THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
XLIM-SIC
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)
Secteur de recherche : Traitement du signal et des images

Présentée par :
Mohamed Malek

Extension de l'analyse multi-résolution aux images couleurs par transformées sur graphes

Directeur(s) de Thèse :
Philippe Carré, David Helbert

Soutenue le 10 décembre 2015 devant le jury

Jury :

Président	**Frédéric Morin-Nicolier**	Professeur, Université de Reims
Rapporteur	**Frédéric Morin-Nicolier**	Professeur, Université de Reims
Rapporteur	**Grégoire Mercier**	Professeur, STICC, Institut Télécom-Bretagne, Brest
Membre	**Philippe Carré**	Professeur, XLIM, Université de Poitiers
Membre	**David Helbert**	Maître de conférences, Université de Poitiers
Membre	**David Alleysson**	Chargé de recherche, CNRS, Université Mendés-France, Grenoble

Pour citer cette thèse :
Mohamed Malek. *Extension de l'analyse multi-résolution aux images couleurs par transformées sur graphes* [En ligne]. Thèse Traitement du signal et des images. Poitiers : Université de Poitiers, 2015. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THESE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale : Science et Ingénierie pour l'Information et Mathématiques

Secteur de Recherche : Traitement du signal et des images

Présentée par :

Mohamed MALEK

****

Extension de l'analyse multi-résolution aux images couleurs par transformées sur graphes

****

Directeur de Thèse : Philippe Carre

Co-Directeur de Thèse : David Helbert

****

Soutenue prévue le 10 Décembre 2015

devant la Commission d'Examen

****

JURY

M. Frédéric Morain-Nicolier, Professeur, Université de Reims,	Rapporteur
M. Grégoire Mercier, Professeur, Télécom Bretagne,	Rapporteur
M. David Alleyson, CR CNRS, Université Pierre Mendes-France, Grenoble,	Examinateur
M. Philippe Carre, Professeur, Université de Poitiers,	Directeur de thèse
M. David Helbert, Maitre de Conférence, Université de Poitiers,	Co-Directeur de thèse

Remerciements

Avant tout, je remercie particulièrement Monsieur Philippe Carre de sa confiance, son aide, son encadrement depuis le Master. Ses remarques précieuses lors de nos réunions m'ont beaucoup inspiré pour mener à bien mon travail. Je remercie Monsieur David Helbert, qui m'a suivi aussi depuis le Master, pour son soutient permanent, ses conseils précieux, sa patience à mon égard et pour le temps qu'il a consacré à nos discussions.

Je tiens à remercier Monsieur Frédéric Morain-Nicolier et Monsieur Grégoire Mercier d'avoir accepté d'être rapporteur sur ce manuscrit. Je remercie également Monsieur David Alleyson d'avoir accepté de faire partie de ce jury. C'est pour moi une occasion spéciale et un privilège de pouvoir échanger des idées avec eux.

Je remercie mes collègues de bureau, Nadjib Guettari, Lee Ton, Maxime, ainsi que les membres avec qui j'ai pu partager des moments précieux : Abdeslam, Badredinne, Oussama, Maroua, James, Dimitri, Chaker, Thierry, Lilian, Philippe Dubois, Redouane, Armando, Abril, Naty, Riadh, Aboubacar, Samy, Zineb, Clément, Taha, Pascal, Fan.

J'adresse des remerciements bien spéciaux à mes amis et à toutes les personnes avec qui j'ai partagé des moments conviviaux et inoubliables Dalila, Mouhamed Ramdani, Maroua, Sandrine, Sofia, Selma, Ikram, Fayçal, Ahmed, Fatima, Ibtissam, Messaoud, Oumayma, Hako,Nadia, Elyes, Amine, Riadh, Louiza, ...

Je remercie M. Gilles Humbert et M. Violleau pour leur accueil chaleureux et pour m'avoir aider à accomplir mon service d'enseignement au sein de l'IUT de Châtellerault.

Je ne sais comment remercier mes parents Fatima et Abdelmalek, mes soeurs Karima et Khadidja de m'avoir soutenu et de m'avoir aidé à poursuivre mes études.

Table des matières

Remerciements **3**

Table des notations **9**

Introduction **11**

1 Le traitement de l'image sur graphe : extension de l'analyse par ondelettes **15**

1.1 Généralités sur l'analyse des signaux 16
1.1.1 La transformée de Fourier 16
1.1.2 La transformée en ondelettes 17
1.2 Traitement d'image par des approches adaptatives 18
1.2.1 La prise en compte de la géométrie 19
1.2.2 La prise en compte de la couleur 20
1.3 Traitement des images sur graphes 21
1.3.1 Notions de base 22
1.3.2 Signal sur graphe 25
1.3.3 Modèles de construction de graphe 25
1.3.3.1 Données non organisées 26
1.3.3.2 Données organisées 27
1.3.4 La théorie spectrale des graphes 28
1.3.4.1 La transformée de Fourier sur graphe 29
1.3.4.2 Le filtrage 30
1.3.4.3 Forme quadratique 31
1.3.4.4 La dilatation en échelle 32
1.4 Les transformées multi-échelles sur graphe 32
1.4.1 Quelques premiers éléments bibliographiques 32
1.4.2 Décomposition sur graphe de Shuman *et al* 33
1.4.2.1 Échantillonnage sur graphe 34
1.4.2.2 Réduction de graphe 34
1.4.2.3 Pyramide Laplacienne sur graphe 34
1.4.3 Modèle de bancs de filtre de Narang et Ortega 36
1.4.4 La transformée en ondelettes spectrale sur graphe TOSG 38
1.5 EDP sur graphe 42
1.5.1 Définition 42
1.5.2 Régularisation sur graphe 42
1.6 Conclusion 44

2 Modélisation de la variété autour de la géodésie et la dimension couleur 47
2.1 La construction du graphe à partir de l'image . . . 48
2.1.1 Notions sur la distance géodésique . . . 49
2.1.2 La construction du graphe des K plus proches voisins . . . 50
2.1.3 La recherche du plus court chemin et distance géodésique . . . 50
2.2 La distance euclidienne dans l'espace RVB . . . 51
2.3 La distance ΔE_{2k} . . . 58
2.4 Conservation de la géométrie des données . . . 60
2.5 Application à la restauration d'images . . . 64
2.5.1 Méthode de débruitage . . . 65
2.5.2 Testes et expérimentations . . . 66
2.5.2.1 Graphe construit à partir de l'image originale . . . 69
2.5.2.2 Étude de la qualité du débruitage en fonction du niveau de bruit . . . 69
2.6 Conclusion . . . 70

3 *Inpainting* pour des images couleurs à travers la transformée en ondelettes spectrale sur graphe (TOSG) 77
3.1 Introduction . . . 77
3.2 État de l'art . . . 78
3.2.1 Modèles basés sur des patchs . . . 78
3.2.2 Modèles variationnels . . . 79
3.2.3 Modèles à base de graphes . . . 82
3.3 Approches basées sur la régularisation à travers les coefficients de la TOSG 84
3.3.1 Schéma de régularisation . . . 84
3.3.2 *Inpainting* par une grille régulière . . . 85
3.3.2.1 Masque non aléatoire . . . 85
3.3.2.2 Masque aléatoire . . . 86
3.3.3 La prise en compte de la structure d'origine . . . 88
3.4 Régularisation à travers la TOSG et à l'aide d'un graphe non local . . . 90
3.4.1 principe . . . 90
3.4.2 Description d'algorithme . . . 93
3.4.3 Résultats . . . 96
3.4.4 Intégration de la dimension couleur . . . 100
3.5 Conclusion . . . 102

4 La décomposition d'un signal sur graphe par l'utilisation d'une structure complète 105
4.1 Introduction . . . 105
4.2 La décomposition à l'appariement parfait (perfect matching decomposition) 106
4.2.1 Principe de la décomposition d'un graphe complet G . . . 106
4.2.2 Propriétés de la matrice Laplacienne d'un graphe complet . . . 108
4.2.3 La détermination des fonctions de poids Z_i . . . 109
4.2.4 Schéma de décomposition de la PMD . . . 110
4.2.5 Reconstruction . . . 111
4.3 Illustration . . . 113
4.3.1 Application de la PMD sur un signal 1D . . . 113
4.3.2 Application de la PMD sur une image . . . 113

4.3.2.1 Utilisation d'une distance spatiale 113
4.3.2.2 Utilisation d'une distance euclidienne 114
4.4 Conclusion 116

Conclusion générale et perspectives **119**

A Vers une décomposition à l'appariement parfait continue **123**
A.1 Interprétation des résultats : vers une décomposition à l'appariement parfait continue 123
A.1.1 Lien avec une analyse distance-échelle 128

Liste des figures **133**

Bibliographie **137**

Table des notations

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$L^2(\mathbb{R})$	Espace de Hilbert
x	Variable réelle
E_n	Base de fonctions
t	Variable liée à l'espace de projection
ϕ_t	Fonction élémentaire
δ	Fonction de Dirac
α_t	Coefficients de projection
TF	Transformée de Fourier
F_e	TF de la fonction f
k	Variable discrète
TO	Transformée en ondelettes
s	Échelle
a	Translation temporelle
ψ	Ondelette mère
Tn	Tenseur de structure
(x, y)	Coordonnées spatiales
RVB	Espace couleur rouge vert bleu
G	Graphe non orienté
(m, n)	Arête qui relie les deux nœuds d'indices n et m
$w_{m,n}$	Poids associé à l'arrête (m, n)
N	Voisinage de nœuds
μ_{mn}	Mesure de distance liée à l'arrête (m, n)
σ	Écart type de la fonction de poids
f	Signal sur graphe
E	Ensemble des arrêtes
$\mathbf{A}$	Matrice d'adjacence
D	Matrice de degré
d_n	Degré du nœud n
$\mathbf{L}$	Matrice Laplacienne
N	Nombre total d'élément
V	Ensemble des nœuds du graphe
I	Matrice identité
F_n	Vecteur de caractéristiques du sommet n
G_v	Graphe de voisinage

K-ppv	k plus proches voisins
C_n	Vecteur des coordonnées spatiales
χ_l	Vecteur propre d'indice l
λ_l	Valeur propre d'indice l
$\hat{f}$	Transformée de Fourier sur graphe associée au signal sur graphe f
X	Matrice contenant les vecteurs propres χ_l
h	Filtre sur graphe
q	Forme quadratique
ρ	Paramètre de régularisation
$TOSG$	Transformée en ondelettes spectrale sur graphe
W^s	Opérateur d'ondelettes de la TOSG à l'échelle s
S	Opérateur de la fonction d'échelle de la TOSG
g	Filtre passe bande
h	Filtre passe bas
J	Nombre d'échelle de la TOSG
G	Fonction liée à la stabilité de la reconstruction
B	Opérateur de la TOSG
P	Pseudo-inverse de la matrice B
d_{mn}	Distance partielle
z	Niveau de gris de l'image
p_τ	Filtre associé à la fonction d'ondelettes à l'échelle τ
p_0	Filtre associé à la fonction d'échelle
ΔE_{2k}	Distance définie dans l'espace couleur CIELab
F_{lab}	Vecteur de caractéristiques dans l'espace CIELab
R	Terme de régularisation
SNR	Rapport signal sur bruit
SSIM	Mesure de la similarité de structure
QSSIM	Mesure de la similarité de structure quaternionique
∂_w	Opérateur de différence sur graphe
∇_w	Gradient sur graphe
p	Paramètre de degré de régularité
$\Delta^n_{w,p}$	Opérateur p-Laplace
$\epsilon^n_{w,p}$	Fonction d'isotropie
E^p_w	Énergie à minimiser liée à la régularisation sur graphe
η	Itération
ς	Coefficients associés au dictionnaire
TV	Variation totale
Φ	Masque d'inpainting
$\nabla^\perp$	Composante perpendiculaire du gradient
$\mathcal{T}^H_\vartheta$	Opérateur de seuillage dur
c	Zone de contour
Ω	Zone source

Introduction

La question centrale de notre travail concerne la conception des modèles de décomposition discrètes avec une prise en compte des caractéristiques géométriques de l'information analysée et de la perception de l'être humain. Dans nos travaux nous nous concentrons sur les transformées multi-échelles discrètes définies dans le domaine des ondelettes. L'utilisation des transformées en ondelettes en traitement d'image a connu un grand succès due à leur capacité d'extraire les informations importantes, qui décrivent les comportements particuliers dans un signal de façon rapide et efficace. Cependant, nous pouvons formuler quelques critiques vis-à-vis de ces approches standards, critiques liées à l'absence de certains aspects fondamentaux tel que la géométrie dans certains cas et généralement la dimension vectorielle. Dans le contexte du traitement d'image, la non prise en compte de la dimension vectorielle de la couleur peut provoquer parfois l'apparition de fausses couleurs ou la suppression de certains détails importants.

Ces dernières années, différentes approches ont été proposées permettant d'intégrer l'aspect géométrique dans les structures. Les approches géométriques ont pour but alors de capter l'organisation structurelle de l'image. Les transformées X-let ont souvent cet objectif [Can98] [CD99] [DV05] [DH01], elles se définissent en général au travers d'une construction d'une base de fonctions d'analyse indépendante de l'information à traiter, et permettent de mieux identifier les discontinuités présentes dans l'image à traiter.

En revanche, la prise en compte de la couleur constitue une originalité peu considérée dans les outils issus du traitement d'image. De nombreux travaux sont menés au sein de notre laboratoire XLIM afin d'étendre différentes transformées aux données vectorielles et de manière générale prendre en considération l'information couleur. Cet aspect était bien présent dans les méthodes basées équations aux dérivées partielles. Nous pouvons citer les travaux de D. Tschumperlé *et al* [TD07] qui consistait à réaliser un filtre anisotrope basé sur la norme de gradient couleur, ainsi que les travaux de Di Zenzo [DZ86] et l'utilisation d'un tenseur de structure couleur. L'une des possibilités aussi est de représenter

l'information couleur à l'aide d'un formalisme peut être plus adapté comme l'algèbre des quaternions [San96]. Cela a permis de définir de nouveaux outils de traitement spécifiques aux images couleurs, comme dans les travaux menés au sein de notre laboratoire XLIM [SCFM13b] [CDF14].

Nous nous inscrivons dans la même dynamique, à savoir la conception d'un environnement permettant de manipuler la couleur avec les outils classiques du signal. Suivant ce but, nous nous sommes alors intéressés à une représentation à base de graphe, en raison de sa souplesse qui permet d'intégrer plusieurs informations complémentaires, notamment la dimension couleur. Ce sujet est d'actualité, les travaux apparus récemment indiquent un intérêt croissant pour les applications à base de graphe. Certains d'entre eux ont plus particulièrement proposé des pistes pour construire des représentations par ondelettes. Dans [CM06] Coiffman a initié le travail concernant une définition de la transformée en ondelettes sur graphe. Dès lors, des travaux récents [NO10] [SJV13] [NO12] [TS14a] [TS14b] tentent de généraliser la transformée en ondelettes au graphes en généralisant les définitions concernant les éléments intervenants lors d'une transformation tels que l'échantillonnage, le filtrage, la notion de l'échelle.

Comme nous le verrons, nous avons choisi de travailler sur la transformée de Hammond *et al* [HVG11] : une transformée en ondelettes spectrale sur graphe. Son principe s'inspire de la représentation de la transformée en ondelettes classique dans le domaine de Fourier. L'intérêt principal de la TOSG réside dans son exploitation facile et sa flexibilité, ce qui nous a motivé à utiliser ses propriétés pour répondre aux différents problèmes.

Nos apports ont alors été dans la recherche d'une construction de graphe permettant d'obtenir une représentation adaptée à la géométrie d"une image réelle, à la couleur mais aussi tenant compte du système visuel humain, aspect rarement abordé dans les travaux concernant l'analyse multi-échelle et son utilisation reste limité malgré son intérêt incontestable. Nous avons choisi de confronter cette nouvelle représentation dans deux applications permettant ainsi de discuter des avantages mais aussi les limites de notre approche.

Dans ce manuscrit, nous avons étudié de manière générale l'extension de l'analyse multi-résolution aux images couleurs par des transformées sur graphe.

Le manuscrit est organisé à travers trois chapitres principaux et un chapitre d'ouverture.

Dans le premier chapitre nous commençons par décrire notre contexte de travail et nous nous concentrons sur les questions autour de la prise en compte de la géométrie et la dimension couleur. Ensuite, nous revenons sur les définitions de base nécessaire à nos travaux proposés. Ce sont des notions sur la construction des graphes à partir de l'image. Puis, nous étudions les différentes manières de représenter des informations décrites par le graphes. Nous faisons après une introduction à la théorie spectrale des graphes et nous présentons brièvement la redéfinition de certains outils classiques dans le domaine des graphes. Puis nous mettons la lumière sur la TOSG dont l'utilisation est nécessaires aux approches que nous développons par la suite.

Le second chapitre concerne la modélisation de l'information autour de la géodésie et la dimension couleur. Dans cette partie, nous proposons de développer plus spécifiquement les travaux menés dans le cadre des transformées adaptatives. En fonction de l'espace couleur considéré(RVB, Lab). Nous déployons deux approches pour la construction de graphe à travers le concept de la distance géodésique. Cette distance nous permet de prendre en compte plus finement l'organisation des données. Nous décrivons notre démarche de construction de graphe à partir de l'image couleur en associant la géométrie et la dimension couleur à la notion de distance. Ensuite, nous mettons en évidence notre approche en soulignant les avantages de la prise en compte du système visuel humain dans l'analyse. Le chapitre se termine par une expérimentation dans un contexte de débruitage.

Le troisième chapitre traite de la problématique d'*inpainting*. Nous détaillons alors notre proposition en mettant en place un schéma de régularisation à travers les coefficients d'ondelettes couleur de la TOSG. L'estimation de la structure manquante se fait par la construction d'un graphe des patchs couleurs à partir *des moyenne non locales*. Dans ce travail, nous mettons en évidence l'utilisation du système visuel humain dans l'estimation de la structure manquante.

Le dernier chapitre constitue une ouverture, nous détaillons notre proposition d'une nouvelle décomposition d'un signal défini sur un graphe complet. La mise en place de cette stratégie nécessite l'utilisation de fonctions de poids qui servent à la décomposition du graphe complet en plusieurs sous-graphes. Elle peut s'apparenter à une approche fenêtrée sur la variable distance. Nous illustrons notre approche de décomposition à travers des testes expérimentaux sur des signaux 1d, des images couleurs.

Enfin, en guise de conclusion nous indiquons quelques perspectives de recherches.

Chapitre 1

Le traitement de l'image sur graphe : extension de l'analyse par ondelettes

Introduction

Les problèmes et les objectifs que nous avons définis dans l'introduction générale sont plus ou moins indépendants. Il est tout d'abord utile, en guise d'introduction de rappeler certaines généralités de l'analyse sur graphe. La problématique posée par le thème principale est la représentation multi-échelle adaptative pour des images couleurs à base de structures topologiques. Cela sous-entend la mise en place d'un modèle d'analyse permettant de prendre en considération la configuration géométrique des images et l'aspect vectorielle de l'information couleur en se basant sur les graphes. Il s'agit d'un élément central que nous essayons de prendre en compte tout au long de notre étude. Pour cela, nous proposons de structurer ce chapitre en deux parties.

Dans la première partie de ce chapitre, nous définissons la problématique liée à la prise en compte de la couleur et la géométrie dans les modèles de traitement d'images couleurs. Nous soulignons aussi les motivations et les enjeux principaux d'une telle étude. Pour mieux comprendre l'origine de ce problème nous rappelons brièvement les généralités sur des outils d'analyse classiques tels que la transformée de Fourier et la transformée en ondelettes. Ensuite, nous citons les différentes techniques qui existent dans la littérature tentant de répondre à cette problématique. La deuxième partie sera consacrée à des notions de base sur la construction d'un graphe et les différentes représentations mathématiques qui lui sont associées. Nous faisons alors une introduction à la théorie spectrale des graphes

et les outils de traitement qui en découlent. Ceci constitue la base de nos travaux que nous présentons dans ce manuscrit.

1.1 Généralités sur l'analyse des signaux

Considérons l'espace des signaux à énergie finie $f \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty. \tag{1.1}$$

Soit E_n un ensemble composé de fonctions $\phi_t(x)$ avec $t \in \mathbb{R}$. E_n forme une base de fonctions élémentaires pour l'espace L^2 si toute fonction $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ s'exprime comme une combinaison linéaire tel que :

$$f(x) = \int_{t\in\mathbb{R}} \alpha_t \phi_t(x) dt. \tag{1.2}$$

Dans ce cas, α_t est obtenu par la projection linéaire de $f(x)$ sur ϕ_t :

$$\alpha_t =< f, \phi_t >= \int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\phi_t^*(x) dx. \tag{1.3}$$

La norme de f est définie par :

$$||f|| = \sqrt{< f, f >}. \tag{1.4}$$

La base E_n est dite orthonormale seulement et seulement si les fonctions élémentaires ϕ_t sont orthogonales et leur norme est égale à 1.

$$< \phi_{t1}, \phi_{t2} >= \delta(t1 - t2). \tag{1.5}$$

1.1.1 La transformée de Fourier

Dans le cas d'une base formée par les fonctions e^{itx}, la décomposition d'une fonction $f(x)$ correspond à la transformée de Fourier. Il s'agit de représenter un signal dans le

domaine fréquentiel, elle est donnée par :

$$F_e(t) =< f, e^{it} >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-itx}dx. \tag{1.6}$$

La transformée inverse s'écrit comme suit :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_e(t)e^{itx}dt. \tag{1.7}$$

La transformée de Fourier discrète et sa transformée inverse sont définies respectivement par :

$$F_e(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-2i\pi k\frac{n}{N}}, \tag{1.8}$$

$$f(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_e(k)e^{2i\pi n\frac{k}{N}}. \tag{1.9}$$

La transformée de Fourier est un outil fondamental utilisé dans un large spectre d'applications. Cependant, la connaissance de tout le support temporelle de la fonction à analyser est indispensable pour déterminer efficacement les coefficients fréquentiels. De ce fait, pour analyser des signaux dont la fréquence évolue au cours du temps, il faut utiliser une transformée qui décrit à la fois le spectre fréquentiel et l'information temporelle.

1.1.2 La transformée en ondelettes

La transformée en ondelettes [Mey90][Mal00] [Dau92]est une décomposition du signal ayant la particularité de fournir les informations sur l'évolution spectrale au cours du temps. Soit f un signal défini dans $L^2(\mathbb{R})$, nous rappelons l'expression de la transformée en ondelettes dans le domaine continu :

$$W_f(s,a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s}f(x)\psi^*(\frac{x-a}{s})dx, \tag{1.10}$$

Les coefficients de cette transformée sont calculés par la comparaison avec une fonction de nature oscillatoire et de moyenne nulle appelée ondelette mère, elle est notée $\psi(x)$, cette fonction assure une localisation à la fois temporelle et fréquentielle par le biais de deux opérations principales : la translation en temps a, et la dilatation en échelle s. Cette

transformée est inversible si la condition d'admissibilité est vérifiée :

$$\int \frac{|TF(\psi)(t)|^2}{t} dt < +\infty. \tag{1.11}$$

La transformée en ondelettes discrète peut se faire à l'aide d'un banc de filtres [Vai87] [GS96], l'idée est d'exprimer la décomposition en terme d'opérations issues du signal. S. Mallat a proposé un algorithme de calcul rapide [Mal89] dont le calcul des coefficients d'ondelettes se résume à une convolution suivie d'une opération de décimation. En répétant cette opération, nous pouvons obtenir un signal à basse résolution et une suite de signaux qui représentent les détails. La synthèse peut se faire à partir des coefficients d'ondelettes en effectuant une opération de sur-échantillonnage suivie par une convolution. Un exemple de décomposition-reconstruction est illustré par la figure 1.1.

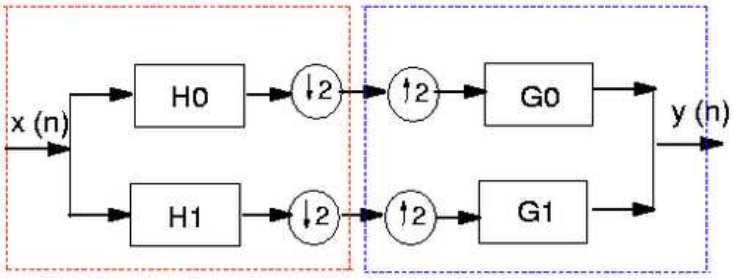


FIGURE 1.1 – Banc de filtres

1.2 Traitement d'image par des approches adaptatives

La transformée en ondelettes classique permet une bonne identification des discontinuités ponctuelles d'un signal 1D, lorsque ces discontinuités sont représentées sous forme de ruptures (contours dans une image), l'analyse n'est pas toutefois optimale car ces ruptures ne sont pas identifiées de manière nette et globale. De plus, cette transformée n'est pas bien définie pour traiter spécifiquement des images couleurs. Pour répondre à ces besoins nous nous intéressons alors à des représentations permettant la prise en compte les aspects physiques de l'image.

1.2.1 La prise en compte de la géométrie

Cette partie présente les approches tentant de prendre en compte l'aspect géométrique qui est une spécificité importante de l'image. De ce fait, l'utilisation des transformées X-let est possible, elles se définissent en général au travers d'une construction d'une base de fonctions d'analyse indépendante de l'information à traiter, fonction tentant de prendre en compte la géométrie. La transformée en bandelettes a été proposée par Le Pennec et Mallat [LP02], elle permet d'associer une décomposition en ondelettes avec une estimation de la géométrie. En premier lieu, cette estimation se fait par l'identification des courbes paramétriques, puis une transformée en ondelettes est appliquée le long de ces courbes. La transformée Ridgelet [Can98] a été introduite et développée par E. Candès. Elle est constante le long des lignes $x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta < \infty$. Elle est définie pour l'échelle s, la position $b \in \mathbb{R}$ et l'orientation $\theta \in [0\ 2\pi]$. Elle permet de représenter de façon adaptée les ruptures rectilignes dans une image. Notons qu'un outil numérique basé à la fois sur les propriétés de la transformée Ridgelet et la géométrie discrète a été réalisé au sein du laboratoire Xlim [CA04][HCA06]. La transformée curvelet [CD99] [DD00] est une représentation multi-échelle non adaptative. Il s'agit d'utiliser des fonctions de base localisées dans différentes orientations. Contrairement à d'autres approches directionnelles, la localisation se fait de manière dépendante de l'échelle. Les curvelets fournissent des bases appropriées pour représenter des images lisses et dans ce cas permettent une représentation plus éparse que les autres transformées en ondelettes. La transformée countourlet [DV05] utilise un double banc de filtres permettant d'analyser le long des contours lisses dans une image. Dans un premier temps, une pyramide Laplacienne [BA87] est appliquée pour identifier les discontinuités, puis un banc de filtres directionnel est utilisé pour analyser les structures linéaires à partir de ces discontinuités. La transformée Beamlet a été introduite initialement par Donoho et Huo [DH01]. Son principe est basé sur l'extraction des segments de lignes dans une image à différentes échelles. Cela requiert la mise en place d'une structure de graphe et de pyramide pour stocker les informations liées à l'orientation des lignes. Dans ce contexte, d'autre transformée en ondelettes plus adaptatives ont été développées dont le principe consiste cette fois ci à construire des fonctions d'analyse qui s'adaptent à la géométrie de l'image. Ce type de transformée offre plus de liberté et plus de précision dans la détermination des ruptures. Nous pouvons toutefois remarquer que ces différentes transformées prennent en compte la géométrie forcément sur une grille

discrète. Nous verrons que l'approche par graphe permet de se libérer de cette contrainte.

Après avoir fait le point sur les différentes manières de coder la géométrie de l'image dans une transformée nous proposons maintenant d'aborder les possibilités de coder l'information couleur.

1.2.2 La prise en compte de la couleur

La prise en compte de la couleur lors d'une transformation constitue une originalité peu étudiée dans les outils issus du traitement d'image. De nombreux travaux sont menés au sein de notre laboratoire afin d'étendre les transformées aux données vectorielles et de manière générale prendre en considération l'information couleur. Dans le cadre des approches par équations aux dérivées partielles, on trouve différentes propositions pour l'analyse de la couleur, par exemple dans les travaux de D. Tschumperlé et R. Deriche [TD07], dont l'idée est de réaliser un filtre anisotrope basé sur une norme de gradient couleur et permettant ainsi un filtrage adaptatif non marginal.

L'extraction des spécificités de l'image est un prétraitement nécessaire dans plusieurs applications tel que la segmentation, le suivi d'objet et la classification. Autrefois, ces caractéristiques ont été représentés sous forme d'une combinaison des dérivées spatiales [BGW91] [HS88]. Di Zenzo a montré dans [DZ86] que la somme des dérivées (à partir du tenseur de structure) ignore la corrélation entre les canaux, et a proposé dans ses travaux le tenseur couleur dans le but de calculer le gradient couleur en considérant l'image comme une surface dans $\mathbb{R}^3$. Plus tard, Sochen et al [SKM98] a considéré l'image couleur comme un ensemble de points définis dans un espace non-euclidien à 5 dimension $(x, y, R, G, B) \in \mathbb{R}^5$. Le tenseur de structure couleur a été utilisé dans plusieurs algorithmes pour l'identification des caractéristiques couleurs [CC89][RT01][SMB00][NM06][vdWGG05].

Le tenseur de structure couleur se définis comme suit :

$$Tn(x,y) = \begin{bmatrix} R_x^2 + V_x^2 + B_x^2 & R_xR_y + V_xV_y + B_xB_y \\ R_xR_y + V_xV_y + B_xB_y & R_x^2 + V_x^2 + B_x^2 \end{bmatrix},$$

avec R_x et R_y par exemple les dérivées premières de la composante R par rapport à x et y.

Toutefois, l'objectif est de prendre en compte la direction des structures, cette information peut être fournie par les vecteurs propres et les valeurs propres associés au tenseur

de structure.

Compte tenu de la nature vectorielle de l'information couleur, nous pouvons la représenter à l'aide de l'algèbre géométrique. Les quaternions, par exemple, permettent de tenir compte de la dimension vectorielle associée à la couleur. Plusieurs opérations basées sur l'algèbre des quaternions tel que la transformée de Fourier couleur, la convolution couleur et les filtres linéaires ont été étudiés de manière détaillée. Notamment, les travaux de Sangwine [San96] ont suscité beaucoup d'intérêt pour la mise en valeur de l'algèbre des quaternions. Dans ce cadre, plusieurs redéfinitions des outils classiques sont proposées permettant de simplifier le formalisme mathématique. Suivant cette logique, une généralisation à une algèbre géométrique a été également au centre des propositions et a permis de réécrire aussi différentes opérations [CDF14]. La transformée en ondelettes quaternionique (QWT) [CCB08] [BC06] est une transformée à reconstruction parfaite permettant la décomposition d'un signal 2D [Bül99], elle permet également de corriger certains défauts liés à la transformée en ondelettes standard. L'idée est d'intégrer la notion du signal analytique dans le cadre de la transformée en ondelettes. La QWT fournit une analyse multi-résolution quaternionique qui permet une bonne séparation et décrit plus explicitement le contenu de l'image.

Dans [SCFM13b] R. Soulard et P. Carre ont proposé une approche pour définir une décomposition en ondelettes monogénique [DMBC11] avec une extension à la couleur. Cette approche est prometteuse car elle permet une bonne analyse directionnelle, l'interprétation de l'information de phase reste en revanche une question ouverte.

Dans le cadre de nos travaux, nous suivons une stratégie complémentaire à partir de graphe, en raison de sa souplesse qui permet d'intégrer plusieurs informations complémentaires, notamment la dimension couleur.

1.3 Traitement des images sur graphes

Nous présentons, dans cette partie, les éléments essentiels qui constituent le point de départ dans notre étude. D'abord nous commençons par donner des généralités sur les graphes et leur utilisation dans le traitement d'image. Puis, nous abordons les différentes approches de l'analyse multi-échelle sur graphe.

1.3.1 Notions de base

Un graphe est un ensemble de points, appelés sommets (ou nœuds), dont chaque point peut être relié avec d'autres points par des liens appelés arêtes, auxquelles nous associons un poids noté w $w : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui mesure le degré de liaison. Quand les relations entre chaque paire de nœud sont symétriques nous parlons d'un graphe non orienté.

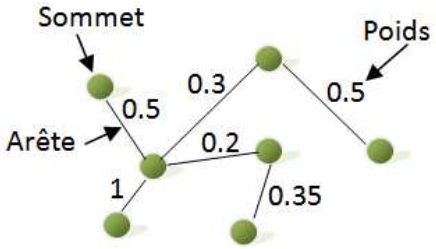


FIGURE 1.2 – Exemple d'un graphe pondéré non orienté

On définit un graphe simple non orienté par la notation $G = (V, E, w)$, ou V désigne l'ensemble des sommets et E représente l'ensemble des paires d'éléments de V.

$$E = \{(n, m) \subseteq V \times V \quad \text{with} \quad n \neq m, (n, m) \in V\}. \tag{1.12}$$

Nous associons à chaque nœud un voisinage définie par :

$$\mathcal{N}(n) = \{m \in V \backslash \{n\} : (m, n) \in E\}. \tag{1.13}$$

Comme nous l'avons dit, w est la fonction de poids appliquée à l'ensemble des arêtes. Le calcul des poids $w(m, n)$ revient à mesurer les similarités entre les sommets du graphe qui dépendent généralement d'une mesure de distance notée par μ_{mn}. A priori, il est difficile d'établir une règle générale pour définir clairement cette distance. Dans le contexte des images, ces distances peuvent être définies à partir d'une comparaison locale et non locale des caractéristiques (voir plus de détails dans [BCM08]).

Par exemple, le calcul des poids dans le cas d'un graphe non local peut se faire par la méthode des moyennes non locales initialement proposées par Buades et al [BCM08]. Le poids $w(m, n)$ est obtenu par la comparaison des patchs centrés respectivement sur m et n. Rappelons qu'un patch est une partie de l'image regroupant des pixels localisés autour d'un pixel cible. Nous trouvons aussi une représentation hybride qui combine un graphe local et un graphe non local. La définition des liens dans un graphe hybride dépendent à

la fois des similarités entre régions et des similarités locales. Dans la suite de notre travail nous considérons la fonction de poids qui s'exprime comme suit :

$$w(m,n) = \exp(\frac{-\mu_{mn}^2}{\sigma^2}), \sigma > 0, \tag{1.14}$$

avec σ l'écart type. Plusieurs informations liées au graphe peuvent être représentées par une matrice. Nous notons $\mathbf{A}$ la matrice d'adjacence de dimension $N \times N$ avec N le nombre total des nœuds :

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{cases} w(m,n) \text{ si } (m,n) \in E \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \tag{1.15}$$

La matrice de degré $\mathbf{D}$ est une matrice diagonale ayant comme éléments les degrés d_n qui se définissent par :

$$d_n = \sum_{n \neq m} \mathbf{A}_{nm}, \tag{1.16}$$

Le degré d_n d'un sommet n correspond à la somme pondérée des arêtes incidentes à ce sommet, cela nous informe également sur le voisinage de chaque sommet.

La matrice Laplacienne sur graphe appelée aussi matrice de Kirchhoff est un opérateur discret qui sert à des fins semblables à un opérateur Laplacien classique, en mesurant la différence entre chaque sommet du graphe et son voisinage. La matrice Laplacienne est utilisée dans l'analyse des trajets aléatoires et les réseaux électriques sur graphe comme elle peut apparaitre aussi dans le théorème de Kirchhoff permettant de déterminer le nombre d'arbres couvrants dans un graphe.

Le Laplacien sur graphe peut être défini à partir des matrices précédentes comme suit :

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}, \tag{1.17}$$

Sa forme normalisée peut également être obtenue par :

$$\mathbf{L}^{sym} = I - \mathbf{D}^{\frac{-1}{2}}\mathbf{A}\mathbf{D}^{\frac{-1}{2}} = \mathbf{D}^{\frac{-1}{2}}\mathbf{L}\mathbf{D}^{\frac{-1}{2}}, \tag{1.18}$$

avec I la matrice identité.

Ou nous pouvons encore l'écrire sous cette forme :

$$\mathbf{L}^{sym}(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ si } m = n, \text{et } d_n \neq 0, \\ \frac{-1}{\sqrt{d_n d_m}} \text{ et } d_n \neq 0,\ d_m \neq 0\ , \\ 0\ , \text{si non.} \end{cases} \tag{1.19}$$

Nous citons ci-après certaines propriétés de la matrice Laplacienne :

— $\mathbf{L}$ est une matrice symétrique semi-définie positive.

— La somme de chaque ligne et chaque colonne de $\mathbf{L}$ est toujours nulle.

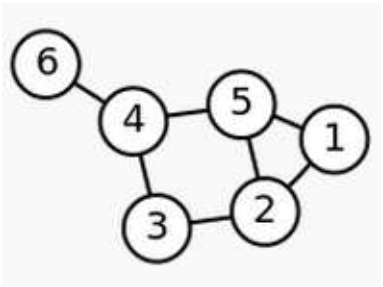
— Le nombre de 0 comme valeur propre de $\mathbf{L}$ correspond au nombre de connexion dans le graphe.

— La première valeur propre non nulle représente l'écart spectrale.

