THÈSE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

(Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006)

École Doctorale: **Sciences et Ingénierie pour l'Information S2I**

Secteur de Recherche: **Mathématiques et leurs interactions**

Présentée par:

Batoul SAOUD

****

ATTRACTEURS POUR DES SYSTÈMES DISSIPATIFS NON AUTONOMES

****

Directeur de thèse : **Alain MIRANVILLE**

Soutenue le 16 Décembre 2011

devant la commission d'examen

JURY

O. GOUBET	Professeur, Université de Picardie Jules Verne, Amiens	Rapporteur
M. GRASSELLI	Professeur, Politecnico di Milano, Italie	Rapporteur
L. CHERFILS	Maître de Conférences Habilité, Université de La Rochelle	Examinateur
F. JAUBERTEAU	Professeur, Université de Nantes	Examinateur
A. MIRANVILLE	Professeur, Université de Poitiers	Directeur
M. PIERRE	Maître de Conférences Habilité, Université de Poitiers	Examinateur

Remerciements

Quelques fois on ne trouve pas les mots pour exprimer ce qu'on ressent, et lorsqu'on les trouve, on a l'impression que ceux-ci ne sont pas à la hauteur. J'espère pouvoir transmettre dans ces quelques mots ma grande reconnaissance à mon pays (La Syrie) de m'avoir offert cette opportunité de continuer mes études supérieures en France sans qui je n'aurais jamais pu.

Mes remerciements s'adressent en premier lieu à M. Alain Miranville, mon directeur de thèse, qui m'a initiée à la recherche dans le stage du master et pendant la durée de thèse. Ses remarques, ses directives ainsi que sa pédagogie et sa gentillesse m'ont toujours motivée et aidée à surmonter les multiples difficultés.

Ma gratitude à M. Olivier Goubet et M. Maurizio Grasselli pour avoir eu l'extrême gentillesse d'avoir consacré leur temps précieux pour être rapporteur de cette thèse.

Je tiens aussi à remercier chaleureusement, Mme. Laurence Cherfils, M. François Jauberteau et M. Morgan Pierre de m'avoir honorée de faire partie de mon jury.

Mes années en tant que doctorante ont été les plus belles années de mes études et ceci, grâce à plusieurs personnes. Tout d'abord, on ne peut pas s'empêcher de signaler l'accueil et le soutien trouvés à l'arrivée au sein du laboratoire des Mathématiques et Applications à Poitiers, qui le rend distingué et vivant. Je remercie le personnel ITA/IATOSS du laboratoire : Brigitte Brault, Jocelyne Attab, Nathalie Marlet, Nathalie Mongin et Benoit Metrot.

Je ne peux pas oublier mes collègues de bureau et les doctorants au laboratoire qui ont assuré une ambiance de travail agréable et avec qui nous avons passé de bons moments et de fructueuses discussions.

J'ai partagé de grands moments d'amitié avec Haydi, Houssam, Guilnard, Manal, Joulie, Amira, Malaz, Ghadir, Nour, Madyan, Cherine... La liste serait trop longue...

Mon mari, ma fille et mes parents je vous aime.

Table des matières

Table des matières . . . iii

Introduction **1**

1 Problème de Navier-Stokes autonome **5**
1.1 Position du problème . . . 5
1.1.1 Espaces fonctionels . . . 6
1.1.2 Formulation variationnelle . . . 7
1.2 Théorème d'existence d'une solution . . . 9
1.2.1 Démonstration de l'unicité . . . 10
1.2.2 Démonstration de l'existence . . . 11
1.2.3 Estimations a priori . . . 12
1.2.4 Passage à la limite . . . 17
1.3 Théorème d'existence d'attracteur global . . . 19
1.3.1 Borné absorbant dans H . . . 20
1.3.2 Borné absorbant dans V . . . 22
1.4 Un attracteur exponentiel . . . 25
1.4.1 Théorème d'existence d'attracteur exponentiel . . . 29

2 Problème de Navier-Stokes non autonome **37**
2.1 Un attracteur exponentiel . . . 37
2.1.1 Borné absorbant . . . 38
2.1.2 Construction d'attracteurs exponentiels . . . 38
2.2 L'attracteur uniforme . . . 47
2.2.1 Définitions . . . 47
2.2.2 Estimations . . . 49
2.2.3 Théorème d'existence d'un attracteur . . . 54
2.3 L'attracteur rétrograde . . . 56
2.3.1 Orientation . . . 56
2.3.2 Théorème d'existence d'attracteur rétrograde . . . 57

3 Problème de Cahn-Hilliard autonome **65**
3.1 Position du problème . . . 65
3.2 Les espaces fonctionnels . . . 66

3.3 Théorème d'existence et d'unicité . . . 67
3.3.1 La formulation variationnelle . . . 67
3.3.2 La fonction de Lyapunov . . . 68
3.4 L'attracteur global . . . 70
3.4.1 Borné absorbant . . . 70
3.5 Preuve du Théorème 3.2 . . . 76
3.5.1 Estimations de u . . . 76
3.5.2 Démonstration de l'unicité . . . 79
3.5.3 Démonstration de l'existence . . . 82
3.5.4 Estimations de (u_m) et de $(\frac{du_m}{dt})$ . . . 84
3.5.5 Passage à la limite . . . 90
3.6 Un attracteur exponentiel . . . 91

4 Problème de Cahn-Hilliard non autonome 97
4.1 Position du problème . . . 97
4.2 Estimations a priori . . . 98
4.2.1 Estimation de u . . . 98
4.3 Existence et unicité . . . 99
4.3.1 Estimations de (u_m) et de $(\frac{du_m}{dt})$ . . . 99
4.4 Borné absobant . . . 101
4.4.1 Borné absorbant dans $V_1 \cap H_\eta$ . . . 102
4.5 Un attracteur exponentiel . . . 103
4.5.1 Généralités . . . 103
4.5.2 Estimations a priori . . . 103
4.5.3 Construction d'attracteurs exponentiels . . . 105
4.6 L'attracteur rétrograde . . . 112
4.6.1 Théorème d'existence d'attracteur rétrograde . . . 113
4.6.2 Unicité de l'attracteur . . . 118
4.6.3 La dimension de l'attracteur . . . 119
4.7 L'attracteur uniforme . . . 126
4.7.1 Orientation . . . 126
4.7.2 Estimations . . . 127
4.7.3 Théorème d'existence d'attracteur uniforme . . . 129
4.8 L'attracteur exponentiel rétrograde . . . 131
4.8.1 Préliminaires . . . 132
4.8.2 Théorème d'existence d'attracteur exponentiel rétrograde . . . 132
4.8.3 Quelques estimations a priori : . . . 133

5 Problème de Cahn-Hilliard visqueux 141
5.1 Position du problème . . . 141
5.2 Formulation variationnelle . . . 142
5.3 Théorème d'existence et d'unicité . . . 143
5.4 Fonction de Lyapunov . . . 143

5.5 Démonstration de Théorème 5.1 . . . 144
5.5.1 L'unicité . . . 144
5.5.2 L'existence . . . 145
5.5.3 Estimations . . . 146
5.5.4 Passage à la limite . . . 151
5.6 Attracteur global . . . 153
5.6.1 Borné absorbant . . . 153
5.7 Un attracteur exponentiel . . . 158
5.8 Etude de la limite $\varepsilon \to 0$ . . . 165
5.8.1 Démonstration du Théorème 5.13 . . . 171
5.9 Etude pour des moyennes de paramètres d'ordres différents . . . 173
5.9.1 Estimations a priori . . . 174
5.9.2 Estimations pour la différence entre deux solutions . . . 176
5.9.3 Etude de la limite $\varepsilon \to 0$ . . . 181
5.9.4 Famille robuste d'attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ . . . 182

6 Problème de Cahn-Hilliard visqueux non autonome 185
6.1 Position du problème . . . 185
6.2 Théorème d'existence et d'unicité . . . 186
6.2.1 L'unicité . . . 186
6.2.2 L'existence . . . 187
6.2.3 Estimations a priori . . . 188
6.3 Borné absorbant . . . 189
6.3.1 Borné absorbant dans $B_\eta \cap V$ . . . 190
6.3.2 Borné absorbant dans $B_\eta \cap V_1$ . . . 190
6.4 Un attracteur exponentiel . . . 191
6.4.1 Propriété de régularisation . . . 193
6.4.2 Théorème d'existence d'un attracteur exponentiel . . . 197
6.5 L'attracteur uniforme . . . 201
6.5.1 Orientation . . . 201
6.5.2 Estimations importantes . . . 201
6.5.3 Théorème d'existence d'attracteur uniforme . . . 202
6.6 L'attracteur rétrograde . . . 204
6.6.1 Préliminaires . . . 204
6.6.2 L'existence d'un attracteur rétrograde . . . 205
6.6.3 L'unicité de l'attracteur . . . 209
6.6.4 Dimension de l'attracteur . . . 209
6.7 L'attracteur exponentiel rétrograde . . . 215
6.7.1 Généralités . . . 215
6.7.2 Estimation a priori . . . 216
6.7.3 Théorème d'existence d'attracteur exponentiel rétrograde . . . 220

