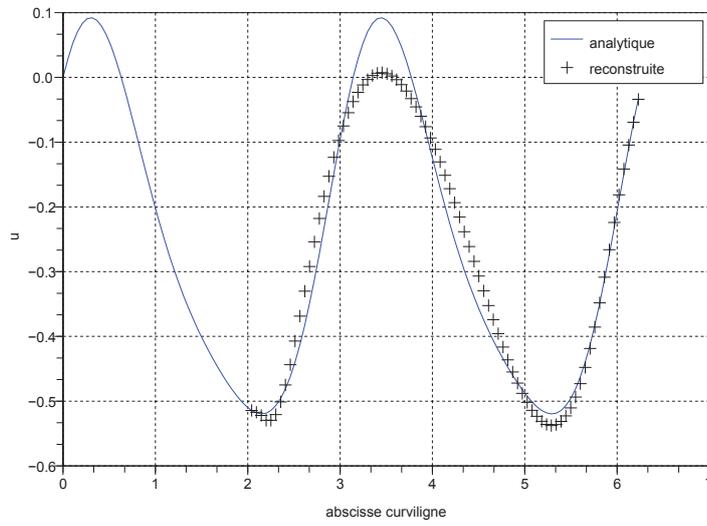


FIG. 6.71 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec $N_d = 40$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/3$.

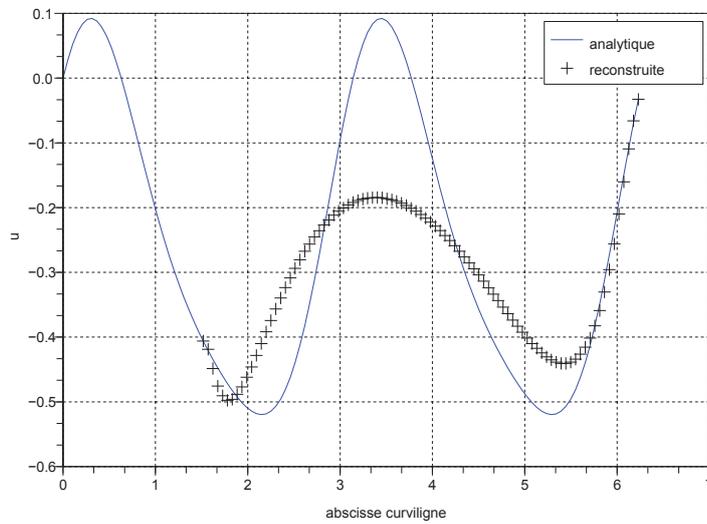


FIG. 6.72 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec $N_d = 30$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/4$.

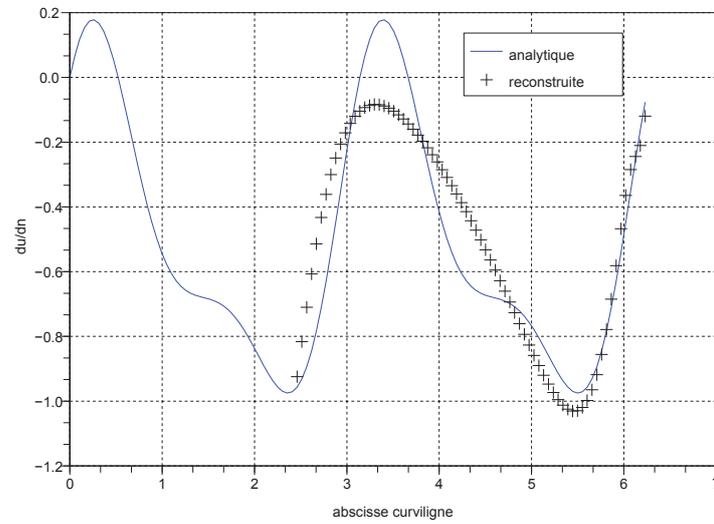


FIG. 6.73 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 40$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/3$.

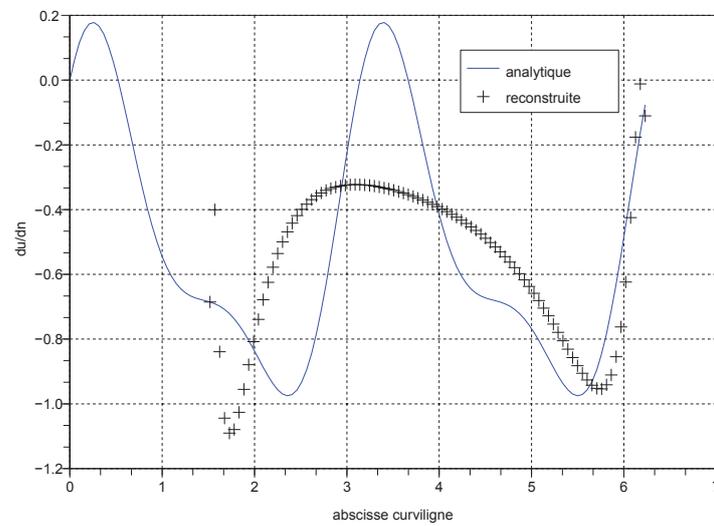


FIG. 6.74 – Reconstitution de la dérivée normale de \bar{u} avec $N_d = 30$; $N = 120$; $c = 10^{-5}$; $\mathfrak{b} = 1/4$.

6.3.4 Bruit sur les données

Dans ce paragraphe, nous étudions la stabilité de l'algorithme (5.103). Pour cela, nous perturbons les données φ_d et ψ_d du problème (4.21) et nous retenons pour reconstruction, l'itéré le plus proche des traces de la solution analytique \bar{u} . Le domaine est le cercle unité centré à l'origine. La partie Γ_d du bord du domaine est défini par : $\Gamma_d = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1 / x_2 \leq 0 \}$ et comporte 60 données. La frontière du domaine est composée de 120 éléments. L'erreur en norme L^2 obtenue sur la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la solution, notée $err(0)$ (respectivement $err(1)$), correspond à celle de la section 6.3.2..