— La deuxième valeur propre non nulle représente la connectivité algébrique du graphe.

— Quand le graphe est k-régulier la matrice Laplacienne normalisée s'écrit sous cette forme $\mathbf{L}^{sym} = \frac{1}{k}\mathbf{L} = I - \frac{1}{k}\mathbf{A}$.

Dans la figure 1.3, nous montrons un simple exemple sur le calcul de la matrice $\mathbf{L}$.



(a) graphe non orienté

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) matrice de degré

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) matrice Laplacienne sur graphe

FIGURE 1.3 – Exemple sur le calcul de la matrice Laplacienne pour un graphe non orienté

1.3.2 Signal sur graphe

Formellement, un graphe doit être associé à un vecteur $f \in \mathbb{R}^N$ appelé signal sur graphe, chaque sommet n porte la valeur $f(n)$.

L'une des expressions courante dans l'analyse des graphes est la combinaison linéaire de la matrice Laplacienne avec le signal sur graphe qui s'écrit par :

$$(\mathbf{L}f)(n) = \sum_m \mathbf{A}(n,m)(f(n) - f(m)). \tag{1.20}$$

Cette opération correspond à une convolution de f tel que le coefficient de convolution associé au sommet d'indice -n- est le degré d_n et les coefficients associés à ses voisins sont les poids des arêtes (m, n).

Dans le cas particulier d'une grille en 4 voisinage (chaque pixel est relié avec ses quatre voisins) représentant une image en niveaux de gris, la relation 1.20 s'écrit :

$$(\mathbf{L}f)(n) = 4f_{x,y} - f_{x+1,y} - f_{x-1,y} - f_{x,y+1} - f_{x,y-1}, \tag{1.21}$$

le sommet d'indice $-n-$ correspond au pixel de coordonnées spatiales (x, y).

Nous parvenons à une écriture similaire à celle de la discrétisation par différences finies du Laplacien 1.4.[HVG11].

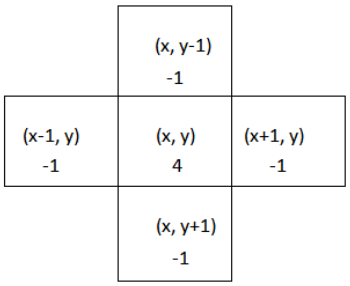


FIGURE 1.4 – discrétisation par différences finies du Laplacien

1.3.3 Modèles de construction de graphe

Nous citons ici les différentes méthodes généralement utilisées pour construire un graphe à partir des données. Ces méthodes peuvent être regroupées selon leur organisation des données.

Un graphe se présente comme un moyen efficace pour traiter les données discrètes, la prise en compte de la similarité rajoute donc une dimension tout aussi importante à la présentation. Généralement, les données possèdent des valeurs caractéristiques qui distinguent chaque sommet. Ces valeurs vont déterminer alors la structure topologique par le biais d'une mesure de distance.

Les méthodes de construction de graphe ont pour but de modéliser au mieux les données à traiter. En fonction de l'application souhaitée, l'une ou l'autre des méthodes peut être choisie [MLH08]. Dans ce qui suit nous verrons brièvement les différentes méthodes utilisées :

1.3.3.1 Données non organisées

La désorganisation signifie l'absence d'une information sur la répartition spatiale ou temporelle des données. Pour construire le graphe $G(V, E, w)$ à partir des données, nous considérons un ensemble de sommets $V \subset \mathbb{R}^N$, chaque sommet n possède un vecteur de caractéristique F_n. Afin de déterminer l'ensemble des arêtes E, nous considérons une mesure de distance de norme L_p μ_{mn} avec en général $p = 2$:

$$\mu_{mn} = \sqrt{||F_n - F_m||_p^p}. \tag{1.22}$$

Les méthodes suivantes illustrent la construction adaptée pour des données non organisées (voir [JT92] et [MHvL09]) :

— Le graphe de voisinage v noté par G_v, son principe est basé sur la notion de voisinage qui établie une connexion entre une paire de sommets si la distance μ est inférieure ou égale à v :

$$N_v(\mu) = \{m \in V\{m\} : \mu_{nm} \leq v\}. \tag{1.23}$$

— Le graphe k-plus proche voisin est noté par k-ppv consiste à chercher, pour chaque sommet n, les k plus proche voisin en terme de similitude. Il s'agit de trouver un voisinage de taille k autour du sommet n. Le choix de la valeur de k n'est soumis à aucune condition, elle dépend de l'application prévue.



FIGURE 1.5 – Graphe KNN ($k = 5$) construit à partir d'une distribution de type *swiss-roll*

1.3.3.2 Données organisées

L'organisation spatiale des données dans ce cas est connue au préalable, il convient alors d'utiliser des structures topologique régulières.

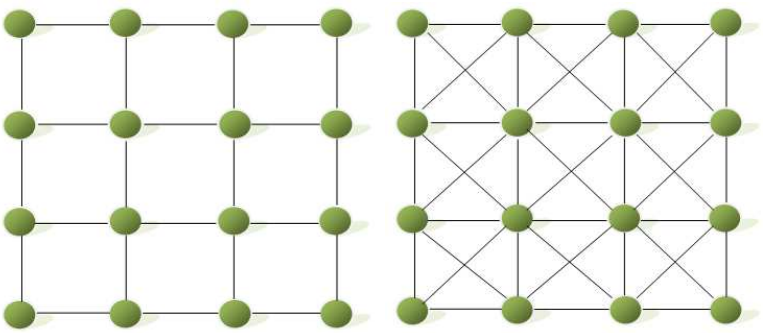
Parmi les méthodes de construction de graphe destinées au image, nous trouvons celles qui emploient des distance spécifiques tel que la distance de Manhattan et la distance de Chebychev représentées respectivement ci-dessous.

$$\mu(mn) = ||C_m - C_n||_1, \tag{1.24}$$

$$\mu(mn) = ||C_m - C_n||_\infty, \tag{1.25}$$

avec C_n le vecteur des coordonnées spatiales.

L'association de ces distances avec un graphe de voisinage G_v mène à des structures de graphes dites grilles en v-voisinage (voir Figure 1.6).



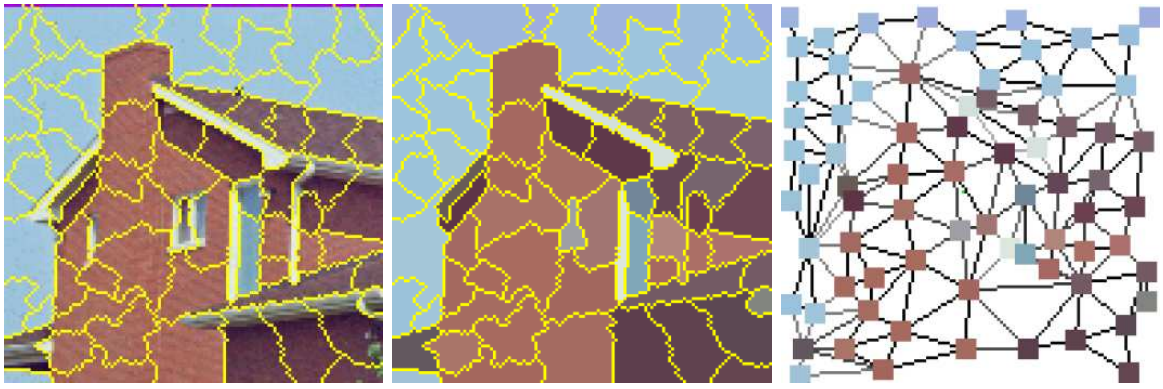
(a) Graphe grille en 4 voisinage (b) Graphe grille en 8 voisinage

FIGURE 1.6 – Exemples de graphe grille en 4 et en 8 voisinage

Nous trouvons aussi une approche alternative pour construire un graphe d'adjacence

des régions à partir d'une image, qui consiste dans un premier temps à représenter une image donnée sous forme de partitions, puis chaque région sera représentée par sa couleur moyenne, après nous faisons correspondre chaque région à un sommet de graphe et nous déterminons les similarités entres les sommets voisins (voir un exemple de partition dans [CBNC09] [AC04] [VS91]).

La Figure 1.7 illustre les différentes étapes de construction d'un graphe d'adjacence des régions.



(a) Partitionnement de l'image (b) Moyennage des régions (c) Construction de graphe

FIGURE 1.7 – Etapes de construction d'un d'un graphe d'adjacence des régions [LGN09]

Les méthodes de constructions de graphes citées ci-dessus entrent dans la définition de la topologie, cette étape sera suivie par l'application de la fonction de poids (équation 1.14).

Vu sous un autre angle, un graphe peut être décrit par des valeurs caractéristiques qui représentent au mieux la topologie, toutes ces notions sont étudiées dans la théorie spectrale des graphes que nous verrons dans la partie suivante.

1.3.4 La théorie spectrale des graphes

Nous donnons maintenant les définitions liées à la théorie spectrale des graphes [Chu97] [Spi12]. Ces détails sont nécessaires pour une meilleure compréhension des techniques qui seront présentées par la suite.

Tandis que la modification de la numérotation des sommets entraine une variation des représentations citées précédemment, il existe en revanche des invariantes qui ne dépendent pas de la façon dont nous numérotons les sommets du graphe, nous parlons entre autre de spectre, c'est à dire les valeurs propres de la matrice Laplacienne, comme nous

allons le voir. La théorie spectrale des graphes étudie le rapport entre le spectre et les propriétés du graphe, cela permet également de fournir des informations pertinentes sur le graphe.

Cette étude spectrale ouvre la voie à une extension des outils classiques de traitement de signal notamment le filtrage, l'échantillonnage, la transformée de Fourier, la transformée en ondelettes,....

Par définition, les fonctions de type $\phi_t = e^{itx}$ sont les vecteurs propres de l'opérateur Laplacien L :

$$L\phi_t = \lambda_t \phi_t. \tag{1.26}$$

Soit $G = (E, V, w)$ un graphe pondéré, le Laplacien sur graphe est définie par l'équation 1.17. Alors, par analogie, les vecteurs propres de $\mathbf{L}$ noté χ_l avec $l = 0, \cdots, N-1$ constituent une base orthonormale pour le graphe dans le domaine spectrale, nous avons :

$$\mathbf{L}\chi_l = \lambda_l \chi_l, \tag{1.27}$$

avec $\lambda_0 = 0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{N-1}$.

1.3.4.1 La transformée de Fourier sur graphe

La transformée de Fourier effectue le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, elle permet de décomposer un signal dans la base formée par les fonctions propres e^{itx}. L'objectif de cette partie est d'adapter la transformée de Fourier aux graphes. Cette propriété se déduit aisément de la relation 1.27.

Soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal sur graphe. La transformée de Fourier sur graphe s'exprime par :

$$\hat{f}(l) = \langle \chi_l, f \rangle = \sum_{n=1}^{N} \chi_l^*(n) f(n). \tag{1.28}$$

Avec χ_l vecteur propre. Nous pouvons ainsi utiliser une notation matricielle comme suit :

$$\hat{f} = X^T f, \tag{1.29}$$

avec X la matrice dont les colonnes correspondent aux vecteurs propres du Laplacien sur graphe $\mathbf{L}$.

La transformée inverse et sa représentation matricielle sont données respectivement par :

$$f(n) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(l)\chi_l(n), \tag{1.30}$$

$$f = X\hat{f}. \tag{1.31}$$

Notons que la transformée de Fourier sur graphe conserve la même notion de fréquences que celle de la TF classique. Lorsque λ_l est proche de 0 (basses fréquences), la projection suivant les vecteurs propres associés aux λ_l varient peu, tandis que, ces variations deviennent très importantes dans les hautes fréquences.

1.3.4.2 Le filtrage

Le filtrage consiste à atténuer ou à conserver une partie de l'information spectrale liée à un signal. Selon la façon dont nous effectuons cette opération, nous pouvons appliquer un filtrage passe-bas, passe-haut ou passe-bande.

Cette notion est souvent présentée dans un contexte de système, ce qui permet de donner un sens à l'information obtenue.

$$\hat{f}_{sortie}(t) = \hat{h}(t)\hat{f}(t). \tag{1.32}$$

Le résultat correspond au produit des représentations spectrales associées à f et h, ce qui permet de donner une interprétation facile à la notion de filtrage.

Le principe du filtrage peut donc se généraliser dans le domaine des graphes, la relation 1.32 prend la forme suivante :

$$\hat{f}_{sortie}(\lambda_l) = \hat{h}(\lambda_l)\hat{f}(\lambda_l), \tag{1.33}$$

avec $\hat{h}$ une fonction définie dans le domaine spectrale des graphes. Dans la pratique, c'est généralement la fonction $\hat{h}$ qui est construite, en raison de la difficulté de définir le filtrage dans le domaine du graphe.

Le résultat du filtrage est obtenue par l'application de la TF sur graphe inverse :

$$f_{sortie}(n) = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_l)\hat{h}(\lambda_l)\chi_l(n), \tag{1.34}$$

Nous pouvons exprimer cela vectoriellement :

$$\hat{f}_{sortie} = \hat{h}(\mathbf{L})\hat{f}, \tag{1.35}$$

$$\hat{h}(\mathbf{L}) = \chi\hat{h}(\Lambda)\chi^T, \tag{1.36}$$

avec $\Lambda = diag(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N-1})$.

Nous introduisons maintenant une notion de mesure de la régularité sur graphe.

1.3.4.3 Forme quadratique

La forme quadratique pour un signal sur graphe $\mathbf{f}$ est définie par [Mer94] [Spi12] :

$$q = \sqrt{\mathbf{f}^T\mathbf{L}\mathbf{f}}. \tag{1.37}$$

Elle fournit des informations relatives à la régularité d'un signal sur graphe en tenant compte de la structure du graphe. Par exemple, si la différence entre deux sommets d'une arrête est faible en terme de leurs valeurs de f et que le poids de cette arrête est élevé, la forme quadratique correspondante sera alors faible.

Dans un problème de régularisation de signal sur graphe de Tikhonov, la forme quadratique est utilisée comme un critère de régularisation, ce qui permet de favoriser les solutions dont la régularité sur graphe est faible [LEB07]. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\underset{f\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} = ||f - f_0||_2^2 + \rho f^T\mathbf{L}f, \tag{1.38}$$

avec f_0 le signal observé, $||f - f_0||_2^2$ terme d'attache aux données et ρ un paramètre qui dépend du niveau de bruit.

Nous verrons par la suite comment cette quantité peut nous servir comme un moyen pratique et efficace pour mesurer l'énergie de l'information des coefficients d'ondelettes de la TOSG.

1.3.4.4 La dilatation en échelle

Soit f un signal, la notion de la dilatation consiste à effectuer un changement d'échelle donnée par :

$$f_s(x) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x}{s}\right), \tag{1.39}$$

avec $s \in \mathbb{R}^*$ le coefficient de dilatation.

L'extension par analogie de la dilatation vers le domaine des graphe n'est pas significatif, car la valeur $(\frac{x}{s})$ n'est pas définie dans V. Cependant, nous pouvons éviter cette contrainte par la représentation de la dilatation dans le domaine spectrale, elle est définie par :

$$\hat{f}_s(t) = \hat{f}(st). \tag{1.40}$$

De la même façon, la dilatation sur graphe peut être définie par :

$$\hat{f}_s(\lambda_l) = \hat{f}(s\lambda_l). \tag{1.41}$$

Pour plus de détails sur l'analyse spectrale des signaux sur graphe ainsi que la généralisation de certaines définitions, le lecteur peut se référer à [SNF+13], [SRV13].

Les définitions généralisées, citées précédemment, sont les éléments clés de la mise en œuvre des outils de décomposition multi-échelles sur graphe. Nous nous focalisons maintenant sur leurs propriétés afin de faciliter nos démarches abordées dans les chapitres à venir.

1.4 Les transformées multi-échelles sur graphe

Nous reprenons dans cette partie les différentes approches de décompositions multi-échelles destinées à l'analyse des signaux sur graphes proposées dans la littérature.

1.4.1 Quelques premiers éléments bibliographiques

Dans [CM06], Coifman et Maggioni ont défini la notion de l'ondelette de diffusion qui permet de définir un cadre général pour la transformée en ondelettes sur graphe basée sur

un opérateur de diffusion tel que le Laplacien sur graphe. Leur construction interagit avec la structure de graphe à travers une application successive de cet opérateur. Les fonctions de la base sont orthogonalisées et échantillonnées de façon appropriée à chaque niveau à travers le schéma d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. L'ondelette de diffusion ainsi proposée constitue une transformée globale qui s'avère difficile à représenter.

Crovella et Kolaczyk ont proposé un modèle de transformée en ondelette sur graphe localisée dans le domaine spatiales [CK03] mais cette transformée ne permet cependant pas d'avoir une approximation des filtres et ne possède pas, en générale, la propriété de reconstruction.

Narang et Ortega ont proposé dans [NO10] un banc de filtres à échantillonnage critique à deux voies pour traiter des signaux sur graphes. Ces filtres sont locaux et la représentation est inversible. Selon la méthode d'échantillonnage choisie, deux approches sont proposées. Dans la première approche, l'échantillonnage est appliqué dans le but de garantir l'inversibilité, tandis que dans la deuxième approche, un modèle de *lifting scheme* [NO09] sur graphe est conçu afin d'avoir une transformée localement inversible. Ces modèles de bancs de filtres sur graphes proposés offrent une souplesse en matière de mis en œuvre et s'appliquent pour n'importe quel graphe non orienté. Cependant, la conception des filtres dans le domaine spectrale des graphes se fait de manière très basique, et la bipartition (partition en deux sous-ensembles de nœuds) du graphe original génère des pertes d'informations.

Nous proposons maintenant de détailler trois approches basées filtrage.

1.4.2 Décomposition sur graphe de Shuman *et al*

Dans [SJV13], Shuman *et al* ont proposé un formalisme général capable de combiner plusieurs fonctions fondamentales telle que le filtrage sur graphe, l'échantillonnage sur graphe, la réduction de graphe, pour définir de nouvelles transformées multi-échelles permettant l'analyse des signaux sur graphes.

Dans ce cadre, les auteurs ont mis en place les opérations de traitement principales, dont les détails sont décrits brièvement par la suite.

1.4.2.1 Échantillonnage sur graphe

De manière générale, l'opération d'échantillonnage est un élément essentiel pour l'analyse des données discrètes. L'extension de cette notion aux graphes nécessite la définition de nouvelles méthodes s'appliquant dans un cadre spécifique et permettant de respecter le mieux certains critères relatifs à la conservation des propriétés du graphe (voir [SJV13] pour plus de détails sur ces conditions). La méthode de partition proposée par les auteurs est basée sur la polarité des composantes du vecteur propre correspondant à la valeur propre maximale liée à la matrice Laplacienne sur graphe.

A titre d'exemple, cette opération peut éliminer l'ensemble des composantes de signe négatif, cela est représenté par l'équation suivante :

$$V_1 = V_+ = i \in V : \chi_{max}(i) \geq 0, \tag{1.42}$$

avec V_1 le résultat d'échantillonnage.

1.4.2.2 Réduction de graphe

Toutefois, la partition de graphe à elle seule ne suffit pas pour l'application du filtrage sur graphe, pour répondre à ce besoin, nous devons faire une réduction de graphe en conservant au mieux ses caractéristiques.

Les auteurs ont opté pour l'utilisation de la méthode de réduction de *Kron* [DB13] qui permet de doter la transformée multi-échelle de certaines propriétés particulières [SJV13].

1.4.2.3 Pyramide Laplacienne sur graphe

La pyramide Laplacienne est une transformée permettant la représentation à différentes résolutions des signaux discrets. L'adaptation de ce principe pour l'analyse d'un signal sur graphe peut se faire à travers l'insertion des différents blocs de traitement décrits précédemment. La figure 1.8 montre le schéma d'une pyramide Laplacienne sur graphe à un seul niveau de décomposition.

Soit j le niveau de décomposition, la matrice Laplacienne issue des opérations de partition, de réduction (K) et de parcimonie (S) est donnée par :

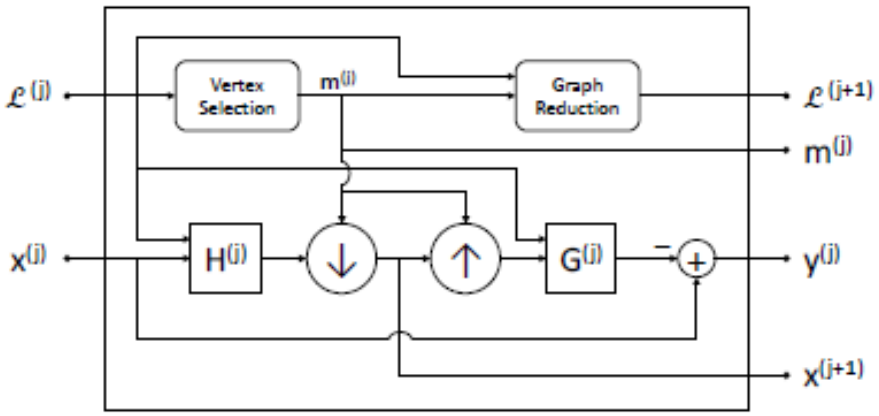


FIGURE 1.8 – Pyramide Laplacienne à un seul niveau [SJV13]

$$L^{(j+1)} = S(K(L^{(j)}, m^{(j)})), \tag{1.43}$$

$m^{(j)}$ représente le vecteur de sélection, si le nœud n est choisi alors $m^{(j)}(n) = 1$ si non 0. Les opérateurs $H^{(j)}$ et $G^{(j)}$ représentent des filtres sur graphes permettant l'obtention d'une approximation du signal d'entrée notée $x^{(j+1)}$ et l'erreur de prédiction notée $y^{(j)}$ nécessaire pour la reconstruction. L'opérateur de décomposition noté $T_a^{(j)}$ se définit par :

$$T_a^{(j)} x^{(j)} = \begin{bmatrix} S_d^{(j)} H^{(j)} \\ I_{N^{(j)}} - G^{(j)} M^{(j)} H^{(j)} \end{bmatrix} \quad x^{(j)} = \begin{bmatrix} x^{(j+1)} \\ y^{(j)} \end{bmatrix} \tag{1.44}$$

avec $S_d^{(j)}$ désigne l'opérateur d'échantillonnage calculé à partir du vecteur $m^{(j)}$, par exemple si $m^{(j)} = (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T$ alors :

$$S_d^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.45}$$

et $M^{(j)} = S_d^{(j)^T} S_d^{(j)}$.

La reconstruction du signal d'entrée est possible grâce à l'opérateur pseudo-inverse de $T_a^{(j)}$, notons que la sauvegarde des matrices Laplaciennes et des vecteurs de sélection sera nécessaire.

Suivant la même logique, d'autres possibilités de combinaison entre blocs peuvent aussi se présenter dans la mise en œuvre de certaines transformées multi-échelles telle que les bancs de filtres et le *lifting scheme* [SJV13].

Les auteurs ont présenté un cadre générale pour mettre en place différentes stratégies pour l'analyse multi-échelle des signaux sur graphes. L'extension des opérations de traitement fondamentales ont permis entre autre la définition de la pyramide Laplacienne, un banc de filtre pour arbres et le *lifting scheme*. Ces travaux sont conçus dans un cadre modulaire permettant de choisir d'autre alternatives de traitements, par exemple, nous pouvons changer la méthode de réduction de graphe, le filtrage sur graphe, la sélection des nœuds, ce qui peut élargir leur portée d'application. Cependant, leur implémentation nécessite des moyens de calculs très performants à cause des opérations répétitives pour la recherche des valeurs propres de la matrice Laplacienne.

1.4.3 Modèle de bancs de filtre de Narang et Ortega

La contribution de Narang et Ortega dans ce travail est d'introduire la théorie sous-jacente aux opérations d'échantillonnage et de sur-échantillonnage conduisant à l'adaptation de l'analyse à travers un banc de filtres aux graphes[NO12]. La figure 1.9 représente le schéma générale d'un banc de filtre dans le domaine des graphes.

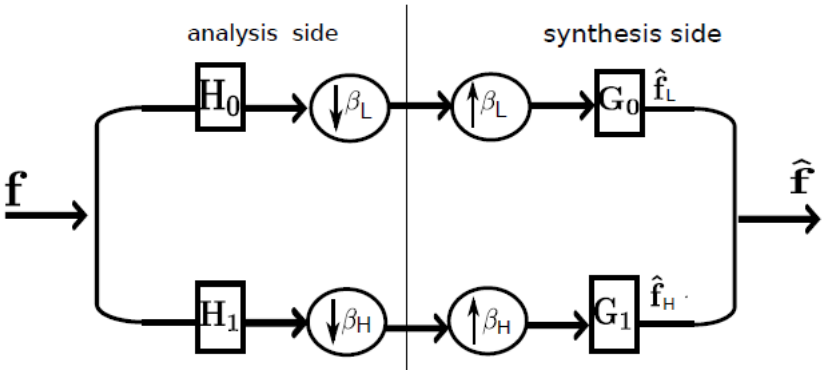


FIGURE 1.9 – schéma de décomposition en ondelettes sur graphe à travers un banc de filtre [NO12]

H_0, H_1, G_0, G_1 représentent les filtres sur graphe passe bas et passe haut de décomposition et de synthèse.$B\downarrow$ et $B\uparrow$ désignent les opérateurs d'échantillonnage et de sur-échantillonnage.

Ce modèle est régis par le système d'équation suivant :

$$G_0 J_{B_L} H_0 + G_1 J_{B_H} H_1 = 0 \tag{1.46}$$

$$G_0 H_0 + G_1 H_1 = cI. \tag{1.47}$$

La première équation correspond à l'élimination du phénomène d'*alliasing* engendré par les opérations d'échantillonnage et de sur-échantillonnage.

Dans le cas particulier d'un graphe biparti, les coefficients spectrales sont disposés de façon symétrique par rapport à l'axe se situant au centre du spectre. La prise en compte de cette propriété donne lieu à la conception d'un banc de filtres orthogonale pour l'analyse d'un graphe biparti qui permet une reconstruction parfaite et annule le terme d'*alliasing*. Cela est équivalent à la résolution du système suivant :

$$g_0(\lambda)h_0(\lambda) + g_1(\lambda)h_1(\lambda) = c^2, \tag{1.48}$$

$$g_0(\lambda)h_0(2-\lambda) - g_1(\lambda)h_1(2-\lambda) = 0. \tag{1.49}$$

Rappelons que dans ce cas, le Laplacien sur graphe est normalisé ce qui implique que la valeur maximale du spectre est toujours ≤ 2.

Pour résoudre ce problème les auteurs ont considéré des contraintes de type QMF qui se traduisent par :

$$h_1(\lambda) = h_0(2-\lambda), \tag{1.50}$$

$$g_0(\lambda) = h_0(\lambda), \tag{1.51}$$

$$g_1(\lambda) = h_1(\lambda) = h_0(2-\lambda). \tag{1.52}$$

Afin de minimiser l'erreur d'approximation les auteurs ont proposé d'utiliser les ondelettes de Meyer définies par :

$$h_0^{Meyer}(\lambda) = \sqrt{\nu(2 - \frac{3}{2}\lambda)}, \tag{1.53}$$

avec :

$$\nu(\lambda) = \begin{cases} 1 \text{ si } \lambda \leq 0 \\ 3\lambda^2 - 2\lambda^3; \text{si } 0 \leq \lambda \leq 1 \\ 0 \text{ si } \lambda \leq 1. \end{cases} \tag{1.54}$$

La généralisation pour un graphe non orienté quelconque se fait par la décomposition en un ensemble de sous-graphes bipartis. Les filtres QMF sont en suite construits sur chaque sous graphe biparti conduisant à une transformée en ondelettes sur graphe séparable multi-dimensionnelle (voir plus d'exemples dans [NO12]). Un modèle de banc de filtres orthogonales pour des graphes non orientés arbitraires a été également proposé dans [NO13].

Les auteurs ont proposé une approche pour adapter le principe de banc de filtres à un signal sur graphe. Pour cela, ils ont exploité le repli de spectre, qui se produit dans le cas d'un graphe biparti, afin de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le signal d'origine soit parfaitement reconstitué. L'application pour un graphe non orienté peut s'effectuer à travers la décomposition en plusieurs sous-graphes bipartis.

Notons que partant du modèle de base précédent, Sakiyama et Tanaka ont proposé dans [TS14a] [TS14b] un schéma de bancs de filtres sur graphe à M (M doit être paire) voies permettant un choix de paramètres arbitraire lors de la conception des filtres : il en ressort que la méthode proposée est plus avantageuse.

Nous proposons maintenant de détailler la transformée que nous utiliserons dans la suite de notre travail.

1.4.4 La transformée en ondelettes spectrale sur graphe TOSG

La TOSG est une transformée multi-échelle définie dans le domaine spectral des graphes proposée par Hammond et al [HVG11], elle est destinée spécifiquement pour faire l'analyse sur des signaux sur graphe. Comme nous le verrons par la suite, l'idée fondamentale de cette décomposition s'inspire de la représentation de la transformée en ondelettes classique dans le domaine de Fourier.

Si nous fixons la valeur de l'échelle s et nous tenons compte de la relation 1.40, nous

pouvons écrire la relation 1.10 sous cette forme :

$$W_f(s,a) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega a} TF(f)(\omega)\hat{\psi}^*(st)dt. \tag{1.55}$$

Cette expression montre clairement que la transformée en ondelettes peut être interprétée comme une opération de filtrage dans le domaine spectrale, par ailleurs le paramètre d'échelle apparait uniquement dans l'argument de $TF(\psi^*(st))$. Tout de même, cette observation peut nous amener à l'extension directe vers le domaine des graphes :

$$W^s\ \mathbf{f}(n) = \sum_l g(s\lambda_l)\hat{\mathbf{f}}(l)\chi_l(n) = g(s\mathbf{L})\mathbf{f}(n), \tag{1.56}$$

avec $g(x)$ la fonction d'ondelette qui représente un filtre passe-bande : $g(0) = 0, \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Nous pouvons choisir par exemple une spline cubique.

De la même manière, la fonction d'échelle est donnée par :

$$\mathbf{S}\ \mathbf{f}(n) = \sum_l h(\lambda_l)\hat{\mathbf{f}}(l)\chi_l(n) = h(\mathbf{L})\mathbf{f}(n), \tag{1.57}$$

$h(x)$ représente un filtre passe-bas qui satisfait les relations suivantes $h(0) > 0$, $h(x) \to 0$ as $x \to \infty$.

W^s et $\mathbf{S}$ dénotent respectivement l'opérateur d'ondelette à l'échelle s et l'opérateur de la fonction d'échelle.

La reconstruction est une propriété souhaitée dans la conception d'une transformée, afin d'assurer cette propriété, la fonction $g(x)$ doit satisfaire la condition d'admissibilité :

$$\int_0^\infty \frac{g^2(x)}{x}dx = C_g < \infty. \tag{1.58}$$

Cette condition est définie pour une échelle s continue. Dans la pratique, nous devons effectuer la discrétisation de la variable s, ce qui empêche d'avoir une reconstruction parfaite du signal d'origine. Néanmoins, pour surmonter ce problème la notion de trame a été introduite informant sur la stabilité numérique de la reconstruction du signal d'origine. Dans le cas des graphes, cela revient à calculer des bornes supérieures et inférieures de la quantité $G(\lambda) = h^2(\lambda) + \sum_j g(s_j\lambda)^2$.

La figure 1.10 illustre un exemple sur le choix des fonctions h et g, nous remarquons

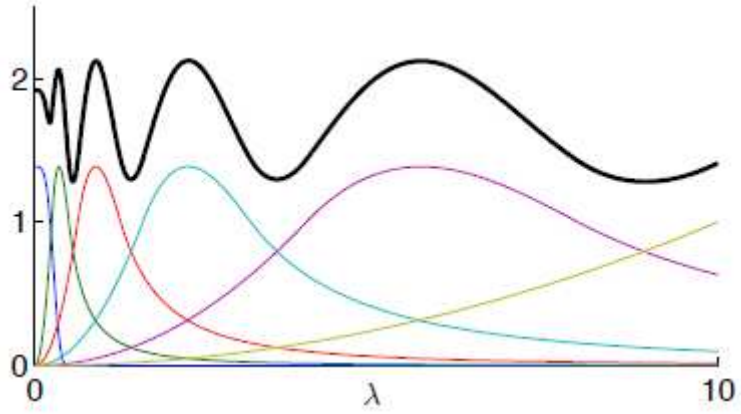


FIGURE 1.10 – Spectre fréquentiel de la fonction $h(\lambda)$(en bleu), les fonctions $g(s_j\lambda)$ et la fonction $G(\lambda)$ (en noir) pour $J = 5$. [HVG11]

que les bornes supérieures et inférieures de G sont très proches (dans ce cas la différence est inférieure à 1), ceci garantit donc une meilleure stabilité de la reconstruction.

Pour un nombre d'échelle J, nous obtenons NJ coefficients d'ondelettes et N coefficients liés à la fonction d'échelle.

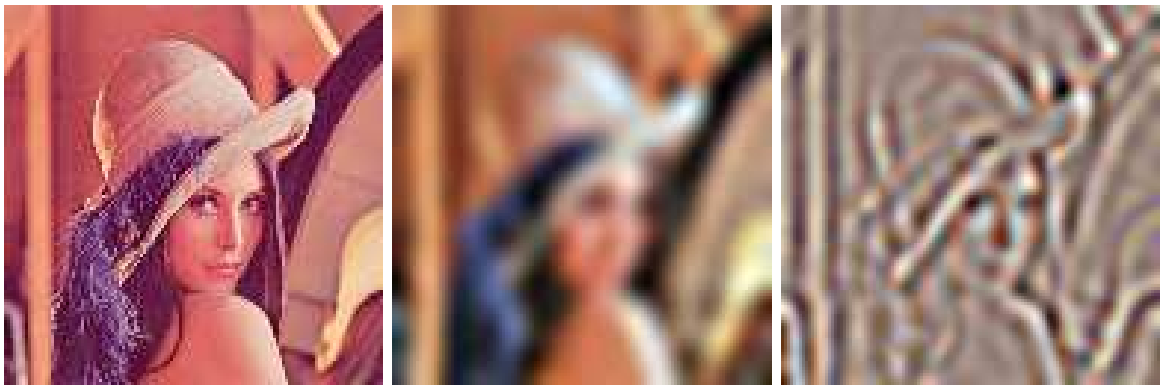
L'application directe de cette transformée nécessite la détermination de tout l'ensemble des valeurs et des vecteurs propres ce qui est difficile de point de vue numérique pour des données volumineux. Cependant, Hammond *et al* [HVG11] ont proposés un algorithme rapide basé sur l'approximation polynomiale de Chebychev des fonctions g et h. Les coefficients d'ondelettes sont alors calculés par une combinaison linéaire itérative de la matrice $\mathbf{L}$ et du signal sur graphe f.

Dans la figure 1.11, nous montrons un exemple d'application de la TOSG sur l'image *lena*. La structure du graphe utilisée dans ce cas est une grille régulière. Dans l'image 1.11(b), nous avons le résultat lié à la fonction d'échelle permettant de représenter l'image dans les basses fréquences. Dans les figures 1.11(c) 1.11(d) 1.11(e), nous illustrons le résultat de la décomposition en ondelettes à 3 échelles.

Numériquement, la TOSG associe à chaque vecteur en entrée f_e de taille N un vecteur en sortie f_s de taille $N(J+1)$, ceci peut être présenté par $f_s = Bf_e$. Le vecteur f peut être reconstruit à l'aide de l'opérateur pseudo-inverse de la matrice B noté P qui minimise l'erreur de reconstruction :

$$Pf_s = \underset{f\in\mathbb{R}^N}{\arg\min} ||f_s - Bf_e||. \tag{1.59}$$

L'intérêt principal de la TOSG réside dans son exploitation facile et sa performance quant à la rapidité de calcul et l'efficacité de son application à la restauration [HJV12]. Ce qui nous laisse supposer que cette transformée est bien placée pour introduire facilement d'autre aspects dans l'analyse, et ce qui nous motive grandement à utiliser ses propriétés pour répondre aux différents problèmes posés dans ce manuscrit. Cela fera l'objet d'étude dans le chapitre suivant.



(a) image d'origine (b) Fonction d'échelle (c) Coefficients d'ondelette à l'échelle1



(d) Coefficients d'ondelette à l'échelle2 (e) Coefficients d'ondelette à l'échelle3

FIGURE 1.11 – Exemple d'application de la TOSG sur une image couleur en utilisant une grille régulière

La structure de graphe se révèle être plus souple et plus adaptée pour représenter et analyser les signaux à valeurs discrètes. Plusieurs stratégies ont été menées ces dernières années dans le but de généraliser l'utilisation des outils classiques dans le domaine des graphes. Par la suite, nous introduisons un exemple sur les méthodes de traitement par EDP sur graphe.