Conclusion 225

Bibliographie **227**

Introduction

La théorie des attracteurs est très importante pour décrire le comportement (à long terme) des systèmes dynamiques dissipatifs générés par des équations d'évolutions qui modélisent des phénomènes physiques. En outre, il existe plusieurs types d'attracteurs, chacun dépendant du type de problème à étudier.
Un attracteur global est un ensemble compact, invariant pour le semi-groupe qui attire toutes les solutions du système lorsque le temps tend vers ∞. Cet attracteur est minimal parmi les ensembles vérifiant cette définition. Dans la plupart des cas celui-ci est de dimension finie au sens de la dimension fractale ou de Hausdorff, voir [3], [40] et [70].
Par contre, l'attracteur global peut présenter un défaut important, la vitesse d'attraction peut être lente et il est donc sensible aux perturbations. Afin de remédier à cette difficulté la notion d'attracteur exponentiel a été proposée par Eden et al. dans [25] . Celui-ci est un ensemble compact, de dimension fractale finie et attire à vitesse exponentielle les solutions du système. Il contient l'attracteur global et est beaucoup plus robuste face aux perturbations et n'est pas nécessairement unique contrairement à l'attracteur global.
Les attracteurs exponentiels ont été d'abord construits pour plusieurs types d'équations en démontrant la propriété de laminage qui n'est valable que dans des espaces de Hilbert et n'est pas vraie pour les espaces de Banach, voir [2], [24], [25] et [52].
Récement, Efendiev, Miranville et Zelik donnent dans [26] une construction d'attracteurs exponentiels plus générale, pour des espaces de Banach, en vérifiant une propriété de régularisation sur la différence de deux solutions.
Dans le cas non autonome on fait appel à une famille de processuss, où la dépendance du temps initial τ est aussi important que la dépendance du temps final t, et dans ce cas on étudie l'existence d'attracteurs exponentiels, uniforme, pullback et exponentiels pullback pour cette famille (qui remplace le semi-groupe pour le cas autonome).
Afin d'étudier le comportement du système lorsque $t-\tau$ tend vers ∞, la notion d'attracteur uniforme a été introduite. Cet attracteur est un ensemble fermé qui attire uniformément les solutions et est minimal parmi les ensembles fermés vérifiants la propriété d'attraction uniforme. Celui-ci est en général de dimension fractale infinie (pour le cas non autonome), voir [15], [16], [17], [27] et [41].
Un deuxième type d'attracteurs appelé attracteur rétrograde a été proposé. Cet

attracteur est un ensemble compact, invariant par rapport au cocycle et attire les solutions de $-\infty$, voir [8], [9], [13], [20] et [21].
La définition précédente donne l'existence d'une famille d'attracteurs, mais elle ne guarantit pas l'unicité de cette famille. Pour avoir l'unicité une idée a été proposée par Caraballo et Langa dans [8], en vérifiant que la famille est bornée. D'après cette construction, l'attracteur rétrograde est plus général que l'attracteur uniforme, qui exige que tous les termes non autonomes doivent être uniformément bornés (pour l'attracteur rétrograde le terme non autonome doit être borné dans le passé, voir [11], [42] et [44]).
Plus récement, l'attracteur exponentiel rétrograde a été proposé en [29], ensuite généralisé par Langa, Miranville et Real dans [43]. Celui-ci est une famille d'ensembles compacts, bornée dans le passé, positivement invariante et elle vérifie une propriété d'attraction exponentielle. Le fait que la famille est bornée dans le passé guarantit que cette famille est de dimension fractale finie.
D'après cette construction, l'attracteur rétrograde est contenu dans les attracteurs exponentiels rétrogrades.

Dans ce travail nous étudions les attracteurs, définis précédement, pour trois modèles de systèmes dynamiques, dans le cas autonome et non autonome. Ces modèles sont Navier-Stokes, Cahn-Hilliard et Cahn-Hilliard visqueux.
Les équations de Navier-Stokes décrivent le mouvement des fluides. Elles modélisent par exemple l'écoulement de l'eau dans un tuyau,.....
Il existe de nombreuses formes des équations de Navier-Stokes et dans cette thèse nous travaillons avec la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = f(x),$$

où f désigne les forces appliquées sur la fluide par unité du volume. Dans le premier chapitre nous cherchons les attracteurs global et exponentiels pour ce modèle lorsque f ne dépend pas du temps (cas autonome). Ensuite, nous étudions les attracteurs exponentiels, uniforme et rétrograde pour le cas non autonome (f dépend du temps).

Le deuxième modèle est le modèle de Cahn-Hilliard : cette équation modélise le transport d'atomes entre des cellules unités d'un matériau au cours d'un phénomène de séparation de phase. Elle a été introduite par Cahn et Hilliard (cf. [6] et [7]). Nous travaillons avec le modèle suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = 0.$$

Dans le troisième chapitre nous étudions le cas autonome, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution, puis nous cherchons l'attracteur global et les attracteurs exponentiels.
Dans le quatrième chapitre nous étudions le cas non autonome et nous démontrons

l'existence des attracteurs exponentiels, uniforme, rétrograde et exponentiels rétrogrades.

Le troisième modèle (Cahn-Hilliard visqueux) sera présenté en cinquième et sixième chapitre. L'équation de Cahn-Hilliard visqueuse a été proposée dans [61] comme un modèle de séparation de phase dans des mélanges de polymères où les forces de frottement intermoléculaire peuvent être importantes.
Ce modèle contient un effet visqueux qui était négligé dans l'équation de Cahn-Hilliard "classique" (voir [4], [31] et [39]). L'équation de Cahn-Hilliard visqueuse s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2 u - \Delta f(u) = 0,$$

où ε est un paramètre petit et pour $\varepsilon = 0$ nous retrouvons le modèle de Cahn-Hilliard.
Dans le cinquième chapitre nous trouvons l'existence et l'unicité d'une solution, puis nous cherchons l'attracteur global et les attracteurs exponentiels dans le cas autonome. Nous démontrons aussi l'existence d'une famille robuste d'attracteurs exponentiels, en étudiant la limite ε tend vers 0. Ensuite, dans le sixième chapitre, nous cherchons les attracteurs exponentiels, uniforme, rétrograde et exponentiels rétrogrades dans le cas non autonome.

Chapitre 1

Problème de Navier-Stokes autonome

Notre but dans ce chapitre est d'étudier les attracteurs globaux et exponentiels pour le problème de Navier-Stokes dans une région bornée de $\mathbb{R}^2$. Tout d'abord, nous posons le problème avec les conditions aux limites, ensuite nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution. Puis nous démontrons l'existence d'un borné absorbant compact de ce problème ce qui mène à trouver l'attracteur global. Ensuite nous étudions l'existence d'attracteurs exponentiels en démontrant la propriété de laminage.

1.1 Position du problème

Nous considérons un fluide visqueux et incompressible dans une région Ω bornée de $\mathbb{R}^2$, Ω est supposé ouvert, de frontière Γ et Ω situé d'un seul coté de Γ. Les équations de Navier-Stokes régissent l'écoulement d'un fluide qui remplit un cylindre infini de Ω. Nous considérons deux fonctions (les inconnues), $u = (u_1, u_2)$ et p ; u est le vecteur vitesse, $u(x,t)$ est la vitesse d'une particule fluide en x à l'instant t et $p = p(x,t)$ est la pression en x à l'instant t.
Les équations de Navier-Stokes sont

$$\rho\Big(\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} u_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) - \nu \Delta u + \nabla p = f, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0,$$

où $\rho > 0$ est la densité du fluide, et supposée constante, f représente les forces extérieures s'exerçant dans le fluide. En général nous considérons $\rho = 1$, et nous avons les équations

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = f, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} u = 0. \tag{1.3}$$

Nous considérons la condition initiale suivante :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u_0 \text{ donnée.} \tag{1.4}$$

Pour les conditions aux limites, nous avons deux cas :

1. La frontière Γ est compacte et on impose la condition $u = 0$ sur Γ.
2. Le cas de l'espace périodique.

Dans le deuxième cas $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$, u, p et la première dérivée de u sont Ω-périodiques. De plus, nous considérons dans ce cas que la moyenne de la solution est nulle ;

$$\int_\Omega u dx = 0.$$

Pour les deux cas, nous prenons les espaces fonctionels suivants.

1.1.1 Espaces fonctionels

Nous définissons les espaces sur lesquels nous allons travailler pour résoudre le problème de Navier-Stokes et pour trouver les attracteurs.
Pour le premier cas, nous considérons un espace de Hilbert H tel que (voir ici par exemple [45], [69] et [70])

$$H = \big\{u \in L^2(\Omega)^2,\ \text{div } u = 0,\ u \cdot \nu = 0 \ \text{ sur } \Gamma\big\}.$$

Et pour le cas de l'espace périodique

$$H = \big\{u \in \dot{L}^2(\Omega)^2,\ \text{div } u = 0,\ u_i|_{\Gamma_i} = -u_i|_{\Gamma_{i+n}},\ i = 1, 2\big\},$$

où $\dot{L}^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions u de $L^2(\Omega)$ tel que $\int_\Omega u dx = 0$.
D'après le théorème de trace (voir [69]) nous trouvons que la trace de $u \cdot \nu$ sur Γ existe et appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ si $u \in L^2(\Omega)^2$ et div $u \in L^2(\Omega)$.
Nous munissons H du produit scalaire $L^2(\Omega)^2$ et de la norme associée que nous notons $(\cdot, \cdot)$, $|\cdot|$. Ensuite, nous considérons l'espace V où

$$V = \big\{u \in H_0^1(\Omega)^2, \ \ \text{div } u = 0\big\} \quad \text{pour le premier cas,}$$

et

$$V = \big\{u \in \dot{H}^1_{per}(\Omega)^2, \ \ \text{div } u = 0\big\} \quad \text{pour le deuxième cas,}$$

où l'espace $\dot{H}^1_{per}(\Omega)$ est l'espace des fonctions u de $L^2(\Omega)$ tel que,

$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} u_k \exp(2i\pi k.x),$$

et

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x) dx = 0.$$

Pour les deux cas V est muni du produit scalaire et de la norme suivants :

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{2} (\frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial v_i}{\partial x_j}),$$

$$\|u\| = \{((u,u))\}^{\frac{1}{2}}.$$

Nous définissons l'opérateur A dans H associé avec H, V et avec le produit scalaire $((u,v))$ par :

$$(Au, v) = ((u,v)), \quad \forall u, v \in V.$$

Le domaine de A dans H est donné par

$$D(A) = \{u \in H, \quad \Delta u \in H\} = H^2(\Omega) \cap V,$$

et $D(A) = H^2_{per}(\Omega)^2 \cap V$ pour le deuxième cas. L'opérateur A est auto-adjoint. Nous considérons

$$\begin{array}{ccc} H & \rightarrow & D(A) \\ f & \mapsto & u \end{array}$$

et nous notons par A l'inverse de cette application, de $D(A)$ dans H. Nous désignons par $|Au|$ la norme dans $D(A)$, où cette norme est équivalente à la norme usuelle de $H^2(\Omega)^2$. Soit V' le dual de V. D'après le théorème de Riesz (voir [5] et [70]) nous pouvons identifier H à son dual et nous obtenons $D(A) \subset V \subset H \subset V'$ où les injections sont continues et denses et puisque l'injection $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ est compacte donc $V \subset H$ est compacte. Nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes (1.2).