6.3.4.1 Bruit sur la donnée φ_d

En premier lieu, nous avons observé la stabilité de l'algorithme lorsque la donnée φ_d est affectée par un bruit qui suit une loi uniforme avec une amplitude correspondant à un pourcentage de la valeur maximale de la trace de la fonction sur toute la frontière. Pour la donnée φ_d bruitée à 10%, la figure 6.75 avec une erreur L^2 de 0.070 représente la reconstruction de la trace de la fonction et la figure 6.76 pour laquelle l'erreur L^2 est de 0.125 montre la reconstruction correspondante de la dérivée normale de la fonction. Nous remarquons que *l'algorithme est capable de débruiter les données sur la partie Γ_d pour fournir une reconstruction précise des traces de la fonction sur la partie inconnue Γ_i du bord du domaine*. Pour une amplitude de bruit située entre 2% et 17%, le tableau suivant donne les erreurs en norme L^2 obtenues.

Amplitude du bruit	err(0)	err(1)
2%	0.035	0.076
5%	0.044	0.097
8%	0.064	0.117
10%	0.070	0.125
13%	0.080	0.141
17%	0.097	0.168

Lorsque l'amplitude du bruit augmente, l'erreur sur la reconstruction de la dérivée normale évolue plus vite que l'erreur sur la reconstruction de la trace de la fonction.

Pour un niveau de bruit supérieur à 17%, les erreurs sont de plus en plus grandes et les reconstructions peu précises.

6.3.4.2 Bruit sur la donnée ψ_d

En second lieu, nous avons étudié la stabilité de l'algorithme lorsque la donnée ψ_d est entachée par un bruit. Pour la donnée ψ_d bruitée à 10%, la figure 6.77 avec une erreur L^2 de 0.082 (respectivement la figure 6.78 dont l'erreur L^2 vaut 0.161) représente la reconstitution de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction. Nous observons la capacité de l'algorithme à débruiter les données sur la partie Γ_d pour fournir une reconstruction précise de la trace et plus ou moins précise de la dérivée normale de la fonction sur la partie complémentaire Γ_i de la frontière. Pour une amplitude de bruit comprise entre 2% et 17%, le tableau suivant donne les erreurs en norme L^2 trouvées.

Amplitude du bruit	err(0)	err(1)
2%	0.055	0.107
5%	0.069	0.140
8%	0.086	0.167
10%	0.082	0.161
13%	0.093	0.179
17%	0.109	0.205

Lorsque les données φ_d et ψ_d sont perturbées avec une même amplitude, les erreurs sur les reconstitutions des traces sont plus élevées lorsqu'elles sont obtenues à partir d'un bruit sur la donnée ψ_d . Par conséquent, la reconstruction est plus sensible aux erreurs sur la donnée ψ_d .

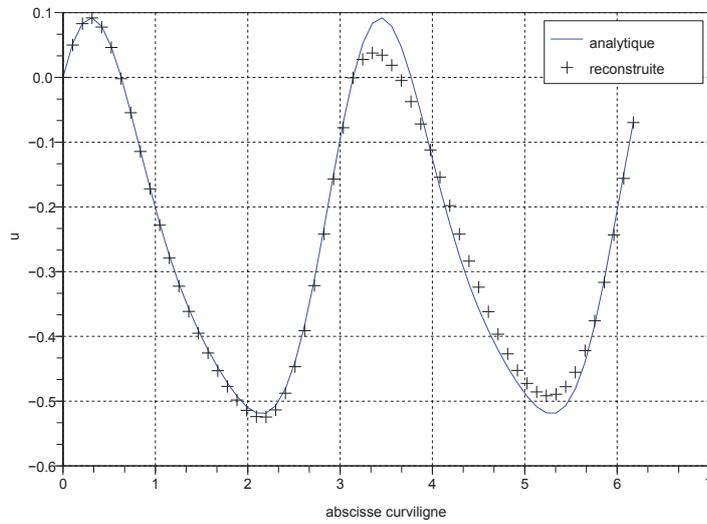


FIG. 6.75 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec une donnée φ_d bruitée de 10% et $c = 25 \cdot 10^{-3}$.

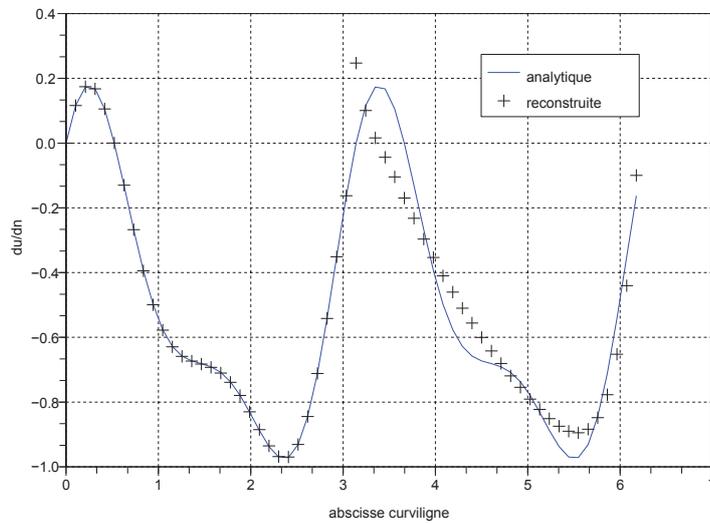


FIG. 6.76 – Reconstruction de la dérivée normale de \bar{u} avec une donnée φ_d bruitée de 10% et $c = 25 \cdot 10^{-3}$.

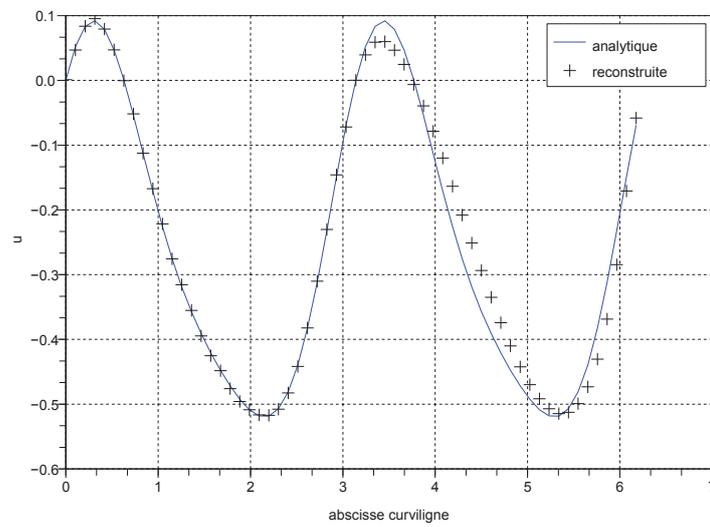


FIG. 6.77 – Reconstruction de la trace de \bar{u} avec une donnée ψ_d bruitée de 10% et $c = 95.10^{-4}$.

