

Académie de Poitiers

## Université de Poitiers

— Sciences Fondamentales et Appliquées —

# THÈSE

pour l'obtention du Grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

*École Doctorale* : **Sciences et Ingénierie pour l'Information**

*Secteur de Recherche* : **Informatique & Applications**

présentée par

Marc Rodríguez

## Redimensionnement adaptatif et reconnaissance de primitives discrètes.

Soutenue le 12 décembre 2011 devant la Commission d'Examen composée de :

David Coeurjolly, Chargé de Recherche CNRS, LIRIS, Université de Lyon ..... Rapporteur  
Isabelle Debled-Rennesson, Maître de Conférences, LORIA, Université de Nancy ..... Rapporteur  
Michel Couprie, Professeur, LIGM, Université de Marne-la-Vallée ..... Examineur  
Eric Andres, Professeur, XLIM-SIC, Université de Poitiers ..... Directeur de Thèse  
Gaëlle Largeteau-Skapin, Maître de Conférences, XLIM-SIC, Université de Poitiers ... Co-directrice de Thèse







*À Gaëlle et Eric,  
deux être exceptionnels.*



---

# Remerciements

---

Mes premiers remerciements sont adressés à Gaëlle et Eric pour leurs conseils avisés et le soutien permanent dont ils ont fait preuve. Un petit clin d'oeil à Gabrielle, Antoine, Maxime et Celui-Qui-N'A-Pas-Encore-De-Nom qui ont été conçus pendant mon aventure pictocharentaise.

Je tiens à remercier Isabelle et David, mes deux rapporteurs, pour leur patience et pour les nombreuses remarques judicieuses sans lesquelles ce manuscrit ne serait que l'ombre de celui-ci. Merci à Michel d'avoir accepté d'être président du jury.

J'exprime ma reconnaissance envers l'ensemble du personnel XLIM-SIC que j'ai eu la chance de rencontrer et de cotoyer ces quatre années. Merci pour les nombreuses discussions partagées lors de repas, cafés, cigarettes et apéros (euh... pots de thèses). Un grand merci à toutes nos secrétaires et à leur sourire quotidien sans lequel il est impossible de commencer agréablement une journée. Merci à Thomas pour être aussi parfait et pour l'aventure musicale que nous avons partagée, à Romain, mon "p'tit frère", pour les nombreuses soirées (lire "cubis") passées (lire "bus") ensembles, au beau Mat', cofondateur de la guilde des littéraires frustrés, à Carlos, mon "cousin ibérique", pour ses délicieux gâteaux et son lit belge, à Jonathan pour son rire, sa bonne humeur et ses performances de DJ.

Dans le cadre de mes recherches, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreuses personnes que j'aimerais remercier, une pensée particulière pour Agathe, non pas pour m'avoir pardonné de lui avoir piqué son sujet de thèse mais pour toutes les soirées et discussions entre St-Dié-des-Vosges et Playa del Carmen.

Je tiens à remercier de nombreuses personnes non pas pour leur aide dans ce travail mais pour avoir cru en moi et sans qui il m'aurait été impossible d'aller jusqu'au bout. Merci à Nico pour être le premier à avoir trinquer avec moi sur cette terre poitevine. Merci à Max et Tibo pour d'innombrables fous rires, aventures et une inoubliable virée. Merci à Banji pour toutes ces soirées, pour ses talents de virtuose et son hospitalité démesurée. Merci à Conor et à Benoit pour avoir rythmé ma vie aux couleurs de la leur. Merci à Lud et Julie, nos deux groupies, pour être si jolies.

Je tiens également à remercier Aurore et Marion, qui ont partagé à mes côtés une partie de cette aventure.

Merci à tous mes amis de Nîmes pour qui je n'ai pas été très présent ces dernières années mais que j'ai toujours gardé dans mon coeur. Merci à tous les êtres formidables que j'ai rencontrés grâce à l'ESSI avec qui nous nous réunissons aussi régulièrement que possible, malgré les difficultés géographiques. Merci à vous tous chateleins, précieux, garagistes, bétas, bergers, rouges, chartreux et à toute la clique.

Je donne ces derniers remerciements à la famille extraordinaire que j'ai la chance d'avoir. Merci à Pepe et Chonchonin pour être les meilleurs parents du monde, à Lucie et Anne pour être des soeurs exceptionnelles, à mes oncles et tantes, à tous mes cousin(e)s et à mi abuelita. Une dernière pensée à mes trois autres grands parents qui je l'espère seraient fiers de moi.

euh... ah oui, merci aussi à toi qui a le courage de lire cette thèse (ou au moins les remerciements)!

et euh... un remerciement spécial pour toi! Oui toi! Toi que j'ai honteusement oublié de remercier. CHEH!

---

# Table des matières

---

<b>Introduction générale</b>		<b>XI</b>
Bibliographie . . . . .		XIV
<b>I Entre le discret et le continu.</b>		<b>1</b>
I-1 Vers le discret. . . . .		3
I-1.1 Pavage et Points discrets . . . . .		3
I-1.2 Objets discrets et leur topologie. . . . .		4
I-1.2.1 Complexes cellulaires abstraits. . . . .		4
I-1.2.2 Voisinage. . . . .		5
I-1.2.3 Connexité et Séparabilité. . . . .		6
I-1.2.4 $k$ -Courbes et Code de Freeman . . . . .		7
I-1.3 Droites discrètes et hyperplans analytiques. . . . .		8
I-1.3.1 Historique avant la première définition analytique . . . . .		9
I-1.3.2 Définition analytique . . . . .		10
I-1.3.3 Caractérisation selon l'épaisseur . . . . .		11
I-1.4 La discrétisation et ses modèles . . . . .		12
I-1.4.1 Le modèle Naïf . . . . .		13
I-1.4.2 Le modèle supercouverture . . . . .		13
I-1.4.3 Le modèle standard . . . . .		14
I-1.5 Cercles discrets et hypersphères. . . . .		15
I-1.5.1 Cercles d'Andres . . . . .		15
I-1.5.2 Cercles Supercouvertures . . . . .		17
I-1.5.3 Cercles Analytiques Standards . . . . .		17
I-1.5.4 Cercles Analytiques Naïf et Naïf fermés . . . . .		18
I-2 Vers le continu . . . . .		19
I-2.1 Espaces de Paramètres . . . . .		21
I-2.2 Reconnaissance de primitives discrètes . . . . .		22
I-2.3 Reconstruction . . . . .		23
I-2.4 Reconstruction inversible . . . . .		25
I-2.4.1 Méthode avec joints . . . . .		25
I-2.4.2 Méthode sans joints . . . . .		25
I-2.4.3 Méthode avec propagation arrière . . . . .		26
I-2.5 $k$ -cellules de rebroussement . . . . .		27
I-2.5.1 Points de Rebroussement discrets en dimension 2 . . . . .		27
I-2.5.2 $k$ -cellules de rebroussement en dimension 2 . . . . .		29
I-2.5.3 $k$ -cellules de rebroussement . . . . .		29
I-2.5.4 Images, points de rebroussement et parcours de surface : . . . . .		31
Bibliographie . . . . .		35

<b>II</b>	<b>Redimensionnement des éléments structurants</b>	<b>39</b>
II-1	Introduction . . . . .	40
II-2	Redimensionnement des éléments structurants . . . . .	42
II-2.1	Définitions . . . . .	42
II-2.2	Conséquences et propriétés . . . . .	42
II-2.2.1	Recouvrement . . . . .	42
II-2.2.2	Préimage d'un voxel . . . . .	43
II-2.2.3	Relations entre primitives floues et redimensionnement des éléments structurants . . . . .	43
II-2.3	Fonctions de redimensionnement . . . . .	44
II-2.3.1	Tangente discrète symétrique maximale . . . . .	45
II-2.3.2	Estimateur de courbure de Bullard . . . . .	47
II-2.3.3	Échelle pertinente . . . . .	47
II-2.4	Mesure de l'erreur . . . . .	48
II-3	Algorithme d'intersection de préimages . . . . .	50
II-3.1	Réécriture du problème. . . . .	50
II-3.1.1	Problème d'intersection d'hyperplans . . . . .	50
II-3.1.2	Spécificités du contexte . . . . .	52
II-3.2	Algorithme . . . . .	52
II-3.2.1	Complexité et calculabilité . . . . .	55
II-4	Exemples d'utilisation du redimensionnement adaptatif . . . . .	56
II-4.1	Débruitage de courbe discret-continu. . . . .	56
II-4.2	Simplification/Lissage de courbe discrètes. . . . .	58
II-5	Problèmes topologiques liés au redimensionnement des voxels . . . . .	61
II-5.1	Contrôle des squelettes . . . . .	62
II-5.2	Consistance du voisinage. . . . .	64
II-5.3	Images bicolores . . . . .	68
II-5.3.1	Contrôle des squelettes pour des images bicolores . . . . .	70
II-5.3.2	Consistance globale du voisinage pour des images bicolores . . . . .	70
II-5.3.3	Quelques images et comparaison des méthodes de contrôle topologique . . . . .	71
II-5.4	Conclusion sur le contrôle topologique et perspectives . . . . .	72
II-6	Conclusion . . . . .	75
	Bibliographie . . . . .	76
<b>III</b>	<b>Médiatrices généralisées et propriétés de leur intersection.</b>	<b>79</b>
III-1	Introduction. . . . .	80
III-2	Définition. . . . .	81
III-2.1	Médiatrice généralisée . . . . .	81
III-2.2	Centre généralisé des hypersphères circonscrites. . . . .	82
III-2.3	Propriétés . . . . .	83
III-3	Reconnaissance exacte et exhaustive de cercles discrets . . . . .	86
III-3.1	Reconnaissance de cercles ou d'arcs de cercles discrets et estimation de ses paramètres . . . . .	86
III-3.2	Reconnaissance de cercles standards et estimation de ses paramètres . . . . .	87
III-3.3	Reconnaissance de cercles naïfs et estimation de ses paramètres. . . . .	90
III-3.4	Reconnaissance de cercles d'Andres et estimation de ses paramètres . . . . .	92

---

III-4 Médiatrice Généralisée Simplifiée. . . . .	95
III-4.1 Définition. . . . .	95
III-4.2 Expression des solutions non reconnues et erreur due à la simplification. . . . .	96
III-4.3 Propriétés et Notations . . . . .	97
III-4.4 Représentation dans un espace de paramètres. . . . .	97
III-5 Reconnaissance de cercles discrets avec marge d'erreur adaptative. . . . .	99
Bibliographie . . . . .	102
<b>Conclusion générale</b>	<b>103</b>
III-6 Conclusion . . . . .	103
III-7 Perspectives . . . . .	104
<b>Publications personnelles</b>	<b>109</b>
<b>Résumé</b>	<b>111</b>



---

# Introduction générale

---

Les espaces euclidiens (dits continus) sont utilisés en mathématiques depuis des millénaires (Euclide d'Alexandrie, 325 av JC - 265 av JC). Les espaces euclidiens ont la particularité d'être denses, c'est-à-dire : quels que soient deux points distincts, il existe une infinité d'autres points entre les deux. La géométrie analytique dans de tels espaces, fondée par Descartes et Fermat, a permis de décrire les objets géométriques à l'aide de coordonnées et d'équations et ainsi de faciliter leur manipulation.

En imagerie, nous sommes amenés à manipuler des pixels et des voxels qui sont assimilables à des points dans un *espace discret*. Les règles de la géométrie euclidienne ne s'appliquent pas toujours dans de tels espaces. Certains problèmes des plus basiques deviennent très complexes et d'autres au contraire beaucoup plus simples. Par exemple, la définition d'une rotation discrète ayant les mêmes propriétés que son homologue euclidienne est impossible dans les espaces discrets alors que calculer l'intersection de deux ensembles devient trivial.

La *géométrie discrète* concerne les espaces discrets, la description des objets les peuplant et leurs transformations.

Les espaces discrets et euclidiens sont liés par deux opérations : la *discrétisation* et la *reconstruction*. La discrétisation transforme un objet continu en un objet discret. Il existe des algorithmes qui s'appliquent à des classes spécifiques d'objets continus tels que l'algorithme de discrétisation de segment de droite de Bresenham [Bre65]. Il existe également *des modèles de discrétisation* plus généraux qui s'appliquent à tous les objets continus tels que les méthodes de discrétisation basées sur des distances et des éléments structurants. Par exemple, le modèle supercouverture est associé à la distance de Tchebychev ( $d_\infty$ ) et son *élément structurant* qui est un hypercube unitaire. Ainsi, la supercouverture d'un objet continu  $\mathcal{E}$  est l'ensemble des points discrets à une distance maximale  $d_\infty(\frac{1}{2})$  de  $\mathcal{E}$ . Elle correspond également à l'ensemble de tous les éléments structurants centrés sur les points discrets de l'espace ayant une intersection non nulle avec l'objet continu.

Les objets discrets peuvent être décrits par leur frontière, elle-même décrite à l'aide de *primitives discrètes* telles que des segments de droites discrètes, des arcs de cercles ou des morceaux de plans discrets, etc. Plusieurs définitions de primitives discrètes ont été proposées [Bre65, Rev91, And94, Rev95, COK95, And00, And03]. Nous nous intéressons particulièrement aux descriptions analytiques de ces primitives, c'est-à-dire à partir d'(in)équations.

La *reconnaissance de primitives discrètes* consiste à identifier la présence de primitives discrètes dans un ensemble de points discrets donné et à déterminer ses paramètres analytiques. Plusieurs méthodes de reconnaissance de primitives ont vu le jour à partir des différentes définitions des primitives discrètes [FST96, Kim84, Buz03, DRR95, Siv04, VC99].

Nous nous sommes particulièrement intéressés à la méthode de reconnaissance de primitives qui, inspirée de la transformée de Hough [Hou62], fait appel à des *espaces de paramètres*.

Cette méthode a été présentée par J. Vittone [Vit99] puis améliorée par R. Breton [Bre03] et étendue en dimension supérieure par M. Dexet [Dex06].

La reconstruction, l'opération inverse de la discrétisation, consiste alors à remplacer les primitives discrètes reconnues par leurs homologues continus.

Les objets discrets présentent très souvent du *bruit* (des perturbations) dû au moyen utilisé pour les obtenir, en particulier lorsqu'ils sont obtenus par acquisition (photo numérique, scanner, etc). Pour palier ce problème, I. Debled-Rennesson a défini la notion de *primitives floues* [DRRRD03] où l'épaisseur des primitives est augmentée. Cela permet de reconnaître comme segment de droite discret (flou) un ensemble de points discrets qui est presque une droite discrète classique avec quelques points qui peuvent être hors de place. Cela permet d'accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives et ainsi obtenir une reconstruction plus lisse.

Dans ce mémoire, nous nous sommes également intéressés à ce problème de reconnaissance de primitives discrètes bruitées. L'idée de I. Debled-Rennesson et al. de définir des primitives discrètes floues plus épaisses signifie que la marge d'erreur est considérée comme globale sur l'objet discret. Nous introduisons au contraire, une idée de marge d'erreur locale avec non pas des primitives redimensionnées mais des pixels redimensionnés [RLS09a].

Nous avons essentiellement travaillé avec le modèle de discrétisation supercouverture ou standard où l'élément structurant est un pixel. Dans ce modèle, la discrétisation d'un objet est constituée des points discrets dont l'élément structurant associé (le pixel) est coupé par la primitive discrète. Un pixel redimensionné qui n'aurait pas été coupé par une primitive peut l'être après son redimensionnement.

L'originalité de cette approche est que la marge d'erreur peut être distribuée à chaque pixel indépendamment des autres. Nous parlerons de *redimensionnement adaptatif* où le facteur de redimensionnement est déterminé par des critères locaux. Le bruit a tendance à perturber la reconnaissance et produire des primitives de petite taille. Le bord d'un objet qui serait lisse ne l'est plus s'il est bruité. En agrandissant les pixels, les primitives reconnues sont de plus grande taille, les irrégularités du contour (qui sont par exemple dues au bruit) sont éliminées. Nous nous sommes particulièrement intéressés à des critères locaux comme la tangente discrète symétrique maximale de J.-O. Lachaud et al. [LVDV05] ou l'estimateur d'échelle significative de B. Kerautret et al. [KL09].

Quand une reconstruction n'est pas inversible (ce qui est le cas quand une marge d'erreur lui est accordée), rien ne garantit que la topologie de l'objet est préservée. Nous avons développé deux méthodes en dimension 2 pour contraindre le redimensionnement des pixels et ainsi limiter les sauts topologiques dus à la reconstruction [RLS09b].

La première méthode proposée fait appel aux *axes médians* ou *squelettes* pour limiter le redimensionnement des pixels. Les axes médians utilisés doivent conserver la topologie de l'objet. S'ils ne sont pas intersectés par les pixels redimensionnés, les "zones à risque" de sauts topologiques sont généralement protégées.

La deuxième méthode est une condition sur les voisinage des pixels. Après leur redimensionnement, deux pixels "éloignés" ne doivent pas s'intersecter. Si c'est le cas, la taille des pixels est diminuée en conséquence.

Après les droites (hyperplans) nous nous sommes intéressés à l'utilisation du redimensionnement des pixels (éléments structurants) pour la reconnaissance de cercles discrets. Sur le modèle de la médiatrice euclidienne, nous avons défini la *médiatrice généralisée* entre deux régions comme l'ensemble de tous les centres des cercles passant par ces deux régions. Cette définition nous a permis d'étendre la propriété euclidienne de l'intersection des médiatrices et de définir le *centre généralisé des cercles circonscrits* [RLSA10].

A partir de ces deux définitions, nous avons défini une nouvelle méthode de reconnaissance exhaustive de cercles discrets compatible avec tous les modèles de discrétisation [ALSR11]. Comme la médiatrice généralisée est définie avec tous les types de régions, cette méthode permet de reconnaître des cercles discrets bruités grâce au redimensionnement adaptatif des éléments structurants.

Ce mémoire de thèse est constitué de trois chapitres :

Le premier chapitre décrit les notions élémentaires de géométrie discrète nécessaires à la bonne compréhension de la suite du mémoire. Dans cette partie, nous définirons les objets discrets et donnerons différentes méthodes pour les manipuler. Nous présenterons la méthode de reconstruction via un espace de paramètres. Nous terminerons ce chapitre par une première contribution qui est la généralisation des points de rebroussement discrets.

Le deuxième chapitre aborde une méthode consistant à accroître la taille des voxels pour accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives. La reconstruction d'objets avec une marge d'erreur conduit souvent à des sauts topologiques, la fin du chapitre décrit deux méthodes pour réduire les changements de topologie de l'objet.

Le troisième chapitre est consacré à la généralisation des notions de géométrie euclidienne telles que la médiatrice d'un segment (entre deux points) et le centre du cercle circonscrit (intersection des médiatrices). Ces notions sont d'abord généralisées à des surfaces puis à des pixels. Enfin, la méthode d'agrandissement des pixels présentée dans le second chapitre sera appliquée à cette nouvelle méthode de reconnaissance de cercles.

## Bibliographie

- [ALSR11] E. Andres, G. Largeteau-Skapin, and M. Rodríguez. Generalized Perpendicular Bisector and exhaustive discrete circle recognition. *Graphical Models*, 73(6) :354–364, 2011. Cité en page [XIII](#)
- [And94] E. Andres. Discrete circles, rings and spheres. *Computer & Graphics*, 18(5) :695–706, 1994. Cité en pages [XI](#), [15](#), [16](#), [86](#) et [92](#)
- [And00] Eric Andres. *Modélisation analytique discrète d’objets géométriques*. Habilitation à diriger les recherches, Université de Poitiers, 2000. Cité en pages [XI](#), [6](#), [11](#), [13](#) et [17](#)
- [And03] E. Andres. Discrete linear objects in dimension n : the standard model. *Graphical Models*, 65 :92–111, 2003. Cité en pages [XI](#), [13](#), [14](#), [17](#) et [87](#)
- [Bre65] J. E. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Syst. J.*, 4(1) :25–30, 1965. Cité en pages [XI](#) et [15](#)
- [Bre03] Rodolphe Breton. *Reconstruction inversible d’objets discrets 2D*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2003. Cité en pages [XII](#), [20](#) et [28](#)
- [Buz03] L. Buzer. A linear incremental algorithm for naive and standard digital lines and planes recognition. *Graphical Models*, 65 :61–76, 2003. Cité en page [XI](#)
- [COK95] D. Cohen Or and A. Kaufman. Fundamentals of surface voxelization. *Graphical Models and Image Processing*, 57(6) :453–461, November 1995. Cité en pages [XI](#) et [13](#)
- [Dex06] Martine Dexet. *Architecture d’un modeleur géométrique à base topologique d’objets discrets et méthodes de reconstruction en dimension 2 et 3*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2006. Cité en pages [XII](#), [20](#), [21](#), [22](#), [23](#), [26](#), [50](#), [58](#) et [98](#)
- [DRR95] Isabelle Debled-Rennesson and Jean-Pierre Reveillés. A linear algorithm for segmentation of digital curves. In *Parallel image analysis : theory and applications*, pages 73–100, 1995. Cité en page [XI](#)
- [DRRRD03] I. Debled Rennesson, J.L. Remy, and J. Rouyer Degli. Segmentation of discrete curves into fuzzy segments. 2003. Cité en pages [XII](#), [40](#) et [43](#)
- [FST96] J. Françon, J. M. Schramm, and M. Tajine. Recognizing arithmetic straight lines and planes. In *6th Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1176 of *LNCS*, pages 141–150, 1996. Cité en page [XI](#)
- [Hou62] P.-V.-C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns. In *United States Patent 3069654*, pages 47–64, 1962. Cité en pages [XI](#) et [20](#)
- [Kim84] C.E. Kim. Digital disks. 6(3) :372–374, 1984. Cité en pages [XI](#) et [80](#)
- [KL09] Bertrand Kerautret and Jacques-Olivier Lachaud. Multi-scale analysis of discrete contours for unsupervised noise detection. In *IWCIA*, pages 187–200, 2009. Cité en pages [XII](#), [45](#), [47](#) et [48](#)
- [LVDV05] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. De Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS vol. 3429, pages 240–251, 2005. Cité en pages [XII](#), [45](#), [46](#) et [47](#)

- [Rev91] J.-P. Reveillés. *Géométrie Discrete, calcul en nombre entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 1991. Cité en pages **XI**, **11** et **12**
- [Rev95] Jean-Pierre Reveillés. Combinatorial pieces in digital lines and planes. *SPIE Vision Geometry IV*, 2573, 1995. Cité en pages **XI** et **13**
- [RLS09a] M . Rodríguez and E. Largeteau-Skapin, G. Andres. Adaptive pixel resizing for multiscale recognition and reconstruction. In *IWCIA '09*, volume LNCS, 2009. Cité en pages **XII**, **45**, **49** et **52**
- [RLS09b] M . Rodríguez and E. Largeteau-Skapin, G. Andres. Adaptive pixel size reconstruction with topological control. In *IWCIA '09*, 2009. Cité en page **XII**
- [RLSA10] Marc Rodríguez, Gaëlle Largeteau-Skapin, and Eric Andres. Generalized perpendicular bisector and circumcenter. In Springer Verlag, editor, *Comp'Image*, Lecture Notes in Computer Science 6026, pages 1–10, May 2010. Cité en pages **XIII**, **81**, **82** et **84**
- [Siv04] I. Sivignon. *De la caractérisation des primitives à la reconstruction polyédrique de surfaces en géométrie discrète*. 2004. Cité en page **XI**
- [VC99] J. Vittone and J.-M. Chassery. (n,m)-cubes and farey nets for naive planes understanding. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS vol. 1568, pages 76–90, 1999. Cité en pages **XI** et **20**
- [Vit99] J. Vittone. *Caractérisation et reconnaissance de droites et de plans en géométrie discrète*. PhD thesis, Université Jean Fourier, Grenoble, 1999. Cité en page **XII**



# Entre le discret et le continu.

---

## Sommaire

---

<b>I-1</b>	<b>Vers le discret.</b>	<b>3</b>
I-1.1	Pavage et Points discrets	3
I-1.2	Objets discrets et leur topologie.	4
I-1.3	Droites discrètes et hyperplans analytiques.	8
I-1.4	La discrétisation et ses modèles	12
I-1.5	Cercles discrets et hypersphères.	15
<b>I-2</b>	<b>Vers le continu</b>	<b>19</b>
I-2.1	Espaces de Paramètres	21
I-2.2	Reconnaissance de primitives discrètes	22
I-2.3	Reconstruction	23
I-2.4	Reconstruction inversible	25
I-2.5	$k$ -cellules de rebroussement	27
	<b>Bibliographie</b>	<b>35</b>

---

## Introduction.

En plus de présenter les notions élémentaires indispensables à la bonne compréhension du mémoire, ce premier chapitre définira le contexte de nos recherches.

Les espaces euclidiens (qualifiés de *continus*) et les espaces discrets sont souvent considérés indépendamment l'un de l'autre. Ils ont des propriétés différentes conduisant à des branches séparées de l'informatique : la modélisation et la synthèse d'image d'un côté (espaces euclidiens) et vision informatique ou le traitement et l'analyse d'image de l'autre (espaces discrets).

Il existe pourtant deux opérations pour voyager entre ces deux espaces : la *discrétisation* permet de transformer un objet continu en un objet discret et la *reconstruction* (également appelée *continuation*) permet de transformer un objet discret en objet continu.

La discrétisation a été très largement étudiée et plusieurs modèles de discrétisation ont été définis. La perte d'information due à la discrétisation rend impossible l'existence d'une reconstruction qui soit l'inverse de la discrétisation.

Il existe toutefois des reconstructions dites *inversibles*, c'est-à-dire : la discrétisation de la reconstruction d'un objet est égale à l'objet en question. La reconstruction qui nous intéresse est en deux étapes : la première étape est la reconnaissance de primitives discrètes via un *espace de paramètres* et la seconde consiste à remplacer les primitives discrètes reconnues par des primitives euclidiennes.

Ce chapitre est divisé en deux sections. La première définit les espaces discrets, la discrétisation et l'expression analytique de primitives discrètes. La deuxième présente la méthode de reconstruction qui est utilisée dans tout le second chapitre de la thèse.

**Remarque :** À la fin de la seconde partie (voir chapitre [I-2.5.3](#)) est présentée une première contribution : les *k - cellules* en tant qu'extension en dimension supérieure des points de rebroussement discrets.

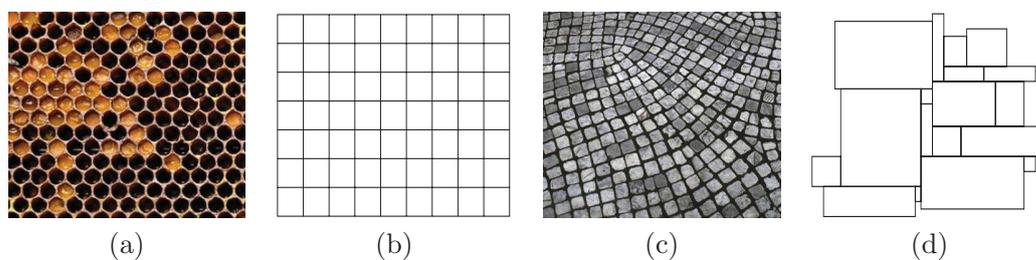
## I-1 Vers le discret.

### I-1.1 Pavage et Points discrets

Dans la géométrie euclidienne, les espaces sont denses et non dénombrables. Par opposition, un espace discret est constitué d'éléments isolés dénombrables. Réaliser le pavage d'un espace continu consiste à le diviser en régions.

**Définition I-1.1 (Pavage)** *Un pavage est une partition d'un espace euclidien par des éléments d'un ensemble fini, appelés **pavés**. Ces pavés sont des compacts d'intérieur non vide.*

Deux grands types de pavages peuvent être distingués : ceux dont les motifs (formes et tailles) se répètent, appelés *pavages réguliers* et les autres : les *pavages irréguliers*. La figure I.1 donne des exemples de pavages en dimension 2.



**Figure I.1** – Exemple de pavages en dimension 2 : (a) Photo d'une ruche d'abeille (pavage régulier par des hexagones). (b) Pavage régulier par des carrés. (c) Pavage irrégulier d'une rue. (d) Grille irrégulière isothétique.

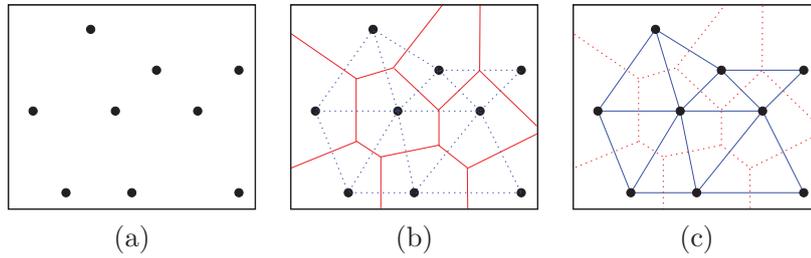
Soit  $P$  un pavage de  $E$  et  $\mathcal{P} = (p_i)$  un ensemble de points tel que chaque pavé de  $P$  contienne un unique  $p_i$ . on dit que  $\mathcal{P}$  est un ensemble de *points isolés* (point autour duquel il existe une boule de rayon non nul ne contenant aucun autre point).

**Définition I-1.2 (Espace discret)** *Un espace discret  $E_d$  est un ensemble de points isolés d'un espace euclidien  $E$ . Ces points isolés sont appelés **points discrets**. A cet ensemble de points discrets est associé un pavage de  $E$ .  $E_d$  est dénombrable.*

Les pavés ne peuvent pas être subdivisés, ce sont des *éléments minimaux* partageant une partie de leur frontière avec un nombre fini d'autres pavés.

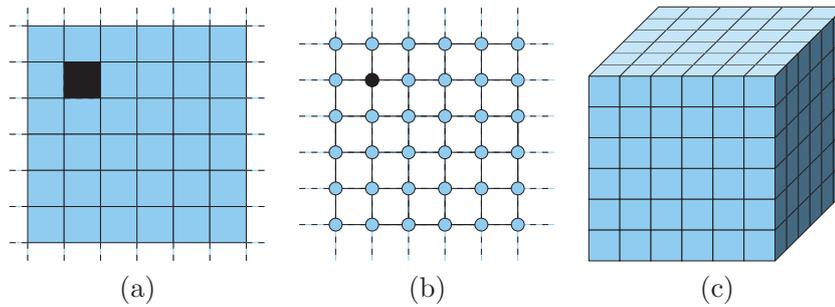
Soit  $d$  une distance sur  $\mathbb{R}^n$ , à tout ensemble fini de points isolés (appelés germes) peut être associé un pavage par l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  les plus près d'un germe. Un tel pavage est appelé *diagramme de Voronoï*. La *triangulation de Delaunay* est le graphe dual du diagramme de Voronoï. Deux points isolés sont reliés par une arête si les pavés auxquels ils sont associés sont adjacents. Les arêtes du diagramme de Voronoï sont sur les médiatrices des arêtes de la triangulation de Delaunay. La figure I.2 montre la dualité en dimension 2 entre diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay.

Dans ce mémoire de thèse, à moins que le contraire ne soit spécifié, un espace discret de dimension  $n$  sera assimilé à l'ensemble des  $n$ -uplets (tuples à  $n$  composantes) où chacune des



**Figure I.2** – (a) Nuage de points isolés. (b) Diagramme de Voronoï. (c) Triangulation de Delaunay.

composantes est un entier relatif. Ces  $n$ -uplets sont les graines du diagramme de Voronoï réalisant le pavage de l'espace euclidien par des hypercubes. De tels espaces sont dits *orthonormés*. La figure I.3 illustre leur représentation usuelle en dimension 2 et 3.



**Figure I.3** – Exemple d'espaces discrets orthonormés. (a) Espace discret en dimension 2. (b) Représentation duale du même espace discret. (c) Espace discret en dimension 3.

**Note :** Dans les espaces orthonormés, les points discrets sont assimilés aux pavés qui leur sont associés. Ils sont appelés *pixels* (picture element) en dimension 2, *voxels* (volume element) en dimension 3, et *hypervoxels* en dimension  $n$ .

## I-1.2 Objets discrets et leur topologie.

Les objets discrets sont définis comme un ensemble de points discrets. Nous allons voir dans cette section comment décrire leurs frontières dans un complexe cellulaire abstrait, puis les notions de voisinage et de connexité.

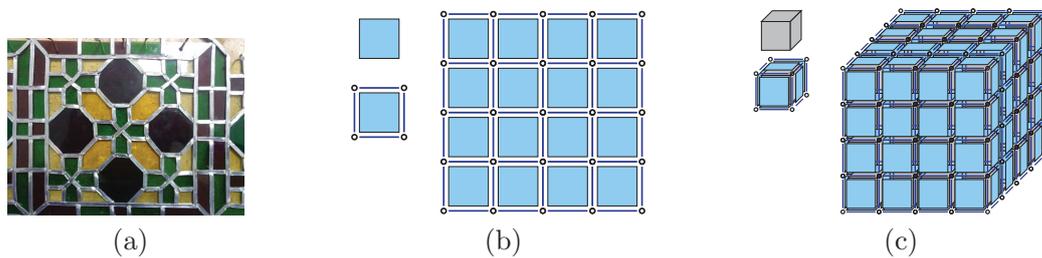
**Définition I-1.3** (Objet discret) *Un objet discret  $\mathcal{O}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^n$ .*

### I-1.2.1 Complexes cellulaires abstraits.

Les complexes cellulaires abstraits [Kov93] sont utilisés pour mieux décrire les espaces discrets et notamment la frontière d'un objet discret. L'idée est de considérer les pavés d'un espace discret de dimension  $n$  comme des ouverts et d'ajouter entre eux des cellules topologiques de toutes dimensions inférieures à  $n$ .

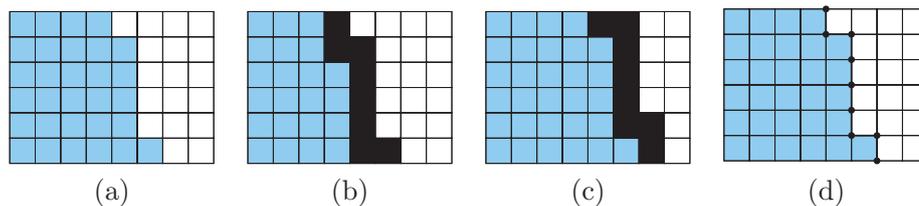
Soit  $\mathcal{E}$  un espace discret quelconque de dimension  $n$ . Les pavés de  $\mathcal{E}$  n'acceptent comme intersection que des parties de leur frontière. Deux pavés adjacents s'intersectent en une cellule de dimension  $k < n$  appelée  $k$ -cellule. Les pavés sont considérés comme des ouverts, ce sont des  $n$ -cellules. Un *complexe cellulaire abstrait* est un espace discret décrit par des  $k$ -cellules ( $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ).

Les 0-cellules sont couramment appelées *pointels*, les 1-cellules appelées *lignels* et les 2-cellules appelées *surfels*. La figure I.4 illustre des exemples de complexes cellulaires abstraits en dimension 2 et 3.



**Figure I.4** – (a) Entre les fragments de verre d'un vitrail (pavage irrégulier de dimension 2) sont placées des baguettes de plomb correspondant aux lignels (dimension 1). Les baguettes de plomb sont soudées entre elles, ces soudures de dimension 0 correspondent aux pointels. (b) En dimension 2, un pixel, ses 4 lignels et ses 4 pointels, à côté un complexe cellulaire abstrait orthonormé de dimension 2. (c) En dimension 3, un voxel, ses 6 surfels, ses 12 lignels et ses 8 pointels, à côté un complexe cellulaire abstrait orthonormé de dimension 3.

Ces  $k$ -cellules topologiques permettent de décrire précisément les frontières entre différentes régions d'une image. En effet, la frontière entre deux régions est un ensemble de  $k$ -cellules n'appartenant à aucune des deux (voir figure I.5).



**Figure I.5** – Exemple en dimension 2 de description de la frontière entre deux régions. (a) image discrète (une région blanche et une grise). (b) frontière discrète décrite par des pixels de la région en gris. (c) frontière discrète décrite par des pixels de la région en blanc. (d) frontière décrite par des cellules topologiques.

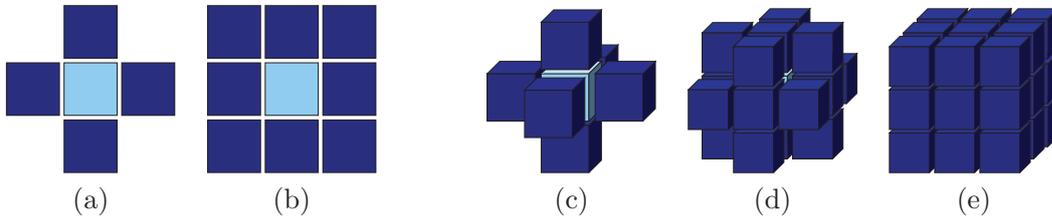
### I-1.2.2 Voisinage.

Dans le cadre des espaces discrets orthonormés, la définition de voisinage utilisée est la suivante :

**Définition I-1.4** ( $k$ -voisinage[And00]) Soit  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . Deux points discrets  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{Z}^n$  et  $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$  sont dit  $k$ -voisins si  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |p_i - q_i| \leq 1$  et  $k \leq n - \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$ .

En utilisant les complexes cellulaires abstraits, le  $k$ -voisinage peut être redéfini comme suit : deux points discrets sont  $k$ -voisins si et seulement si ils partagent une cellule topologique de dimension au moins  $k$ .

En pratique, dans un espace discret 2D, deux pixels sont 1-voisins (respectivement 0-voisins) s'ils ont une arête en commun (respectivement une arête ou un sommet en commun). Autrement dit en dimension  $n$ , deux voxels sont  $k$ -voisins si la dimension de leur intersection est au moins  $k$  (voir Figure I.6).



**Figure I.6** – Exemple de voisinage en dimension 2 et 3. (a) Un pixel (2D) (en clair) et ses quatre 1-voisins. (b) Le même pixel et ses huit 0-voisins. (c) un voxel (3D) (en clair) et ses six 2-voisins. (d) le même voxel et ses dix-huit 1-voisins. (e) le même voxel et ses vingt-six 0-voisins.

**Remarque :** Dans la littérature, les termes de 4 et 8-voisinage (respectivement 6, 18 et 26-voisinage) sont souvent utilisés en dimension 2 (respectivement en dimension 3). La définition utilisée dans ce mémoire est préférable car directement liée aux relations d'adjacence entre hypervoxels. De plus, elle est homogène en toute dimension.

### I-1.2.3 Connexité et Séparabilité.

Les propriétés des objets discrets sont très différentes de celles de leurs homologues continus (décrits dans un espace euclidien). La notion de connexité discrète permet de savoir si un objet discret est en un seul ou plusieurs "morceaux".

**Définition I-1.5** ( $k$ -connexité) Soit  $\mathcal{O}$  un objet discret,  $\mathcal{O}$  est dit  $k$ -connexe si et seulement si pour tout couple  $(p, q) \in \mathcal{O}^2$  il existe une suite  $\mathcal{S}$  d'éléments de  $\mathcal{O}$  commençant par  $p$  et terminant par  $q$  telle que ses éléments consécutifs soient  $k$ -voisins.

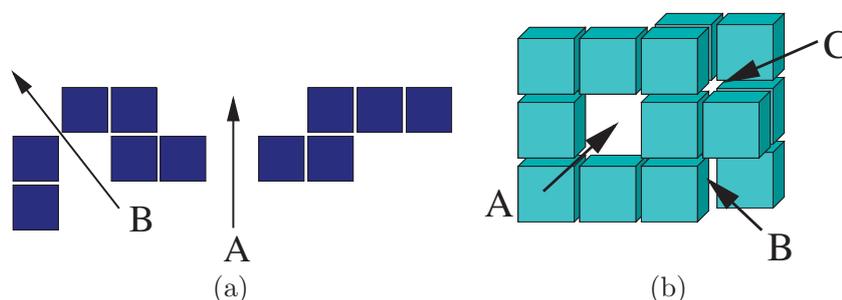
Si un objet n'est pas connexe, il est divisé en plusieurs composantes définies comme suit :

**Définition I-1.6** ( $k$ -composante) Soit  $\mathcal{O}$  un objet discret, une  $k$ -composante est un sous-ensemble maximal  $k$ -connexe de  $\mathcal{O}$ .

**Notation :** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.  $A$  privé de  $B$  est noté  $A \setminus B$ .

**Définition I-1.7** (*k*-séparant) Soient  $\mathcal{O}_1$  et  $\mathcal{O}_2$  deux objets discrets tels que  $\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$ . Si  $\mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_2$  n'est pas *k*-connexe, alors  $\mathcal{O}_2$  est dit *k*-séparant de  $\mathcal{O}_1$ . Un objet 0-séparant sera simplement dit séparant.

**Définition I-1.8** (*k*-tunnel) Soit  $E \subset F$  tels que  $E$  n'est pas un *k*-séparant de  $F$ . S'il existe un point discret  $p \in F$  tel que  $E \cup p$  soit un *k*-séparant de  $F$  le décomposant en deux composantes connexes, il existe alors un *k*-chemin reliant ces deux composantes passant par  $p$ . On dit que  $E$  présente un *k*-tunnel.



**Figure I.7** – Exemples de *k*-tunnels. (a) en dimension 2 : un 1-tunnel (A) et un 0-tunnel (B). (b) en dimension 3 : un 2-tunnel (A), un 1-tunnel (B) et un 0-tunnel (C).

**Définition I-1.9** (Point *k*-simple) Soit  $B$  un *k*-séparant de  $A$  tel que  $A \setminus B$  a exactement 2 *k*-composantes. Un point discret  $p \in B$  est dit *k*-simple si  $B \setminus \{p\}$  est un *k*-séparant de  $A$ .

**Définition I-1.10** (*k*-minimal) Un objet discret *k*-séparant est dit *k*-minimal s'il ne contient aucun point *k*-simple.

#### I-1.2.4 *k*-Courbes et Code de Freeman

En géométrie discrète, une *k*-courbe dans un espace de dimension  $n$  est une suite de points discrets *k*-voisins définie par

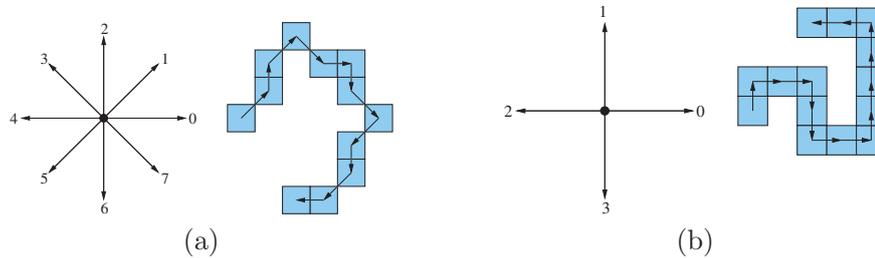
**Définition I-1.11** (*k*-courbe en dimension  $n$ ) Soient  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , et  $\mathcal{C} = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{Z}^n$  une suite de  $m \in \mathbb{N}^*$  points discrets. l'ensemble  $\mathcal{C}$  est une *k*-courbe si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1, m - 1 \rrbracket$ ,  $p_i$  et  $p_{i+1}$  sont *k*-voisins.

Plutôt que d'être décrite par un ensemble de  $n$ -uplets (coordonnées des points discrets la constituant), une *k*-courbe peut être décrite de proche en proche via le *code de Freeman*.