1.1.2 Formulation variationnelle

Pour trouver la formulation variationnelle nous multiplions l'équation (1.2) par une fonction test $v \in V$ et nous intégrons sur Ω

$$\int_\Omega v\frac{du}{dt}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} v_i dx - \nu \int_\Omega v\Delta u dx + \int_\Omega v\nabla p dx = \int_\Omega f v dx.$$

Nous utilisons la formule de Green

$$\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma,$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0.$$

Ici nous avons utilisé les conditions aux limites.
D'après la formule de Stokes

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx = -\int_\Omega p \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma \sum_{i=1}^n p v_i d\sigma = 0,$$

car $v \in V$, donc div $v = 0$ et $v_i|_\Gamma = 0$.

$$\int_\Omega v \frac{du}{dt} dx = \frac{d}{dt} \int_\Omega uv dx, \quad v \text{ ne dépend pas de } \ t.$$

On obtient l'équation :

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v) \quad \forall v \in V,$$

où

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx.$$

La forme b est trilinéaire et continue sur $H^1(\Omega)^2$ et en particulier dans V.
Nous obtenons la continuité de $b(.,.,.)$ grâce au lemme suivant.

Lemme 1.1. *La forme $b(.,.,.)$ est bien définie et elle est trilinéaire, continue dans $H^{m_1}(\Omega) \times H^{m_2+1}(\Omega) \times H^{m_3}(\Omega)$ tel que $m_i \geqslant 0$ et*

$$m_1 + m_2 + m_3 \geqslant 1 \quad si \quad m_i \neq 1, i = 1,2,3, \tag{1.5}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 > 1 \quad si \quad m_i = 1 \ \forall i.$$

Démonstration.
Si $m_i < 1$ pour $i = 1,2,3$, nous avons par l'injection de Sobolev (si $\frac{1}{2} - \frac{m}{2} > 0$ donc $H^m(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{m}{2}$)

$$H^{m_i}(\Omega) \subset L^{q_i}(\Omega) \ \text{ tel que } \ \frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} - \frac{m_i}{2}. \tag{1.6}$$

Par (1.5) nous avons

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} \leqslant 1.$$

Nous appliquons l'inégalité de Hölder, ce qui conduit à

$$|b(u,v,w)| \leqslant \sum_{i,j=1}^n |u_i|_{L^{q_1}(\Omega)} |\frac{\partial v_j}{\partial x_i}|_{L^{q_2}(\Omega)} |w_j|_{L^{q_3}(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Par (1.6)

$$|b(u,v,w)| \leqslant c_1 |u|_{m_1} |v|_{m_2+1} |w|_{m_3}. \tag{1.8}$$

Nous avons donc la continuité.
Supposons que nous avons un (ou plus) de m_i étant plus grand que 1, nous faisons exactement comme auparavant, où le correspondant q_i se remplace par ∞ et l'autre q_i est égale à 2, nous obtenons donc le même résultat.
Pour quelques m_i égaux à 1, nous les remplaçons par $m_i' < m_i$, où $m_i - m_i'$ sont assez petits donc les inégalités (1.7) et (1.8) sont toujours vraies. ■

En particulier, b est une forme trilinéaire continue dans $V \times V \times V$. De plus, $|Au|$ est une norme équivalente à la norme usuellle de $\dot{H}_p^2(\Omega)^2$ (ou de $H^2(\Omega)^2$), nous avons

$$c\|u\|_{H^2} \leqslant |Au| \leqslant c'\|u\|_{H^2}. \tag{1.9}$$

Nous avons aussi

$$\Big|\int_\Omega u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx\Big| \leqslant \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} \Big|\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big| |w_j|,$$

où

$$u_i \in L^\infty(\Omega), \quad \frac{\partial v_j}{\partial x_i},\ w_j \in L^2(\Omega).$$

Nous avons les inégalités suivantes (voir [65] et [70])

$$|b(u,v,w)| \leqslant c|u|^{\frac{1}{2}}|Au|^{\frac{1}{2}}\|v\||w|, \quad \forall u \in D(A), v \in V, w \in H. \tag{1.10}$$

$$|b(u,v,w)| \leqslant c|u|\|v\||w|^{\frac{1}{2}}|Aw|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in H, v \in V, w \in D(A). \tag{1.11}$$

$$|b(u,v,w)| \leqslant c|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\||w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}},\ \forall u,v,w \in V. \tag{1.12}$$

$$|b(u,v,w)| \leqslant c|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}|w|, \quad u \in V, v \in D(A), w \in H. \tag{1.13}$$

Nous avons aussi

$$b(u,v,w) = -b(u,w,v), \quad \forall u,v,w \in V,$$

et si $w = v$ alors $b(u,v,v) = 0, \quad \forall u,v \in V.$
Pour $u,v,w \in V$ nous définissons l'opérateur B par

$$< B(u,v), w >= b(u,v,w), \quad B(u,v) \in V' \text{ et } \ Bu \in V'.$$

Puisque b est une forme trilinéaire continue dans V alors B est un opérateur bilinéaire continu de $V \times V$ dans V'.

1.2 Théorème d'existence d'une solution

Nous nous intéressons ici à la formulation faible du problème (1.2) et (1.4), i.e.,

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu((u,v)) + b(u,u,v) = (f,v),\ f \in L^2(0,T,V'), \tag{1.14}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.15}$$

Théorème 1.2. *([47], [69])*
Soient u_0 donnée dans H, $f \in L^2(0,T;V')$ et $T > 0$. Alors il existe une solution unique u du problème (1.14) et (1.15) telle que

$$u \in L^2(0,T;V) \cap \mathbb{C}([0,T];H), \quad \text{pour tout } T > 0. \tag{1.16}$$

De plus, $u_0 \mapsto u(t)$ est une application continue de H dans $L^2(0,T;V)$.
Enfin, si $u_0 \in V$ alors

$$u \in \mathbb{C}([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(A)), \quad \forall T > 0. \tag{1.17}$$

Avant de commencer la démonstration de ce théorème, nous notons que B est un opérateur bilinéaire continu de $V \times V$ dans V' et si $u \in L^2(0,T,V)$ alors la fonction $Bu: \ t \mapsto Bu(t)$ appartient (au moins) à $L^1(0,T,V')$.
Les fonctions

$$t \mapsto < f(t), v >_{V',V}, \quad t \mapsto \frac{d}{dt}(u(t), v)$$

ont un sens dans $D'(0,T)$. Donc l'équation (1.14) a un sens dans $D'(0,T)$. Nous avons

$$(u(t), v) =< u(t), v >_{V',V}, \quad \text{car} \quad u(t) \in V \subset H,$$
$$((u(t), v)) =< Au(t), v >_{V',V},$$
$$b(u(t), u(t), v) =< Bu(t), v >_{V',V} .$$

Par (1.14)

$$\frac{d}{dt} < u(t), v >_{V',V} =< f(t) - \nu Au(t) - Bu(t), v >_{V',V} \quad \text{dans } D'(0,T).$$

Donc le problème (1.14), (1.15) est équivalent à

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + Bu = f \tag{1.18}$$

$$u(0) = u_0. \tag{1.19}$$

1.2.1 Démonstration de l'unicité

Soient u_1, u_2 deux solutions de (1.14), (1.15). Nous posons $u := u_1 - u_2$. Alors, u vérifie le problème suivant :

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2) = 0, \tag{1.20}$$

$$u(0) = u_1(0) - u_2(0) = 0.$$

Posons $\bar{u} := \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$. Nous allons démontrer dans la suite la relation suivante :

$$B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2) = B(\bar{u}, u) + B(u, \bar{u}). \tag{1.21}$$

Donc u vérifie l'équation suivante :

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B(\bar{u}, u) + B(u, \bar{u}) = 0.$$

Multiplions par u, notons que $(B(\bar{u}, u), u) = 0$, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 &\leqslant c_1|u|\ \|u\|\ \|\bar{u}\| \\
&\leqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \frac{c_1^2}{2\nu}|u|^2\|\bar{u}\|^2.
\end{aligned}$$

Grâce au lemme de Gronwall nous obtenons

$$|u(t)|^2 \leqslant 0 \ \Rightarrow \ u = 0 \ \Leftrightarrow u_1 = u_2\ .$$

1.2.2 Démonstration de l'existence

Nous allons utiliser la méthode de Faedo-Galerkin (voir [45] par exemple). Puisque V est séparable et l'injection $V \hookrightarrow H$ est continue et dense donc H est séparable. nous avons alors une famille $(w_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ dénombrable et dense (nous pouvons supposer que cette famille est la famille des vecteurs propres de l'opérateur A).
Nous posons $V_m = \text{Vect}(w_1, ..., w_m)$.
Nous prenons

$$u_{0m} \in V_m, \quad u_{0m} = P_m u_0,$$

tel que u_{0m} est la projection orthogonale de u_0 sur V_m, $u_{0m} \to u_0$ dans H, et $|u_{0m}| \leqslant |u_0|$. Nous prenons le problème approché :

Trouver $u_m \in L^2(0, T; V_m)$ tel que, pour tout $v \in V_m$,

$$\frac{d}{dt}(u_m(t), v) + \nu((u_m(t), v)) + b(u_m(t), u_m(t), v) =< f(t), v >_{V',V}, \text{ dans } D'(0, T). \tag{1.22}$$

$$u_m(0) = u_{0m}. \tag{1.23}$$

Ce problème est équivalent à

$$\frac{d}{dt}(u_m(t), w_i)+\nu((u_m(t), w_i))+b(u_m(t), u_m(t), w_i) =< f(t), w_i >_{V',V}, \text{ dans } D'(0, T),$$

$i = 1, \ldots, m$.
Donc, trouver une solution du problème approché (1.22), (1.23), i.e., $u_m(t)$, revient à trouver des $\alpha_{im}(t)$, $i = 1, \ldots, m$, où

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t)w_i.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
(u_m(t), w_j) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t)(w_i, w_j), \\
((u_m(t), w_j)) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t)((w_i, w_j)), \\
< Bu_m(t), w_j >_{V',V} &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t) < Bw_i, w_j >_{V',V} .
\end{aligned}$$

Le problème (1.22), (1.23) équivaut à

$$\frac{du_m}{dt} + \nu A u_m + P_m B(u_m) = P_m f. \tag{1.24}$$

L'existence et l'unicité de (u_m) dans un certain intervalle $[0, T^*[$ est standard. Par la suite, nous allons trouver quelques estimations a priori pour (u_m).