1.5 EDP sur graphe

1.5.1 Définition

L'opérateur de différence sur graphe noté ∂_w est défini pour chaque paire de nœuds (m, n) comme suit [LEB07] [LEL14] [ELB08] :

$$(\partial_w f)(m, n) = \sqrt{w(m, n)}(f(m) - f(n)). \tag{1.60}$$

Le gradient sur graphe ∇_w est défini pour chaque nœud $n \in V$, son expression est donnée par :

$$(\nabla_w f)(n) = ((\partial_w f)(m, n))^T_{m \in V}. \tag{1.61}$$

L'opérateur p-Laplace isotropique, avec $p \in [1\ \infty]$, est défini pour chaque nœud n comme suit :

$$(\Delta^n_{w,p} f)(n) = \sum_{m \sim n} \epsilon^n_{w,p}(m, n)(f(m) - f(n)), \tag{1.62}$$

avec

$$\epsilon^f_{w,p}(m, n) = \frac{1}{2} w(m, n)(||\nabla_w f(n)||_2^{p-2} + ||\nabla_w f(m)||_2^{p-2}), \tag{1.63}$$

Ces différentes opérateurs [LEL14] permettent d'adapter facilement les schémas EDP au graphes, par exemple l'opérateur p-Laplace peut être exploité pour définir une méthode de régularisation sur graphe.

1.5.2 Régularisation sur graphe

La régularisation sur graphe s'applique sur des signaux sur graphes, elle est proposée dans [ELB08] [LTE10]. La méthodologie de régularisation sur graphe s'inspire des schémas EDP classiques de régularisation. Pour pouvoir régulariser des signaux sur graphe, le terme de régularisation dans ce cas se définit à partir des opérateurs sur graphe.

Nous considérons le problème de minimisation suivant [ELB08] :

$$\arg\min_f E_w^p = \frac{\rho}{2}||f - f_0||_2^2 + \Gamma_w^p(f), \tag{1.64}$$

avec,

$$\Gamma_w^p(f) = \frac{1}{p}\sum_{n\in V}|\nabla_w f(n)|^p, \tag{1.65}$$

Le paramètre ρ permet de régler le poids du terme d'attache aux données.

Le degré de régularité est contrôlé par la valeur de p ; si $p = 2$ ce problème variationnel correspond à la régularisation de Tikhonov sur graphe, et quand $p = 1$ cela correspond à une minimisation de la variation totale sur graphe[COS01].

Si $p \geq 1$ la fonctionnelle E_w^p est convexe, elle admet un minimum global qui satisfait la relation suivante :

$$\frac{\partial E_w^p}{\partial f} = 0, \tag{1.66}$$

qui peut aussi s'écrire sous cette forme :

$$2\Delta_w^p f(n) + \rho(f(n) - f_0(n)) = 0, \ \forall n \in V. \tag{1.67}$$

La résolution de ce système d'équation par la méthode itérative de Gauss-Jacobi aboutit au résultat suivant :

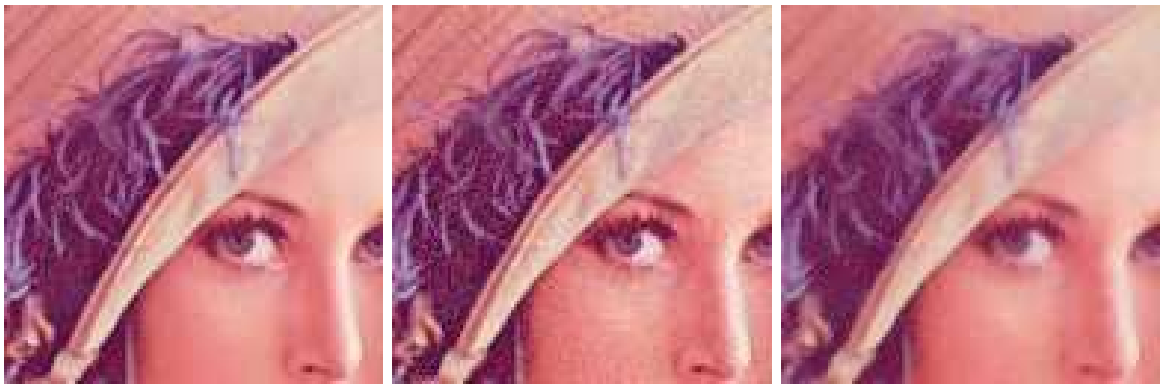
$$\begin{cases} f^{(0)} = f_0, \\ f^{(\eta+1)}(n) = \frac{\rho f^{(0)}(n) + \sum_{m\sim n}\epsilon_{w,p}^{f^\eta}(m,n) f^{(\eta)}(n)}{\rho + \sum_{m\sim n}\epsilon_{w,p}^{f^\eta}(m,n)}. \end{cases} \tag{1.68}$$

avec $f^{(\eta)}$ le résultat obtenu à l'itération η.

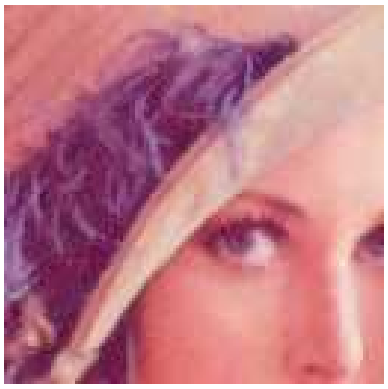
Cette méthode itérative décrit une famille de processus de diffusion discrets paramétrée selon une structure topologique.

Un exemple d'application est illustré par la figure 1.12. De manière générale, les testes expérimentaux ont montré que lorsque $p \leq 1$ la régularisation offre une meilleure préservation des contours [LEB07].

Comme nous le constatons , différents algorithmes classiques peuvent être étendus à



(a) image originale (b) image dégradée (c) régularisation sur graphe avec $p = 1$



(d) régularisation sur graphe avec $p = 2$

FIGURE 1.12 – Application de la régularisation sur graphe sur une image couleur pour $p = 1, 2$ [LEB07]

la représentation sur graphe.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné les notions de base nécessaires pour la présentation de nos travaux. Nous avons rappelé les différentes définitions concernant les graphes, les modèles de construction et la théorie spectrale des graphes. Nous avons vu qu'à partir de ces notions, il est possible d'étendre aisément les outils issus du traitement de signal. La généralisation des définitions s'appuient sur plusieurs axes : étendre certaines propriétés spatiales et spectrales, faire l'analogie avec d'autre approches classiques, utiliser des outils liés à la théorie des graphes. Nous nous sommes intéressés à la TOSG dont nous avons présenté les principales notions et propriétés.

Les travaux développés dans le domaine des graphes illustrent son potentiel prometteur

et enrichit la perspective de résoudre une large classe de problèmes.

Dans le chapitre suivant, nous détaillerons notre stratégie de construction de graphe pour une image couleur. L'idée clé est d'avoir une bonne modélisation de la topologie qui doit se baser sur les coordonnées et les valeurs des échantillons afin de définir des relations de voisinage pertinentes permettant principalement de prendre en compte l'information couleur.

Chapitre 2

Modélisation de la variété autour de la géodésie et la dimension couleur

Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons le concept de base et les questions clés relatives à l'analyse des images couleurs. Nous présentons nos propositions concernant la dimension couleur et la prise en compte du système visuel humain.

Les outils de l'analyse classique permettent d'extraire les informations des signaux 1D mais ces outils ne sont pas définis pour analyser une information vectorielle ce qui réduit leur efficacité et leur exploitation. Cette limitation peut apparaitre par exemple sous forme de fausses couleurs ou d'artefacts après traitement.

Dans ce cadre, différents travaux, comme par exemple [SCFM13a] [TD07] [CDF14], ont été menés afin d'apporter des réponses à la prise en compte de la dimension couleur.

Nous avons vu dans le chapitre précédant, que la construction des graphes à partir des données se fait par une mesure de similarité et que cela peut modéliser la structure des données. Nous avons vu également, que les outils issus du signal peuvent se généraliser aux graphes et que leur principal intérêt est qu'ils permettent plus de souplesse dans le traitement.

Dans notre travail, nous nous sommes focalisés sur la nécessité de définir une structure topologique associée à l'image couleur. De ce fait, nous nous sommes positionnés sur des transformées en ondelettes sur graphe. En effet, les graphes permettent une adaptabilité et une flexibilité que peu d'outils classiques démontrent. En outre, le graphe semble alors

être le meilleur candidat pour traiter des données discrètes.

Contrairement à l'analyse classique, le traitement dans le domaine des graphes a la particularité d'utiliser la structure de graphe durant la décomposition. Cette étape permet à la transformée d'acquérir des propriétés liées à la structure de graphe. En premier lieu, nous utilisons la distance géodésique afin de coder efficacement la géométrie de l'image, en suite, nous utilisons une distance visuelle pour prendre en compte la dimension couleur. Enfin, nous associons le graphe perceptuel à la transformée en ondelette spectrale sur graphe (TOSG).

Dans le but de mettre en évidence cette originalité, nous comparons ses performances à celles d'une distance euclidienne calculée dans l'espace RVB. D'autre part, nous étudions le comportement des coefficients d'ondelettes de la TOSG et les changement qu'il pourrait y avoir en fonction des paramètres liés à la construction du graphe. Pour cela, nous utilisons la notion de la forme quadratique.

Ce chapitre s'organise comme suit :

D'abord, nous éclaircissons notre méthodologie de construction de graphe, en donnant quelques notions sur la variété et la distance géodésique, et nous montrons comment nous pouvons intégrer une distance visuelle dans le calcul des similarités entre les éléments. Ensuite nous expliquons à travers la notion de la forme quadratique les résultats de la décomposition selon la distance utilisée et les paramètres associés. Dans l'étape qui suit, nous illustrons le potentiel de notre méthode quant à la conservation de la géométrie de l'image. Nous déterminons enfin les performances et les limites de cette nouvelle transformée en la confrontant à des problèmes de restauration. Nous mettons en évidence aussi l'apport de la représentation dans le domaine CIELab.

2.1 La construction du graphe à partir de l'image

Dans la section 1.3.3, nous avons cité quelques méthodes de construction de graphe à partir des données. Dans ce qui suit, nous proposons une méthode de construction qui respecte mieux les spécificités de l'image en prenant en compte la géométrie et la dimension couleur.

Rappelons que dans le but de prendre en compte le système visuel humain, deux approches sont étudiées. Tout d'abord un graphe est construit naïvement dans l'espace

RVB puis nous mettrons en place une stratégie pour calculer un graphe perceptuel dont la distance est définie dans l'espace CIELab.

2.1.1 Notions sur la distance géodésique

La géodésie désigne l'extension de la définition d'une ligne droite aux espaces courbes, elle peut être interprétée généralement comme le plus court chemin entre deux points de l'espace en tenant compte de la variété. La distance géodésique est rencontrée dans le cadre d'applications en informatique graphique, traitement de l'image, géométrie, physique [KK95] [PC06] [LTD05] [SJC09] [CK97] [WPS03] [Coh06][TdSL00].

Le concept de variété est souvent utilisé pour introduire des notions sur la géométrie. Nous pouvons la définir comme un espace courbe de $\mathbb{R}^N$. Si nous prenons par exemple une sphère, elle peut décrire une variété de $\mathbb{R}^3$, la courbure de sa surface peut être assimilée à un plan tangent. Son intérêt réside dans le fait que son système de coordonnées offre une représentation simplifiée des données. De ce point de vue, le plus court chemin correspond à un segment dans l'espace de la variété.

La figure 2.1 illustre le principe d'une distance géodésique entre deux points distincts. La distance géodésique correspond à la longueur du parcours reliant le point A à B. Contrairement à une distance euclidienne, cette distance prend en compte l'ensemble des points qui appartiennent à ce parcours.

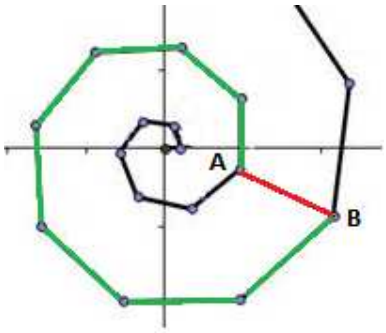


FIGURE 2.1 – Distance de deux éléments dans une spirale.

Cette distance peut prendre en considération la configuration globale de la variété et donc elle s'adapte parfaitement à la modélisation de la géométrie. Par contre, elle n'est pas définie spécifiquement pour s'adapter à des données à valeurs vectorielles. Toutefois, lorsque nous changeons la notion de distance, la distance géodésique a un comportement différent, ce qui nous a motivé davantage à privilégier cette distance pour la prise en

compte de la dimension couleur comme nous le verrons.

Dans notre travail, l'aspect numérique s'inspire de la méthode Isomap [TdSL00] dont le principe est basé sur la définition d'une topologie sous forme d'un graphe des K-ppv. Dans ce qui suit, nous décrivons les étapes permettant de calculer les distances géodésiques entre les pixels de l'image.

2.1.2 La construction du graphe des K plus proches voisins

Dans cette étape, nous allons construire un graphe des K-ppv dont le principe est rappelé dans la section 1.3.3. Il s'agit de mettre en relation un certain nombre de pixels qui représentent ainsi le voisinage. La détermination de ces pixels se fait à travers une distance partielle calculée généralement en fonction des vecteurs d'attributs. Cette construction met en évidence les singularités de l'image contrairement à une structure régulière dans laquelle les pixels qui sont de part et d'autre d'une discontinuité dans l'image peuvent être connectés.

Toutefois, il est important de ne pas confondre la notion de distance partielle avec la mesure de la distance entre nœuds, la première est nécessaire pour la détermination des K plus proches voisins tandis que la deuxième (qui correspond dans notre cas à la distance géodésique) est un facteur déterminant pour le calcul des poids. A cet effet, le graphe K-ppv n'est qu'une étape de calcul de la distance géodésique à ne pas confondre avec le graphe que nous obtenons au final.

2.1.3 La recherche du plus court chemin et distance géodésique

La recherche du plus court chemin se fait de manière exhaustive par l'application de l'algorithme de Dijkstra qui permet de déterminer le plus court chemin entre un sommet source et les autres sommets. Au début, les distances sont initialisées à l'infini, elles sont mises à jour au fur et à mesure des itérations. Au final, nous pouvons retrouver le plus court chemin qui relie un sommet de destination au sommet source en remontant tous les prédécesseurs.

Numériquement, le calcul de la distance géodésique se résume à une somme des distances partielles. Dans ce cas, la mesure de la distance entre deux sommets distincts est

donnée par :

$$\mu_{mn} = d_{mi} + d_{ij} + \cdots + d_{rn}, \tag{2.1}$$

avec $d_{\alpha\beta}$ désigne la distance partielle associée aux éléments par lesquelles peut passer le plus court chemin.

Une telle précision dans le calcul des similarités se paye par un temps de calcul plus long. Par ailleurs, il n'est pas pratique de déterminer toutes les distances possibles. Afin de limiter ce problème, il importe alors de restreindre le nombre de pixels de destination pour chaque pixel source, ce qui est équivalent à la mise en place d'une fenêtre de distance géodésique. La taille de cette fenêtre est une question de compromis entre la rapidité et la nécessité d'avoir plus de précision dans la modélisation.

Nous venons de voir les étapes intervenants dans le calcul des similarités entre les pixels à l'aide du concept de la distance géodésique. Nous avons établis ainsi des liens entre les pixels ce qui permet de définir une structure topologique associée à l'image. Enfin, l'application de la fonction de poids (1.14) donne naissance à un graphe pondéré représentant l'image. Rappelons que notre objectif est de construire un graphe qui modélise aux mieux les spécificités de l'image couleur. Comme nous l'avons expliqué dans la section 1.2, pour ce faire, deux axes stratégiques sont privilégiés : la prise en compte de la géométrie et la prise en compte de la couleur. Il convient de noter que le premier aspect a été introduit lors des calculs de la distance géodésique tandis que la dimension couleur n'est toujours pas intégrée. Nous avons vu que le critère sur lequel est basé la notion de distance peut donner un sens différent à la variété. De ce fait, nous étudions deux possibilités de prendre en compte la dimension couleur : nous proposons une distance partielle euclidienne associée à l'espace couleur RVB et une distance partielle visuelle associée à l'espace couleur CIELab.

2.2 La distance euclidienne dans l'espace RVB

En premier lieu, les informations couleurs sont représentées dans l'espace RVB. Si nous reprenons maintenant la définition de la variété pour des données discrètes, la distance géodésique correspond à la somme des arcs géodésiques le long de la variété. Ces arcs tracent le chemin le plus court entre deux éléments faisant partie de cette variété. Dans

la méthode que nous avons présentée pour le calcul numérique de la distance géodésique, les arcs géodésiques correspondent à des distances partielles.

Si nous considérons l'espace couleur RVB, l'espace de plongement aura les coordonnées suivantes (x, y, R, G, B) avec (x, y) les coordonnées spatiales. Nous constatons immédiatement que la distance partielle est équivalente à une distance euclidienne dans l'espace (x, y, R, G, B) :

$$d_{nm}^2 = \|F_n - F_m\|, \tag{2.2}$$

avec $F_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, R_\alpha, G_\alpha, B_\alpha)$.

La distance partielle apparait comme une combinaison entre une distance spatiale et une distance colorimétrique. Notons qu'en fonction de leur pondération, de nouvelles distances peuvent également être définies, mais cette question n'a pas été étudiée dans notre travail.

Un schéma résumant les différentes étapes pour construire le graphe dans l'espace couleur RVB est présenté dans la figure 2.2.

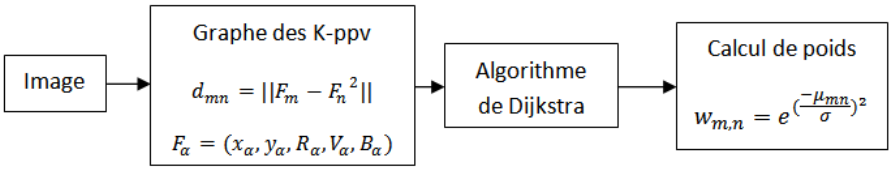
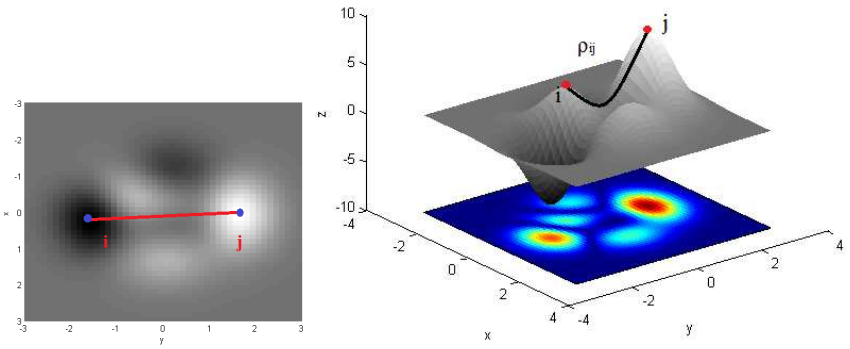


FIGURE 2.2 – Schéma de construction de graphe dans l'espace couleur RVB



(a) Image en niveaux de gris à traiter

(b) Calcul de distance géodésique dans un plan (x, y, z)

FIGURE 2.3 – Principe de construction d'un graphe pour une image en niveaux de gris.

La figure 2.3 illustre un exemple de construction d'un graphe pour une image en niveaux de gris. D'abord, les pixels sont représentés dans un plan à trois dimensions (x, y, z), z dans l'image indique le niveau de gris pour chaque pixel. Après, nous calculons la distance géodésique entre les sommets et nous déterminons à la fin les poids des arêtes. Cet exemple illustre aussi la capacité de la distance géodésique à modéliser la structure géométrique associée à une image en niveaux de gris.

L'application de la fonction de poids (voir l'équation (1.14)) finalise la phase de construction du graphe à partir de l'image en tenant compte des spécificités propres à l'espace couleur RVB.

Si nous considérons toute combinaison possible des éléments, nous aurons un graphe complet qui caractérise parfaitement la structure de l'image couleur, ce qui est très délicat d'un point de vue pratique. Afin de réduire le coût de stockage mémoire, nous avons limité le nombre des pixels de destination pour chaque pixel source.

Nous disposons à présent de tous les éléments nécessaires pour la poursuite de notre stratégie de transformée adaptative. La construction de graphe ne constitue cependant qu'une étape, il convient maintenant d'intégrer le graphe construit dans un schéma de décomposition en ondelettes sur graphe. Pour cela, nous proposons d'utiliser la transformée en ondelette spectrale sur graphe (TOSG).

Comme classiquement, l'opération de calcul de la décomposition pour une image couleur de dimension N s'effectue de manière marginale. Nous avons déjà rappelé les limites du traitement marginal sur la prise en compte de la couleur. Cependant, dans notre approche l'aspect vectoriel est pris en compte durant le processus de décomposition vu que l'information couleur est intégrée dans la structure de graphe.

La figure 2.4 illustre un schéma d'une application naïve de la TOSG sur une image. L'image couleur est d'abord codée par un graphe, puis la matrice Laplacienne est calculée, elle possède alors toutes les caractéristiques spectrales liées à l'image. Enfin, la TOSG est appliquée sur les trois canaux composant la couleur.

Les figures 2.5 et 2.6 montrent un exemple d'application sur une image couleur pour deux valeurs de σ ($\sigma_1 = 5, \sigma_2 = 30$), qui est pour mémoire l'écart type de la fonction de poids. Cette valeur influe sur le nombre d'arêtes dans le graphe. Le nombre d'échelle J est fixé ici à 3. Avant d'illustrer le comportement de cette transformée, nous nous intéressons d'abord à l'influence des paramètres sur le résultat de la décomposition. Nous pouvons

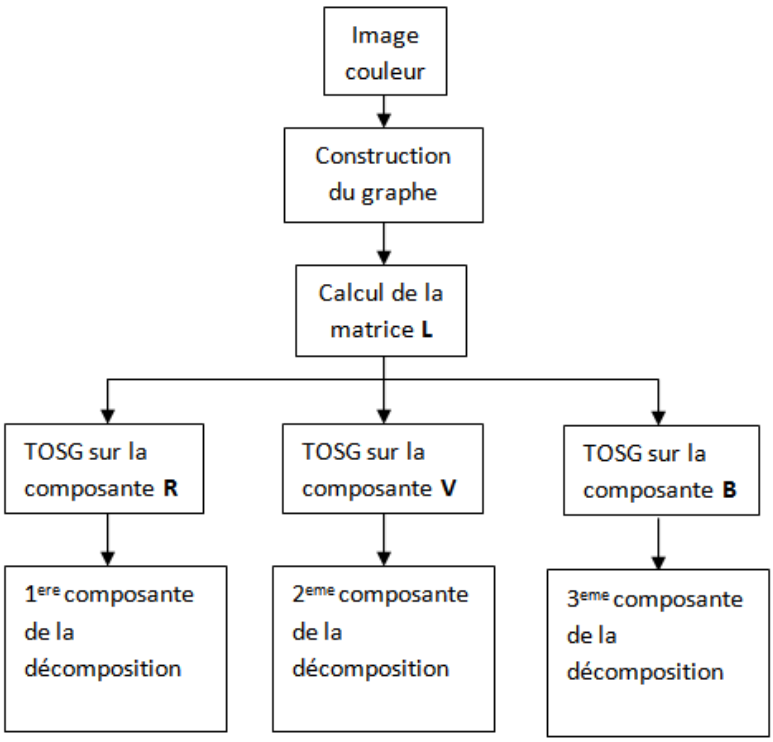


FIGURE 2.4 – Schéma d'une application directe de la TOSG sur une image

faire deux principales remarques :

— Classiquement, dans une décomposition multi-échelle, les détails doivent diminuer en fonction de l'indice d'échelle, ce n'est pas le cas ici, nous obtenons une répartition non régulière de l'énergie.

— Pour des valeurs importantes de σ, l'information à tendance à se concentrer dans les hautes fréquences.

Pour éclaircir ces points, nous nous focalisons sur une mesure de l'énergie des coefficients d'ondelettes de la TOSG. Dans ce cadre, nous proposons de mesurer cette quantité à travers la notion de la forme quadratique (voir équation1.37). Les détails concernant cette définition ont été fournis dans la partie 1.3.4.3.

Proposition 1. *La forme quadratique pour un signal sur graphe* $\boldsymbol{f}$ *peut être écrite sous la forme suivante :*

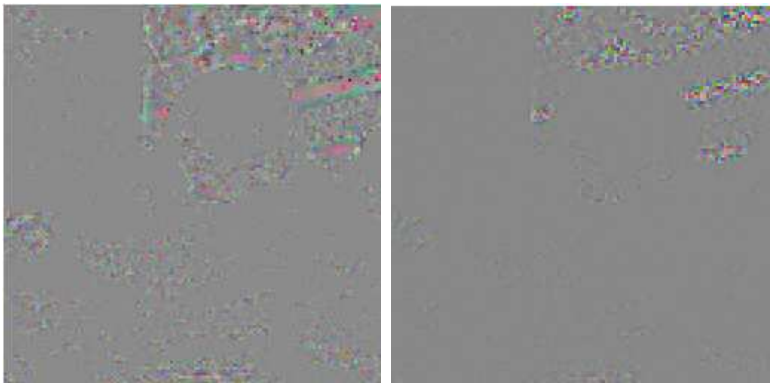
$$q = \sqrt{\sum_{l=0}^{N-1} (\hat{\boldsymbol{f}}(l)\sqrt{\lambda_l})^2}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Nous reprenons l'expression de la forme quadratique définie dans (1.37).



(a) fonction d'échelle ($q_0 = 338.7$)

(b) échelle 1 ($q_1 = 191.3$)



(c) échelle 2 ($q_2 = 186.5$)

(d) échelle 3 ($q_3 = 30$)

FIGURE 2.5 – Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la DE, $J = 3$, $\sigma = 5$, $q = 366.6$.

L s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^T, \tag{2.4}$$

avec $\Lambda = diag(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{N-1})$ la matrice des valeurs propres de **L**, remplaçant (2.4) dans (1.37) nous obtenons :

$$q^2 = \mathbf{f}^T\mathbf{X}\Lambda\mathbf{X}^T\mathbf{f}, \tag{2.5}$$

$$q^2 = (\mathbf{X}^T\mathbf{f})^T\Lambda(\mathbf{X}^T\mathbf{f}). \tag{2.6}$$

Selon l'équation (1.30), nous avons :

$$q^2 = \hat{\mathbf{f}}^T\Lambda\hat{\mathbf{f}} = \sum_{l=1}^{N}(\hat{\mathbf{f}}(l)\sqrt{\lambda_l})^2. \tag{2.7}$$



(a) fonction d'échelle ($q_0 = 6034.3$)

(b) échelle 1 ($q_1 = 3199$)

(c) échelle 2 ($q_2 = 3931$)

(d) échelle 3 ($q_3 = 601.2$)

FIGURE 2.6 – Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la DE, $J = 3$, $\sigma = 30$, $q = 6821.2$.

■

Maintenant, nous adaptons cette expression aux coefficients d'ondelettes de la TOSG.

Soit p_τ la fonction d'ondelettes à l'échelle τ, p_0 représente la fonction d'échelle. La transformée de Fourier sur graphe pour chaque échelle s'exprime comme suit :

$$\hat{\mathbf{f}}_\tau(l) = p_\tau(l)\hat{\mathbf{f}}(l), \tag{2.8}$$

Selon la proposition 1, la forme quadratique à chaque échelle τ est écrite sous la forme suivante :

$$q_\tau^2 = \sum_{l=1}^{N} p_\tau^2(\lambda_l)\hat{\mathbf{f}}^2(l)\lambda_l. \tag{2.9}$$

Dans le cas couleur, nous proposons d'étendre le concept. Soit $f_{\tau\alpha}$ le résultat de la

décomposition à l'échelle τ pour la composante couleur α ($\alpha \in (rouge, vert, bleu)$), la forme quadratique pour chaque échelle q_τ s'exprime par :

$$q_\tau^2 = \frac{\sum_{\alpha \in (r,v,b)} q_{\tau\alpha}^2}{3}, \tag{2.10}$$

avec $q_{\tau\alpha}^2 = (f_{\tau\alpha})^T L(f_{\tau\alpha})$.

Soit f_α le signal sur graphe représentant la composante couleur α de l'image à traiter.

La forme quadratique pour toute l'image est définie par :

$$q^2 = \frac{\sum_{\alpha \in (r,v,b)} q_\alpha^2}{3}, \tag{2.11}$$

avec $q_\alpha^2 = (f_\alpha)^T L(f_\alpha)$.

Nous pouvons exploiter ces relations afin de comprendre la répartition de l'énergie suivant les échelles.

Dans la figure 2.5, nous apercevons plus de détails à la première échelle comme le confirment les mesures de la forme quadratique pour chaque échelle. Nous pouvons expliquer cette répartition de l'énergie par la relation 2.9. En effet, la valeur de q_τ peut apparaitre comme le produit scalaire des vecteurs $s = (\hat{\mathbf{f}}^2(1)\lambda_1, \cdots, \hat{\mathbf{f}}^2(k)\lambda_k)$ et $p_\tau = (p_\tau(\lambda_l), \cdots, p_\tau(\lambda_k))$, cette valeur indique donc le degré de ressemblance entre ces deux vecteurs. Dans cet exemple, la valeur de la mesure maximale est obtenue à l'échelle 1, ce qui veut dire que le vecteur p_1 est le plus proche de s.

La figure 2.6 montre le résultat obtenu pour $\sigma = 30$, dans ce cas, les détails sont plus présents à la deuxième échelle. Étant donné que σ est un paramètre qui intervient dans la construction du graphe, son changement cause une modification des propriétés spectrales du graphe. En particulier, si nous choisissons une valeur élevée, nous construisons plus de connexions entre les sommets du graphe. L'apparition de nouvelles valeurs de poids réduit donc la régularité du signal sur graphe. En d'autre termes, dans l'équation 2.9, la quantité $\hat{\mathbf{f}}^2(l)\lambda_l$ est proportionnelle à la valeur de σ. C'est pourquoi nous avons plus de détails dans les hautes fréquences par rapport à la figure précédente.

Dans un espace couleur RVB, deux couleurs différentes pour l'œil humain peuvent être très proches dans cet espace. Nous choisissons alors de travailler dans l'espace couleur CIELab qui est un système qui prend en compte la réponse de l'œil.

2.3 La distance ΔE_{2k}

L'intégration de la distance ΔE_{2k} nous permet d'améliorer la prise en compte de la couleur et constitue également une originalité dans la construction de notre analyse multirésolution.

L'utilisation des propriétés visuelles en imagerie devient de plus en plus répandue. Plusieurs métrique sont mise en œuvre afin d'évaluer les qualités perceptuelles d'une image couleur en tenant compte du système visuelle humain.

Dans cette partie, nous utilisons la distance ΔE_{2k} pour déterminer les similarités entres les pixels. Cette distance est définie comme une mesure de différence de couleur dans l'espace CIELab.

CIELab est l'espace couleur le plus complet qui décrit toutes les couleurs dont l'œil humain est capable de percevoir. L'information couleur dans ce système est caractérisée par la luminosité de la couleur (l^*), et la chrominance représentée par les valeurs (a^*) et (b^*). L'axe (a^*) correspond, le plus souvent, à des valeurs de -120 (vert) à 120 (rouge) tandis que l'axe (b^*) correspond à des valeurs -120 (bleu) à 120 (jaune) (voir figure 2.7). Les relations entre ces axes sont non linéaires ce qui permet d'offrir un système adapté à la perception des différences couleurs par l'œil humain.

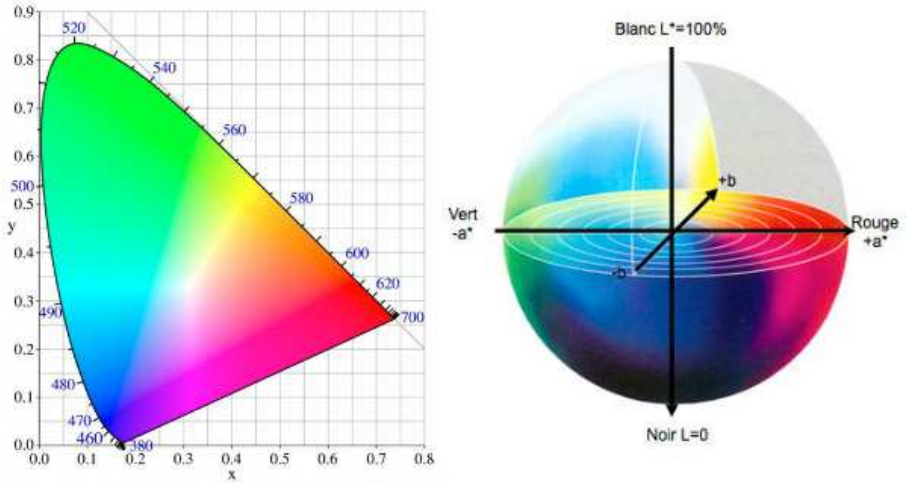


FIGURE 2.7 – L'espace couleur Lab et diagramme de chromaticité.

La stratégie que nous testons dans cette partie consiste en la construction d'un graphe ayant des caractéristiques perceptuelles. Dans ce cas, les pixels sont représentés dans l'espace couleur CIELab. Comme nous l'avons vu précédemment la distance géodésique correspond à la somme des distances partielles. En suivant la même logique de construc-

tion, la distance partielle dans l'espace couleur CIELab peut être également représentée sous forme d'une fusion entre deux distances spatiale et couleur. De ce point de vue, nous proposons d'utiliser la métrique ΔE_{2k} qui mesure la différence perceptuelle entre deux couleurs [SWD05]. Une forte valeur de ΔE_{2k} indique un domaine de variation important (voir [ZW97] [LCR01] [CIE01]).

Nous notons ΔE_{2k} la différence entre deux couleurs dans l'espace CIELab (L^*_m, a^*_m, b^*_m) et (L^*_n, a^*_n, b^*_n) correspondants aux pixels m et n :

$$\Delta E_{2k}(L^*_m, a^*_m, b^*_m, L^*_n, a^*_n, b^*_n) = \Delta E^{mn}_{2k}, \tag{2.12}$$

Le calcul de la distance devient alors :

$$d^2_{nm} = (x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2 + (\Delta E^{mn}_{2k})^2, \tag{2.13}$$

Il est à noter que les mesures de ΔE_{2k} sont relevées pour un observateur placé à 47cm d'un écran LCD 72 *dots per inch*.

La figure 2.8 illustre les étapes principales pour construire le graphe perceptuel.

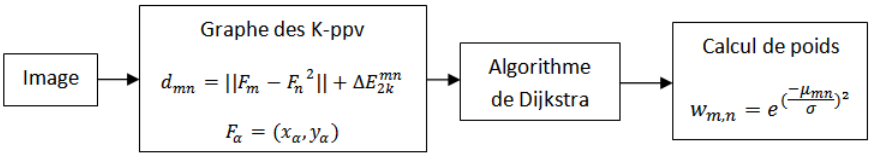


FIGURE 2.8 – Schéma de construction de graphe dans l'espace couleur CIELab

Dans le cadre d'application dans un processus d'analyse d'image sur graphe, nous effectuons les mêmes opérations que dans le cas précédent. Notamment, le calcul des poids suivi par la décomposition de l'image couleur à travers la TOSG.

Les figures 2.10 et 2.11 illustrent l'application de la TOSG basée distance couleur sur l'image 2.9(a) pour deux valeurs différentes de σ.

Comme nous l'avons détaillé dans l'exemple précédent, lorsque σ augmente, plusieurs liens se forment entre les sommets du graphe ce qui réduit le lissage du signal sur graphe. Ainsi les mesures de la forme quadratique q pour deux valeurs différentes de σ ($q = 6828.2$ dans la figure2.10 et $q = 20507$ dans la figure 2.11) confirment cette analyse.

Nous considérons maintenons les modifications apportées par le changement de la dis-

tance dans le calcul du graphe. Pour cela, nous fixons la valeur de σ à 30, nous comparons entre les figures 2.11 et 2.6.

En raison du caractère homogène qui résulte de la représentation dans l'espace couleur CIELab, le nombre de connexions entre les sommets sera considérable par rapport à une construction effectuée dans l'espace couleur RVB. Dans ce cas, cela implique que le lissage du signal sur graphe est réduit. Ceci se traduit avec le fait que la forme quadratique globale dans le cas RVB (figure 2.6 ($q = 6821.2$)) est inférieure à celle du cas CIElab (figure 2.11 ($q = 20507$)).

Dans la figure 2.11 nous remarquons une concentration importante des détails dans les hautes fréquences par rapport à la figure 2.6. Suivant le même raisonnement, nous pouvons également expliquer ce phénomène à l'aide de l'équation 2.9.

Par ailleurs, dans la figure 2.10(a) nous remarquons que cette méthode fait apparaitre des couleurs plus vives et plus contrastées par rapport à l'image 2.6(a).



(a) image1 (b) image2

FIGURE 2.9 – Images à traiter.

Nous proposons maintenant une simple expérimentation afin d'analyser cette transformation couleur.