Effectivement, dans un espace discret, un point discret a un nombre fini de *k*-voisins chacun dans une direction. Le codage de Freeman est la numérotation de chacune de ces directions.

Le code de Freeman est très efficace pour décrire une *k*-courbe avec un minimum d'information. Il permet également de parcourir de façon ordonnée une *k*-courbe.

Par exemple, en dimension 2, un pixel a huit 0-voisins ou quatre 1-voisins. Une 0-courbe peut être décrite par son point de départ et une suite de valeurs entre 0 et 7, alors qu'une



**Figure I.8** – Codage de Freeman en dimension 2. (a) courbe 0-connexive de code 12170675654. (b) courbe 1-connexive de code 1003300111122.

1-courbe sera décrite par son point de départ et une suite de valeurs entre 0 et 3 (voir figure I.10).

La principale application de la géométrie discrète est l'imagerie discrète utilisée de nos jours par les téléviseurs, téléphones, ordinateurs, etc. Les images, musiques et vidéos étaient autrefois analogiques (pellicules photos, bobines de cinéma, vinyles, ...). Ces appareils utilisent aujourd'hui l'information sous forme discrète (ou *logique*). Dans cette thèse, nous nous intéressons particulièrement aux images discrètes (quelle que soit leur dimension).

**Définition I-1.12 (Image Discrète)** Une image discrète est une fonction totale (fonction dont le domaine est l'ensemble de départ) entre un espace discret quelconque fini et un ensemble de valeurs (appelées couleurs).

Un pavé n'a pas de taille bien définie. La taille d'un pixel dépend de la *résolution* de l'image discrète considérée.

**Définition I-1.13 (Résolution)** La résolution définit le nombre de pixels par unité de longueur (centimètre ou pouce). En imagerie numérique, on l'exprime en PPI (*Pixels Per Inch*).

Dans un espace discret orthonormé fini, une image discrète est habituellement représentée sous la forme d'une matrice. L'inconvénient d'une telle description est que l'espace mémoire nécessaire pour la stocker est proportionnelle au nombre de points constituant l'espace.

### I-1.3 Droites discrètes et hyperplans analytiques.

La description analytique des objets à l'aide d'(in)équations mathématiques permet de représenter vectoriellement une image discrète. Elle est divisée en primitives : segments de droites, des polygones, des arcs de cercles, etc. Chacune de ces primitives est décrite individuellement de manière analytique indépendamment de la taille et de la résolution.

Contrairement aux images matricielles qui travaillent directement sur les pixels, les objets discrets sont décrits à l'aide d'un ensemble d'inéquations définissant une *zone offset*. L'objet discret est alors constitué de tous les points discrets situés à l'intérieur de la zone offset.

Cette section est dédiée à la description analytique des primitives usuelles.

En géométrie euclidienne, une droite (ou un segment de droite) est constituée d'une infinité de points. Beaucoup de recherches ont dû être menées pour définir les droites discrètes analytiques. Un bref historique sur les droites discrètes est présenté ci-dessous.

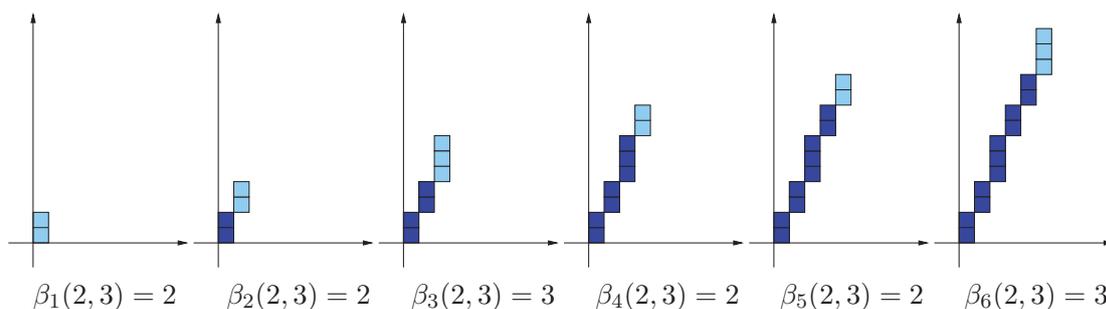
En dimension 2, la représentation d'une droite discrète (autre que verticale ou horizontale) dans une grille orthonormale ressemble plus à un *escalier* qu'à une droite euclidienne. Les marches, appelées *paliers*, de cet escalier ne sont pas forcément toutes de même longueur.

### I-1.3.1 Historique avant la première définition analytique

Les premiers pas sont attribués à Jean III Bernoulli pour ses travaux au XVIII<sup>ème</sup> siècle. Dans le cadre de ses recherches en astronomie tabulaire, il définit les *suites beta*, représentant étape par étape l'accumulation des décimales négligeables jusqu'à ce que leur somme ne le soit plus.

**Définition I-1.14** (Suite Beta[Ber71]) *Soit un nombre  $\alpha \in \mathbb{R}$ , la suite beta de  $\alpha$  écrite  $\beta(\alpha)$  est la suite infinie  $\beta_k(\alpha) = \lfloor (k+1)\alpha \rfloor - \lfloor k\alpha \rfloor$ .*

La suite beta d'un nombre réel  $\alpha$  permet de tracer une droite discrète de pente  $\alpha$ . La  $n^{\text{ième}}$  valeur de la suite beta donne la taille du  $n^{\text{ième}}$  palier de la droite discrète (voir figure I.9).



**Figure I.9** – Tracé de la droite discrète de pente 2,3 grâce à sa suite beta  $\beta_k(2,3)$ .

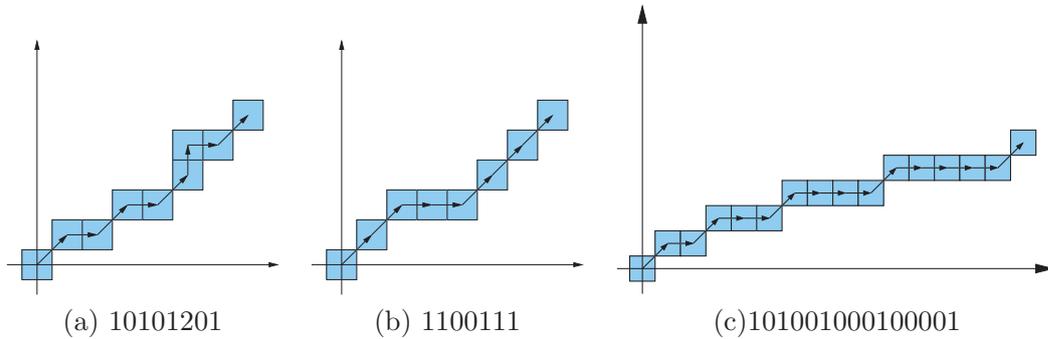
Ce n'est qu'au XX<sup>ème</sup> siècle que Herbert Freeman définit son codage éponyme permettant de décrire les 0-courbes (voir I-1.2.4). Il définit également trois critères qui, s'ils sont vérifiés, garantissent qu'une telle courbe est un segment de droite discrète.

**Propriété I-1.15 (Critères de Freeman [Fre74])** *Si un 8-arc est un segment de droite discrète, alors son code vérifie les trois propriétés suivantes :*

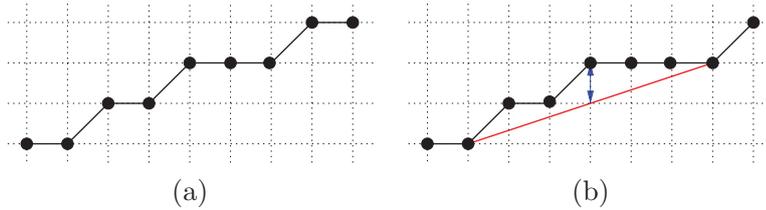
- *Le code contient au plus deux valeurs différentes, celles-ci diffèrent au plus d'une unité (modulo 8)*
- *Une de ces deux valeurs apparaît toujours de manière isolée*
- *Cette valeur isolée est répartie uniformément dans le code*

A la même époque, Arthur H. Rosenfeld montra que les centres des points discrets d'un segment de droite discrète ne peuvent pas s'éloigner de plus d'une unité de n'importe quelle corde euclidienne entre deux d'entre eux. Une courbe discrète est un segment de droite discrète si et seulement s'il possède la propriété suivante.

**Propriété I-1.16 (Corde de Rosenfeld[Ros74])** *Un ensemble de pixels  $X$  vérifie la propriété de la corde si pour tout couple de points  $(P, Q)$  de  $X$  et pour tout point  $m(x, y)$  du segment réel  $[PQ]$ , il existe un point  $M(i, j)$  de  $X$  tel que  $\max(\|i - x\|, \|j - y\|) < 1$ .*



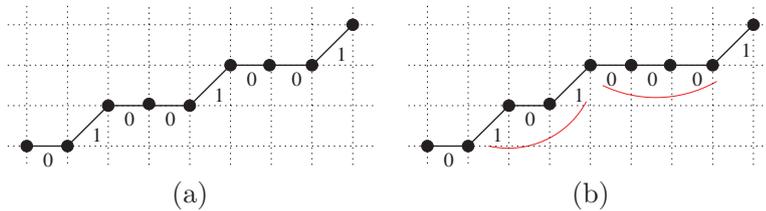
**Figure I.10** – Exemples de 0-courbes ne vérifiant pas les critères de Freeman. (a) Il existe plus de deux valeurs différentes. (b) Aucune des valeurs n’apparaît de manière isolée. (c) la valeur isolée n’est pas répartie uniformément dans le code.



**Figure I.11** – Illustration de la propriété de la corde de Rosenfeld. (a) Exemple. (b) Contre-exemple.

Une décennie après, S.H.Y. Hung définit une propriété équivalente à la corde de Rosenfeld et aux critères de Freeman.

**Propriété I-1.17 (Régularité de Hung [Hun85])** *Un arc 8-connexe est un segment de droite discrète si et seulement si le mot de cet arc ne contient pas de paire de sous-mots de même longueur dont les sommes des lettres diffèrent de deux ou plus.*



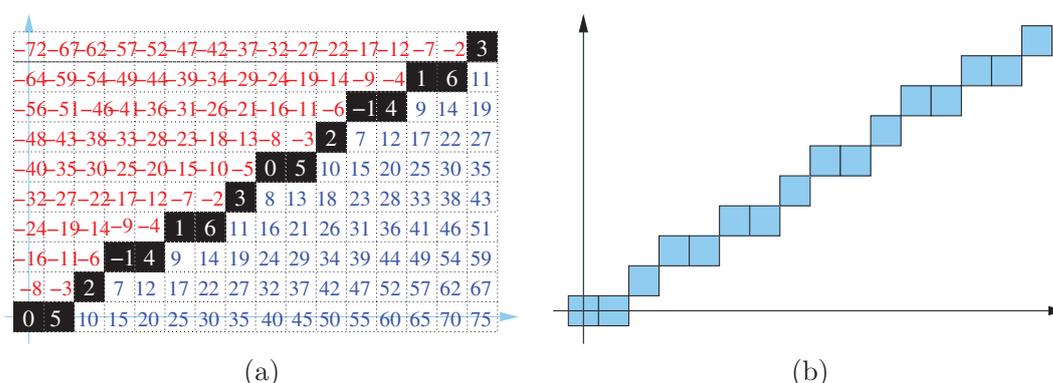
**Figure I.12** – Illustration de la régularité de Hung. (a) un exemple. (b) un contre-exemple : la somme des lettres des deux mots de longueur trois sont respectivement  $2 = 1 + 0 + 1$  et  $0 = 0 + 0 + 0$ .

### I-1.3.2 Définition analytique

La représentation d’objets discrets tels que des droites peut se faire de deux façons : la première est dite par *extension* car il y a énumération des pavés constituant l’objet. La seconde

représentation est dite *analytique*, elle consiste à décrire l'objet par un système d'(in)équations qui doivent être vérifiées par les points discrets constituant l'objet. Contrairement à la représentation par extension, elle est indépendante du nombre de points discrets de l'objet décrit.

**Définition I-1.18** (Droite discrète arithmétique) [Rev89] Une droite discrète de paramètres  $(a, b, \mu)$  et d'épaisseur arithmétique  $\omega$  est définie comme l'ensemble des points entiers  $(x, y)$  vérifiant la double inégalité  $\mu \leq ax + by < \mu + \omega$  avec  $(a, b, \mu, \omega) \in \mathbb{Z}^4$  telle que  $a$  et  $b$  soient premiers entre eux. Une telle droite est notée  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  et  $a/b$  en est la pente.



**Figure I.13** – Représentation de la droite discrète arithmétique de Reveillés  $\mathcal{D}(5, 8, -1, 8)$ , les inégalités en sont  $-1 \leq 5x - 8y < 7$ . (a) chaque point discret  $(x, y)$  est étiqueté par  $5x - 8y$ . (b) la droite discrète obtenue.

Cette première définition de droite analytique discrète fut donnée par Jean Pierre Reveillés [Rev89], il généralisa par la suite cette définition aux hyperplans analytiques discrets [Rev91].

**Définition I-1.19** (Hyperplans analytiques discrets) [Rev91] En dimension  $n$ , l'hyperplan analytique discret de paramètres  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$  est l'ensemble des points discrets  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  vérifiant  $\mu \leq \sum_{i=1}^n (A_i x_i) < \mu + \omega$ .

### I-1.3.3 Caractérisation selon l'épaisseur

En fonction de son épaisseur arithmétique  $\omega$ , un hyperplan analytique discret  $\mathcal{H}$  peut présenter différentes propriétés.

**Théorème I-1.20** ([And00]) En dimension  $n$ , soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan analytique discret de paramètres  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ . Alors :

- Si  $\omega \geq \sum_{i=k+1}^n |A_i|$  alors,  $\mathcal{H}$  est un  $k$ -séparant.
- Si  $\omega < \sum_{i=k+1}^n |A_i|$  alors,  $\mathcal{H}$  admet des  $k$ -tunnels.
- $\mathcal{H}$  est  $k$ -minimal si et seulement si  $\omega = \sum_{i=k+1}^n |A_i|$ .

Ce théorème montre que la  $k$ -séparabilité d'un hyperplan peut être contrôlée optimalement par son épaisseur arithmétique.

**Définition I-1.21** ([And00]) Soit  $\mathcal{H}$  un hyperplan analytique discret de paramètres  $A \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{R}$ . Alors :

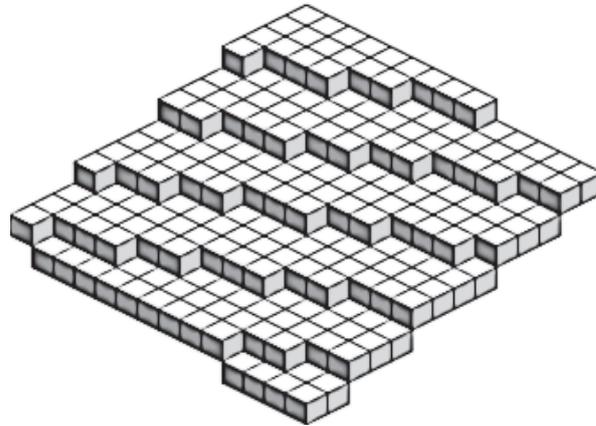


Figure I.14 – Exemple d’hyperplan discret naïf en dimension 3.

- $\mathcal{H}$  est dit naïf si  $\omega = \max_{1 \leq i \leq n} \|A_i\|$
- $\mathcal{H}$  est dit standard si  $\omega = \sum_{i=1}^n \|A_i\|$
- $\mathcal{H}$  est dit mince si  $\omega < \max_{1 \leq i \leq n} \|A_i\|$
- $\mathcal{H}$  est dit épais si  $\omega > \sum_{i=1}^n \|A_i\|$ .

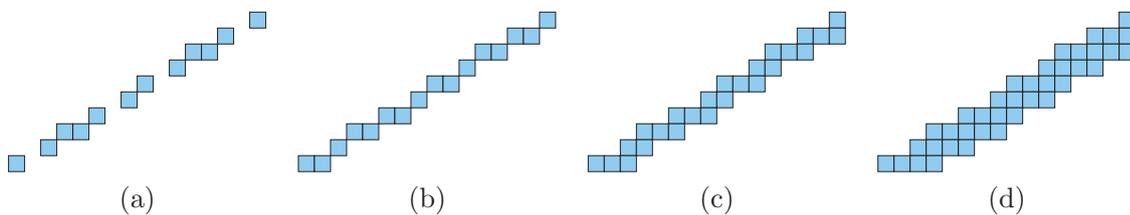


Figure I.15 – Représentation de la droite discrète arithmétique de Reveillés de paramètre  $A = (5, 8), \mu = -1$  et  $\omega$ , les inégalités en sont  $-1 \leq 5x - 8y < -1 + \omega$ . (a)  $\omega = 6$  droite mince. (b)  $\omega = 8$  droite naïve. (c)  $\omega = 13$  droite standard. (d)  $\omega > 13$  droite épaisse.

**Remarque :** Les termes de naïf et standard ont respectivement été proposés par Jean Pierre Reveillés [Rev91] et Jean Françon [Fra95a].

#### I-1.4 La discrétisation et ses modèles

Il existe trois façons d’obtenir un objet discret. La première est la *construction* : des éléments de l’espace discret sont sélectionnés puis assemblés jusqu’à obtention de l’objet. La seconde est l’*acquisition*, produit un ensemble de données suite à un échantillonnage (scanner, appareil photo/caméra numérique, microphone numérique, ...). La troisième est celle qui nous intéresse, la *discrétisation* : la discrétisation est l’opération qui transforme un objet continu décrit dans un espace euclidien en un objet discret décrit dans un espace discret.

**Définition I-1.22** Soit un  $E$  objet continu et  $d$  une distance, la discrétisation de  $E$  notée  $D_d(E)$  associée à la distance  $d$  est définie par :

$$D_d(E) = \left\{ p \in \mathbb{Z}^2 \mid d(p, E) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Une définition équivalente à la précédente fait intervenir des *éléments structurants* : Boule  $B_d(\frac{1}{2})$ . La discrétisation s'écrit alors :

$$D_d(E) = (E \oplus B_d(\frac{1}{2})) \cap \mathbb{Z}^2$$

où  $A \oplus B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$  est la somme de Minkowski.

**Notation :** La région  $E \oplus B_d(\frac{1}{2})$  est appelée *région offset*.

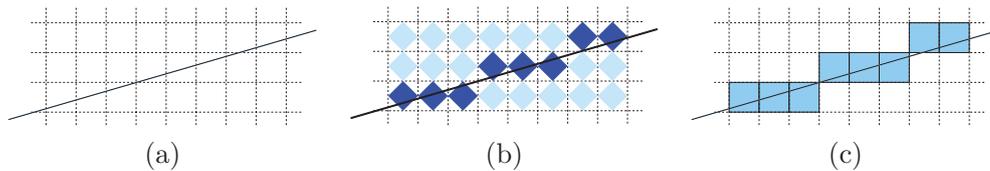
Ces définitions sont très générales. Elles permettent de définir différents modèles de discrétisations associés chacun à une distance  $d$  :

- Le *Modèle Naïf* [Rev95, And00] : basé sur la distance de Manhattan  $d_1$ .
- Le *Modèle Pythagoricien* : basé sur la distance euclidienne  $d_2$ .
- Les *Modèles Supercouverture* [COK95] et *Standard* [And03] : basés sur la distance de Tchebychev  $d_\infty$ .

#### I-1.4.1 Le modèle Naïf

Pour le modèle naïf, l'élément structurant est un carré de côté  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de diagonale unitaire alignée avec les axes. C'est la boule  $B_{d_1}$  de rayon  $\frac{1}{2}$  centrée en un point de  $\mathbb{Z}^n$  (voir figure I.16).

En dimension 2, La discrétisation d'une droite euclidienne selon le modèle naïf consiste à considérer les pixels où la droite euclidienne intersecte la réflexion de l'élément structurant.



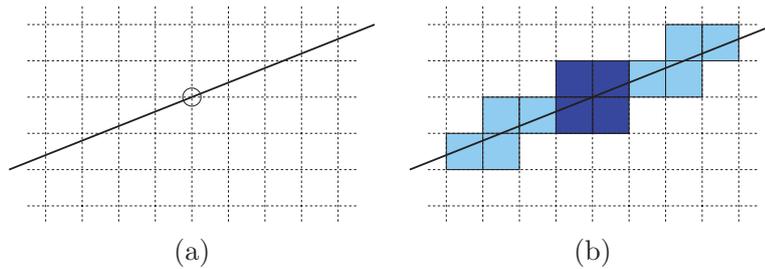
**Figure I.16** – Exemple de discrétisation d'une droite euclidienne en dimension 2. (a) une droite euclidienne. (b) pavage de l'espace par des boules  $B_{d_1}$  de rayon  $\frac{1}{2}$ . (c) Droite discrète naïve obtenue.

**Remarque :** Les éléments structurants des modèles de discrétisations définis par des distances sont leurs propres réflexions.

#### I-1.4.2 Le modèle supercouverture

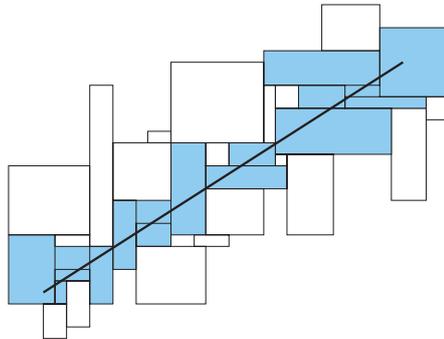
Pour le modèle supercouverture [COK95], l'élément structurant est un hypercube de taille unitaire dont les côtés sont alignés avec les axes. C'est la boule  $B_{d_\infty}$  de rayon  $\frac{1}{2}$  centrée en un point de  $\mathbb{Z}^n$

De part sa définition, un hyperplan supercouverture peut présenter des particularités appelés des  $k$ -bulles. Lorsque l'hyperplan euclidien passe par le sommet d'un voxel (ou un pointel), tous les voxels adjacents à ce sommets sont considérés, formant ainsi un amas de points 0-simples appelé une  $k$ -bulle (voir figure I.17).



**Figure I.17** – Exemple de discrétisation supercouverture d'une droite euclidienne en dimension 2. (a) la droite euclidienne. (b) Droite discrète supercouverture obtenue présentant une 2-bulle (en foncé).

Le modèle de discrétisation supercouverture peut facilement être appliqué à tout espace discret régulier ou non. La méthode de discrétisation supercouverture d'un hyperplan euclidien sera décrite par l'ensemble des pavés de l'espace discret considérés qui sont coupés par l'hyperplan. D. Coeurjolly a défini [Coe05] la discrétisation supercouverture d'une droite dans le cadre des grilles irrégulières isothétiques (voir figure I.18).



**Figure I.18** – Discrétisation d'une droite supercouverture dans une grille irrégulière isothétique.

### I-1.4.3 Le modèle standard

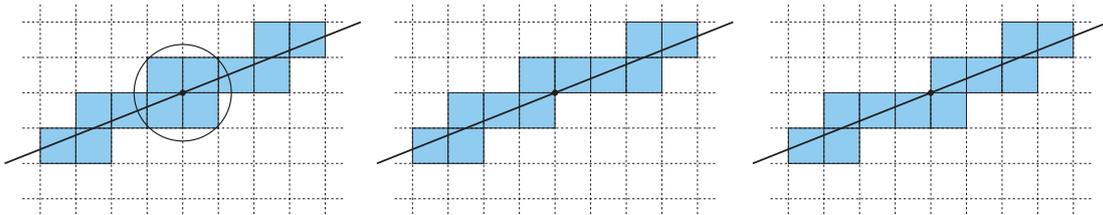
Le modèle standard a été créé à partir du modèle supercouverture dans le but de supprimer les  $k$ -bulles. Ce modèle de description analytique a été présenté par E. Andres dans [And03]. Le terme *standard* a été donné par J. Françon [Fra95b] pour qualifier des hyperplans analytiques discrets  $(n - 1)$ -connexes.

Le modèle standard est géométriquement consistant, c'est-à-dire, les sommets d'un polyèdre standard 3D sont des points standards 3D, et ses faces des morceaux de plans standards 3D.

Le modèle standard est obtenu par simple réécriture des inégalités du modèle supercouverture. Un objet linéaire supercouverture est défini par  $\sum_{i=1}^n (a_i X_i \leq a_0)$ . Les points simples des  $k$ -bulles vérifient  $\sum_{i=1}^n (a_i X_i = a_0)$ . Pour éliminer les points simples et ainsi définir le modèle standard, certaines inéquations sont réécrites pour devenir  $\sum_{i=1}^n (a_i X_i < a_0)$ .

Les inéquations réécrites sont déterminées par une orientation de l'espace : contrairement au modèle supercouverture, il existe plusieurs modèles standards. La figure I.19 donne un exemple en dimension 2 de droites standards obtenues par suppression d'un des points simples de la  $k$ -bulle obtenue par le modèle supercouverture. Chacune de ces suppressions conduit à un modèle standard différent.

**Remarque :** Le modèle standard est une 0-discrétisation de Brimkov et al. [BAB00] et par conséquent un 0-séparant,  $(n - 1)$ -connexe ne présentant ni tunnels, ni points simples, ni  $k$ -bulles.



**Figure I.19** – A gauche, la discrétisation supercouverture d'une droite. Au centre et à droite les deux différentes droites standard pouvant être obtenue par suppression d'un des points simples de la  $k$ -bulle.

### I-1.5 Cercles discrets et hypersphères.

Après avoir vu comment définir puis décrire les droites (hyperplans) discrètes, nous nous intéressons aux cercles (hypersphères) discrets.

Les premiers algorithmes incrémentaux de tracé de cercles discrets ont été proposés par Bresenham [Bre65]. De nombreux autres lui ont succédé, les plus usuels sont [PB74, Bre77, KK83, WR87].

D'autres méthodes ont ensuite été développées comme par exemple des méthodes par splines [PT89], par algorithmes parallèles [Wri90], à partir d'équations différentielles réelles ou discrètes [Hol91], par transformation de schémas numériques continus en schémas numériques discrets [RWF<sup>+</sup>09] ou encore par représentation multi-échelle ( $\Omega$ -arithmétisation) [CWA<sup>+</sup>10].

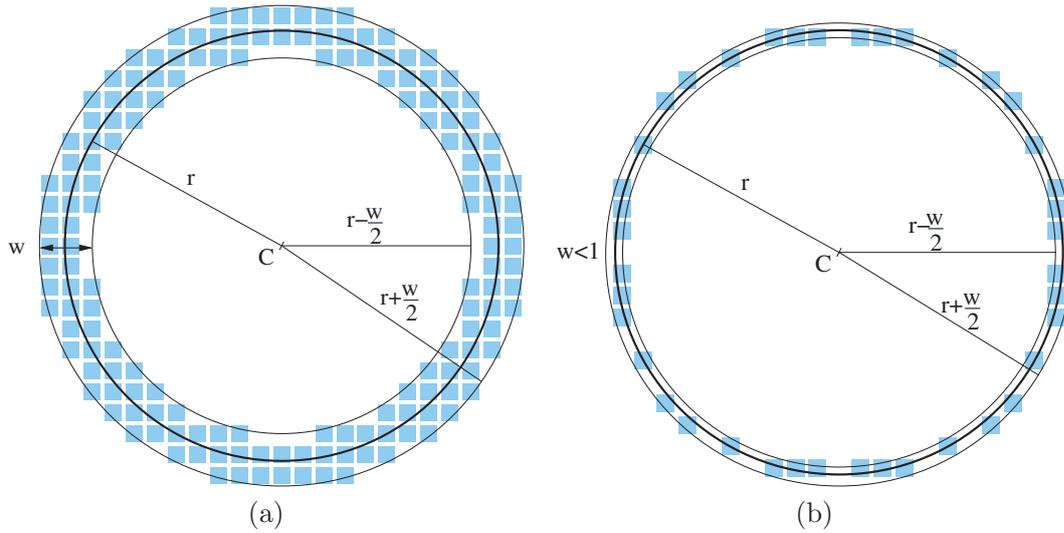
Nous nous intéressons aux modèles analytiques des cercles continus de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  et de rayon  $R \in \mathbb{R}^+$  notés  $\mathcal{C}(x_0, y_0, R)$ .

#### I-1.5.1 Cercles d'Andres

La première définition analytique des cercles discrets a été donné par Eric Andres [And94, AJ97] (voir figure I.20) :

**Définition I-1.23** (Cercle analytique discret [And94])  $\mathcal{C} = (x_0, y_0, R, \Omega)$  est le cercle analytique discret de centre  $(x_0, y_0)$ , de rayon  $R \in \mathbb{R}$  et d'épaisseur  $\Omega \in \mathbb{R}$  est l'ensemble des points discrets  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $(R - \frac{\Omega}{2})^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < (R + \frac{\Omega}{2})^2$ .

Avec deux inégalités larges (" $\leq$ ") et en prenant  $\Omega = 1$ , les cercles d'Andres sont la discrétisation d'un cercle continu selon le modèle Pythagoricien (associé à la distance euclidienne).



**Figure I.20** – Exemples de cercles analytiques discrets de Andres. (a) cercle connexe d'épaisseur  $\omega > 1$ . (b) cercle non-connexe d'épaisseur  $\omega < 1$ .

Contrairement aux définitions des cercles discrets précédentes, un pavage de l'espace peut être établi par des cercles discrets d'Andres concentriques (voir figure I.21).

**Propriété I-1.24 (connexité des cercles analytiques discrets [And94])** Soit  $\mathcal{C}$  un cercle analytique discret. Si son épaisseur  $\omega \geq 1$  alors il est 0-connexe. De plus, les cercles analytiques discrets concentriques de centre  $M \in \mathbb{Z}^2$  et de rayon  $r \in \mathbb{Z}$  forment un pavage de  $\mathbb{Z}^2$ .

### I-1.5.2 Cercles Supercouvertures

Les cercles supercouvertures sont basés sur la distance de Tchebychev  $d_\infty$ . En dimension deux, l'élément structurant correspondant est un carré unitaire  $B_\infty(1)$  aligné avec les axes (voir chapitre I-1.4).

La première définition supercouverture d'un cercle date de [And00]. Elle a été simplifiée dans [AR11] pour devenir :

**Définition I-1.25** (Description analytique de la supercouverture d'un cercle) Un point  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  appartient au cercle supercouverture  $\mathcal{C}_\infty(x_0, y_0, R) = ((\mathcal{C} \oplus B_\infty(1)) \cap \mathbb{Z}^2)$ , si et seulement si :

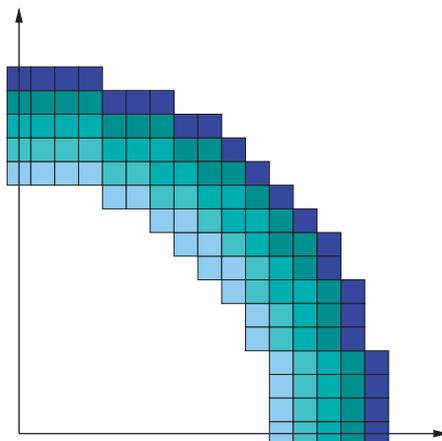


Figure I.21 – Pavage de l'espace par des cercles concentriques.

$$|y - y_0| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |(|x - x_0| - R)| \leq \frac{1}{2}$$

ou

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{2} \text{ et } |(|y - y_0| - R)| \leq \frac{1}{2}$$

ou

$$R^2 - \frac{1}{2} - (|x - x_0| + |y - y_0|) \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 - \frac{1}{2} + (|x - x_0| + |y - y_0|)$$

Un autre interprétation de ce résultat, basée sur des opérations morphologiques, a été donné par Lincke [LW00].

**Remarque :** Pour qu'un point discret  $(x, y)$  appartienne à la supercouverture d'un cercle continu de centre  $C = (x_c, y_c)$  et de rayon  $r$ , il faut qu'il appartienne à l'un des quatre disques de centres  $(x_c \pm \frac{1}{2}, y_c \pm \frac{1}{2})$  et de rayon  $r$  mais pas aux quatre à la fois (voir figure I.22).

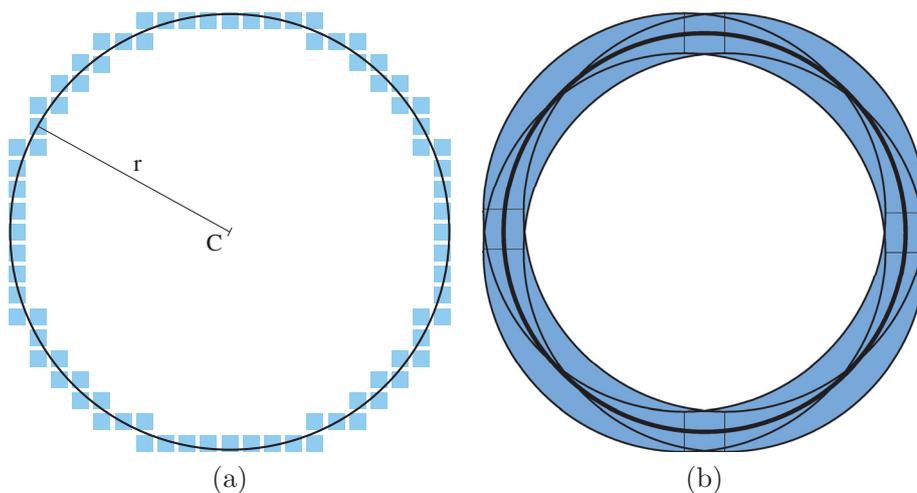


Figure I.22 – (a) Exemple de discrétisation supercouverture d'un cercle. (b) Zone offset d'un cercle supercouverture.

### I-1.5.3 Cercles Analytiques Standards

Le modèle standard [And03] a été défini pour supprimer les  $k$ -bulles des primitives linéaires (les  $k$ -bulles apparaissent quand un objet continu passe par un point  $p$  à coordonnées entières).

Il existe deux variantes de cercles standards [AR11] :

- le cercle standard extérieur noté  $\mathbb{C}_\infty^+(x_0, y_0, R)$ , obtenu en retirant la frontière extérieure de la zone offset  $\mathcal{C} \oplus B_\infty(1)$ .
- le cercle standard intérieur noté  $\mathbb{C}_\infty^-(x_0, y_0, R)$ , obtenu en retirant la frontière intérieure.

La description du cercle standard extérieur  $\mathbb{C}_\infty^+(x_0, y_0, R)$  est obtenue en supprimant la frontière extérieure de la description du cercle supercouverture, c'est-à-dire en remplaçant :

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq R + \frac{1}{2} \text{ par } |x - x_0| < R + \frac{1}{2}, \\ |y - y_0| &\leq R + \frac{1}{2} \text{ par } |y - y_0| < R + \frac{1}{2} \\ \text{et } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &\leq R^2 - \frac{1}{2} + (|x - x_0| + |y - y_0|) \\ \text{par } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &< R^2 - \frac{1}{2} + (|x - x_0| + |y - y_0|) \end{aligned}$$

De la même façon, le cercle standard intérieur  $\mathbb{C}_\infty^-(x_0, y_0, R)$  est obtenu en remplaçant :

$$\begin{aligned} R^2 - \frac{1}{2} - (|x - x_0| + |y - y_0|) &\leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ \text{par } R^2 - \frac{1}{2} - (|x - x_0| + |y - y_0|) &< (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

La plupart des  $k$ -bulles sont supprimées par le modèle standard, il peut néanmoins en rester au niveaux des points cardinaux.

**Remarque :** Le cercle standard intérieur correspond exactement au cercle de Kovalevsky [Kov90] noté  $\mathbb{K}(x_0, y_0, R)$  à une translation près.

### I-1.5.4 Cercles Analytiques Naïf et Naïf fermés

Le modèle naïf est basé sur la distance de Manhattan  $d_1$ . L'élément structurant qui lui est associé est  $B_1(1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq \frac{1}{2}\}$  : un carré de taille  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  dont les diagonales sont parallèles aux axes.

La description analytique du cercle naïf fermé est par conséquent très similaire à celle du cercle supercouverture :

**Définition I-1.26** (Description analytique d'un cercle naïf fermé [AR11]) *Un point  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  appartient au cercle naïf fermé  $\mathbb{C}_1(x_0, y_0, R) = ((\mathcal{C} \oplus B_1(1)) \cap \mathbb{Z}^2)$ , si et seulement si :*

$$\begin{aligned} |(x - y) - (x_0 - y_0)| &\leq \frac{1}{2} \text{ et } \left| |x + y - (x_0 + y_0)| - R\sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \\ &\text{ou} \\ |(x + y) - (x_0 + y_0)| &\leq \frac{1}{2} \text{ et } \left| |x - y - (x_0 - y_0)| - R\sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \\ &\text{ou} \\ R^2 - \frac{1}{4} - \max(|x - x_0|, |y - y_0|) &\leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2 - \frac{1}{4} + \max(|x - x_0|, |y - y_0|) \end{aligned}$$

Tout comme pour les cercles standards, il est possible de définir un cercle naïf intérieur  $\mathbb{C}_1^-$  et un cercle naïf extérieur  $\mathbb{C}_1^+$  en jouant sur les inégalités strictes.

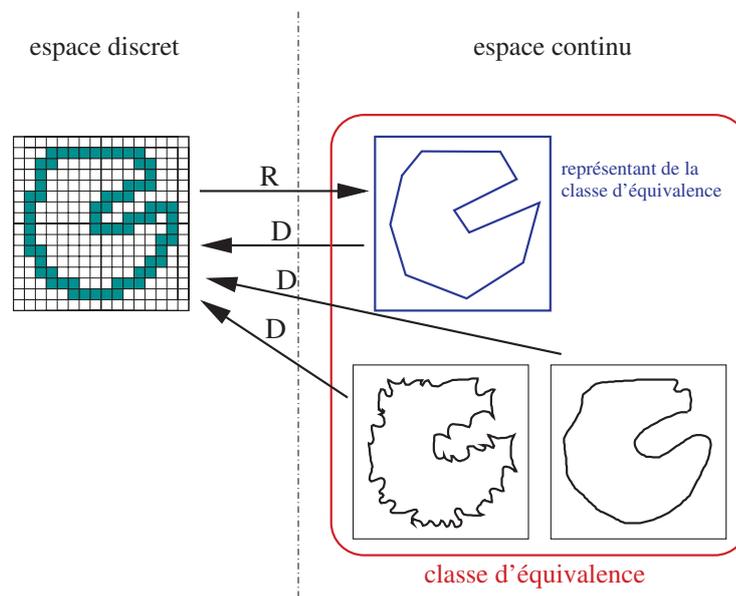
## I-2 Vers le continu

Les espaces discrets, les primitives discrètes et la discrétisation ayant été présentés, nous nous intéressons maintenant à la reconstruction : la transformation d'objets discrets en objets continus.

La reconstruction est un problème classique de la géométrie discrète et notamment en informatique graphique. La méthode la plus connue en dimension 2 et 3 est celle des *Marching Cubes* [LC87]. Pour le traitement d'objets de grande taille, cette méthode n'est pas convenable car, basée uniquement sur la configuration locale des voxels, elle génère un nombre de facettes proportionnel au nombre de points discrets. De nombreuses méthodes de simplification d'objets reconstruits à l'aide des *Marching Cubes* ont été proposées pour diminuer le nombre de facettes de l'objet final mais restent basées sur l'étude de configurations locales des voxels.

Il existe de nombreuses autres méthodes de reconstructions donnant des résultats très différents. Les deux critères qui nous intéressent sont les suivants :

- *L'inversibilité de la reconstruction* : tout objet discret doit être identique à la discrétisation de sa reconstruction. L'inversibilité d'une reconstruction donnée permet de définir des classes d'équivalences : Si la discrétisation de deux objets est identique, ils appartiennent à la même classe d'équivalence. Leur représentant est le résultat de la reconstruction (voir figure I.23).



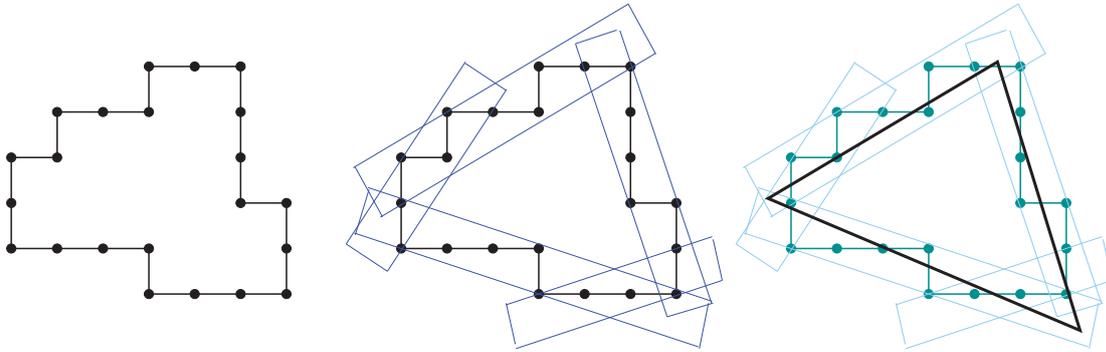
**Figure I.23** – Un objet discret (à gauche) et la classe d'équivalence d'objets continus (à droite) associée.

- La *simplicité du résultat* de la reconstruction : l'objet reconstruit est le représentant d'une classe d'équivalence, nous voulons pouvoir le décrire avec un minimum d'information (nombre de sommets, segments, ...).

Notre attention s'est tournée vers la méthode de reconstruction inversible proposée par Rodolphe Breton [Bre03] en 2D et étendue par Martine Dexet [Dex06] basée sur la reconnaissance de primitives discrètes. Cette méthode permet de reconstruire un contour et de fournir les équations de ses côtés (droites en 2D, plans en 3D et plus généralement hyperplans en  $nD$ ).

Cette méthode est divisée en deux étapes (voir figure I.24) :

- la reconnaissance de primitives : La frontière  $\mathcal{F}$  de l'objet est divisée en sous-ensembles de pixels ( $F_i$ ). Chaque  $F_i$  sont associés à un ensemble de primitives continues ( $C_j$ ) tel que  $F_i$  soit un sous-ensemble de la discrétisation de chacune des primitives.
- la reconstruction des primitives : elle consiste à choisir une primitive euclidienne de chaque ensemble  $C_j$ , d'intersecter toutes les primitives ainsi obtenues pour obtenir les sommets de l'objet reconstruit.



**Figure I.24** – Étapes de reconstruction. De gauche à droite : le contour discret, plusieurs primitives discrètes pouvant être reconnues, l'objet reconstruit.

La reconnaissance de primitive est basée sur la transformée de Hough linéaire [Hou62] permettant dans un premier temps de reconnaître des lignes dans une image, dans un second temps à l'aide de sa généralisation [DH72], de reconnaître d'autres formes. Un aperçu de différentes transformées de Hough est donné dans [Mai85].

Un espace appelé *espace de paramètres* est utilisé pour représenter des objets géométriques [DS84, McI84] tels que des voxels. Cette représentation géométrique est appelée *préimage*. La représentation paramétrique d'un ensemble d'objets s'appelle *préimage généralisée* et est obtenue en intersectant les préimages des objets de l'ensemble.

L'espace utilisé est appelé "de paramètres" car il fournit l'ensemble des paramètres des primitives reconnues.