1.2.3 Estimations a priori

Nous avons

$$|u_m(t)|^2 = |\sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}(t) w_i|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{im}(t)\alpha_{jm}(t)(w_i, w_j),$$

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{im}(t)\frac{d\alpha_{jm}(t)}{dt}(w_i, w_j).$$

Nous prenons $v = w_j$ dans le problème (1.22), (1.23)

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d\alpha_{im}(t)}{dt}(w_i, w_j) + \nu((u_m(t), w_j)) + < Bu_m(t), w_j >_{V',V} = < f(t), w_j >_{V',V} .$$

Multiplions par α_{jm} et sommons pour j allant de 1 à m

$$\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{jm}\frac{d\alpha_{im}}{dt}(w_i, w_j) + \nu\sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}((u_m(t), w_j)) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} < Bu_m(t), w_j >_{V',V}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm} < f(t), w_j >_{V',V} .$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 + \nu\|u_m(t)\|^2 + < Bu_m(t), u_m(t) >_{V',V} = < f(t), u_m(t) >_{V',V} . \tag{1.25}$$

Or,

$$< Bu_m(t), u_m(t) >_{V',V} = 0.$$

Nous intégrons (1.25) entre 0 et $t \in [0, T^*[$

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 - \frac{1}{2}|u_{0m}|^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds = \int_0^t < f(s), u_m(s) >_{V',V} ds,$$

et par conséquent

$$|u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leqslant |u_0|^2 + 2\int_0^t < f(s), u_m(s) >_{V',V} ds. \tag{1.26}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} 2\int_0^t < f(s), u_m(s) >_{V',V} ds &\leqslant 2\int_0^t \|f(s)\|_{V'}\|u_m(s)\|_V ds \\ &\leqslant \frac{1}{\nu}\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 ds + \nu\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Par (1.26)

$$|u_m(t)|^2 + \nu \int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leqslant |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^{T^*} \|f(s)\|_{V'}^2 ds.$$

En particulier,

$$\sup_{t\in[0,T^*[} |u_m(t)|^2 \leqslant c_0 = |u_0|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^{T^*} \|f(s)\|_{V'}^2 ds, \tag{1.27}$$

et

$$\int_0^t \|u_m(s)\|^2 ds \leqslant \frac{c_0}{\nu}, \quad \forall t \in [0, T^*[. \tag{1.28}$$

Nous démontrons maintenant l'existence d'une solution de (1.14), (1.15). Par (1.27) et (1.28), nous trouvons que (u_m) est bornée indépendamment de m dans $L^2(0,T;V)$ et $L^\infty(0,T;H)$. V est réflexif donc $L^2(0,T;V)$ est réflexif.
Donc quitte à prendre une suite extraite de (u_m), que nous notons aussi (u_m), telle que $u_m \to u_1$ dans $L^2(0,T;V)$ faible, $u_1 \in L^2(0,T;V)$. Donc

$$\forall f \in L^2(0,T;V') \Rightarrow < f, u_m - u_1 >_{L^2(0,T;V'),L^2(0,T;V)} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow \forall f \in L^2(0,T;V') \Rightarrow \int_0^T < f, u_m - u_1 >_{V',V} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0.$$

Cette suite extraite (u_m) est bornée dans $L^\infty(0,T;H)$, H est séparable donc $L^1(0,T;H)$ est séparable. Donc quitte à considérer à nouveau une suite extraite (u_m) et

$$\exists u_2 \in L^\infty(0,T;H), \quad u_m \overset{*}{\rightarrow} u_2 \ \text{ dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible } * .$$

Par ailleurs, $u_1 = u_2$ car

$$u_1 \in L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;H), \quad V \subset H,$$

$$u_2 \in L^\infty(0,T;H) \subset L^2(0,T;H).$$

Si $f \in L^2(0,T;H)$ donc $f \in L^2(0,T;V')$, $H \subset V'$

$$\int_0^T < f, u_m - u_1 >_{V',V} \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \int_0^T (f, u_m - u_1)dt \to 0, \forall f \in L^2(0,T;H),$$

et si $f \in L^2(0,T;H)$ donc $f \in L^1(0,T;H)$, et

$$\int_0^T (f, u_m - u_2)dt \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0, \ \forall f \in L^2(0,T;H).$$

Enfin,

$$\int_0^T (f, u_1 - u_2)dt = 0, \ \forall f \in L^2(0,T;H).$$

Puisque $u_1 - u_2 \in L^2(0,T;H)$ donc $u_1 = u_2$ dans $L^2(0,T;H)$.
Nous notons $u = u_1 = u_2$. Alors $u_m \to u$ dans $L^2(0,T;V)$ faible et dans $L^\infty(0,T;H)$ faible $*$.

Nous montrons maintenant la continuité de $(u_0, f) \mapsto u(t)$. Soient u_0^1, f_1 correspondants à u_1 solution de (1.18), et u_0^2, f_2 correspondants à u_2 solution de (1.18). Nous avons

$$\begin{aligned}&\frac{du_1}{dt} + \nu A u_1 + B u_1 = f_1,\\ &u_1(0) = u_0^1,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{du_2}{dt} + \nu A u_2 + B u_2 = f_2,\\ &u_2(0) = u_0^2.\end{aligned}$$

Nous posons $u := u_1 - u_2, \ \ u_0 := u_0^1 - u_0^2, \ f := f_1 - f_2$. la différence u vérifie le problème suivant :

$$\frac{du}{dt} + \nu A u + B u_1 - B u_2 = f,$$

$$u(0) = u_0.$$

Nous multiplions l'équation précédente par u, nous posons $\bar{u} = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ et nous procédons comme dans la démonstration de l'unicité. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + 2\nu\|u(t)\|^2 &\leqslant 2\big|\big(B(u,\bar{u}),u\big)\big| + 2\big| < f,u >_{V',V} \big| \\
&\leqslant 2c_1|u|\ \|u\|\ \|\bar{u}\| + 2\|f\|_{V'}\|u\| \\
&\leqslant \nu\|u\|^2 + \frac{c_1^2}{\nu}|u|^2\|\bar{u}\|^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|^2_{V'}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 &\leqslant \frac{c_1^2}{\nu}|u|^2\|\bar{u}\|^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|^2_{V'} \\
&\leqslant h(t)^2|u|^2 + \frac{1}{\nu}\|f(t)\|^2_{V'},
\end{aligned}
$$

où $h(t)^2 = \frac{c_1^2}{\nu}\|\bar{u}\|^2$, $h(t) \in L^2(0,T)$.
Nous avons $t \mapsto |u(t)|^2,\ \frac{d}{dt}|u(t)|^2,\ \|u(t)\|^2,\ \|f(t)\|^2_{V'} \in L^1(0,T)$, nous pouvons donc intégrer la dernière inégalité entre 0 et T

$$|u(T)|^2 + \nu\int_0^T \|u(t)\|_V^2 dt \leqslant c(t)\big(|u(0)|^2 + \frac{1}{\nu}\int_0^T \|f(t)\|^2_{V'}dt\big),$$

où $c(t) \in L^1(0,T)$. Nous avons, en particulier,

$$\|u(t)\|^2_{L^2(0,T,V)} \leqslant c(t)\big(\frac{1}{\nu^2}\|f(t)\|^2_{L^2(0,T,V')} + \frac{1}{\nu}|u_0|^2\big).$$

Cela donne la continuité entre H et $L^2(0,T;V)$.
Finalement, pour montrer que $u \in \mathbb{C}([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(A))$ nous trouvons des estimations a priori. Nous avons

$$(\frac{du_m}{dt}, w_j) + \nu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) = (f, w_j),$$

nous la multiplions par $\lambda_j\alpha_{jm}(t)$ et nous sommons pour j allant de 1 à m

$$
\begin{aligned}
(\frac{du_m}{dt}, \sum_{j=1}^m \lambda_j\alpha_{jm}(t)w_j) + \nu a(u_m, \sum_{j=1}^m \lambda_j\alpha_{jm}(t)w_j) + b(u_m, u_m, \sum_{j=1}^m \lambda_j\alpha_{jm}(t)w_j) \\
= (f, \sum_{j=1}^m \lambda_j\alpha_{jm}(t)w_j). \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Nous avons $Aw_j = \lambda_i w_j,\ \forall j$. Donc

$$a(u_m, \sum_{j=1}^m \lambda_j\alpha_{jm}(t)w_j) = a(u_m, Au_m) = |Au_m|^2,$$

$$b(u_m, u_m, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{jm}(t) w_j) = (Bu_m, Au_m),$$

$$(f, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_{jm}(t) w_j) = (f, Au_m).$$

Nous déduisons par (1.29)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \nu|Au_m|^2 + (Bu_m, Au_m) = (f, Au_m). \tag{1.30}$$

$$(f, Au_m) \leqslant |f||Au_m| \leqslant \frac{\nu}{4}|Au_m|^2 + \frac{1}{\nu}|f|^2$$

$$|(Bu_m, Au_m)| \leqslant c_1|u_m|^2\|u_m\|\|Au_m\|^{\frac{3}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité de Young $\left(ab \leqslant \frac{\varepsilon}{p}a^p + \frac{1}{p'\varepsilon^{\frac{p'}{p}}}b^{p'} \right.$ $,\forall a, b, \varepsilon > 0,\ \forall p\ ,\ 1 < p < +\infty, p' = \left. \frac{p}{p-1} \right)$
(où, pour notre relation, $p = \frac{4}{3},\ \frac{\varepsilon}{p} = \frac{\nu}{4},\ \varepsilon = \frac{\nu}{3}$) nous trouvons

$$|(Bu_m, Au_m)| \leqslant \frac{\nu}{4}|Au_m|^2 + \frac{c_1'}{\nu^3}|u_m|^2\|u_m\|^4.$$