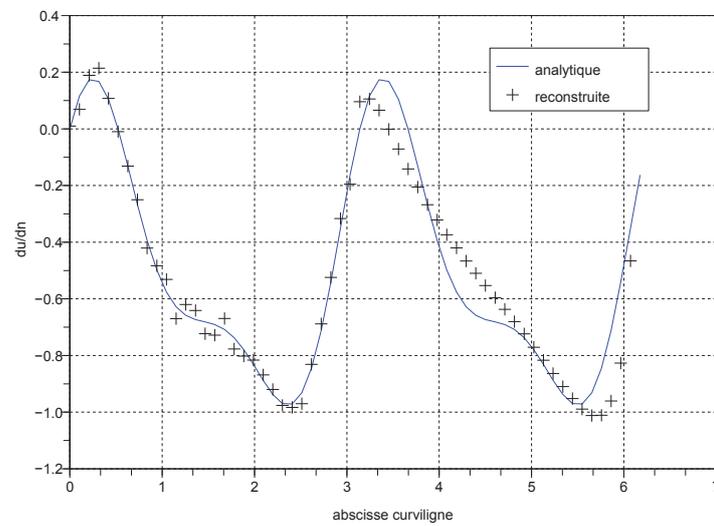


FIG. 6.78 – Reconstruction de la dérivée normale de \bar{u} avec une donnée ψ_d bruitée de 10% et $c = 95.10^{-4}$.

6.4 Comparaison avec une autre méthode

Dans cette section, nous considérons que le problème (4.10) est celui résolu dans L. Marin et D. Lesnic [34] pour le problème inverse biharmonique (1.9)–(1.10) et nous nous proposons d’observer les solutions numériques obtenues par la méthode de régularisation évanescence (développée sur les exemples des sections précédentes) et par la méthode des solutions fondamentales (cf. [34]).

6.4.1 Définition des fonctions et du domaine

Nous choisissons la fonction biharmonique u et la fonction harmonique v qui vérifient $-\Delta u = v$ (égalité (4.7)) et nous les définissons analytiquement par

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -x_1^3 - x_2^3 \\ v(x_1, x_2) &= 6(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

sur le disque unité. La partie Γ_d sur laquelle sont fixées les données est le demi-cercle défini par : $\Gamma_d = \{ x_1^2 + x_2^2 = 1 / x_1 \geq 0 \}$. Elle contient 50 données. La frontière Γ est constituée de 100 éléments.

6.4.2 Reconstructions des traces de u

La figure 6.79 (respectivement la figure 6.80) montre la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction u par la méthode des solutions fondamentales (p est le pourcentage de bruit sur les données). La figure 6.81 (respectivement la figure 6.82) représente la reconstitution de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction u par la méthode de régularisation évanescence. La trace reconstruite par la méthode de régularisation est meilleure tandis que la dérivée normale reconstruite par la méthode des solutions fondamentales est plus précise.

6.4.3 Reconstructions des traces de v

La figure 6.83 (respectivement la figure 6.84) représente la reconstitution de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction v par la méthode des solutions fondamentales (p est le pourcentage de bruit sur les données). La figure 6.85 (respectivement la figure 6.86) montre la reconstruction de la trace (respectivement de la dérivée normale) de la fonction v par la méthode de régularisation évanescence. Les reconstructions de la trace de la fonction sont assez précises de part et d’autre tandis que la reconstruction de la dérivée normale apparaît meilleure par la méthode des solutions fondamentales.

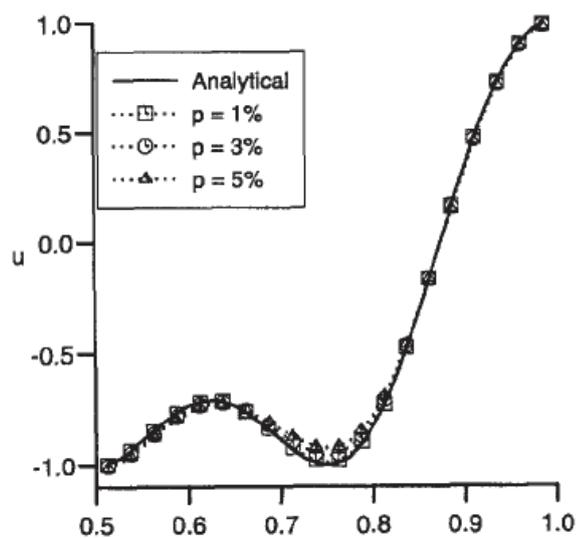


FIG. 6.79 – Reconstruction de la trace de u . par la méthode des solutions fondamentales

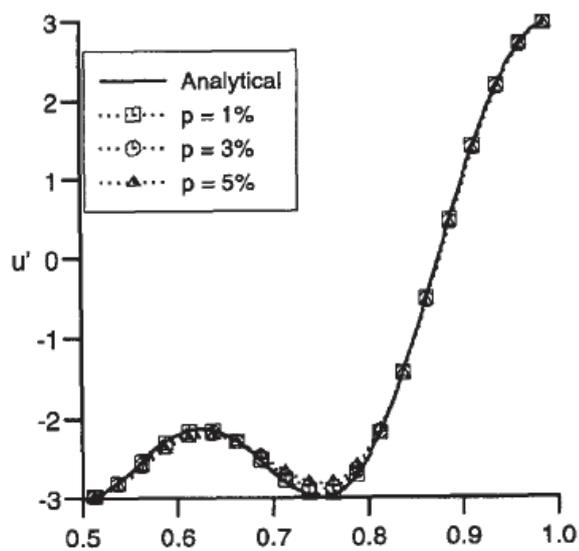


FIG. 6.80 – Reconstruction de la dérivée normale de u . par la méthode des solutions fondamentales