De nombreux algorithmes de calcul de cette préimage généralisée ont été proposés pour les modèles naïf et standard en dimension 2 et 3 [VC99, VC00, Coe02, Bre03, BSDA03], le calcul d'une préimage généralisée à été proposé en dimension  $n$  dans [Dex06, DA09], contrairement aux versions précédentes, cette préimage généralisée peut être calculée indépendamment de la portion de l'espace à laquelle la primitive appartient.

**Remarque :** L'espace image est considéré comme euclidien. Les pixels (respectivement voxels)

le constituant sont par conséquent considérés comme des surfaces (respectivement hypervolumes) en dimension 2 (respectivement  $n$ ).

**Notation :** L'espace image de dimension  $n$  est noté  $\mathcal{E}_n$  et l'espace de paramètres de dimension  $n$  est noté  $\mathcal{P}_n$ . Les espaces  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{P}_n$  sont qualifiés de *duaux*, chacun est l'*espace dual* de l'autre.

### I-2.1 Espaces de Paramètres

Les espaces de paramètres sont fréquemment utilisés dans le domaine du traitement d'image. Ils permettent de détecter des formes paramétriques dans une image. De tels espaces sont définis à partir de transformations, autrement dit en associant un point  $P$  de l'espace image (euclidien) à un objet géométrique  $\mathcal{O}$  (droite, courbe,...) dans l'espace de paramètres appelé *préimage* de  $P$ .

La transformation inverse permet d'associer une primitive de l'espace image  $\mathcal{E}_n$  à un point de l'espace de paramètre  $\mathcal{P}_n$ .

Le passage d'un espace à l'autre est défini par les deux fonctions suivantes :

**Définition I-2.1** (Image d'un point dans l'espace dual [Dex06])

La fonction associant un point de  $\mathcal{E}_n$  à un hyperplan de  $\mathcal{P}_n$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{E}} : \quad \mathcal{E}_n &\rightarrow \mathcal{P}_n \\ p_{\mathcal{E}} = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i \alpha_i) \right\} \end{aligned}$$

La fonction associant un point de  $\mathcal{P}_n$  à un hyperplan de  $\mathcal{E}_n$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mathcal{P}} : \quad \mathcal{P}_n &\rightarrow \mathcal{E}_n \\ p_{\mathcal{P}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\mapsto \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_n = \alpha_n + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i x_i) \right\} \end{aligned}$$

**Notation :** Nous utiliserons la notation *Dual* à la place de  $\mathcal{D}_{\mathcal{E}}$  et de  $\mathcal{D}_{\mathcal{P}}$  quand les deux fonctions pourront être indifféremment utilisées.

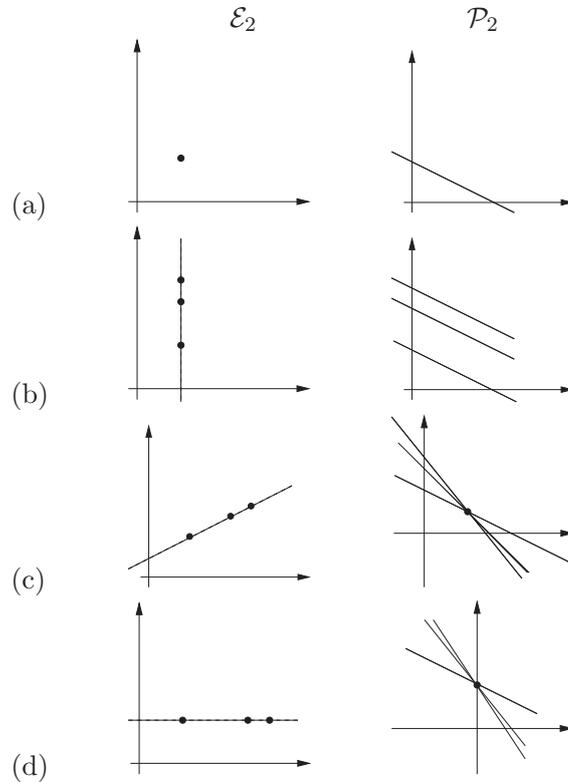
La propriété suivante est la conséquence directe de cette définition :

**Propriété I-2.2** Un point  $p \in \mathcal{E}_n$  (ou  $\mathcal{P}_n$ ) appartient à l'image de chaque points  $p'$  de son image. Autrement dit :  $\forall p' \in \text{Dual}(p), p \in \text{Dual}(p')$ .

Les fonctions de la définition I-2.1 utilisent chaque coordonnée d'un point  $p$  comme un paramètre de l'hyperplan  $\text{Dual}(p)$ . Les duaux de points partageant une même coordonnée auront un comportement particulier. La figure I.25 illustre, en dimension 2, ces comportements.

Après avoir défini la préimage d'un point, la préimage d'un objet est décrite de la façon suivante :

**Définition I-2.3** (Image d'un Objet) Soit  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{E}_n$  (ou  $\mathcal{P}_n$ ), l'image de  $\mathcal{O}$  notée  $\text{Dual}(\mathcal{O})$  est l'union des images de tous ses points. Autrement dit  $\text{Dual}(\mathcal{O}) = \bigcup_{p \in \mathcal{O}} (\text{Dual}(p))$ .



**Figure I.25** – Exemple de correspondances entre les deux espaces en dimension 2. (a) L'image d'un point est une droite. (b) Les images de points alignés verticalement sont parallèles. (c) Les images de points alignés (non verticalement) se coupent en un même point. (d) Comme pour (c) mais ce point est sur l'axe des ordonnées.

De la définition de l'image d'un objet et de la propriété I-2.2 peut être déduit :

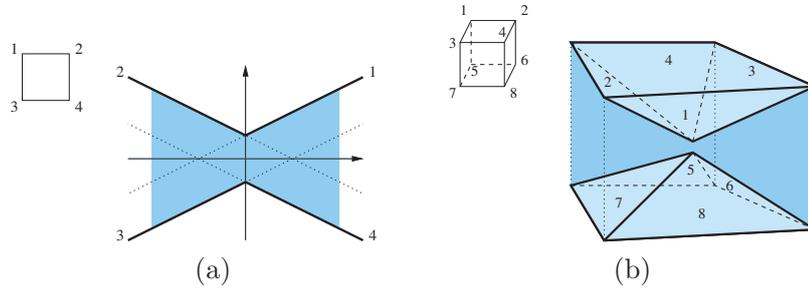
**Propriété I-2.4** Soient  $O_1$  et  $O_2$  deux objets de  $\mathcal{E}_n$  (ou  $\mathcal{P}_n$ ) tels que  $O_1 \subseteq O_2$ , nous avons  $Dual(O_1) \subseteq Dual(O_2)$ .

En dimension  $n$ , l'image d'un polytope  $\Pi \in \mathcal{E}_n$ , convexe, est un polytope  $\wp \in \mathcal{P}^n$  dont les bords sont définis par les images des sommets de  $\Pi$  [Dex06]. La figure I.26 décrivant les images d'un pixel (en dimension 2) et d'un voxel (en dimension 3) illustre très bien la correspondance entre les sommets d'un hypervoxel et les bords de son image.

**Remarque :** Nous considérons le modèle supercouverture : les voxels sont confondus avec leurs éléments structurants.

## I-2.2 Reconnaissance de primitives discrètes

La préimage d'un polytope est un polytope dans l'espace de paramètres, la *préimage généralisée* d'un ensemble de polytopes est l'intersection des préimages de chacun d'eux. La préimage généralisée est soit un ensemble vide soit un polytope.

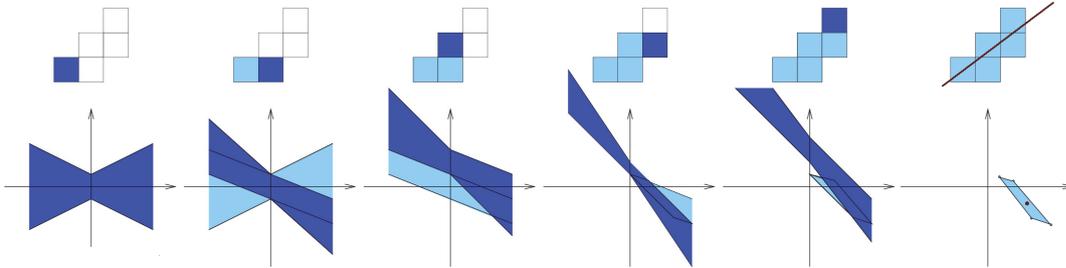


**Figure I.26** – Images d'hypervoxeles en dimensions 2 et 3. (a) Image du carré unitaire de centre  $(0, 0)$ . (b) Image du cube unitaire de centre  $(0, 0, 0)$ .

**Définition I-2.5** (Préimage généralisée [Dex06]) Soit  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$  un ensemble de  $k \in \mathbb{N}^*$  polytopes. La préimage généralisée  $\mathbb{G}_{\mathcal{P}}$  de l'ensemble de polytopes  $\mathcal{P}$  est défini par :

$$\mathbb{G}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}) = \bigcap_{i=1}^k (\text{Dual}(P_i)).$$

Cette définition et la propriété I-2.2 garantissent qu'à chaque point de la préimage généralisée d'un ensemble de polytopes est associé un hyperplan coupant tous les polytopes donnés. Si la préimage généralisée est égale à l'ensemble vide, il n'existe aucun hyperplan intersectant tous les polytopes de l'ensemble donné.



**Figure I.27** – Exemple de préimage généralisée d'un ensemble de pixels en dimension 2. En haut les pixels sont considérés un par un (en foncé). En dessous l'intersection de leurs préimages. La dernière préimage généralisée est le polytope solution dont l'image contient toutes les droites coupant tous les pixels considérés.

Cette méthode permet de déterminer de façon incrémentale si un ensemble de voxel est traversé par un hyperplan et d'en fournir tous les paramètres.

### I-2.3 Reconstruction

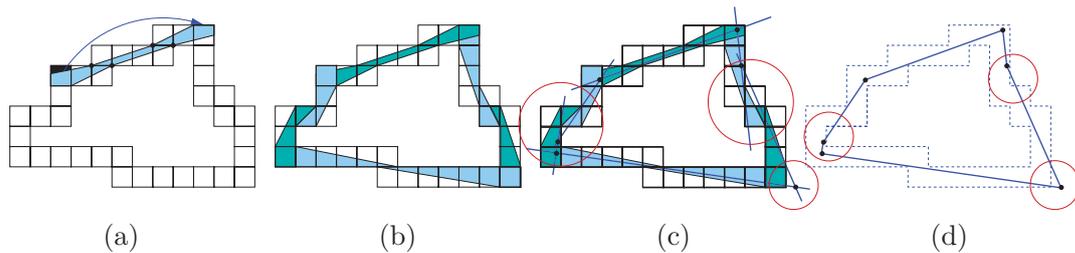
La méthode de reconstruction consiste à parcourir la frontière de l'objet discret, de reconnaître les hyperplans la constituant et enfin de les reconstruire.

En dimension 2, le parcours d'un périmètre est trivial, il suffit de choisir un point de départ et un sens de parcourir. En dimension supérieure, le parcours d'une hypersurface n'est pas intuitif mais la méthode reste similaire.

En dimension 2, le contour d'un objet est décrit par une  $k$ -courbe. Les points de la  $k$ -courbe peuvent être ordonnés pour avoir un sens de parcours du contour. La préimage du premier pixel  $p_0$  est calculée. En suivant l'ordre de parcours de la courbe, les pixels sont ajoutés un par un à la préimage généralisée. Quand l'ajout d'un pixel  $p_f$  réduit la préimage généralisée à l'ensemble vide, ce qui signifie qu'aucune droite ne traverse tous les pixels considérés, le premier côté de l'objet a été identifié à l'itération précédente. L'ensemble  $\mathcal{P}_0 = (p_i)_{i \in [1, f-1]}$  est reconnu comme appartenant à une droite discrète dont l'ensemble des paramètres possibles sont fournis par sa préimage généralisée  $\mathbb{G}_{\mathcal{P}_0}$ .

Le pixel  $p_{f-1}$  est considéré comme point de départ d'une nouvelle reconnaissance, sa préimage est calculée et les pixels sont ajoutés un par un en suivant l'ordre de parcours de la courbe. Le processus est répété jusqu'au dernier pixel de la courbe identifiant ainsi tous les côtés de l'objet à reconstruire. Dans le cas où la courbe est fermée le dernier pixel est identique au premier. À chacun de ces côtés est associée une préimage généralisée non vide  $\mathbb{G}_{\mathcal{P}_i}$ , c'est-à-dire l'ensemble des paramètres de toutes les droites intersectant tous les pixels de ce côté.

Les côtés de l'objet ont été identifiés sous la forme d'ensemble de solutions pour chacun d'eux. Pour obtenir une reconstruction de l'objet, il faut choisir une solution dans chacun de ses ensembles. Un point représentant  $r_i$  est choisi dans chaque préimage généralisée  $\mathbb{G}_{\mathcal{P}_i}$ . À chaque représentant est associée une droite euclidienne  $d_i$ . Les sommets de la reconstruction sont alors donnés par les intersections de la forme  $d_j \cap d_{j+1}$  : l'objet est reconstruit (voir figure I.28).

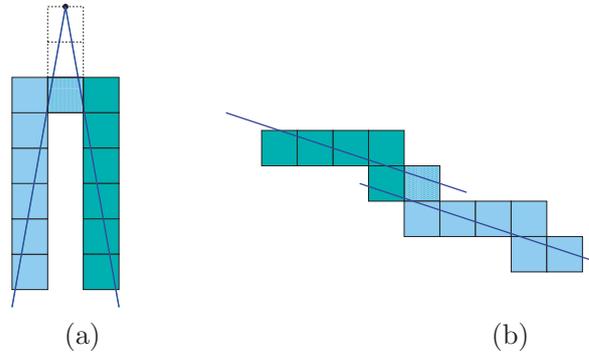


**Figure I.28** – (a) Reconnaissance du premier côté à partir d'un sens de parcours et point de départ. (b) Tous les côtés reconnus. (c) Choix d'une droite pour chaque côté, les cercles rouges indiquent les intersections n'ayant pas lieu dans le pixel de fin de segment. (d) Objet reconstruit, les cercles rouges indiquent les endroits où la reconstruction n'est pas inversible.

Cette méthode a l'avantage de reconnaître des segments de taille maximale même si les résultats obtenus dépendent du point de départ et du sens de parcours.

La méthode de reconnaissance de primitives impose comme seule contrainte aux droites reconstruites de traverser tous les pixels du segment reconnu. Aucune hypothèse ne peut être faite sur leur intersection. La figure I.29 montre deux cas où les droites reconstruites ne

s'intersectent pas sur la courbe discrète, dans l'un d'entre eux elles ne s'intersectent même pas.



**Figure I.29** – (a) L'intersection des deux droites reconstruites n'est pas sur la courbe discrète. (b) Les deux droites reconstruites ne s'intersectent pas.

Comme le montre la figure I.28, deux droites consécutives peuvent s'intersecter dans la courbe discrète mais pas dans le pixel d'extrémité de segment, dans ce cas, le côté du polygone intersecte d'autres pixels que ceux du contour.

Les côtés de la reconstruction de l'objet ne sont pas dans la courbe discrète d'origine. Sa discrétisation est constituée d'autres pixels : cette méthode de reconstruction n'est pas inversible.

## I-2.4 Reconstruction inversible

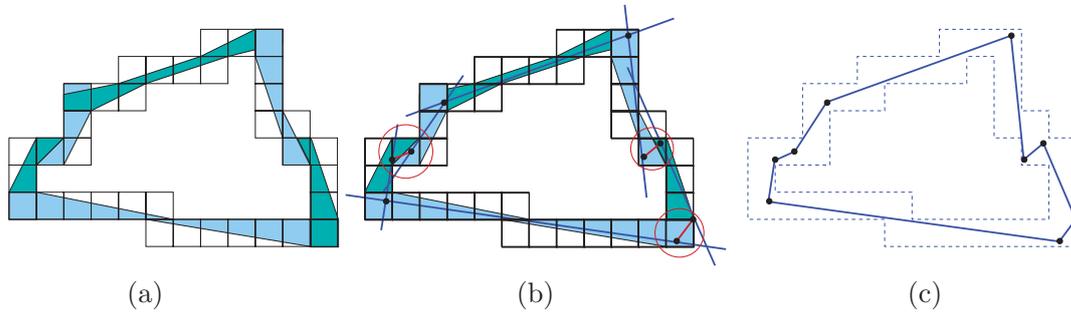
La seule contrainte posée aux droites reconnues est de traverser un ensemble de pixels considérés, aucun contrôle n'est donné sur la position de leurs intersections. Sont présentés ici, trois méthodes pour rendre la reconstruction inversible.

### I-2.4.1 Méthode avec joints

La première solution, la méthode dite *avec joints* a été proposée dans [BSDA03] pour palier ce problème. Son principe est de localiser les endroits où l'intersection de deux côtés consécutifs n'est pas dans le pixel souhaité et de couper les morceaux des côtés qui sont en dehors du pixel de fin de segment en rajoutant un *joint* (un petit segment) de manière à ce que la transition d'un segment à l'autre se fasse dans le pixel (voir figure I.30). Cette méthode a l'inconvénient de générer des joints, c'est-à-dire des côtés supplémentaires de petites tailles.

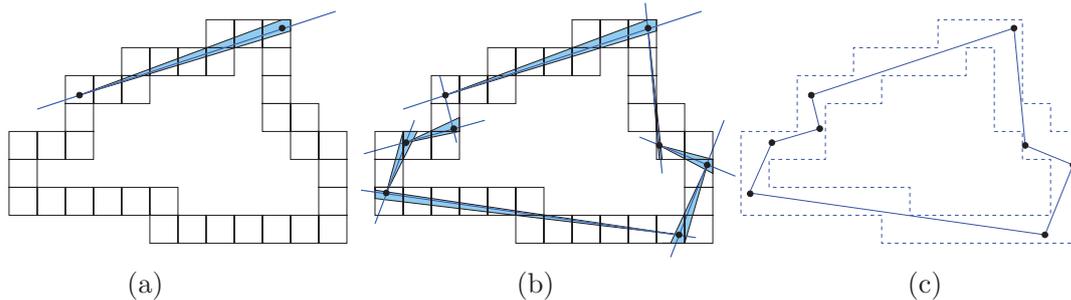
### I-2.4.2 Méthode sans joints

La deuxième solution, la méthode dite *sans joints* a été présentée dans [SBDA05]. Son principe est de contraindre la reconnaissance de primitives pour assurer que les côtés s'intersectent dans le pixel souhaité. Un point euclidien dans le pixel de départ. Une fois le premier côté reconnu, une solution est directement choisie ainsi qu'un point de départ pour le côté suivant (voir figure I.31). Cette contrainte garantie que les droites solutions passent par ce



**Figure I.30** – (a) Côté reconnu. (b) Droites choisies pour chaque côté et recollement avec des patches quand nécessaire. (c) Objet reconstruit.

point et par conséquent se coupent dans le pixel souhaité. Le choix d'un point étant très contraignant, beaucoup de solutions sont rejetées.



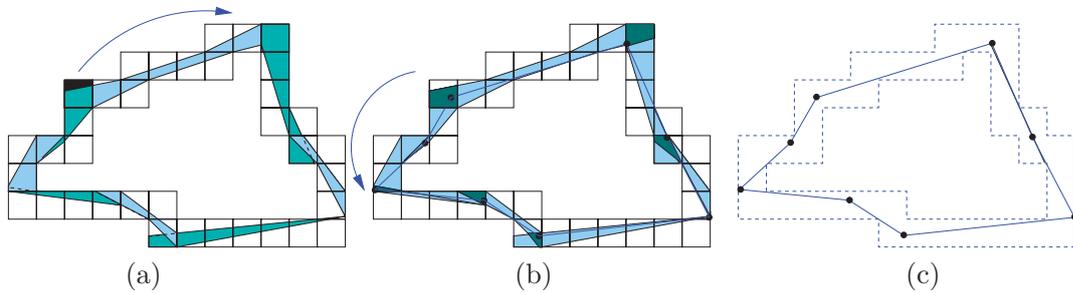
**Figure I.31** – (a) Choix d'un point de départ et ensemble des solutions passant par lui. (b) Côtés reconnus et choix d'un point à chaque itération. (c) Objet obtenu et défini par les points choisis.

### I-2.4.3 Méthode avec propagation arrière

La troisième solution, la méthode *avec propagation arrière* est celle qui nous intéresse. Elle a été présentée dans [Dex06]. Tout comme la méthode sans joints, son principe est de contraindre la reconnaissance de primitive. La reconnaissance d'un côté ne débute plus ni par un point ni par le pixel de début de segment mais par la zone du pixel visible depuis le côté précédemment reconnu (voir figure I.32). La polygonalisation de la courbe a ensuite lieu depuis la fin et dans le sens de parcours inverse.

Cette visibilité garantit qu'à chaque étape de la polygonalisation dans le sens inverse il existe une droite débutant par le point choisit : Les deux faisceaux de droites consécutifs s'intersectent dans le pixel extrémité.

**Remarque :** Dans le cas où la courbe discrète à reconstruire est fermée, un recollement peut être nécessaire dans le pixel de départ.



**Figure I.32** – (a) Ensemble des côtés reconnus, deux ensembles de côtés consécutifs s’intersectent dans le pixel. (b) Dans le sens inverse que celui de la reconnaissance, un point est choisi chaque intersection de faisceau de droites. (c) Objet Reconstruit.

Cette méthode de reconstruction a été utilisée par M. Dexet dans son modèle géométrique à base topologique d’objets discrets : SpaMod [DA06] car si la courbe discrète à reconstruire est simple, sa reconstruction est topologiquement équivalente.

Ces trois méthodes rendent la méthode de reconstruction inversible. À moins que le contraire ne soit spécifié, la méthode étendue sera utilisée dans tout le second chapitre.

### I-2.5 $k$ -cellules de rebroussement

La méthode de reconstruction est basée sur la reconnaissance maximale. Il arrive que la reconnaissance de primitive continue plus loin que ne le voudrait l’intuition. La figure I.33 illustre ce problème : la reconnaissance de primitives s’est arrêtée (à chaque fois) un pixel ”trop loin”.

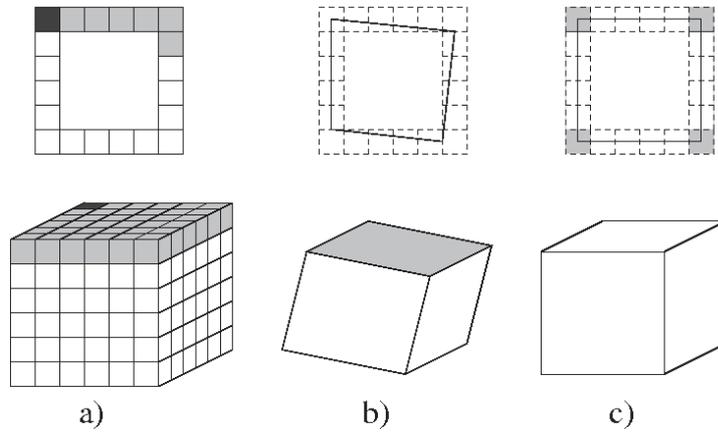
Rodolphe Breton a introduit les points de rebroussement discrets [BSDA03] comme des pixels particuliers d’une courbe. Ils désignent des extrémités de segments discrets. Lorsque la reconnaissance de primitives arrive à un point de rebroussement discret, elle s’arrête même si elle aurait pu continuer un pixel plus loin. Le résultat est également moins dépendant du point de départ et du sens de parcours.

L’utilisation des points de rebroussement à la fois comme point de départ et pour stopper la reconnaissance permet à la reconstruction de donner des résultats plus proche de ceux attendus par l’intuition (voir figure I.33).

#### I-2.5.1 Points de Rebroussement discrets en dimension 2

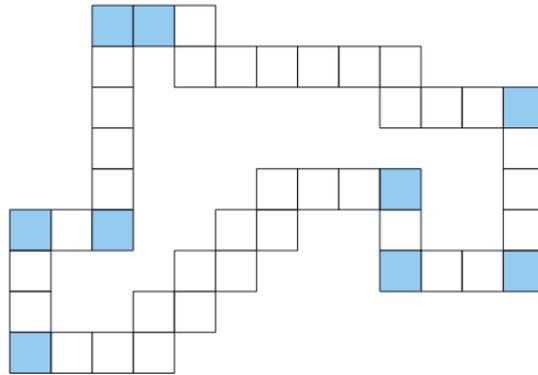
En géométrie euclidienne, un point de rebroussement est un point d’une courbe où celle-ci admet deux tangentes distinctes de chaque côté de ce point. Voici la définition donnée par Rodolphe Breton les étendant aux espaces discrets :

**Définition I-2.6** (Points de Rebroussement Discrets [BSDA03]) *Un point d’une courbe discrète est dit point de rebroussement discret si et seulement si le chemin constitué de ce point, des deux points précédents et des deux points suivants (sur la courbe), n’est pas un segment de droite discrète standard. Par convention, tout point à l’extrémité d’une courbe discrète est considéré comme point de rebroussement.*



**Figure I.33** – Illustration du problème de la reconnaissance maximale. a) Ensemble de pixels (voxels) à reconstruire, le point de départ de la reconnaissance est représenté en noir et le premier hyperplan reconnu en gris. b) résultat obtenu sans considérer les points de rebroussement. c) résultat en considérant les points de rebroussement.

Cette définition implique qu'un point de rebroussement discret ne peut être situé au milieu d'un segment de droite discrète, ainsi, il appartient à deux segments de droite discrète distincts, un de chaque côté. La figure I.34 donne un exemple de points de rebroussement 2D détectés sur le contour d'un objet.



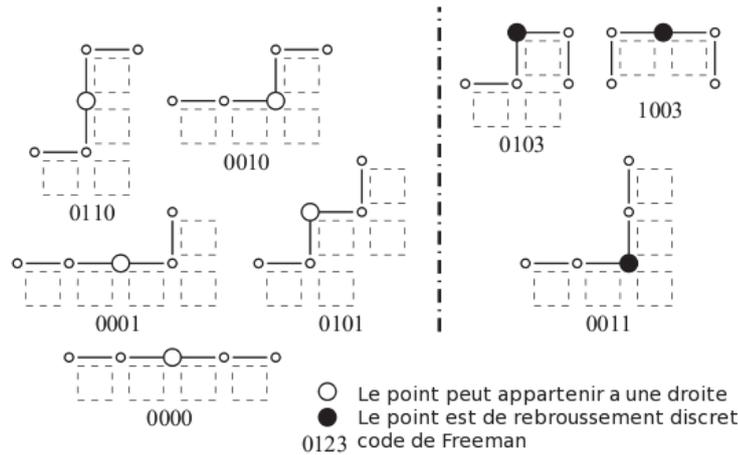
**Figure I.34** – Exemple de points de rebroussement représentés en bleu (Image issue de [Bre03]).

Dans la définition précédente, le nombre de cinq pixel a été retenu car il est le nombre minimum de pixels à regarder pour avoir un résultat significatif (effectivement, trois pixels 1-connexes constituent forcément un segment discret). Ce nombre peut être plus grand mais cela impliquerait un grand nombre de points de rebroussement.

Les points de rebroussement discret d'une courbe peuvent être calculés à la volée en temps linéaire en utilisant le code et les critères de Freeman.

### I-2.5.2 $k$ -cellules de rebroussement en dimension 2

En travaillant dans des complexes cellulaires (voir figure I.35), les pointels (0-cellules) de rebroussement peuvent facilement être définis de la même manière que les points de rebroussement discrets.



**Figure I.35** – Toutes les configurations (aux symétries près) possibles pour une suite de cinq 0-cellules (pointels).

### I-2.5.3 $k$ -cellules de rebroussement

Un des premiers apports de cette thèse est d'étendre la notion de 0-cellule de rebroussement en dimension 3. Les 0-cellules de rebroussement sont recherchées sur les coupes orthogonales de la frontière d'un objet (surface) passant par le milieu des voxels. Les  $k$ -cellules de ces coupes sont des  $(k + 1)$ -cellules en dimension 3.

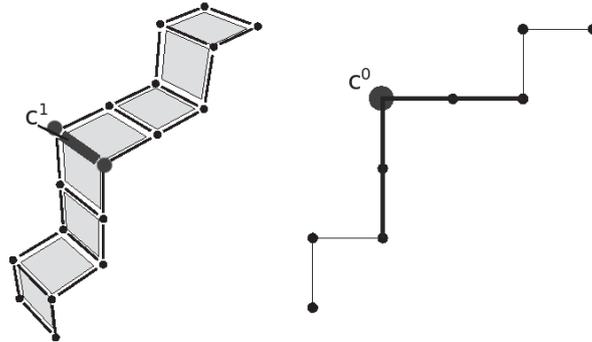
Il peut exister différents types de rebroussement (selon leur dimension). En dimension 3, nous avons des 0-cellules de rebroussement ainsi que des 1-cellules de rebroussement.

Nous allons d'abord définir les 1-cellules de rebroussement. Soit une coupe orthogonale d'une surface passant par le centre des voxels. Une 1-cellule de rebroussement en dimension 3 correspond alors à un pointel de rebroussement 2D détecté sur une telle coupe (voir figure I.36).

Il existe par conséquent trois types de 1-cellules de rebroussement selon l'orientation de la coupe ( $x$ ,  $y$  ou  $z$ ). Par exemple, si  $c^0$  est une 0-cellule de rebroussement sur la coupe  $X = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{Z}$  alors la 1-cellule  $c^1$  à qui elle est associée est dite *1-cellule de rebroussement selon  $X$* .

**Définition I-2.7** (1-cellules de rebroussement en 3D [RLSA08]) *Une 1-cellule est dite de rebroussement si et seulement si elle appartient à la frontière d'un objet et si elle est une 0-cellule de rebroussement 2D sur la coupe orthogonale à la 1-cellule et passant par son milieu.*

La propriété suivante est une conséquence directe de la définition des 1-cellules de rebroussement.



**Figure I.36** – La 1-cellule de rebroussement  $c^1$  est une 0-cellule de rebroussement 2D sur la coupe orthogonale passant par son milieu.

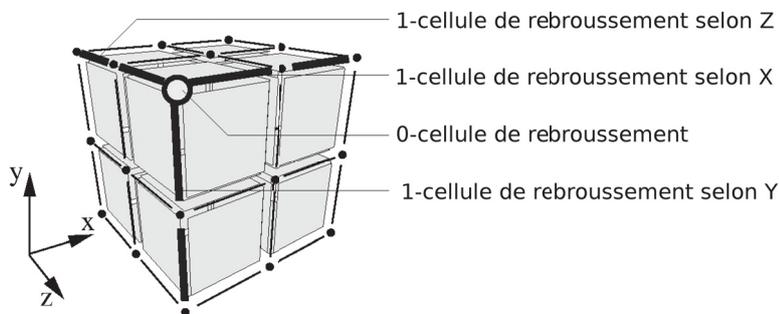
**Propriété I-2.8** ([RLSA08]) Soient  $\mathcal{O} \subset \mathbb{Z}^3$  un objet discret et  $\mathcal{F}$  sa frontière dans un complexe cellulaire abstrait (formée de  $k$ -cellules). Si  $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$  est un plan discret standard, alors  $\mathcal{P}$  ne contient aucune 1-cellule de rebroussement.

*Preuve :* La coupe orthogonale à un axe d'un plan discret est une droite discrète qui peut être fine, naïve, standard ou épaisse selon l'angle formé par le plan et la coupe. Dans tous les cas, une droite discrète ne présente aucun point de rebroussement discret (par définition).  $\square$

Une 1-cellule de rebroussement  $c^1$  est bornée par deux 0-cellules qui appartiennent tout comme  $c^1$  à deux plans différents. Ces deux 0-cellules sont dites de rebroussement selon la direction de  $c^1$ . Nous pouvons maintenant définir les 0-cellules de rebroussement comme une 0-cellule héritant de rebroussement selon toutes les directions :  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  (voir figure I.37).

**Définition I-2.9** (0-cellules de rebroussement en 3D [RLSA08]) Une 0-cellule de rebroussement de la frontière d'un objet discret borne au moins une 1-cellule de rebroussement dans chacune des directions ( $X$ ,  $Y$  et  $Z$ ).

La figure I.37 illustre les différentes  $k$ -cellules de rebroussement en dimension 3.

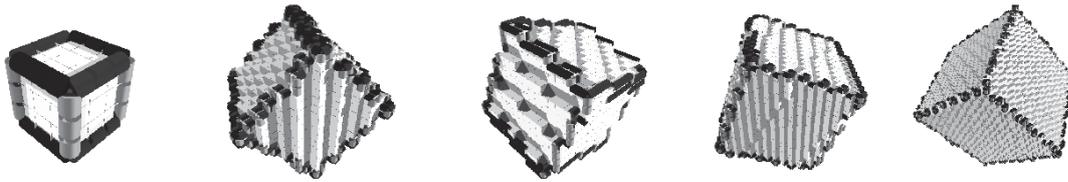


**Figure I.37** – Exemples en 3D de 1-cellules de rebroussement selon chaque direction et d'une 0-cellule de rebroussement.

#### I-2.5.4 Images, points de rebroussement et parcours de surface :

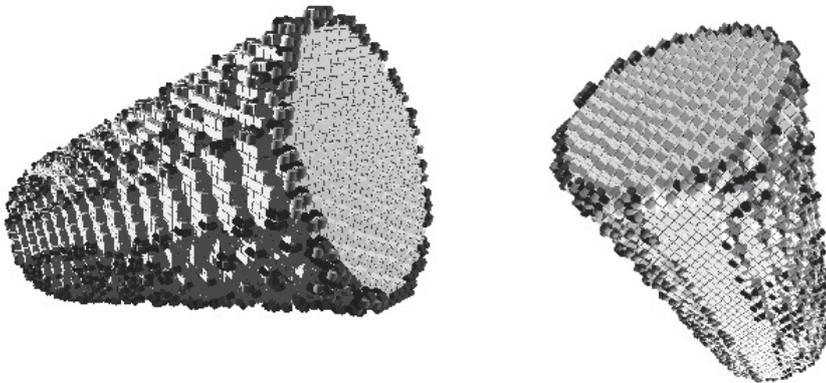
Il n'existe aucun ordre naturel pour parcourir une surface. Certaines heuristiques peuvent toutefois améliorer les résultats.

Après avoir vu les  $k$ -cellules de rebroussement en dimension 3, nous allons voir ce qu'elles représentent. Plusieurs tests ont été effectués pour montrer où sont les points de rebroussement 3D sur des volumes usuels : sur des cubes, sur des cylindres et sur des sphères.



**Figure I.38** – Cubes discrets, leurs points de rebroussement 3D en foncés.

Les résultats sur les cubes sont conformes à nos attentes : tous les points de rebroussement se situent sur les arêtes du cube et aucun sur ses faces qui sont des surfaces planes (voir figure I.38).



**Figure I.39** – Cylindres discrets, leurs points de rebroussement 3D en foncés.

Les résultats sur des cylindres (voir figure I.39) sont satisfaisants car aucun point de rebroussement n'est reconnu sur ses bases (surfaces planes) mais plusieurs se situent le long de la face latérale du cylindre.

La densité des cellules de rebroussement détectées sur une sphère (le rapport de leur nombre sur le nombre total de cellules) diminue lorsque la taille de la sphère grandit (voir figure I.40). Effectivement, plus la taille de la sphère grandit et plus sa surface paraît localement plane.

La figure I.41 montre un test sur un objet de référence : le Stanford Bunny. La localisation de ses  $k$ -cellules de rebroussement sont nombreuses autour des zones de forte courbure telles que les oreilles, la queue et les pattes.

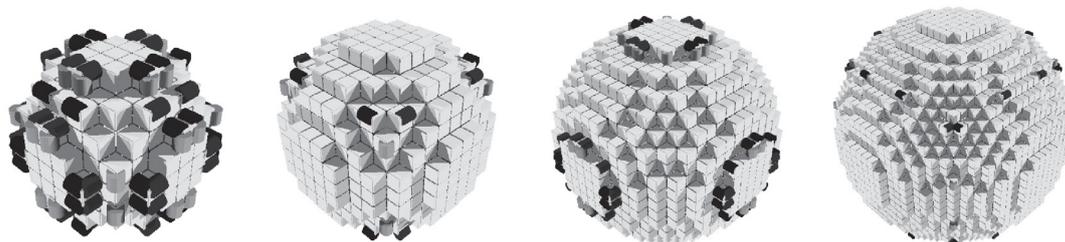


Figure I.40 – Sphères discrètes, ses points de rebroussement 3D en foncés.

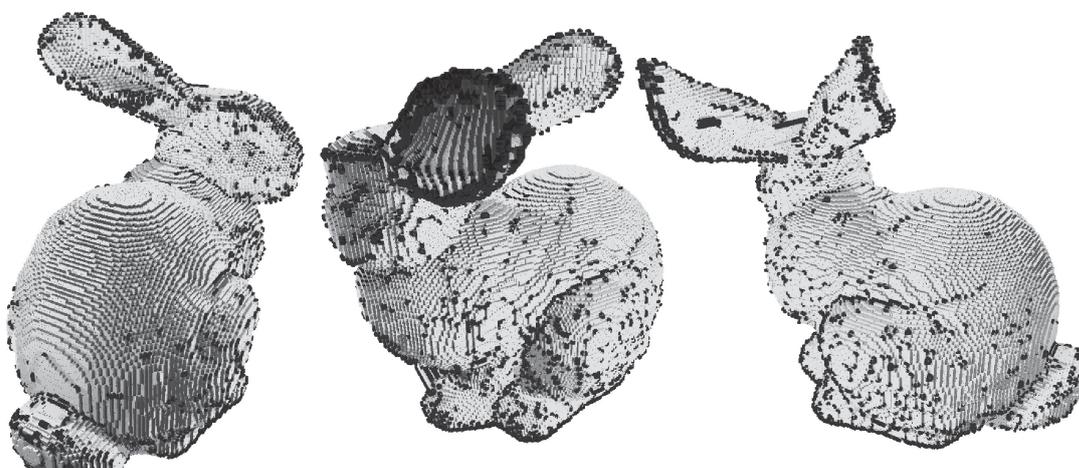


Figure I.41 – Stanford Bunny. En noir, ses  $k$ -cellules de rebroussement.

En dimension deux, les points et cellules de rebroussement ont été étudiées sur une fenêtre de cinq pixels ( $k$ -cellules). Mais suivant les angles et leur orientation par rapport aux axes, de nombreuses cellules de rebroussements ne sont pas détectés localement par cette fenêtre (voir figure I.42).

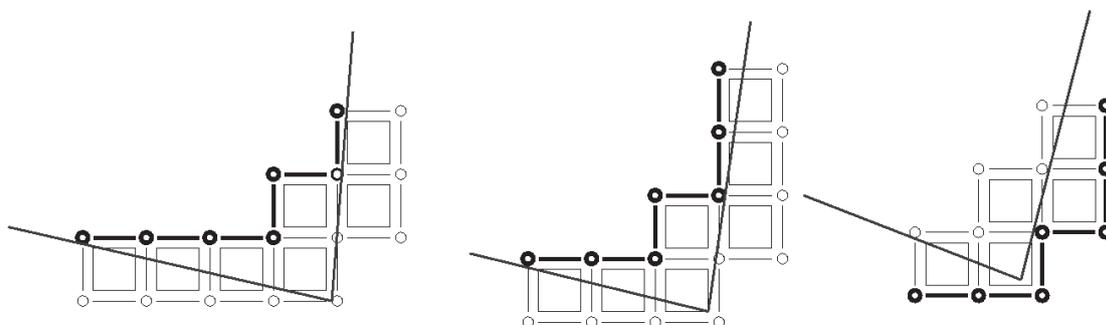
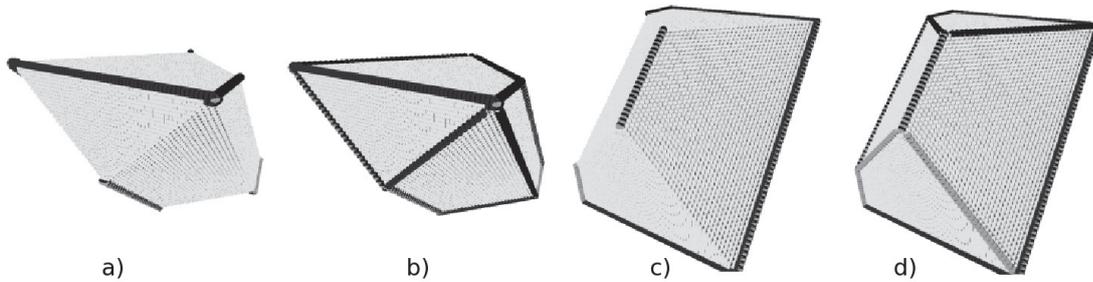


Figure I.42 – Exemples de discrétisation d'angles aigus pour lesquels aucun point de rebroussement n'est détecté si la fenêtre n'est pas de taille au moins sept.

Si le volume étudié est un polyèdre (composé d'arêtes et de surfaces planes), la fenêtre de détection de points de rebroussement peut être agrandie. La figure I.43 montre qu'avec une fenêtre plus grande, l'intégralité des arêtes est recouverte de points de rebroussement.



**Figure I.43** – Exemples de polyèdres discrets. En niveaux de gris (selon la direction), les  $k$ -cellules de rebroussement discrets reconnus avec une fenêtre de cinq pixels pour a) et c) et de sept pixels pour b) et d).

Nous avons parlé précédemment du problème d'ordre lors du parcours de la surface  $S_V$  d'un volume  $V$ . Effectivement, en dimension trois, la reconnaissance de plans peut traverser certaines arêtes d'un volume sans pour autant s'arrêter. Le morceau de plan discret  $m$  reconnu est localement maximal (il n'existe aucun morceau de plan  $M$  tel que  $m \subset M \subseteq S_V$ ) mais ne correspondre à aucune face du volume considéré (il peut être à cheval sur deux faces du volume).

Les  $k$ -cellules de rebroussement peuvent être utilisés comme aide dans une heuristique de parcours d'un volume car ils garantissent un changement de plan (de face pour un polyèdre). A leur rencontre, la reconnaissance maximale privilégie une autre direction.

L'utilisation des  $k$ -cellules de rebroussement suppose la manipulation d'objets discrets ne présentant aucune perturbation. Dans le cas où l'objet est bruité, les  $k$ -cellules de rebroussement n'ont plus beaucoup de signification et ne reflètent pas la géométrie de l'objet. Il existe notamment des points de rebroussements isolés uniquement liés au bruit.

Le chapitre II présente une méthode pour intégrer des  $k$ -cellules de rebroussement (et leur voisinage) à des primitives discrètes et ainsi rendre la reconnaissance de primitive plus robuste au bruit.

## Conclusion.

Nous avons présenté dans ce chapitre les espaces discrets et les objets qui les habitent. Cette thèse s'intéresse à la reconnaissance de primitives discrètes pour une reconstruction. La méthode de reconstruction que nous avons choisi est basée sur des espaces de paramètres et le calcul d'une préimage généralisée.

La généralisation des  $k$ -cellules de rebroussement au espaces 3D est une première contribution. Ces cellules de rebroussement en 3D peuvent servir à guider les algorithmes de reconstruction afin de fournir une barrière de manière à ce que la reconstruction n'aille pas trop loin et donne des faces qui semblent plus naturelles.

Il existe de nombreuses autres questions ouvertes ici car les cellules de rebroussement de la frontière d'un objet peuvent être déconnectées ou isolées. Cela implique qu'il y aura un soucis à cet endroit là lors de la reconstruction. Une telle cellule de rebroussement peut correspondre à un changement de face mais peut aussi être le signe de la présence de bruit.