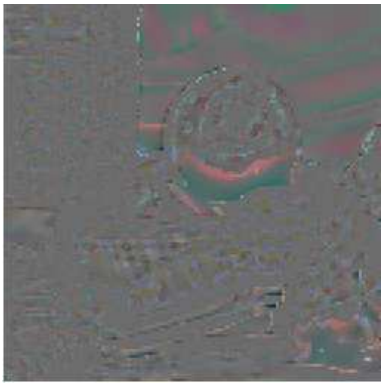
2.4 Conservation de la géométrie des données

Dans le passé, pour illustrer l'importance de l'information de phase dans la transformée de Fourier, plusieurs auteurs ont suggéré de mixer la phase de la première image avec les coefficients du module associé à la deuxième image. Dans cette section nous allons illustrer l'impact de la structuration des données sur la TOSG. Pour cela, nous proposons

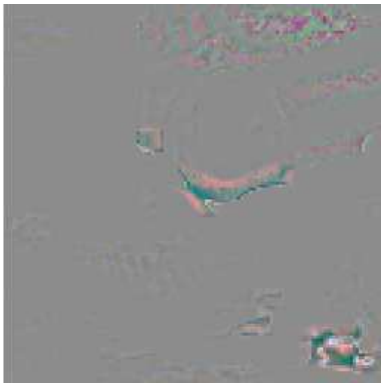


(a) fonction d'échelle ($q_0 = 1887.7$)

(b) échelle 1 ($q_1 = 1170.5$)



(c) échelle 2 ($q_2 = 1706.4$)



(d) échelle 3 ($q_3 = 506.4$)

FIGURE 2.10 – Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la distance ΔE_{2k}, $J = 3, \sigma = 5, q = 2661.3$.

d'effectuer la même opération mais nous l'appliquons dans un contexte différent. Nous abordons la question de la conservation de la géométrie.

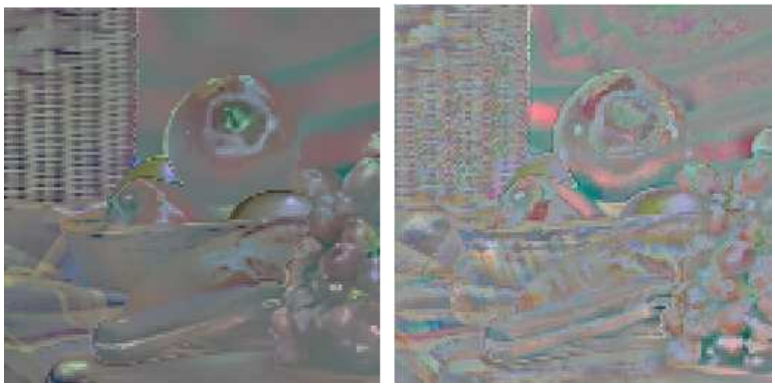
Dans cet exemple, nous utilisons notre approche de construction basée sur le concept de la distance géodésique pour construire le graphe à partir de l'image 2.9(a). Le graphe obtenu modélise donc la structure géométrique liée à l'image 2.9(a). Ensuite, ce graphe est pris en compte lors de la décomposition à travers la TOSG appliquée sur l'autre image 2.9(b)(voir la figure 2.12). Les figures 2.13 et 2.14 illustrent le résultat correspondant aux deux distances.

Compte tenu de l'observation faite dans le présent chapitre sur l'influence de σ, selon laquelle une augmentation de σ induit une concentration importante de l'énergie dans les hautes fréquences, nous choisissons une valeur suffisamment élevée afin de faire apparaitre le plus possible d'information liée à la structure géométrique de l'image 2.9(a) dans le résultat d'approximation.



(a) fonction d'échelle ($q_0 = 10851$)

(b) échelle 1 ($q_1 = 7440$)



(c) échelle 2 ($q_2 = 15499$)

(d) échelle 3 ($q_3 = 3691$)

FIGURE 2.11 – Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la distance ΔE_{2k}, $J = 3, \sigma = 30, q = 20507$.

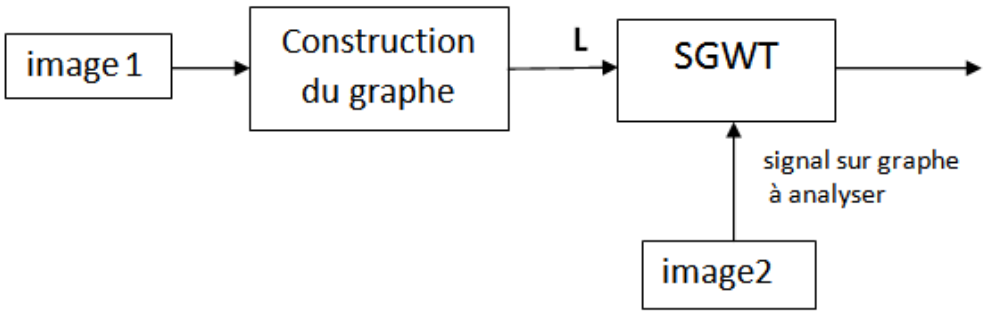


FIGURE 2.12 – Étude de la conservation de la géométrie

Dans le résultat d'approximation, nous constatons que la géométrie de l'image 2.9(a) a été bien identifiée. Même si la structure géométrique de l'image 2.9(b) n'apparait pas de manière explicite dans le résultat d'approximation, nous remarquons la conservation de l'information couleur.

Cependant, il est possible de formuler certaines remarques supplémentaires :

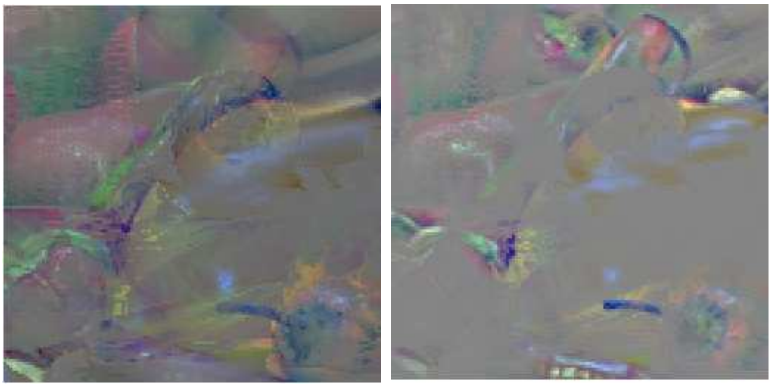
— La figure 2.13(a) montre que la distance euclidienne assure une meilleure adaptation à la texture (à gauche de l'image) du fait que la construction dans l'espace RVB modélise mieux le contenu aléatoire de type texture.

— La figure 2.14(a) montre que la distance ΔE_{2k} permet une meilleure conservation des ruptures et permet la conservation des régions couleurs, nous observons aussi la préservation de certains détails particuliers tel que le reflet.

— Dans la figure 2.14(b), les régions homogènes sont plus contrastées que celles de la figure 2.13(c), elles sont séparées aussi par des contours plus fins. De nouveau, la construction effectuée dans l'espace RVB conserve les zones texturées.



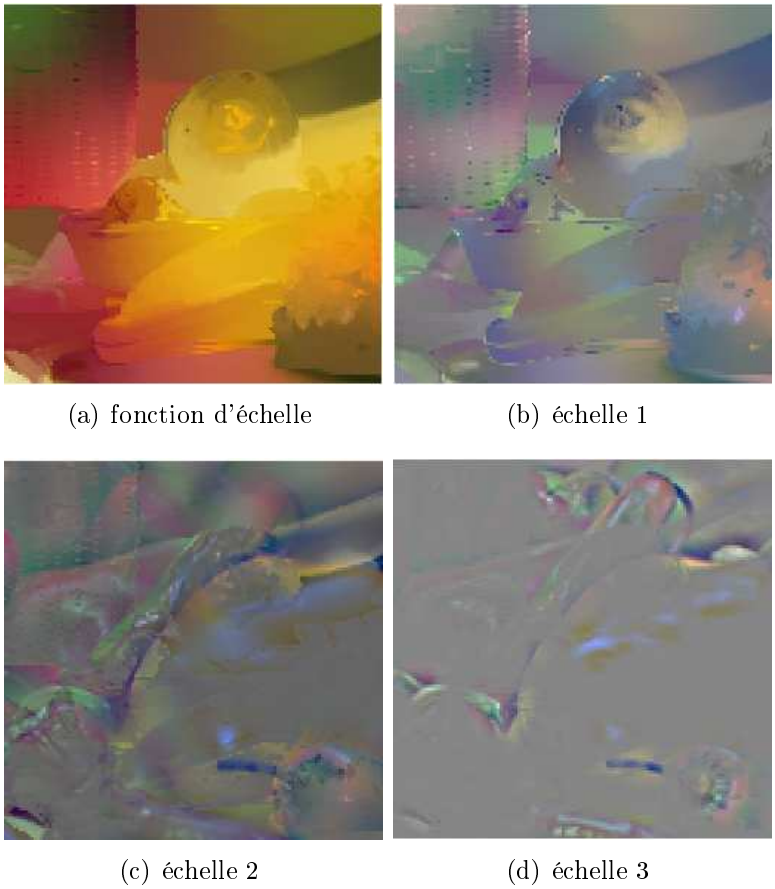
(a) fonction d'échelle (b) échelle 1



(c) échelle 2 (d) échelle 3

FIGURE 2.13 – TOSG appliquée sur l'image 2.9(b) en utilisant un graphe construit à partir de l'image 2.9(a) dans l'espace couleur RVB, $J = 3, \sigma = 30$.

L'étude précédente visait à mettre en avant les avantages de notre approche, quant à la conservation de la géométrie, nous la confrontons maintenant au problème de restauration d'image.



(a) fonction d'échelle (b) échelle 1

(c) échelle 2 (d) échelle 3

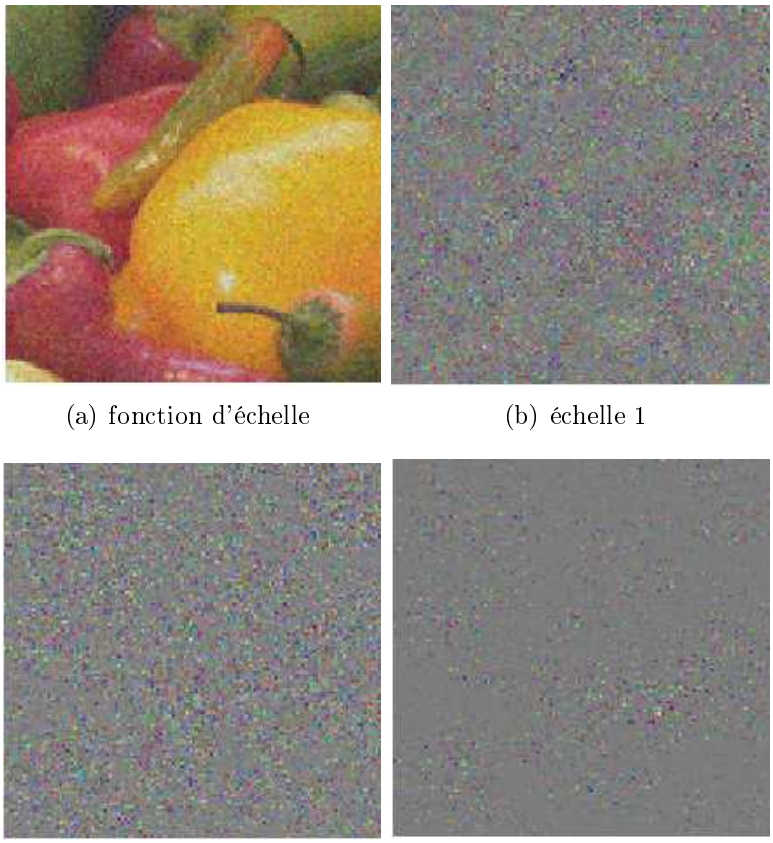
FIGURE 2.14 – TOSG en utilisant la deuxième approche de construction faite à partir de l'image 2.9(a) et appliquée sur l'image 2.9(b), $J = 3, \sigma = 10$.

2.5 Application à la restauration d'images

L'utilisation des outils de débruitage à base des transformées multi-échelles est en plein essor. La TOSG est une transformée redondante qui a montré de très bonnes performances en débruitage d'images en niveaux de gris [HJV12]. Cependant, cette qualité dépend avant tout de la façon dont nous avons construit le graphe. L'estimation du graphe à partir d'une image bruitée est fortement perturbée.

La figure 2.15 montre un exemple d'application de la TOSG avec construction du graphe directement à partir de l'image bruitée sans passer par une étape de pré-traitement, nous remarquons que le résultat d'approximation est affecté de manière significative par le bruit. Dans ce cas, la stratégie par seuillage des coefficients d'ondelettes n'est pas efficace.

Une solution envisageable consiste à calculer le graphe à partir d'une image lissée [LG12][HJV12], le but est d'estimer la structure d'origine. Dans nos expérimentations, nous optons pour une méthode de pré-traitement très simple qui consiste tout simplement



(a) fonction d'échelle (b) échelle 1

(c) échelle 2 (d) échelle 3

FIGURE 2.15 – TOSG appliquée directement sur une image bruitée 2.9(a) en utilisant la première approche de construction, $\sigma = 10$.

à appliquer un lissage gaussien grossier sur l'image bruitée avant l'estimation du graphe.

Nous devons aussi souligner que les performances de la TOSG sont liées à celles de la mesure de distance. C'est à travers notre étude de débruitage que nous mettons en évidence l'utilisation d'une distance visuelle et nous illustrons les avantages apportées par rapport à une distance définie dans le domaine RVB. Comme nous l'avons avancé précédemment, il s'agit d'une originalité de notre travail.

2.5.1 Méthode de débruitage

Au départ, nous considérons une image dégradée par un bruit blanc gaussien additif. Nous appliquons alors un lissage gaussien, ce résultat nous sert pour la construction du graphe en utilisant les deux approches détaillées plus haut.

Pour effectuer le débruitage, nous considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\arg\min_{f} \left\| f_0 - B^T B f \right\|_2^2 + \rho ||Bf||_1, \tag{2.14}$$

avec f_0 le signal sur graphe observé, f le signal régularisé et ρ un paramètre à régler en fonction du niveau de bruit. La procédure du débruitage s'appuie sur la version classique [DJ94] qui consiste à appliquer un seuillage dur sur les coefficients d'ondelettes pour reconstruire l'image débruitée. La figure 2.16 illustre le schéma du débruitage en utilisant la TOSG. Nous rappelons que la décomposition se fait sur chaque composante couleur

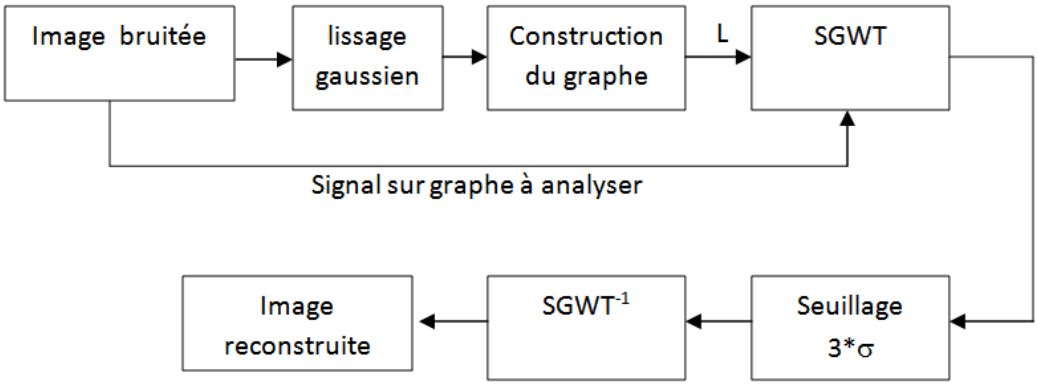


FIGURE 2.16 – La Méthode du débruitage à travers la TOSG

(RVB) de l'image bruitée en utilisant évidemment un seul graphe. Puis, un seuillage dur T_ρ^H est appliqué sur les coefficients d'ondelettes de la TOSG et de manière séparée sur chacune des composantes couleurs. Rappelons qu'un seuillage dur consiste à conserver les coefficients supérieur à un seuil noté ρ, les autres coefficients sont mis à zéro. Un seuillage dur des coefficients d'ondelettes $W_f(t,n)$ est défini par la formule suivante :

$$T_\rho^H[W_f(t,n)] = W_f(t,n) 1_{(|W_f(t,n)|>\rho)}, \tag{2.15}$$

avec ρ le paramètre du seuillage.

2.5.2 Testes et expérimentations

Dans cette partie, nous effectuons les testes sur les images *girl* et *butterfly* et pour différents niveaux de bruit.

Afin d'avoir un critère pertinent de comparaison nous proposons de comparer nos

résultats avec ceux de la transformée en ondelettes non décimées de Daubechies D8 (UWT) à 3 échelles. Contrairement à la transformée en ondelettes traditionnelle, la UWT est invariante par translation. Elle permet de conserver des informations importantes pour le débruitage puisqu'elle n'intègre pas des opérations de décimation.

Nous effectuons une première expérimentation avec l'image *butterfly*. La figure 2.17 montre l'influence de σ sur les résultats obtenus pour différents niveaux de bruit. Pour mesurer la qualité visuelle des résultats du débruitage, nous utilisons la métrique SSIM calculée sur la luminance.

Lorsque le bruit est faible nous remarquons que la valeur optimale de σ est faible car dans ce cas il suffit de choisir une valeur faible de σ pour que le bruit ne soit pas présent dans l'approximation passe-bas. Si l'image est très dégradée nous devons choisir une valeur de σ suffisamment élevée afin de cantonner le bruit dans les coefficients d'ondelettes.

Si nous changeons la notion de distance (voir figure 2.18), le comportement est sensiblement le même sauf que les valeurs optimales de σ ne sont pas équivalentes. Le teste du

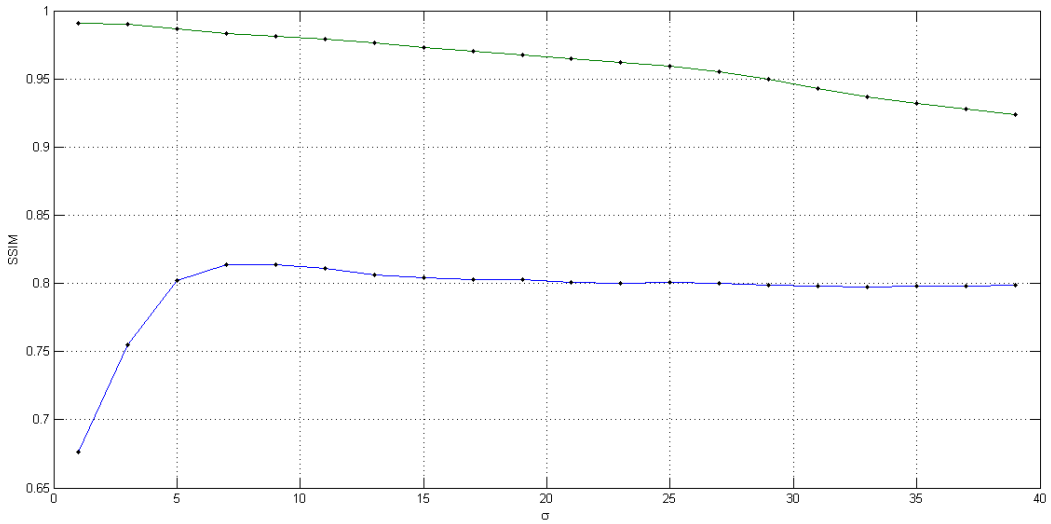


FIGURE 2.17 – Variation de la qualité de débruitage en fonction de σ en utilisant la distance RVB. En vert niveau de bruit faible et en bleu niveau de bruit élevée.

débruitage est mené sur l'image *girl* faiblement bruitée. Les résultats sont présentés dans la figure 2.19. Sur la figure 2.20 l'image *butterfly* est testée aussi avec le même niveau de bruit

Les figures 2.19(e) et 2.20(d) montrent que la restauration dans l'espace couleur CIE-Lab obtient des résultats satisfaisants avec un niveau de bruit raisonnable. En effet, la prise en compte du système visuel humain améliore considérablement la qualité visuelle

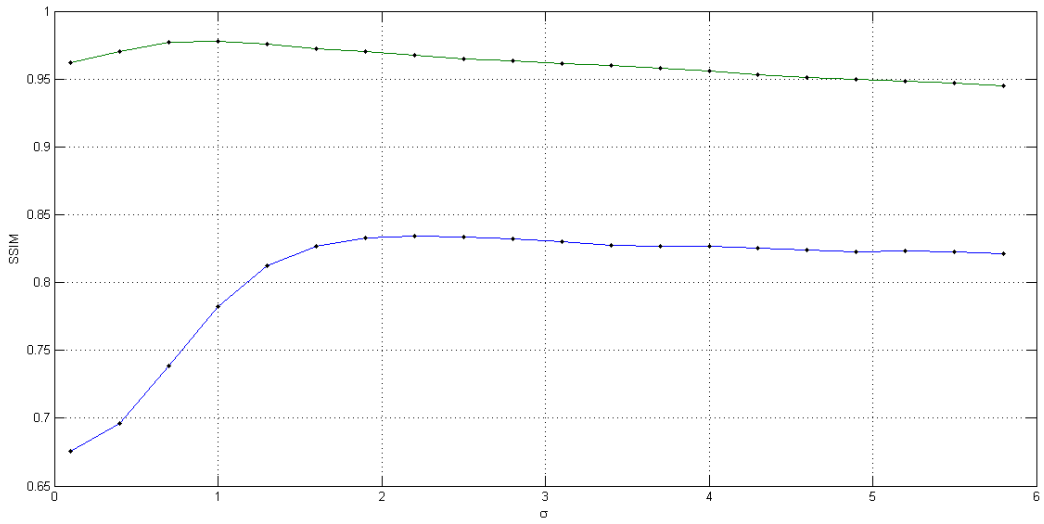


FIGURE 2.18 – Variation de la qualité de débruitage en fonction de σ en utilisant la distance couleur. En vert niveau de bruit faible et en bleu niveau de bruit élevée.

de l'image débruitée et assure une meilleure conservation des discontinuités entre les régions homogènes. Nous pouvons observer que la reconstruction dans l'espace RVB dans les figures 2.19(d) et 2.20(c) offre de bons résultats, cependant, plusieurs détails de l'image ont disparu. En comparant avec les résultats de la UWT dans les figures 2.19(f)et 2.20(e), nous constatons que certains détails importants de l'image (tel que le reflet sur le bouclier) ont été préservé en utilisant notre approche. Le graphe permet d'établir des liens de similarités entre les pixels en termes de différence perceptuelle.

Les métriques classiques ne permettent toujours pas d'estimer la dégradation de manière fiable : le SSIM et le QSSIM sont plus élevés pour l'image bruitée dans la figure 2.19(c) du fait de leur sensibilité aux faibles variations et qu'un niveau de bruit faible n'entraine pas forcément une détérioration des structures de l'image d'origine dans la figure 2.19(b). Toutefois, le résultat obtenu avec notre approche perceptuelle dans la figure 2.19(e) est meilleure en terme de SNR, SSIM et QSSIM que le résultat de référence figure 2.19(f). Nous reprenons les expérimentations en considérant un niveau de bruit élevé. Les résultats sont présentés dans la figure 2.21. Cela montre les limites d'une estimation du graphe basée sur un lissage gaussien. Nous pouvons remarquer l'impact du bruit sur le résultat de la reconstruction,qui apparait sous forme d'effet cartoon dans des zones homogènes (figures 2.21(d) et 2.21(e)). Ce phénomène indésirable est due au fait que l'étape de pré-traitement dans notre cas (un simple lissage gaussien la figure2.21(c)) n'est pas capable de fournir une estimation suffisante de la structure originale permettant d'obtenir

une qualité de restauration satisfaisante. Dans un tel cas, l'identification de la variété est perturbée ce qui entraine l'apparition de plusieurs singularités et crée des structures indésirables qui peuvent être conservées après l'étape du seuillage.

2.5.2.1 Graphe construit à partir de l'image originale

Dans cette partie, nous proposons d'utiliser une estimation parfaite du graphe pour valider le fait que cela améliore la qualité du débruitage. Pour cela, nous utilisons l'image d'origine pour l'estimation du graphe. Nous appliquons alors notre stratégie du débruitage sur l'image bruité.

Comme l'illustre la figure 2.22, l'utilisation d'une construction de graphe parfaite améliore grandement les performances du débruitage et permet d'avoir des résultats très satisfaisants. Cela démontre que la qualité de la reconstruction dépend fortement de l'estimation du graphe initial. Bien sûr, il n'est pas réaliste d'utiliser l'image originale pour calculer le graphe, cependant, cela peut indiquer les performances maximales que peut atteindre la méthode utilisée.

2.5.2.2 Étude de la qualité du débruitage en fonction du niveau de bruit

Les figures 2.23 et 2.24 montrent la variation de la qualité du débruitage (mesurée respectivement par les métriques SSIM et QSSIM) en fonction du niveau de bruit.

Pour une faible dégradation, nous ne voyons pas beaucoup de différences entre les deux approches (entre le bleu et le rouge pour une version de construction lissée et entre le marron et le noir pour une version originale), c'est à partir d'un niveau moyen que l'écart commence à apparaitre et s'accentue au fur et à mesure que le niveau de bruit augmente. Cet écart semble proportionnel à la qualité de la construction du graphe.

Le SSIM de la UWT reste constant et devient meilleur que celui de notre méthode avec un graphe perceptuel pour un niveau de bruit très élevé (à partir de la valeur 8). Cependant, elle reste moins performante que la méthode qui emploie un graphe perceptuel original. Par contre, pour le QSSIM, la UWT surpasse les performances de la TOSG avec un graphe perceptuel à partir de la valeur 5.5 du niveau de bruit et celles de l'approche originale à partir de la valeur 7.

Nous constatons enfin que le changement d'espace RVB à Lab permet d'améliorer l'analyse et met en évidence les singularités de l'image.

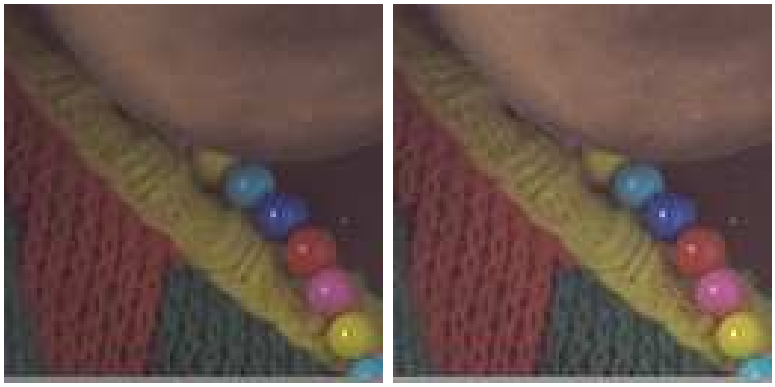
2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un travail original qui consiste à intégrer une distance visuelle dans l'analyse. L'un des apports de ce travail est l'utilisation d'un graphe perceptuel dans l'analyse d'une image couleur. Les expérimentations montrent l'adaptabilité et le potentiel de cette approche et mettent bien en évidence la représentation de l'information couleur dans l'espace CIELab. Ainsi, cette représentation peut s'améliorer à travers une bonne estimation des données originales.

Nous nous sommes intéressés à la question de la prise en compte de la géométrie et de la dimension vectorielle des données. Nous avons déployé deux approches d'analyse adaptatives. Dans la première, nous avons construit un graphe à travers le concept de la distance géodésique ensuite nous avons calculé une distance euclidienne classique dans l'espace RVB. Dans la deuxième approche, nous avons intégré la dimension couleur par l'implémentation de la métrique visuelle ΔE_{2k} dans le calcul de la mesure de distance. Dans les deux cas, l'analyse se fait par le biais de la transformée en ondelette spectrale sur graphe (la TOSG).

Afin de comprendre le comportement de la TOSG et les changements que subissent les coefficients, en fonction de la construction du graphe, nous avons introduit la notion de forme quadratique qui représente un moyen efficace pour mesurer la distribution de l'énergie suivant les échelles et qui facilite la compréhension de l'influence de certains paramètres sur le résultat de la décomposition. L'application au débruitage des images couleurs met en évidence l'apport de l'utilisation d'un graphe perceptuel. Toutefois, le résultat du débruitage dépend de l'estimation du graphe de départ. L'utilisation d'une bonne estimation permet d'améliorer le résultat du débruitage et peut rendre la méthode qui utilise un graphe perceptuel plus robuste au bruit.

Notons que notre proposition peut s'adapter avec des mesures de distances liées aux images multi-spectrales et peut coder efficacement les signatures spectrales associées à certains objets.



(a) Image originale

(b) Image bruitée. SNR=(3.4,5.1,3.9)dB, $SSIM = 0.965, QSSIM = 0.944$

(c) Image lissée. SNR=(3.3,5,3.8)dB, $SSIM = 0.924, QSSIM = 0.922$

(d) ED, $\sigma = 10$. SNR=(1.8,3.1,1.6)dB, $SSIM = 0.916, QSSIM = 0.905$.

(e) ΔE_{2k}, $\sigma = 1$. SNR=(4.2,6.3,5.4)dB, $SSIM = 0.947, QSSIM = 0.939$.

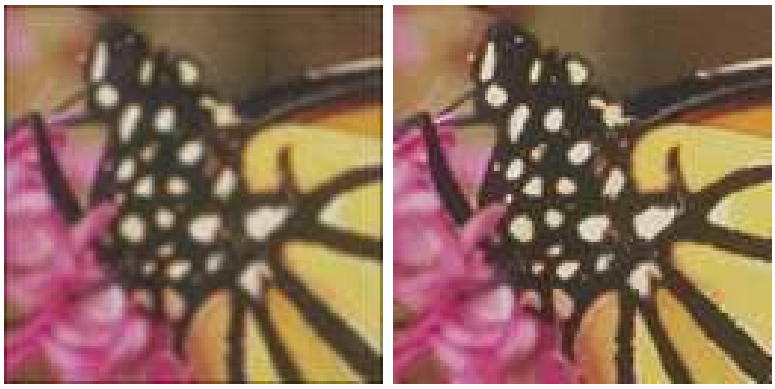
(f) UWT. SNR=(3.3,5,3.8)dB, $SSIM = 0.931, QSSIM = 0.927$.

FIGURE 2.19 – Résultat du débruitage obtenu pour l'image *girl* à bruit faible.



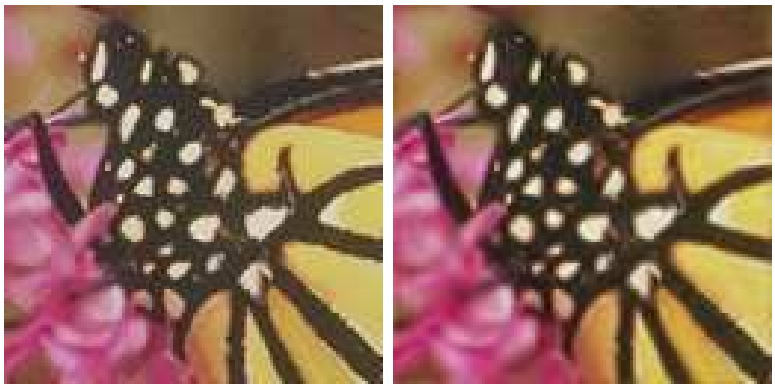
(a) Image originale

(b) Image bruitée. SNR=(13.4,12.2,9.9)dB, $SSIM = 0.903, QSSIM = 0.850$.



(c) Image lissée. SNR=(9.9,9.4,7.9)dB, $SSIM = 0.861, QSSIM = 0.853$.

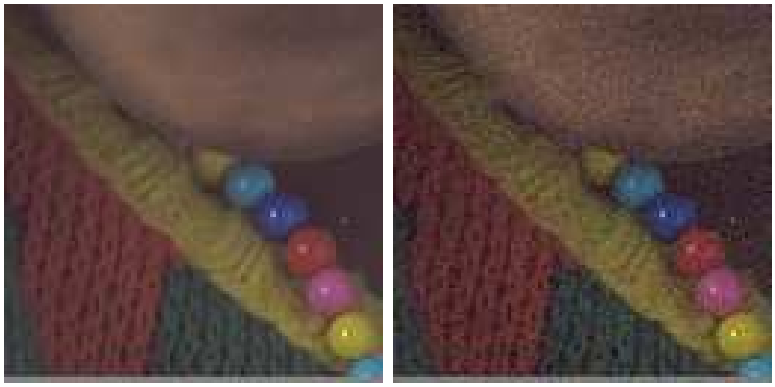
(d) ED, $\sigma = 10$ SNR=(14,12.7,10.3)dB, $SSIM = 0.918, QSSIM = 0.898$.



(e) ΔE_{2k}, $\sigma = 2$ SNR=(14,12.9,10.5)dB, $SSIM = 0.928, QSSIM = 0.907$.

(f) UWT. SNR=(12.6,11.3,9.1)dB, $SSIM = 0.921, QSSIM = 0.916$.

FIGURE 2.20 – Résultat du débruitage obtenu pour l'image *beterfly* à bruit faible.



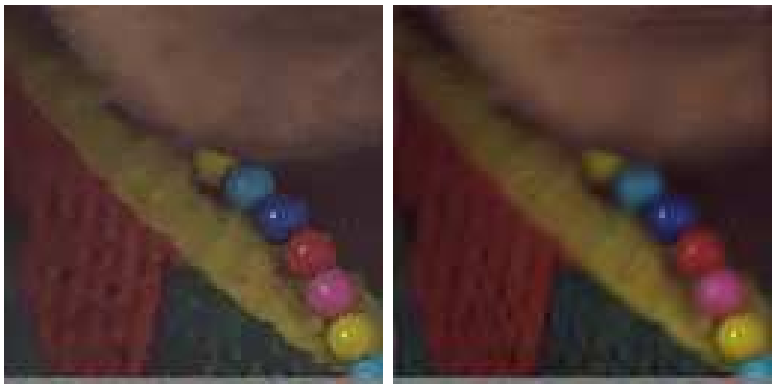
(a) Image originale

(b) Image bruitée. SNR=(-0.8,-1.1,-3.3)dB, $SSIM = 0.733, QSSIM = 0.571$.



(c) Image lissée. SNR=(-0.2,-0.5,-2.7)dB,$SSIM = 0.830, QSSIM = 0.823$.

(d) ED, $\sigma = 10$ SNR=(-3.8,-3.1,-4.9)dB, $SSIM = 0.792, QSSIM = 0.740$.



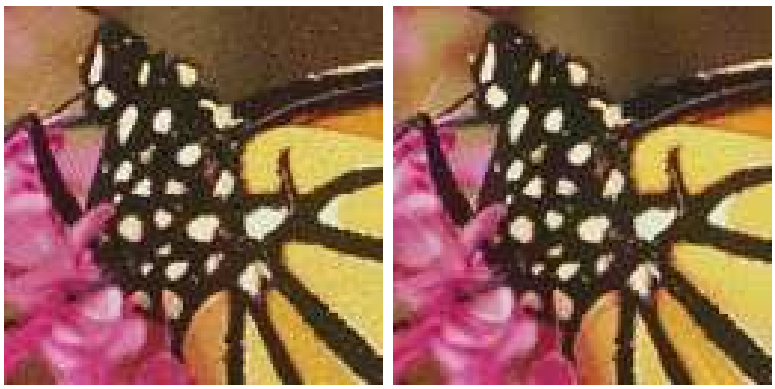
(e) ΔE_{2k}, $\sigma = 1$ SNR=(0.6,0.6,-1.5)dB, SSIM=0.810, QSSIM=0.763.

(f) UWT. SNR=(-0.2,-0.5,-2.7)dB, $SSIM = 0.817, QSSIM = 0.819$.

FIGURE 2.21 – Résultat du débruitage obtenu pour l'image *girl* à bruit fort.



(a) Image originale. (b) Image bruitée.



(c) ED, $\sigma = 29$ (d) ΔE_{2k}, $\sigma = 1.9$



(e) UWT.

FIGURE 2.22 – Résultat du débruitage obtenu pour l'image *girl* avec une construction de graphe parfaite.

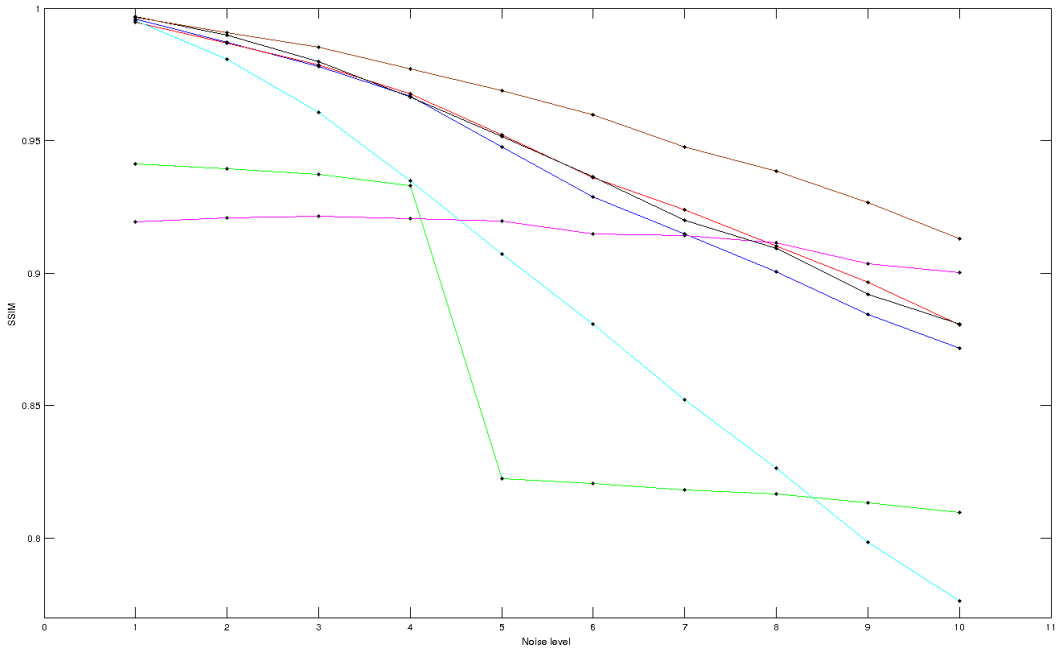


FIGURE 2.23 – SSIM en fonction du niveau de bruit. En vert image lissée, cyan image bruitée, magenta uwt, bleu première approche, rouge deuxième approche, noir première approche avec un graphe original, marron deuxième approche avec un graphe original.