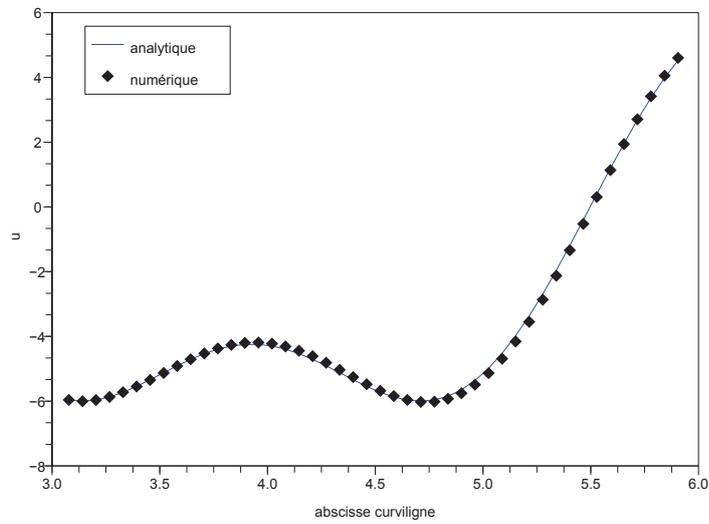


FIG. 6.81 – Reconstruction de la trace de u par la méthode de régularisation évanescence

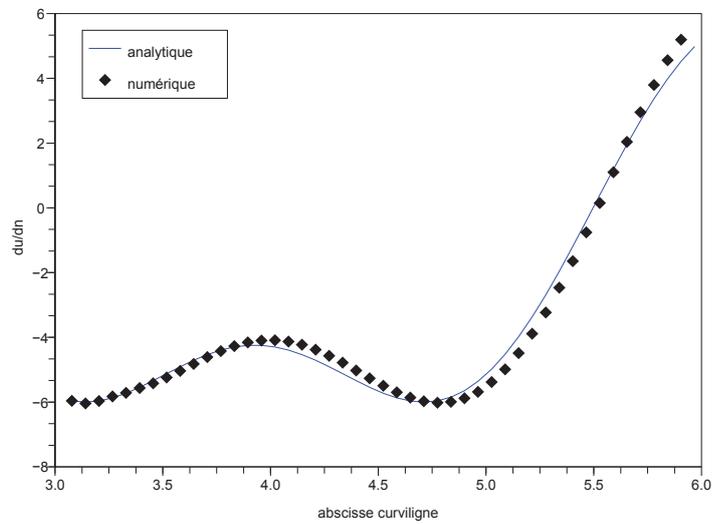


FIG. 6.82 – Reconstruction de la dérivée normale de u par la méthode de régularisation évanescence

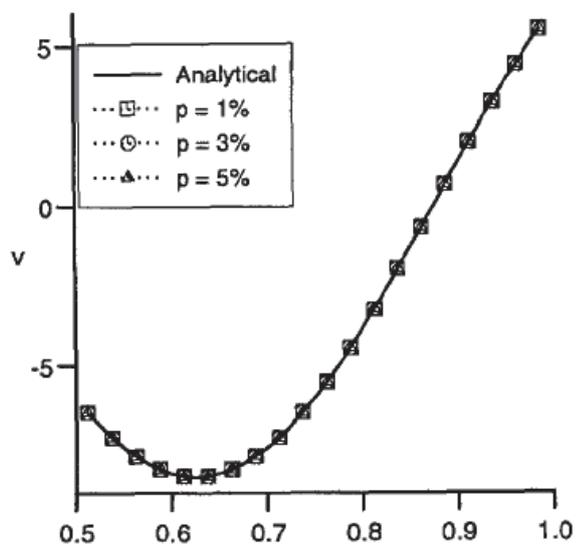


FIG. 6.83 – Reconstruction de la trace de v par la méthode des solutions fondamentales

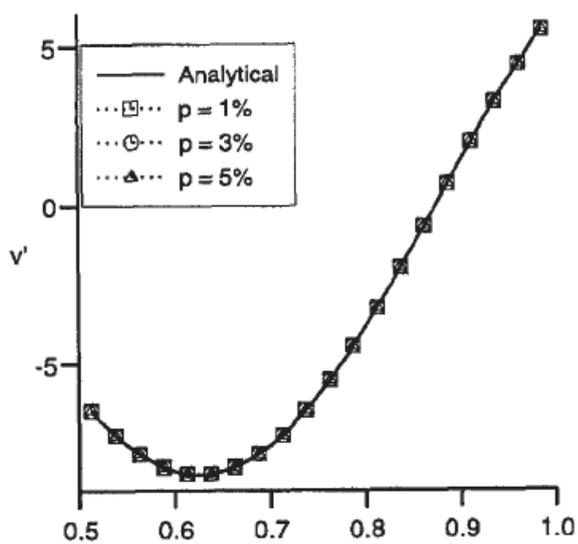


FIG. 6.84 – Reconstruction de la dérivée normale de v par la méthode des solutions fondamentales

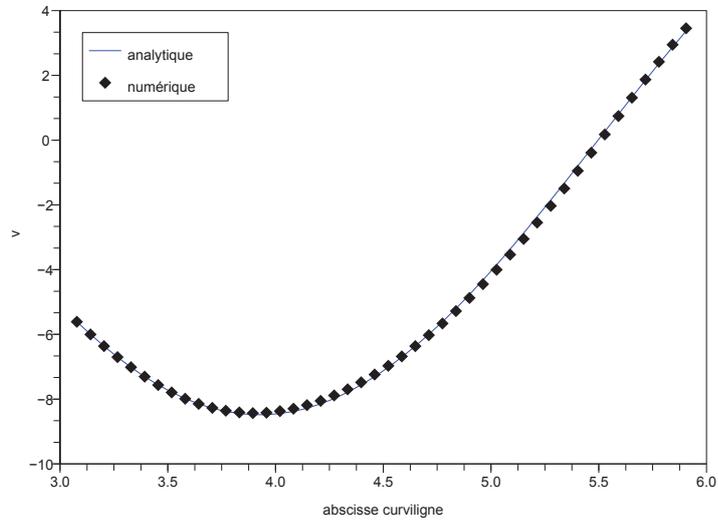


FIG. 6.85 – Reconstruction de la trace de v par la méthode de régularisation évanescence