Par (1.30)

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \nu|Au_m|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|f|^2 + \frac{2c_1'}{\nu^3}|u_m|^2\|u_m\|^4.$$

D'après cette relation nous avons

$$\|u_m\| \leqslant c_0 \ \text{ et } \ \int_0^T |Au_m|^2 dt \leqslant c_0',$$

i.e., (u_m) est bornée dans $L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$, comme auparavant, il existe $u \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$, et nous avons $u \in \mathbb{C}([0, T]; D(A))$.
Par définition de la forme $b(.,.,.)$ et de l'opérateur B, et par (1.12), nous avons

$$\|B(v)\| \leqslant c_1|v|\|v\|,\ \forall v \in V.$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 1.3. *([69])*
Soit $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ et $n = 2$. Alors $u \in L^4(0, T; L^4(\Omega)^2)$, et nous avons

$$\|u_i(t)\|_{L^4(\Omega)} \leqslant c(\Omega)\|u_i(t)\|^{\frac{1}{2}}_{H_0^1(\Omega)}\|u_i(t)\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)} \quad \textit{tel que } u = \{u_i\}.$$

Lemme 1.4. *([69])*
Si $n = 2$ et $u \in L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)$. Alors Bu appartient à $L^2(0,T;V')$ et nous avons

$$\|B(u)\|_{L^2(0,T;V')} \leqslant 2^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^\infty(\Omega)(0,T;H)} \|u\|_{L^2(0,T;V)}.$$

D'après ces deux lemmes nous trouvons que $B(u) \in L^2(0,T;V')$. De plus, $B(u_m)$ et $P_m B(u_m)$ sont bornées dans $L^2(0,T;V')$, et nous avons

$$\frac{du_m}{dt} \text{ est borné dans } L^2(0,T;V'),$$

$$\frac{du_m}{dt} \to \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2(0,T;V') \text{ faible.}$$

D'après le théorème de compacité (voir [69] et [70]) nous obtenons

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ fort.}$$

Ces relations sont suffisantes pour passer (1.22) et (1.23) à la limite.

1.2.4 Passage à la limite

Nous avons, pour (u_m) une suite extraite

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ faible,} \tag{1.31}$$

$$u_m \to u \text{ dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible}*, \tag{1.32}$$

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ fort et presque par tout dans } \Omega, \tag{1.33}$$

et

$$u'_m \to u' \text{ dans } L^2(0,T;V') \text{ faible.} \tag{1.34}$$

Soit $\psi \in \mathbb{C}^1([0,T])$. Nous multiplions l'équation

$$(\frac{du_m}{dt}, w_j) + \nu a(u_m, w_j) + b(u_m, u_m, w_j) = (f, w_j)$$

par ψ, et nous intégrons entre 0 et T

$$-\int_0^T (u_m(t), w_j)\psi'(t)dt + \nu \int_0^T ((u_m(t), w_j))\psi(t)dt$$

$$+ \int_0^T < Bu_m(t), w_j >_{V',V} \psi(t)dt = \int_0^T < f(t), w_j >_{V',V} \psi(t)dt - [\psi(t)(u_m(t), w_j)]_0^T.$$

Nous prenons $\psi \in \mathbb{C}^1([0,T])$, où $\psi(T) = 0$

$$-\int_0^T (u_m(t), \psi'(t)w_j)dt + \nu \int_0^T ((u_m(t), w_j\psi(t)))dt + \int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w_j\psi(t))dt$$

$$= (u_{0m}, w_j)\psi(0) + \int_0^T < f(t), w_j\psi(t) >_{V',V} dt.$$

Pour passer la dernière équation à la limite nous avons

$$\int_0^T (u_m(t), w_j)\psi'(t)dt = \int_0^T (u_m(t), \psi'(t)w_j)dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T (u(t), w_j)\psi'(t)dt,$$

$$(u_{0m}, w_j) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} (u_0, w_j) \text{ car } u_{0m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ dans } H,$$

et

$$\int_0^T ((u_m(t), w_j))\psi(t)dt \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T ((u(t), w_j))\psi(t)dt,$$

car $u_m \to u$ dans $L^2(0, T; V)$ faible. Pour montrer

$$\int_0^T b(u_m(t), u_m(t), w(t))dt \to \int_0^T b(u(t), u(t), w(t))dt,$$

nous écrivons

$$\int_0^T b(u_m, u_m, w)dt = -\int_0^T b(u_m, w, u_m)dt =$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T \int_\Omega (u_m)_i(D_iw_j)(u_m)_j dxdt,$$

et cela converge vers

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^T \int_\Omega u_i(D_iw_j)u_j dxdt = -\int_0^T b(u, w, u)dt = \int_0^T b(u, u, w)dt.$$

Nous avons donc la relation suivante :

$$\begin{aligned} &-\textstyle\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\psi(t)dt + \int_0^T < Bu(t), v >_{V',V} \psi(t)dt = \\ &(u_0, v)\psi(0) + \textstyle\int_0^T < f(t), v >_{V',V} \psi(t)dt \ , \ \forall \psi \in \mathbb{C}^1([0, T]),\ \psi(T) = 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Où v est une combinaison linéaire de w_j. (1.35) pour tout $v \in V$, et $\forall \psi \in D(0, T)$. Nous en déduisons alors

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu((u(t), v)) + < Bu(t), v > = < f(t), v > \text{ dans } D'(0, T),\ \forall v \in V. \tag{1.36}$$

Nous avons donc l'existence d'une solution de (1.14). Il reste à vérifier la condition initiale (1.15). Pour cela nous multiplions (1.36) par $\psi \in \mathbb{C}^1([0, T])$, où $\psi(T) = 0$, puis nous intégrons entre 0 et T

$$-\int_0^T (u(t), v)\psi'(t)dt + \nu \int_0^T ((u(t), v))\psi(t)dt + \int_0^T < Bu(t), v >_{V',V} \psi(t)dt =$$

$$(u(0), v)\psi(0) + \int_0^T < f(t), v >_{V',V} \psi(t)dt.$$

En comparant avec (1.35) nous trouvons qu'il reste

$$(u(0), v)\psi(0) = (u_0, v)\psi(0), \quad \forall \psi \in \mathbb{C}^1([0, T]),\ \psi(T) = 0,\ \forall v \in V.$$

Nous choisissons ψ tel que $\psi(0) = 1$, et cela conduit à

$$(u(0) - u_0, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Puisque V est dense dans H, nous avons donc $(u(0) - u_0, v) = 0,\ \forall v \in H$, mais $u(0) - u_0 \in H$ donc $u(0) = u_0$ dans H.
Nous avons donc trouvé que u est une solution de (1.14) et (1.15).

1.3 Théorème d'existence d'attracteur global

Nous allons ici trouver l'attracteur global du problème de Navier-Stokes autonome. Tout d'abord nous rappelons quelques définitions.
Nous posons

$$S(t) : H \to H$$
$$u_0 \mapsto u(t)$$

tel que $u(t)$ est la solution de (1.14) et (1.15). Par l'existence et l'unicité de la solution, $S(t)$ est bien défini.

Définition 1.5. *Nous disons que $S(t)$ est un semi-groupe sur H s'il vérifie*

1. $$S(0)u_0 = u_0, \quad S(0) = Id \ (\textit{identité}).$$

2. $$S(t) \circ S(s) = S(t + s), \quad \forall s, t \geqslant 0.$$

Les opérateurs $S(t)$ pour le problème Navier-Stokes sont continus de H dans H (et de H dans $D(A)$).

Définition 1.6. *Soit $\beta_0 \subset H$ un ensemble borné. Nous disons que β_0 est un ensemble borné absorbant pour le semi groupe $S(t)$ si, pour tout $B \subset H$ un ensemble borné, il existe $t_0 = t_0(B)$, tels que*

$$S(t)B \subset \beta_0 \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Définition 1.7. *Nous disons que $X \subset H$ est un invariant si et seulement s'il est positivement et négativement invariant, i.e.,*

$$X \text{ est invariant} \iff S(t)X = X, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Définition 1.8. *Nous définissons l'ensemble oméga limite de* u_0 *par la relation*

$$\omega(u_0) = \bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\bigcup_{t\geqslant s} S(t)B}, \quad B \text{ borné.}$$

Définition 1.9. *Nous disons qu'un ensemble* $\mathcal{A} \subset H$ *est un attracteur si*

1. $\mathcal{A}$ *est invariant, i.e.,* $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$, $\forall t \geqslant 0$,
2. $\exists v$ *voisinage ouvert de* $\mathcal{A}$ *tel que* $\mathcal{A} = \omega(v)$.

Lemme 1.10. *Supposons que* $B \subset H$ *et qu'il existe* t_0 *tel que* $\bigcup_{t\geqslant t_0} S(t)B$ *est relativement compact dans* H*. Alors* $\omega(B)$ *est non vide, compact et invariant.*

Définition 1.11. *Nous disons que* $\mathcal{A} \subset H$ *attire* $B \subset H$ *si*

$$\lim_{t\to\infty} \ dist\ (S(t)B, \mathcal{A}) = 0.$$

$$\Longleftrightarrow \ \forall v \text{ voisinage de } \mathcal{A}, \text{ alors } \exists t_0 = t_0(v) \text{ tel que } S(t)B \subset v, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Où, dist est donné par

$$dist\ (B_0, B_1) = \sup_{x\in B_0}\inf_{y\in B_1} d(x,y), \ d \text{ distance sur } H.$$

Théorème 1.12. *Supposons que* $S(t)$ *admet un borné absorbant* $\beta \subset H$ *et que* $S(t)$ *est uniformément compact pour t, i.e.,* $\forall C \subset H$ *borné,* $\exists t_1 = t_1(C)$ *tel que* $\bigcup_{t\geqslant t_1} S(t)C$ *est relativement compact dans* H*.*
Alors $\mathcal{A} = \omega(\beta)$ *est non vide, compact, invariant et attire les bornés de* H*.*
Nous appelons $\mathcal{A}$ *l'attracteur global associé à* $S(t)$*.*

Pour trouver l'attracteur global du problème de Navier-Stokes (appliquer le théorème précédent) nous allons d'abord trouver un borné absorbant dans H, puis un borné absorbant dans V.