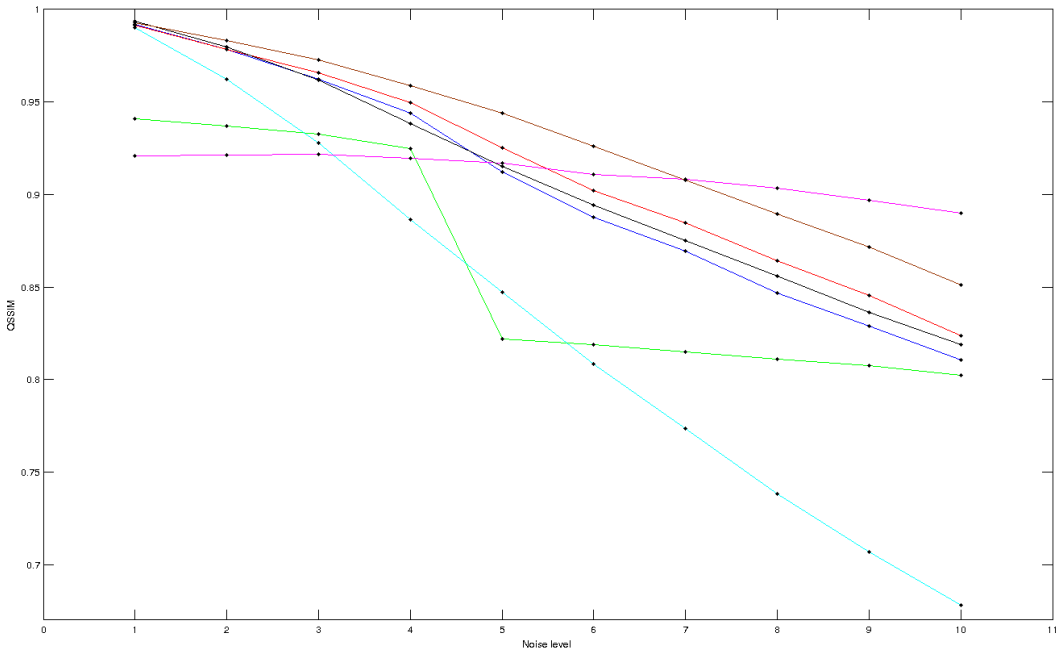


FIGURE 2.24 – $QSSIM$ en fonction du niveau de bruit. En vert image lissée, cyan image bruitée, magenta uwt, bleu première approche, rouge deuxième approche, noir première approche avec un graphe original, marron deuxième approche avec un graphe original.

Chapitre 3

Inpainting pour des images couleurs à travers la transformée en ondelettes spectrale sur graphe (TOSG)

3.1 Introduction

L'*inpainting* est un problème d'interpolation qui consiste à réparer des zones endommagées d'une image ou à supprimer certains éléments indésirables.

Les premières techniques proposées dans ce cadre étaient basées sur les équations aux dérivées partielles[BSCB00]. Dans certains cas, ces méthodes sont incapables de maintenir une bonne qualité visuelle, elles sont destinées à traiter des régions simples et non texturées.

D'autres modèles ont été proposées afin de pouvoir supprimer des objets de tailles considérables. Leur concept est basé sur la synthèse de texture qui se fait généralement à travers la notion de patchs[CPT04]. Ces méthodes ont montré de bonnes performances pour le traitement des images complexes.

Comme nous l'avons vu, l'approche par graphe a permis de définir de nouveaux outils d'analyse qui offrent plus de flexibilité et plus d'efficacité. Leur intérêt principal réside dans leur capacité à coder la structure géométrique associée aux données discrètes. La conception des méthodes d'*inpainting* dans le domaine des graphes s'effectue sur la base d'un schéma de régularisation sur graphe et la prise en compte des caractéristiques non locales et locales lors de la construction du graphe. Dans ce chapitre, nous développons une

approche d'*inpainting* pour des images couleurs. Pour cela, nous nous focalisons sur les propriétés des coefficients d'ondelettes de la TOSG afin de mettre en place un schéma de régularisation itératif adapté aux graphes. Comme nous le verrons, le résultat dépend de manière significative de la structure topologique utilisée. L'utilisation d'une grille régulière pour estimer la structure des données manquantes ne peut pas garantir un traitement efficace. De ce fait, nous développons une méthode plus adaptative qui consiste à construire un graphe des patchs couleurs de l'image à partir des moyennes non locales MNL. Les résultats obtenus sont très encourageants et mettent en évidence plusieurs aspects, à savoir l'extension de la régularisation à base d'ondelettes vers le domaine des graphes, l'utilisation des caractéristiques non locales et la prise en compte de la dimension couleur (ce qui permet de réduire considérablement l'apparition de fausses couleurs).

Ce chapitre est structuré comme suit :

Tout d'abord, nous décrivons un bref état de l'art sur l'*inpainting* et nous nous intéressons en particulier aux approches basées sur les équations aux dérivées partielles et les modèles d'*inpainting* par patchs. Nous citons par la suite les méthodes à base de graphes. Nous présentons après notre proposition en mettant en place un schéma de régularisation basé sur les coefficients d'ondelettes de la TOSG et nous illustrons l'influence de la structure de graphe sur le résultat final. Enfin, nous proposons un algorithme qui améliore les performances du schéma de régularisation en prenant en compte une structure de graphe non locale pour l'estimation des données manquantes.

3.2 État de l'art

3.2.1 Modèles basés sur des patchs

Les auteurs ont proposé dans [EL99], l'un des travaux fondateurs dans ce domaine. Leur approche consiste à considérer le problème d'optimisation suivant :

$$\arg\min \epsilon(N(Q), N(P)), \tag{3.1}$$

avec

$$\epsilon(N(Q), N(P)) = \sum_m \sum_n (N(Q) - N(P))^2. \tag{3.2}$$

Cela correspond à attribuer à chaque élément manquant P, la valeur associée au pixel Q dont le voisinage $N(Q)$ est le plus ressemblant à celui de P. Une fois le pixel P traité, il est considéré comme connu et un autre pixel sera ensuite traité.

Cette méthode fonctionne correctement avec des zones manquantes de taille réduite mais avec des zones de taille plus importante, nous obtenons parfois des frontières déconnectées pour certains objets avec également un temps de calcul important.

Dans [CPT04], Criminisi *et al* ont amélioré ce modèle en limitant ses problèmes. Dans le but de réduire le temps de calcul, les auteurs ont proposé de copier entièrement le patch ayant le plus de ressemblance au lieu de copier uniquement la valeur du pixel. L'ordre de remplissage dans cette méthode privilégie les pixels qui décrivent les contours ce qui permet d'améliorer la reconstruction des bords. Un exemple d'application de cet algorithme est illustré par la figure 3.1 où l'image reconstruite parait très cohérente.

Ce modèle peut cependant rencontrer certaines limites dans la reconstruction des bords non rectilignes.

Dans [Ash01], Ashikhmin a défini un voisinage de recherche pour chaque élément manquant P afin d'accélérer le processus d'*inpainting*.

D'autres méthodes réduisent l'espace de recherche et le temps de calcul à travers l'organisation des patchs sous forme de structures arborescentes, et la réduction de la dimensionnalité des patchs par des techniques classiques telle que l'analyse en composantes principales (ACP).

3.2.2 Modèles variationnels

Nous avons rappelé quelques méthodes d'*inpainting* basées sur la recopie de patchs. Nous introduisons maintenant une autre famille de méthodes qui consiste à utiliser un schéma variationnel pour estimer les données manquantes.

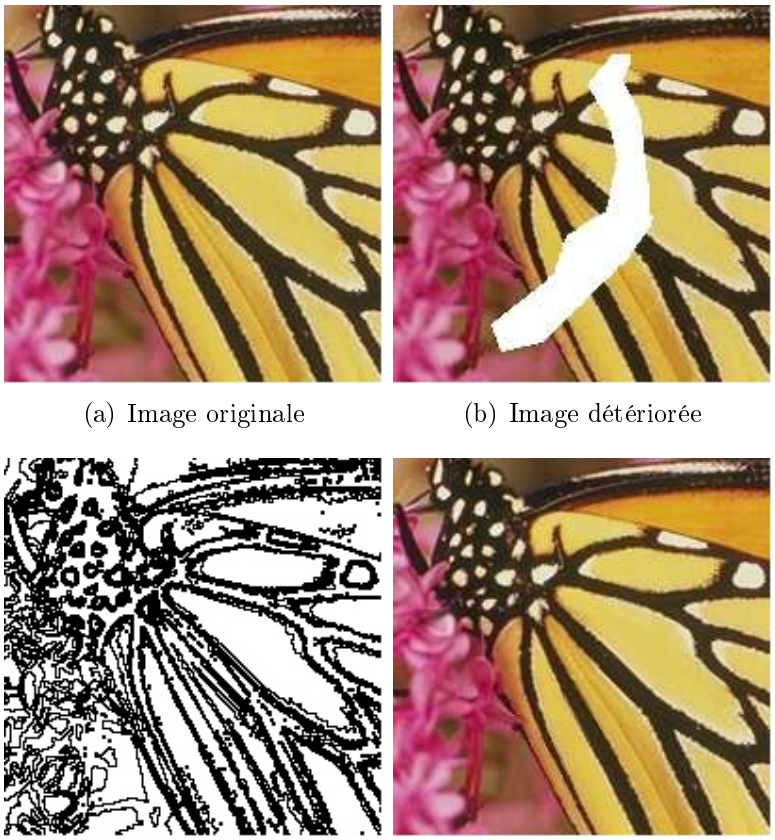
Morel et Masnou ont proposé dans [MM98] une méthode qui permet d'interpoler les isophotes en s'inspirant des spécificités du système visuel humain. La figure 3.2 montre un exemple d'application sur une image couleur, l'algorithme de Morel et Masnou a pu reconstruire correctement les différents isophotes.

Bertalmio *et al* [BSCB00] ont proposé un schéma d'équations aux dérivées partielles qui consiste à transmettre l'intensités de l'image tout au long du contour. Leur schéma combine l'équation du transport ($f_\eta = \nabla^\perp f.\nabla\Delta f$) avec un modèle de diffusion aniso-



(a) Image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.1 – *Inpainting* en utilisant l'algorithme de Criminisi [CPT04]



(a) Image originale (b) Image détériorée

(c) Image avec des isophotes reconstruits (d) Image reconstruite

FIGURE 3.2 – *Inpainting* en utilisant l'algorithme de Morel et Masnou [MM98]

trope :

$$f_\eta = \phi(x)|\nabla f|\nabla.\frac{\nabla f}{|\nabla f|}, \tag{3.3}$$

avec $\Phi(x)$ une fonction de lissage qui contrôle le processus de diffusion, $\nabla.\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$ est la courbure qui évolue le long des isophotes. La figure 3.3 illustre les performances de cette approche.



(a) Image détériorée (b) Image reconstruite

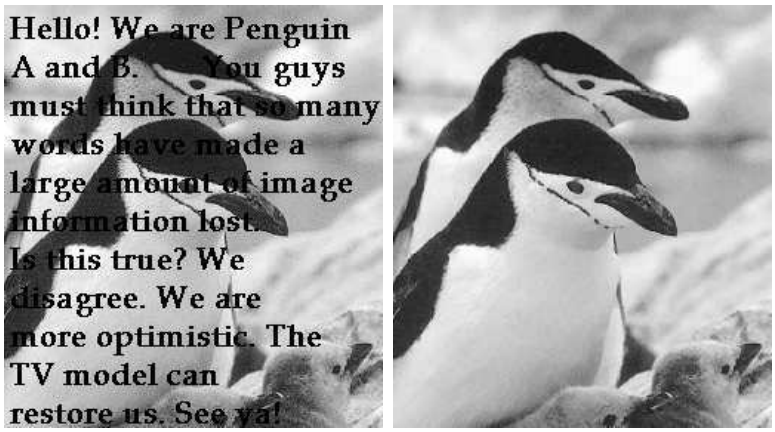
FIGURE 3.3 – *Inpainting* en utilisant le modèle équations aux dérivées partielles de Bertalmio *et al* [BSCB00]

Dans [CS01] Chan et Shen ont proposé un modèle variationnel permettant une minimisation de la variation totale dans la zone manquante et une minimisation d'un terme d'attache aux données dans le reste de l'image. La figure 3.4 montre un exemple d'application de ce modèle.

Nous pouvons trouver également, d'autres approches qui utilisent des représentations éparses de l'image à base de dictionnaires permettant de décomposer l'image en deux parties géométrie et texture [ESQD05][AEB06] [MES07].

Pour plus de détails sur les différents modèles d'*inpainting* à base d'équations aux dérivées partielles, le lecteur est invité à se référer à [BCMS].

Ce que nous avons constaté, c'est que les différentes approches privilégient soit les textures soit les informations de géométrie. Des travaux récents ont montré l'intérêt d'utiliser les graphes pour prendre en considération la géométrie et la texture. Cela fait l'objet du



(a) Image à traiter (b) Image reconstruite

FIGURE 3.4 – *Inpainting* en utilisant le modèle de Chan et Shen *et al* [CS01]

chapitre 3.

3.2.3 Modèles à base de graphes

Dans cette partie, nous représentons les méthodes qui sont proches de notre approche proposée.

Dans [DV10], les auteurs ont proposé une méthode variationnelle qui consiste en premier lieu à construire un graphe avec des caractéristiques non locales, ensuite une régularisation selon l'équation de la chaleur est appliquée afin de réduire les incohérences entre les régions couleurs. La pondération de graphe se fait à travers la fonction du poids suivante :

$$w(m,n) = exp(-\frac{||\Psi(n) - \Psi(m)||^2_\nu}{\sigma^2}), \tag{3.4}$$

avec $\Psi(n)$ le patch centré sur le pixel n, et $||.||^2_\nu$ correspond à la somme des différences au carré entre les deux patchs filtrés par un noyau gaussien.

Enfin, la propagation de l'information est assurée à l'aide de la régularisation sur graphe [LEB07]. Ce processus est répété plusieurs fois jusqu'à ce que la zone soit complétée. La figure 3.5 montre un résultat obtenu par cette méthode.

Cette approche dépend de l'image initiale à savoir qu'elle fonctionne très bien si la zone manquante est entourée par le même type de texture que la zone à combler mais elle peut obtenir des résultats non cohérents dans le cas contraire.

Une autre méthode dont le principe s'appuie sur la régularisation p-Laplace sur graphe



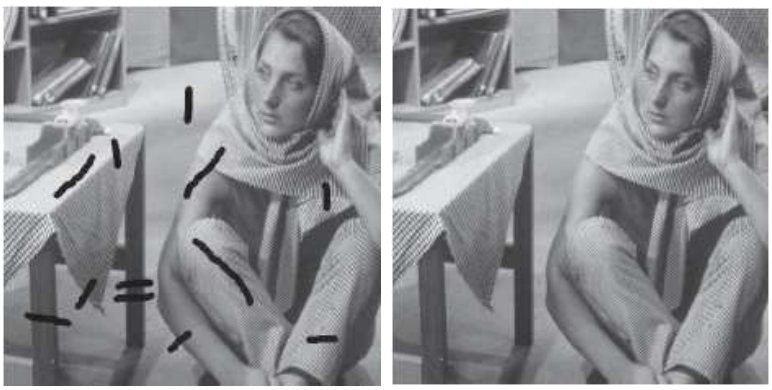
(a) Image à traiter (b) Image reconstruite

FIGURE 3.5 – *Inpainting* en utilisant le modèle de [DV10]

a été proposée dans [GCE10]. Cela se fait d'abord à travers la construction d'un graphe possédant des caractéristiques locales et non locales. La fonction de poids dans ce cas s'exprime par la combinaison d'une comparaison locale et non locale des similarités :

$$w_{NL}(m,n) = exp(-\frac{|f(n)-f(m)|^2}{2\sigma_2^2})exp(-\frac{||F(n)-F(m)||^2}{\sigma_1^2}), \tag{3.5}$$

Ensuite, le processus de la régularisation est appliqué pour chaque élément appartenant à la zone endommagée. Cette méthode a obtenu des résultats satisfaisants et a montré l'efficacité de l'algorithme à traiter des structures complexes (voir résultat 3.6).



(a) Image à traiter (b) Image reconstruite

FIGURE 3.6 – *Inpainting* en utilisant le modèle de [GCE10]

Nous constatons que ces méthodes s'appliquent directement sur l'image, hors, le développement des méthodes de régularisation à partir des coefficients d'ondelettes classiques a permis d'améliorer la qualité de la reconstruction des images. C'est pourquoi dans la partie suivante nous nous intéressons à l'extension de ces schémas au domaine des graphes

à travers l'utilisation des coefficients d'ondelettes de la TOSG.

3.3 Approches basées sur la régularisation à travers les coefficients de la TOSG

3.3.1 Schéma de régularisation

Nous présentons d'une façon générale un nouveau schéma de régularisation qui nous sert de base pour faire de l'*inpainting* sur des images couleurs.

Nous nous focalisons sur la régularisation dans le domaine des graphes en utilisant les coefficients d'ondelettes de la TOSG. Outre la flexibilité et la simplicité numérique de la TOSG, l'étape de la construction du graphe s'avère primordiale car elle permet de guider l'analyse et assurer la reconstruction.

Soit f le signal observé et $f_s = \Phi f + b$ le signal dégradé avec Φ désigne la zone endommagée (un masque binaire) et b représente le bruit. Par hypothèse, f possède une représentation parcimonieuse dans le dictionnaire W^*, f est donc obtenu par une combinaison linéaire $f = W^*\varsigma$. Nous pouvons calculer un ensemble éparse des coefficients ς dans la trame d'ondelettes $W = \psi_m$.

$$\hat{\varsigma} = \arg\min_{\varsigma} \frac{1}{2} \|f_s - \Phi\Psi^*\varsigma\|_2^2 + \rho R(\varsigma), \tag{3.6}$$

$R(\varsigma)$ définie par :

$$R(\varsigma) = \sum_m \|\varsigma_m\| . \tag{3.7}$$

Ce problème inverse est dit mal posé, nous pouvons le résoudre par un schéma numérique itératif. Classiquement, cela consiste à appliquer un seuillage dur $\mathcal{T}_\vartheta^H$ (voir la partie 1.4.4) itérativement de façon à ce que le seuil ϑ diminue au fur et à mesure des itérations. Nous proposons d'adapter ce qui est utilisé dans le domaine d'ondelettes aux représentations sur graphes.

La résolution numérique du problème 3.6 est effectuée par l'algorithme 1.

Cet algorithme propose un moyen pratique pour résoudre le problème d'*inpainting* de manière très basique. Comme nous allons le voir, selon la complexité de la méthode

Entrées : Image f, zone endommagée Φ;
Sorties : Image f reconstruite;
Données : Nombre d'itérations Nb
$f^0 \leftarrow f_s$;
$i \leftarrow 0$;
tant que $i<Nb$ **faire**
  Mettre à jour ϑ;
  Calculer $\mathbf{L}$;
  $f^{i+1} \leftarrow f^i + \Phi\left[\left(T_g^t\right)^* \mathcal{T}_\vartheta^H\left(T_g^t\right) f^i - f^i\right]$;
  $i \leftarrow i+1$;
fin

Algorithme 1 : Algorithme de la régularisation par la TOSG

de construction de graphe employée cet algorithme peut ainsi être modifié. Le nombre d'itérations Nb doit être suffisamment élevé afin de garantir la convergence du processus.

Dans le cas de la TOSG, pour restaurer efficacement les zones endommagées de l'image, nous devons au préalable disposer d'une structure de graphe adaptée aux données manquantes. L'estimation de la structure de graphe manquante permet d'établir de nouvelles connexions dans le graphe reflétant les liens de similarité qui existent entre chaque élément à reconstruire et son voisinage.

Avant de tester des topologies adaptatives pour construire le graphe, nous étudions d'abord l'estimation par une grille régulière qui se présente comme la topologie associée aux données dans le domaine classique.

3.3.2 *Inpainting* par une grille régulière

3.3.2.1 Masque non aléatoire

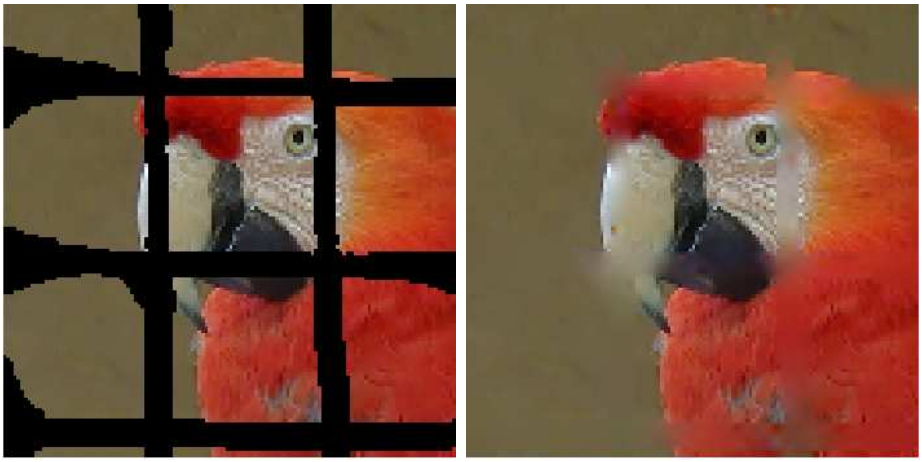
Ici, nous considérons une image couleur détériorée par un masque (voir figure 3.7(a)). Il est à noter que si nous ignorons complètement la zone manquante lors de la construction du graphe, l'information ne sera pas propagée à l'intérieur de cette zone.

Pour les exemples que nous étudions dans cette partie, nous proposons d'utiliser une grille régulière comme une structure représentative associée à la zone manquantes. De ce fait, chaque nœud dans les régions à reconstruire est connecté avec ses k plus proches voisins en terme de distance spatiale. Dans la matrice A, cette opération se traduit par l'attribution de la valeur 1 à toutes les cases correspondantes aux nouvelles arêtes créées par l'introduction de la grille.

Dans l'expérimentation suivante, nous appliquons l'algorithme 1 à l'image 3.7(a). Nous remarquons que l'information couleur a pu se propager dans toutes les zones de traitement de façon linéaire. Mais nous remarquons aussi que les ruptures ne sont pas bien reconstruites car la modélisation par une grille régulière n'est pas représentative et ne met pas en évidence les discontinuités entre les régions couleurs. Le traitement des zones texturées montre aussi les limites de cette méthode.

Toutefois, cette approche est très facile à implémenter et efficace en terme de temps de calcul ; à titre d'exemple, pour une image couleur de taille 128×128, l'exécution sur une machine ayant les caractéristiques suivantes : processeur Intel(R) Core(TM) i7-3630QM CPU @2.40GHz RAM 4Go, se fait dans un laps de temps de 30 seconde, ce qui fait que son implémentation peut être dans certains cas très avantageuse par rapport à d'autre méthodes de construction.

Sur la figure 3.8, nous montrons un deuxième exemple d'*inpainting* sur une image simple. Les régions homogènes sont bien restaurées, en revanche les structures géométriques sont lissées et ne sont pas prises en compte ce qui induit des problèmes de cohérence visuelle. Par ailleurs, nous pouvons obtenir des résultats similaires par des outils de traitements classiques comme les méthodes à base d'équations aux dérivées partielles.



(a) Image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.7 – *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant une grille régulière

3.3.2.2 Masque aléatoire

La dégradation par un masque aléatoire est un autre cadre d'*inpainting*. Nous choisissons une image partiellement texturée et qui contient aussi des zones homogènes et



(a) Image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.8 – *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant une grille régulière

des ruptures couleurs. Le même algorithme est appliqué sur l'image 3.9(a). Nous constatons que cet algorithme n'est pas adapté à la texture car nous remarquons l'apparition du bruit impulsionnel due à la création des fausses couleurs. Par contre, dans les zones non texturées, cette méthode se comporte mieux et permet de reproduire certains détails importants.



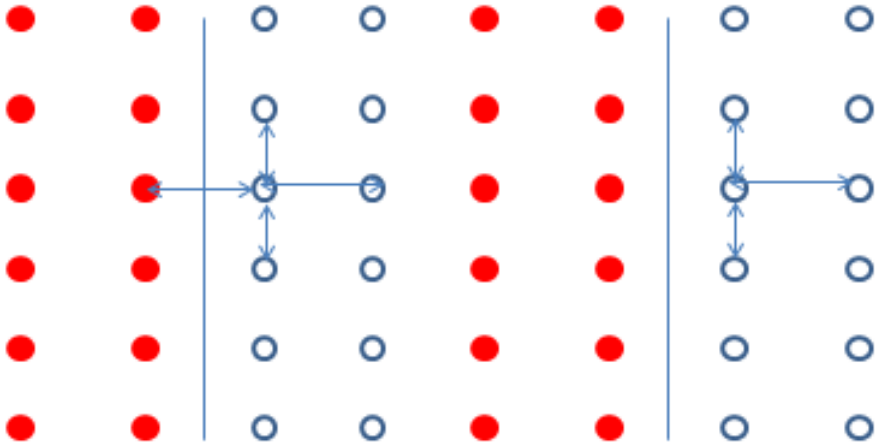
(a) Image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.9 – *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant une grille régulière

Pour améliorer encore le résultat précédent, nous devons introduire une manière plus cohérente pour calculer le graphe à partir de l'image endommagée. Pour cela nous employons la méthode de construction développée au deuxième chapitre en utilisant une distance euclidienne dans l'espace couleur RVB. Ensuite, nous représentons les zones endommagées de l'image par une grille régulière que nous associons à la structure de graphe

calculée dans l'étape précédente.

Contrairement à une grille entièrement régulière, cette simple modification permet surtout de mettre en évidence les discontinuités entre les régions couleurs. Nous illustrons cela sur la figure 3.10.



(a) grille régulière (b) structure non régulière

FIGURE 3.10 – Différence entre une grille régulière et non régulière (k-ppv)

Dans la figure 3.11, le résultat obtenu fait apparaitre moins de bruit dans les régions texturées et permet aussi d'avoir des zones plus homogènes.

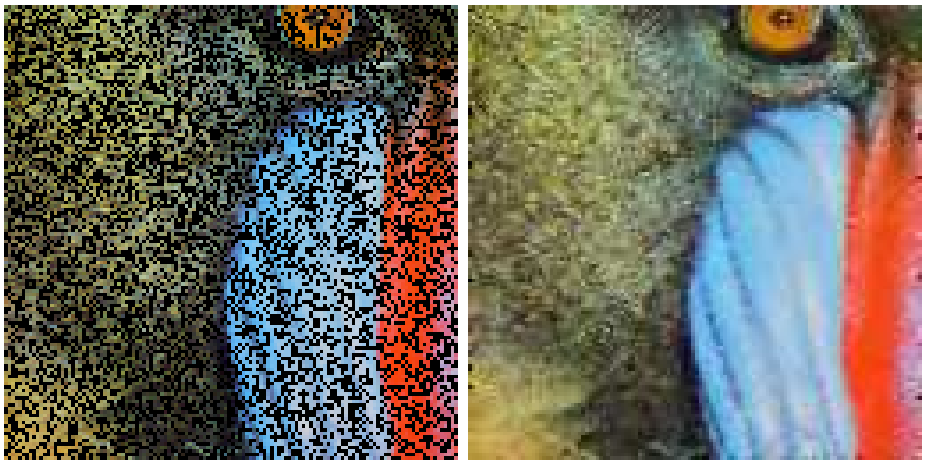
Cependant, cette méthode présente les mêmes limites que celles rencontrées dans des applications linéaires classiques à savoir la difficulté à reconstruire convenablement les ruptures entre les régions et l'incapacité à faire propager le motif de la texture dans les zones de traitement. Afin de répondre à ces questions, nous devons introduire des méthodes de construction adaptatives et capables d'établir des liens de similarités pertinents entre les éléments manquants. Cela fait l'objet de la section suivante.

3.3.3 La prise en compte de la structure d'origine

Dans cette partie, nous démontrons le potentiel de la régularisation à base des coefficients d'ondelettes de la TOSG dans des conditions que nous considérons idéales.

Pour cela, nous introduisons une méthode artificielle qui nous permet de comprendre en particulier comment la structure de graphe modifie le processus d'*inpainting*. Ce travail permet d'introduire l'approche non locale que nous verrons par la suite.

Prenons une image dégradée par un masque aléatoire (figure 3.12(b)). Au lieu de



(a) Image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.11 – *Inpainting* à base de la TOSG en complétant la structure manquante par une grille régulière

construire le graphe à partir de cette image nous le construisons à partir de l'image d'origine. Ceci implique que ce graphe construit contient toute la structuration de l'image. Pour cela nous employons la méthode de construction de graphe étudiée dans le deuxième chapitre, avec une distance euclidienne dans l'espace couleur RVB. Comme nous l'avons dit, cette solution n'est pas envisageable dans le cas réel mais est appliquée pour analyser la méthode.

Dans la figure 3.12(c) nous présentons le résultat d'*inpainting*. Le résultat est très satisfaisant et nous remarquons que la texture s'est reconstruite efficacement. Notons que nous ne parvenons pas à restaurer quelques pixels en haut de la zone, du en partie au paramétrage lors du calcul des poids, mais cela n'affecte pas trop la qualité de restauration étant donnée la dimension de la zone à traiter. Nous tirons de cette expérimentation que le graphe doit être correctement initialisé dans les zones manquantes pour obtenir un résultat satisfaisant. A travers cette expérimentation, nous pouvons évaluer les performance de notre modèle de construction de graphe concernant la conservation de la structure géométrique ainsi que l'information couleur. Ce dernier point mérite d'être souligné, contrairement à d'autres modèles classiques qui utilisent dans leur schéma un traitement marginale.

Ce résultat est très intéressant du fait qu'il ouvre des perspectives importantes, notamment l'information liée à la texture dans les zones non endommagées peut être prise en compte afin d'estimer la structure de graphe de la zone manquante.

Nous représentons un deuxième teste dans la figure 3.13. Contrairement à l'exemple

précédent où nous avons étudié un type de texture régulier, nous traitons ici une zone de taille importante qui comprend des formes complexes, des zones homogènes, des contours. De la même manière, nous construisons le graphe à partir de l'image d'origine en adoptant la méthode décrite dans le chapitre 2, avec une mesure de la distance définie dans l'espace couleur RVB. Bien que difficile à reconstruire, les éléments manquants ont été bien restaurés, à l'exception de certains pixels dont le processus n'a pas pu converger. Cependant, sur l'ensemble de l'image, nous obtenons un résultat très satisfaisant vue que la géométrie semble être bien reconstruite malgré la complexité de la structure étudiée.

Selon les résultats obtenus, cela confirme que le modèle de régularisation à base des coefficients de la TOSG dépend de façon déterminante de la méthode de construction du graphe utilisée pour estimer la structure d'origine. Pour cette raison, la grille régulière échoue d'une certaine manière à représenter les données manquantes quand celles-ci correspondent à des structures géométriques complexes.

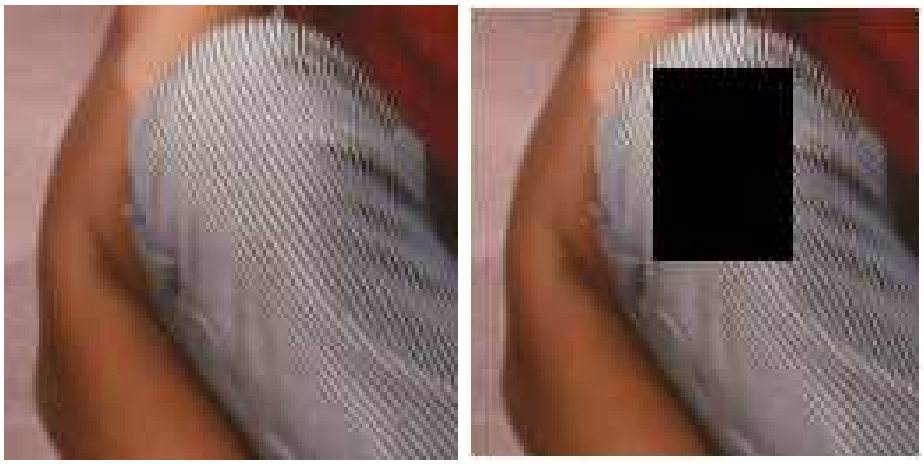
Nous rappelons que nous avons adopté cette démarche dans le but de montrer dans quelles conditions l'exploitation des coefficients de la TOSG pour une application d'*inpainting* est efficace.

Dans ce contexte, nous proposons maintenant un algorithme d'*inpainting* plus réaliste dans un contexte applicatif, fondé sur la mis en œuvre d'un graphe non local.

3.4 Régularisation à travers la TOSG et à l'aide d'un graphe non local

3.4.1 principe

Les modèles employant des méthodes de construction basiques ne sont pas capables de maintenir une bonne qualité visuelle et produisent des effets indésirables. Dans l'objectif d'améliorer les performances de l'*inpainting* à base de la TOSG, nous proposons ici un nouvel algorithme plus performant qui permet de tenir compte des discontinuités entre les régions couleurs. Motivés à l'origine par l'efficacité de la transformée en ondelettes sur graphe et par les performances de la méthode *des moyennes non locales*, nous proposons alors de réunir ces deux concept dans un seul schéma d'*inpainting*. Comme nous l'avons déjà mentionné, nous allons mettre en avant le fait que cette approche, du



(a) Image d'origine (b) Image détériorée



(c) image reconstruite

FIGURE 3.12 – *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant la méthode de construction vue au deuxième chapitre (distance euclidienne RVB)

fait de la construction du graphe, prend en compte l'information couleur. Usuellement, la transformée en ondelettes et la méthode *des moyennes non locales* occupent une place prépondérante dans le domaine du traitement d'image [DJ94] [Don95] mais sont rarement réunies dans un même schéma. Dans cette étude, nous nous intéressons à la résolution d'un problème d'optimisation défini dans le domaine des graphes. Nous utilisons la méthode *des moyennes non locales* pour construire le graphe que nous insérons dans un schéma de régularisation à base des coefficients de la TOSG. Le concept *des moyennes non locales* a été initialement développé par Buades *et al* [BCM08]pour une application de débruitage. La méthode suppose que l'image possède une quantité considérable d'informations d'auto-similarité et de redondance que nous pouvons ainsi exploiter afin d'éliminer le bruit de l'image. Cette stratégie vise aussi à mettre en évidence l'utilisation des caractéristiques



(a) Image d'origine



(b) Image détériorée



(c) image reconstruite

FIGURE 3.13 – *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant la méthode de construction vue au deuxième chapitre (distance euclidienne RVB)

non locales dans un problème d'optimisation, c'est principalement à travers les graphes qui sont les mieux placées pour répondre à ce type de demande. L'image à traiter est utilisée pour calculer le graphe non local. Pour calculer le poids entre deux nœuds m et n, nous considérons deux patchs de tailles $o \times o$ centrés autour de m et n. Nous associons à ces patchs leurs vecteurs d'attributs correspondants dénotés par F_m et F_n. La mesure de similarité est calculée par la norme L_2 entre les deux vecteurs. Nous parlons donc d'une approche non locale. La fonction de poids est donnée par la formule suivante :

$$w(m,n) = exp(\frac{-\sum_n \sum_m (F_m - F_n)^2}{\sigma^2}). \tag{3.8}$$

Le paramètre σ doit être soigneusement choisi afin d'obtenir un résultat satisfaisant. Quand sa valeur est faible, le processus ne converge pas car le nombre de connexions crées

est faible et quand cette valeur est grande le graphe construit tend vers une structure régulière. Généralement, cette valeur peut être fixée selon la taille des patchs. Voir plus de détails sur le paramétrage de la méthode des moyennes non-locales dans [DfAG11].