Le second chapitre de cette thèse présente une manière simple et efficace d'accorder localement une marge d'erreur autour d'un point discret particulier : le redimensionnement des éléments structurants. Cette marge d'erreur représente l'incertitude sur la position exacte d'un point. Elle est accordée à chaque point discret indépendamment des autres selon des critères locaux.

Le troisième chapitre étend la propriété euclidienne de l'intersection des médiatrices aux espaces discrets. A partir de cette propriété, nous définissons une nouvelle méthode de reconnaissance de cercles discrets. Cette méthode est efficace quel que soit le modèle de discrétisation considéré et est compatible avec le redimensionnement des éléments structurants présenté au second chapitre.

## Bibliographie

- [AJ97] Eric Andres and Marie-Andrée Jacob. The discrete analytical hyperspheres. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(1) :75–86, 1997. Cité en page [15](#)
- [And94] E. Andres. Discrete circles, rings and spheres. *Computer & Graphics*, 18(5) :695–706, 1994. Cité en pages [XI](#), [15](#), [16](#), [86](#) et [92](#)
- [And00] Eric Andres. *Modélisation analytique discrète d’objets géométriques*. Habilitation à diriger les recherches, Université de Poitiers, 2000. Cité en pages [XI](#), [6](#), [11](#), [13](#) et [17](#)
- [And03] E. Andres. Discrete linear objects in dimension  $n$  : the standard model. *Graphical Models*, 65 :92–111, 2003. Cité en pages [XI](#), [13](#), [14](#), [17](#) et [87](#)
- [AR11] Eric Andres and Tristan Roussillon. Analytical description of digital circles. In *DGCI*, pages 235–246, 2011. Cité en pages [17](#), [18](#), [80](#), [96](#) et [100](#)
- [BAB00] Valentin E. Brimkov, Eric Andres, and Reneta P. Barneva. Object discretization in higher dimensions. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, DGCI ’00, pages 210–221, London, UK, 2000. Cité en page [15](#)
- [Ber71] Jean Bernoulli. Sur une nouvelle espèce de calcul. In *Recueil pour les Astronomes*, pages 255–284, 1771. Cité en page [9](#)
- [Bre65] J. E. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *IBM Syst. J.*, 4(1) :25–30, 1965. Cité en pages [XI](#) et [15](#)
- [Bre77] Jack Bresenham. A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs. *Commun. ACM*, 20(2) :100–106, 1977. Cité en pages [15](#), [86](#) et [90](#)
- [Bre03] Rodolphe Breton. *Reconstruction inversible d’objets discrets 2D*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2003. Cité en pages [XII](#), [20](#) et [28](#)
- [BSDA03] R. Breton, I. Sivignon, M. Dexet, and E. Andres. Towards an invertible euclidean reconstruction of a discrete object. In *Discrete Geometry and Computer Imagery*, volume LNCS vol. 2886, pages 246–256, 2003. Cité en pages [20](#), [25](#), [27](#), [69](#) et [70](#)
- [Coe02] David Coeurjolly. *Algorithmique et géométrie discrète pour la caractérisation des courbes et des surfaces*. PhD thesis, Université Lumière, Lyon, 2002. Cité en page [20](#)
- [Coe05] David Coeurjolly. Supercover model and digital straight line recognition on irregular isothetic grids. In *DGCI*, pages 211–222, 2005. Cité en page [14](#)
- [COK95] D. Cohen Or and A. Kaufman. Fundamentals of surface voxelization. *Graphical Models and Image Processing*, 57(6) :453–461, November 1995. Cité en pages [XI](#) et [13](#)
- [CWA<sup>+</sup>10] A. Chollet, G. Wallet, E. Andres, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, and A. Richard.  $\omega$ -arithmetization of ellipses. In Springer Verlag, editor, *Comp’Image*, Lecture Notes in Computer Science, May 2010. Cité en page [15](#)
- [DA06] M. Dexet and E. Andres. Hierarchical topological structure for the design of a discrete modeling tool. In *WSCG Full Papers Proceedings*, pages 1–8, 2006. 14-th International Conference in Central Europe on Computer Graphics, Visualization and Computer Vision, Plzen, Czech Republic. Cité en page [27](#)

- [DA09] M. Dexet and E. Andres. A generalized preimage for the digital analytical hyperplane recognition. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3) :476–489, 2009. Cité en page 20
- [Dex06] Martine Dexet. *Architecture d'un modeleur géométrique à base topologique d'objets discrets et méthodes de reconstruction en dimension 2 et 3*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2006. Cité en pages XII, 20, 21, 22, 23, 26, 50, 58 et 98
- [DH72] R.O. Duda and P.E. Hart. Use of the hough transform to detect lines and curves in pictures. *Communications of the ACM*, 15(1) :11–15, January 1972. Cité en page 20
- [DS84] L. Dorst and A.W.M. Smeulders. Discrete representation of straight lines. 6(4) :450–463, July 1984. Cité en page 20
- [Fra95a] J. Françon. Arithmetic planes and combinatorial manifolds. In *DGCI*, pages 209–217, 1995. Cité en page 12
- [Fra95b] J. Françon. Discrete combinatorial surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, 57 :20–26, 1995. Cité en page 14
- [Fre74] Herbert Freeman. Computer processing of line-drawing images. *ACM Comput. Surv.*, 6(1) :57–97, 1974. Cité en page 9
- [Hol91] Hubert Holin. Harthong-reeb analysis and digital circles. *The Visual Computer*, 8(1) :8–17, 1991. Cité en page 15
- [Hou62] P.-V.-C. Hough. Method and means for recognizing complex patterns. In *United States Patent 3069654*, pages 47–64, 1962. Cité en pages XI et 20
- [Hun85] S.H.Y. Hung. On the straightness of digital arcs. 7(2) :203–215, March 1985. Cité en page 10
- [KK83] Z. Kulpa and B. Kruse. Algorithms for circular propagation in discrete images. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 24(3) :305–328, December 1983. Cité en page 15
- [Kov90] V.A. Kovalevsky. New definition and fast recognition of digital straight segments and arcs. In *International Conference on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 31–34, 1990. Cité en page 18
- [Kov93] V. Kovalevsky. Digital geometry based on the topology of abstract cell complexes. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 259–284, 1993. Cité en page 4
- [LC87] W. Lorenzen and H. Cline. Marching cubes : A high resolution 3d surface construction algorithm. *Computer Graphics*, 21(4) :163–169, 1987. Cité en page 19
- [LW00] C. Lincke and C.A. Würthrich. Towards a unified approach between digitization of linear objects and discrete analytical objects. In *WSGG*, pages 124–131, 2000. Cité en page 17
- [Mai85] Henry Maitre. Un panorama de la transformée de hough - a review on hough transform. *Traitement du Signal*, 2 :305–317, 1985. Cité en page 20
- [McI84] M. D. McIlroy. A note on discrete representation of lines. 64 :481–490, 1984. Cité en pages 20 et 52
- [PB74] M.L.V. Pittewy and R.J. Botting. Integer circles, etc. : Three move extension of bresenham's algorithm. 3(3) :260–261, 1974. Cité en page 15

- [PT89] Leslie Piegl and Wayne Tiller. A menagerie of rational b-spline circles. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 9(5) :48–56, 1989. Cité en page 15
- [Rev89] J.-P. Reveillés. Structures des droites discrètes. In *Journées mathématique et informatique*, 1989. Cité en page 11
- [Rev91] J.-P. Reveillés. *Géométrie Discrète, calcul en nombre entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, 1991. Cité en pages XI, 11 et 12
- [Rev95] Jean-Pierre Reveillés. Combinatorial pieces in digital lines and planes. *SPIE Vision Geometry IV*, 2573, 1995. Cité en pages XI et 13
- [RLSA08] M. Rodríguez, G. Largeteau-Skapin, and E. Andres. Local non-planarity for three dimensional surfaces for an invertible reconstruction : k-cuspal cells. In *Advances In Visual Computing*, volume LNCS vol. 5358, pages 925–934, 2008. Cité en pages 29 et 30
- [Ros74] A. Rosenfeld. Digital straight line segments. *IEEE Transactions on Computers*, 23 :1264–1269, 1974. Cité en page 9
- [RWF<sup>+</sup>09] Aurélie Richard, Guy Wallet, Laurent Fuchs, Eric Andres, and Gaëlle Largeteau-Skapin. Arithmetization of a circular arc. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 350–361, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag. Cité en page 15
- [SBDA05] Isabelle Sivignon, Rodolphe Breton, Florent Dupont, and Eric Andres. Discrete analytical curve reconstruction without patches. *Image Vision Computing*, 23(2) :191–202, 2005. Cité en page 25
- [VC99] J. Vittone and J.-M. Chassery. (n,m)-cubes and farey nets for naive planes understanding. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS vol. 1568, pages 76–90, 1999. Cité en pages XI et 20
- [VC00] J. Vittone and J.-M. Chassery. Recognition of digital naive planes and polyhedrization. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS vol. 1953, pages 296–307, 2000. Cité en page 20
- [WR87] X. Wu and J.G. Rokne. Double-step incremental generation of lines and circles. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 37(3) :331–344, March 1987. Cité en page 15
- [Wri90] William E. Wright. Rendering : Parallelization of bresenham’s line and circle algorithms. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 10(5) :60–67, 1990. Cité en page 15

# Redimensionnement des éléments structurants

---

## Sommaire

---

<b>II-1 Introduction</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>II-2 Redimensionnement des éléments structurants</b> . . . . .	<b>42</b>
II-2.1 Définitions . . . . .	42
II-2.2 Conséquences et propriétés . . . . .	42
II-2.3 Fonctions de redimensionnement . . . . .	44
II-2.4 Mesure de l'erreur . . . . .	48
<b>II-3 Algorithme d'intersection de préimages</b> . . . . .	<b>50</b>
II-3.1 Réécriture du problème. . . . .	50
II-3.2 Algorithme . . . . .	52
<b>II-4 Exemples d'utilisation du redimensionnement adaptatif</b> . . . . .	<b>56</b>
II-4.1 Débruitage de courbe discret-continu. . . . .	56
II-4.2 Simplification/Lissage de courbe discrètes. . . . .	58
<b>II-5 Problèmes topologiques liés au redimensionnement des voxels</b> . . . . .	<b>61</b>
II-5.1 Contrôle des squelettes . . . . .	62
II-5.2 Consistance du voisinage. . . . .	64
II-5.3 Images bicolores . . . . .	68
II-5.4 Conclusion sur le contrôle topologique et perspectives . . . . .	72
<b>II-6 Conclusion</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>76</b>

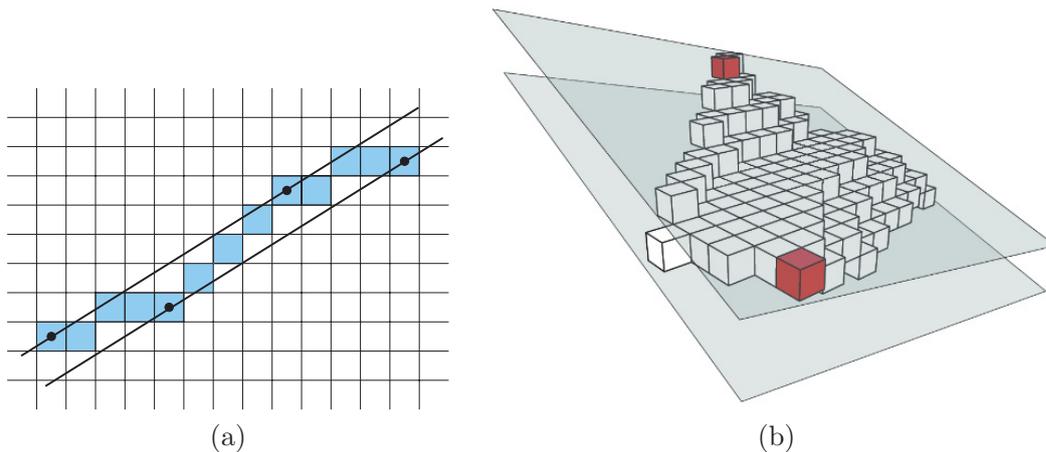
---

## II-1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons introduit différentes notions de primitives discrètes et présentés des algorithmes de reconstructions inversibles. Ceux-ci ne sont toutefois pas toujours adaptés à un cadre où les objets manipulés présentent du bruit.

L'objectif de ce chapitre est d'accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives discrètes pour ne pas tenir compte des irrégularités du contour qui peuvent être induites par les outils utilisés pour les obtenir.

La notion de *primitive discrète floue*, permettant l'étude analytique d'objets discrets bruités, a été introduite par Isabelle Debled-Rennesson et al. à travers l'étude de segments de droites discrètes bruitées. Elle définit les droites discrètes arithmétiques d'épaisseur variable dans [DRRRD03]. Ses premiers travaux ont été améliorés et étendus en dimension supérieure dans [DRTW05, DR07, PDR08a, PDR08b, PDR09, Pro09]. La figure II.1 illustre, en dimensions 2 et 3, la notion de morceau de primitive floue.



**Figure II.1** – Exemples de primitives discrètes floues en dimensions 2 et 3. (a) Segment de droite discrète floue. (b) Morceau de plan discret floue (*image issue de*[DR07]).

Pour accorder une marge d'erreur à un ensemble de points discrets, la reconnaissance de primitives floues joue sur l'épaisseur arithmétique des hyperplans. Dans ce chapitre, nous allons présenter une approche alternative où la marge d'erreur sera introduite par la modification de la taille des éléments structurants de la grille plutôt que par l'épaisseur des primitives discrètes.

Le début du chapitre présente comment le redimensionnement des éléments structurants accorde une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives. Cette marge d'erreur peut varier en fonction de critères locaux.

La suite du chapitre est consacrée aux conséquences du changement de taille des éléments structurants sur la reconnaissance d'hyperplans. Ensuite sont présentés quelques exemples d'applications du redimensionnement adaptatif des éléments structurants tels que le lissage de courbe discret-continu ou le débruitage.

La fin de ce chapitre est consacrée à la topologie de l'objet. Lors d'une reconstruction avec des voxels redimensionnés, des changements topologiques peuvent apparaître. Nous présentons une étude de ces changements topologiques ainsi que deux approches visant à éviter la plupart de ces changements.

## II-2 Redimensionnement des éléments structurants

Cette section présente le principe du redimensionnement des éléments structurants pour accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives discrètes : plus l'incertitude sur la position du point discret est grande, plus la taille de son élément structurant est augmentée. La théorie présentée s'applique aux différents modèles de discrétisation (voir chapitre I-1.4).

**Note :** travaillant principalement avec le modèle Standard, les éléments structurants seront souvent assimilés aux pavés (pixels/voxels).

### II-2.1 Définitions

Les éléments structurants liés aux espaces discrets orthonormés pour le modèle Standard sont des hypercubes unitaires centrés en des points de  $\mathbb{Z}^n$ .

Leur redimensionnement ne modifie ni leur nature (hypercube) ni la position de leur centre ( $C \in \mathbb{Z}^n$ ). Seule leur taille est modifiée : elle est multipliée par un facteur de redimensionnement  $r \geq 1$  (si  $r < 1$ , la taille de l'élément structurant est diminuée, l'ensemble de solutions est réduit).

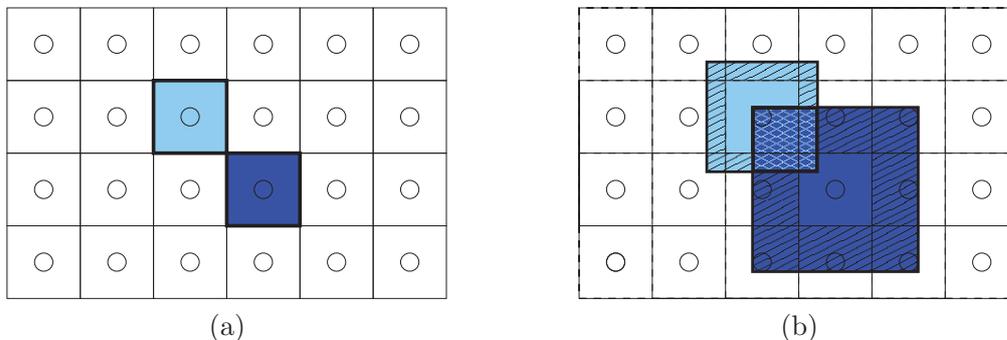
Dans un espace de dimension  $n$ , les éléments structurants sont décrits par un  $n$ -uplet d'entiers relatifs (les coordonnées de leur centre) et un réel (leur taille).

Ce redimensionnement est local, les éléments structurants peuvent être redimensionnés indépendamment les uns des autres.

### II-2.2 Conséquences et propriétés

#### II-2.2.1 Recouvrement

La première conséquence immédiate est qu'un élément structurant redimensionné par un facteur  $r > 1$  intersecte ses voisins. Avec  $r$  suffisamment grand, un élément structurant pourra intersecter n'importe quel autre élément structurant de l'espace. La figure II.2 illustre, en dimension 2, comment le redimensionnement des éléments structurants peut les amener à s'intersecter, on parle de *recouvrement* des éléments structurants.

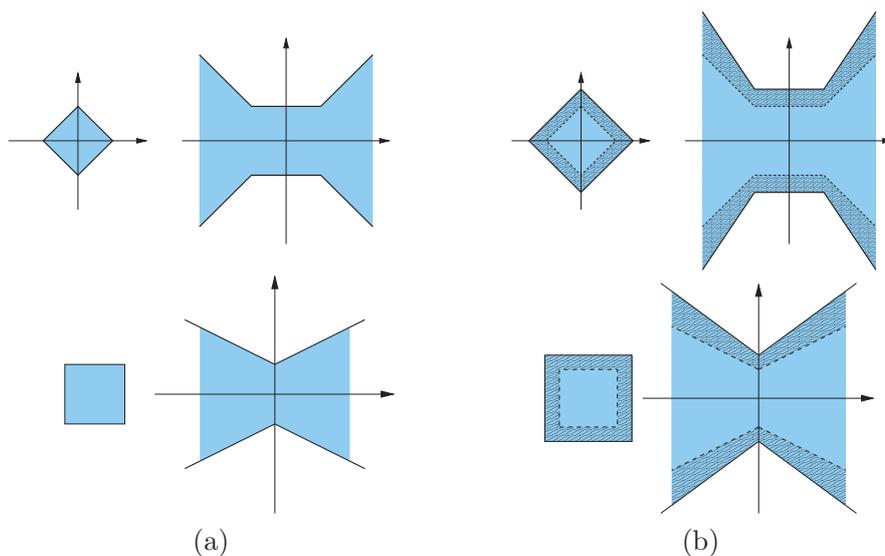


**Figure II.2** – (a) Espace discret. Les éléments structurants sont les pixels, ils réalisent un pavage de l'espace euclidien. (b) Les éléments structurants colorés ont été redimensionnés, ils intersectent leurs voisins : régions hachurées.

### II-2.2.2 Préimage d'un voxel

Notre objectif est d'accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives discrètes. Nous nous intéressons à la méthode de reconnaissance via un espace de paramètres présentée au chapitre I-2.

La propriété I-2.4 dit que la préimage d'un objet inclus dans un autre est incluse dans la préimage du second. La figure II.3 illustre cette propriété, l'espace des solutions des hyperplans coupant l'élément structurant associé à un voxel a été augmenté par le redimensionnement.



**Figure II.3** – Exemple en dimension 2 des conséquences du redimensionnement d'un élément structurant (en haut pour le modèle Naïf et au dessous pour les modèles Standard et Supercouverture). (a) l'élément structurant associé au pixel origine et sa préimage dans l'espace de paramètres. (b) le même élément structurant redimensionné par un facteur  $r = 1.5$  et sa préimage dans l'espace de paramètres.

La méthode de reconnaissance d'hyperplans via un espace de paramètres présentée au chapitre I-2.2 donne, sous la forme d'un polytope, l'ensemble de tous les hyperplans intersectant les éléments structurants associés à chacun des voxels d'un ensemble donné.

L'agrandissement de la préimage des éléments structurants des voxels ajoute des solutions non-inversibles (des hyperplans euclidiens dont la discrétisation diffère de l'ensemble de points discrets originel).

En redimensionnant les éléments structurants, une marge d'erreur est effectivement accordée à la reconnaissance. Cette marge d'erreur exprime l'incertitude sur la position exacte du point discret.

### II-2.2.3 Relations entre primitives floues et redimensionnement des éléments structurants

Isabelle Debled-Rennesson et al. ont défini les primitives floues dans [DRRRD03] en s'intéressant à la reconnaissance de primitives bruitées.

Les *droites englobantes* d'un ensemble de points sont définies comme les droites discrètes  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  telles que tous les points de l'ensemble appartiennent à  $\mathcal{D}$ . Une droite englobante est dite optimale si son épaisseur verticale est égale à la distance verticale de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points.

Un ensemble de points est un *segment flou d'épaisseur  $\nu$*  si et seulement si la droite englobante optimale a une épaisseur verticale inférieure ou égale à  $\nu$ .

Tout comme le redimensionnement des pixels, l'épaisseur des primitives floues apporte une flexibilité à l'étude d'objets discrets possiblement bruités.

Soit  $d$  une droite discrète floue centrée d'épaisseur  $\delta$  et de pente  $a/b$ . Son expression analytique est :

$$-\frac{\delta\sqrt{a^2 + b^2}}{2} \leq ax + by + c \leq \frac{\delta\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

Cette expression est quasiment équivalente à la définition introduite par I. Debled-Rennesson moyennant les inégalités larges des deux côtés de l'expression analytique.

Une droite discrète supercouverture (dont l'élément structurant est un carré de taille unitaire dont les côtés sont alignés avec les axes) a une expression analytique de la forme :

$$-\frac{|a| + |b|}{2} \leq ax + by + c \leq \frac{|a| + |b|}{2}$$

Il est facile de voir que si nous voulons une droite floue, il suffit de prendre des éléments structurants de taille :

$$r = \frac{\delta\sqrt{a^2 + b^2}}{|a| + |b|}$$

En considérant le modèle naïf, l'élément structurant est un carré dont les diagonales de taille unitaire sont alignées avec les axes. Il faudra le redimensionner avec un facteur :

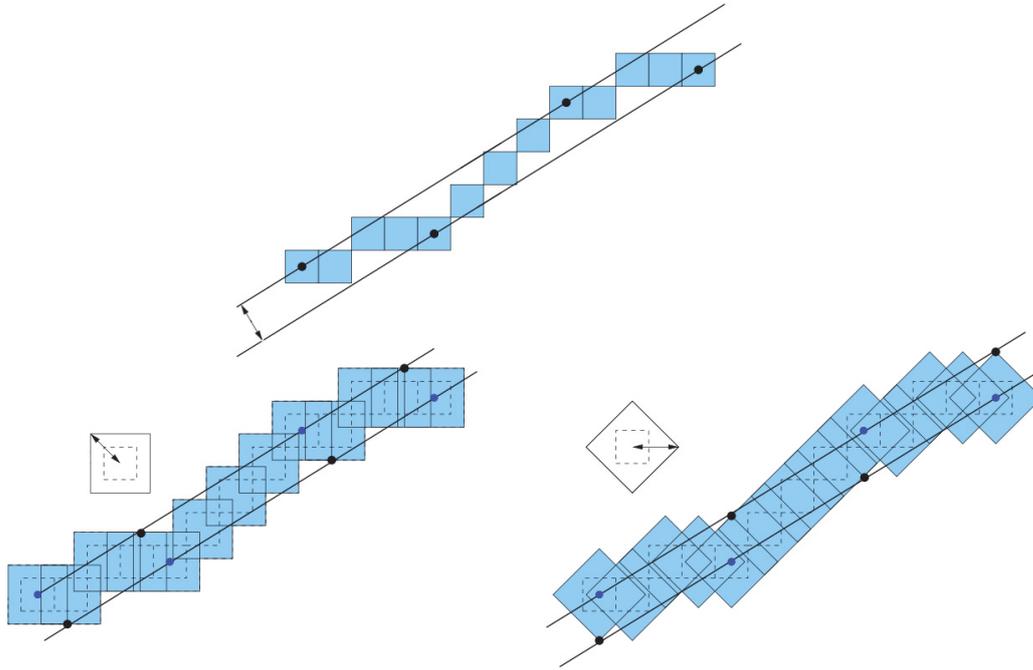
$$r = \frac{\delta\sqrt{a^2 + b^2}}{\max(|a| + |b|)}$$

Le redimensionnement des éléments structurants est une généralisation des droites floues de I. Debled-Rennesson car elles sont des cas particuliers où tous les pixels sont redimensionnés par le même facteur. Le principal avantage de cette méthode est de pouvoir redimensionner chaque élément structurant indépendamment des autres. La marge d'erreur peut être distribuée localement plutôt que globalement.

### II-2.3 Fonctions de redimensionnement

Pour redimensionner les éléments structurants indépendamment les uns des autres, nous accordons une marge d'erreur différente à chacun d'eux. Cette marge d'erreur est déterminée en fonction d'un critère local (courbure, bruit, ...).

Les critères locaux permettent de considérer certains pixels comme du bruit, l'information portée par un tel pixel n'est pas fiable. La marge d'erreur accordée par son redimensionnement



**Figure II.4** – Relations entre primitives floues et redimensionnement de l'élément structurant : un segment de droite flou (en haut) et la droite discrète reconnue avec redimensionnement des éléments structurants pour le modèle standard (à gauche) et naïf (à droite).

permet d'agrandir la préimage de ce dernier, c'est-à-dire d'ajouter des solutions qui n'auraient pas coupé le pixel s'il n'avait pas été redimensionné.

**Définition II-2.1** (Fonction de redimensionnement.) *Une fonction de redimensionnement est une fonction qui attribue un facteur de redimensionnement aux pixels d'un espace discret.*  
 $f_r : p \in \mathbb{Z}^n \rightarrow r \in \mathbb{R}$  avec  $r \geq 1$ .

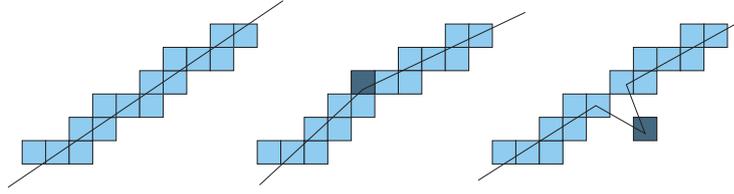
De nombreuses fonctions de redimensionnement peuvent être créées pour distribuer à chaque pixel une marge d'erreur plus ou moins grande selon différents critères.

Les critères pouvant être utilisés sont très nombreux et conduisent à des résultats différents. Notre attention s'est portée principalement sur : la tangente symétrique maximale [LVDV05], l'estimateur de courbure de Bullard [BGCFJ95] et l'échelle significative [KL09].

### II-2.3.1 Tangente discrète symétrique maximale

Lorsqu'une courbe discrète est bruitée, certains voxels sont manquants ou mal placés. En dimension 2, un pixel mal placé a très peu de chance d'appartenir à une primitive discrète de grande taille, il risque au contraire de perturber la reconnaissance en créant des segments de petites tailles (voir figure II.5).

Dans [RLS09], nous avons supposé que le bruit était plus important quand les primitives reconnues sont de petites tailles : les primitives de grandes tailles sont supposées présenter

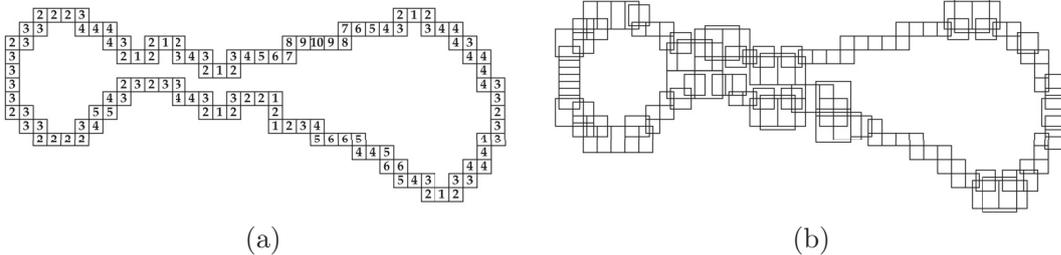


**Figure II.5** – Exemple de reconnaissance de primitives. En foncé, des pixels mal placés perturbant la reconnaissance de primitives.

un faible bruit. Les éléments structurants des pixels appartenant aux plus petites primitives sont alors redimensionnés.

Le principe est le contraire que celui présenté avec les points de rebroussement (voir chapitre I-2.5). Les points de rebroussement sont utilisés pour accorder de l'importance à certains sommets, ils perdent tout leur intérêt si les objets manipulés sont bruités.

**Remarque :** La taille de la tangente discrète symétrique maximale est la plus grande fenêtre pour laquelle un point du contour n'est pas détecté comme étant de rebroussement.



**Figure II.6** – (a) Les pixels  $p_i$  d'un contour à reconstruire, étiquetés avec  $t_i$  la moitié de la taille de leur tangente symétrique maximale. (b) Les pixels redimensionnés par la fonction  $f_r(p_i) = \max(1, 3 - \frac{1}{2}t_i)$ .

Le critère pour lequel nous avons opté pour détecter les différentes tailles de primitives est la taille de la tangente symétrique maximale définie dans [LVDV05].

Pour la figure II.6, nous avons étiqueté chaque pixel  $P_i$  avec  $t_i$  où la taille de la tangente symétrique maximale en  $P_i$  est de longueur  $2 * t_i + 1$ . La fonction de redimensionnement utilisée est  $f_r(p_i) = \max(1, 3 - \frac{1}{2}t_i)$ . Chaque pixel  $P_i$  est redimensionné par un facteur  $r_i \in \{1; 1, 5; 2; 2, 5\}$ , 1 pour les pixels ayant une tangente symétrique maximale de longueur au moins 9 et 2, 5 pour les pixels ayant une tangente symétrique maximale de taille 3.

Les pixels sont étiquetés avec la moitié de la taille de leur tangente symétrique maximale. Ils sont ensuite redimensionnés afin que plus cette tangente est petite et plus leur taille est augmentée. À partir d'une certaine taille de tangente, les pixels ne sont plus redimensionnés.

Même s'il y a recouvrement des pixels après redimensionnement, la séquence de parcours des pixels reste la même.

Ce critère s'est avéré très efficace (voir le chapitre II-4) car non seulement il se calcule en temps linéaire [LVDV05] (proportionnel au nombre de pixels du contour), mais les valeurs sont cohérentes par voisinage : si un pixel est étiqueté par une valeur  $v$ , l'étiquette  $u$  d'un de ses voisins est telle que  $|u - v| \leq 1$ .

Le principal inconvénient de ce critère est que la tangente symétrique maximale n'est définie qu'en dimension 2 alors que la méthode de reconnaissance de primitives est définie quelle que soit la dimension.

### II-2.3.2 Estimateur de courbure de Bullard

Défini dans [BGCFJ95], cet estimateur de courbure a comme principal avantage d'être défini quelle que soit la dimension. L'idée de cet estimateur de courbure est simple : en dimension 2, si la frontière  $\mathcal{F}$  d'un objet est localement un segment de droite, l'aire d'une boule centrée en  $\mathcal{F}$  sera environ divisée en deux régions égales. Si la plus grande des régions est à l'intérieur (respectivement l'extérieur) de l'objet, la frontière est localement concave (respectivement convexe) (voir figure II.7).

L'idée est de centrer une boule de rayon  $r$  autour de chaque point discret  $p$  du contour de l'objet. Il faut ensuite mesurer  $V$ , l'intersection entre cette boule et l'objet, en comptant les voxels de l'objet dans cette boule (voir figure II.7).

La courbure moyenne de la courbe est alors donnée par la formule :  $H^*(v) = \frac{3.868}{\pi r^4} V - \frac{7.179}{3r}$ .

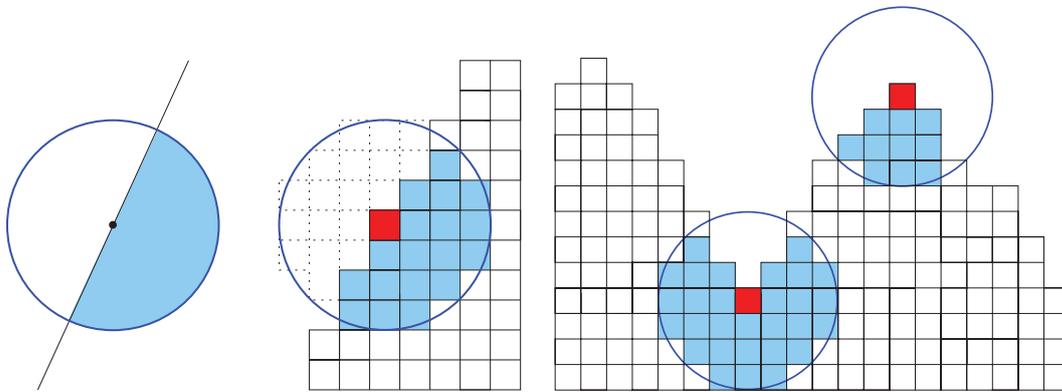


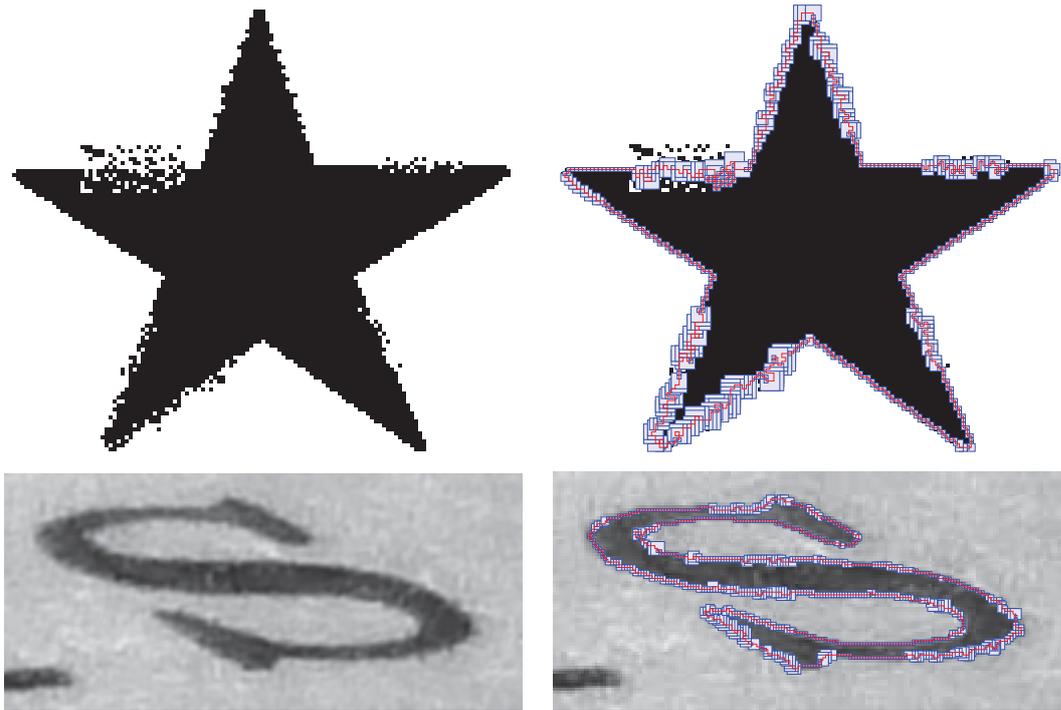
Figure II.7 – Illustrations en dimension 2 de l'estimateur de courbure de Bullard.

La qualité de l'approximation de la courbure et les résultats obtenus pour une courbe donnée dépendent fortement du choix du rayon de la boule  $r$ . Même si cet estimateur est défini quelle que soit la dimension, nous lui avons préféré d'autres méthodes.

### II-2.3.3 Échelle pertinente

Dans des travaux récents, nous avons opté pour le critère multi-échelle défini dans [KL09] qui associe à chaque pixel l'échelle à laquelle il est le plus significatif.

Le principe de cette méthode est de dire qu'un contour est endommagé si et seulement s'il ne suit pas les propriétés asymptotiques de la discrétisation d'une forme *parfaite*. Ces propriétés asymptotiques sont estimées à partir d'une représentation multi-échelle puis comparées pour déterminer l'échelle la plus pertinente.



**Figure II.8** – Images issues de [KL09]. A gauche, les images originales bruitées. A droite, les pixels du contour détecté, redimensionnés selon leur échelle significative.

La figure II.8 montre des exemples de résultats obtenus avec cette méthode. Plus les zones sont bruitées et plus la taille des pixels est grande. Sur le premier exemple (l'étoile), certains pixels ne sont même pas reconnus comme faisant partie du contour : ils ne sont pertinents à aucune échelle.

Contrairement à la plupart des estimateurs de courbure, la détection d'échelle pertinente est automatique, elle ne nécessite aucun paramétrage particulier.

Les résultats obtenus avec cet estimateur de courbure sont très satisfaisants même si sa version actuelle n'adresse qu'un seul contour de l'image (voir chapitre II-4).

## II-2.4 Mesure de l'erreur

Le contrôle de la marge d'erreur accordée à la reconnaissance de primitives induite par le redimensionnement des voxels d'un espace discret est indispensable. Nous nous intéressons à la distance de Hausdorff car elle permet de mesurer les dissemblances entre deux objets, elle mesure l'endroit où cette dissemblance est la plus grande.

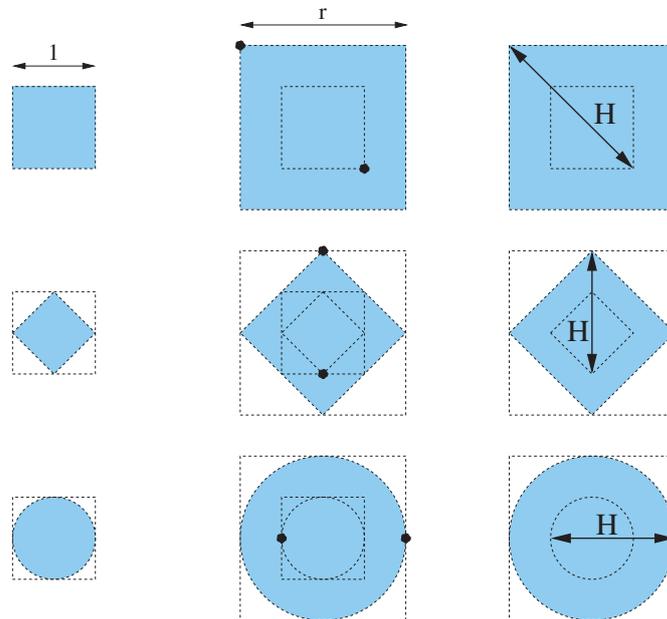
La méthode de reconstruction via un espace de paramètres garantit que chaque voxel est coupé par au moins un hyperplan de l'objet reconstruit. L'erreur est par conséquent proportionnelle au plus grand facteur de redimensionnement.

La marge d'erreur induite par le redimensionnement des voxels est mesurable et dépend directement de la fonction de redimensionnement. Il est donc possible de contrôler l'erreur en utilisant des fonctions de redimensionnement adéquates.

**Théorème II-2.2** *La distance de Hausdorff entre un objet  $A$  et la reconstruction de sa discrétisation  $B$  dépend du plus grand facteur de redimensionnement  $R = \max_i(f_r(p_i))$ . En dimension  $n$ , elle est bornée par :*

- $H(A, B) \leq \frac{(R+1)\sqrt{(n)}}{2}$ , pour les modèles supercouverture et standard [RLS09].
- $H(A, B) \leq \frac{R+1}{2}$ , pour les modèles naïf et pythagoricien.

*Preuve.* La distance de Hausdorff est contrôlée par le redimensionnement des voxels. Pour chaque reconstruction, un hyperplan euclidien coupe chaque élément structurant. La plus grande distance entre les deux reconstructions (une avec et une sans redimensionnement) est donnée par la distance maximale entre un élément structurant et sa redimension. Cette distance est maximale pour le voxel ayant le plus grand facteur de redimensionnement.  $\square$



**Figure II.9** – De haut en bas : pour le modèle supercouverture/standard, pour le modèle naïf et pour le modèle pythagoricien. A gauche, un pixel unitaire et son élément structurant  $e_1$ . Au centre, le même pixel redimensionné par le facteur  $r > 1$  et son élément structurant  $e_r$ . Les deux points noirs maximisent la distance entre  $e_1$  et  $e_r$ . A droite, représentation de la distance maximale  $H$  entre une reconstruction normale et une reconstruction avec un pixel redimensionné par un facteur  $r$ .

La figure II.9 illustre en dimension 2 théorème II-2.2.

## II-3 Algorithme d'intersection de préimages

Dans cette section, nous nous intéressons au modèle standard : l'élément structurant qui lui est associé est confondu avec le voxel, c'est-à-dire un hypercube aligné avec les axes du repère orthonormé.

Reconnaître un hyperplan coupant des voxels de différentes tailles implique de calculer l'intersection de leurs préimages. Dans [Dex06], des algorithmes sont proposés en dimensions 2 et 3.

Ces algorithmes profitent des sommets en commun entre voxels voisins, c'est-à-dire, lors du parcours d'une frontière, deux voxels  $k$ -voisins ont  $2^k$  sommets en commun. Il est inutile de recalculer certaines contraintes.

Dans le cas où les pixels sont redimensionnés, rien ne garantit que deux voxels voisins aient un sommet en commun (voir figure II.2). L'algorithme de reconstruction vu au chapitre I-2.3 est différent.

L'intersection de préimages généralisées être réduite des intersections de demi-plans définis par des inéquations. Dans un premier temps, la réduction du problème est démontrée. La suite du chapitre présente un algorithme linéaire en dimension 2 profitant des propriétés de la préimages des pixels redimensionnés.

### II-3.1 Réécriture du problème.

Le problème de l'intersection de préimages généralisées de plusieurs voxels peut être réduit à un problème d'intersection d'hyperplans, cette propriété est valable quelle que soit la dimension.

Plusieurs propriétés sur les équations des hyperplans peuvent être déduites grace aux différentes symétries que présentent un voxel (hypercube).

Pour une question de représentation dans l'espace, la réduction du problème sera présentée en dimension 2. Elle s'étend très naturellement quelle que soit la dimension (attention : le nombre de sommets d'un hypercube est égal à  $2^n$  où  $n$  est la dimension de l'espace).

#### II-3.1.1 Problème d'intersection d'hyperplans

En dimension 2, les pavés sont des pixels : des carrés. Leur préimage est entièrement décrite par quatre inéquations. Chacune d'entre elles est associée à un sommet du pixel dans l'espace de paramètres (voir figure I.26). La préimage d'un pixel est un polygone infini dont les côtés sont définis par quatre équations de droites de la forme  $d_i : a_i x + b_i = 0$ .

un point  $X$  de coordonnées  $(x, y)$  appartient à la préimage d'un pixel  $p$  de centre  $(\alpha, \beta)$  et de taille  $t$  si et seulement si :

$$(a_1 x + b_1 \leq 0 \cup a_2 x + b_2 \leq 0) \cap (a_3 x + b_3 \geq 0 \cup a_4 x + b_4 \geq 0)$$

L'appartenance à la préimage d'un pixel est un problème d'intersection et d'union de demi-plans définis par des droites.