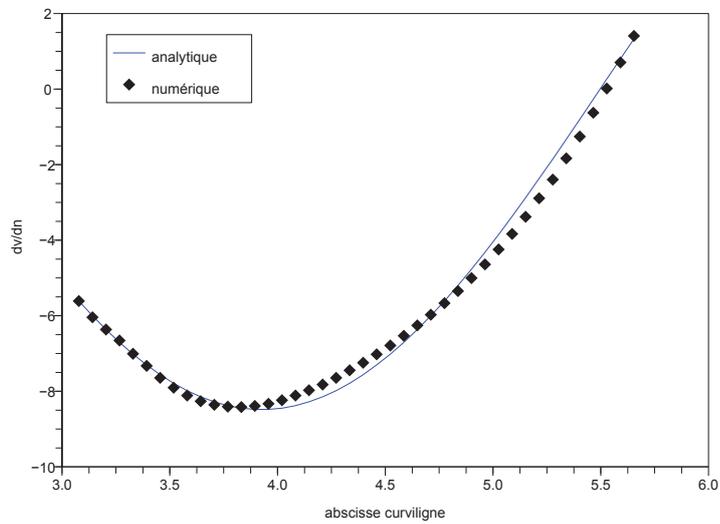


FIG. 6.86 – Reconstruction de la dérivée normale de v par la méthode de régularisation évanescence

Conclusion générale

La méthode de régularisation évanescence a été développée dans [11, 15, 53] sur un problème inverse de Cauchy associé à l'opérateur harmonique. Ce problème appartient à la catégorie des problèmes mal posés au sens d'Hadamard. Le principe de la méthode de régularisation évanescence consiste, ni en la modification de l'opérateur du problème, ni en l'ajout de condition à priori sur la solution, mais en considérant uniquement des données compatibles, à remplacer le problème mal posé par une suite de problèmes d'optimisation bien posés au sens d'Hadamard, dépendant d'un paramètre de régularisation. L'influence de ce paramètre disparaît lorsque la suite des solutions optimales que cette méthode génère converge vers la solution du problème mal posé.

Dans cette thèse, nous avons étendu le principe de la régularisation évanescence à un problème inverse de type Cauchy associé à l'opérateur biharmonique (problème mal posé au sens d'hadamard) et au problème factorisé correspondant, constitué de deux problèmes inverses de Cauchy associés à l'opérateur harmonique. D'une part, la convergence théorique, évoquée plus haut, de la méthode de régularisation est vérifiée pour chaque problème traité et vient compléter les résultats numériques (convergence et stabilité) présentés dans L.Marin et D.Lesnic [34], d'autre part, la convergence lorsque le pas du maillage tend vers zéro, de la paire compatible au sens discret vers la paire compatible de chaque problème inverse du problème factorisé, vient renforcer les travaux dans [11, 53].

D'un point de vue numérique, en combinant la méthode des éléments finis avec la méthode de régularisation, nous avons utilisé le problème factorisé pour résoudre le problème inverse associé à l'opérateur biharmonique. Les mises en oeuvre numériques obtenues sur un carré et sur un cercle sont en accord avec les résultats théoriques de convergence lorsque les données sont compatibles. Toutefois, la méthode s'avère moins précise sur un domaine à points anguleux (cas du carré) que

sur un domaine à frontière courbe (cas du cercle). Pour le carré, bien qu'il soit possible de reconstruire les différentes traces de la solution biharmonique avec peu de données, les reconstructions de la dérivée normale et de la trace d'ordre trois sont peu précises à cause des singularités sur la partie complémentaire du bord du domaine. Pour le cercle, bien qu'un nombre de données plus élevé soit nécessaire à la reconstruction des quatre traces de la fonction biharmonique, les reconstitutions obtenues sont très précises et attestent de l'efficacité de la méthode. La comparaison entre les résultats numériques fournis dans [34] et ceux fournis par notre méthode vient appuyer ce dernier point. Par ailleurs, la méthode s'avère robuste puisque nous avons également montré que les algorithmes discrets sont capables de débruiter les données et de fournir une reconstruction satisfaisante des traces de la solution.

La légère imprécision sur la reconstruction numérique de la dérivée normale peut être améliorée par la méthode d'ordre un développée dans [16]. L'extension de la méthode en dimension 3 et à des problèmes non linéaires reste envisageable. La généralisation de la méthode aux opérateurs linéaires elliptiques d'ordre $2m$ pourrait être intéressante, du moins sur le plan théorique.

Annexe A

A1. Formes explicites des matrices du chapitre 5

Au chapitre 5, paragraphe 5.2.6.1, lorsqu'on calcule le terme $2 \int_{\Gamma_d} v_h(s) u_h(s) ds$ dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_d}$, la matrice $\mathbb{A}_{N_d N_d}$ obtenue s'écrit

$$(6.1) \quad \mathbb{A}_{N_d N_d} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2l_1 & l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_1 & 2l_1 + 2l_2 & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l_2 & 2l_2 + 2l_3 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_{N_d-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_{N_d-1} & 2l_{N_d-1} \end{bmatrix} .$$

Nous rappelons ici que pour tout $i = 1 \dots N_d$ ou pour tout $i = 1 \dots N$, l_i représente la longueur de chaque élément rectiligne Γ_i et que dans le cas d'un maillage uniforme de pas h sur toute la frontière, nous avons

$$(6.2) \quad l_1 = l_2 = \dots = l_{N_d} = \dots = l_N = h .$$

Le calcul de la quantité $2 \int_{\Gamma_d} v'_h(s) u'_h(s) ds$ dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N_d}$, conduit à considérer la matrice $\mathbb{A}'_{N_d N_d}$ donnée explicitement par

$$(6.3) \quad \mathbb{A}'_{N_d N_d} = 2 \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & l_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_{N_d} \end{bmatrix} .$$