Dans nos expériences, le calcul des distances entre les pixels est réduit à un petit voisinage. La figure illustre le principe de la construction du graphe par la méthode *des moyennes non locales* ; chaque pixel m est centré par une fenêtre de taille $u \times u$, ensuite leurs patchs correspondants sont calculés à l'aide de l'équation 3.8. L'adaptation de cette

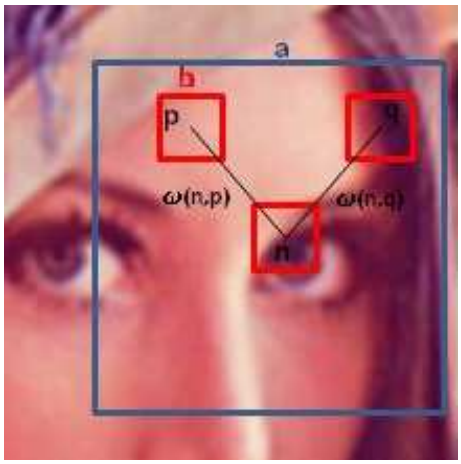


FIGURE 3.14 – Calcul des similarités par la méthode *des moyennes non locales*

stratégie au schéma de régularisation à base de la TOSG nécessite la mise en œuvre d'un processus qui définit l'ordre dans lequel les pixels sont traités. Cet ordre doit respecter les contraintes de structure de l'image. Dans la partie suivante, nous proposons un modèle de régularisation permettant le remplissage par zones de contour.

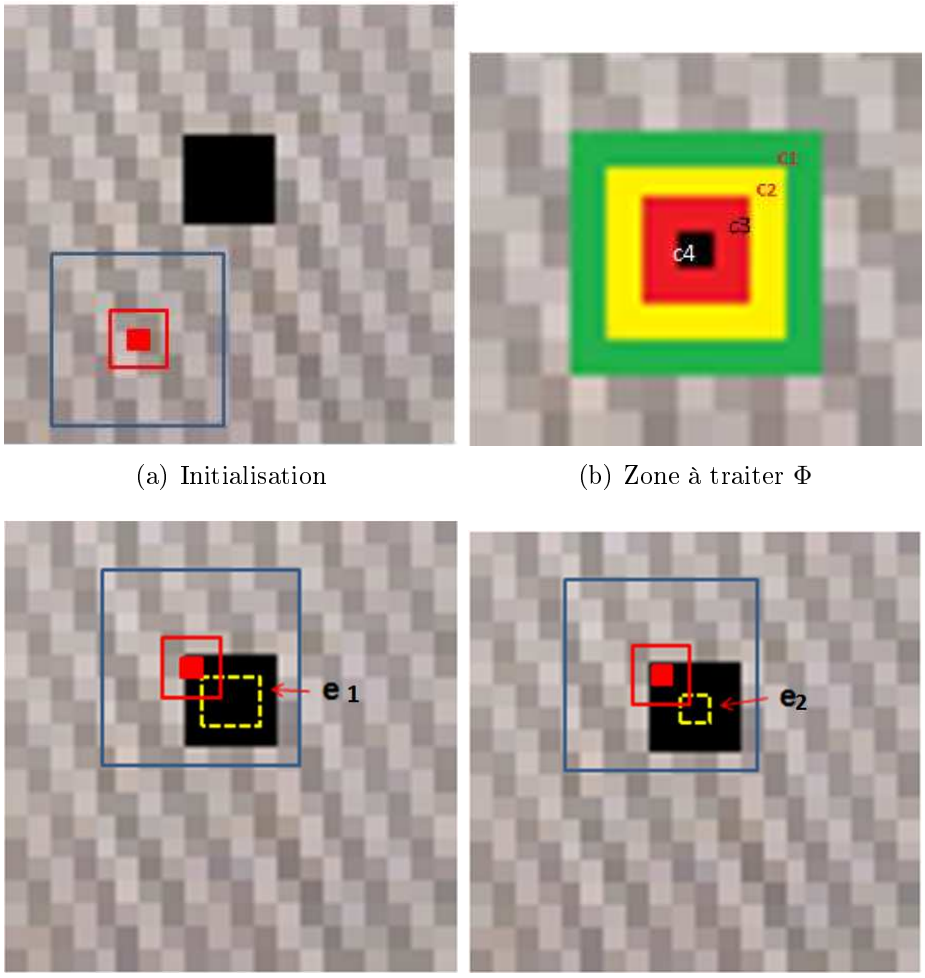
3.4.2 Description d'algorithme

Nous prenons une partie de l'image contenant des informations suffisantes pour estimer les données manquantes. L'idée principale repose sur la reconstruction de la frontière intérieure de la zone manquante, ceci à chaque itération. Ainsi la zone manquante est mise à jour et réduite au fur et à mesure que le nombre d'itérations augmente. Les différentes étapes sont illustrées sur la figure 3.15. La première étape est l'estimation du graphe dans la zone source (non endommagée). Nous considérons une image couleur avec une zone endommagée noté Φ. Avant de commencer le processus d'*inpainting*, nous proposons de calculer le graphe non local sans prendre en considération les pixels manquants (voir figure 3.15(a)). Ensuite, nous devons estimer le graphe de la zone endommagée Φ. Soit c_i

l'ensemble des pixels qui définissent la frontière intérieure de la zone Φ_i à l'itération i. A la fin du processus la zone sera entièrement traitée, cela nous permet d'exprimer Φ comme suit $\Phi = \bigcup_{i=1}^{nb} c_i$ avec nb le nombre total des zones c_i que nous pouvons avoir (voir figure 3.15(b)). La détection des zones c_i peut être effectuée à l'aide des techniques de détection de contours classiques. Nous posons $e_i = \bigcup_{k=1}^{i} c_k$ l'ensemble des pixels à traiter à chaque itération i. Le graphe non local est mis à jour à chaque itération, en ajoutant la structure non locale associée à l'ensemble e_i. La figure 3.15(c) illustre la construction du graphe non local à la première itération nous avons $e_1 = c_1$, nous estimons la structure manquante associée à l'ensemble de pixels à traiter à travers la comparaison non locale, nous isolons aussi les autres pixels appartenant à la zone Φ. Puis, nous appliquons la TOSG (voir l'algorithme 2) sur l'image couleur en fixant les valeurs des pixels à reconstruire à 0.

Une fois que les pixels de la zone e_i sont traités, ils sont considérés comme des éléments connus. Le processus se poursuit en passant à la deuxième itération, l'ensemble des pixels à traiter devient alors $e_2 = c_1 \cup c_2$. Au fur et à mesure que le processus avance, les pixels changent de valeur jusqu'à ce qu'ils convergent. Le nombre total d'itération dépend de la taille de la zone Φ.

Le choix des patchs est un paramètre important, par exemple, ils doivent être suffisamment larges afin d'effectuer une comparaison cohérente des caractéristiques. Ce travail se distingue de la littérature par l'utilisation des caractéristiques de voisinage dans un schéma de régularisation à base dondelettes sur graphe. Nous souhaitons souligner que cette approche traite mieux l'information couleur contrairement à une approche marginale car nous n'avons en principe qu'une seule structure de graphe appliquée à toutes les composantes couleur. Une version plus globale de cette méthode consiste à mettre à jour le graphe non pas pour un ensemble des pixels mais pour chacun des pixels de la zone endommagée, chaque étape correspondra alors au traitement d'un pixel. Mais des contraintes de calcul font parfois obstacles, notamment pour des zones manquantes étendues. Dans la figure 3.16, nous montrons les résultats de la version globale d'*inpainting* non local à base de la TOSG appliquée sur une image synthétique avec une petite zone à traiter. Nous remarquons que la texture a été reproduite de façon semblable, ce qui prouve que l'algorithme proposé est adaptative à la synthèse d'une texture régulière. Un deuxième exemple est illustré par la figure 3.17, là aussi nous remarquons que notre approche se révèle performante pour la restauration des bords d'une rupture entre deux



(a) Initialisation (b) Zone à traiter Φ

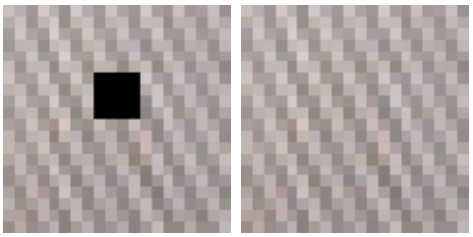
(c) Première étape (d) Deuxième étape

FIGURE 3.15 – Étapes du processus

Entrées : Image f, zone endommagée Φ;
Sorties : Image f reconstruite;
pour tous les $m \in f \backslash \{\Phi\}$ **faire**
  Calculer le graphe non local G;
fin
tant que $e_i \neq \Phi$ **faire**
  pour tous les $m \in e_i$ **faire**
    Calculer le contour c_i;
    Calculer la zone endommagée à traiter $e_i = \bigcup_{k=1}^{i} c_k$;
    Mettre à jour du graphe G;
  fin
  Régulariser avec l'algorithme 1;
fin

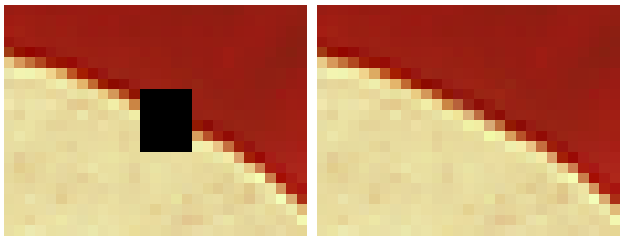
Algorithme 2 : *Inpainting* non local à base de la TOSG

zones homogènes. Dans la majorité des cas, nous avons des zones de taille importante à traiter ce qui limite actuellement l'utilisation de cette version globale.



(a) image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.16 – Approche globale d'*inpainting* non local à base de la TOSG avec $\beta = 20$, $b = 7$ and $a = 13$



(a) image détériorée (b) image reconstruite

FIGURE 3.17 – Approche globale d'*inpainting* non local à base de la TOSG avec $\beta = 100$, $b = 11$ and $a = 15$

Par la suite, nous présentons les résultats d'*inpainting* issus de l'exécution de l'algorithme local.

3.4.3 Résultats

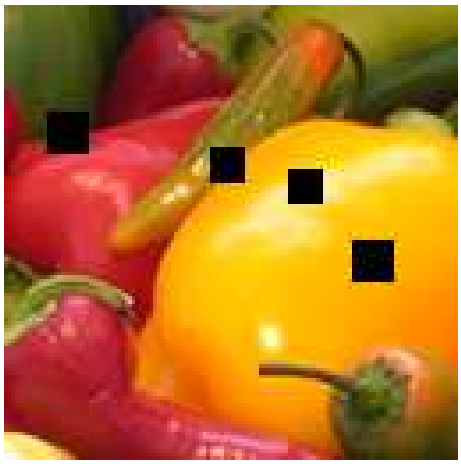
Pour tout les testes expérimentaux présentés dans cette partie, la TOSG et la régularisation sont paramétrées de la façon suivante : le noyau d'ondelettes est de type spline cubique, le nombre d'itération Nb est fixé à 100, le paramètre du seuillage ϑ est fixé à 80. Les valeurs de β, m, a sont choisies de façon empirique. Le nombre d'itération doit être fixé de tel sorte que le résultat obtenu soit le meilleure possible, une valeur très faible ne permet pas un remplissage complet de la zone manquante, par contre, un nombre d'itération trop élevé entraine un phénomène de flou important. Le graphe est construit à l'aide de la méthode *des moyennes non locales*, il est utilisé ensuite par la TOSG appliquée sur chacune des composantes couleurs.

Nous appliquons notre méthode pour réparer l'image détériorée présentée par la figure 3.18(a). La dégradation est introduite sous forme de suppression de certaines zones de l'image. La figure 3.18(b) montre que la méthode permet de reconstruire l'image de manière cohérente. Nous remarquons que les différentes parties sont bien reliées entre

elles, et les ruptures entre les régions couleurs sont bien marquées, ce qui rend le résultat plausible. Par ailleurs, nous n'observons pas l'apparition de fausses couleurs. Il est à souligner aussi l'intérêt de prendre en compte la dimension couleur qui s'effectue à travers la conception d'un seul graphe pour les trois composantes. Dans l'exemple suivant, nous souhaitons supprimer un objet de l'image tout en la gardant signifiante. La figure 3.19(b) montre un résultat satisfaisant. Cette méthode assure la continuité des contours, ce qui permet d'avoir une bonne séparation entre les régions couleur. Toutefois, nous observons que le contour reconstruit n'est pas rehaussé au milieu car la valeur de β dans ce cas est élevée. Nous remarquons également que les régions reconstruites sont lissées ce qui s'explique aussi par le choix de β et la taille des fenêtres. La figure 3.20 montre l'application de notre approche sur l'image *lena*. Nous illustrons ainsi l'influence des paramètres sur le résultat obtenu. Dans la figure 3.20(c), la zones délimitée par le contour supprimé n'a pas pu être correctement propagée à l'intérieur de la zone endommagée. Certaines structures importantes n'ont pas été visiblement conservées. En effet, comme la taille des fenêtres est faible, nous ne pouvons pas prendre en considération suffisamment de voisinage pour restaurer efficacement les zones endommagées. La méthode permet, tout de même, d'aboutir à un résultat acceptable du fait de la conservation de certains détails de la géométrie de l'image. Lorsque nous augmentons la taille des fenêtres, cela améliore le résultat précédent, comme nous pouvons le voir dans la figure 3.20(d). La structure associée au contour s'est clairement propagée à l'intérieur de la zone à traiter, et contrairement au résultat précédent, nous observons ici la continuité de certains détails. Par contre, le résultat pour certain pixel n'a pas convergé vue la taille des fenêtres qui conduit à des caractéristiques non locales très différentes. Cependant, le résultat semble très satisfaisant.

La figure 3.20(e) illustre l'importance du paramètre β ; un choix non optimal de la valeur de $\beta(10)$ ne reflète pas tout à fait les relations de similarités qui existent entre les pixels ce qui interrompe la propagation de l'information. En revanche, une valeur trop élevé de β permet d'avoir un résultat qui correspond à celui obtenu en utilisant une grille régulière. Un dernier exemple est présenté par la figure 3.21. Nous constatons que l'objet a été reconstruit de façon imperceptible, les discontinuités sont bien respectées avec un peu de flou en bas de la zone. Ce résultat est très encourageant et illustre les performances de la méthode d'*inpainting* proposée.

Tout au long de ce manuscrit, nous nous sommes intéressés aux traitements adaptatifs



(a) image détériorée

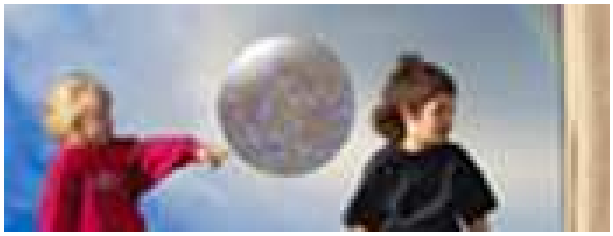


(b) image reconstruite



(c) image d'origine

FIGURE 3.18 – *Inpainting* non local à base de la TOSG



(a) image à traiter



(b) image reconstruite, $\beta = 60, b = 3, a = 7$

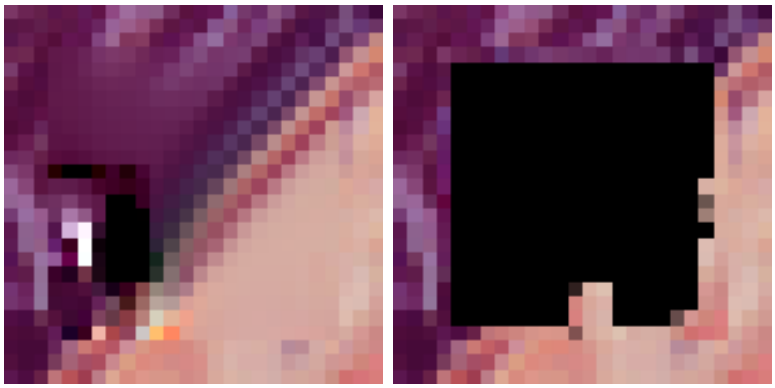
FIGURE 3.19 – *Inpainting* non local à base de la TOSG



(a) image d'origine (b) image détériorée (c) image reconstruite $\beta = 90, b = 5, a = 3$



(d) image reconstruite $\beta = 180, b = 9, a = 7$ (e) image reconstruite $\beta = 10, b = 9, a = 7$ (f) zoom sur(c)



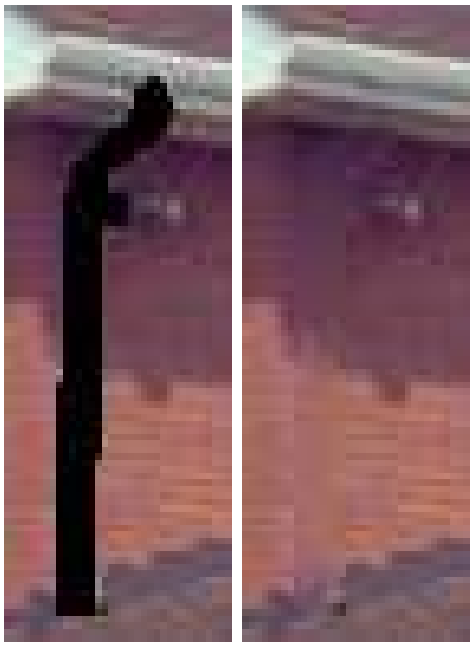
(g) zoom sur (d) (h) zom sur (e)

FIGURE 3.20 – *Inpainting* non local à base de la TOSG

des images couleurs et la prise en compte de la dimension couleur dans l'analyse multi-échelle. Dans la partie suivante, nous proposons l'utilisation d'un graphe perceptuel dans le but d'améliorer la qualité des images couleurs reconstruites.



(a) image d'origine (b) image détériorée (c) image reconstruite $\beta = 160, b = 9, a = 7$



(d) (e)

FIGURE 3.21 – *Inpainting* non local à base de la TOSG

3.4.4 Intégration de la dimension couleur

Dans le chapitre 2, nous avons montré l'intérêt de la représentation de la couleur dans l'espace CIELab, et nous avons vu comment cela peut rendre l'analyse multi-échelle plus adaptative et plus efficace pour des applications de débruitage par rapport à une représentation dans l'espace couleur RVB. Cela nous a motivé à explorer plus l'utilisation et l'exploitation de cet aspect pour l'*inpainting* des images couleurs.

Le but de cette partie est de construire un graphe non local possédant des caractéristiques perceptuelles. De ce point de vue, il convient en priorité d'intégrer une distance perceptuelle pour renforcer la stratégie de construction du graphe.

L'idée est de remplacer la distance euclidienne dans la méthode *des moyennes non locales* par la distance ΔE_{2k} afin de prendre en compte le système visuel humain dans le calcul des similarités entre les pixels d'ou le graphe non local perceptuel. La distance entre deux pixels dans ce cas correspond à la distance visuelle moyenne entre les deux voisinages (patchs) qui leurs sont associés. Toutefois, cette nouvelle approche permet plus de précision dans l'estimation des liens de similarités entre les pixels manquants notamment en comparaison avec une distance euclidienne. En effet, il est évident que la distance perceptuelle est plus adaptée pour mesurer les similarités entre deux couleurs. De plus, ce concept qui considère la méthode *des moyennes non locales* dans l'espace couleur CIELab peut offrir donc plus de performance à la méthode de régularisation proposée car nous savons que les performances de cette dernière dépend de la méthode de construction de graphe employée pour l'estimation de la structure manquante.

Un premier exemple est représenté dans la figure 3.22, il compare le résultat issus d'une régularisation non locale en utilisant un graphe non local perceptuel avec celui d'une régularisation utilisant un graphe non local simple (non perceptuel). Notons que pour les deux approches, les paramètres sont réglés de telle façon que le résultat de reconstruction obtenus soit le meilleur possible. Les résultats sont très similaires, nous pouvons remarquer tout de même que le graphe non local perceptuel 3.22(b) identifie mieux les ruptures entre les régions couleurs homogènes et améliore l'estimation et la continuité des contours. Par contre, les frontières de la zone manquante sont plus visibles par rapport au résultat de la figure 3.22(a).

Dans l'exemple suivant nous traitons une image couleur avec une zone manquante étendue. Dans la figure 3.23(b) cette amélioration est plus apparente et le résultat est nettement meilleur : les ruptures dans ce cas sont rehaussées contrairement au résultat d'un graphe non local simple 3.23(a) qui fait apparaitre un phénomène de flou dans la zone à traiter et qui rend la rupture moins visible.

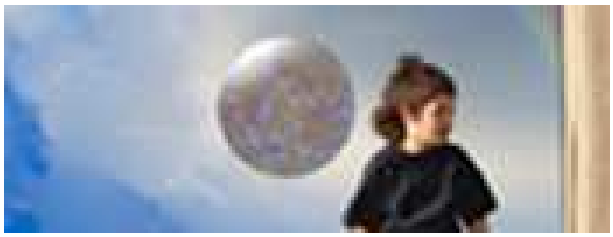
Cette illustration met en évidence la distance visuelle et montre l'avantage d'utiliser cette possibilité pour réduire certaines limites ou défauts relatifs aux approches de restauration classiques.



(a) Reconstruction en utilisant un graphe non local euclidien $\beta = 160, b = 9, a = 7$

(b) Reconstruction en utilisant un graphe non local perceptuel $\beta = 4.5, b = 9, a = 7$

FIGURE 3.22 – comparaison des résultats



(a) Reconstruction en utilisant un graphe non local euclidien$\beta = 60, b = 3, a = 7$



(b) Reconstruction en utilisant un graphe non local perceptuel $\beta = 3.5, b = 3, a = 7$

FIGURE 3.23 – comparaison des résultats

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la possibilité d'étendre le principe de la régularisation à base des coefficients d'ondelettes vers le domaine des graphes. Afin d'atteindre

cet objectif nous avons de nouveau utilisé la TOSG.

Nous avons développé un algorithme d'*inpainting* pour des images couleurs en représentant les données dans le domaine des ondelettes sur graphe. Pour cela, nous avons formulé un problème d'optimisation qui consiste à minimiser une fonctionnelle définie à partir des coefficients d'ondelettes de la TOSG. Nous avons proposé tout d'abord une structure de graphe régulière très simple pour estimer les données manquantes et au vu des résultats limités, nous avons montré que la construction du graphe est une étape d'une importance majeure.

Pour élargir le champ d'application au traitement des structures plus complexes, au lieu d'utiliser des façons simples pour estimer la structure manquante, nous avons calculé un graphe non local que nous avons pris ensuite en compte lors de l'application du processus.

Les résultats ont alors été très prometteurs et très encourageants. Nous soulignons aussi que notre approche ne fait pas apparaitre de fausse couleurs grâce à la construction du graphe non marginale. Notons que cet aspect n'a pas été abordé par les différentes méthodes d'*inpainting* de la littérature. Enfin, l'utilisation d'une distance basée SVH dans la comparaison des patchs améliore notre approche et permet de mettre en évidence les frontières entre les régions homogènes.

Chapitre 4

La décomposition d'un signal sur graphe par l'utilisation d'une structure complète

4.1 Introduction

Comme nous l'avons dit, contrairement aux signaux réguliers, le traitement des signaux sur graphe nécessite explicitement la prise en compte de la structure associée au signal. Dans ce cadre, plusieurs types de signaux peuvent être considérés comme des signaux sur graphe ; ce qui a motivé différents chercheurs à adapter les outils du traitement de signal aux graphes.

Nous avons vu que les transformées en ondelettes sur graphe ont été développées pour traiter des signaux définis sur des structures. Certaines transformées requièrent une étape de simplification telle que la décomposition en nœuds paires et impaires. La notion d'échantillonnage et sur-échantillonnage sur graphe est un élément clé dans la conception de ces transformées, plusieurs auteurs [NO10] [SJV13] [NO12] [TS14a] [TS14b] les ont définies à partir des notions de réduction de graphe. Quant à la notion d'échelle, nous ne trouvons pas son équivalent dans le domaine des graphes si ce n'est une extension qui s'appuie sur la théorie spectrale des graphes. Une application naïve des outils de traitement classique sur des signaux sur graphe n'est pas possible, c'est pourquoi plusieurs chercheurs de l'EPFL [SJV13]et de l'Université de la Californie[NO12], se sont focalisés sur l'extension des éléments nécessaires pour mettre en place une transformée en ondelettes sur graphe

comme nous l'avons vu dans le chapitre 1.

Le travail que nous présentons dans ce chapitre constitue une ouverture de notre travail et pose certaines perspectives. Cette étude consiste à définir une nouvelle approche pour l'analyse des signaux sur graphes. Afin d'atteindre cet objectif, nous nous sommes focalisés sur les propriétés des graphes complets. L'idée initiale associée à un graphe complet, cela veut dire que lors de la construction du graphe, nous prenons en compte tous les liens de similarités possibles. Pour la généralisation à un graphe non orienté quelconque, nous devons *a priori* disposer de toutes les distances qui ont permis d'obtenir les poids liés à ce graphe. La prise en compte d'une structure complète pour la décomposition d'un signal sur graphe présente la particularité de traiter toute l'information et de faciliter les opérations d'analyse et de synthèse, comme nous allons le voir. La mise en place de cette stratégie nécessite l'utilisation des fonctions de poids bien définies qui servent aussi à la décomposition du graphe complet en plusieurs sous-graphes.

Par la suite, nous développons en détail notre méthode de décomposition et nous illustrons son comportement sur un signal et une image couleur.

4.2 La décomposition à l'appariement parfait (perfect matching decomposition)

4.2.1 Principe de la décomposition d'un graphe complet G

Soit V un ensemble d'éléments de dimension N. La représentation de cet ensemble à travers un graphe complet $G = (V, E, w)$ constitue notre point de départ. Rappelons qu'en théorie de graphes, un graphe complet établit toutes les liaisons possibles entre les sommets du graphe. La figure 4.1 illustre un graphe complet avec 5 sommets. Dans notre étude, nous considérons que le graphe complet possède des sommets à égales distances, en d'autre termes, nous affectons à chaque arête un poids à valeur unitaire. Nous souhaitons dans cette étape décomposer le graphe G en k sous graphes différents notés $G_i = (V_i, E_i, w_i)$ avec $i \in 1, \cdots k$. Pour cela, nous pouvons procéder de la façon la plus simple possible qui consiste à décomposer le graphe G de tel sorte que la somme des poids des sous graphes $w_i(m, n)$ associés à l'arête (m, n) soit égale à la valeur du poids de l'arête (m, n) dans le graphe G, ce qui s'exprime par la relation suivante :

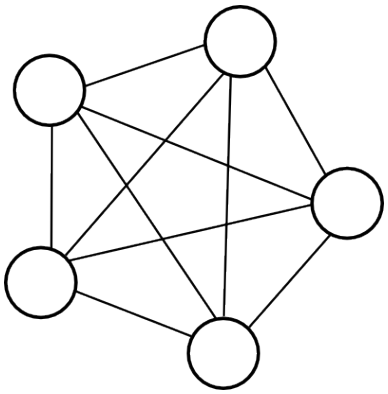


FIGURE 4.1 – Graphe complet à 5 sommets

$$\sum_{i=1}^{k} w_i(m,n) = w(m,n) = 1, \tag{4.1}$$

ou alors par :

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} w_i(m,n) \text{ si } (m,n) \in E \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{4.2}$$

avec $\mathbf{A}$ la matrice de poids liée à G.

Les valeurs de poids w_i peuvent être déterminées en fonction de la mesure de distance :

$$w_i(m,n) = Z_i(\mu_{m,n}), \tag{4.3}$$

Z_i et μ désignent respectivement la fonction de poids et la distance. Soulignons que cette étape est déterminante pour assurer la décomposition d'un signal sur graphe.

De cette expression, nous introduisons les relations entre grandeurs issues de la décomposition en sous-graphes avec la relation entre les matrices de degrés :

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{D}_i, \tag{4.4}$$

avec

$$\mathbf{D}_{m,n} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} \sum_{m \sim n} w_i(m,n) = N-1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \tag{4.5}$$

La matrice laplacienne est définie par :

$$L = D - A = \sum_{i=1}^{k} D_i - \sum_{i=1}^{k} A_i = \sum_{i=1}^{k} L_i, \tag{4.6}$$

avec

$$\mathbf{L}_{m,n} = \begin{cases} N-1 \text{ si } m = n \\ -1 \text{ ailleurs.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Cette matrice peut s'écrire aussi comme suit :

$$L = NI_N - H, \tag{4.8}$$

avec $H(m,n) = 1$, $\forall m, n$ et I_N la matrice identité.

4.2.2 Propriétés de la matrice Laplacienne d'un graphe complet

La multiplication de la matrice L par un signal sur graphe $f \in \mathbb{R}^N$ donne le résultat suivant :

$$Lf = Nf - Hf, \tag{4.9}$$

$$f = \frac{Lf}{N} + \frac{Hf}{N}, \tag{4.10}$$

$$f = \frac{Lf}{N} + \bar{f}. \tag{4.11}$$

La notation $\bar{f} = \frac{f}{N}$ désigne la moyenne de f.

Nous constatons que la multiplication de la matrice laplacienne liée à un graphe complet par un signal sur graphe quelconque correspond à la différence entre ce signal et sa composante continue. Nous verrons après comment nous pouvons utiliser cette propriété pour mettre en place une stratégie de décomposition sur graphe.

Une autre propriété intéressante est issue de la relation précédente, il s'agit de multi-

plier la matrice L par une matrice laplacienne quelconque $\mathcal{L}$ de même dimension. Nous avons alors :

$$L = NI_N - H, \tag{4.12}$$

$$L\ \mathcal{L} = N\ \mathcal{L} - H\ \mathcal{L}, \tag{4.13}$$

$$L\ \mathcal{L} = N\ \mathcal{L}. \tag{4.14}$$

Cette expression est valable quelque soit la matrice Laplacienne $\mathcal{L}$ ayant la même dimension que L. En effet, sa moyenne est, par définition, toujours nulle (voir les propriétés de la matrice laplacienne dans la section1.3.1).

Soit E l'ensemble des matrices d'ordre N et de moyenne nulle, la matrice $\frac{L}{N}$, associée à un graphe complet à N sommets, constitue l'élément neutre de la multiplication (produit matriciel) pour cet ensemble. Notons que cette opération peut être considérée comme une loi interne puisque le produit matriciel de deux éléments dans E donne une matrice carrée de moyenne nulle.

4.2.3 La détermination des fonctions de poids Z_i

Les fonctions Z_i, associées à la voie i, permettent de déterminer les poids A_i et les matrices L_i. L'unique condition dont nous disposons consiste à trouver des fonctions Z_i vérifiant l'équation 4.3. La solution qui peut nous venir à l'esprit consiste à utiliser la relation trigonométrique classique : $\sin^2(\frac{\pi}{T}x) + \cos^2(\frac{\pi}{T}x) = 1$, avec T la période. Notons que la variable réelle x dans notre cas doit dépendre de la mesure de distance μ_{mn} définie pour chaque arête (m, n), nous posons $0 \leq \mu \leq \mu_{max}$. Nous pouvons remarquer que les fonctions $\sin^2(\frac{\pi}{T}x)$ et $\cos^2(\frac{\pi}{T}x)$ correspondent à l'apparition régulière successive chaque période d'une fonction élémentaire définie le long d'une période T, il convient alors de choisir les fonctions Z_i selon la localisation de cette fonction élémentaire. Ce concept découle logiquement de l'idée voulant que le domaine de distance soit réparti de la façon la plus équitable possible. Nous proposons que la fonction Z_i s'écrive sous la forme suivante :

$$Z_i(\mu) = \cos^2(\phi - (i-1)\frac{\pi}{2})\Pi_\pi(\phi - (i-1)\frac{\pi}{2}), \tag{4.15}$$

avec $\phi = \frac{\pi}{T}\mu > 0$ et $\Pi_T = 1_{[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}]}$ est la fonction indicatrice entre $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$.

Nous proposons que la valeur de la période dépende de la distance maximale et du nombre totale des sous-graphes.

$$T = \frac{2}{k-1}\mu_{max}. \tag{4.16}$$

La figure 4.2 illustre le principe du modèle de fonction de poids proposé de l'équation 4.15. Elle représente l'allure de toutes les fonctions Z_i. Nous retrouvons le principe que l'on a dans les transformées par fenêtrages, simplement dans ce cas le fenêtrage s'applique sur les distances. D'après la formule 4.16, pour une distance maximale $\mu_{max} = 200$ et un nombre de voies $k = 11$, la période T est égale à 40. Chacune des voies i est associée à sa fonction de poids Z_i, nous remarquons également que ces fonctions apparaissent à chaque demi période. Les fonctions Z_1 et Z_{11} occupent la moitié du support. En effet, la distance est positive et calculée sur un ensemble fini.

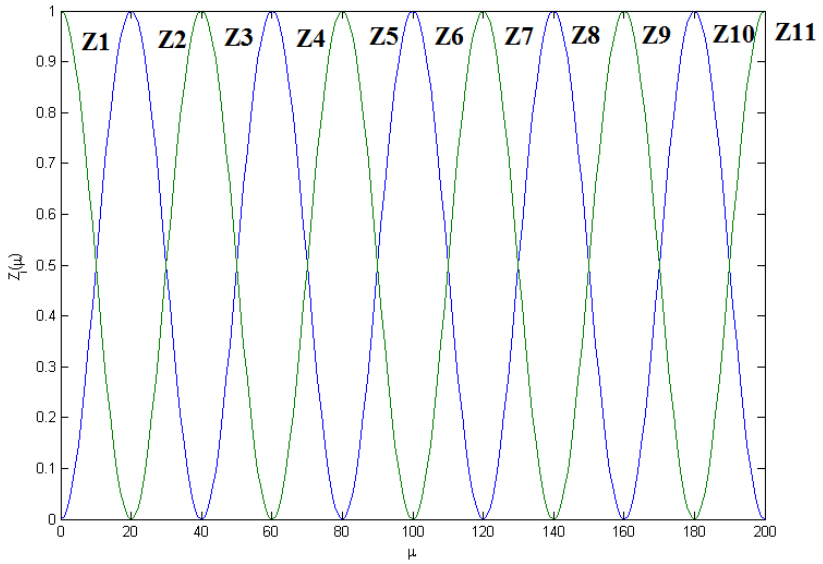


FIGURE 4.2 – Modèle de fonction de poids

4.2.4 Schéma de décomposition de la PMD

Nous avons vu précédemment, le principe de la décomposition d'un graphe complet G en plusieurs sous graphes G_i. Nous allons maintenant voir comment décomposer un signal défini sur le graphe G. Pour cela, nous proposons de calculer les coefficients sur chaque

voie i, par la relation suivante :

$$g_i = L_i f, \tag{4.17}$$

avec $L_i = D_i - A_i$, f le signal sur graphe à décomposer. g_i représente les coefficients de la décomposition liés au sous graphe G_i ayant la matrice de poids A_i. Ainsi, la PMD permet une décomposition à k voies de traitement indépendantes.

La figure 4.3 montre le schéma de décomposition d'un signal défini sur un graphe complet.

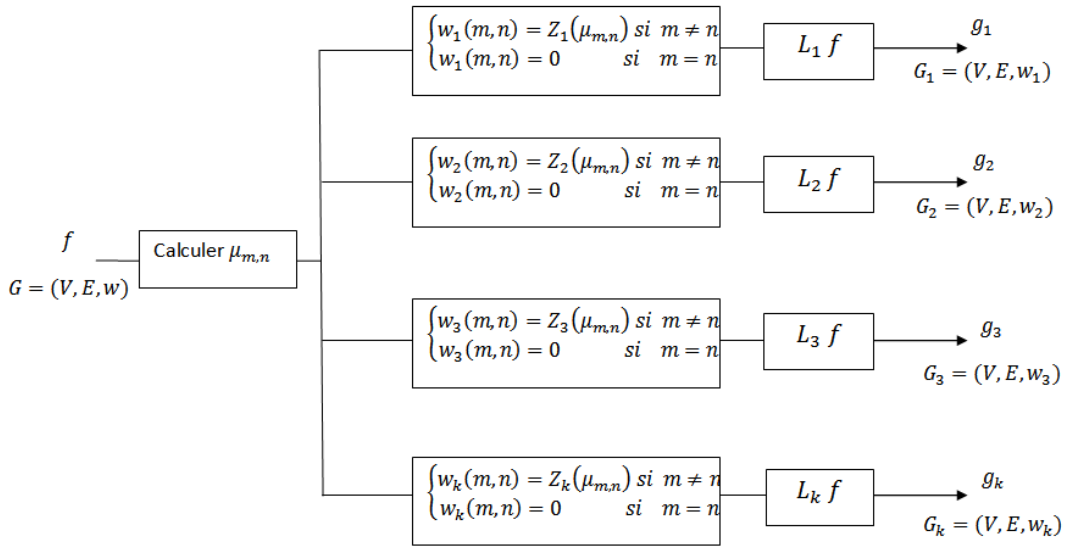


FIGURE 4.3 – Schéma de décomposition

L'algorithme 3 montre le schéma numérique de la PMD. Nous remarquons que l'implémentation numérique de la PMD est très simple. En effet, cela revient à trier les différentes distances entre nœuds.

4.2.5 Reconstruction

La PMD est reconstructible, autrement dit, nous pouvons exprimer le signal d'origine en fonction des coefficients de la PMD. Nous avons :

$$Lf = \sum_{i=1}^{k} L_i f, \tag{4.18}$$

Entrées : Signal f, nombre de voies k;
Sorties : Décomposition g_i;
pour tous les $(m,n) \in E$ **faire**
  Calculer $\mu_{m,n}$;
fin
Calculer μ_{max};
$T \leftarrow \frac{2}{k-1}\mu_{max}$;
pour $i \leftarrow 1$ *à* k **faire**
  $\phi_{m,n} \leftarrow \frac{\pi}{T}\mu_{m,n}$;
  si $(i-2)\frac{\pi}{2} \leq \phi_{m,n} \leq i\frac{\pi}{2}$ **alors**
    $w_i(m,n) \leftarrow \cos^2(\phi - (i-1)\frac{\pi}{2})$;
  sinon
    $w_i(m,n) \leftarrow 0$;
  fin
  Calculer A_i;
  $L_i \leftarrow D_i - A_i$;
  $g_i \leftarrow L_i f$;
fin

Algorithme 3 : Schéma numérique de la décomposition.