1.3.1 Borné absorbant dans H

Nous prenons le produit scalaire de (1.18) par u

$$(\frac{du}{dt}, u) + \nu(Au,u) + (Bu,u) = (f,u).$$

Nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 = (\frac{du}{dt}, u), \ (Au,u) = ((u,u)) = \|u\|^2, \ (Bu,u) = 0.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 = (f,u) \leqslant |f||u|.$$

Nous avons

$$|u| \leqslant \lambda_1^{-\frac{1}{2}} \|u\|, \ \forall u \in V,$$

où λ_1 est la première valeur propre de A.

$$|f||u| \leqslant \lambda_1^{-\frac{1}{2}} |f|\|u\| \leqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|f|^2.$$

Nous avons donc

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|^2, \tag{1.37}$$

et

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\lambda_1|u|^2 \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|^2. \tag{1.38}$$

Nous multiplions (1.38) par $e^{\nu\lambda_1 t}$

$$\frac{d}{dt}\big(|u|^2 e^{\nu\lambda_1 t}\big) \leqslant \frac{|f|^2}{\nu\lambda_1} e^{\nu\lambda_1 t}.$$

Intégrons entre 0 et t

$$e^{\nu\lambda_1 t}|u|^2 \leqslant |u_0|^2 + \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|^2 \int_0^t e^{\nu\lambda_1 s} ds.$$

Ici, f ne dépend pas de t, disons qu'elle appartient à H.
Enfin,

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2(1 - e^{-\nu\lambda_1 t}). \tag{1.39}$$

De cette inégalité nous déduisons

$$\sup_t |u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2}|f|^2,$$

et donc $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H)$. Nous avons aussi

$$\lim_{t\to\infty} \sup |u(t)| \leqslant \rho_0, \ \rho_0 = \frac{|f|}{\nu\lambda_1},$$

et par (1.39)

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \rho_0^2.$$

Soit $\rho_0' > \rho_0$. Alors, l'ensemble

$$\beta_0 = B_H(0, \rho_0') = \{v \in H, \ |v| \leqslant \rho_0'\}$$

est un borné absorbant dans H. Soit $B \subset H$ un borné. Nous allons chercher $t_0 = t_0(B)$ qui satisfait à

$$\forall u_0 \in B \ \text{ alors } |u(t)| \leqslant \rho_0', \ \forall t \geqslant t_0.$$

Puisque B est borné dans H donc $\exists R > 0$ tel que $B \subset B_H(0, R)$. Si $u_0 \in B$ nous obtenons par (1.39)

$$|u(t)|^2 \leqslant R^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \rho_0^2.$$

Nous voulons avoir $|u(t)| \leqslant \rho_0'$. Pour cela il suffit d'avoir

$$R^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \rho_0^2 \leqslant \rho_0'^2 \;\Rightarrow\; R^2 e^{-\nu\lambda_1 t} \leqslant \rho_0'^2 - \rho_0^2$$

$$\rho_0'^2 - \rho_0^2 > 0, \quad \text{car } \rho_0' > \rho_0$$

$$e^{-\nu\lambda_1 t} \leqslant \frac{\rho_0'^2 - \rho_0^2}{R^2} \;\Rightarrow\; -\nu\lambda_1 t \leqslant \log\left(\frac{\rho_0'^2 - \rho_0^2}{R^2}\right) \;\Rightarrow\; t \geqslant \frac{1}{\nu\lambda_1} \log\left(\frac{R^2}{\rho_0'^2 - \rho_0^2}\right).$$

Nous posons

$$t_0 = \frac{1}{\nu\lambda_1} \log\left(\frac{R^2}{\rho_0'^2 - \rho_0^2}\right). \tag{1.40}$$

Nous avons alors pour $t \geqslant t_0$

$$|u(t)|^2 \leqslant \rho_0'^2 \iff u(t) \in \beta_0, \quad \forall u_0 \in B.$$

Cela donne $S(t)B \subset \beta_0$, et donc β_0 est un borné absorbant dans H.
De plus, nous fixons $r > 0$. En intégrant (1.37) entre t et $t + r$, il vient

$$\nu \int_t^{t+r} \|u\|^2 ds \leqslant |u(t)|^2 + \frac{r}{\nu\lambda_1}|f|^2.$$

Supposons que $|u_0| \leqslant R_0$. Nous avons donc $|u(t)| \leqslant \rho_0'$ pour $t \geqslant t_0$ (car $S(t)u_0 \in \beta_0 = B_H(0, \rho_0')$). Nous avons donc, pour $t \geqslant t_0$

$$\int_t^{t+r} \|u\|^2 ds \leqslant \frac{\rho_0'^2}{\nu} + \frac{r}{\nu^2\lambda_1}|f|^2. \tag{1.41}$$

1.3.2 Borné absorbant dans V

Ici nous allons démontrer l'existence d'un borné absorbant dans V. Pour cela nous allons trouver des estimations a priori de la solution. Nous prenons le produit scalaire dans H de (1.18) par Au

$$(Au, u') + \nu|Au|^2 + (Bu, Au) = (f, Au).$$

Nous avons

$$(Au, u') = ((u, u')) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2.$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 + (Bu, Au) = (f, Au).$$

$$(f, Au) \leqslant |f||Au| \leqslant \frac{\nu}{4}|Au|^2 + \frac{1}{\nu}|f|^2.$$

Par (1.10)

$$|(Bu, Au)| \leqslant c_1 |u|^{\frac{1}{2}} \|u\| |Au|^{\frac{3}{2}} \leqslant \frac{\nu}{4}|Au|^2 + \frac{c_1'}{\nu^3}|u|^2\|u\|^4.$$

Nous utilisons l'inégalité de Young, i.e., $ab \leqslant \frac{\varepsilon}{p}a^p + \frac{1}{p'\varepsilon^{\frac{p'}{p}}}b^{p'}, \forall a, b, \varepsilon > 0, \forall p, 1 < p < +\infty, p' = \frac{p}{p-1}$, nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\lambda_1\|u\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|f|^2 + \frac{2c_1'}{\nu^3}|u|^2\|u\|^4. \tag{1.42}$$

Supposons que $u_0 \in V$, mutiplions par $e^{\nu\lambda_1 t}$ et intégrons entre $0, t \leqslant T$

$$\|u\|^2 e^{\nu\lambda_1 t} \leqslant \|u_0\|^2 + \frac{1}{\nu^2\lambda_1}|f|^2(e^{\nu\lambda_1 t} - 1) + \frac{2c_1'}{\nu^3}\int_0^t e^{\nu\lambda_1 t}|u|^2\|u\|^4$$

$$\|u\|^2 \leqslant \|u_0\|^2 + \frac{1}{\nu^2\lambda_1}|f|^2 + \frac{2c_1'}{\nu^3}\|u\|^2_{L^\infty(H)} e^{-\nu\lambda_1 t}\int_0^t e^{\nu\lambda_1 t}\|u\|^4.$$

Nous en déduisons une estimation de u dans $L^\infty(0, T; V)$. Pour trouver une estimation de u dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ nous allons utiliser le lemme de Gronwall uniforme.

Lemme 1.13. *(Lemme de Gronwall uniforme) ([70])*
Soient $g, h, y, y' \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Nous supposons que $y' \leqslant gy + h, \quad \forall t \geqslant t_0$, et que

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leqslant a_1, \ \int_t^{t+r} h(s)ds \leqslant a_2, \ \int_t^{t+r} y(s)ds \leqslant a_3,$$

$t \geqslant t_0$, où t_0, r sont fixés. Alors

$$y(t+s) \leqslant (\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1}, \ \forall t \geqslant t_0.$$

Nous avons donc une estimation uniforme de $y(t)$ pour $t \geqslant t_0 + r$.

Pour appliquer le lemme précédent nous prenons $u_0 \in \beta$ tel que β est borné dans H et $t \geqslant t_0(\beta, \rho_0')$, et supposons que

$$g = \frac{2c_1'}{\nu^3}|u|^2\|u\|^4, \ h = \frac{2}{\nu}|f|^2, \ y = \|u\|^2.$$

Par (1.39) et (1.41), nous avons

$$a_1 = \frac{2c_1'}{\nu^3}\rho_0'^2 a_3,$$

$$a_2 = \frac{2r}{\nu}|f|^2,$$

$$a_3 = \frac{r}{\nu^2\lambda_1}|f|^2 + \frac{\rho_0'^2}{\nu}.$$

Nous trouvons donc

$$\|u(t)\|^2 \leqslant (\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1}, \text{ pour } t \geqslant t_0 + r.$$

(t_0 est donné par (1.40)).
Supposons que $u_0 \in H$ tel que $|u_0| \leqslant R_0$. Soit $t_1(R_0) > 0$ tel que

$$\text{pour } t \geqslant t_1(R_0) \Rightarrow S(t)B_H(0, R_0) \subset \beta_0 = B_H(0, \rho_0'), \text{ avec } \rho_0' > \rho_0.$$

(β_0 : est le borné absorbant dans H, que nous avons déjà trouvé).
Nous avons

$$t \geqslant t_1(R_0) \Rightarrow |u(t)|^2 \leqslant \rho_0'^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall uniforme (pour $t_0^G = t_1(R_0)$ et $r > 0$ fixé) nous obtenons

$$\|u(t)\|^2 \leqslant (\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1} \text{ pour } t \geqslant t_0^G + r. \tag{1.43}$$

C'est-à-dire que, si $u(t) \in V, \forall t \geqslant t_0^G + r$, alors que $u_0 \in H$ et $|u_0| \leqslant R_0$, alors

$$\|u(t)\|^2 \leqslant (\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1} \ \forall t \geqslant t_0^G + r.$$