Il s'ensuit que les matrices \mathbb{A}_{NN} et \mathbb{A}'_{NN} s'écrivent de façon explicite

$$(6.4) \quad \mathbb{A}_{NN} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2l_1 & l_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ l_1 & 2l_1 + 2l_2 & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l_2 & 2l_2 + 2l_3 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_{N_d-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_{N_d-1} & 2l_{N_d-1} & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$(6.5) \quad \mathbb{A}'_{NN} = 2 \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & l_3 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_{N_d} & 0 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Les matrices \mathbb{C}_{NN} et \mathbb{C}'_{NN} intervenant respectivement en (5.69) pour calculer la quantité $2c \int_{\Gamma} v_h(s) u_h(s) ds$ dans la base $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N}$ et en (5.73) pour déterminer le terme $2c \int_{\Gamma} v'_h(s) u'_h(s) ds$ dans la base $(v_i)_{1 \leq i \leq N}$ sont fournies par

$$(6.6) \quad \mathbb{C}_{NN} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(l_1 + l_N) & l_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_N \\ l_1 & 2(l_1 + l_2) & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & l_2 & 2(l_2 + l_3) & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_{N-1} \\ l_N & 0 & \cdots & \cdots & 0 & l_{N-1} & 2(l_{N-1} + l_N) \end{bmatrix}$$

$$(6.7) \quad \mathbb{C}'_{NN} = 2 \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & l_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_N \end{bmatrix} .$$

Quant à la matrice \mathbb{B} elle est telle que

$$(6.8) \quad \mathbb{B} = - \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & l_3 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & l_N \end{bmatrix} .$$

A2. Détermination de la matrice \mathbb{D} définie par (5.96)

À la section 5.3.4, nous avons dit que d'après (5.51) et (5.93), il découle que si \mathcal{W}_I et \mathcal{W} sont solutions de (5.50), alors \mathcal{U}_I , \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont solutions du système linéaire

$$\begin{bmatrix} \mathbb{A}_{ii} & \mathbb{A}_{ie} \\ \mathbb{A}_{ei} & \mathbb{A}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_I \\ \mathcal{U} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{G}_{ii} & \mathbb{G}_{ie} \\ \mathbb{G}_{ei} & \mathbb{G}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{W}_I \\ \mathcal{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbb{B}\mathcal{U}' \end{bmatrix} .$$

En développant le premier membre de cette égalité on obtient le système

$$(6.9) \quad \begin{cases} \mathbb{A}_{ii}\mathcal{U}_I + \mathbb{A}_{ie}\mathcal{U} - \mathbb{G}_{ii}\mathcal{W}_I - \mathbb{G}_{ie}\mathcal{W} = 0 \\ \mathbb{A}_{ei}\mathcal{U}_I + \mathbb{A}_{ee}\mathcal{U} - \mathbb{G}_{ei}\mathcal{W}_I - \mathbb{G}_{ee}\mathcal{W} = -\mathbb{B}\mathcal{U}' \end{cases} .$$

Comme par une méthode de condensation sur la frontière provenant de (5.50) et (5.51) on sait que $\mathcal{W}_I = -\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}\mathcal{W}$, en remplaçant \mathcal{W}_I par $-\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}\mathcal{W}$ dans (6.9) on a

$$(6.10) \quad \begin{cases} \mathbb{A}_{ii}\mathcal{U}_I + \mathbb{A}_{ie}\mathcal{U} + (\mathbb{G}_{ii}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie} - \mathbb{G}_{ie})\mathcal{W} = 0 \\ \mathbb{A}_{ei}\mathcal{U}_I + \mathbb{A}_{ee}\mathcal{U} + (\mathbb{G}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie} - \mathbb{G}_{ee})\mathcal{W} = -\mathbb{B}\mathcal{U}' \end{cases} .$$

La première égalité de (6.10) entraîne que

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{ii}\mathcal{U}_I &= -\mathbb{A}_{ie}\mathcal{U} + (\mathbb{G}_{ie} - \mathbb{G}_{ii}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie})\mathcal{W} \\ \mathcal{U}_I &= -\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}\mathcal{U} + \mathbb{A}_{ii}^{-1}(\mathbb{G}_{ie} - \mathbb{G}_{ii}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie})\mathcal{W}. \end{aligned}$$

En substituant cette dernière expression de \mathcal{U}_I dans la deuxième égalité de (6.10) on obtient

$$(6.11) \quad (\mathbb{A}_{ee} - \mathbb{A}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie})\mathcal{U} + \mathbb{B}\mathcal{U}' = (\mathbb{G}_{ee} - \mathbb{G}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie} - \mathbb{A}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}(\mathbb{G}_{ie} - \mathbb{G}_{ii}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}))\mathcal{W}.$$

Comme on se rappelle que dans (5.53) on a $\mathbb{H} = \mathbb{A}_{ee} - \mathbb{A}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}$, on pose

$$\mathbb{D} = \mathbb{G}_{ee} - \mathbb{G}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie} - \mathbb{A}_{ei}\mathbb{A}_{ii}^{-1}(\mathbb{G}_{ie} - \mathbb{G}_{ii}\mathbb{A}_{ii}^{-1}\mathbb{A}_{ie}).$$

Dans ce cas, la relation (6.11) n'est autre que la relation (5.95) rappelée ci-dessous

$$\mathbb{H}\mathcal{U} + \mathbb{B}\mathcal{U}' = \mathbb{D}\mathcal{W}.$$

Annexe B

Soit Ω est ouvert borné connexe de \mathbb{R}^2 à bord Γ lipschitzien, compte tenu de la remarque 5.4, nous montrons ici que lorsqu'on munit l'espace de Hilbert

$$\Xi = \left\{ v \in \mathbf{H}^1(\Omega) / \int_{\Gamma} v \, d\sigma = 0 \right\}$$

de la norme : $v \mapsto |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$, alors cette norme est équivalente à la norme usuelle de $\mathbf{H}^1(\Omega)$, où l'on a

$$(6.12) \quad |v|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

Montrons d'abord qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(6.13) \quad \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall v \in \Xi .$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que pour toute constante $C > 0$, il existe $v \in \Xi$ telle que

$$(6.14) \quad \|\nabla v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} < C \|v\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $v_n \in \Xi$ telle que

$$(6.15) \quad \|\nabla v_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} < \frac{1}{n} \|v_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} .$$