Si nous remplaçons l'équation 4.18 dans 4.11, nous obtenons :

$$f = \frac{\sum_{i=1}^{k} g_i}{N} + \bar{f}. \tag{4.19}$$

A partir de la relation 4.19, nous constatons que le signal d'origine peut être parfaitement reconstitué en additionnant les coefficients obtenus sur chacune des voies de la PMD. La valeur de $\bar{f}$ est nécessaire pour avoir une reconstruction parfaite, elle doit être stockée lors de la décomposition du signal sur graphe f. De nouveau nous obtenons un principe similaire aux décompositions par fenêtrage, où la synthèse consiste simplement à additionner les différentes projections (cf algorithme 4).

Entrées : Décomposition g_i, la valeur moyenne du signal $\bar{f}$;
Sorties : Signal f, nombre de voies k;
$f \leftarrow 0$;
pour $i \leftarrow 1$ *à* k **faire**
  $f \leftarrow f + g_i$;
fin
$f \leftarrow \frac{f}{N} + \bar{f}$;

Algorithme 4 : Schéma numérique de la reconstruction.

4.3 Illustration

Dans cette section, nous illustrons notre approche sur différents types de données et nous montrons l'influence de la mesure de distance sur son comportement.

4.3.1 Application de la PMD sur un signal 1D

Nous commençons nos expérimentations par l'application de la PMD sur un signal porte noté f. Nous fixons le nombre de canaux $k = 6$ et nous utilisons la distance spatiale $\mu = |x_m - x_n|$ pour la construction des sous-graphes. Notons que les opérateurs correspondants L_i sont appliqués sur le signal à traiter f.

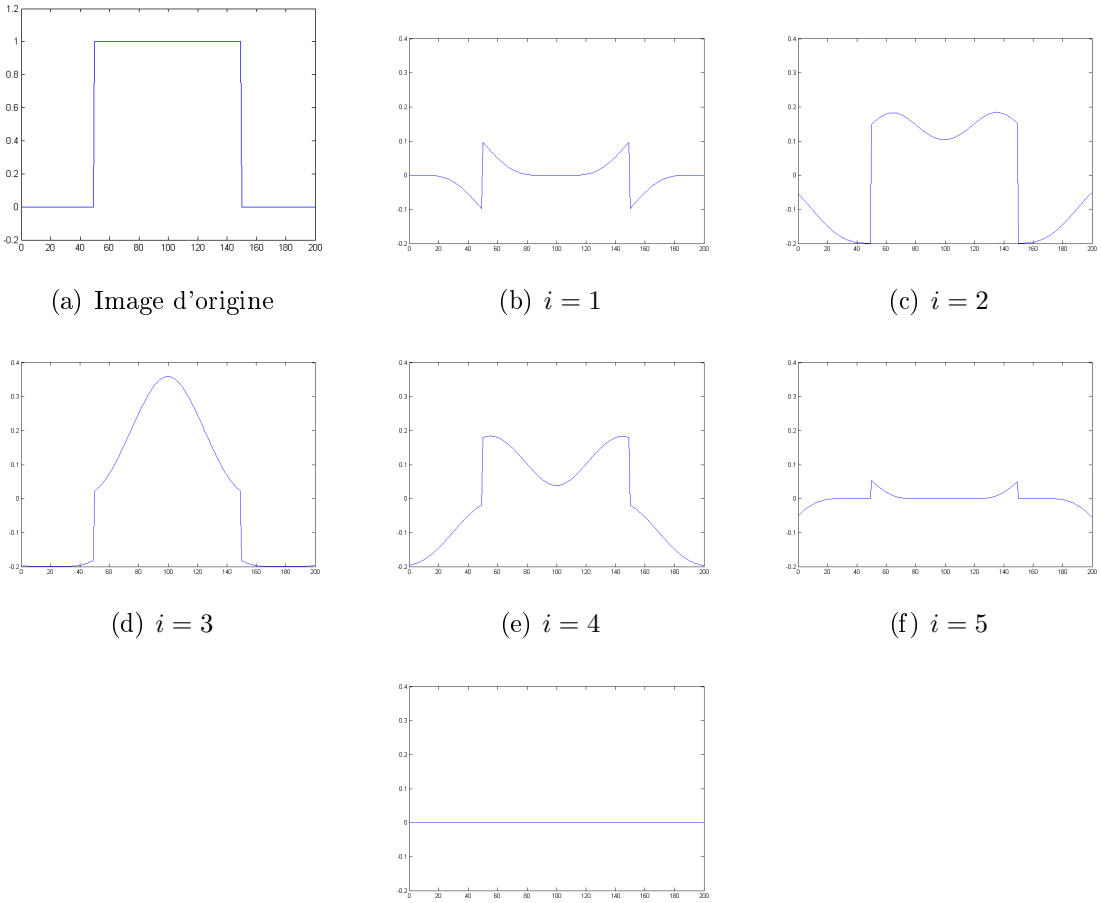
La figure 4.4 montre le résultat obtenu sur différentes voies i, nous remarquons que l'identification des singularités se fait bien sur certaines voies notamment pour $i = 1, 4, 5$. Pour $i = 2, 3$, nous obtenons un résultat qui s'approche d'une version lissée du signal d'origine, tandis que pour $i = 6$, le résultat est nul parce que les coefficients non nuls de Z_6 se situent à l'extérieur et ne sont pas pris en compte lors des opérations de décomposition. Nous montrons un deuxième exemple dans la figure 4.5. La PMD est appliquée sur un signal triangle pour un nombre de voies $k = 7$. Sur les voies $i = 2, 3, 4$, nous obtenons une représentation très proche de celle du signal d'origine avec une déformation sur la voie $i = 4$. Par ailleurs, nous obtenons des détails liés au signal d'origine, en particulier, les singularités sont identifiées de façon plus précise et plus fine sur la voie $i = 1$.

4.3.2 Application de la PMD sur une image

Nous proposons dans cette partie des exemples d'application de la PMD sur une image couleur et nous étudions l'influence de la distance choisie sur le résultat obtenu.

4.3.2.1 Utilisation d'une distance spatiale

Nous évaluons les performances de notre méthode à travers l'application de la PMD sur une image couleur en utilisant une distance spatiale. La construction des sous-graphes ne prend alors pas en compte la dimension vectorielle ni l'aspect géométrique des données mais dépend uniquement de leur organisation spatiale supposée uniforme. La figure 4.6 montre les limites de cette approche linéaire qui échoue dans l'identification des spécificités liées à l'image et produit en particulier un phénomène indésirable dans le résultat associé



(a) Image d'origine (b) $i = 1$ (c) $i = 2$

(d) $i = 3$ (e) $i = 4$ (f) $i = 5$

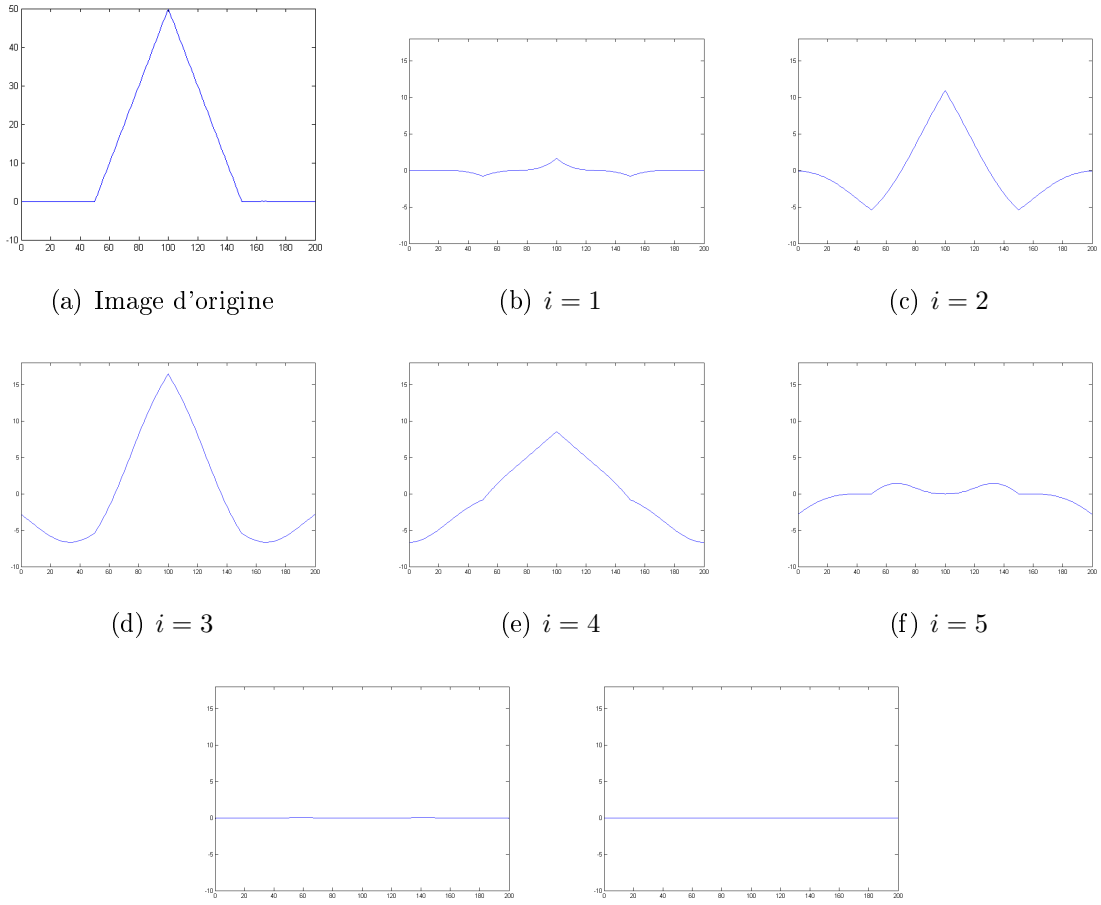
(g) $i = 6$

FIGURE 4.4 – Application de la PMD sur un signal 1D, $\mu = |x_m - x_n|$, $k = 6$.

aux voies $i = 4, 5$. En effet, ce phénomène évolue depuis le centre de l'image de manière omnidirectionnelle suivant les voies de l'analyse et s'accentue de façon considérable lorsque nous nous approchons de la voie $i = k$. Dans le contexte des graphes, le nombre d'éléments à traiter est fini, ce qui empêche de prendre en considération la totalité de la fonction Z_i qui possède son spectre en dehors du domaine de définition lié à l'ensemble des données. C'est pourquoi, par exemple, ce phénomène est particulièrement aigu dans le centre de l'image. Les régions non affectées correspondent à des pixels pour lesquelles la fonction Z_i n'est pas nulle en totalité.

4.3.2.2 Utilisation d'une distance euclidienne

Dans la figure 4.7, nous montrons le résultat d'application de l'approche non linéaire sur la même image. La mesure de distance est une distance euclidienne définie dans l'espace (x,y,R,G,B). Les images obtenues dans les voies $i = 3, 4$ sont proches d'une analyse de



(a) Image d'origine (b) $i = 1$ (c) $i = 2$

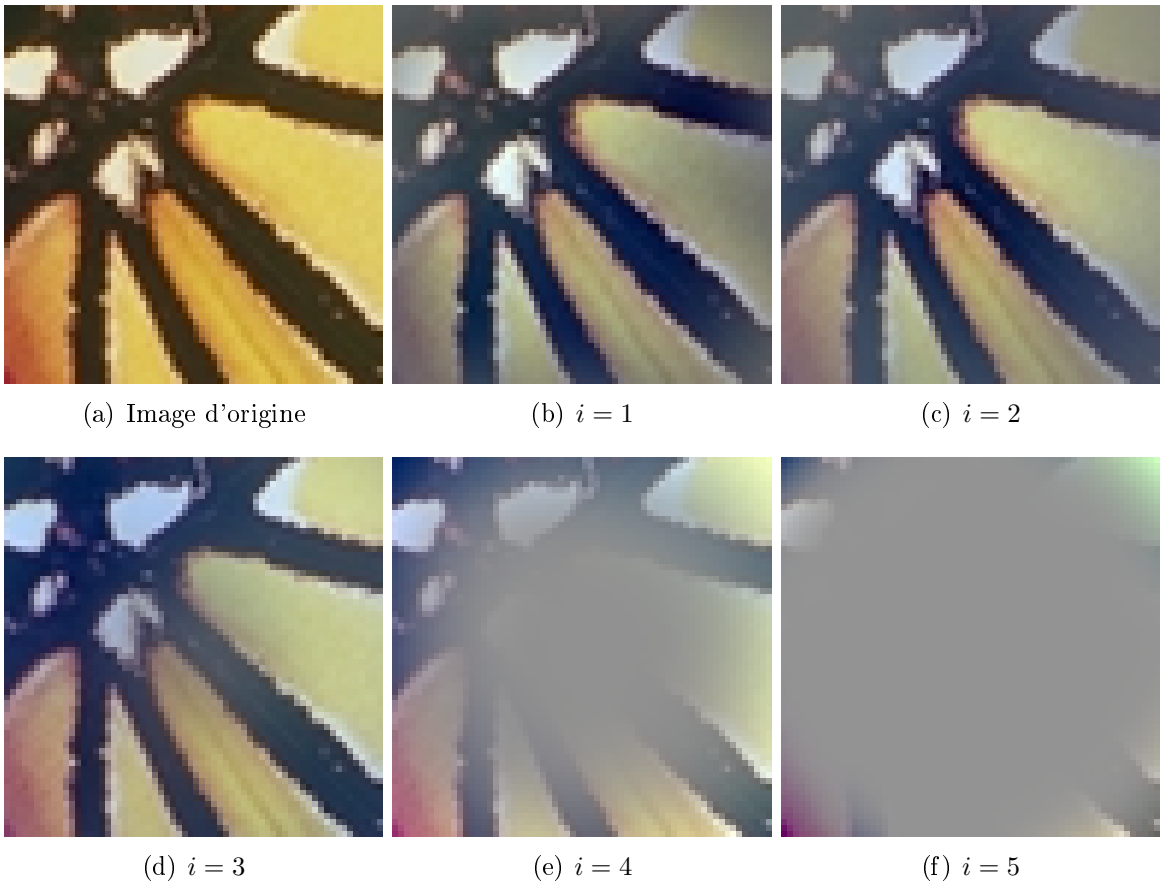
(d) $i = 3$ (e) $i = 4$ (f) $i = 5$

(g) $i = 6$ (h) $i = 7$

FIGURE 4.5 – Application de la PMD sur un signal 1D, $\mu = |x_m - x_n|$, $k = 7$.

type passe-bas tandis que les détails sont présentés sur les autres canaux. Numériquement, le résultat obtenu sur la voie $i = 1$, correspond au signal d'origine auquel nous soustrayons le résultat d'un filtrage non linéaire. Ce filtre correspond à une fonction non symétrique et dont le support dépend du voisinage lié au pixel central (pixel à traiter). Pour $i \neq 1$, la projection obtient des coefficients non nuls répartis autour des pixels dont la distance euclidienne qui les sépare du pixel central est égale à $(i-1)\frac{T}{2}$. De ce fait, les coefficients du filtre sont nuls dans le voisinage du pixel central, ce qui constitue une zone à valeurs nulles, qui s'étend au fur et à mesure que i augmente. Contrairement à l'approche linéaire, la conception des sous-graphes ici prend en compte des caractéristiques spécifiques à l'image à traiter notamment la structure géométrique et l'information couleur.

Cette approche de décomposition permet de fournir des informations importantes sur le signal à traiter. Cependant, lorsque nous travaillons dans le domaine des graphes, l'interprétation du résultat obtenu sur chaque voie reste difficile. Dans le but de comprendre



(a) Image d'origine (b) $i = 1$ (c) $i = 2$

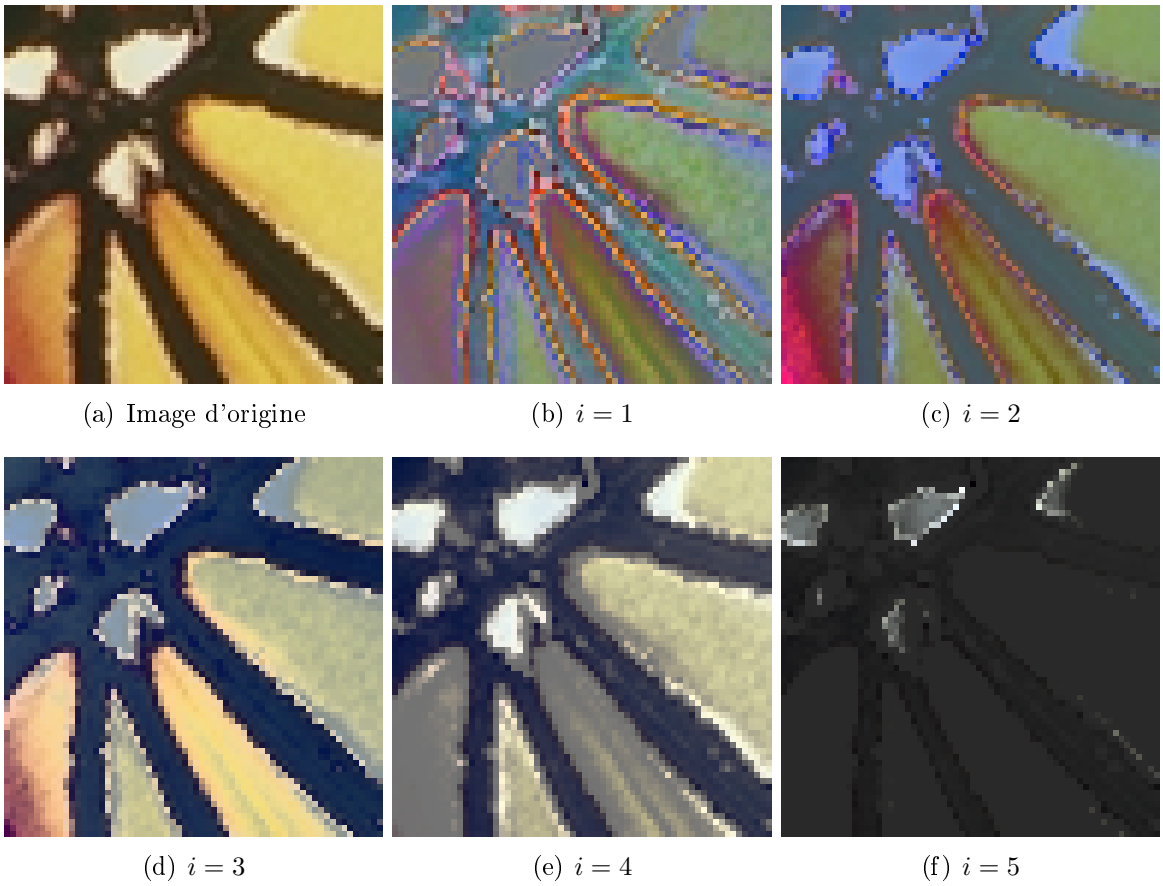
(d) $i = 3$ (e) $i = 4$ (f) $i = 5$

FIGURE 4.6 – Application de la PMD sur une image couleur, $\mu = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$, $k = 5$.

le comportement de la PMD, l'une des possibilités qui se présentent est d'étudier son extension dans le cas continu. Il s'agit de trouver une formulation plus générale qui utilise des opérations de traitements classiques.

4.4 Conclusion

Nous avons proposé un modèle de décomposition destiné à l'analyse et au traitement des signaux sur graphes. Ce modèle se fonde sur l'utilisation d'un graphe complet et nécessite la connaissance préalable de toutes les distances possibles. L'idée est d'avoir une décomposition qui dépend de la notion de distance entre nœuds. Pour pouvoir décomposer un graphe complet en différents sous-graphes, nous avons appliqué des fonctions de poids dont la somme vaut toujours 1. Nous avons illustré la représentation à travers l'application sur un signal 1D et une image couleur. Nous constatons que, si nous utilisons une mesure de distance adaptée, cette méthode permet de détecter les singularités du signal sur graphe.



(a) Image d'origine (b) $i = 1$ (c) $i = 2$

(d) $i = 3$ (e) $i = 4$ (f) $i = 5$

FIGURE 4.7 – Application de la PMD sur une image couleur en utilisant une distance euclidienne, $k = 5$.

Ce chapitre constitue une première étape dans l'expression d'une transformée fenêtrée sur graphe. Un travail d'analyse des propriétés de cette représentation est dorénavant nécessaire.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce manuscrit, nous nous sommes intéressés à la définition des outils d'analyse sur graphe pour des images couleurs. Afin de répondre à ce besoin, nous avons déployé trois stratégies d'analyse différentes.

Dans la première stratégie, nous avons proposé un outil pour l'analyse des images couleurs basé sur l'utilisation de la transformée en ondelettes spectrale sur graphe et un graphe perceptuel. Pour avoir une bonne modélisation, nous nous sommes basés sur la prise en compte des spécificités liées à l'image à savoir la géométrie et la couleur. De ce fait, nous avons défini des relations de voisinage en se basant sur le concept de la distance géodésique et la distance colorimétrique visuelle. Nous avons vu que cela revient à définir des distances partielles correspondant à une fusion entre une distance spatiale et une distance couleur. Dans notre approche, nous avons défini la distance couleur à partir de la distance ΔE_{2k}. L'analyse se fait par l'application de la TOSG sur chacune des composantes couleurs. L'influence du graphe sur le résultat de cette décomposition n'a pas été abordée dans la littérature. Toutefois, nous avons constaté que l'utilisation de la forme quadratique pour mesurer la distribution de l'énergie suivant les échelles, permet d'expliquer ce phénomène. Pour évaluer les performances de notre approche, nous l'avons testé dans le débruitage d'image. Les résultats obtenus sont prometteurs et mettent en évidence l'utilisation du système visuel humain dans l'analyse des images couleurs. Nous avons vu que l'amélioration de l'estimation du graphe peut apporter plus de robustesse à notre stratégie avec un graphe perceptuel.

Notre deuxième stratégie consiste à développer une méthode d'inpainting pour des images couleurs basée sur l'utilisation des coefficients d'ondelettes de la TOSG et permettant le remplissage par zones de contour. L'estimation des données manquantes se fait à l'aide d'un graphe des patchs couleurs construit à partir *des moyennes non locales*. Tout d'abord nous nous sommes intéressés à la résolution d'un problème d'optimisation ayant comme critère la norme *l1* des coefficients de la TOSG. Pour cela, nous avons mis

en place un schéma de régularisation basé sur un seuillage itératif des coefficients de la TOSG et dépend de l'estimation des données manquantes. Le calcul du graphe se fait à l'aide de la méthode *des moyennes non locales*. Pour la comparaison des patchs couleurs, deux notions de distances sont considérée : la distance euclidienne dans l'espace **RVB** et la distance ΔE_{2k}. A chaque itération, la frontière intérieure de la zone manquante est reconstruite. La zone manquante est mise à jour et réduite au fur et à mesure que le nombre d'itération augmente. Les résultats obtenus avec une distance euclidienne sont satisfaisants et la méthode se révèle performante pour la restauration des bords d'une rupture entre deux zones homogènes. Lorsque les zones manquantes sont étendues, la distance euclidienne devient moins adaptée pour l'estimation des données manquantes. Cela provoque des problèmes de convergences ou des phénomènes de flou. Nous avons vu que l'utilisation d'une distance visuelle permet d'améliorer les résultats et s'adapte à la reconstruction des zones étendues.

L'avantage par rapport à l'approche avec des ondelettes classiques est que le graphe offre plus de souplesse dans l'estimation des données manquantes. Nous avons montré qu'une estimation faite à partir de l'image originale permet de reproduire des détails importants de la zone manquante, ce qui montre que le résultat de reconstruction dépend des données estimées. Notre méthode proposée évite les problèmes souvent rencontrés dans les approches marginales et met en évidence l'utilisation du SVH.

Dans la troisième stratégie, nous proposons une nouvelle approche de décomposition d'un signal défini sur un graphe complet. L'idée principale est de décomposer le graphe complet en k sous-graphes distincts G_i. Leurs poids sont calculées en fonction des distances entre nœuds. Le résultat de la décomposition sur chaque voie i est obtenu par le produit entre la matrice laplacienne L_i associée au sous-graphe G_i et le signal sur graphe. La reconstruction du signal d'origine correspond à la somme de tous les coefficients de la décomposition. Le résultat de la décomposition dépend de la mesure de distance, et l'utilisation d'une distance spatiale ne permet pas d'extraire des informations importantes du signal. Par contre, l'utilisation d'une distance euclidienne permet d'identifier les singularités liées aux signal à traiter. De manière générale, pour pouvoir extraire des informations importantes du signal, nous devons choisir une mesure de distance adaptée. Nous pouvons choisir par exemple une distance géodésique ou une distance visuelle pour l'application à des images couleurs. Dans le contexte des images couleurs, la prise en compte de la

dimension couleur est indispensable pour pouvoir identifier les singularités liées à l'image. L'implémentation numérique de cette méthode est très simple. Contrairement à d'autres modèles, notre approche utilise toutes les distances possibles et ne provoque pas des pertes d'information lors de la décomposition du graphe.

L'extension à des ensembles infinies nous a permis de trouver une forme plus générale de la décomposition et nous a donné une idée sur l'information obtenue sur chaque voie.

A travers notre étude, nous avons montré l'intérêt de la prise en compte de la dimension couleur dans l'analyse multi-échelle sur graphe. Dans des applications de débruitage d'images couleurs, l'utilisation d'un graphe perceptuel permet une meilleure conservation des discontinuités entre les régions couleurs. Dans le cas d'inpainting, nous obtenons une meilleure reconstruction des discontinuités entre les régions couleurs. Dans l'analyse des images à travers la PMD, la dimension couleur est indispensable pour l'extraction des informations importantes dans une image.

Ce travail suscite beaucoup d'intérêt et permet d'ouvrir des perspectives pour la prise en compte du SVH dans l'analyse des images couleurs.

Dans le premier travail, nous n'avons pas pris en compte la normalisation des deux mesures de distances spatiale et couleur. L'utilisation d'une métrique dans le calcul de distance permettrait d'améliorer notre stratégie de débruitage.

L'étude de l'influence des différents paramètres liés à la construction du graphe, tel que la valeur σ et la taille de la fenêtre des distance géodésiques, sur le résultat du débruitage pourrait être envisagée afin de définir un paramétrage approprié, ce qui permettrait aussi de simplifier la mise en œuvre de la méthode.

Nous envisageons d'appliquer notre première stratégie dans le traitement des images multi-spectrales du fait qu'elle prend en considération la dimension vectorielle. Notamment, elle peut être utilisée pour coder les signatures associées à certains objets. Dans ce cadre, plusieurs distances peuvent être testées.

L'amélioration de l'estimation des données manquantes, dans notre méthode d'inpainting, permettrait d'éviter les problèmes de convergences. Une piste envisageable serait d'utiliser une comparaison des patchs locale et non locale avec des valeurs de σ prédéfinies. Quelque l'issue soit elle, une sélection appropriée des paramètres tel que la taille des patchs, la taille des fenêtres de recherches et la valeur de σ devrait simplifier l'application de notre méthode et permettrait de la rendre plus efficace.

Il semble aussi que la méthode d'inpainting proposée pourrait s'adapter à la correction des erreurs qui surgissent lors de l'acquisition des images multi-spectrales. Ainsi, plusieurs distances spectrales peuvent être utilisées dans la comparaison des patchs.

Remplacer la distance euclidienne par une distance visuelle dans la méthode standard *des moyennes non locales* permettrait d'améliorer les résultats du débruitage.

La méthode de décomposition proposée offre de nouvelles perspectives pour une étude approfondie de son comportement et pour son utilisation dans des problèmes de restauration et de classification de la texture. L'analyse des informations obtenues sur chaque voie peut être étudiée d'une façon plus approfondie. Une étude des caractéristiques des filtres semble envisageable pour interpréter les résultats de manière appropriée.

Annexe A

Vers une décomposition à l'appariement parfait continue

A.1 Interprétation des résultats : vers une décomposition à l'appariement parfait continue

Nous donnons maintenant une interprétation plus large aux opérateurs laplacien à différentes voies L_i. L'application de tel opérateur sur un signal sur graphe représenté par un vecteur f donne le résultat suivant :

$$(Lf)(m) = \sum_{n \sim m} w(m,n)(f(m) - f(n)), \tag{A.1}$$

$$(Lf)(m) = f(m) \sum_{n \sim m} w(m,n) - \sum_{n \sim m} w(m,n) f(n), \tag{A.2}$$

Pour chacune des voies d'indice i, cela peut s'écrire comme suit :

$$(L_i f)(m) = f(m) \sum_{n \neq m} Z_i(m,n) - \sum_{n \neq m} Z_i(m,n) f(n), \tag{A.3}$$

$$(L_i f)(m) = f(m) \sum_{n \in V} Z_i(m,n) - \sum_{n \in V} Z_i(m,n) f(n), \tag{A.4}$$

Nous avons vu que la fonction Z_i dépend essentiellement de la mesure de distance μ, ce qui rend son interprétation assez difficile. Toutefois, afin de faciliter ce travail, nous étudions un cas très simple en considérant les coordonnées spatiales, nous posons : $\mu_{m,n} = |x_m - x_n|$ (dans le cas 1D), puis nous généralisons le résultat pour d'autres espaces plus étendus.

La relation ?? devient alors :

$$Z_i(m,n) = \cos^2(\frac{\pi}{T}|x_m - x_n| - (i-1)\frac{\pi}{2})\Pi_\pi(\frac{\pi}{T}|x_m - x_n| - (i-1)\frac{\pi}{2}), \tag{A.5}$$

ce qui peut aussi se présenter sous cette forme simplifiée :

$$Z_i(m,n) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(x_n - x_m) - (i-1)\frac{\pi}{2}\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(x_n - x_m) - (i-1)\frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x_n \geq x_m \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(x_n - x_m) + (i-1)\frac{\pi}{2}\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(x_n - x_m) + (i-1)\frac{\pi}{2}\right) & \text{sinon} \end{cases} \tag{A.6}$$

Les figures A.1, A.2 et A.3 illustrent respectivement les variations de Z_i pour $i = 1, 2, 3$. Dans le premier cas, nous avons une fonction symétrique et positive à support borné dont la longueur est égale à T, elle est centrée sur x_m. Lorsque $i \neq 1$, Z_i correspond à la somme de deux fonctions similaires à Z_1 centrées respectivement sur $x_m - (i-1)\frac{T}{2}$ et $x_m + (i-1)\frac{T}{2}$, elles sont symétriques par rapport à l'axe passant par x_m. Les

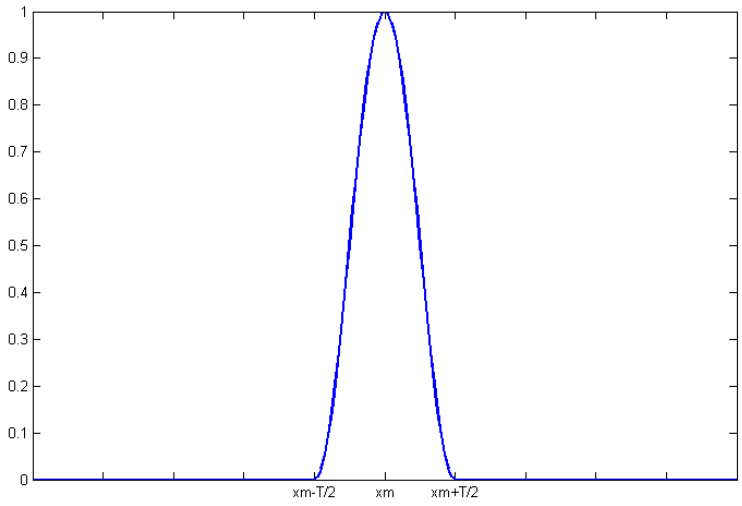


FIGURE A.1 – La variation de la fonction $Z_1(m,n)$

opérateurs définis dans le domaine des graphes s'appliquent sur des données discrètes. De manière générale, pour donner un sens à l'application de ces opérateurs, il convient de les généraliser en prenant $x \in V$ et $f \in L^2(\mathbb{R})$. Cela signifie que, sous certaines conditions, si le nombre d'éléments dans l'espace tend vers l'infini l'opérateur sur graphe tend vers une représentation continue. Notamment, il a été prouvé dans [HAVL05] [Sin06] [BN08] que, lorsque le taux d'échantillonnage augmente (le graphe résulte généralement de l'échantillonnage de points décrivant une variétés différentiables), et les poids sont choisis

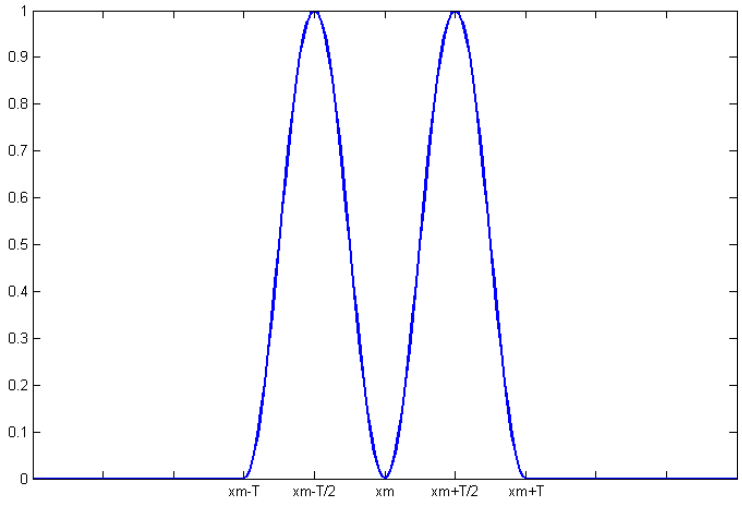


FIGURE A.2 – La variation de la fonction $Z_2(m,n)$

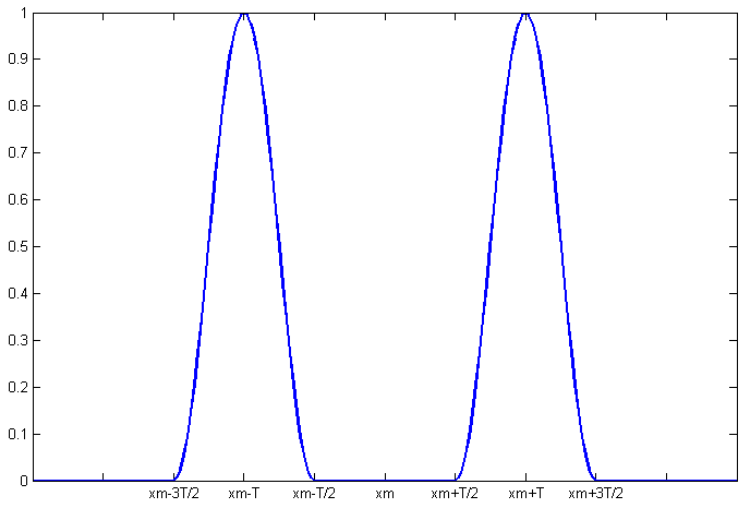


FIGURE A.3 – La variation de la fonction $Z_3(m,n)$

de façon appropriée, la matrice laplacienne sur graphe normalisée tend vers l'opérateur de Laplace-Beltrami défini pour des fonctions à valeur réelle de la variété.

Proposition 2. *Dans un domaine continue, le résultat de la décomposition sur la voie i s'écrit comme suit :*

$$\tilde{g}_i(x) = f(x)C_i - (\tilde{Z}_i * f)(x), \tag{A.7}$$

avec $\tilde{Z}_i(x) = \cos^2(\frac{\pi}{T}|x| - (i-1)\frac{\pi}{2})\Pi_\pi(\frac{\pi}{T}|x| - (i-1)\frac{\pi}{2})$, *et* $C_i = \int_V \tilde{Z}_i(x)dx$, $T = \frac{2}{k-1}\mu_{max}$.