Et donc, pour $t \geqslant t_0^G + r$, $u(t)$ est dans un borné de V, que nous notons $B_V(0, \sqrt{(\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1}})$.
Donc $S(t)$ transforme, pour $t \geqslant t_0^G + r$, les bornés de H en bornés de V, qui sont relativement compacts dans H, puisque $V \subset H$ injection compacte.
Nous prenons l'ensemble

$$\beta_1 = B_V(0, \rho_1), \quad \rho_1 = \sqrt{(\frac{a_3}{r} + a_2)e^{a_1}}.$$

Par ce qui précède, cet ensemble est borné dans V et relativement compact dans H.
Il est aussi absorbant dans V car, si $B \subset V$ est un borné, donc il est borné dans H ($V \subset H$ continue), et par (1.43) il existe $t_1 = t_1(B)$, tel que

$$\text{pour tout } t \geqslant t_1 \Rightarrow S(t)B \subset \beta_1.$$

Ce qui donne que β_1 est un borné absorbant pour $S(t)$ dans V, qui est relativement compact dans H.
D'après ce qui précède et par le Théorème 1.12 nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.14. *Le semi-groupe associé au problème de Navier-Stokes admet un attracteur global $\mathcal{A}$ qui contient tous les ensembles ω-limites correspondants à toutes les données initiales.*

Remarque 1.15. *L'attracteur global, s'il existe, est unique, car supposons que $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont deux attracteurs globaux pour $S(t)$. $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ sont bornés (car ils sont compacts). $\mathcal{A}'$ est un attracteur global, donc $\mathcal{A}'$ attire $\mathcal{A}$, i.e.,*

$$\lim_{t\to\infty} dist\ (S(t)\mathcal{A}, \mathcal{A}') = 0.$$

Par l'invariance de l'attracteur nous avons

$$dist(\mathcal{A}, \mathcal{A}') = 0 \Rightarrow \mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}' = \mathcal{A}'.$$

De même, $\mathcal{A}$ attire $\mathcal{A}'$, et nous obtenons $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Et donc $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$.

1.4 Un attracteur exponentiel

Dans cette section nous allons démontrer l'existence d'attracteurs exponentiels du problème de Navier-Stokes autonome, i.e., $f = f(x)$ ne dépend pas de t. Le problème de Navier-Stokes autonome s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u.\nabla u) + \nabla p = f(x),$$

$$\mathrm{div} u = 0,$$

$$u|_{t=0} = u_0.$$

Dans cette section on se place dans le cas périodique (conditions aux limites périodiques). Nous allons utiliser les mêmes espaces H, V et $D(A)$ trouvés dans la première section pour ce cas. Nous avons la formulation variationnelle

$$u_t + \nu Au + B(u,u) = f,$$

$$u(0) = u_0.$$

L'opérateur A, défini comme auparavant, satisfait $Aw_n = \lambda_n w_n$. Et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}) = \omega_0$, pour le cas de l'espace périodique. Nous avons donc (voir [25])

$$\lambda_n \sim \omega_0 \lambda_1 n.$$

La forme bilinéaire $B(.,.)$ (ou la forme trilinéaire $b(.,.,.)$) satisfait (1.10), (1.11), (1.12), (1.13), et nous avons, dans le cas périodique (voir [25]) :

$$(B(u,v),v) = 0, \quad u,v \in V,$$

$$(B(u,u),Au) = 0, \quad u \in D(A),$$

$$(B(u,u),A^2u) = (B(Au,u),Au), \quad u \in D(A^2). \tag{1.44}$$

Nous avons aussi trouvé

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|^2.$$

Et le borné absorbant dans H et dans V

$$B_0 := \{u \in V,\ |u| \leqslant 2\rho_0,\ \text{ et } \quad \|u\| \leqslant 2\rho_1\},$$

où

$$\rho_0 = \frac{2f}{\nu\lambda_1}, \quad \text{et} \quad \rho_1 = \frac{2f}{\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous posons $G = \frac{f}{\nu^2\lambda_1}$. Donc

$$B_0 = \{u \in V :|\ u\ |\leqslant 4G\nu, \quad \text{et} \quad \|u\| \leqslant 4G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}}\}.$$

Lemme 1.16. *Nous supposons que $f \in V$ et posons $S_f = \frac{\|f\|}{\sqrt{\lambda_1}|f|}$. Soit $u(t)$ une solution de l'équation*

$$u_t + \nu Au + B(u,u) = f, \quad \textit{pour } u_0 \in B_0.$$

Alors, pour tout $t \geqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}$, nous avons

$$|Au(t)| \leqslant C'G^2\nu\lambda_1, \tag{1.45}$$

tel que C' est une constante qui dépend de c (donnée par les relations (1.10), (1.11, (1.12) et (1.13)) et de S_f.

Démonstration.
Nous prenons le produit scalaire de l'équation

$$\frac{d}{dt}u + \nu Au + B(u,u) = f$$

par A^2u

$$(\frac{d}{dt}u, A^2u) + \nu(Au, A^2u) = -(B(u,u), A^2u) + (f, A^2u). \tag{1.46}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|Au|^2 &= \frac{d}{dt}(Au, Au)\\ &= (Au, \frac{d}{dt}Au) + (Au, \frac{d}{dt}Au) = 2(\frac{du}{dt}, A^2u),\end{aligned}$$

et

$$\nu(Au, A^2u) = \nu(A^{\frac{3}{2}}u, A^{\frac{3}{2}}u) = \nu|A^{\frac{3}{2}}u|^2.$$

Par (1.44) et (1.46)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au|^2 + \nu|A^{\frac{3}{2}}u|^2 = -(B(Au,u),Au) + (A^{\frac{1}{2}}f, A^{\frac{3}{2}}u)$$

$$\leqslant c|u|\|Au\|\|u\| + |A^{\frac{1}{2}}f||A^{\frac{3}{2}}u|. \tag{1.47}$$

Nous avons $|A^{\frac{1}{2}}v| = \|v\|$. Nous utilisons l'inégalité de Young dans le terme $\|f\||A^{\frac{3}{2}}u|$, où $\varepsilon = \frac{\nu}{2},\ p = 2,\ p' = 2$

$$\|f\||A^{\frac{3}{2}}u| \leqslant \frac{\nu}{4}|A^{\frac{3}{2}}u|^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|^2.$$

En utilisant l'inégalité de Young dans le terme $|Au||A^{\frac{3}{2}}u|$, où $\varepsilon = \frac{2c\rho_1}{\nu},\ p = 2$, nous obtenons

$$|Au||A^{\frac{3}{2}}u| \leqslant \frac{c\rho_1}{\nu}|Au|^2 + \frac{\nu}{4c\rho_1}|A^{\frac{3}{2}}u|^2.$$

Nous en déduisons par (1.47)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Au|^2 + \nu|A^{\frac{3}{2}}u|^2 \leqslant \frac{c^2\rho_1^2}{\nu}|Au|^2 + \frac{\nu}{2}|A^{\frac{3}{2}}u|^2 + \frac{1}{\nu}\|f\|^2$$

$$\frac{d}{dt}|Au|^2 + \nu|A^{\frac{3}{2}}u|^2 \leqslant \frac{2c^2\rho_1^2}{\nu}|Au|^2 + \frac{2}{\nu}\|f\|^2.$$

Or

$$S_f = \frac{\|f\|}{\sqrt{\lambda_1}|f|}, \quad G = \frac{f}{\nu^2\lambda_1}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|Au|^2 + \nu|A^{\frac{3}{2}}u|^2 &\leqslant \frac{c^2}{\nu^3}\frac{|f|^2}{\lambda_1}|Au|^2 + \frac{2}{\nu}\frac{\|f\|^2}{\lambda_1|f|^2}\frac{\lambda_1|f|^2}{\nu^4\lambda_1^2}\nu^4\lambda_1^2 \\ &\leqslant 8c^2G^2\nu\lambda_1|Au|^2 + 2S_f^2G^2\nu^3\lambda_1^3.\end{aligned}$$

c est la constante donnée par (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13). En intégrant la dernière inégalité entre t_0 et t

$$|Au(t)|^2 \leqslant |Au(t_0)|^2 + 8c^2G^2\nu\lambda_1\int_{t_0}^{t}|Au(s)|^2ds + 2S_f^2\nu^3\lambda_1^3G^2(t-t_0). \tag{1.48}$$

Nous allons trouver l'intégration $\int_{t_0}^{t}|Au(s)|^2ds$ (par estimation) en multipliant l'équation

$$\frac{d}{dt}u + \nu Au + B(u,u) = f,$$

par Au

$$(\frac{d}{dt}u, Au) + \nu(Au,Au) + (B(u,u),Au) = (f,Au).$$

Nous avons

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 = \frac{d}{dt}|Au|^2 = \frac{d}{dt}(Au, Au) = 2(\frac{du}{dt}, Au),$$

$$(B(u,u), Au) = 0.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 \leqslant (f, Au) \leqslant \frac{\nu}{2}|Au|^2 + \frac{1}{2\nu}|f|^2$$

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|Au|^2 \leqslant \frac{|f|^2}{\nu} = G^2\nu^3\lambda_1^2.$$

En intégrant

$$\int_{t_0}^{t} |Au(s)|^2 ds \leqslant \frac{1}{\nu}\|u(t_0)\|^2 + \frac{|f|^2}{\nu^2}(t - t_0) \leqslant \frac{1}{\nu}16G^2\nu^2\lambda_1 + (G\nu\lambda_1)^2(t - t_0)$$

$$\leqslant 16G^2\nu\lambda_1 + (G\nu\lambda_1)\big(\frac{1}{\nu\lambda_1}\big) \leqslant 17G^2\nu\lambda_1. \tag{1.49}$$

Ici nous avons utilisé $\|u\| \leqslant 4G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}}$ par la définition de B_0. Par (1.48)

$$|Au(t)|^2 \leqslant |Au(t_0)|^2 + 8c^2G^2\nu\lambda_1(17G^2\nu\lambda_1) + 2S_f^2\nu^3\lambda_1^3G^2(\frac{1}{\nu\lambda_1})$$

$$\leqslant |Au(t_0)|^2 + Cc^2(G^2\nu\lambda_1)^2 + 2S_f^2\nu^2\lambda_1^2G^2.$$

Par intégration entre $t_0 = t - \frac{1}{\nu\lambda_1}$ et $t_0 = t$

$$\frac{1}{\nu\lambda_1}|Au(t)|^2 \leqslant \int_{t-\frac{1}{\nu\lambda_1}}^{t} |Au(t_0)|^2 dt_0 + Cc^2G^4\nu\lambda_1 + 2S_f^2\nu\lambda_1G^2$$

$$\leqslant 17G^2\nu\lambda_1 + Cc^2G^4\nu\lambda_1 + 2S_f^2\nu\lambda_1G^2,$$

et donc

$$|Au(t)|^2 \leqslant G^2(\nu\lambda_1)^2[17 + Cc^2G^2 + 2S_f^2]$$

$$\leqslant C'(G\nu\lambda_1)^2\big(1 + G^2 + S_f^2\big).$$

■

Nous posons

$$B := \overline{\bigcup_{t\geqslant\frac{1}{\nu\lambda_1}} S(t)B_0}.$$

B est compact, invariant et d'après le lemme précédent nous avons pour $u \in B$ l'inégalité $|Au| \leqslant C'G^2(\nu\lambda_1)$. Nous prenons $S(t) : B \to B$.