Les préimages généralisées ont été présentées à l'aide d'extrusions positives et négatives par rapport à la première coordonnée (l'axe des  $x$ ). Les voxels sont des hypercubes et chacun de leurs sommets est le symétrique d'un autre par rapport au plan orthogonal à  $x$  passant par le milieu de l'hypercube : Les contraintes sont deux à deux parallèles.

En dimension 2, un pixel est un carré dont les sommets sont numérotés  $X_i(a_i, b_i)$ . Dans l'espace des paramètres, les demi-plans correspondant aux sommets sont tels que :

$$(a_1x + b_1 \leq 0 \cap a_3x + b_3 \geq 0) \subseteq ((a_1x + b_1 \leq 0 \cap a_4x + b_4 \geq 0) \cup (a_2x + b_2 \leq 0 \cap a_3x + b_3 \geq 0))$$

et

$$(a_2x + b_2 \leq 0 \cap a_4x + b_4 \geq 0) \subseteq ((a_1x + b_1 \leq 0 \cap a_4x + b_4 \geq 0) \cup (a_2x + b_2 \leq 0 \cap a_3x + b_3 \geq 0))$$

La préimage généralisée d'un pixel peut s'écrire :

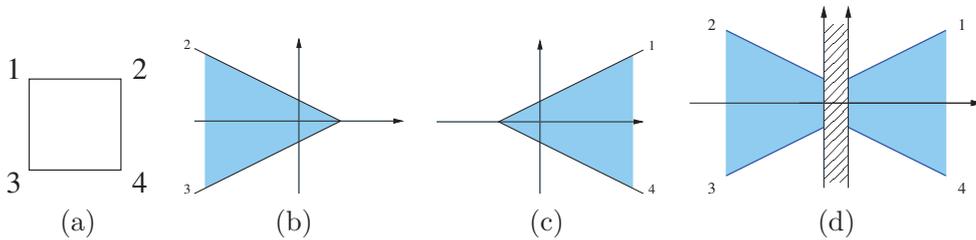
$$(a_1x + b_1 \leq 0 \cap a_4x + b_4 \geq 0) \cup (a_2x + b_2 \leq 0 \cap a_3x + b_3 \geq 0)$$

Les solutions du problème (ensemble des droites intersectant le pixel) peuvent être séparées en deux sous ensembles : les droites croissantes vérifiant  $(a_1x + b_1 \leq 0 \cap a_4x + b_4 \geq 0)$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  et les droites décroissantes vérifiant  $(a_2x + b_2 \leq 0 \cap a_3x + b_3 \geq 0)$  où  $(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$  (voir figure II.10).

La préimage du pixel  $p$  de centre  $(\alpha, \beta)$  et taille  $t$  est décrit par les quatre contraintes suivantes :

- (1)  $-(\alpha - \frac{t}{2})x - y + (\beta + \frac{t}{2}) \geq 0$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
- (2)  $(\alpha + \frac{t}{2})x + y - (\beta - \frac{t}{2}) \geq 0$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
- (3)  $-(\alpha + \frac{t}{2})x - y + (\beta + \frac{t}{2}) \geq 0$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$
- (4)  $(\alpha - \frac{t}{2})x + y - (\beta - \frac{t}{2}) \geq 0$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$

**Proposition II-3.1** *En dimension 2, le polytope solution de l'intersection de préimages de pixels peut être réduit à un problème d'intersection de demi-plans. Le polytope solution est l'union de deux convexes : un dans  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  et l'autre dans  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}$*



**Figure II.10** – (a) Pixel origine. (b) Solutions vérifiant  $(a_1x + b_1 \leq 0 \cap a_4x + b_4 \geq 0)$ . (c) Solutions vérifiant  $(a_2x + b_2 \leq 0 \cap a_3x + b_3 \geq 0)$ . (d) Problème divisé en deux.

Le principe décrit ci-dessus est valable quelque soit la dimension :

**Corollaire II-3.2** *soit  $\mathbb{Z}^n$  un espace discret orthonormé (les voxels sont des hypercubes). L'image d'un hypervoxel  $\Pi$  dans l'espace de paramètres est un polytope  $\mathcal{P} = \mathcal{D}_{\mathcal{E}}(\Pi)$  décrit par l'union et l'intersection de  $2^n$  hyperplans ou par l'union de  $2^{n-1}$  convexes.*

### II-3.1.2 Spécificités du contexte

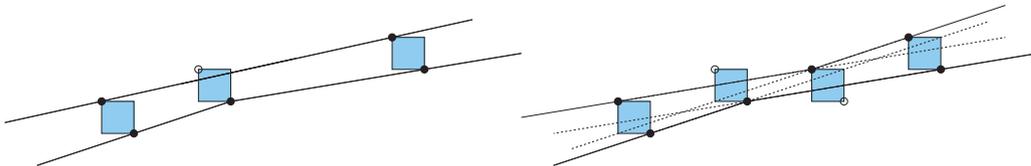
La reconnaissance de primitive maximale est itérative : à chaque étape, les contraintes liées à un pixel sont ajoutées au problème. Si la préimage généralisée n'est pas l'ensemble vide, le pixel est accepté et le pixel suivant est testé. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'un pixel soit rejeté.

Le problème de l'intersection de demi-plans a été très largement étudié, des algorithmes donnant des solutions en temps linéaire ont été proposés dans [O'R81, Meg83].

Les algorithmes donnant l'ensemble de toutes les solutions peuvent être calculés en  $\Theta(n \ln(n))$ . Ils sont obtenus en triant les demi-plans en fonction de leur pente. Dans notre cas, nous voulons un algorithme incrémental où les demi-plans sont intersectés les uns après les autres.

En dimension 2, les demi-plans à intersecter dans l'espace de paramètres sont les préimages des sommets de pixels. Aucun des demi-plans n'est décrit par une droite verticale car son antécédent serait un point à l'infini. La préimage d'un ensemble de pixels est décrite par deux convexes : un dans  $\mathbb{R}^+$  et l'autre dans  $\mathbb{R}^-$ . Pour initialiser l'algorithme, la première contrainte est verticale (elle est la seule) :  $x \geq 0$  ou  $x \leq 0$ . La deuxième contrainte intersecte obligatoirement la première.

Dans le cas classique où les pixels sont tous de taille unitaire (pas de redimensionnement), si les pixels ne sont pas connexes, le nombre de points d'appuis ne peut pas être borné par un entier (voir figure II.11).



**Figure II.11** – Même si l'ensemble de pixels appartient à une droite, s'il n'est pas connexe, le nombre de points d'appuis ne peut pas être borné par un entier.

Si les pixels sont connexes, l'intersection de leur préimage est un polytope ayant au plus 4 côtés [McI84, LB93]. Ses côtés correspondent aux points d'appuis des droites coupant l'ensemble de pixels et ses sommets correspondent aux droites limites (voir fig II.12).

Dans notre cas, les pixels sont centrés en des points discrets mais ne sont pas tous de même taille. Si le nombre de tailles possibles n'est pas borné, il est très facile par construction de montrer que le nombre de points d'appuis ne l'est pas non plus. Le nombre de côtés du polytope correspondant n'est par conséquent pas borné (voir figure II.13).

## II-3.2 Algorithme

L'algorithme suivant est une amélioration de l'algorithme publié dans [RLS09]. Un polytope  $\mathcal{P}$  est construit itérativement par l'ajout successif de contraintes de la forme  $\mathcal{C}$  :  $\alpha X + \beta Y + \gamma \geq 0$ . Un polytope  $\mathcal{P}$  est décrit par : une liste de contraintes (ses côtés)  $CL$  et

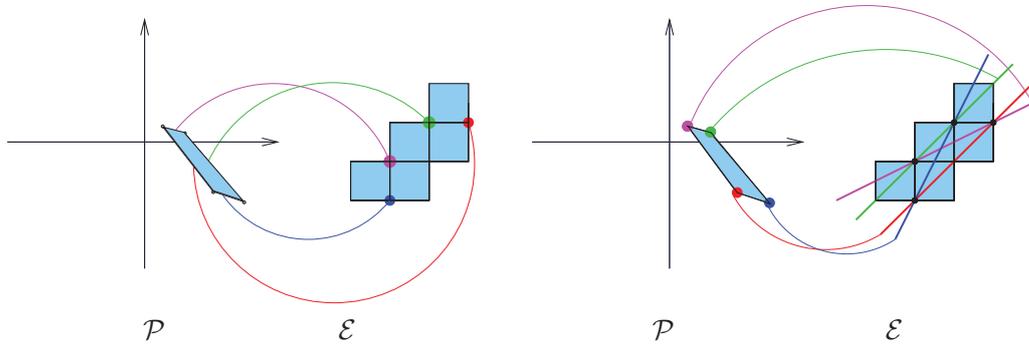


Figure II.12 – Relations entre un ensemble de pixels et sa préimage généralisée.

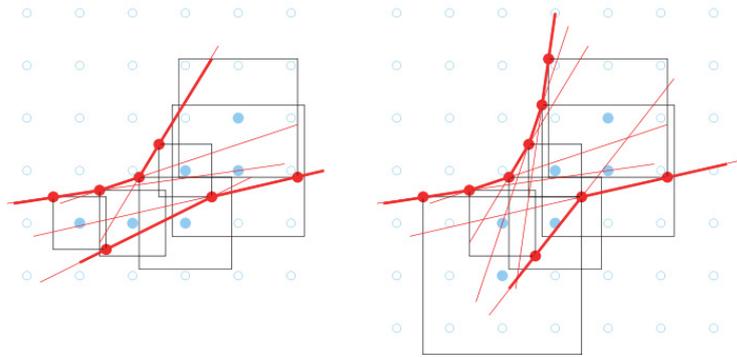


Figure II.13 – Si le nombre de tailles possibles que peut emprunter un pixel n'est pas borné, le nombre de points d'appuis ne peut pas être borné.

une liste de sommets  $VL$  où chaque sommet  $v$  est défini par l'intersection de deux contraintes  $v_{C1}$  et  $v_{C2}$ .

**Principe de l'algorithme :**

À chaque contrainte sont associés deux marqueurs (booléens initialisés à *faux*). Chaque marqueur signifie qu'un sommet du polytope solution se trouve sur la droite décrite par la contrainte. Deux marqueurs signifient donc que la contrainte est un segment définissant un côté du polygone solution.

Quand une nouvelle contrainte  $c$  est ajoutée, tous les sommets de  $VL$  sont testés, si certains d'entre eux ne vérifient pas  $c$  alors  $c$  intersecte  $\mathcal{P}$ . Les sommets rejetés sont retirés de  $VL$  ainsi que les marqueurs sur les contraintes qui leur étaient associées.

À chaque étape, les contraintes sans marqueur sont retirées de  $CL$ , elles sont redondantes.

**Propriété II-3.3** *Si toutes les contraintes de  $CL$  sont marquées exactement deux fois, le polytope  $\mathcal{P}$  est fini. Sinon, au plus deux contraintes sont marquées une seule fois, elles sont les côtés infinis du polytope solution.*

---

**Algorithme 1:** Intersection itérative de demi-plans.

---

**Entrées :** Une contrainte  $\mathcal{C}$ .

**Sorties :** Mise à jour du polytope  $\mathcal{P}$  en tenant compte de  $\mathcal{C}$ .

début

**si**  $Card(CL) = 0$  **alors**

    └ ajouter la contrainte  $\mathcal{C}$  à  $CL$

**sinon si**  $Card(CL) = 1$  **alors**

    └ ajouter le sommet  $\mathcal{C} \cap CL(0)$  à  $VL$ ;

    └ ajouter la contrainte  $\mathcal{C}$  à  $CL$ ;

    └ marquer  $\mathcal{C}$  et  $CL(0)$  une fois;

**sinon**

**pour tout**  $v \in VL$  **faire**

**si**  $v$  ne vérifie pas la contrainte  $\mathcal{C}$  **alors**

        └ enlever une marque à  $v_{C1}$  et  $v_{C2}$ ;

        └ retirer  $v$  de  $VL$ ;

**si** l'aire du polytope est infini **alors**

**pour tout**  $c \in CL$  **faire**

**si**  $c$  n'est pas marqué **alors**

**si**  $c$  n'est pas un côté infini du polytope **alors**

            └ retirer  $c$  de  $CL$

**sinon**

**si**  $\mathcal{C} \cap c \in \mathcal{P}$  **alors**

              └ ajouter  $v$  à  $VL$  ;

              └ marquer  $\mathcal{C}$  et  $c$  une fois;

**sinon**

              └ retirer  $c$  de  $CL$  ;

              └ ajouter  $\mathcal{C}$  à  $CL$ ;

**sinon si**  $c$  est marqué une fois et n'est pas un côté infini et  $c \neq \mathcal{C}$  **alors**

          └ ajouter  $\mathcal{C} \cap c$  to  $VL$  ;

          └ ajouter  $\mathcal{C}$  à  $CL$ ;

          └ marquer  $\mathcal{C}$  et  $c$  une fois;

**si**  $\mathcal{C}$  n'est pas marqué et l'intersection de  $\mathcal{C}$  avec un côté infini  $e$  appartient à  $\mathcal{P}$  **alors**

      └ ajouter  $\mathcal{C} \cap e$  à  $VL$  ;

      └ marquer  $e$  and  $\mathcal{C}$  one time ;

**sinon**

**pour tout**  $c \in CL$  **faire**

**si**  $c$  n'est pas marqué **alors**

        └ retirer  $c$  de  $CL$  ;

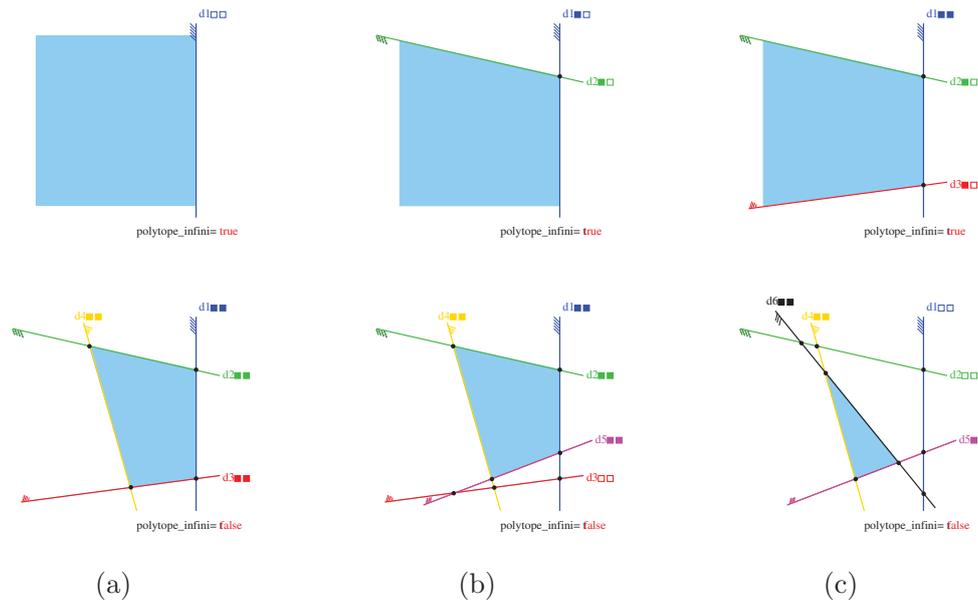
**sinon si**  $c$  est marqué une fois **alors**

        └ ajouter  $\mathcal{C} \cap c$  à  $VL$  ;

        └ mark  $\mathcal{C}$  and  $c$  one time ;

        └ ajouter  $\mathcal{C}$  à  $CL$  ;

**Remarque :** Attention, l'algorithme ne fonctionne pas dans le cas où les deux premières contraintes sont parallèles. Dans notre cadre d'utilisation, les contraintes correspondent aux sommets des voxels dans un espace de paramètres, par définition, aucune d'entre elles n'est une droite verticale. La deuxième contrainte coupe automatiquement la première ( $x \leq 0$  ou  $x \geq 0$ ).



**Figure II.14** – Exemple de déroulement de l'algorithme. La zone colorée représente l'intersection des demi-plans.

### II-3.2.1 Complexité et calculabilité

Les points appartenant au polytope solution sont associés à des droites coupant l'ensemble des pixels reconnus. Les côtés du polytope solution représentent les points d'appui de ces droites et leur nombre ne peut pas être borné par un entier.

Pour un ensemble de  $n$  pixels, le nombre de contraintes est égal à  $4 * n$  (chacun de ses sommets). À chaque itération de l'algorithme, tous les sommets de  $VL$  sont testés par la nouvelle contrainte. L'algorithme est en  $\Theta(n^2)$  dans le pire des cas, c'est-à-dire le cas où aucune contrainte n'est redondante.

Lorsqu'une contrainte est redondante, elle est ignorée dans la suite des calculs. Seules les contraintes définissant un côté de la préimage généralisée sont conservées et testées à chaque itération. Même si l'algorithme est en  $\Theta(n^2)$  dans le pire des cas, le nombre de sommets de la préimage généralisée n'est pas très grand.

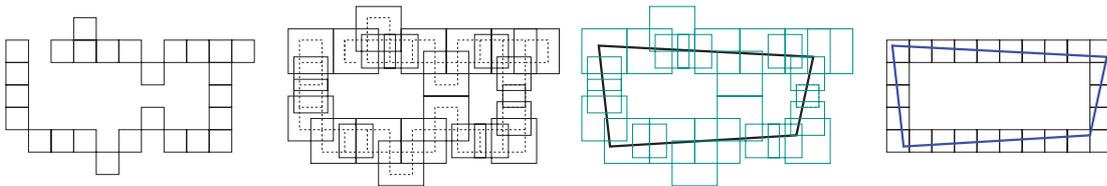
## II-4 Exemples d'utilisation du redimensionnement adaptatif

Après avoir présenté la méthode de reconnaissance de droites discrètes avec redimensionnement adaptatif des pixels, cette section présente deux exemples d'applications où notre méthode peut être utilisée : le débruitage discret-continu, la simplification (lissage) de courbe.

### II-4.1 Débruitage de courbe discret-continu.

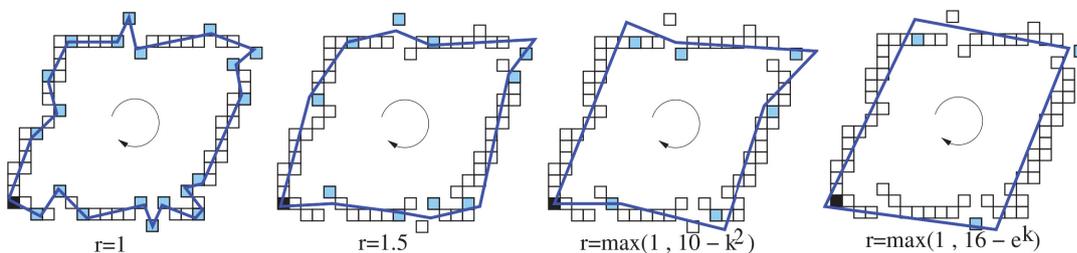
Le débruitage de courbe discret-continu est une opération discrète-continue, c'est-à-dire une transformation d'un espace discret vers lui-même calculée partiellement dans un espace continu (voir [LSA09] pour plus de détails).

Le débruitage discret-continu se déroule en trois étapes. Les pixels de la courbe discrète en entrée sont redimensionnés à l'aide d'un critère de courbure local (voir chapitre II-2.3). La courbe est ensuite reconstruite à l'aide d'un espace de paramètres et enfin, la courbe euclidienne résultante est discrétisée dans la grille de départ pour obtenir en sortie une autre courbe discrète dite *débruitée* (voir Fig.II.15).

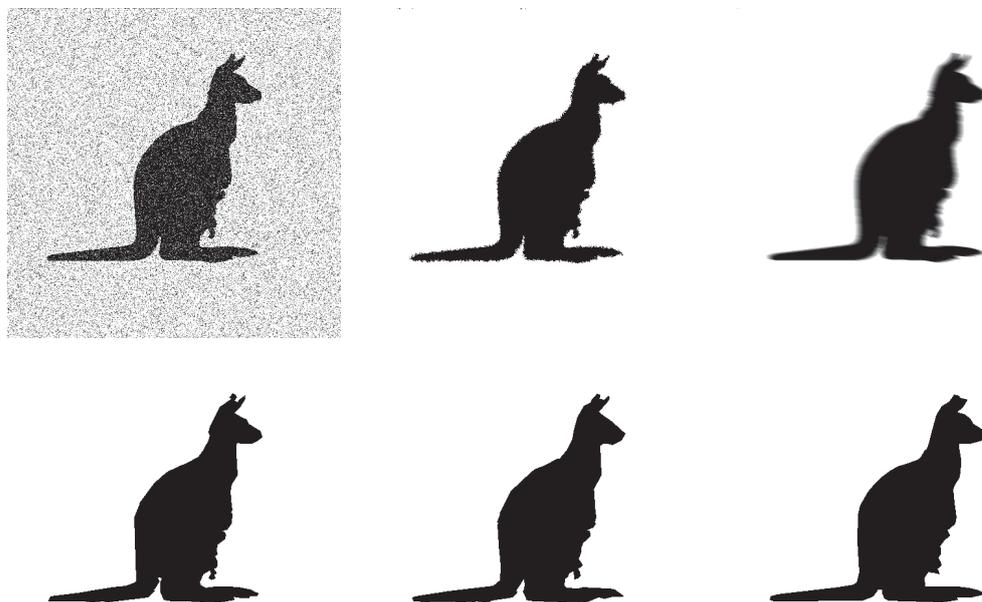


**Figure II.15** – De gauche à droite : la courbe discrète en entrée, le redimensionnement des pixels, la reconstruction des pixels redimensionnés et la discrétisation de la courbe reconstruite : la courbe discrète résultante.

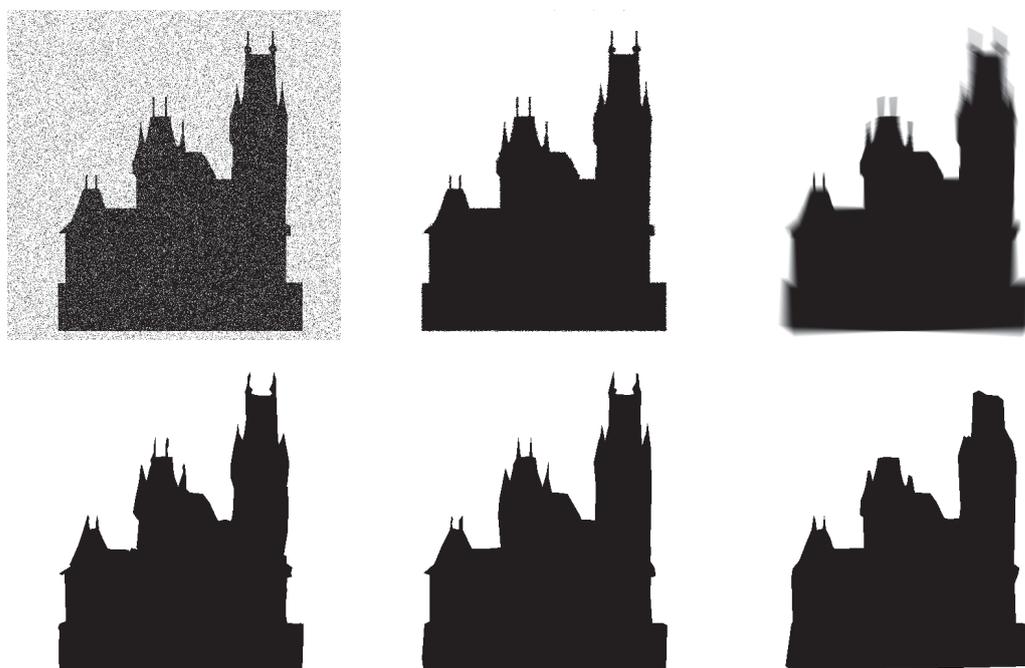
La marge d'erreur accordée par le débruitage ou la simplification est déterminée par la fonction de redimensionnement (voir chapitre II-2.3) : plus le redimensionnement des pixels est grand et plus la marge d'erreur l'est aussi (voir figure II.16).



**Figure II.16** – Exemple de débruitage avec différentes fonctions de redimensionnements ( $k$  vaut la moitié de la taille de la tangente discrète symétrique maximale).



**Figure II.17** – IAPR-TC18 klokan : débruitage avec notre méthode de reconstruction où les pixels sont redimensionnés selon leur échelle significative.



**Figure II.18** – IAPR-TC18 castle : débruitage avec notre méthode de reconstruction où les pixels sont redimensionnés selon leur échelle significative.

Les images utilisées pour les figures II.17 et II.18 sont issues de "the International Association of Pattern Recognition Technical Committee on Discrete Geometry" (IAPR-TC18). Nous les avons utilisés pour montrer l'efficacité de notre débruitage face à différents types de bruits.

Sur la figure II.17, nous avons respectivement appliqué : un bruit aléatoire poivre-sel, un flou gaussien (l'image n'est plus binaire mais présente désormais différents niveaux de gris), une inversion aléatoire de pixels avec leur voisins.

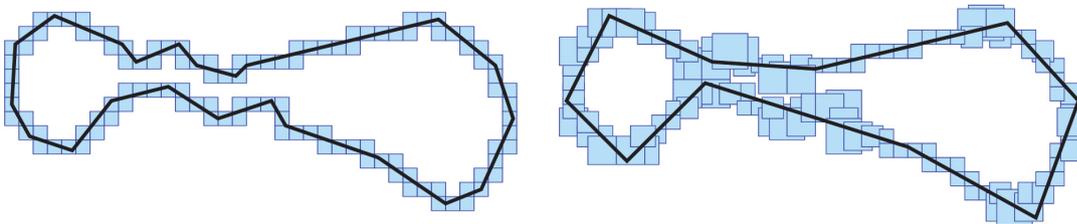
Sur la figure II.18, les bruits appliqués sont respectivement : un bruit poivre-sel, une inversion aléatoire de pixels voisins et un flou cinétique radial (l'image n'est plus binaire mais présente différents niveaux de gris).

Le débruitage discret-continu permet de faire face à différents types bruit présent sur différentes images. Tout comme le redimensionnement adaptatif, il peut être étendu à n'importe quelle dimension.

#### II-4.2 Simplification/Lissage de courbe discrètes.

L'objectif d'une simplification est de décrire une courbe à l'aide de moins de sommets tout en respectant sa géométrie. La courbe résultante est dite *simplifiée*.

Le principe de notre simplification est simple, nous allons appliquer le débruitage précédent à une courbe ne présentant pas de bruit. La marge d'erreur accordée par le redimensionnement des pixels permet de supprimer certaines aspérités du contour (voir figure II.19).

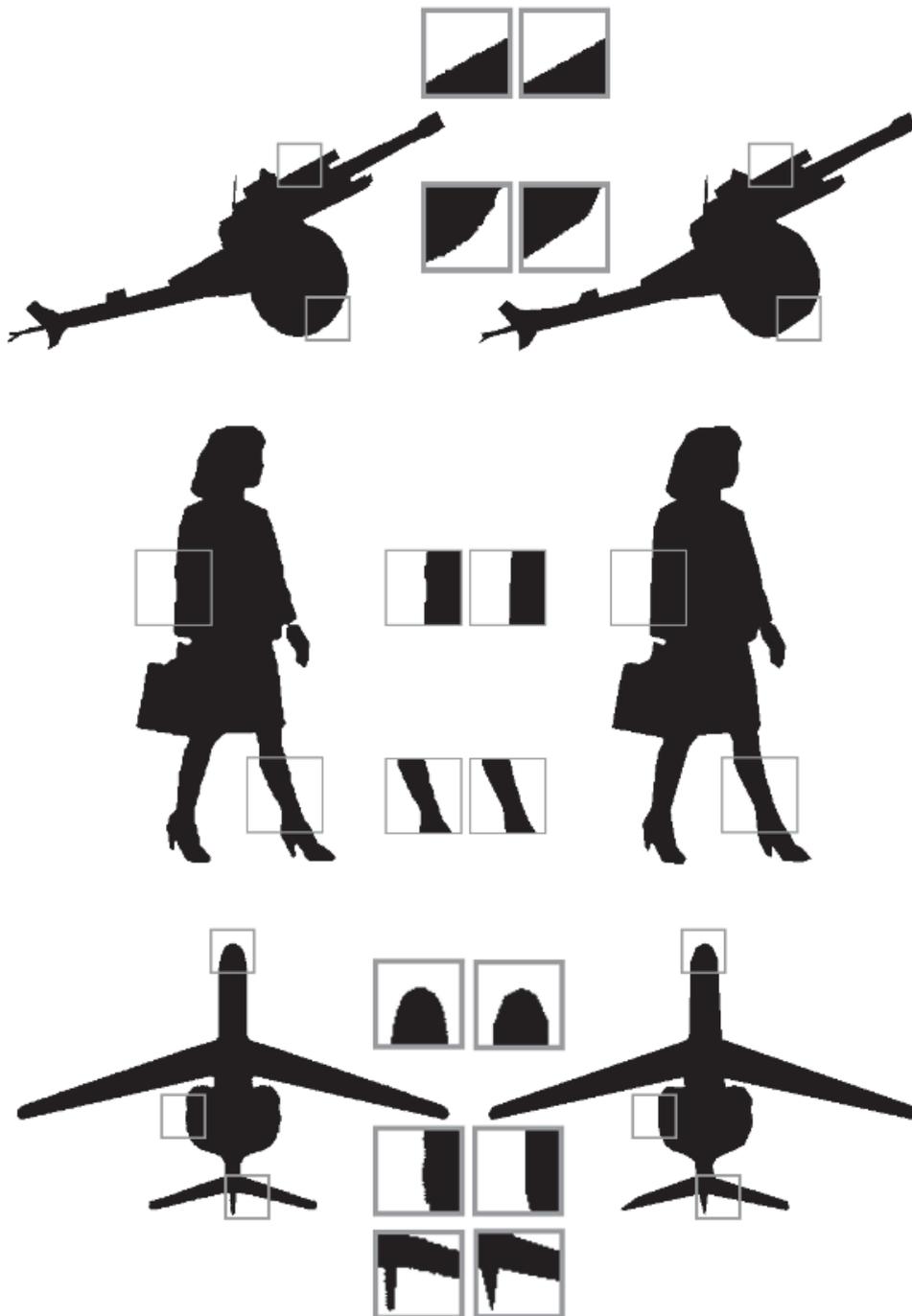


**Figure II.19** – Etapes de la simplification de courbe continue-discrète. En haut : la courbe euclidienne en entrée et sa discrétisation. En bas : le redimensionnement des pixels et la courbe euclidienne résultante.

La figure II.20 montre des exemples de simplifications de courbes obtenus par notre méthode en utilisant l'estimateur d'échelle pertinente.

Pour mesurer la simplification, le nombre de côtés du contour est compté et comparé au nombre de côtés obtenus avec la version inversible de la reconstruction [Dex06]. Les taux de simplification sont donnés par la table II.1.

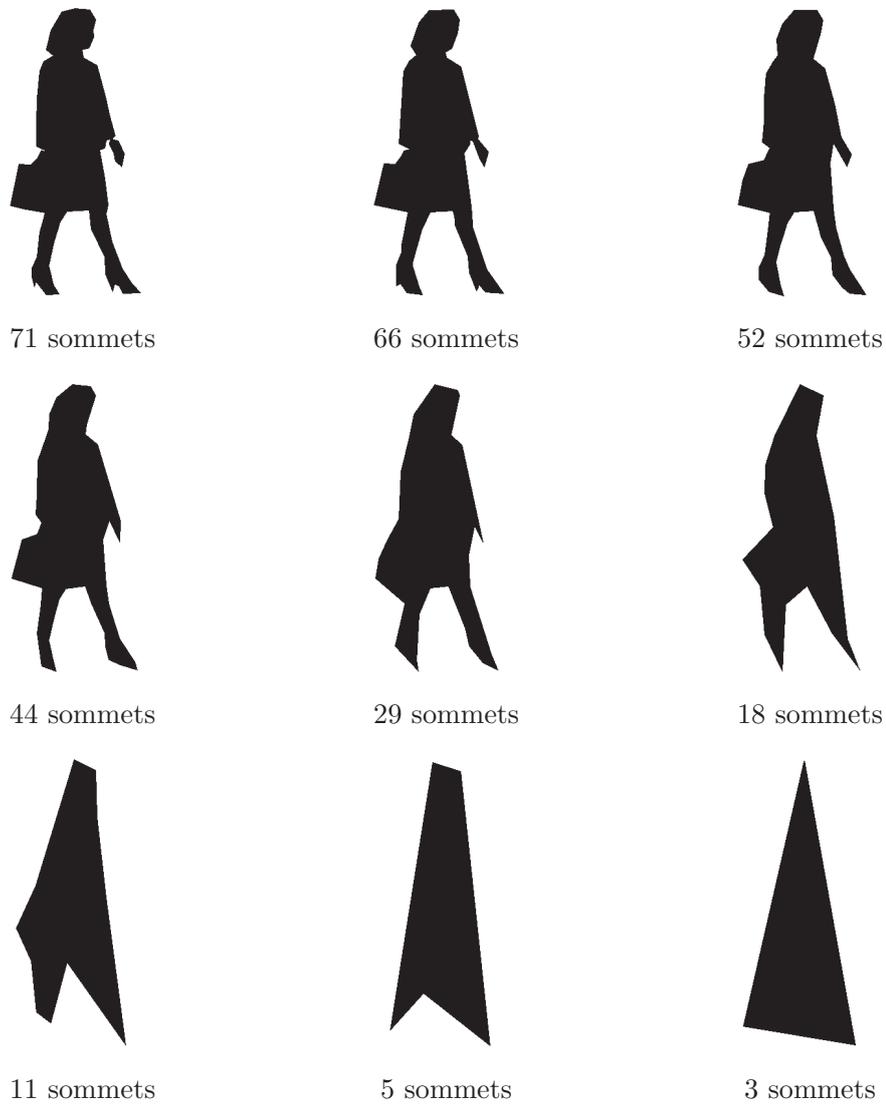
Le résultat d'une simplification peut être pris comme image d'origine pour une autre simplification. La figure II.21 montre les résultats de plusieurs simplifications consécutives d'une image.



**Figure II.20** – A gauche, les images IAPR-TC18 originales (respectivement : canon, female, plane). A droite, leur version simplifiée.

nom de l'image IAPR-TC18	nombre de sommets avec une reconstruction inversible	nombre de sommets avec simplification	coefficient de simplification
canon	145	79	45.5%
castle	112	89	20.5%
female	157	105	33.1%
klokan	130	94	27.6%
plane	233	57	75,5%

**Table II.1** – Résultats de la simplification avec différentes images 2D de IAPR-TC18.

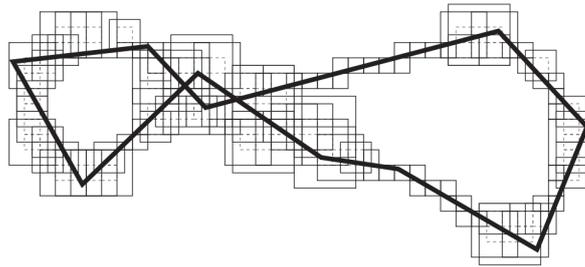


**Figure II.21** – Chaîne de simplification de l'image female de IAPR-TC18.

## II-5 Problèmes topologiques liés au redimensionnement des voxels

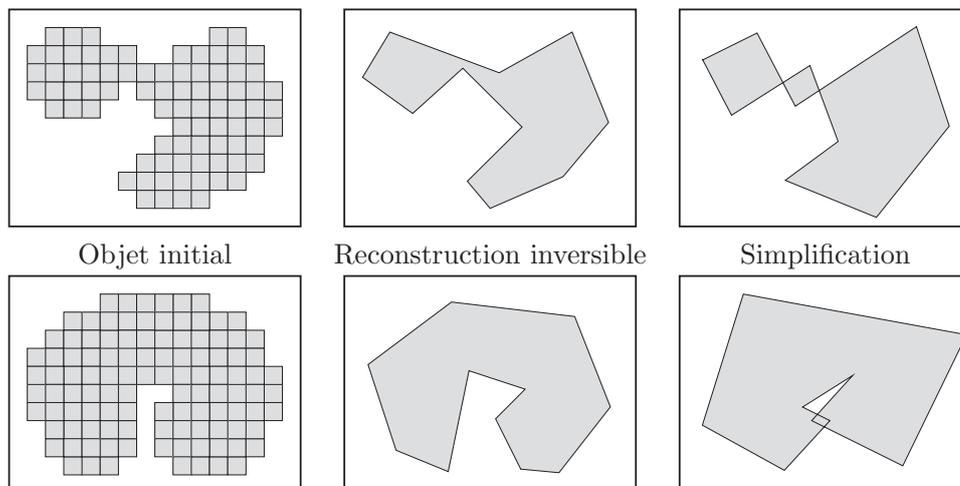
Une reconstruction avec des voxels redimensionnés ayant pour but de diminuer le nombre de sommets de l'objet, est par définition non-inversible. Le redimensionnement des voxels accorde une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives mais rien ne garantit que la topologie de l'objet est préservée (voir figure II.22).

Les travaux présentés ici ont pour objectif d'empêcher ces modifications topologiques.



**Figure II.22** – Le redimensionnement adaptatif peut engendrer des changements dans la topologie de la courbe lors de sa reconstruction.

Nous nous intéressons dans un premier temps à la reconstruction de courbes de Jordan, c'est-à-dire de courbes fermées divisant l'espace en deux : un intérieur et un extérieur. La simplification d'une telle courbe peut entraîner des changements dans la topologie de l'objet ; ces changements ont lieu quand la courbe reconstruite s'auto-intersecte. La figure II.23 illustre les deux types de changements topologiques : dans le premier exemple (en haut), la région à l'intérieur de la courbe est divisé en plusieurs régions. Dans le second exemple (en bas), c'est l'extérieur qui est divisé en deux.



**Figure II.23** – Deux exemples où la simplification engendre un changement topologique de l'objet.

Ce chapitre présente deux méthodes pour diminuer, voire empêcher dans le plupart des cas, ces changements topologiques lors de la reconstruction d'une courbe de Jordan. La première méthode consiste à calculer le squelette de la surface délimitée par la courbe de Jordan et à rogner les pixels redimensionnés qui intersectent ce squelette (voir chapitre II-5.1). Les résultats obtenus avec cette méthode sont satisfaisant bien que la préservation de la topologie ne soit pas garantie. La seconde méthode consiste en l'élaboration d'une condition sur le voisinage des pixels redimensionnés garantissant que les côtés de la courbe reconstruite ne s'intersectent pas (voir chapitre II-5.2). Cette seule condition ne suffit pas, la méthode de reconstruction est toute aussi importante.

Le chapitre II-5.3 est consacré à l'application de ces méthodes pour contrôler la topologie lors de la reconstruction d'images bicolores (une image bicolore peut être entièrement décrite par des courbes de Jordan).

### II-5.1 Contrôle des squelettes

L'idée est de contraindre le redimensionnement des pixels et d'éviter ainsi les changements topologiques lors de la reconstruction d'une courbe de Jordan. Le redimensionnement des pixels sera limité par des squelettes.

Un *squelette* (ou *axe médian*) [Blu73] est un ensemble de courbes qui "court le long du milieu" de l'objet. C'est l'ensemble de tous les centres des cercles tangents à la frontière de l'objet en au moins deux points et inclus dans l'objet. Les squelettes portent les propriétés géométriques et topologiques des objets dont ils sont issus telles que : la connexité, la longueur, la direction, le nombre de trous, etc.

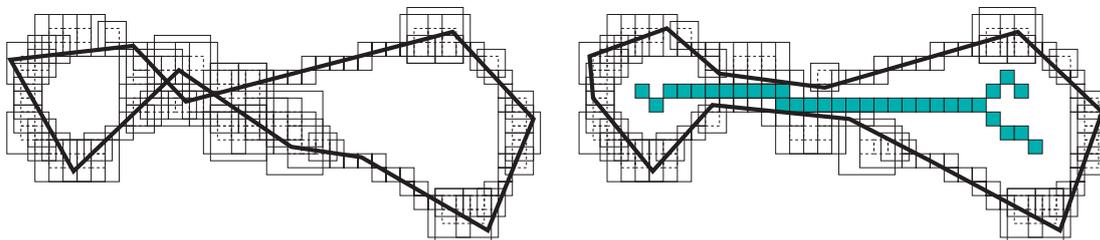
Les squelettes ont été définis mathématiquement de nombreuses manières. La plupart conduisent à des résultats identiques dans des espaces continus mais à des résultats différents dans des espaces discrets [CM07, CHS08].

Il existe un très grand nombre d'algorithmes produisant des squelettes discrets. Ceux qui nous intéressent doivent impérativement conserver la topologie de l'objet. M. Couprie dans [Cou06] a étudié plusieurs algorithmes de squelettisation en 2D et donné des contre-exemples pour lesquels certains algorithmes ne préservent pas la topologie.

Voici quelques algorithmes pouvant être indifféremment utilisés pour contrôler la topologie d'une courbe de Jordan lors de la reconstruction [BM99, BC06, JC93, GH92].

Si l'objet à reconstruire est une courbe de Jordan, la grille de l'image est divisée en deux : un extérieur et un intérieur. Pour éviter tout changement topologique il faut éviter que la courbe reconstruite ne s'auto-intersecte.

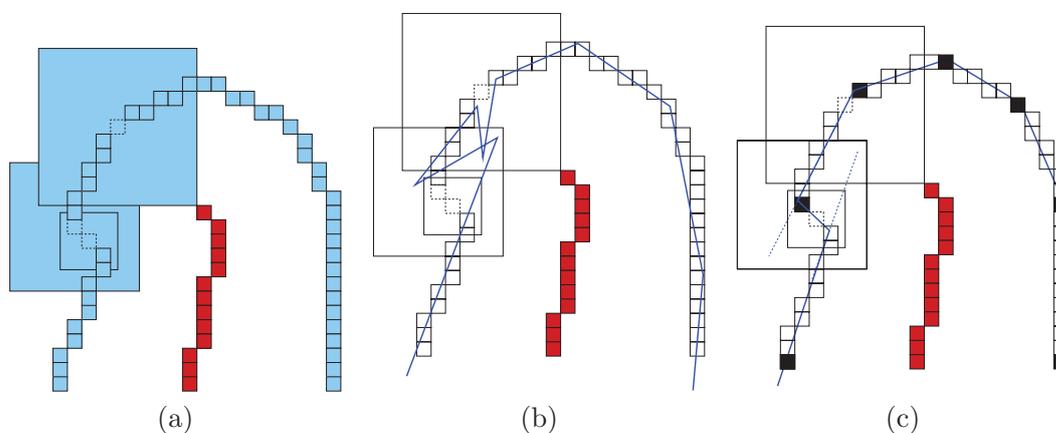
Une façon d'empêcher les droites reconnues puis reconstruites de se couper est de diminuer la taille des pixels où ce risque existe. En d'autres termes, le facteur de redimensionnement d'un pixel est limité par sa distance infinie (distance de Manhattan) au squelette le plus proche (voir figure II.24). Le facteur de redimensionnement d'un pixel est alors égal au minimum entre sa distance infinie au plus proche squelette et la valeur donnée par la fonction de redimensionnement.



**Figure II.24** – La limitation du redimensionnement par les squelettes a empêché le saut topologique.

L'idée est que le squelette intérieur empêche la reconstruction de la courbe de Jordan de se couper à l'intérieur de l'objet (voir l'exemple du haut de la figure II.23) et le squelette extérieur empêche la reconstruction de la courbe de Jordan de se couper à l'extérieur de l'objet (voir l'exemple du bas de la figure II.23).