Nécessairement, $v_n \neq 0$. Ainsi, on peut poser

$$u_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}}$$

Cette suite (u_n) satisfait donc

$$(6.16) \quad \begin{cases} u_n \in \Xi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \\ \|u_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 1 \\ \|\nabla u_n\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} < \frac{1}{n} \end{cases} .$$

On en déduit que la suite (u_n) est bornée dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$. Il existe donc une sous-suite $(u_{n_k})_k$ faiblement convergente dans $H^1(\Omega)$. Par l'injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, cette sous-suite est fortement convergente dans $L^2(\Omega)$. Notons u sa limite, on a avec (6.16)

$$u_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \quad \text{et} \quad \nabla u_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{au sens fort .}$$

Donc

$$(6.17) \quad u_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} u \quad \text{dans } H^1(\Omega) \quad \text{au sens fort et } \nabla u = 0 .$$

Comme Ξ est fermé dans $H^1(\Omega)$ et que $u_{n_k} \in \Xi$, $\|u_{n_k}\|_{L^2(\Omega)} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, à la limite on obtient

$$(6.18) \quad \begin{cases} u \in \Xi \\ \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1 \\ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0 \end{cases}$$

Puisque $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$, alors u est une constante. Mais avec $u \in \Xi$, on sait que

$$\int_{\Gamma} u \, d\sigma = 0 .$$

Comme u est constante sur l'ouvert borné Ω , cette constante vaut 0. Ce qui est en contradiction avec le fait que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$, d'où l'inégalité (6.13).

Montrons maintenant l'équivalence entre la norme $|v|_{H^1(\Omega)}$, définie sur Ξ , où $|v|_{H^1(\Omega)}$ est donnée par (6.12), et la norme usuelle de $H^1(\Omega)$.

Compte tenu de (6.13) on a $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout $v \in \Xi$. Donc

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \sqrt{C^2 + 1} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

D'où le résultat.

Bibliographie

- [1] P. C. Sabatier, editor. *Problèmes inverses*, volume 35 of *Cahiers Mathématiques Montpellier [Montpellier Mathematical Reports]*. Université des Sciences et Techniques du Languedoc U.E.R. de Mathématiques, Montpellier, 1986. RCP 264, Papers presented at the RCP meeting on interdisciplinary study of inverse problems held in Montpellier, November 26–30, 1985.
- [2] Victor Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] Victor Isakov. *Inverse problems for partial differential equations*, volume 127 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [4] O.F.T.A. *Problèmes inverses*. De l'expérimentation à la modélisation. Observatoire Français des Techniques Avancées, série Arago 22.Éditions Tec & Doc, Paris, 1999.
- [5] Jacques Hadamard. *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Dover Publications, New York, 1953.
- [6] Thomas T. M. Onyango, Derek B. Ingham, and Daniel Lesnic. Restoring boundary conditions in heat conduction. *J. Engrg. Math.*, 62(1) :85–101, 2008.
- [7] F. Delvare, A. Cimetière, and F. Pons. An iterative boundary element method for Cauchy inverse problems. *Comput. Mech.*, 28(3-4) :291–302, 2002.
- [8] Kurt Bryan and Lester Caudill. Reconstruction of an unknown boundary portion from Cauchy data in n dimensions. *Inverse Problems*, 21(1) :239–255, 2005.
- [9] T. Wei, Y. C. Hon, and Y. B. Wang. Reconstruction of numerical derivatives from scattered noisy data. *Inverse Problems*, 21(2) :657–672, 2005.
- [10] A. Tikhonov and V. Arsénine. *Méthodes de resolution de problèmes mal posés*. Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Vladimir Kotliar.

- [11] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17(3) :553–570, 2001.
- [12] L. Marin and D. Lesnic. BEM first-order regularisation method in linear elasticity for boundary identification. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 192(16-18) :2059–2071, 2003.
- [13] M. T. Nair, S. V. Pereverzev, and U. Tautenhahn. Regularization in Hilbert scales under general smoothing conditions. *Inverse Problems*, 21(6) :1851–1869, 2005.
- [14] Bernd Hofmann and Masahiro Yamamoto. Convergence rates for Tikhonov regularization based on range inclusions. *Inverse Problems*, 21(3) :805–820, 2005.
- [15] F. Delvare. *Une Méthode Inverse Itérative à Effet Régularisant Évanescent*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2000.
- [16] Franck Delvare and Alain Cimetiere. A first order method for the Cauchy problem for the Laplace equation using BEM. *Comput. Mech.*, 41(6) :789–796, 2008.
- [17] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and A. V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 31(1) :64–74, 1991.
- [18] Franck Delvare et Frédéric Pons Alain Cimetière. Une méthode inverse d'ordre un pour les problèmes de complétion de données. *Comptes rendus mécanique*, 333(2) :123–126, 2005.
- [19] S. Chaabane, M. Jaoua, and J. Leblond. Parameter identification for Laplace equation and approximation in Hardy classes. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 11(1) :33–57, 2003.
- [20] S. Chaabane, I. Fellah, M. Jaoua, and J. Leblond. Logarithmic stability estimates for a Robin coefficient in two-dimensional Laplace inverse problems. *Inverse Problems*, 20(1) :47–59, 2004.
- [21] Faker Ben Belgacem and Henda El Fekih. On Cauchy's problem. I. A variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems*, 21(6) :1915–1936, 2005.
- [22] L. Marin, L. Elliott, DB Ingham, and D. Lesnic. Boundary element method for the Cauchy problem in linear elasticity. *Engineering analysis with boundary elements*, 25(9) :783–793, 2001.