Démonstration. Dans le cas continu, la relation A.4 prend la forme suivante :

$$\tilde{g_i}(x_m) = f(x_m) \int_{x_n \in V} Z_i(m,n) dx_n - \int_{x_n \in V} Z_i(m,n) f(x_n) dx_n, \tag{A.8}$$

$$= \Gamma - \Xi, \tag{A.9}$$

avec

$$\Gamma = f(x_m) \int_{x_n \in V} Z_i(m,n) dx_n, \tag{A.10}$$

$$\Xi = \int_{x_n \in V} Z_i(m,n) f(x_n) dx_n. \tag{A.11}$$

Nous posons $C_i = \int_{x_n \in V} Z_i(m,n) dx_n$, cette quantité est toujours constante. Nous avons alors :

$$\Gamma = f(x_m) C_i. \tag{A.12}$$

A partir de l'équation A.5, Ξ s'écrit :

$$\Xi = \int_{x_n \in V} \cos^2(\frac{\pi}{T}|x_m - x_n| - (i-1)\frac{\pi}{2}) \Pi_\pi(\frac{\pi}{T}|x_m - x_n| - (i-1)\frac{\pi}{2}) f(x_n) dx_n, \tag{A.13}$$

d'où :

$$\Xi = (\tilde{Z}_i * f)(x), \tag{A.14}$$

avec la fonction $\tilde{Z}_i(x)$ s'écrit comme suit :

$$\tilde{Z}_i(x) = \cos^2(\frac{\pi}{T}|x| - (i-1)\frac{\pi}{2}) \Pi_\pi(\frac{\pi}{T}|x| - (i-1)\frac{\pi}{2}). \tag{A.15}$$

Finalement $\tilde{g_i}(x)$ s'ecrit :

$$\tilde{g_i}(x) = f(x) C_i - (\tilde{Z}_i * f)(x), \tag{A.16}$$

■

A partir de ces développement, nous constatons que l'expression $g_i = L_i f$ tend vers

une opération de filtrage linéaire qui s'écrit comme suit :

$$\tilde{g}_i(x) = \left((C_i\delta(x) - Z_i) * f\right)(x). \tag{A.17}$$

Proposition 3.

$$f(x) - \bar{f} = \frac{1}{\mu_{max}} \sum_{i=1}^{k} \tilde{g}_i(x). \tag{A.18}$$

Démonstration. A partir de la proposition 2, nous pouvons écrire :

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{g}_i(x) = f(x) \sum_{i=1}^{k} C_i - \sum_{i=1}^{k} \left(\tilde{Z}_i * f\right)(x), \tag{A.19}$$

$$= f(x) \int_{x\in V} \sum_{i=1}^{k} \tilde{Z}_i(x)dx - \sum_{i=1}^{k} \tilde{Z}_i * f(x), \tag{A.20}$$

Nous avons :

$$\sum_{i=1}^{k} \tilde{g}_i(x) = f(x) \int_{x\in V} dx - (1 * f)(x), \tag{A.21}$$

$$= \mu_{max} f(x) - \int_{x\in V} f(x)d(x), \tag{A.22}$$

multipliant les deux termes par $\frac{1}{\mu_{max}}$, nous obtenons :

$$f(x) - \bar{f} = \frac{1}{\mu_{max}} \sum_{i=1}^{k} \tilde{g}_i(x). \tag{A.23}$$

■

Si nous voulons prendre en compte la structure géométrique que décrivent les données, nous pouvons, par exemple, considérer une distance euclidienne : $\mu = ||F_m - F_n||_2$ avec F_m le vecteur caractéristique associé au sommet v_m. Nous rappelons que les distances μ seront introduites dans le calcul des poids associés aux sous-graphes G_i. Par conséquent, les opérateurs correspondants deviennent non linéaires. Si nous replaçons μ dans l'équation **??**, nous constatons que le principe est le même sauf que la mesure de distance considérée est une distance euclidienne. Contrairement à l'étude précédente qui suppose une distribution des échantillons uniformes, la distance euclidienne dépend de l'organisation des éléments

dans l'espace et permet d'offrir un traitement adaptatif à la structure des données. Plus généralement, nous avons :

$$g_i(F) = ((C_i\delta - Z_i) * f)(F), \tag{A.24}$$

$$\mu_{max} f(F) = \sum_{i=1}^{k}((C_i\delta - Z_i) * f)(F) + \int_F f(F)dF. \tag{A.25}$$

avec F le vecteur représentant les données dans l'espace.

La figure A.4 illustre les variations de la fonction Z_1 dans le cas d'une distance euclidienne. La fonction Z_1 est centrée sur le nœud v_m et prend en compte seulement les éléments dont la distance euclidienne est inférieure ou égale à une demi-période. Le même principe sera appliqué si nous utilisons un autre type de distance (une distance géodésique par exemple).

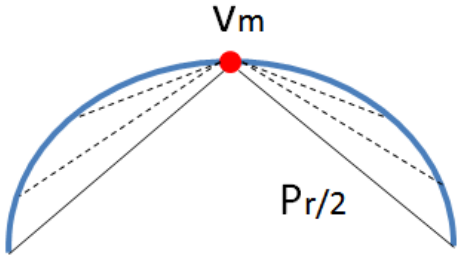


FIGURE A.4 – Les variations de Z_1 dans le cas de la distance euclidienne

A.1.1 Lien avec une analyse distance-échelle

Dans la partie précédente, nous avons vu que l'approche de décomposition proposée est, en effet, une version discrétisée d'une opération de convolution effectuée sur un signal à énergie finie. Toutefois, cette opération est calculée pour une valeur positive de T et pour un nombre fini de voies k. Dans ce qui suit, nous montrons que ce formalisme peut être généralisé pour des valeurs continues de T et μ_i.

L'équation A.17 peut s'écrire comme suivant :

$$g_i(x) = \int_{t\in V}(C_i\delta(x-t) - \cos^2(\frac{\pi}{T}|x-t| - (i-1)\frac{\pi}{2})\Pi_\pi(\frac{\pi}{T}|x-t| - (i-1)\frac{\pi}{2})f(t)dt. \tag{A.26}$$

Nous pouvons mettre l'équation A.26 sous cette forme :

$$g(x,\mu_i,T) = \int_{t\in V} \left(C_i\delta(x-t) - \cos^2\left(\frac{\pi}{T}|x-t| - \frac{\pi}{T}\mu_i\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}|x-t| - \frac{\pi}{T}\mu_i\right)\right) f(t)dt, \tag{A.27}$$

$$g(x,\mu_i,T) = U * f(x), \tag{A.28}$$

avec $U(x,\mu_i,T) = C_i\delta(x) - \cos^2\left(\frac{\pi}{T}|x| - \frac{\pi}{T}\mu_i\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}|x| - \frac{\pi}{T}\mu_i\right)$, et nous considérons que les variables μ_i et T sont continues.

Nous obtenons une décomposition du signal qui fournit, pour chaque valeur x, des informations sur le nombre de coefficients situés dans le voisinage de la valeur $x \pm \mu_i$. La dimension de ce voisinage dépend de la valeur de T. C'est une nouvelle manière de décrire les informations contenues dans un signal.

Le signal d'origine peut être reconstruit à partir des coefficients de la décomposition notés $g(x,\mu_i,T)$, en utilisant la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{2\mu_{max}^2}\int_{T>0}^{2\mu_{max}}\int_0^{\mu_{max}} g(x,\mu_i,T)d\mu_i dT + \bar{f}. \tag{A.29}$$

Afin de démontrer cette formule nous utilisons la proposition suivante :

Proposition 4.

$$2\mu_{max}\int_0^{\mu_{max}} f(\mu)d\mu = \int_{T>0}^{2\mu_{max}}\int_0^{\mu_{max}}\int_0^{\mu_{max}} \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right) f(\mu)d\mu d\mu_i dT. \tag{A.30}$$

Démonstration.

$$\int_0^{\mu_{max}} f(\mu)d\mu = \int_0^{\mu_{max}} \left(\cos^2\left(\frac{\pi}{T}\mu\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\mu\right)\right) f(\mu)d\mu. \tag{A.31}$$

Pour $0 < \mu < \mu_{max}$, nous avons :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{T}\mu\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\mu\right) = \sum_{i=1}^{k}\cos^2\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right), \tag{A.32}$$

$$\int_0^{\mu_{max}} f(\mu)d\mu = \int_0^{\mu_{max}} \sum_{i=1}^{k} \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right) f(\mu)d\mu. \tag{A.33}$$

Nous intégrons maintenant par rapport à T, nous obtenons :

$$\int_{T>0}^{T_{max}}\int_0^{\mu_{max}} f(\mu)d\mu dT = \int_{T>0}^{T_{max}}\int_0^{\mu_{max}} \sum_{i=1}^{k} \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right) f(\mu)d\mu dT, \tag{A.34}$$

$$T_{max}\int_0^{\mu_{max}} f(\mu)d\mu = \int_{T>0}^{T_{max}}\int_0^{\mu_{max}} \sum_{i=1}^{k} \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right) f(\mu)d\mu dT. \tag{A.35}$$

Sachant que $\mu_i = \frac{i-1}{2}T$, la valeur de T_{max} peut être calculée en prenant $\mu_i = \mu_{max}$ et $i = 2$, nous avons donc $T_{max} = 2\mu_{max}$.

La variable T étant continue, nous pouvons associée à chaque valeur $0 < T < 2\mu_{max}$ au moins une valeur $0 < \mu_i < 2\mu_{max}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$2\mu_{max}\int_0^{\mu_{max}} f(\mu)d\mu = \int_{T>0}^{2\mu_{max}}\int_0^{\mu_{max}}\int_0^{\mu_{max}} \cos^2\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right)\Pi_\pi\left(\frac{\pi}{T}(\mu-\mu_i)\right) f(\mu)d\mu d\mu_i dT. \tag{A.36}$$

■

Nous posons :

$$g(x) = \int_{T>0}^{2\mu_{max}}\int_0^{\mu_{max}} g(x,\mu_i,T)d\mu_i dT. \tag{A.37}$$

Tenant compte de la proposition 4, nous obtenons :

$$g(x) = 2\mu_{max}^2 f(x) - 2\mu_{max}\int_{x\in V} f(x)dx, \tag{A.38}$$

$$\frac{1}{2\mu_{max}^2}g(x) = f(x) - \bar{f}. \tag{A.39}$$

Nous constatons que notre approche de décomposition tend vers une nouvelle représentation du signal qui consiste à effectuer une analyse selon les distances entre un point quelconque du signal et les autres points. Le schéma de discrétisation est équivalent à une décomposition d'un signal défini sur un graphe complet.

Listes des publications

Revues internationales avec comité de lecteurs

Mohamed Malek, David Helbert, Philippe Carré. Color graph based wavelet transform with perceptual information. *Journal of Electronic Imaging, Society of Photo-optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, 2015.

Conférences internationales avec comité de lecteurs

David Helbert, Mohamed Malek, Philippe Carré, Christine Fernandez-Maloigne, Nicolas Leveziel. Restoration of Confocal Images by Hypercomplex diffusion. *Association for Research in Vision and Ophthalmology. ARVO Annual Meeting*, Orlando, United States, 2014.

Mohamed Malek, David Helbert, Philippe Carré. Directional hypercomplex diffusion. *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*, Vancouver, Canada, 2013.

Séminaires

Mohamed Malek, David Helbert, Philippe Carré. A framework for image processing based on graph. *Séminaire thématique ED traitement et analyse statistique des données massives*, Poitiers, France, 2014.

Mohamed Malek, David Helbert, Philippe Carré. Analyse d'images couleur à travers la SGWT. *Workshop Xlim*, Limoges, France, 2014.

Table des figures

1.1 Banc de filtres 18
1.2 Exemple d'un graphe pondéré non orienté 22
1.3 Exemple sur le calcul de la matrice Laplacienne pour un graphe non orienté 24
1.4 discrétisation par différences finies du Laplacien 25
1.5 Graphe KNN ($k = 5$) construit à partir d'une distribution de type *swiss-roll* 27
1.6 Exemples de graphe grille en 4 et en 8 voisinage 27
1.7 Etapes de construction d'un d'un graphe d'adjacence des régions [LGN09] . 28
1.8 Pyramide Laplacienne à un seul niveau [SJV13] 35
1.9 schéma de décomposition en ondelettes sur graphe à travers un banc de filtre [NO12] 36
1.10 Spectre fréquentiel de la fonction $h(\lambda)$(en bleu), les fonctions $g(s_j\lambda)$ et la fonction $G(\lambda)$ (en noir) pour $J = 5$. [HVG11] 40
1.11 Exemple d'application de la TOSG sur une image couleur en utilisant une grille régulière 41
1.12 Application de la régularisation sur graphe sur une image couleur pour $p = 1, 2$ [LEB07] 44

2.1 Distance de deux éléments dans une spirale. 49
2.2 Schéma de construction de graphe dans l'espace couleur RVB 52
2.3 Principe de construction d'un graphe pour une image en niveaux de gris. . 52
2.4 Schéma d'une application directe de la TOSG sur une image 54
2.5 Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la DE, $J = 3$, $\sigma = 5$, $q = 366.6$. 55
2.6 Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la DE, $J = 3$, $\sigma = 30$, $q = 6821.2$. 56
2.7 L'espace couleur Lab et diagramme de chromaticité. 58
2.8 Schéma de construction de graphe dans l'espace couleur CIELab 59
2.9 Images à traiter. 60
2.10 Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la distance ΔE_{2k}, $J = 3, \sigma = 5, q = 2661.3$. 61
2.11 Application de la TOSG sur l'image 2.9(a) en utilisant la distance ΔE_{2k}, $J = 3, \sigma = 30, q = 20507$. 62
2.12 Étude de la conservation de la géométrie 62
2.13 TOSG appliquée sur l'image 2.9(b) en utilisant un graphe construit à partir de l'image 2.9(a) dans l'espace couleur RVB, $J = 3, \sigma = 30$. 63
2.14 TOSG en utilisant la deuxième approche de construction faite à partir de l'image 2.9(a) et appliquée sur l'image 2.9(b), $J = 3, \sigma = 10$. 64

2.15 TOSG appliquée directement sur une image bruitée 2.9(a) en utilisant la première approche de construction, $\sigma = 10$. 65
2.16 La Méthode du débruitage à travers la TOSG 66
2.17 Variation de la qualité de débruitage en fonction de σ en utilisant la distance RVB. En vert niveau de bruit faible et en bleu niveau de bruit élevée. . . . 67
2.18 Variation de la qualité de débruitage en fonction de σ en utilisant la distance couleur. En vert niveau de bruit faible et en bleu niveau de bruit élevée. . . 68
2.19 Résultat du débruitage obtenu pour l'image *girl* à bruit faible. 71
2.20 Résultat du débruitage obtenu pour l'image *beterfly* à bruit faible. 72
2.21 Résultat du débruitage obtenu pour l'image *girl* à bruit fort. 73
2.22 Résultat du débruitage obtenu pour l'image *girl* avec une construction de graphe parfaite. 74
2.23 SSIM en fonction du niveau de bruit. En vert image lissée, cyan image bruitée, magenta uwt, bleu première approche, rouge deuxième approche, noir première approche avec un graphe original, marron deuxième approche avec un graphe original. 75
2.24 $QSSIM$ en fonction du niveau de bruit. En vert image lissée, cyan image bruitée, magenta uwt, bleu première approche, rouge deuxième approche, noir première approche avec un graphe original, marron deuxième approche avec un graphe original. 75

3.1 *Inpainting* en utilisant l'algorithme de Criminisi [CPT04] 80
3.2 *Inpainting* en utilisant l'algorithme de Morel et Masnou [MM98] 80
3.3 *Inpainting* en utilisant le modèle équations aux dérivées partielles de Bertalmio *et al* [BSCB00] 81
3.4 *Inpainting* en utilisant le modèle de Chan et Shen *et al* [CS01] 82
3.5 *Inpainting* en utilisant le modèle de [DV10] 83
3.6 *Inpainting* en utilisant le modèle de [GCE10] 83
3.7 *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant une grille régulière 86
3.8 *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant une grille régulière 87
3.9 *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant une grille régulière 87
3.10 Différence entre une grille régulière et non régulière (k-ppv) 88
3.11 *Inpainting* à base de la TOSG en complétant la structure manquante par une grille régulière 89
3.12 *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant la méthode de construction vue au deuxième chapitre (distance euclidienne RVB) 91
3.13 *Inpainting* à base de la TOSG en utilisant la méthode de construction vue au deuxième chapitre (distance euclidienne RVB) 92
3.14 Calcul des similarités par la méthode *des moyennes non locales* 93
3.15 Étapes du processus 95
3.16 Approche globale d'*inpainting* non local à base de la TOSG avec $\beta = 20$, $b = 7$ and $a = 13$ 96
3.17 Approche globale d'*inpainting* non local à base de la TOSG avec $\beta = 100$, $b = 11$ and $a = 15$ 96
3.18 *Inpainting* non local à base de la TOSG 98
3.19 *Inpainting* non local à base de la TOSG 98
3.20 *Inpainting* non local à base de la TOSG 99
3.21 *Inpainting* non local à base de la TOSG 100

3.22 comparaison des résultats 102
3.23 comparaison des résultats 102

4.1 Graphe complet à 5 sommets 107
4.2 Modèle de fonction de poids 110
4.3 Schéma de décomposition 111
4.4 Application de la PMD sur un signal 1D, $\mu = |x_m - x_n|$, $k = 6$. 114
4.5 Application de la PMD sur un signal 1D, $\mu = |x_m - x_n|$, $k = 7$. 115
4.6 Application de la PMD sur une image couleur, $\mu = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$, $k = 5$. 116
4.7 Application de la PMD sur une image couleur en utilisant une distance euclidienne, $k = 5$. 117

A.1 La variation de la fonction $Z_1(m, n)$ 124
A.2 La variation de la fonction $Z_2(m, n)$ 125
A.3 La variation de la fonction $Z_3(m, n)$ 125
A.4 Les variations de Z_1 dans le cas de la distance euclidienne 128

Bibliographie

[AC04] Pablo Andrés Arbeláez and Laurent D. Cohen. Energy partitions and image segmentation. *J. Math. Imaging Vis.*, 20(1-2) :43–57, January 2004.

[AEB06] M. Aharon, M. Elad, and A. Bruckstein. Svdd : An algorithm for designing overcomplete dictionaries for sparse representation. *Trans. Sig. Proc.*, 54(11) :4311–4322, November 2006.

[Ash01] Michael Ashikhmin. Synthesizing natural textures. In *Proceedings of the 2001 Symposium on Interactive 3D Graphics*, I3D '01, pages 217–226, New York, NY, USA, 2001. ACM.

[BA87] Peter J. Burt and Edward H. Adelson. Readings in computer vision : Issues, problems, principles, and paradigms. chapter The Laplacian Pyramid As a Compact Image Code, pages 671–679. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 1987.

[BC06] Eduardo Bayro-Corrochano. The theory and use of the quaternion wavelet transform. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 24(1) :19–35, 2006.

[BCM08] Antoni Buades, Bartomeu Coll, and Jean-Michel Morel. Nonlocal image and movie denoising. *International journal of computer vision*, 76(2) :123–139, 2008.

[BCMS] Marcelo Bertalmio, Vicent Caselles, Simon Masnou, and Guillermo Sapiro. Inpaintings. *http ://math.univ-lyon1.fr/ masnou/fichiers/publications/survey.pdf.*

[BGW91] J. Bigun, G.H. Granlund, and J. Wiklund. Multidimensional orientation estimation with applications to texture analysis and optical flow. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 13(8) :775–790, Aug 1991.

[BN08] Mikhail Belkin and Partha Niyogi. Towards a theoretical foundation for laplacian-based manifold methods. *Journal of Computer and System Sciences*, 74(8) :1289 – 1308, 2008. Learning Theory 2005.

[BSCB00] Marcelo Bertalmio, Guillermo Sapiro, Vincent Caselles, and Coloma Ballester. Image inpainting. In *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, SIGGRAPH '00, pages 417–424, New York, NY, USA, 2000. ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co.

[Bül99] T. Bülow. *Hypercomplex Spectral Signal Representations for the Processing and Analysis of Images.* Bericht / Institut für Informatik und Praktische Mathematik, Christian-Albrechts-Universität Kiel. Univ., 1999.

[CA04] Philippe Carre and Eric Andres. Discrete analytical ridgelet transform. *Signal Processing*, 84(11) :2165 – 2173, 2004. Special Section Signal Processing in Communications.

[Can98] J. E. Candes. *Ridgelets : Theory and Applications*. PhD thesis, Standford University, September 1998.

[CBNC09] J. Cousty, G. Bertrand, L. Najman, and M. Couprie. Watershed cuts : Minimum spanning forests and the drop of water principle. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 31(8) :1362–1374, Aug 2009.

[CC89] Aldo Cumani and Aldo Cumani. Edge detection in multispectral images. In *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, pages 40–51, 1989.

[CCB08] Wai Lam Chan, Hyeokho Choi, and R.G. Baraniuk. Coherent multiscale image processing using dual-tree quaternion wavelets. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 17(7) :1069–1082, July 2008.

[CD99] E. Candes and D. Donoho. Curvelets : A surprisingly effective nonadaptive representation of objects with edges. Technical report, 1999.

[CDF14] Philippe Carré, Patrice Denis, and Christine Fernandez-Maloigne. Spatial color image processing using clifford algebras : application to color active contour. *Signal, Image and Video Processing*, 8(7) :1357–1372, 2014.

[Chu97] Fan RK Chung. *Spectral graph theory*, volume 92. American Mathematical Soc., 1997.

[CIE01] CIE. Improvement to industrial colour-difference evaluation, 2001.

[CK97] Laurent D. Cohen and Ron Kimmel. Global minimum for active contour models : A minimal path approach. *Int. J. Comput. Vision*, 24(1) :57–78, August 1997.

[CK03] Mark Crovella and Eric Kolaczyk. Graph wavelets for spatial traffic analysis. In *INFOCOM 2003. Twenty-Second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications. IEEE Societies*, volume 3, pages 1848–1857. IEEE, 2003.

[CM06] Ronald R. Coifman and Mauro Maggioni. Diffusion wavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 21(1) :53 – 94, 2006. Special Issue : Diffusion Maps and Wavelets.

[Coh06] L. Cohen. Minimal paths and fast marching methods for image analysis. In Nikos Paragios, Yunmei Chen, and Olivier D. Faugeras, editors, *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*, pages 97–111. Springer, 2006.

[COS01] Tony F. Chan, Stanley Osher, and Jianhong Shen. The digital tv filter and nonlinear denoising. *IEEE Trans. Image Process*, 10 :231–241, 2001.

[CPT04] A. Criminisi, P. Perez, and K. Toyama. Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting. *Trans. Img. Proc.*, 13(9) :1200–1212, September 2004.

[CS01] Tony Chan and Jianhong Shen. Mathematical models for local nontexture inpaintings. *SIAM Journal of Applied Math*, 2001.

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.

[DB13] F. Dorfler and F. Bullo. Kron reduction of graphs with applications to electrical networks. *Circuits and Systems I : Regular Papers, IEEE Transactions on*, 60(1) :150–163, Jan 2013.

[DD00] David L. Donoho and Mark R. Duncan. Digital curvelet transform : strategy, implementation, and experiments, 2000.

[DfAG11] Vincent Duval, Jean françois Aujol, and Yann Gousseau. On the parameter choice for the non-local means. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2011.

[DH01] David Donoho and Xiaoming Huo. Applications of beamlets to detection and extraction of lines, curves and objects in very noisy images. In *Nonlinear Signal and Image Processing (NSIP*, 2001.

[DJ94] David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Ideal denoising in an orthonormal basis chosen from a library of bases. *Comptes Rendus Acad. Sci., Ser. I*, 319 :1317–1322, 1994.

[DMBC11] Guillaume Demarcq, Laurent Mascarilla, Michel Berthier, and Pierre Courtellemont. The color monogenic signal : Application to color edge detection and color optical flow. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 40(3) :269–284, 2011.

[Don95] D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 41(3) :613–627, May 1995.

[DV05] M. N. Do and M. Vetterli. The contourlet transform : An efficient directional multiresolution image representation. *Trans. Img. Proc.*, 14(12) :2091–2106, December 2005.

[DV10] Emmanuel D'Angelo and Pierre Vandergheynst. Towards unifying diffusion and exemplar-based inpainting. In *2010 Ieee International Conference On Image Processing*, IEEE International Conference on Image Processing ICIP, pages 417–420. Ieee Service Center, 445 Hoes Lane, Po Box 1331, Piscataway, Nj 08855-1331 Usa, 2010.

[DZ86] Silvano Di Zenzo. A note on the gradient of a multi-image. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 33(1) :116–125, January 1986.

[EL99] Alexei A. Efros and Thomas K. Leung. Texture synthesis by non-parametric sampling. In *Proceedings of the International Conference on Computer Vision-Volume 2 - Volume 2*, ICCV '99, pages 1033–, Washington, DC, USA, 1999. IEEE Computer Society.

[ELB08] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bougleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs : A framework for image and manifold processing. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 17(7) :1047–1060, July 2008.

[ESQD05] M. Elad, J.-L. Starck, P. Querre, and D.L. Donoho. Simultaneous cartoon and texture image inpainting using morphological component analysis (mca). *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 19(3) :340 – 358, 2005. Computational Harmonic Analysis - Part 1.

[GCE10] Mahmoud Ghoniem, Youssef Chahir, and Abderrahim Elmoataz. Nonlocal video denoising, simplification and inpainting using discrete regularization on graphs. *Signal Processing*, 90(8) :2445 – 2455, 2010. Special Section on Processing and Analysis of High-Dimensional Masses of Image and Signal Data.

[GS96] Truong Nguyen Gilbert Strang. Wavelets and filter banks. 1996.

[HAVL05] Matthias Hein, Jean-Yves Audibert, and Ulrike Von Luxburg. From graphs to manifolds–weak and strong pointwise consistency of graph laplacians. In *Learning theory*, pages 470–485. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

[HCA06] David Helbert, Philippe Carré, and Eric Andres. 3-d discrete analytical ridgelet transform. *IEEE Transactions on Image Processing*, 15(12) :3701–3714, 2006.

[HJV12] David K. Hammond, Laurent Jacques, and Pierre Vandergheynst. image denoising with nonlocal spectral graph wavelets. In *Image Processing and Analysis with Graphs : Theory and Practice*. CRC Press, 2012.

[HS88] Chris Harris and Mike Stephens. A combined corner and edge detector. In *In Proc. of Fourth Alvey Vision Conference*, pages 147–151, 1988.

[HVG11] David K. Hammond, Pierre Vandergheynst, and Rémi Gribonval. Wavelets on graphs via spectral graph theory. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 30(2) :129 – 150, 2011.

[JT92] J.W. Jaromczyk and G.T. Toussaint. Relative neighborhood graphs and their relatives. *Proceedings of the IEEE*, 80(9) :1502–1517, Sep 1992.

[KK95] Nahum Kiryati and Olaf Kübler. Chain code probabilities and optimal length estimators for digitized three-dimensional curves. *Pattern Recognition*, 28(3) :361 – 372, 1995.

[LCR01] M Ronnier Luo, Guihua Cui, and B Rigg. The development of the cie 2000 colour-difference formula : Ciede2000. *Color Research & Application*, 26(5) :340–350, 2001.

[LEB07] Olivier Lezoray, Abderrahim Elmoataz, and Sébastien Bougleux. Graph regularization for color image processing. *Computer Vision and Image Understanding*, 107(1–2) :38 – 55, 2007. Special issue on color image processing.

[LEL14] F. Lozes, A. Elmoataz, and O. Lezoray. Partial difference operators on weighted graphs for image processing on surfaces and point clouds. *IEEE Transactions on image processing*, 23(9) :3896–3909, Sept 2014.

[LG12] Olivier Lezoray and Leo Grady. *Image Processing and Analysis with Graphs : Theory and Practice*. CRC Press, 2012.

[LGN09] Roland Levillain, Thierry Géraud, and Laurent Najman. Milena : Write generic morphological algorithms once, run on many kinds of images. In Michael H. F. Wilkinson and Jos B. T. M. Roerdink, editors, *Mathematical Morphology and Its Application to Signal and Image Processing – Proceedings of the Ninth International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)*, volume 5720 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 295–306, Groningen, The Netherlands, August 2009. Springer Berlin / Heidelberg.

[LP02] Erwan Le Pennec. *Bandlets and Geometrical Representation of Images*. Theses, École polytechnique, December 2002.

[LTD05] Haeyoung Lee, Yiying Tong, and Mathieu Desbrun. Geodesics-based one-to-one parameterization of 3d triangle meshes. *IEEE MultiMedia*, 12(1) :27–33, 2005.

[LTE10] Olivier Lézoray, Vinh-Thong Ta, and Abderrahim Elmoataz. Partial differences as tools for filtering data on graphs. *Pattern Recognition Letters*, 31(14) :2201 – 2213, 2010.

[Mal89] S.G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 11(7) :674–693, Jul 1989.

[Mal00] Stéphane Mallat. Une exploration des signaux en ondelettes. 2000.

[Mer94] Russell Merris. matrices of graphs : a survey. *Linear Algebra and its Applications*, 197–198(0) :143 – 176, 1994.

[MES07] Julien Mairal, Michael Elad, and Guillermo Sapiro. Sparse representation for color image restoration. *the IEEE Trans. on Image Processing*, pages 53–69, 2007.

[Mey90] Yves Meyer. *Ondelettes et Opérateurs II : Opérateurs de Calderón-Zygmund*. Actualités Mathématiques. 1990.

[MHvL09] Markus Maier, Matthias Hein, and Ulrike von Luxburg. Optimal construction of k-nearest-neighbor graphs for identifying noisy clusters. *Theor. Comput. Sci.*, 410(19) :1749–1764, April 2009.

[MLH08] Markus Maier, Ulrike V Luxburg, and Matthias Hein. Influence of graph construction on graph-based clustering measures. In *Advances in neural information processing systems*, pages 1025–1032, 2008.

[MM98] S. Masnou and J.-M. Morel. Level lines based disocclusion. In *Image Processing, 1998. ICIP 98. Proceedings. 1998 International Conference on*, pages 259–263 vol.3, Oct 1998.

[NM06] S.K. Naik and C.A. Murthy. Standardization of edge magnitude in color images. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 15(9) :2588–2595, Sept 2006.

[NO09] Sunil K Narang and Antonio Ortega. Lifting based wavelet transforms on graphs. In *Proceedings : APSIPA ASC 2009 : Asia-Pacific Signal and Information Processing Association, 2009 Annual Summit and Conference*, pages 441–444. Asia-Pacific Signal and Information Processing Association, 2009 Annual Summit and Conference, International Organizing Committee, 2009.

[NO10] S.K. Narang and A. Ortega. Local two-channel critically sampled filter-banks on graphs. In *Image Processing (ICIP), 2010 17th IEEE International Conference on*, pages 333–336, Sept 2010.

[NO12] S.K. Narang and A. Ortega. Perfect reconstruction two-channel wavelet filter banks for graph structured data. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 60(6) :2786–2799, June 2012.

[NO13] S.K. Narang and A. Ortega. Compact support biorthogonal wavelet filter-banks for arbitrary undirected graphs. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 61(19) :4673–4685, Oct 2013.

[PC06] G. Peyré and L. D. Cohen. Geodesic remeshing using front propagation. *International Journal of Computer Vision*, 69(1) :145–156, 2006.

[RT01] M.A. Ruzon and C. Tomasi. Edge, junction, and corner detection using color distributions. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 23(11) :1281–1295, Nov 2001.

[San96] S.J. Sangwine. Fourier transforms of colour images using quaternion or hypercomplex, numbers. *Electronics Letters*, 32(21) :1979–1980, Oct 1996.

[SCFM13a] R. Soulard, P. Carre, and C. Fernandez-Maloigne. Vector extension of monogenic wavelets for geometric representation of color images. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 22(3) :1070–1083, March 2013.

[SCFM13b] Raphaël Soulard, Philippe Carré, and Christine Fernandez-Maloigne. Vector extension of monogenic wavelets for geometric representation of color images. *IEEE Transactions on Image Processing*, 22(3) :1070–1083, 2013.

[Sin06] A. Singer. From graph to manifold laplacian : The convergence rate. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 21(1) :128 – 134, 2006. Special Issue : Diffusion Maps and Wavelets.

[SJC09] Joon-Kyung Seong, Won-Ki Jeong, and Elaine Cohen. Curvature-based anisotropic geodesic distance computation for parametric and implicit surfaces. *The Visual Computer*, 25(8) :743–755, 2009.

[SJV13] D. I Shuman, M. Javad Faraji, and P. Vandergheynst. A Framework for Multiscale Transforms on Graphs. *ArXiv e-prints*, August 2013.

[SKM98] N. Sochen, R. Kimmel, and R. Malladi. A general framework for low level vision. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 7(3) :310–318, Mar 1998.

[SMB00] Cordelia Schmid, Roger Mohr, and Christian Bauckhage. Evaluation of interest point detectors. *Int. J. Comput. Vision*, 37(2) :151–172, June 2000.

[SNF+13] David I Shuman, Sunil K Narang, Pascal Frossard, Antonio Ortega, and Pierre Vandergheynst. The emerging field of signal processing on graphs : Extending high-dimensional data analysis to networks and other irregular domains. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 30(3) :83–98, 2013.

[Spi12] Daniel Spielman. *Spectral Graph Theory*, pages 495–524. Chapman and Hall/CRC, 2012.

[SRV13] D I Shuman, B Ricaud, and P Vandergheynst. Vertex frequency analysis on graphs. *submitted to Applied and Computational Harmonic Analysis*, July 2013.

[SWD05] Gaurav Sharma, Wencheng Wu, and Edul N Dalal. The ciede2000 color-difference formula : Implementation notes, supplementary test data, and mathematical observations. *Color Research & Application*, 30(1) :21–30, 2005.

[TD07] David Tschumperlé and Rachid Deriche. Anisotropic Diffusion Partial Differential Equations in Multi-Channel Image Processing : Framework and Applications. In *Advances in Imaging and Electron Physics (AIEP)*, pages 145–209. Academic Press, 2007.

[TdSL00] B. Tenenbaum, V. de Silva, and J. Langford. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 5500(290) :2319–2323, 2000.

[TS14a] Y. Tanaka and A. Sakiyama. M -channel oversampled graph filter banks. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 62(14) :3578–3590, July 2014.

[TS14b] Y. Tanaka and A. Sakiyama. M-channel oversampled perfect reconstruction filter banks for graph signals. In *Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014 IEEE International Conference on*, pages 2604–2608, May 2014.

[Vai87] P.P. Vaidyanathan. Theory and design of m-channel maximally decimated quadrature mirror filters with arbitrary m, having the perfect-reconstruction property. *IEEE Trans. on Acous., Speech and Signal Proc., 35(4) :476–492. 31*, 1987.

[vdWGG05] J. van de Weijer, T. Gevers, and J. M. Geusebroek. Edge and corner detection by photometric quasi-invariants. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 27(4) :625–630, 2005.

[VS91] L. Vincent and P. Soille. Watersheds in digital spaces : an efficient algorithm based on immersion simulations. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 13(6) :583–598, Jun 1991.

[WPS03] Yongmei Michelle Wang, Bradley S. Peterson, and Lawrence H. Staib. 3d brain surface matching based on geodesics and local geometry. *Computer Vision and Image Understanding*, 89(2-3) :252–271, 2003.

[ZW97] Xuemei Zhang and Brian A Wandell. A spatial extension of cielab for digital color-image reproduction. *Journal of the Society for Information Display*, 5(1) :61–63, 1997.

Nom : Malek
Prénom : Mohamed

Sujet de thèse : extension de l'analyse multi-résolution aux images couleurs par des transformées sur graphes

Résumé

Dans ce manuscrit, nous avons étudié l'extension de l'analyse multi-résolution aux images couleurs par des transformées sur graphe. Dans ce cadre, nous avons déployé trois stratégies d'analyse différentes. En premier lieu, nous avons défini une transformée basée sur l'utilisation d'un graphe perceptuel dans l'analyse à travers la transformé en ondelettes spectrale sur graphe. L'application en débruitage d'image met en évidence l'utilisation du SVH dans l'analyse des images couleurs. La deuxième stratégie consiste à proposer une nouvelle méthode d'inpainting pour des images couleurs. Pour cela, nous avons proposé un schéma de régularisation à travers les coefficients d'ondelettes de la TOSG, l'estimation de la structure manquante se fait par la construction d'un graphe des patchs couleurs à partir *des moyenne non locales*. Les résultats obtenus sont très encourageants et mettent en évidence l'importance de la prise en compte du SVH. Dans la troisième stratégie, nous proposons une nouvelle approche de décomposition d'un signal défini sur un graphe complet. Cette méthode est basée sur l'utilisation des propriétés de la matrice laplacienne associée au graphe complet. Dans le contexte des images couleurs, la prise en compte de la dimension couleur est indispensable pour pouvoir identifier les singularités liées à l'image. Cette dernière offre de nouvelles perspectives pour une étude approfondie de son comportement.

Abstract

In our work, we studied the extension of the multi-resolution analysis for color images by using transforms on graphs. In this context, we deployed three different strategies of analysis. Our first approach consists of computing the graph of an image using the psychovisual information and analyzing it by using the spectral graph wavelet transform. We thus have defined a wavelet transform based on a graph with perceptual information by using the CIELab color distance. Results in image restoration highlight the interest of the appropriate use of color information. In the second strategy, we propose a novel recovery algorithm for image inpainting represented in the graph domain. Motivated by the efficiency of the wavelet regularization schemes and the success of the nonlocal means methods we construct an algorithm based on the recovery of information in the graph wavelet domain. At each step the damaged structure

are estimated by computing the non local graph then we apply the graph wavelet regularization model using the SGWT coefficient. The results are very encouraging and highlight the use of the perceptual informations. In the last strategy, we propose a new approach of decomposition for signals defined on a complete graphs. This method is based on the exploitation of of the laplacian matrix proprieties of the complete graph. In the context of image processing, the use of the color distance is essential to identify the specificities of the color image. This approach opens new perspectives for an in-depth study of its behavior.