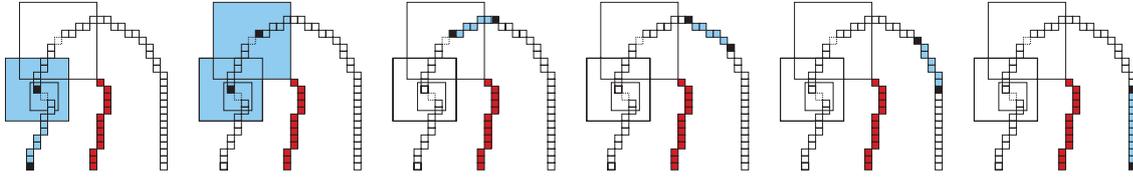
Toutes les zones présentant des risques de changement topologique ne sont pas éliminées de cette manière. Effectivement, quand la courbure du contour varie faiblement, le squelette ne contraint que très peu (voir pas du tout) le redimensionnement. Ces zones à risques n'étant pas éliminées, il existe des solutions où la courbe reconstruite pourrait s'auto-intersecter (voir l'exemple (b) de la figure II.25).



**Figure II.25** – (a) En bleu, la courbe discrète (en foncé sont marqués les pixels redimensionnés). En rouge, son squelette. (b) Une solution théorique où la topologie est changée. (c) La solution obtenue avec la reconnaissance maximale, les pixels noirs sont les extrémités des primitives reconnues (voir figure II.26).

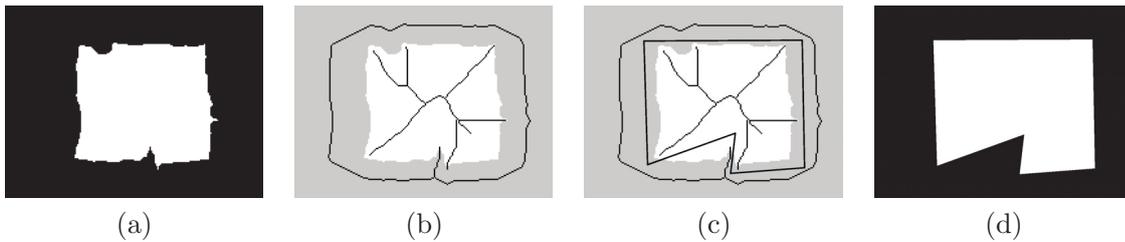
En pratique, l'algorithme de reconstruction que nous utilisons est basé sur le principe de reconnaissance maximale, c'est-à-dire la reconnaissance continue aussi loin que possible. Même si les zones à risques ne sont pas éliminées, la faible variation de courbure empêche des changements radicaux dans la pente des droites reconnues (voir figure II.26).

Même si la préservation de la topologie n'est pas garantie, nous avons constaté sur tous les tests effectués qu'elle n'était pas modifiée.



**Figure II.26** – La reconnaissance de primitives étape par étape. En noir, les points d'arrêt des primitives reconnues.

Le manque de garantie sur la préservation topologique n'est pas le seul inconvénient de cette méthode; si la courbe présente de nombreuses aspérités, les squelettes discrets se prolongent jusqu'à de nombreux points de la courbe de Jordan. Comme le montre la figure II.27, si la forme de la courbe est "en dents de scie", la simplification géométrique devient impossible : le redimensionnement des pixels est surcontraint.



**Figure II.27** – (a) L'objet de départ, une courbe de Jordan divisant la grille en un intérieur (en blanc) et un extérieur (en noir). (b) Les squelettes des deux objets. (c) la reconstruction du contour. (d) l'objet simplifié présentant un artefact dû aux pixels surcontraints.

Cette méthode est simple à mettre en oeuvre et permet de préserver dans la plupart des cas la topologie de la courbe à reconstruire. Sa complexité est en  $O(n^2)$  dans le pire des cas où  $n$  est le nombre de pixels de la courbe de Jordan car elle dépend de la taille de la boîte englobante.

Étendre cette méthode en dimension supérieure est loin d'être évident car il faut des algorithmes générant des squelettes hybrides. En 3D par exemple, il faut des squelettes constitués de segments et de surfaces planes.

## II-5.2 Consistance du voisinage.

La deuxième méthode pour contrôler la topologie est d'empêcher le cas où un segment déjà reconstruit coupe un autre segment pas encore reconnu. L'idée est d'analyser la courbe de Jordan discrète : vérifier que ses pixels et leur voisinage vérifient certaines propriétés. Lors de la reconstruction d'un segment, un pixel redimensionné ne doit pas intersecter un autre pixel éloigné selon l'ordre de parcours de la courbe. Plus exactement : si deux pixels redimensionnés ont une intersection commune, cette intersection doit intersecter tous les pixels d'un chemin entre les deux.

**Définition II-5.1** (Consistance du voisinage) *Le voisinage d'une courbe discrète de Jordan est consistant si et seulement si pour tout pixel  $P_a$  intersectant un pixel  $P_b$ , il existe un chemin  $(P_a, P_{a+1}, \dots, P_{b-1}, P_b)$  tel que tous ses pixels intersectent  $P_a \cap P_b$ .*

**Remarque :** Cette définition peut être facilement étendue en dimension  $n$ .

Soit une courbe de Jordan discrète dont le voisinage est consistant. Soient  $P_a$  et  $P_b$  deux pixels de la courbe ayant une intersection non vide  $P_a \cap P_b \neq \emptyset$ . Il existe par définition un chemin  $\mathcal{C} = (P_a, P_{a+1}, \dots, P_{b-1}, P_b)$  tel que tous les pixels du chemin intersectent  $P_a \cap P_b$  et donc  $P_a \cap P_{i \in [a+1, b]} \neq \emptyset$ . En procédant par récurrence, il est facile de déduire que tous les pixels s'intersectent deux à deux.

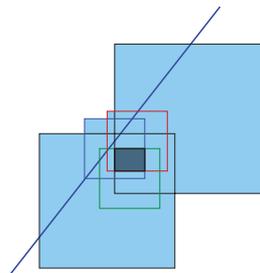
Les pixels redimensionnés sont des carrés dont les côtés sont parallèles aux axes, ils peuvent être exprimés à l'aide de deux intervalles (un sur chaque axe). Un pixel  $P_i$  est entièrement décrit par  $[x_{i_1}, x_{i_2}]$  et  $[y_{i_1}, y_{i_2}]$ . L'intersection de deux pixels  $P_i$  et  $P_j$  est entièrement définie par  $[x_{i_1}, x_{i_2}] \cap [x_{j_1}, x_{j_2}]$  et  $[y_{i_1}, y_{i_2}] \cap [y_{j_1}, y_{j_2}]$ .

Les pixels du chemin  $\mathcal{C}$  s'intersectant tous deux à deux, les intervalles (de dimension 1) s'intersectent également deux à deux. D'après le théorème d'Helly [Hel23], les pixels ont une intersection commune.

$$((P_a \cap P_b) \Rightarrow (\forall P_i \in (P_a, \dots, P_b), (P_i \cap (P_a \cap P_b)) \neq \emptyset)) \iff \left( (P_a \cap P_b) \Rightarrow \left( \bigcap_{i=a}^b (P_i) \neq \emptyset \right) \right)$$

**Définition II-5.2** (Groupe maximal) *Soit une  $\mathcal{F}$  une courbe de Jordan discrète dont le voisinage est consistant. Soient deux pixels  $P_a$  et  $P_b$  tels que  $P_a \cap P_b \neq \emptyset$ ,  $P_a \cap P_{b+1} = \emptyset$  et  $P_{a-1} \cap P_b = \emptyset$ . L'ensemble  $\mathcal{G} = \{P_a, \dots, P_b\}$  est appelé groupe maximal. L'intersection  $\bigcap_{i=a}^b (P_i)$  est appelée noyau du groupe. L'union  $\bigcup_{i=a}^b (P_i)$  est appelée surface du groupe maximal et est notée  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ .*

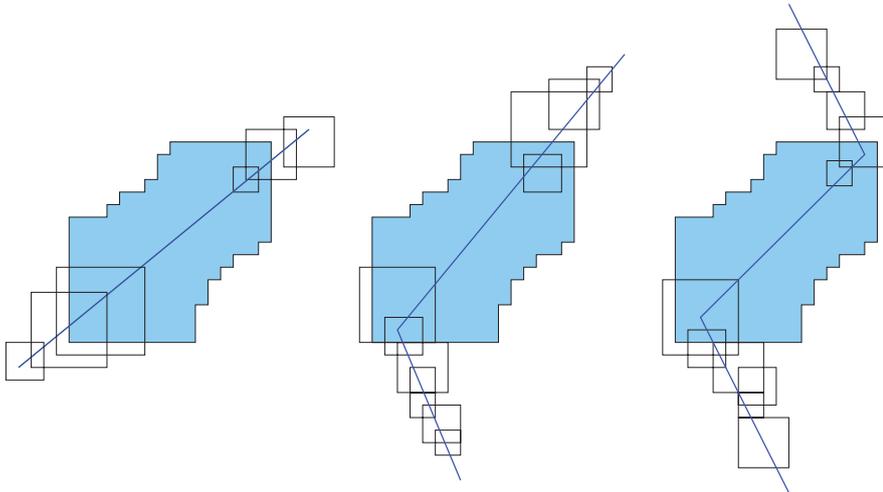
Tous les pixels d'un groupe maximal  $\mathcal{G}$  s'intersectent. Toutes les droites qui passent par  $\bigcap_i (P_i)$  intersectent tous les pixels du groupe maximal. La préimage généralisée d'un groupe maximal est par conséquent non vide. Toutefois, toutes les droites qui traversent tous les pixels d'un groupe maximal ne passent pas forcément par son noyau (voir figure II.28).



**Figure II.28** – Tous les pixels d'un groupe maximal peuvent être traversés par une seule droite.

**Propriété II-5.3** Soit groupe maximal  $\mathcal{G}$  d'une courbe discrète de Jordan dont le voisinage est consistant. La reconstruction de la courbe de Jordan a au plus deux sommets dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ .

*Preuve :* La méthode de reconnaissance de primitives est maximale et nous utilisons l'algorithme à propagation arrière défini au chapitre I-2.4.3, c'est-à-dire la reconstruction se fait dans le sens inverse de la reconnaissance garantissant ainsi qu'un point sera trouvé dans le pixel extrémité suivant. Si lors de la reconnaissance, un pixel  $p$  du groupe maximal est reconnu comme étant l'extrémité d'un segment, la région  $r \subseteq p$  où il intersecte le faisceau de droites solutions est utilisée pour commencer la reconnaissance suivante. Le pixel  $p$  étant convexe, le noyau de  $\mathcal{G}$  peut être atteint depuis  $r$ , il existe des droites intersectant tous les autres pixels du groupe maximal. Dans le cas où le dernier pixel du groupe maximal (selon le sens de parcours de la courbe) est reconnu comme extrémité, la reconstruction de la courbe aura exactement 2 sommets dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ .  $\square$



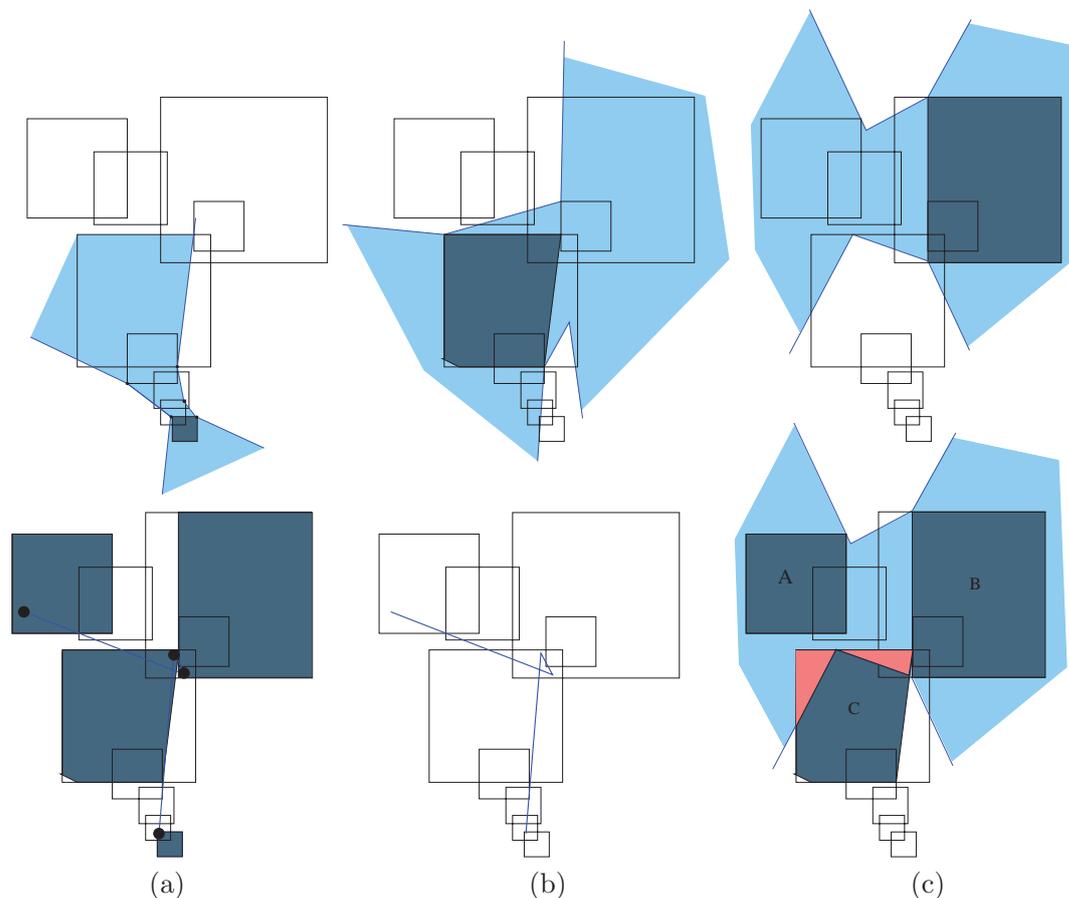
**Figure II.29** – La courbe de Jordan reconstruite a au plus deux sommets dans un groupe maximal.

La figure II.29 illustre la propriété II-5.3. Dans le premier cas, la reconstruction n'a aucun sommet dans le groupe. Elle en a exactement un dans le second exemple et exactement deux dans le dernier.

Nous nous intéressons maintenant à la topologie de la courbe de Jordan reconstruite. La consistance du voisinage garantie que deux pixels ne peuvent s'intersecter que si leur intersection coupe tous les pixels d'un chemin entre les deux. Elle garantie que deux pixels "distants" ne se coupent pas.

Soit  $\mathcal{R}$  la reconstruction d'une courbe de Jordan dont le voisinage est consistant. Soit  $\{X_0, \dots, X_k\}$  la liste de ses sommets. La propriété II-5.3 garantie que  $\mathcal{R}$  a au plus deux sommets dans la surface d'un groupe maximal  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ , notons les  $X_i$  et  $X_{i+1}$ . Rien ne garanti que les deux côtés de  $\mathcal{R}$  définis par  $[X_{i-1}, X_i]$  et  $[X_{i+1}, X_{i+2}]$  ne s'intersectent pas dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{G}}$ .

Effectivement, la figure II.30, montre un exemple de reconstruction possible où la topologie d'une courbe discrète de Jordan est modifiée lors de sa reconstruction.



**Figure II.30** – En haut, les trois côtés reconnus devant être reconstruits, les zones de début de reconnaissance sont représentées en foncé, en bleu clair sont représentés les faisceaux de droites solutions. (a) La reconstruction : choix des sommets avec la méthode de propagation arrière. (b) La courbe reconstruite n'est pas une courbe de Jordan. (c) La zone en rose est l'intersection entre la zone  $C$  et le faisceau de droites reliant  $A$  et  $B$ .

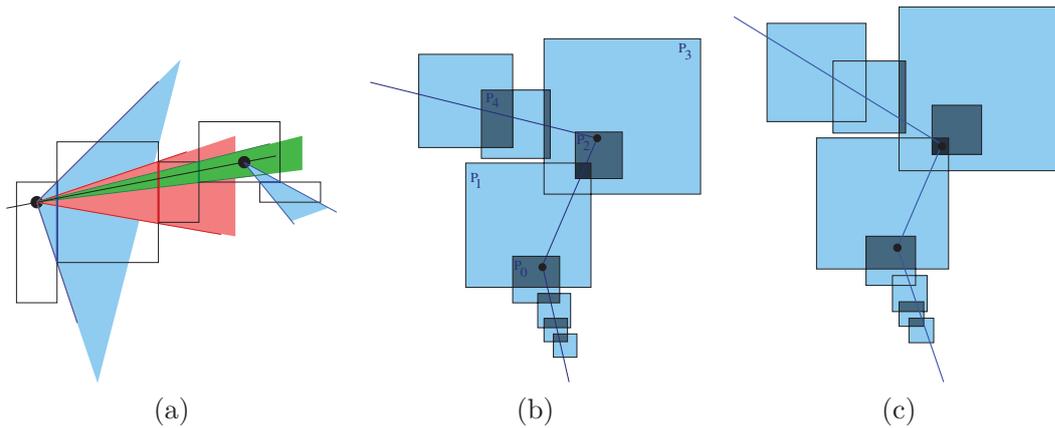
La consistance du voisinage et l'algorithme de propagation arrière ne suffisent pas pour garantir que la topologie de l'objet est préservée. Nous allons voir comment adapter l'algorithme de propagation arrière pour éviter les sauts topologiques lors de la reconstruction.

Une première méthode consiste à contraindre le choix des points lors de la propagation arrière. Les points sont choisis pour n'appartenir à aucun des faisceaux solutions précédents. Sur la figure II.30, un premier point est choisi dans  $A$ , un second dans  $B$  et le second dans  $C \setminus \text{faisceau}(A, B)$ .

Une seconde est inspirée de la méthode de reconstruction présentée par A. Vacavant dans les grilles irrégulières isothétiques [Vac08]. L'intégralité des pixels n'est plus considérée mais uniquement leurs intersections avec leurs voisins. Dans le cadre des grilles irrégulières isothé-

tiques, ces intersections sont des segments, dans le cadre des pixels redimensionnés, elles sont des surfaces. Les sommets des segments reconstruits doivent se trouver dans ces intersections.

Une variante consiste à utiliser les noyaux des groupes maximaux plutôt que les intersections deux à deux. La figure II.31 montre le principe de ces méthodes.



**Figure II.31** – (a) Construction progressive et mise à jour du cône de visibilité (méthode de A. Vacavant). (b) En plaçant les sommets des segments dans les intersections de pixels successifs, le risque de saut topologique est évité. (c) Variante utilisant le noyau du groupe maximal.

Algorithmiquement, vérifier la consistance du voisinage d'une courbe de Jordan se fait en définissant une grille orthonormale plus petite  $\mathcal{G}_{pgcd}$  où la taille de chaque pixel est le plus grand commun diviseur de toutes les tailles des pixels de la courbe (cette grille peut être la même que la grille d'origine si les facteurs de redimensionnement sont tous des entiers impairs).

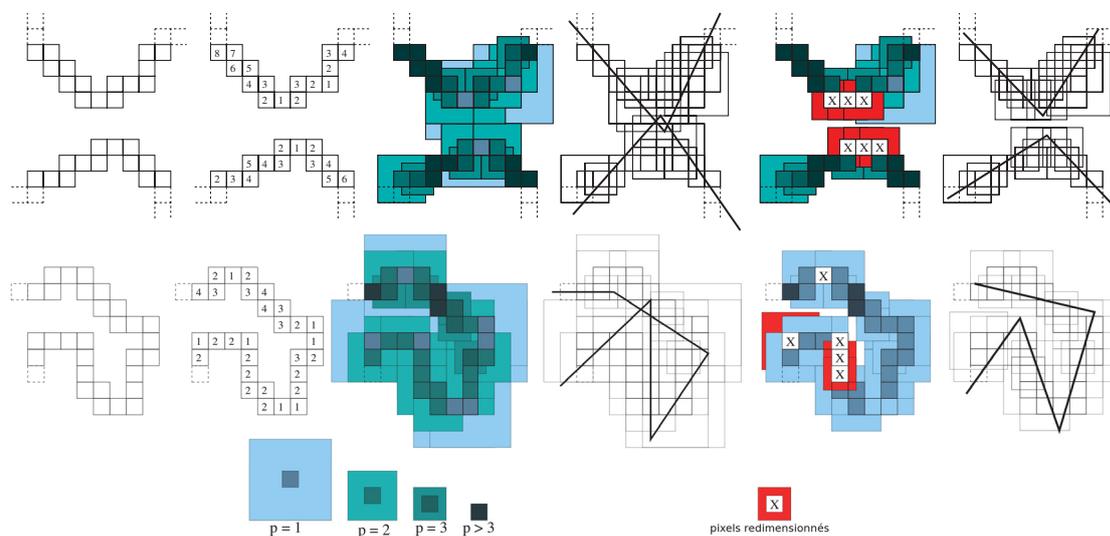
Pour vérifier la consistance du voisinage, les pixels de la courbe de Jordan discrète sont parcourus. Les pixels de  $\mathcal{G}_{pgcd}$  sont coloriés avec le numéro du pixel parcouru. À chaque fois qu'un pixel de  $\mathcal{G}_{pgcd}$  est colorié par un autre numéro, il faut vérifier la consistance de leur voisinage. Si elle n'est pas vérifiée, la taille des pixels est diminuée jusqu'à ce que les deux pixels ne s'intersectent plus (voir figure II.32).

Cet algorithme ne peut pas être implémenté s'il n'existe aucune grille  $\mathcal{G}_{pgcd}$ . Dans ce cas, la consistance du voisinage doit être vérifiée pour tout couple de pixels redimensionnés. Les facteurs de redimensionnement doivent être choisis de façon à ce que rendre la courbe consistante ne soit pas trop coûteux.

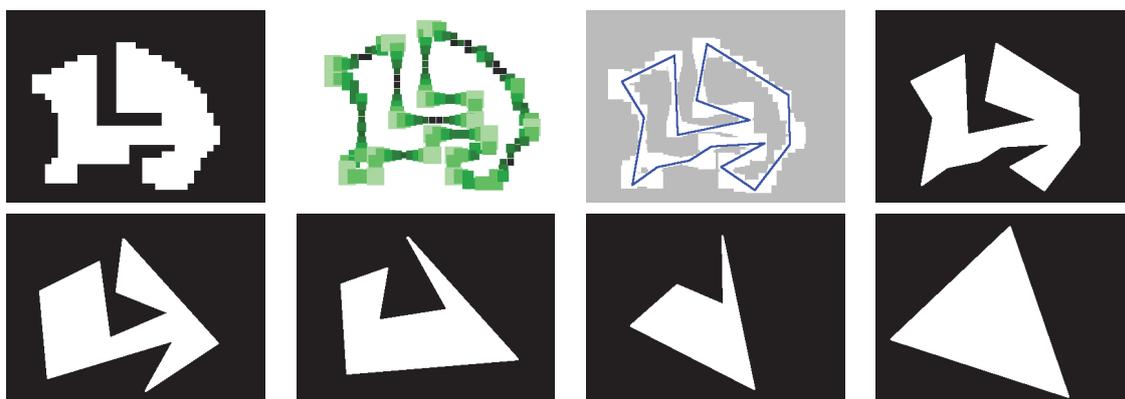
Le principal avantage de cette méthode sur le contrôle de squelettes est que des simplifications importantes peuvent être effectuées (voir figure II.33). Si le choix des redimensionnements est intelligent, rendre le voisinage de la courbe redimensionnée consistant peut être effectué en temps linéaire sur le nombre de pixels de la courbe.

### II-5.3 Images bicolores

Nous avons précédemment défini deux méthodes pour éviter la plupart des changements topologiques lors de la reconstruction d'une courbe de Jordan. Quand plusieurs objets (plu-



**Figure II.32** – Deux exemples où rendre le voisinage de la courbe consistant empêche un saut topologique lors de la reconstruction.



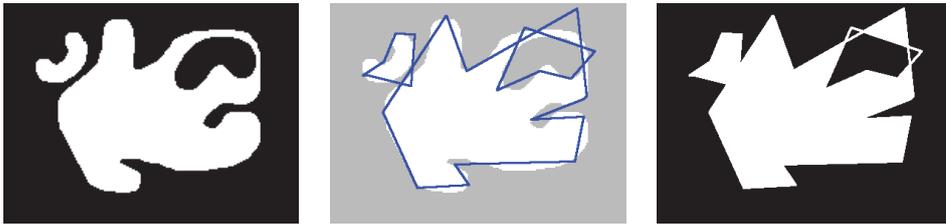
**Figure II.33** – En haut, les étapes de la reconstruction avec marge d'erreur. En bas, résultats de reconstructions avec des fonctions de redimensionnement de plus en plus grandes.

sieurs contours) sont présents sur l'image, nous avons deux cas : dans le premier cas, les objets sont indépendants, leurs contours sont des courbes de Jordan bien distinctes pouvant être étudiées indépendamment les unes des autres. Les objets du second cas sont plus compliqués car leurs sommets sont de degré supérieur à deux, ils appartiennent à plusieurs contours. Ce second cas n'est pas un problème de topologie mais un problème général lié à l'algorithme de reconstruction.

Ce second cas a été étudié par R. Breton dans [BSDA03] : si un pixel appartient à plusieurs contours, il est facile de les reconstruire de manière à ce que ce pixel soit reconstruit en un unique point. Cela équivaut dans l'espace des paramètres à ajouter une contrainte supplémentaire lors de la reconnaissance de segment discret : une droite correspondant au sommet en question qui doit à tout moment couper la préimage du segment discret reconnu. Cette

méthode garantit que tous les segments reconstruits passent par ce point et donc qu'aucune face n'est ajoutée (pas de modification de la topologie du voisinage).

Nous nous intéressons dans cette partie aux images bicolores. En considérant les contours interpixel des objets, l'image peut être décomposée en courbes de Jordan. Chacune de ces courbes sera reconstruite indépendamment des autres. Même si leur reconstruction préserve dans la plupart des cas leur topologie, rien ne garantit que la topologie globale de l'image est inchangée (voir figure II.34).



**Figure II.34** – L'image de départ est composée de trois courbes de Jordan. La reconstruction de ces courbes s'auto-intersectent changeant la topologie globale de l'image.

Nous allons présenter dans ce chapitre comment adapter le contrôle des squelettes et la consistance du voisinage aux images bicolores dans le but de préserver la topologie globale de l'image.

### II-5.3.1 Contrôle des squelettes pour des images bicolores

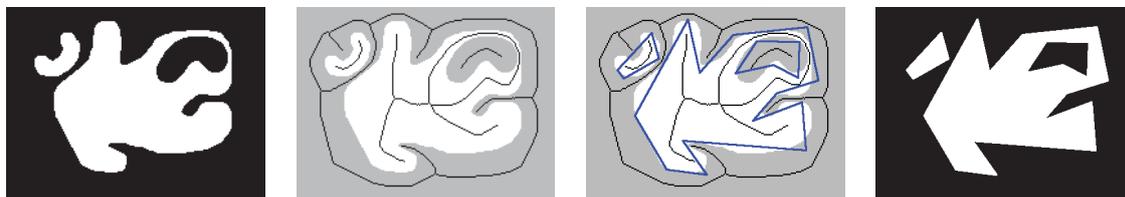
Les différentes composantes connexes de l'image sont considérées comme des objets indépendants. L'idée est donc de calculer le squelette de chacun de ces objets. Il suffira alors de vérifier que les pixels redimensionnés ne coupent aucun de ces squelettes. Si cela n'est pas le cas, tout comme pour la reconstruction d'une courbe de Jordan, la taille de ces pixels est réduite. De plus, si l'algorithme de reconstruction prend en compte les contraintes supplémentaires liées aux sommets de degré supérieur à 2 [BSDA03], la topologie globale de l'image sera préservée dans la plupart des cas.

Effectivement, il existe un squelette par composante connexe. Les différents squelettes empêchent les contours des différentes composantes connexes de s'intersecter, un contour ne peut pas en couper un autre.

La figure II.35 montre un exemple de reconstruction d'une image avec le contrôle topologique des squelettes. L'image est bicolore, elle peut être divisée en trois courbes de Jordan. Le squelette de chacune des quatre composantes connexes est calculé. Chaque courbe de Jordan est reconstruite de façon à ne couper aucun des squelettes : les courbes de Jordan ne s'auto-intersectent pas et ne se coupent pas les unes les autres, la topologie globale de l'image est préservée dans la plupart des cas.

### II-5.3.2 Consistance globale du voisinage pour des images bicolores

Le contrôle topologique par consistance de voisinage est identique pour la reconstruction d'une unique courbe de Jordan ou pour des images en présentant plusieurs. Il suffit de vérifier

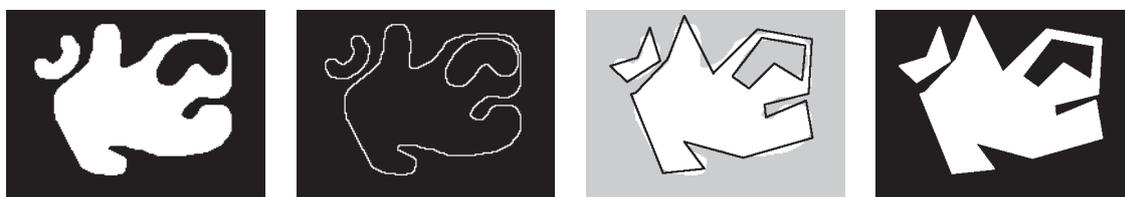


**Figure II.35** – Etapes du contrôle topologique d’une image bicolore par ses squelettes lors d’une reconstruction avec des pixels adaptatifs.

qu’il existe un chemin entre deux pixels redimensionnés ayant une intersection non nulle ; si les deux pixels ne sont pas sur la même courbe de Jordan, il n’en existe simplement pas. Pour que l’image soit globalement consistante, deux pixels appartenant à deux courbes de Jordan différentes doivent être disjoints.

Localement, après le redimensionnement des pixels, le voisinage de chacune des courbes de Jordan est consistant. Globalement, les pixels de différentes courbes ne s’intersectent pas, leur voisinage est également consistant. Aucune courbe ne peut s’auto-intersecter ou en couper une autre : la topologie de l’image bicolore est préservée.

La figure II.36 montre comment la topologie d’une image est préservée par consistance du voisinage sur le même exemple que les figures II.34 et II.35.



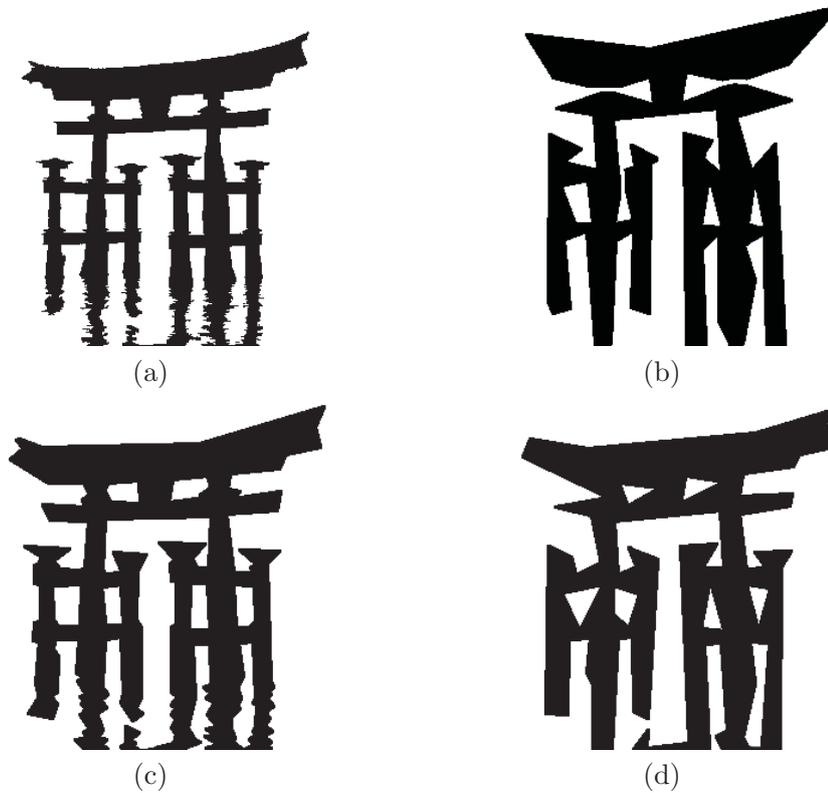
**Figure II.36** – Etapes du contrôle topologique d’une image bicolore par consistance du voisinage lors d’une reconstruction avec des pixels adaptatifs.

### II-5.3.3 Quelques images et comparaison des méthodes de contrôle topologique

On peut voir sur la figure II.37 que la topologie de l’image est sévèrement modifiée : l’image de départ, constituée d’une forme noire dotée de sept trous, est transformée en une forme n’en comptant plus que trois (les autres ont fusionné avec l’extérieur, en blanc).

Le contrôle des squelettes ou la consistance du voisinage ont permis de conserver la topologie de l’image lors de la reconstruction. Le contrôle des squelettes préserve mieux la géométrie de l’image (les angles sont plus respectés) alors que la consistance du voisinage simplifie nettement plus l’objet.

Le résultat obtenu par le contrôle des squelettes avec la figure II.37 est plus ”esthétique” car le niveau de l’eau se devine et le reflet se distingue de la forme géométrique. La forme et son reflet se confondent l’une avec l’autre en utilisant la consistance du voisinage.



**Figure II.37** – (a) l'image bicolore de départ. (b) sa reconstruction sans contrôle topologique. (c) avec le contrôle des squelettes. (d) avec consistance du voisinage.

La figure II.38 est à la base une photographie. La transformation en noir et blanc de l'image a généré du bruit au niveau des frontières entre les deux couleurs. Ce bruit se présente sous la forme de zigzags très denses. Le contrôle topologique par les squelettes n'est pas robuste à ce genre de bruit car le squelette se prolonge jusqu'au sommet des angles aigus.

Le résultat est beaucoup plus "esthétique" sur ce genre d'image avec la consistance du voisinage.

#### II-5.4 Conclusion sur le contrôle topologique et perspectives

Nous avons présenté dans cette partie deux méthodes pour contrôler la topologie d'une image bicolore lors de sa reconstruction/simplification. Ces deux méthodes, très différentes, donnent de très bons résultats en dimension deux.

Plusieurs améliorations peuvent être apportées au contrôle topologique par les squelettes, Une première idée pourrait être d'éroder les extrémités de ces derniers et ainsi permettre une plus grande simplification géométrique. L'inconvénient est que les risques de saut topologiques en seraient accrus.

La méthode faisant appel aux squelettes a des limites non négligeables, la conservation de la topologie n'est pas garantie bien que la plupart des changements topologiques sont évités



**Figure II.38** – (a) une image bien connue au sein de la communauté. (b), (c) et (d) montrent les étapes de la reconstruction de cette image avec le contrôle des squelettes. (e), (f) et (g) avec la consistance du voisinage.

grâce à elle. De plus, la simplification de formes en "dents de scie" est impossible. Et pour finir, son extension en dimension supérieure est très difficile : des squelettes hybrides en dimension trois ont déjà été présentés dans [BC06, LB02] mais aucun algorithme n'est encore défini en dimension  $n$ .

La méthode par consistance du voisinage peut quant à elle être directement étendue en dimension trois (voir quelle que soit la dimension) : le voisinage d'un contour (désormais une surface ou une hypersurface) est consistant s'il existe un chemin connexe entre toute paire de voxels ayant une intersection non vide.

En dimension supérieure, la reconnaissance de plans (d'hyperplans) est compliquée à défaut d'heuristique sur l'ordre de parcours de la surface (hypersurface). Ce problème est encore ouvert.

## II-6 Conclusion

Le redimensionnement adaptatif des voxels permet d'allouer une marge d'erreur à la position des voxels indépendamment les uns des autres en fonction de critères locaux. Le redimensionnement adaptatif peut être utilisé par de nombreuses applications dans différents domaines.

Nous nous sommes principalement intéressés à la reconstruction d'images discrètes présentées au chapitre I-2. Le redimensionnement adaptatif permet de relaxer les contraintes imposées par les pixels du contour d'un objet lors de la reconnaissance de primitives. Il permet d'éliminer certaines irrégularités présentes sur le contour d'un objet.

Des changements topologiques peuvent se produire lors d'une reconstruction avec marge d'erreur. Nous avons présenté deux méthodes permettant d'éliminer la plupart des sauts topologiques. La première utilise des squelettes pour limiter le redimensionnement des éléments structurants. La seconde est une condition sur le voisinage qu'il faut vérifier.

Le redimensionnement adaptatif combiné à la reconnaissance de primitives permet de rejoindre les travaux de I. Debled-Rennesson sur les primitives floues. Le critère local permet d'accorder une marge d'erreur adaptative au contour plutôt qu'une marge d'erreur globale.

L'estimateur d'échelle pertinente présentée par B. Kerautret attribue à chaque pixel l'échelle à laquelle il est le plus significatif. Appliquer ce critère à la reconnaissance de primitives floues nécessite le calcul d'une échelle moyenne pour l'épaisseur des primitives. Le redimensionnement adaptatif des pixels permet de contrôler localement cette erreur.

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à la reconnaissance de droites (d'hyperplans) avec redimensionnement des éléments structurants. Nous allons voir dans le prochain chapitre comment ce redimensionnement peut aussi s'appliquer à la reconnaissance de cercles discrets.

## Bibliographie

- [BC06] Gilles Bertrand and Michel Couprie. New 2d parallel thinning algorithms based on critical kernels. In *IWCIA*, pages 45–59, 2006. Cité en pages 62 et 73
- [BGCFJ95] J.-W. Bullard, E.-J. Garboczi, W.-C. Carter, and E.-R. Fuller Jr. Numerical methods for computing interfacial mean curvature. In *Computational Materials Science*, volume 4, pages 103–116, 1995. Cité en pages 45 et 47
- [Blu73] Harry Blum. Biological shape and visual science (part i). *Journal of Theoretical Biology*, 38(2) :205 – 287, 1973. Cité en page 62
- [BM99] T.M. Bernard and A. Manzanera. Improved low complexity fullt parallel thinning algorithm. In *Internation Conference on Image Analysis and Processing*, pages 215– –, 1999. Cité en page 62
- [BSDA03] R. Breton, I. Sivignon, M. Dexet, and E. Andres. Towards an invertible euclidean reconstruction of a discrete object. In *Discrete Geometry and Computer Imagery*, volume LNCS vol. 2886, pages 246–256, 2003. Cité en pages 20, 25, 27, 69 et 70
- [CHS08] D. Coeurjolly, J. Hulin, and I. Sivignon. Finding a minimum medial axis of a discrete shape is np-hard. *Theoretical Computer Science*, 406(1-2) :72 – 79, 2008. Discrete Tomography and Digital Geometry : In memory of Attila Kuba. Cité en page 62
- [CM07] D. Coeurjolly and A. Montanvert. Optimal separable algorithms to compute the reverse euclidean distance transformation and discrete medial axis in arbitrary dimension. *PAMI*, 29(3) :437–448, March 2007. Cité en page 62
- [Cou06] Michel Couprie. Note on fifteen 2D parallel thinning algorithms. Technical Report IGM2006-01, Université de Marne-la-Vallée, 2006. Cité en page 62
- [Dex06] Martine Dexet. *Architecture d’un modeleur géométrique à base topologique d’objets discrets et méthodes de reconstruction en dimension 2 et 3*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2006. Cité en pages XII, 20, 21, 22, 23, 26, 50, 58 et 98
- [DR07] Isabelle Debled-Rennesson. *Éléments de géométrie discrète - Vers une étude de structures discrètes bruitées*. Habilitation à diriger les recherches, Université Henri Poincaré, Nancy., 2007. Cité en page 40
- [DRRRD03] I. Debled Rennesson, J.L. Remy, and J. Rouyer Degli. Segmentation of discrete curves into fuzzy segments. 2003. Cité en pages XII, 40 et 43
- [DRTW05] I. Debled Rennesson, S.A. Tabbone, and L. Wendling. Multiorder polygonal approximation of digital curves. *Electonic Letters on Computer Vision and Image Analysis*, 5(2) :98–110, 2005. Cité en page 40
- [GH92] Z. Guo and R.W. Hall. Fast fully parallel thinning algorithms. 55 :317–328, 1992. Cité en page 62
- [Hel23] E. Helly. Uber mengen konvexer korper mit gemeinschaftlichen punkten. In *Jahresbericht der Deutschen MathematikerVereinigung*, volume 32, pages 175–176, 1923. Cité en pages 65 et 84
- [JC93] B.K. Jang and R.T. Chin. Reconstructable parallel thinning. 7 :1145–1181, 1993. Cité en page 62

- [KL09] Bertrand Kerautret and Jacques-Olivier Lachaud. Multi-scale analysis of discrete contours for unsupervised noise detection. In *IWCIA*, pages 187–200, 2009. Cité en pages [XII](#), [45](#), [47](#) et [48](#)
- [LB93] M. Lindenbaum and A. Bruckstein. On recursive,  $o(n)$  partitioning of a digitized curve into digital straight segments. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15 :949–953, 1993. Cité en page [52](#)
- [LB02] C. Lohou and G. Bertrand. New 3d 6-subiteration thinning algorithm based on p-simple points. In *Digital and Image Geometry*, volume LNCS vol. 2301, pages 101–113, 2002. Cité en page [73](#)
- [LSA09] G. Largeteau-Skapin and E. Andres. Discrete-euclidean operations. *Discrete Applied Mathematics*, 157(3) :510–523, 2009. Cité en page [56](#)
- [LVDV05] J.-O. Lachaud, A. Vialard, and F. De Vieilleville. Analysis and comparative evaluation of discrete tangent estimators. In *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume LNCS vol. 3429, pages 240–251, 2005. Cité en pages [XII](#), [45](#), [46](#) et [47](#)
- [McI84] M. D. McIlroy. A note on discrete representation of lines. 64 :481–490, 1984. Cité en pages [20](#) et [52](#)
- [Meg83] Nimrod Megiddo. Linear-time algorithms for linear programming in  $r^3$  and related problems. *SIAM J. Comput.*, 12(4) :759–776, 1983. Cité en page [52](#)
- [O’R81] Joseph O’Rourke. An on-line algorithm for fitting straight lines between data ranges. *Commun. ACM*, 24 :574–578, September 1981. Cité en page [52](#)
- [PDR08a] L. Provot and I. Debled Rennesson. Geometric feature estimators for noisy discrete surfaces. pages 275–286, 2008. Cité en page [40](#)
- [PDR08b] L. Provot and I. Debled Rennesson. Segmentation of noisy discrete surfaces. 2008. Cité en page [40](#)
- [PDR09] L. Provot and I. Debled Rennesson. 3d noisy discrete objects : Segmentation and application to smoothing. 42(8) :1626–1636, August 2009. Cité en page [40](#)
- [Pro09] Laurent Provot. *Vers une polyédration des objets discrets bruités 3D*. PhD thesis, Université Henri Poincaré, Nancy., 2009. Cité en page [40](#)
- [RLS09] M. Rodríguez and E. Largeteau-Skapin, G. Andres. Adaptive pixel resizing for multiscale recognition and reconstruction. In *IWCIA’09*, volume LNCS, 2009. Cité en pages [XII](#), [45](#), [49](#) et [52](#)
- [Vac08] Antoine Vacavant. *Géométrie discrète sur grilles irrégulières isothétiques*. PhD thesis, Université Lumière Lyon 2, 2008. Cité en page [67](#)



# Médiatrices généralisées et propriétés de leur intersection.

---

## Sommaire

---

<b>III-1 Introduction.</b>	<b>80</b>
<b>III-2 Définition.</b>	<b>81</b>
III-2.1 Médiatrice généralisée	81
III-2.2 Centre généralisé des hypersphères circonscrites.	82
III-2.3 Propriétés	83
<b>III-3 Reconnaissance exacte et exhaustive de cercles discrets</b>	<b>86</b>
III-3.1 Reconnaissance de cercles ou d'arcs de cercles discrets et estimation de ses paramètres	86
III-3.2 Reconnaissance de cercles standards et estimation de ses paramètres	87
III-3.3 Reconnaissance de cercles naïfs et estimation de ses paramètres.	90
III-3.4 Reconnaissance de cercles d'Andres et estimation de ses paramètres	92
<b>III-4 Médiatrice Généralisée Simplifiée.</b>	<b>95</b>
III-4.1 Définition.	95
III-4.2 Expression des solutions non reconnues et erreur due à la simplification.	96
III-4.3 Propriétés et Notations	97
III-4.4 Représentation dans un espace de paramètres.	97
<b>III-5 Reconnaissance de cercles discrets avec marge d'erreur adaptative.</b>	<b>99</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>

---

### III-1 Introduction.

Le problème de la reconnaissance de cercles est bien connu en géométrie discrète. Même si ce problème a été moins étudié que la reconnaissance de droites, de nombreux travaux l'adressent.