- [23] L. Marin and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem in two-dimensional linear elasticity. *International journal of solids and structures*, 41(13) :3425–3438, 2004.
- [24] V. D. Kupradze and M. A. Aleksidze. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary-value problems. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 4 :683–715, 1964.
- [25] Graeme Fairweather and Andreas Karageorghis. The method of fundamental solutions for elliptic boundary value problems. *Adv. Comput. Math.*, 9(1-2) :69–95, 1998. Numerical treatment of boundary integral equations.
- [26] D. Lesnic. The boundary element method for solving the Laplace equation in two-dimensions with oblique derivative boundary conditions. *Comm. Numer. Methods Engrg.*, 23(12) :1071–1080, 2007.
- [27] L. Marin and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations. *Computers and Structures*, 83(4-5) :267–278, 2005.
- [28] Y. C. Hon and T. Wei. A meshless scheme for solving inverse problems of Laplace equation. In *Recent development in theories & numerics*, pages 291–300. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2003.
- [29] Roland Potthast. A survey on sampling and probe methods for inverse problems. *Inverse Problems*, 22(2) :R1–R47, 2006.
- [30] Stéphane Andrieux, Amel Ben Abda, and Huy Duong Bui. Sur l’identification de fissures planes via le concept d’écart à la réciprocité en élasticité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 324(12) :1431–1438, 1997.
- [31] S. Andrieux, A. Ben Abda, and T. Nouri Baranger. Data completion via an energy error functional. *Comptes rendus-Mécanique*, 333(2) :171–177, 2005.
- [32] E.L.B. Abdellatif, M. FARAH, H.A.D. Tuong, and V. PAVAN. Résolution d’un Problème de Cauchy en EEG.
- [33] J. R. Cannon and Maria M. Cecchi. The numerical solution of some biharmonic problems by mathematical programming techniques. *SIAM J. Numer. Anal.*, 3 :451–466, 1966.
- [34] L. Marin and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for inverse boundary value problems associated with the two-dimensional biharmonic equation. *Math. Comput. Modelling*, 42(3-4) :261–278, 2005.

- [35] A. Zeb, D. B. Ingham, and D. Lesnic. The method of fundamental solutions for a biharmonic inverse boundary determination problem. *Comput. Mech.*, 42(3) :371–379, 2008.
- [36] Marc Bonnet and Andrei Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2) :R1–R50, 2005.
- [37] P. G. Ciarlet and P. Destuynder. A justification of the two-dimensional linear plate model. *J. Mécanique*, 18(2) :315–344, 1979.
- [38] P. Destuynder. *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*, volume 2 of *Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1986.
- [39] Philippe Destuynder and Michel Salaun. *Mathematical analysis of thin plate models*, volume 24 of *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [40] Olivier Millet, Aziz Hamdouni, and Alain Cimetière. Justification du modèle bidimensionnel non linéaire de plaque par développement asymptotique des équations d'équilibre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences – Series IIB – Mechanics–Physics–Chemistry–Astronomy*, 324(6) :349–354, 1997.
- [41] G. Duvaut and J.-L. Lions. *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris, 1972. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 21.
- [42] L. Landau and E. Lifchitz. *Physique théorique. Tome 7. Éditions Mir, Moscow*, second edition, 1990. Théorie de l'élasticité. [Theory of elasticity], Revised and completed by Lifchitz, A. Kossévitch [A. M. Kosevich] and L. Pitaevski [L. P. Pitaevskii], Translated from the Russian by V. Kolimeev.
- [43] Jindřich Nečas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1967.
- [44] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 1*. Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique : Série Scientifique. [Collection of the Atomic Energy Commission : Science Series]. Masson, Paris, 1984. With the collaboration of Michel Artola, Marc Authier, Philippe Bénilan, Michel Cessenat, Jean-Michel Combes, André Gervat, Hélène Lanchon, Bertrand Mercier, Claude Wild and Claude Zuily.
- [45] Daniel Choi. *Sur la rigidité géométrique des surfaces. Application à la théorie des coques élastiques minces*. PhD thesis, Université de Paris 6, 1995.

- [46] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Partial differential equations, Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [47] Lars Gårding. *Some points of analysis and their history*, volume 11 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [48] Jacques Chazarain and Alain Piriou. *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1981.
- [49] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990).
- [50] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. II.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Differential operators with constant coefficients, Reprint of the 1983 original.
- [51] Jacques Hadamard. *La théorie des équations aux dérivées partielles*. Éditions Scientifiques, Peking, 1964.
- [52] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [53] Alain Cimetiere, Franck Delvare, and Frédéric Pons. Une méthode inverse à régularisation évanescence. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 328(9) :639–644, 2000.
- [54] J.-L. Lions. On the optimal control of distributed parameter systems. In *Techniques of optimization (Fourth IFIP Colloq. Optimization Techniques, Los Angeles, Calif., 1971)*. Academic Press, New York, 1972.
- [55] J.L.Lions. *Cours d'analyse numérique*. Cours de l'école polytechnique. Hermann, Paris, 1973.
- [56] Robert A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.
- [57] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.

- [58] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 2*. Collection du Commissariat à l'Énergie Atomique : Série Scientifique. [Collection of the Atomic Energy Commission : Science Series]. Masson, Paris, 1985. With the collaboration of Michel Artola, Philippe Bénilan, Michel Bernadou, Michel Cessenat, Jean-Claude Nédélec, Jacques Planchard and Bruno Scheurer.
- [59] P. G. Ciarlet. Basic error estimates for elliptic problems. In *Handbook of numerical analysis, Vol. II*, Handb. Numer. Anal., II, pages 17–351. North-Holland, Amsterdam, 1991.
- [60] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*, volume 22 of *Recherches en Mathématiques Appliquées*. Masson, Paris, 1992.
- [61] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [62] Nicaise Serge. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles. 2^e CYCLE - Écoles D'Ingénieurs*. Cours et problèmes résolus. Dunod, Paris, 2000.
- [63] F. Brezzi. Sur la méthode des éléments finis hybrides pour le problème biharmonique. *Numer. Math.*, 24(2) :103–131, 1975.
- [64] Philippe G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1982.
- [65] L. Collatz and W. Wetterling. *Optimization problems*. Springer-Verlag, New York, 1975. Translated from the German by P. Wadsack, Applied Mathematical Sciences, Vol. 17.
- [66] Jean-Christophe Culioli. *Introduction à l'Optimisation*. Ecole des Mines de Paris. Ellipses, Paris, 1994.
- [67] D. Lesnic, L. Elliott, and DB Ingham. An iterative boundary element method for solving numerically the Cauchy problem for the Laplace equation. *Engineering analysis with boundary elements*, 20(2) :123–134, 1997.