Nakamura et Aizawa ont présenté dans [NA84] un algorithme où un cercle discret est défini comme l'ensemble des points discrets les plus proches d'un cercle réel. Kim propose dans [Kim84] un algorithme pour reconnaître des disques discrets dans une image. Fisk a proposé un algorithme basé sur le problème de la séparation des arcs en géométrie algorithmique dans [Fis86]. Sauer a montré dans [Sau92] que ce problème peut être réduit à la résolution d'inégalités en dimension 3. Damaschke a proposé dans [Dam95] un algorithme linéaire de reconnaissance d'arcs. Coeurjolly et al. ont transformé le problème de reconnaissance de cercles discrets en problème d'intersection de demi-plans dans [CGRT04]. Roussillon et al. ont présenté dans [RST09] un algorithme linéaire dans la plupart des cas et en  $\Theta(n^{\frac{4}{3}})$  pour le cas général. La méthode présentée par Andres et al. dans [AR11] donne la plupart des solutions mais passe à côté de certains faux négatifs.

Notre approche du problème ressemble plus à celle que Ali Asghar Khanban a défini dans [Kha05]. À l'aide de points/lignes/polygones partiels et à des notions de distance, il a introduit les *médiatrices partielles*.

Au début de ce chapitre sont présentés les notions de *médiatrices généralisées* et de *centre généralisé des hypersphères circonscrites*. La suite se consacre à leurs propriétés et leur représentation dans un espace de paramètres.

Nous présentons ensuite, grâce à ces nouvelles notions, une méthode originale de reconnaissance de cercles.

Pour terminer, nous montrons comment le redimensionnement des éléments structurants défini dans le chapitre précédent peut être utilisé pour accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de cercles.

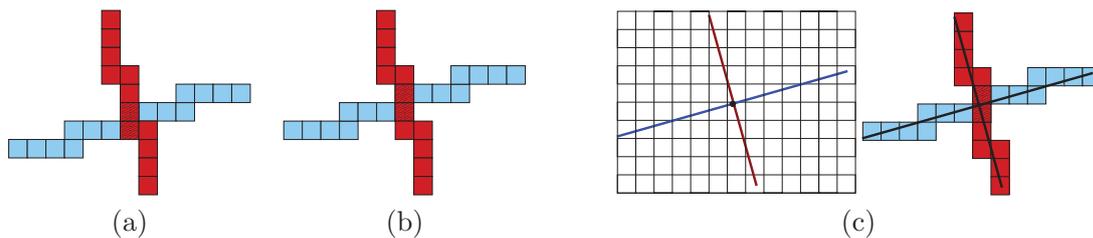
## III-2 Définition.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la propriété de l'intersection des médiatrices d'un triangle comme centre de son cercle circonscrit. Cette propriété fondamentale de la géométrie euclidienne n'a que très peu de sens dans les espaces discrets ; sa généralisation a été présentée dans [RLSA10].

Pour commencer, rappelons la définition d'une médiatrice dans un espace euclidien :

**Définition III-2.1** (Médiatrice euclidienne) *La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités du segment. Cet ensemble est la droite passant par le milieu du segment et qui lui est perpendiculaire. La médiatrice d'un segment  $[A, B]$  divise donc le plan en deux demi-plans. Les points plus proches de  $A$  que de  $B$  sont dans un des demi-plans et les points plus proches de  $B$  que de  $A$  sont dans l'autre.*

Derrière cette définition se cachent plusieurs idées. La première définit une médiatrice comme la "droite" passant par le "milieu" d'un segment et "perpendiculaire" à ce dernier ; cette idée est inexploitable car les notions d'orthogonalité et de milieu sont très vagues dans les espaces discrets et conduisent à des résultats différents (voir figure III.1).



**Figure III.1** – Exemples de médiatrices discrètes. (a) Un segment de droite discrète et une droite discrète orthogonale à la première et passant par son milieu. (b) Le même segment de droite discrète et une autre droite discrète à la fois orthogonale et passant par son milieu. (c) Discrétisation d'un segment de droite et de sa médiatrice continue : le résultat est le même segment de droite discrète et encore une médiatrice différente.

Cette première approche ne convenant pas, il a fallu aborder le problème sous un autre angle. La définition III-2.1 dit également que la médiatrice d'un segment  $[A, B]$  divise le plan en trois :

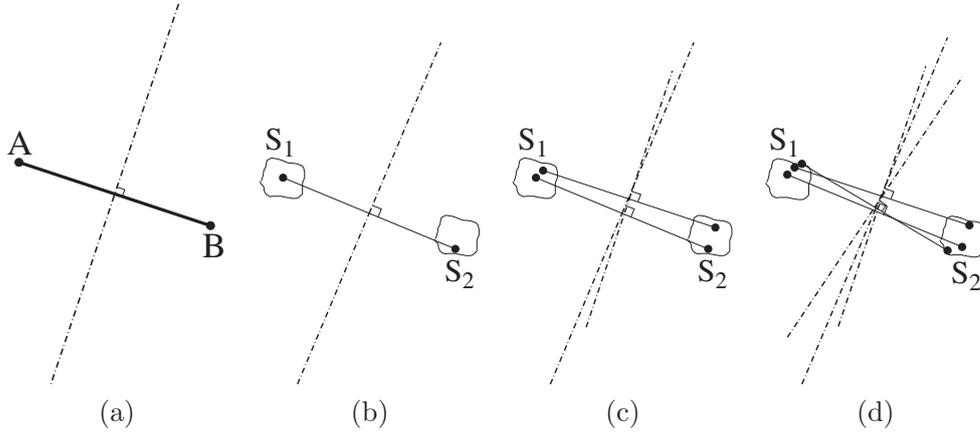
- L'ensemble des points équidistants de  $A$  et de  $B$  : la médiatrice en question.
- L'ensemble des points plus proches de  $A$  que de  $B$  : un demi-plan.
- L'ensemble des points plus proches de  $B$  que de  $A$  : un autre demi-plan.

Cette approche sera exploitée dans la suite du chapitre pour définir la notion de médiatrice généralisée.

### III-2.1 Médiatrice généralisée

L'idée est d'étendre la définition de la médiatrice à des régions plutôt qu'à des points.

**Définition III-2.2** (Médiatrice généralisée de deux régions [RLSA10]) *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux régions de  $\mathbb{R}^n$ . La médiatrice généralisée de  $S_1$  et  $S_2$  est l'union de toutes les médiatrices de chaque couple de points  $(p, q)$  tels que  $p \in S_1$  et  $q \in S_2$ .*



**Figure III.2** – (a) médiatrice de deux points. (b) (c) et (d) médiatrices de couples de points chacun dans une région.

Pour tout couple de points  $p$  et  $q$ , il existe un point  $r$  de la médiatrice généralisée équidistant à  $p$  et  $q$ . Le point  $r$  est par conséquent le centre d’une hypersphère passant par les deux points. Une définition alternative peut être proposée :

**Définition III-2.3** (définition alternative de la médiatrice généralisée) *Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux régions. Soit  $X \in \mathbb{R}^n$ , soient  $d_i(X) = \min(d(X, S_i))$  et  $D_i(X) = \max(d(X, S_i))$  où  $d$  est la distance euclidienne classique. La médiatrice généralisée de  $S_1$  et  $S_2$  est l’ensemble des points  $\{X \in \mathbb{R}^n, [d_1(X), D_1(X)] \cap [d_2(X), D_2(X)] \neq \emptyset\}$ .*

Ces deux définitions sont équivalentes et définissent la même région.

### III-2.2 Centre généralisé des hypersphères circonscrites.

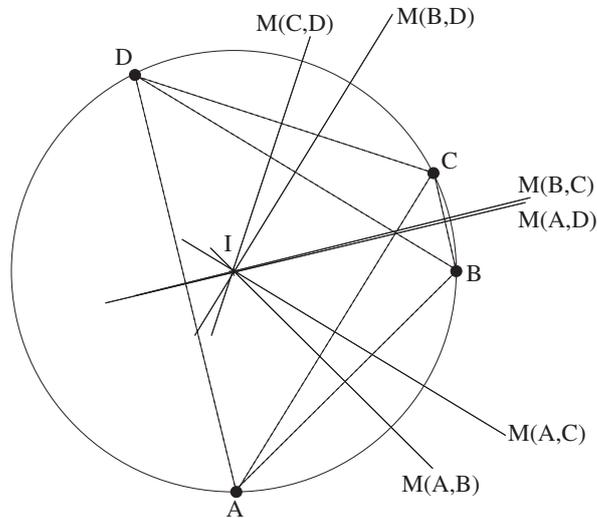
Dans un espace euclidien, la médiatrice de deux points  $A$  et  $B$  est l’ensemble des points équidistants à  $A$  et à  $B$ . En rajoutant un troisième point  $C$ , deux nouvelles médiatrices peuvent être calculées (celle entre  $A$  et  $C$  et celle entre  $B$  et  $C$ ). Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés, ces trois médiatrices s’intersectent en un unique point  $I$  qui est, par définition, équidistant à  $A$ ,  $B$  et  $C$ . C’est le centre du cercle passant par ces trois points appelé *centre du cercle circonscrit*.

Cette propriété peut être étendue à un nombre  $n$  de points. Si toutes les médiatrices s’intersectent en un unique point  $I$ , il est le centre du cercle passant par les  $n$  points. Sinon, il n’existe aucun cercle passant par tous les points (voir figure III.3).

Après avoir généralisé la définition de médiatrice de deux régions, la notion de centre du cercle circonscrit est étendue pour un nombre  $n$  de régions comme l’intersection de toutes les médiatrices généralisées entre toutes les paires de régions.

**Définition III-2.4** (Centre généralisé des hypersphères circonscrites [RLSA10]) *Le centre généralisé des hypersphères circonscrites ( $I_g$ ) d’un ensemble de régions  $\mathcal{S} = (S_i)_{i \in [1, n]}$  est l’intersection des médiatrices généralisées ( $M_g$ ) de tout couple de régions :*

$$I_g(\mathcal{S}) = \bigcap_{i, j \in [1, n], i < j} (M_g(S_i, S_j))$$

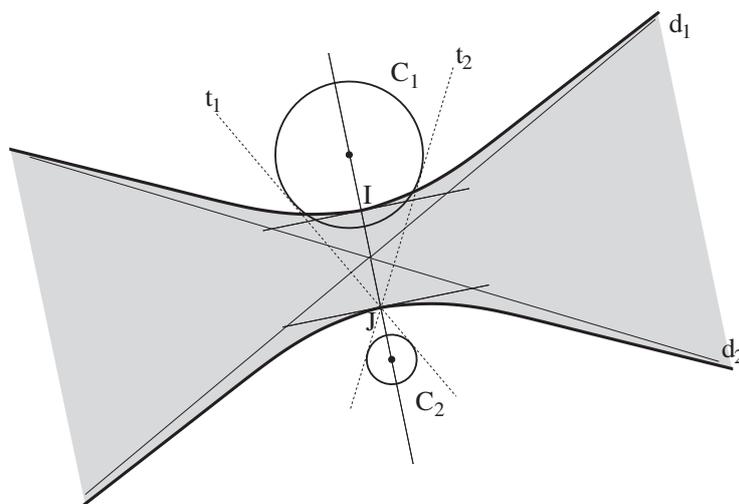


**Figure III.3** – Exemple où les 6 médiatrices entre quatre points (pris deux à deux) s’intersectent en un unique point  $I$  qui est le centre du cercle passant par tous les points.

La figure III.10 montre des exemples de centres généralisés de cercles circonscrits.

### III-2.3 Propriétés

La médiatrice généralisée de deux régions connexes n’est pas un hyperplan mais l’union d’un ensemble infini d’hyperplans formant une région connexe, infinie et généralement non convexe. Sa forme dépend de celle des deux régions considérées. Par exemple, en dimension 2, la médiatrice généralisée de deux disques est une région délimitée par deux hyperboles (voir figure III.4). La médiatrice généralisée est une région habituellement compliquée à définir.



**Figure III.4** – Exemple de médiatrice généralisée entre deux disques.

Plusieurs propriétés sont des conséquences directes de la définition de la médiatrice généralisée :

**Propriété III-2.5** *La médiatrice généralisée de deux régions  $S_1$  et  $S_2$  telles que  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$  est l'espace tout entier même si les deux régions ne partagent qu'un seul point.*

*Preuve :* En utilisant la définition alternative, il est évident que tous les points de l'espace sont équidistants de deux points confondus appartenant à  $S_1 \cap S_2$ .  $\square$

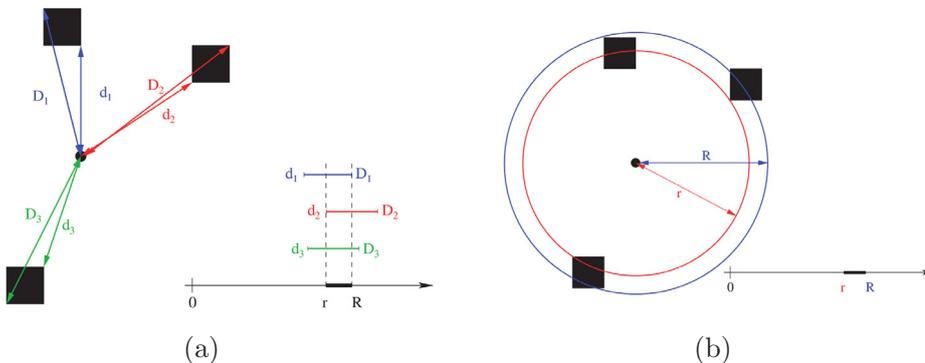
**Propriété III-2.6** *Tout point de la médiatrice généralisée de deux régions  $S_1$  et  $S_2$  est le centre d'une hypersphère coupant les deux régions.*

*Preuve :* En utilisant la définition alternative, à tout point  $r$  de la médiatrice généralisée, il existe un intervalle de rayons  $[d_1(X), D_1(X)] \cap [d_2(X), D_2(X)]$  pour lesquels, les hypersphères centrées en  $r$  coupent les deux régions.  $\square$

Une propriété importante du centre généralisé des hypersphères circonscrites est l'existence d'une hypersphère qui intersecte toutes les régions considérées. Tout point  $r$  du centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble fini de région  $\mathcal{S}$  est le centre de plusieurs hypersphères, chacune intersectant un couple de régions de  $\mathcal{S}$ . Nous cherchons un rayon pour lequel une hypersphère centrée en  $r$  intersecte toutes les régions de  $\mathcal{S}$ .

**Théorème III-2.7 (Existence de l'hypersphère [RLSA10])** *Si le centre généralisé des hypersphères circonscrites  $I_g(\mathcal{S})$  d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de  $n$  régions n'est pas réduit à l'ensemble vide, pour tout point  $X \in I_g(\mathcal{S})$  il existe au moins une hypersphère de centre  $X$  intersectant toutes les régions de  $\mathcal{S}$ . Sinon, il n'existe aucune hypersphère passant par toutes les régions de  $\mathcal{S}$ .*

*Preuve :* Le résultat est immédiat grâce au théorème de Helly [Hel23]. Le rayon est un réel (dimension 1), le centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble fini de régions est l'intersection de toutes les médiatrices de toutes les régions deux à deux (voir figure III.5).  $\square$

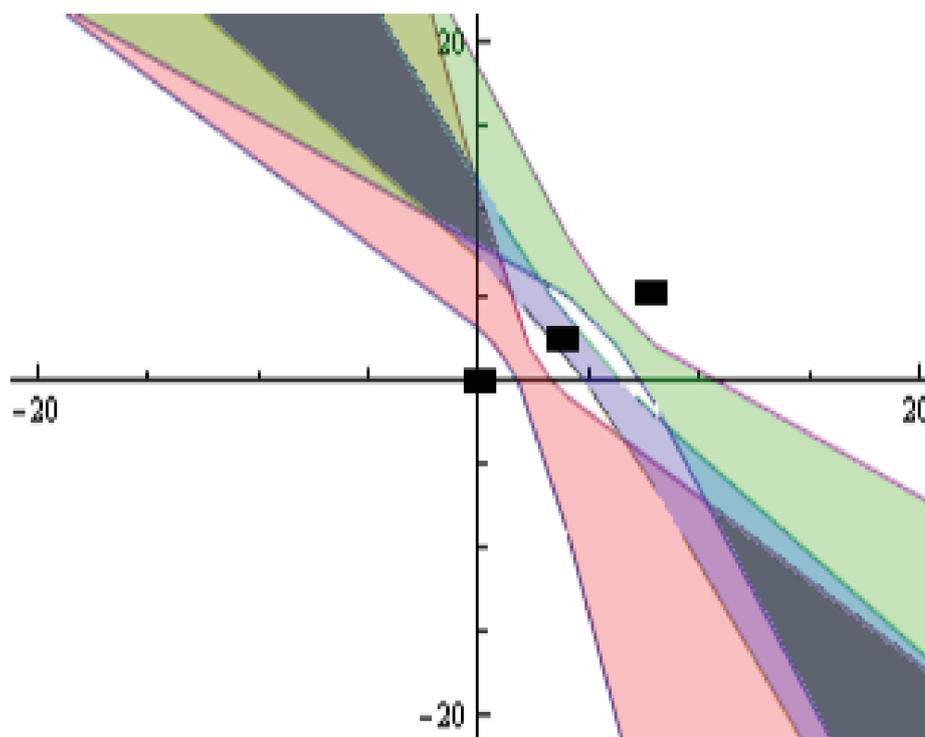


**Figure III.5** – (a) Intersection deux à deux des intervalles  $[d_i(X), D_i(X)]$ . (b) pour chaque point  $X$ , il existe deux réels un minimum  $r$  et un maximum  $R$  correspondant aux rayons minimum et maximum des cercles de centre  $X$  et coupant chacun des  $P_i$ .

**Propriété III-2.8** *Le centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de régions est infini si et seulement si il existe un hyperplan intersectant toutes les régions de  $\mathcal{S}$ .*

*Preuve :* S'il existe un hyperplan intersectant toutes les régions de  $\mathcal{S}$ , alors il existe un point à l'infini (perpendiculairement à l'hyperplan) qui est le centre d'une hypersphère intersectant toutes les régions et appartenant par conséquent au centre généralisé des hypersphères circonscrites. Si aucun hyperplan n'intersecte toutes les régions de  $\mathcal{S}$ , alors tout point du centre généralisé des hypersphères circonscrites est le centre d'une hypersphère de rayon fini intersectant toutes les régions de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

La figure III.6 illustre la propriété III-2.8.



**Figure III.6** – Le centre du cercle circonscrit (en foncé) de pixels alignés (en noir) est infini et non connexe.

### III-3 Reconnaissance exacte et exhaustive de cercles discrets

Nous nous intéressons maintenant à la reconnaissance de cercles discrets. Les médiatrices généralisées sont définies quelle que soit la dimension, pour un souci de représentation, nous travaillerons avec des exemples en dimension 2.

Pour correspondre au modèle de discrétisation, les régions correspondant aux points discrets considérés seront de différents types : des carrés de côté  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  pour le modèle naïf (tels que les cercles de Bresenham [Bre77]), des carrés unitaires pour le modèle supercouverture ou encore des disques de rayon  $\frac{1}{2}$  pour les cercles d'Andres [And94].

Plusieurs types de cercles vont être considérés car il est important lors de la reconnaissance de cercles et du calcul de leurs paramètres de savoir quel type d'objet discret est manipulé. Il existe de très nombreux types de cercles discrets correspondant à différents modèles analytiques. La méthode de reconnaissance présentée fonctionne pour tous les types de cercles discrets connus (Voir les modèles de discrétisation et les différents types de cercles discrets au chapitre I-1.5).

#### III-3.1 Reconnaissance de cercles ou d'arcs de cercles discrets et estimation de ses paramètres

À partir des propriétés des médiatrices généralisées et du centre généralisé des hypersphères circonscrites, nous proposons un algorithme qui pour un type de cercle considéré donne tous les paramètres de tous les cercles/arcs de cercles reconnus.

Le calcul de tous les paramètres signifie le calcul de tous les centres possibles, du centre généralisé des cercles circonscrits, et d'un intervalle de rayon pour chacun d'eux. Ces solutions correspondent à l'ensemble de tous les cercles euclidiens qui traversent tous les pixels considérés.

Algorithmiquement, notre méthode permet de reconnaître indifféremment des cercles ou des arcs de cercle. Une fois que les cercles sont reconnus, le calcul des extrémités des arcs est trivial.

Algorithmiquement, un même ensemble de pixels peut être reconnu comme appartenant à différents types de cercles discrets. Pour chaque type considéré les paramètres sont différents.

Selon le modèle de discrétisation, un élément structurant est associé aux points discrets (voir chapitre I-1.4). Soit  $p$  un point discret, son élément structurant est considéré comme une région, notée  $Region(p)$  (voir algorithme 2).

La complexité de l'algorithme dépend du nombre de pixels et de la complexité de l'intersection de médiatrices généralisées ( $n^2$  en dimension 2). L'algorithme n'est pas des plus rapide mais permet de calculer le centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble de points discrets, c'est-à-dire tous les centres de tous les cercles euclidiens intersectant toutes les régions associées aux pixels d'un type de cercle discret donné.

Si l'intersection n'est pas vide, un cercle discret du type considéré a été reconnu sinon, l'ensemble de pixels donné ne correspond à aucun cercle discret de ce type. L'algorithme 2 donne le centre généralisé des hypersphères circonscrites, c'est-à-dire l'ensemble de tous les centres possibles, mais ne donne aucune indication sur les rayons correspondants. L'intervalle de rayon pour lequel une hypersphère centrée en un point donné du centre généralisé des hypersphères circonscrites est donné par l'algorithme 3.

---

**Algorithme 2:** Localisation du centre des cercles discrets reconnus.

---

**Entrées :** Un ensemble  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de voxels.

**Sorties :** Le centre généralisé des hypersphères circonscrites de  $\mathcal{V}$  (noté  $CGHC(\mathcal{V})$ ).

début

```

initialiser  $CGHC(\mathcal{V}) = \mathbb{R}^n$ ;
pour  $i=1, \dots, n-1$  faire
  pour  $j=i+1, \dots, n$  faire
     $CGHC(\mathcal{V}) = CGHC(\mathcal{V}) \cap MG(v_i, v_j)$ ;
retourner  $CGHC(\mathcal{V})$ ;

```

---



---

**Algorithme 3:** Calcul de l'intervalle de rayon pour un ensemble de voxels donnés.

---

**Entrées :** Un point  $c \in \mathbb{R}^2$ , un ensemble  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  de voxels.

**Sorties :** L'intervalle de rayon  $[r_{min}, r_{max}]$  pour lequel une hypersphère centrée en  $c$  intersecte tous les voxels de  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ .

début

```

initialiser  $Intervalle\_Rayons = \mathbb{R}$ ;
pour  $i=1, \dots, n$  faire
   $r_{min} = d_{min}(c, v_i)$ ;  $r_{max} = D_{max}(c, v_i)$ ;
   $Intervalle\_Rayons = Intervalle\_Rayons \cap [r_{min}, r_{max}]$ ;
retourner  $Intervalle\_Rayons$ ;

```

---

La distance minimale (respectivement maximale) d'un point à un voxel se calcule en temps constant. La complexité de l'algorithme 3 ne dépend que du nombre de voxels de l'ensemble, elle est donc linéaire.

**Remarque :** Le problème de l'existence d'une hypersphère centrée en un point  $c \in \mathbb{R}^2$  et passant par tous les voxels de  $\mathcal{V} = \{v_i\}_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est directement résolu par l'algorithme 3; si l'intervalle de rayon est nul, une telle hypersphère n'existe pas.

### III-3.2 Reconnaissance de cercles standards et estimation de ses paramètres

Le modèle de discrétisation considéré dans cette section est le modèle standard. Ce modèle a été étudié dans [And03, And08]. C'est une variante sans bulle du modèle supercouverture. Il est basé sur la distance de Tchebychev. Les régions associées aux voxels sont les voxels eux-mêmes, c'est-à-dire des hypercubes unitaires, centrés sur des points discrets et dont les arêtes sont parallèles aux axes. Si  $V(v_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \in \mathbb{Z}^n$  est un point discret, la région qui lui est associée est définie par  $Region(V_i) = \{X(x_i) \in \mathbb{R}^n, x_i \in [v_i - 0, 5, v_i + 0, 5]\}$ . La discrétisation d'un objet euclidien dans un tel modèle correspond aux centres de tous les voxels traversés par l'objet.

Nous nous intéressons dans la suite aux espaces discrets de dimension deux. Dans ce chapitre, nous présenterons comment la médiatrice généralisée entre deux pixels peut être calculée morceau par morceau (Dans ce chapitre, un pixel et sa région sont identiques).

Soient  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$  les deux pixels de  $\mathbb{Z}^2$  dont nous voulons calculer la médiatrice généralisée. Un pixel  $P_i$  est un carré unitaire centré en ses coordonnées  $(x_i, y_i)$ , ce carré est défini par l'ensemble des points :  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [x_i - \frac{1}{2}, x_i + \frac{1}{2}] \text{ et } y \in [y_i - \frac{1}{2}, y_i + \frac{1}{2}]\}$ .

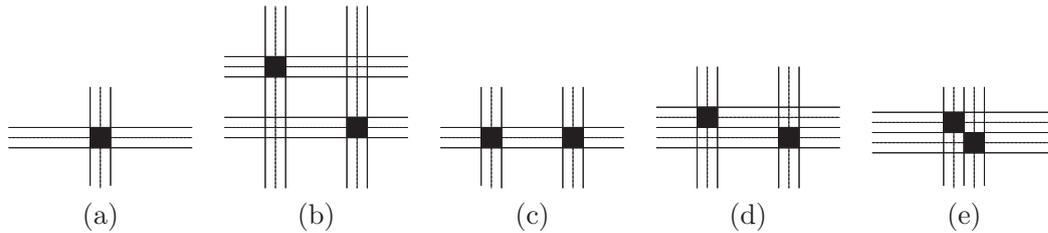
Soit  $X(x, y)$  un point de  $\mathbb{R}^2$ . Pour savoir si un point  $X$  appartient à la médiatrice généralisée de  $P_1$  et  $P_2$ , nous utiliserons la définition III-2.3, il faudra calculer  $d_1(X) = \min(d(X, P_1))$ ,  $D_1(X) = \max(d(X, P_1))$ ,  $d_2(X) = \min(d(X, P_2))$  et  $D_2(X) = \max(d(X, P_2))$ .

Nous pouvons constater dans la figure III.9 que le point le plus proche de  $X$  appartenant à un pixel  $P$  peut être :

- $X$  lui-même si  $X$  appartient à  $P$ .
- sur une arête du carré  $P$  dans le cas où  $X$  se projette orthogonalement sur  $P$ .
- un sommet du carré  $P$  dans tous les autres cas.

Le point de  $P$  le plus éloigné de  $X$  est par contre toujours un sommet du carré  $P$ .

Chaque pixel divise l'espace en 16 régions. Un couple de pixels  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$  divise l'espace en plusieurs régions. Leur nombre est compris entre 16 (dans le cas où les pixels sont confondus) et 49 (dans le cas général, où  $|x_1 - x_2| > 1$  et  $|y_1 - y_2| > 1$ ). La figure III.7 référence les cas possibles.



**Figure III.7** – (a) Un pixel divise l'espace en 16 régions. (b) Cas général, dans le cas où la différence entre les abscisses et les ordonnées des deux pixels est strictement supérieure à 1, ils divisent l'espace en 49 régions. (c) Dans le cas où les pixels ont une coordonnée en commun sans se toucher, ils divisent l'espace en 28 régions. (d) Dans le cas où les pixels ont une coordonnée qui diffère de 1 sans se toucher, ils divisent l'espace en 42 régions. (e) Dans le cas où les pixels se touchent (ont un sommet/une arête en commun ou sont confondus), leur médiatrice généralisée est tout l'espace : le nombre de régions n'est pas important.

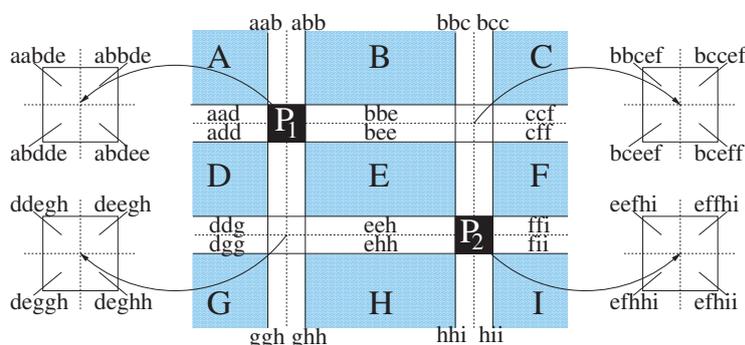
Les différentes régions peuvent être séparées en deux types de régions, les régions dites *principales* ou *secondaires*. La figure III.8 nous montre dans le cas général, quelles sont les régions principales (en foncé) et les régions secondaires.

Les distances minimales et maximales d'un point  $X \in \mathbb{R}^2$  de l'espace à  $P_1$  ou  $P_2$  ont des expressions différentes (aux symétries près) dans chacune de ces régions car le point le plus proche (respectivement plus loin) de  $P_1$  ou  $P_2$  n'est plus le même (voir figure III.9).

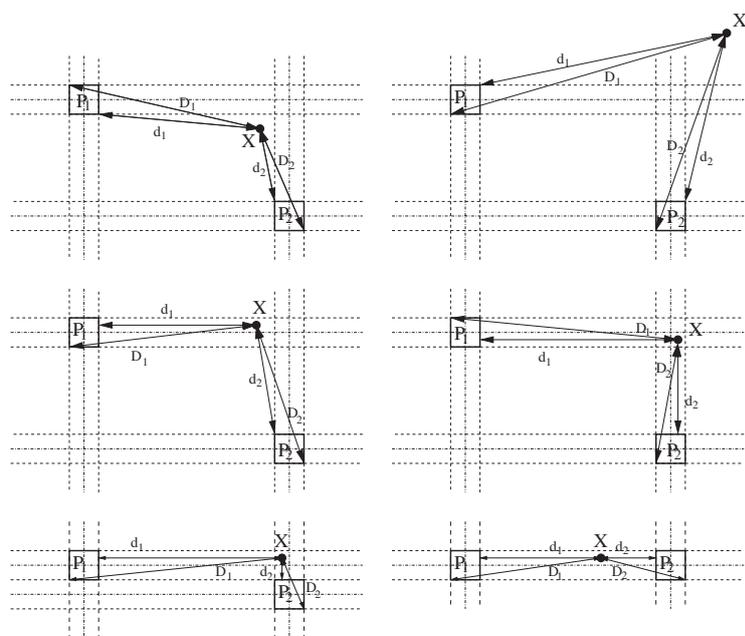
Nous avons vu que  $X$  est le centre d'un cercle passant par  $P_1$  et  $P_2$  si et seulement si  $[d_1(X), D_1(X)] \cap [d_2(X), D_2(X)] \neq \emptyset$ . Ce qui équivaut à  $\neg([d_1(X), D_1(X)] \cap [d_2(X), D_2(X)]) = \emptyset$ . Ce cas arrive seulement quand  $D_1(X) < d_2(X)$  ou  $d_1(X) > D_2(X)$ .

Soit  $C_i(C_{i_x}, C_{i_y}) \in \mathbb{R}^2$  et  $F_i(F_{i_x}, F_{i_y}) \in \mathbb{R}^2$  les points de  $P_i$  respectivement le plus proche et le plus éloigné de  $X$ . Chaque région présente deux contraintes de la forme  $d_i \leq D_j$  pouvant chacune s'écrire :

$$\sqrt{(x - C_{i_x})^2 + (y - C_{i_y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{j_x})^2 + (y - F_{j_y})^2}$$



**Figure III.8** – Les régions principales sont chacune désignées par une lettre majuscule et les régions secondaires par une combinaison de lettres minuscules (la combinaison de lettres est fonction des régions principales les plus proches).



**Figure III.9** – Suivant la région à laquelle  $X$  appartient, les distances  $d_1(X)$ ,  $d_2(X)$ ,  $D_1(X)$  et  $D_2(X)$  ont des expressions différentes car elles ne concernent plus les mêmes points.

où  $C_{i_x} \in \{x, x_i + 0.5, x_i - 0.5\}$ ,  $C_{i_y} \in \{y, y_i + 0.5, y_i - 0.5\}$ ,  $F_{j_x} \in \{x, x_j + 0.5, x_j - 0.5\}$  et  $F_{j_y} \in \{y, y_j + 0.5, y_j - 0.5\}$ .

**Proposition III-3.1** Soient  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$  deux pixels. La médiatrice généralisée  $MG(P_1, P_2)$  est soit l'espace tout entier soit une région définie par des segments, des demi-droites et des morceaux de paraboles.

*Preuve* : Si les deux pixels sont voisins, ils partagent un point ou une arête, la médiatrice généralisée est par conséquent tout l'espace  $\mathbb{R}^2$  (voir la propriété III-2.5).

Considérons maintenant deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  qui ne sont pas voisins, la médiatrice généralisée est dans ce cas une région  $MG(P_1, P_2) \subset \mathbb{R}^2$ .

Dans les régions principales (celles où  $X$  ne peut être projeté orthogonalement sur un des deux pixels), nous savons que :  $x \neq C_{i_x}$  et que  $y \neq C_{i_y}$ . Les deux contraintes peuvent s'écrire sous la forme d'équations de demi-plans délimités par une droite  $\alpha x + \beta y + \gamma \leq 0$  où  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ .

Dans le premier exemple de la figure III.9, nous avons  $C_1 = (x_1 + 0, 5, y_1 - 0, 5)$ ,  $F_1 = (x_1 - 0, 5, y_1 + 0, 5)$  et  $C_2 = (x_2 - 0, 5, y_2 + 0, 5)$ ,  $F_2 = (x_2 + 0, 5, y_2 - 0, 5)$ . La contrainte  $d_1 \leq D_2$  devient par conséquent :

$$\sqrt{(x - (x_1 + 0, 5))^2 + (y - (y_1 - 0, 5))^2} \leq \sqrt{(x - (x_2 + 0, 5))^2 + (y - (y_2 - 0, 5))^2}$$

et se simplifie en  $2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + (x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2 + y_1^2 - y_2^2 - y_1 + y_2) \leq 0$ .

Dans les régions secondaires (celles où  $C_{i_x} = x$ ,  $C_{j_x} = x$ ,  $C_{i_y} = y$  ou  $C_{j_y} = y$ ), les contraintes ne peuvent pas être simplifiées pendant le calcul. Les contraintes définissent des demi-plans délimités par des paraboles pouvant s'écrire sous la forme :

$$(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^2 + \beta x + \gamma y + \delta \leq 0$$

avec  $\alpha_1 = 0$  ou  $\alpha_2 = 0$ .

□

**Remarque :** Cette proposition peut être étendue à des espaces de dimensions  $n$ , la médiatrice généralisée entre deux voxels est alors soit tout l'espace, soit un hypervolume délimité par des morceaux d'hyperplans et de paraboloides.

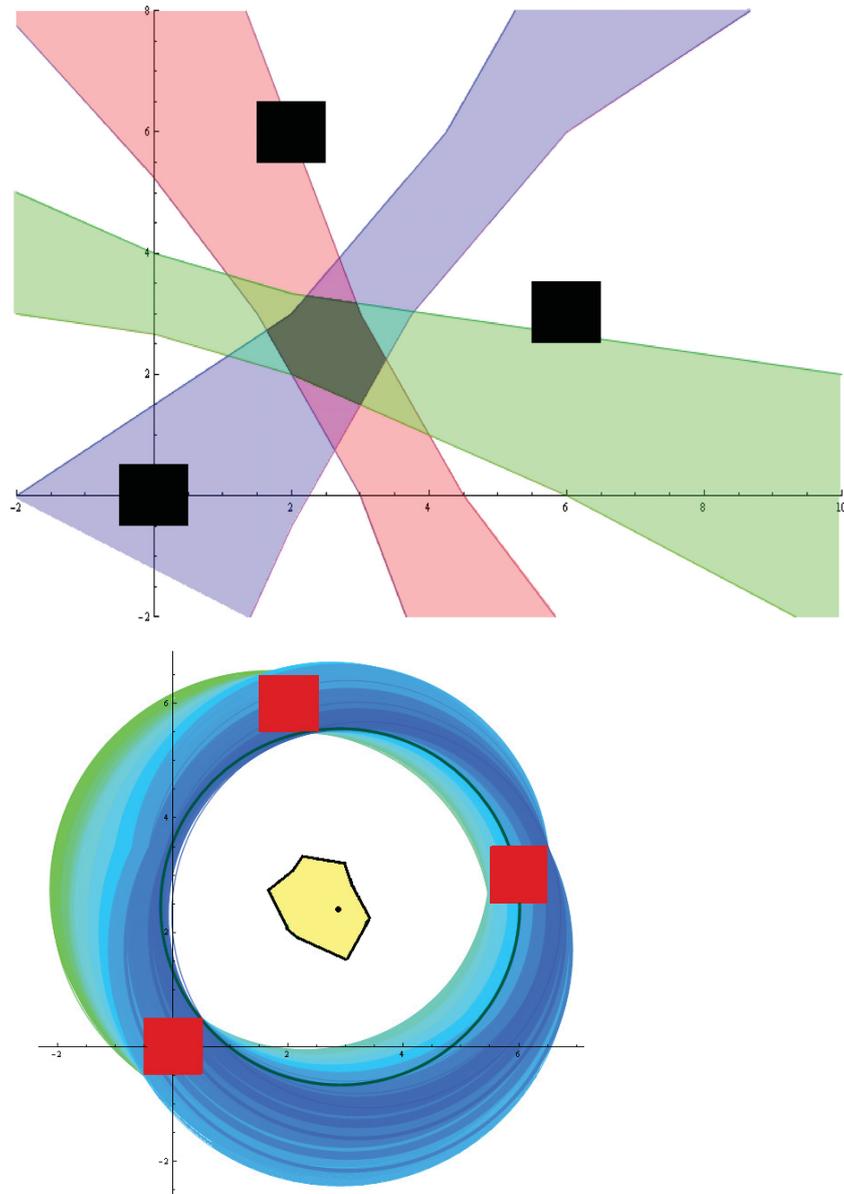
La figure III.10 montre un exemple de centre généralisé des cercles circonscrits entre trois régions définies par la distance de Tchebychev (carrés de tailles unitaires). Tous les cercles coupant les trois pixels sont centrés en un point du centre généralisé des cercles circonscrits.

La figure III.11 illustre le centre généralisé des cercles circonscrits et les rayons maximaux en chacun de ses points pour un ensemble de pixels correspondant à un cercle de Bresenham. La discrétisation supercouverture de chacun des cercles ainsi reconnus contient tous les pixels du cercle de Bresenham (l'inclusion n'est pas réciproque).

### III-3.3 Reconnaissance de cercles naïfs et estimation de ses paramètres.

Nous nous intéressons maintenant au modèle naïf de discrétisation. Ce modèle est basé sur la distance de Manhattan ( $d(X, Y) = \sum |x_i - y_i|$ ). En dimension deux, la région associée à un pixel est un carré de côté  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  dont les diagonales (de taille unitaire) sont parallèles aux axes. Le cercle de Bresenham[Bre77] est la discrétisation naïve d'un cercle euclidien (voir figure III.13).

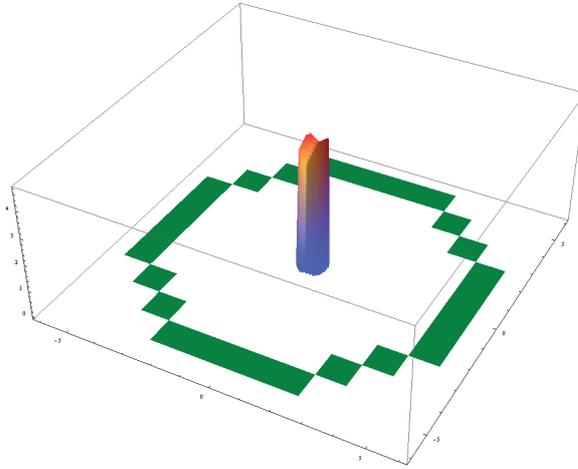
A l'aide d'une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et d'un redimensionnement de facteur  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , la médiatrice généralisée de deux régions de pixels peut être calculée via les mêmes formules que pour le modèle supercouverture (voir figure III.12).



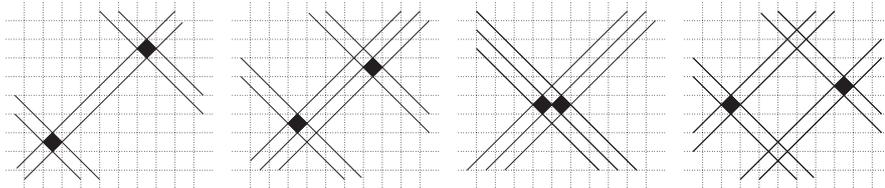
**Figure III.10** – Trois pixels  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(2,6)$  et  $P_3(6,3)$ . En haut, leur centre généralisé des cercles circonscrits défini comme l'intersection de toutes les médiatrices généralisées entre deux d'entre eux. En bas, tous les cercles coupant les trois pixels.

La figure III.13 illustre la reconnaissance d'un cercle naïf. Nous pouvons voir que le centre généralisé des cercles circonscrits contient tous les centres de tous les cercles coupant toutes les régions associées aux pixels (même si le cercle n'est pas centré sur un pixel).

La figure III.14 illustre la forme des surfaces correspondant aux rayons minimaux et maximaux en chacun des points du centre généralisé des cercles circonscrits. Ces surfaces ne sont pas simples.



**Figure III.11** – Un cercle de Bresenham de rayon 5 et son centre généralisé des cercles circonscrits en utilisant la distance de Tchebychev. En chacun de ses points le rayon maximal est représenté sur l’axe des  $z$ .



**Figure III.12** – Les cas pour le modèle naïf sont les mêmes que pour le modèle supercouverture exception faite du cas où les deux carrés correspondant aux régions des pixels ont une arête en commun (ce cas n’est possible que pour le modèle supercouverture).

**Question ouverte :** Existe-t-il un rayon pour lequel tous les cercles, centrés en un point du centre généralisé des cercles circonscrits, coupent toutes les régions des pixels considérés ?

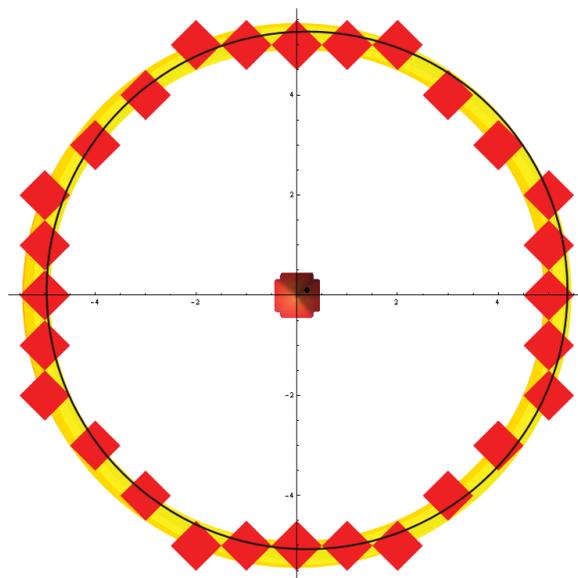
**Remarque :** Les formules du modèle supercouverture/standard peuvent être utilisées pour le modèle naïf uniquement en dimension deux. En dimension trois par exemple, en considérant le modèle naïf, la région associée à un voxel est un octaèdre qui est le dual et non pas la rotation d’un cube.

### III-3.4 Reconnaissance de cercles d’Andres et estimation de ses paramètres

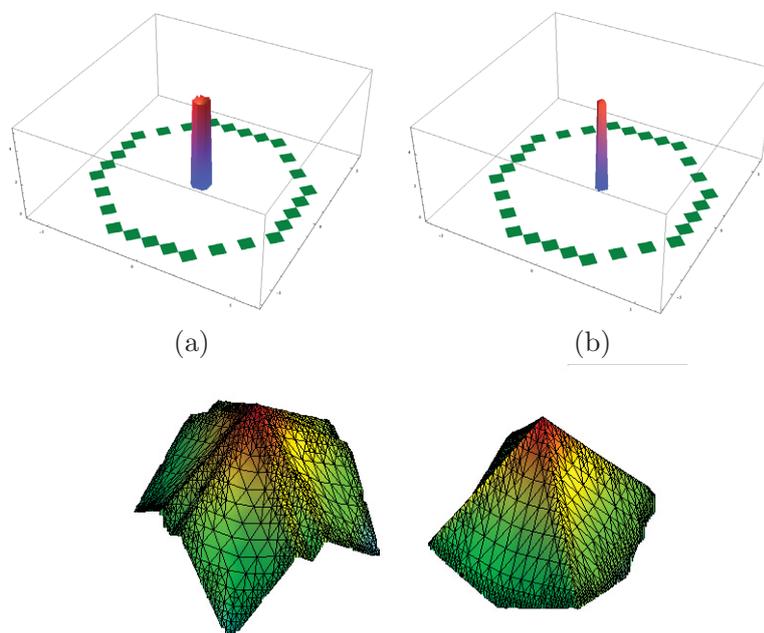
Les cercles d’Andres sont définis quelle que soit la dimension dans [And94] de la façon suivante :

**Définition III-3.2** (Cercle d’Andres en dimension 2 [And94]) *Un point  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  appartient au cercle discret d’Andres de centre  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , de rayon  $r \in \mathbb{R}$  et d’épaisseur  $w \in \mathbb{R}$  si et seulement si :*

$$\left(R - \frac{w}{2}\right)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \left(R + \frac{w}{2}\right)^2$$



**Figure III.13** – Un cercle de Bresenham de rayon 5 centré sur l'origine (en rouge, les régions des pixels le constituant). En jaune, tous les cercles qui une fois discrétisés donnent exactement le cercle de Bresenham. Au centre de la figure, le centre généralisé des cercles circonscrits.



**Figure III.14** – Centre généralisé des cercles circonscrits et reconnaissance de cercles naïfs. Sur l'axe des  $z$  sont représentés les rayons possibles en chaque point du centre généralisé des cercles circonscrits : (a) les rayons min et (b) les rayons max. Les images du bas sont des zooms sur les surfaces correspondant aux rayons min et max.

Les cercles d'Andres peuvent également être définis par  $\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid C(x_0, y_0, R) \cap B_2(\frac{w}{2}) \neq \emptyset\}$  où  $C(x_0, y_0, R)$  est le cercle euclidien de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ . Cette définition alternative montre bien que les cercles d'Andres sont basés sur la distance euclidienne. Les régions associées aux pixels sont des disques de diamètres unitaires.

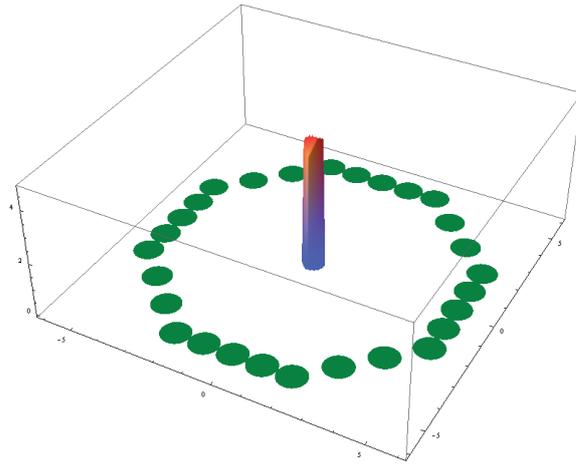


Figure III.15 – Centre généralisé des cercles circonscrits d'un cercle de Bresenham de rayon 5 pour la distance euclidienne.

Nous avons vu précédemment que la frontière de la médiatrice généralisée entre deux cercles est définie par deux hyperboles. Le calcul du centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble de points discrets nécessite donc, dans le cas des cercles d'Andres, d'intersecter des hyperboles ; ce qui est algorithmiquement très coûteux.

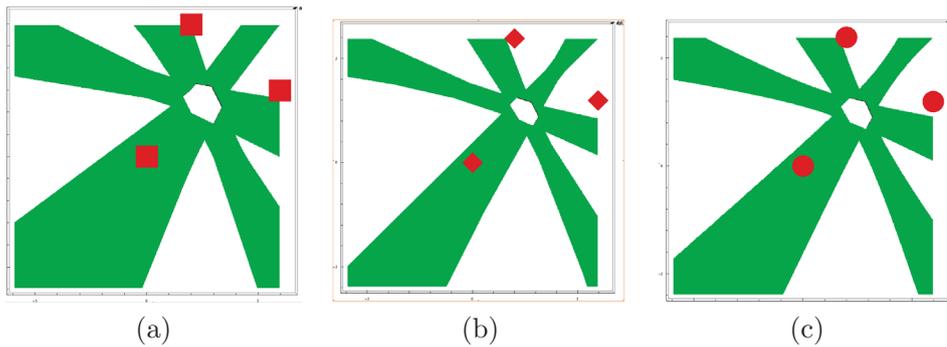


Figure III.16 – Centre généralisé des cercles circonscrits des pixels  $(0, 0)$ ,  $(2, 6)$  et  $(6, 3)$  pour le modèle supercouverture (a), le modèle naïf (b) et le modèle d'Andres (c).

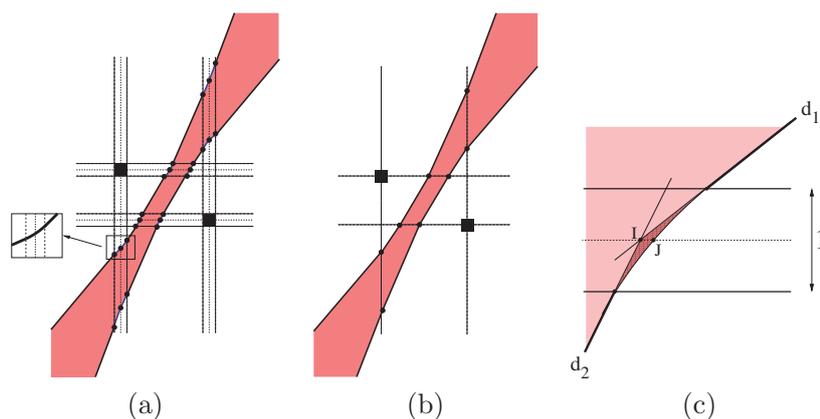
### III-4 Médiatrice Généralisée Simplifiée.

Seuls les modèles naïfs et supercouvertures/standards seront considérés dans cette partie. Les régions associées aux pixels sont des carrés de côtés unitaires pour le modèle supercouverture ou des carrés de diagonales unitaires pour le modèle naïf.

#### III-4.1 Définition.

Nous avons vu dans précédemment (voir III-3) que les bords de la médiatrice généralisée entre deux carrés sont décrits par des morceaux de droites et des morceaux de paraboles. Les morceaux de paraboles sont obtenus par les points de la médiatrice généralisée pouvant être projetés orthogonalement sur un des côtés d'un des carrés.

Pour simplifier les calculs et la description de la médiatrice généralisée, les morceaux de paraboles sont ignorés en prolongeant légèrement les morceaux de droites adjacents (ce qui équivaut à ignorer les régions secondaires). L'erreur engendrée par cette simplification est faible pour des images de grande taille. Cette version de la médiatrice généralisée dite simplifiée sera notée *MGS*.



**Figure III.17** – (a) Médiatrice généralisée de deux pixels. (b) Médiatrice généralisée simplifiée obtenue en ignorant les morceaux de paraboles et en prolongeant les morceaux de droites de la MG. (c) représentation de l'erreur commise par une telle approximation.

Le centre généralisé des hypersphères circonscrites simplifié est défini à partir des médiatrices généralisées simplifiées comme les CHCG à partir des MG.

#### Définition III-4.1 Centre généralisé et simplifié des hypersphères circonscrites

Le centre généralisé simplifié des hypersphères circonscrites (*CHCGS*) d'un ensemble fini de  $n$  régions connexes  $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in [1, n]}$  est défini comme l'intersection des médiatrices généralisées simplifiées (*MGS*) de tous les couples de régions de  $\mathcal{S}$ .

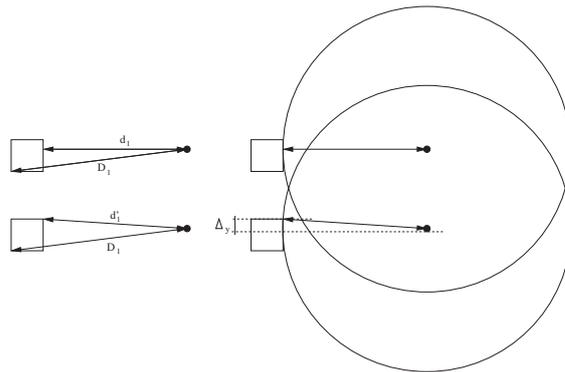
$$CHCGS(\mathcal{S}) = \bigcap_{i, j \in [1, n], i < j} (MGS(S_i, S_j))$$

**Propriété III-4.2** Tout point du *CHCGS* d'un ensemble  $\mathcal{S}$  fini de régions est le centre d'au moins une hypersphère coupant toutes les régions de  $\mathcal{S}$ .

*Preuve :* La simplification de la médiatrice généralisée engendre des faux négatifs. La MGS d'un couple de points est incluse dans la MG. Le CHCGS (défini comme l'intersection des MGS) est par conséquent inclus dans le CHCG. Cette propriété se déduit directement du théorème III-2.7.  $\square$

### III-4.2 Expression des solutions non reconnues et erreur due à la simplification.

Considérons la définition alternative des médiatrices généralisées III-2.3. Le point le plus proche d'un carré à un point  $X$  donné est soit le point lui même, dans le cas où  $X$  appartient au carré, soit un côté du carré, soit un sommet du carré. Pour éliminer les morceaux de paraboles de la description du bord de la médiatrice généralisée, nous considérerons que le point le plus proche de  $X$  appartenant au carré est systématiquement un sommet du carré (voir figure III.18).



**Figure III.18** – À gauche, les distances min/max d'un point à un pixel. À droite, les cercles reconnus de rayon minimal centrés en un point donné.

Cette simplification diminue légèrement la taille de la médiatrice généralisée. Les solutions perdues sont les points pour lesquels tout cercle intersectant un des pixels n'en intersecte qu'une arête (autrement dit, il n'existe aucun cercle centré en un de ces points qui intersecte au moins deux des quatre arêtes de chacun des pixels).

Les régions où la médiatrice généralisée est simplifiée sont les régions secondaires, celles où le point  $X = (x, y)$  considéré se projette orthogonalement sur un des côtés d'un des pixel  $P_i$  de centre  $(X_i, Y_i)$ . Dans le cas du modèle supercouverture, nous avons soit  $x \in [X_i - 0, 5; X_i + 0, 5]$  soit  $y \in [Y_i - 0, 5; Y_i + 0, 5]$ . Dans le cas où  $y \in [Y_i - 0, 5; Y_i + 0, 5]$ , le plus petit rayon  $r_{min}$  pour lequel un cercle centré en  $X$  coupe le pixel  $P_i$  vaut  $(|X_i - x| - 0, 5)$  (ce cercle est tangent à  $Region(P_i)$ ). Avec la simplification de la médiatrice généralisée le plus petit rayon  $r_{min2}$  vaut  $\sqrt{(|X_i - x| - 0, 5)^2 + (0, 5 - |Y_i - y|)^2}$ .

**Remarque :** Les faux négatifs (solutions non reconnues par cette méthode) sont les mêmes que dans [AR11].

### III-4.3 Propriétés et Notations

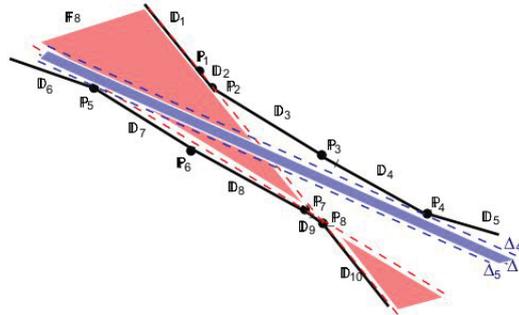
Pour la médiatrice généralisée simplifiée, la distance minimale entre un point et un pixel est le minimum des distances entre ce point et un sommet du pixel. La médiatrice généralisée simplifiée de deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  est définie par les équations :

$$SGPB(P_1, P_2) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \left( \sqrt{(x - C_{2x})^2 + (y - C_{2y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{1x})^2 + (y - F_{1y})^2} \right) \wedge \left( \sqrt{(x - C_{1x})^2 + (y - C_{1y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{2x})^2 + (y - F_{2y})^2} \right) \right\}$$

où  $C_{ix}, F_{ix} \in \left\{ \left(x_i + \frac{1}{2}\right), \left(x_i - \frac{1}{2}\right) \right\}$  et  $C_{iy}, F_{iy} \in \left\{ \left(y_i + \frac{1}{2}\right), \left(y_i - \frac{1}{2}\right) \right\}$ . La MGS est délimitée par des segments et des demi-droites (voir figure III.17).

**Proposition III-4.3** [RLSR<sup>+</sup> 11] *Les bords d'une médiatrice généralisée simplifiée 2D entre deux pixels  $P_1 = (x_1, y_1)$  et  $P_2 = (x_2, y_2)$  est composée d'au plus 10 segments ou demi-droites.*

**Notation :** Les morceaux de droites (segments ou demi-droites) formant le bord de la médiatrice généralisée simplifiée  $MGS(P_1, P_2)$  seront notés  $\{\mathbb{D}_i\}_{i \in [1,10]}$ . Les points caractéristiques de ce bord seront notés  $\{\mathbb{P}_i\}_{i \in [1,8]}$ ; ils sont définis comme ceci :  $\mathbb{P}_i = \mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_{i+1}$  si  $i \in [1, 4]$  et  $\mathbb{P}_i = \mathbb{D}_{i+1} \cap \mathbb{D}_{i+2}$  si  $i \in [5, 8]$  (voir figure III.19).  $\mathbb{D}_1, \mathbb{D}_5, \mathbb{D}_6$  et  $\mathbb{D}_{10}$  sont les demi-droites du bord de la  $MGS(P_1, P_2)$ .



**Figure III.19** – Le bord de la médiatrice généralisée simplifiée est composé de 6 segments et de 4 demi-droites ( $\mathbb{D}_i$ ). Les points caractéristiques sont notés  $\mathbb{P}_i$ .  $\mathbb{F}_8$  est le faisceau de droites appartenant à la médiatrice généralisée simplifiée passant par  $\mathbb{P}_8$ .

**Lemme III-4.4** *Soient  $A(a_1, a_2)$  et  $B(b_1, b_2)$  deux pixels tels que  $a_i \pm \frac{1}{2} \neq b_i \pm \frac{1}{2}$ .  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_{10}$  (respectivement  $\mathbb{D}_5$  et  $\mathbb{D}_6$ ) ont la même droite de support.*

*Preuve :* Ce lemme est une conséquence directe de la définition III-2.3. Dans le cas où  $a_i \pm \frac{1}{2} = b_i \pm \frac{1}{2}$ , les droites ne sont plus confondues mais parallèles.  $\square$

### III-4.4 Représentation dans un espace de paramètres.

Déterminer l'appartenance d'un point à une médiatrice généralisée est très simple grâce à la définition alternative de la médiatrice généralisée. Par contre, étant définie comme une

union de droites, il est moins évident de déterminer si une droite appartient à la médiatrice généralisée. Une manière d'aborder ce problème est de considérer la médiatrice généralisée simplifiée dans un espace de paramètres (voir le chapitre précédent ou [Dex06]).

La représentation paramétrique de la médiatrice euclidienne de deux points  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  est un point de coordonnées  $\left( \frac{x_B - x_A}{y_A - y_B}, \frac{x_A^2 + y_A^2 - x_B^2 - y_B^2}{2(y_A - y_B)} \right)$  si  $y_B \neq y_A$ . Si  $y_A = y_B$ , c'est un point à l'infini.

**Proposition III-4.5** *Le dual d'une médiatrice généralisée simplifiée 2D est un polygone convexe ayant au plus 8 côtés et 8 sommets. Au plus deux sommets sont à l'infini, dans ce cas, les côtés leur étant associés sont verticaux.*

*Preuve :* Le bord de la médiatrice généralisée simplifiée est constitué de segments et de demi droites. La représentation paramétrique de la MGS est par conséquent un polygone.

Soient  $A$  et  $B$  deux points du bord de la représentation paramétrique de la MGS. Ces deux points sont les représentations paramétriques de deux droites  $L_A$  et  $L_B$  appartenant toutes les deux à la MGS. La droite  $(AB)$  est la représentation paramétrique de l'intersection  $I = L_A \cap L_B$  appartenant à la MGS. L'ensemble des droites passant par  $I$  est divisé en deux faisceaux  $F$  et  $\overline{F}$ , délimités par  $L_1$  et  $L_2$ .  $F$  contient uniquement des droites appartenant à la MGS (puisque  $L_1$  et  $L_2$  appartiennent à la MGS) et  $\overline{F}$  des droites extérieures à la MGS. Un point de  $(AB)$  n'appartenant pas à  $[AB]$  n'appartient pas au polytope, il est associé à une droite de  $\overline{F}$  (il passe par  $I$  n'appartenant pas à la MGS). Les points de  $[AB]$  représentent les droites de  $F$ . Le polytope est donc convexe.

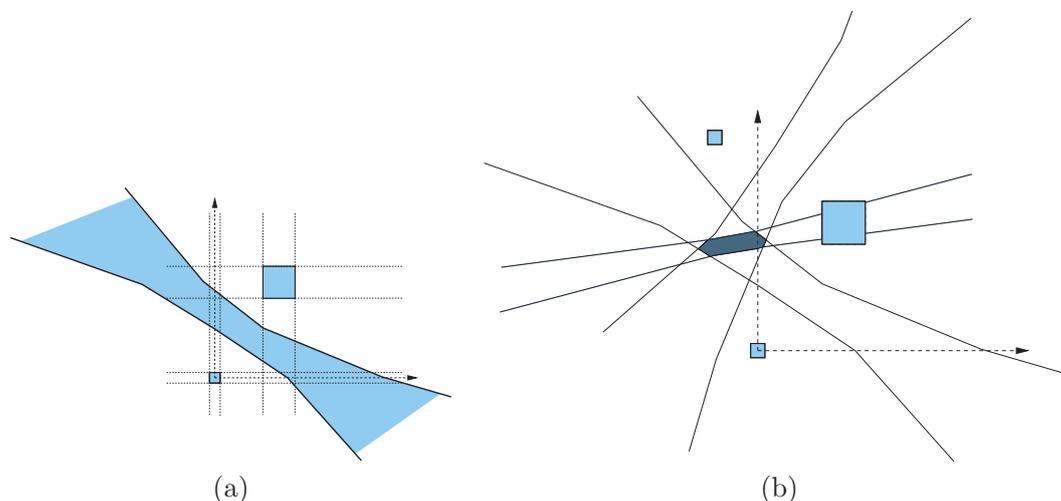
Le nombre de sommets du polytope est une conséquence directe de la proposition III-4.3 et du lemme III-4.4. □

Déterminer l'appartenance d'un point à un polytope dont le nombre de côté est borné et par conséquent déterminer si une droite appartient à une MGS se fait en temps constant  $O(1)$ .

### III-5 Reconnaissance de cercles discrets avec marge d'erreur adaptative.

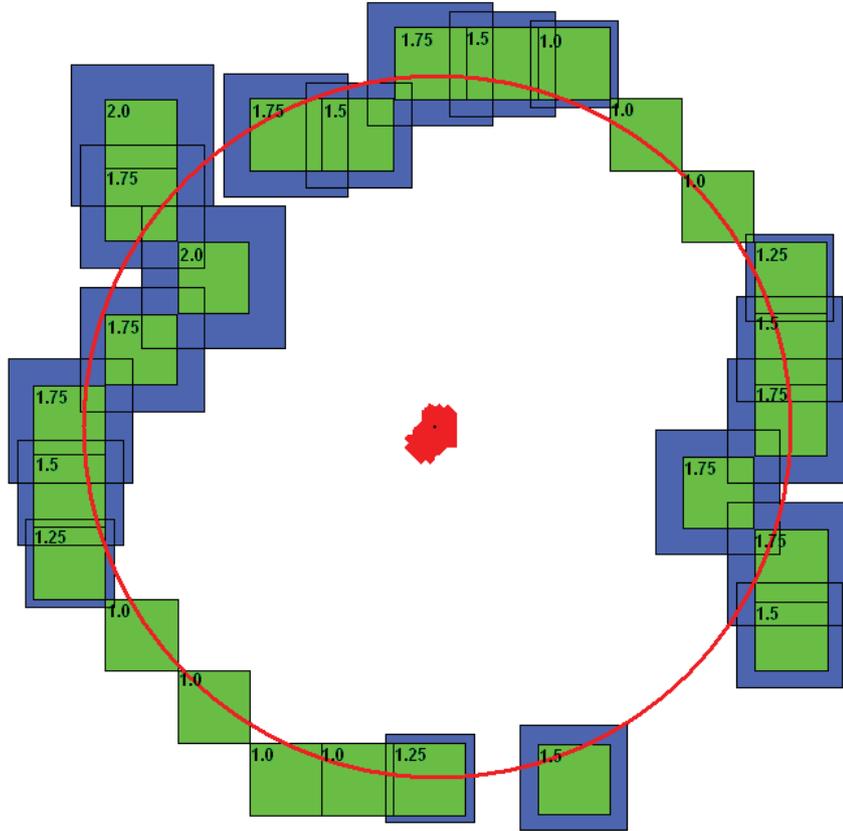
Les définitions généralisées de médiatrice et de centre de cercles circonscrits s'appliquent à des surfaces, nous avons utilisé des pixels (carrés) de taille unitaire mais le principe est le même avec des pixels pris à des échelles différentes. Prendre des pixels à des échelles différentes permet de tenir compte du bruit d'une image discrète. Plus la position d'un pixel est incertaine, plus la taille du pixel est grande (voir précédent chapitre).

La figure III.20 représente une médiatrice généralisée et un centre des hypersphères circonscrites pour des pixels de différentes tailles (pour le modèle supercouverture).



**Figure III.20** – (a) Médiatrice généralisée entre  $P_1(0,0)$  de taille unitaire  $u$  et  $P_2(6,9)$  de taille  $3u$ . (b) Centre généralisé des cercles circonscrits entre  $P_1(0,0)$  de taille unitaire  $u$ ,  $P_2(6,9)$  de taille  $3u$  et  $P_3(-3,15)$  de taille  $u$ .

La figure III.21 représente un cercle de Bresenham de rayon 5 avec des pixels mal placés ou manquant. Les pixels sont redimensionnés en fonction d'un estimateur de courbure. Au centre de la figure, la région en rouge représente le centre généralisé des hypersphères circonscrites des pixels redimensionnés. Le CHCG est calculé comme l'intersection des médiatrices généralisées de tous les couples de pixels du cercle. Les centres de tous les cercles coupant tous les pixels redimensionnés appartiennent au CHCG. Le calcul des rayons possibles pour un point donné du CHCG se fait en  $O(n)$  où  $n$  est le nombre de pixels considérés.



**Figure III.21** – Exemple de reconnaissance de cercles bruités. En vert, les voxel donnés. En bleu, leurs éléments structurants après redimensionnement. En rouge, le centre généralisé des cercles circonscrits, le point noir est le centre du cercle rouge donné en exemple.

## Conclusion

Ce chapitre étend les propriétés des médiatrices euclidiennes et de leur intersection aux espaces discrets. Le centre généralisé des hypersphères circonscrites d'un ensemble de voxels a été introduit comme une région contenant tous les centres de toutes les hypersphères intersectant toutes les régions de l'ensemble.

Le centre généralisé des hypersphères circonscrites peut être utilisé pour la reconnaissance de cercles discret fournissant l'ensemble de toutes les solutions.

Pour des raisons algorithmiques, une simplification a été apportée aux médiatrices généralisées permettant ainsi le calcul de leur intersection avec une complexité raisonnable. Cette simplification conduit à des résultats similaires à ceux de [AR11].

Dans le cas d'images bruitées, la méthode de redimensionnement des voxels (éléments structurants) présentée au chapitre II peut être utilisée pour accorder une marge d'erreur à la reconnaissance d'hypersphère.

Notre méthode de reconnaissance d'hypersphères a été confrontée à de nombreux modèles de discrétisation et procure des résultats satisfaisants comme le montrent plusieurs images.

## Bibliographie

- [And94] E. Andres. Discrete circles, rings and spheres. *Computer & Graphics*, 18(5) :695–706, 1994. Cité en pages [XI](#), [15](#), [16](#), [86](#) et [92](#)
- [And03] E. Andres. Discrete linear objects in dimension  $n$  : the standard model. *Graphical Models*, 65 :92–111, 2003. Cité en pages [XI](#), [13](#), [14](#), [17](#) et [87](#)
- [And08] Eric Andres. The supercover of an  $m$ -flat is a discrete analytical object. *Theoretical Computer Science*, 406(1-2) :8 – 14, 2008. Discrete Tomography and Digital Geometry : In memory of Attila Kuba. Cité en page [87](#)
- [AR11] Eric Andres and Tristan Roussillon. Analytical description of digital circles. In *DGCI*, pages 235–246, 2011. Cité en pages [17](#), [18](#), [80](#), [96](#) et [100](#)
- [Bre77] Jack Bresenham. A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs. *Commun. ACM*, 20(2) :100–106, 1977. Cité en pages [15](#), [86](#) et [90](#)
- [CGRT04] D. Coeurjolly, Y. Gerard, J. P. Reveillés, and L. Tougne. An elementary algorithm for digital arc segmentation. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3) :31–50, 2004. Cité en page [80](#)
- [Dam95] P. Damaschke. The linear time recognition of digital arcs. 16 :543–548, 1995. Cité en page [80](#)
- [Dex06] Martine Dexet. *Architecture d'un modeleur géométrique à base topologique d'objets discrets et méthodes de reconstruction en dimension 2 et 3*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2006. Cité en pages [XII](#), [20](#), [21](#), [22](#), [23](#), [26](#), [50](#), [58](#) et [98](#)
- [Fis86] S. Fisk. Separating point sets by circles, and the recognition of digital disks. 8(4) :554–556, 1986. Cité en page [80](#)
- [Hel23] E. Helly. Über mengen konvexer korper mit gemeinschaftlichen punkten. In *Jahresbericht der Deutschen MathematikerVereinigung*, volume 32, pages 175–176, 1923. Cité en pages [65](#) et [84](#)
- [Kha05] Ali Asghar Khanban. *Basics algorithms of computational geometry with imprecise input*. PhD thesis, University of London, 2005. Cité en page [80](#)
- [Kim84] C.E. Kim. Digital disks. 6(3) :372–374, 1984. Cité en pages [XI](#) et [80](#)
- [NA84] A. Nakamura and K. Aizawa. Digital circles. 26(2) :242–255, 1984. Cité en page [80](#)
- [RLSA10] Marc Rodríguez, Gaëlle Largeteau-Skapin, and Eric Andres. Generalized perpendicular bisector and circumcenter. In Springer Verlag, editor, *Comp'Image*, Lecture Notes in Computer Science 6026, pages 1–10, May 2010. Cité en pages [XIII](#), [81](#), [82](#) et [84](#)
- [RLSR<sup>+</sup>11] Aurélie Richard, Gaëlle Largeteau-Skapin, Marc Rodríguez, Eric Andres, Laurent Fuchs, and Jean-Serge Dimitri Ouattara. Properties and applications of the simplified generalized perpendicular bisector. In *DGCI, LNCS 6607*, pages 296–307, 2011. Cité en page [97](#)
- [RST09] Tristan Roussillon, Isabelle Sivignon, and Laure Tougne. On-line Recognition of Digital Circular Arcs. In *15-th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*, LNCS, 2009. Cité en page [80](#)
- [Sau92] Peter W. Sauer. On the recognition of digital circles in linear time. *Computational Geometry*, 2 :287–302, 1992. Cité en page [80](#)

---

# Conclusion et Perspectives

---

## III-6 Conclusion

Notre travail a consisté à définir une nouvelle méthode permettant d'accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de primitives discrètes. Le redimensionnement des éléments structurants permet d'associer une incertitude à chaque point discret. Cette incertitude peut être calculée grâce à divers critères locaux et distribuée à chaque pixel (ou élément structurant) indépendamment des autres.

Nous nous sommes intéressés aux différents modèles de discrétisation et avons utilisé un algorithme de reconnaissance d'hyperplans discrets faisant appel à un espace de paramètres. Effectivement, le redimensionnement d'un élément structurant engendre une modification simple de la forme paramétrique des points discrets et s'intègre facilement aux algorithmes existants.

L'utilisation du redimensionnement adaptatif des pixels et d'algorithmes de reconstruction basés sur la reconnaissance de primitives discrètes permettent de définir des méthodes de simplification de courbe ou encore de débruitage.

En pratique, quand une marge d'erreur est accordée à la reconnaissance de primitives, rien ne garantit que la topologie de l'objet est conservée. Nous avons proposé deux méthodes en dimension 2 permettant de limiter changements topologiques lors de la reconstruction d'un objet : la première, faisant appel aux squelettes (axes médians), ne garantit certes pas la préservation topologique de l'objet mais permet néanmoins d'éviter la plupart de ses changements. La seconde méthode est une condition sur le voisinage des points discrets du contour de l'objet à reconstruire ; si le voisinage est consistant et si la méthode de reconstruction choisie est adaptée, tous les sauts topologiques sont évités. Cette dernière méthode à l'avantage d'être définie quelle que soit la dimension.

Nous avons également défini dans un dernier chapitre la notion de médiatrice généralisée entre deux surfaces. Cette nouvelle notion est basée sur le modèle de la médiatrice "classique" d'un segment euclidien. Cette définition a permis de généraliser les propriétés euclidiennes de l'intersection des médiatrices et de définir une nouvelle méthode de reconnaissance de cercles (d'hypersphères) discret(e)s.

Le redimensionnement des pixels présenté au second chapitre peut s'appliquer directement à cette méthode efficace pour accorder une marge d'erreur à la reconnaissance de cercles discrets et ainsi de palier le problème du bruit.

Dans des travaux parallèles avec A. Richard, nous avons généralisé la notion de symétrie axiale et ainsi adapté l'algorithme de reconnaissance de rotation de Fontjine à des données biaisées.

### III-7 Perspectives

La plupart des exemples et applications présentées dans cette thèse sont en dimension 2. Les outils présentés sont toutefois définis quelle que soit la dimension. Ils seront dans de futurs travaux appliqués à des espaces de dimensions supérieures. La figure III.22 illustre comment le redimensionnement adaptatif des voxels peut être utilisé pour une reconstruction 3D avec marge d'erreur.

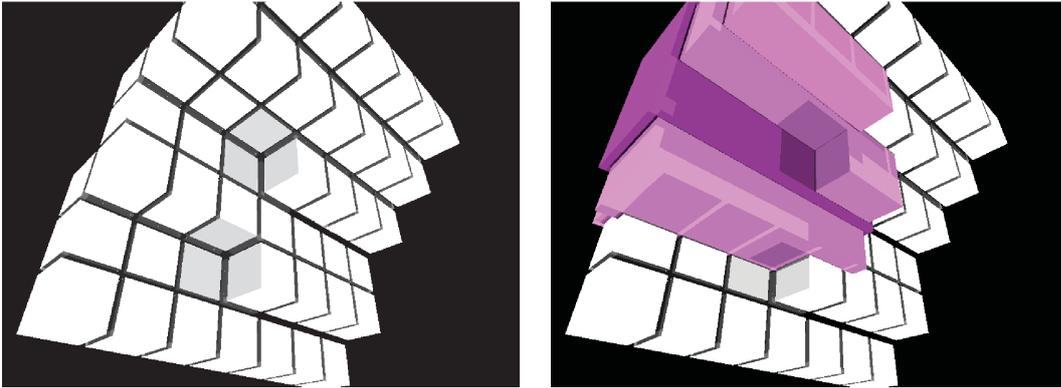


Figure III.22 – Redimensionnement adaptatif en dimension 3.

La deuxième définition de la médiatrice généralisée est basée sur la notion de distance, elle peut directement être appliquée quelle que soit la dimension. La figure III.23 donne un exemple de médiatrice généralisée en dimension 3 entre deux sphères ( $S_1$  et  $S_2$ ) de taille différente; tous les points à l'intérieur des deux hyperboles sont les centres d'au moins une sphère intersectant  $S_1$  et  $S_2$ .

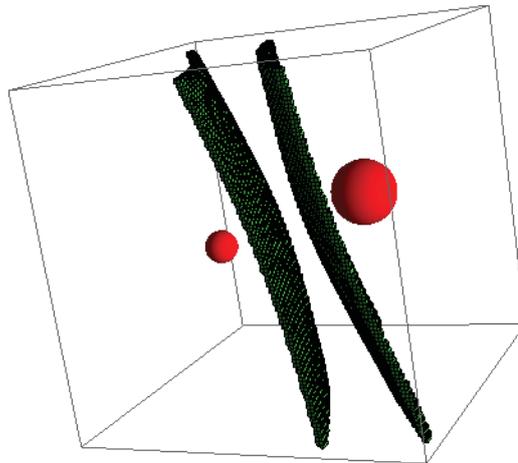
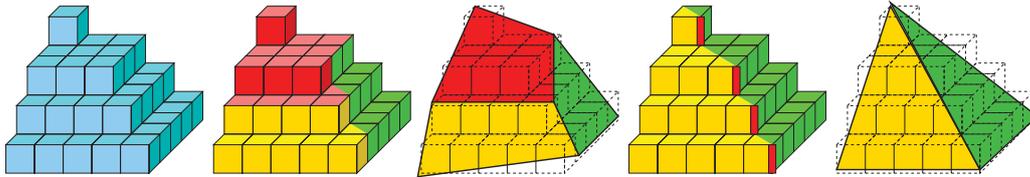


Figure III.23 – Médiatrice généralisée entre deux sphères.

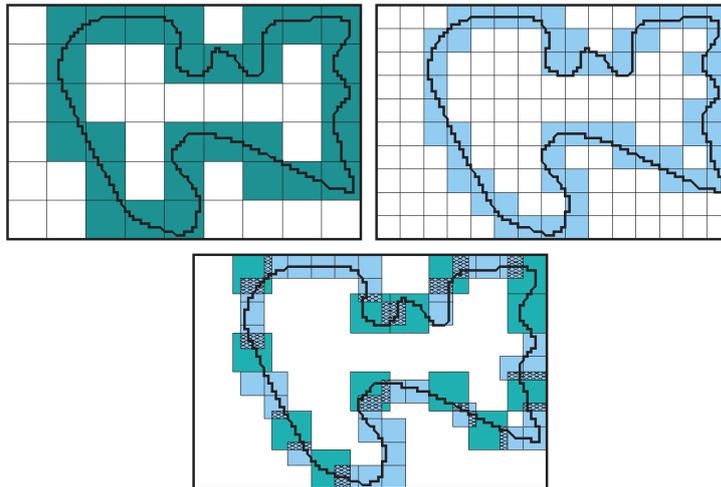
Il reste néanmoins le problème ouvert de l'ordre de parcours des hypervoxels d'un contour dans un espace de dimension supérieure ou égale à 3. Les  $k$ -cellules de rebroussement présentées à la fin du premier chapitre pourraient permettre d'élaborer de nouvelles heuristiques conduisant à des primitives de plus grande taille (voir figure III.24).



**Figure III.24** – Utilisation des  $k$ -cellules de rebroussement en dimension 3 pour *guider* le parcours de la surface à reconstruire.

D'un point de vue algorithmique, de nombreuses perspectives peuvent s'offrir pour améliorer les travaux présentés dans cette thèse. Les algorithmes d'intersection de régions utilisés peuvent être améliorés et adaptés à des dimensions supérieures. Le problème d'intersection de paraboles persiste conduisant à des complexités trop importantes pour être efficaces.

Dans tous nos travaux, le redimensionnement adaptatif ne changeait pas le centre du voxel considéré. L'étude d'une reconstruction faisant appel à des pixels, de différentes tailles, centrés en des points quelconques peut être l'objet de travaux futurs. Les pixels pourraient être considérés à des échelles très différentes (voir figure III.25).



**Figure III.25** – Utilisation multi-échelle du principe de redimensionnement des pixels.



---

# Publications personnelles

---

## Revues internationales :

E. Andres, G. Largeteau-Skapin, M. Rodríguez. *Generalized Perpendicular Bisector and exhaustive discrete circle recognition*. Elsevier, Graphical Models, volume 73, number 6, pp.354-364, 2011.

## Conférences internationales avec actes :

A. Richard, G. Largeteau-Skapin, M. Rodríguez, E. Andres, L. Fuchs and D.J.-S. Ouattara. *Properties and Application of the Simplified Generalized Perpendicular Bisector.*, 16th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, volume LNCS 6607, pp.296-307, Nancy (France), 2011.

M. Rodríguez, S. Abdoulaye, G. Largeteau-Skapin and E. Andres. *Generalized Perpendicular Bisector and Circumcenter.*, Second International Symposium, Comp'IMAGE, Computational Modeling of Objects Represented in Images, volume LNCS 6026, pp.1-10, Buffalo (USA), 2010.

M. Rodríguez, G. Largeteau-Skapin and E. Andres. *Adaptive pixel size reconstruction with topological control*, 13th International Workshop in Combinatorial Image Analysis, Progress in Combinatorial Image Analysis, volume RPS, pp.193-205, Playa del Carmen (Mexico), 2009.

M. Rodríguez, G. Largeteau-Skapin and E. Andres. *Adaptive pixel resizing for multiscale recognition and reconstruction*, 13th International Workshop in Combinatorial Image Analysis, volume LNCS 5852, pp.252-265, Playa del Carmen (Mexico), 2009.

M. Rodríguez, G. Largeteau-Skapin and E. Andres. *Local non-planarity of three dimensional surfaces for an invertible reconstruction : k-cuspal cells.*, 4th International Symposium of Visual Computing, Advances in Visual Computing, volume LNCS 5358, p.925-934, Las Vegas (USA), 2008.

## Conférences nationales avec actes :

M. Rodríguez, A. Richard, G. Largeteau-Skapin et E. Andres. *Redimensionnement des voxels et reconnaissance de primitives avec marge d'erreur.*, 23ème journée de l'Association Française d'Informatique Graphique, pp.7-17, Dijon (France), novembre 2011.





## Redimensionnement adaptatif et reconnaissance de primitives discrètes.

**Résumé :** Cette thèse se place dans le cadre de l'imagerie informatique et plus particulièrement celui de la géométrie discrète. Nous nous intéressons à la reconstruction, c'est-à-dire, l'opération qui transforme un objet discret en objet euclidien. Les méthodes de reconstruction que nous utilisons se déroulent en deux étapes ; la première consiste à reconnaître des primitives discrètes (droites, cercles, etc) et la seconde à les transformer en primitives euclidiennes.

La présence de bruit dans les objets manipulés perturbe considérablement la reconnaissance de primitives, nous avons proposé un moyen simple et efficace de lui accorder une marge d'erreur : le redimensionnement adaptatif. Le redimensionnement est dit adaptatif car chaque pixel est redimensionné indépendamment des autres selon des critères locaux.

Pour la reconnaissance de droites, nous avons utilisé la méthode de J. Vittone basée sur les espaces de paramètres. En la combinant avec le redimensionnement adaptatif, nous avons défini des opérations telles que le lissage de courbes et le débruitage. Nous avons amélioré ces opérations grâce à deux méthodes permettant d'éviter dans la plupart des cas une modification de la topologie de l'objet.

Pour la reconnaissance de cercles discrets, nous avons généralisé les notions de médiatrices et de centre des cercles circonscrits aux espaces discrets. Cette méthode de reconstruction de cercles se combine très bien avec le redimensionnement adaptatif.

**Mots-clés :** Géométrie discrète, reconstruction, redimensionnement adaptatif, reconnaissance de primitives, médiatrice généralisée, préimage, espace de paramètres, topologie.

## Adaptive resizing and discrete primitive recognition.

**Abstract :** The framework of this thesis is computer imagery and particularly discrete geometry. We focus on the reconstruction : the operation that transforms a discrete objet into a Euclidean one. The reconstruction method we use starts with discrete primitive recognition and continues with the analytical reconstruction of that primitive.

Primitive recognition is disturbed by noise. When handling noisy data a simple way to allow a margin of error in the primitive recognition is to increase the size of the pixels. The resizing is said adaptative because sizes are determined by local criteria.

For straight line recognition, we focus on the J. Vittone method using parameter spaces. We incorporate the adaptive resizing to the straight line recognition to design operations like curve simplification and denoising. Topological changes can appear during the operations. We propose two methods to prevent most of the topological changes.

For circle recognition, we define the generalized perpendicular bisectors to extend to discrete space the Euclidean properties of their intersection called circumcenter. We propose a new exhaustive discrete circle recognition method with this new definition. Adaptive resizing can be used to allow a margin of error for the circle recognition.

**Key-words :** Discrete geometry, adaptive resizing, primitive recognition, reconstruction, generalized perpendicular bisector, parameter space, topology.