1.4.1 Théorème d'existence d'attracteur exponentiel

Définition 1.17. *Soient H un espace de Banach et $S(t)$ un semi-groupe sur H. On dit qu'un ensemble $\mathcal{M}$ est un attracteur exponentiel pour $S(t)$ sur H si $\mathcal{M}$ contient l'attracteur global et si :*
- *$\mathcal{M}$ est compact dans H et $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$;*
- *$\mathcal{M}$ est de dimension fractale finie (pour la topologie de H) ;*
- *$\forall B \subset H$ borné, $\exists c_0(B), c_1(B)$ telles que,*

$$dist_H(S(t)B, \mathcal{M}) \leqslant c_0 e^{-c_1 t}.$$

Définition 1.18. *([2], [25], [33])*
Soient H un espace de Hilbert, X un sous-ensemble compact de H et $\{S(t)\}$ un semi-groupe sur X. Nous disons que $\{S(t)\}$ vérifie la propriété de laminage sur X si, pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{4}[$, il existe un temps t_* et un projecteur P de rang N_0 tel que, pour tout $u, v \in X$ si

$$\|(I-P)(S(t_*)u - S(t_*)v)\|_H \leqslant \|P(S(t_*)u - S(t_*)v)\|_H$$

alors

$$\|S(t_*)u - S(t_*)v\|_H \leqslant \delta \|u - v\|_H.$$

Théorème 1.19. *([25], [60])*
Si $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ vérifie la propriété de laminage sur X et si $S(t_*)$ est Lipschitizien sur X de constante L, alors $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$ de dimension fractale estimée par

$$dist_F(\mathcal{M}) \leqslant N_0 \max\big(1, \frac{log(16L+1)}{log2}\big).$$

Remarque 1.20. *Notons que, dans la propriété de laminage, nous avons utilisé un projecteur orthogonal de rang fini, donc cette propriété n'est valable (en général) que dans des espaces de Hilbert.*

Pour montrer l'existence d'un attracteur exponentiel nous démontrons d'abord que le semi-groupe $\{S(t)\}$ défini pour le problème de Navier-Stokes vérifie la propriété de laminage. Pour cela nous prenons deux solutions u_1, u_2 de l'équation

$$\frac{d}{dt}u + \nu Au + B(u,u) = f, \quad \text{dans } B.$$

Nous posons $w(t) := u_1(t) - u_2(t)$, et $\overline{u}(t) = \frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t))$. Alors, w vérifie l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}w + \nu Aw + B(u_1, u_1) - B(u_2, u_2) = 0.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
B(u_1,u_1) \quad - \quad & B(u_2,u_2) = B(\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{2},\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_1-u_2}{2}) \\
& +B(\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_2-u_1}{2},\frac{u_1+u_2}{2}+\frac{u_2-u_1}{2}) \\
= \quad & B(\overline{u}+\frac{w}{2},\overline{u}-\frac{w}{2})-B(\overline{u}-\frac{w}{2},\overline{u}-\frac{w}{2}) \\
= \quad & B(\overline{u},\overline{u})+\frac{1}{4}B(w,w)+B(\overline{u},w)-B(\overline{u},\overline{u})-\frac{1}{4}B(w,w)+B(w,\overline{u}) \\
= \quad & B(\overline{u},w)+B(w,\overline{u}).
\end{aligned}$$

Donc w est une solution du problème suivant

$$\frac{d}{dt}w+\nu Aw+B(\overline{u},w)+B(w,\overline{u})=0, \tag{1.50}$$

$$w(0)=u_1(0)-u_2(0). \tag{1.51}$$

Nous prenons le produit scalaire de (1.50) par w dans H

$$(\frac{d}{dt}w,w)+\nu(Aw,w)+(B(\overline{u},w),w)+(B(w,\overline{u}),w)=0. \tag{1.52}$$

Nous avons

$$(Aw,w)=((w,w)), \quad \text{et } (B(\overline{u},w),w)=0.$$

Par (1.52)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2+\nu\|w\|^2 &= -(B(w,\overline{u}),w) \\
&\leqslant C_1|w|\|w\|\|\overline{u}\| \qquad (1.53) \\
&\leqslant \frac{\nu}{2}\|w\|^2+\frac{C_1^2}{2\nu}|w|^2\|\overline{u}\|^2. \qquad (1.54)
\end{aligned}$$

Nous avons $\overline{u}\in B$, donc

$$\|\overline{u}\|\leqslant 4G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}}. \tag{1.55}$$

Par (1.54) et (1.55)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2+\nu\|w\|^2\leqslant\frac{\nu}{2}\|w\|^2+8C_1^2(G^2\nu\lambda_1)|w|^2$$

$$\frac{d}{dt}|w|^2+\nu\|w\|^2\leqslant 16C_1^2(G^2\nu\lambda_1)|w|^2, \quad \nu\|w\|^2\geqslant 0.$$

Nous avons, en particulier,

$$\frac{d}{dt}|w|^2\leqslant 16C_1^2(G^2\nu\lambda_1)|w|^2.$$

Nous multiplions la dernière inégalité par $e^{-16C_1^2G^2\nu\lambda_1 t}$ et nous intégrons entre 0 et t

$$|w(t)|^2 \leqslant e^{16C_1^2G^2\nu\lambda_1 t}|w(0)|^2.$$

Cette relation donne la constante Lipschitz de $S(t)$, i.e.,

$$\mathrm{Lip}_B(S(t)) \leqslant \ \exp\big(8C_1^2G^2\nu\lambda_1 t\big).$$

Nous posons

$$\lambda(t) = \frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2}. \tag{1.56}$$

Par (1.53) et (1.56), nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\lambda(t)|w|^2 \leqslant C_1\lambda^{\frac{1}{2}}(t)|w|^2\|\overline{u}\|. \tag{1.57}$$

Par (1.55) et (1.57)

$$\frac{d}{dt}|w|^2 + 2\nu\lambda(t)|w|^2 \leqslant (8C_1G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}})\lambda^{\frac{1}{2}}(t)|w|^2.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, nous trouvons

$$|w(t)|^2 \leqslant \ \exp\big(- 2\nu \int_0^t (\lambda(\tau) - (8C_1G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}})\lambda^{\frac{1}{2}}(\tau))d\tau\big)|w(0)|^2. \tag{1.58}$$

Cela donne que le semi-groupe pour le problème de Navier-Stokes satisfait $|w(t)| \leqslant \delta(t)|w(0)|$, où

$$\delta(t) = \exp\big\{ - \nu \int_0^t (\lambda(\tau) - (4C_1G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}}))\lambda^{\frac{1}{2}}(\tau)d\tau\big\}.$$

Pour trouver l'attracteur exponentiel nous allons appliquer le Théorème 1.19. Nous prenons $t_* := \big(C_3G^2\nu\lambda_1 log(G^4\nu^2\lambda_1 + 1)\big)^{-1}$ et $S_* = S(t_*)$. Par ce qui précède, S_* vérifie

$$|S_*u - S_*v| < \delta|u - v|,$$

pour $\delta < \frac{1}{8}$. Nous posons

$$\lambda_* := \lambda_*(t) > \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1}.$$

Nous dérivons la relation

$$\lambda(t) = \frac{\|w(t)\|^2}{|w(t)|^2} = \frac{((w,w))}{(w,w)},$$

donc

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{2((w_t,w))|w|^2 - 2(w_t,w)\|w\|^2}{|w|^4}$$

$$= \frac{2}{|w|^2}[(w_t, Aw) - (w_t, w)\lambda(t)]$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{1}{|w|^2}(w_t, (A - \lambda(t))w). \tag{1.59}$$

Nous posons $\xi(t) := \dfrac{w(t)}{|w(t)|}$. Nous déduisons par (1.59)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda(t) &= \frac{1}{|w|^2}(-\nu Aw - B(\overline{u}, w) - B(w, \overline{u}), (A - \lambda(t))w) \\
&= (-\nu A\xi - (B(\xi, \overline{u}) + B(\overline{u}, \xi)), (A - \lambda(t))\xi) \\
&\leqslant (-\nu(A - \lambda(t))\xi - (B(\xi, \overline{u}) + B(\overline{u}, \xi)), (A - \lambda(t))\xi) \\
&\leqslant -\nu|(A - \lambda(t))\xi|^2 - (B(\xi, \overline{u}) + B(\overline{u}, \xi), (A - \lambda(t))\xi)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\lambda(t) \leqslant -\nu|(A - \lambda(t))\xi|^2 + \frac{1}{2\nu}(B(\xi, \overline{u}) + B(\overline{u}, \xi))^2 + \frac{\nu}{2}|(A - \lambda(t))\xi|^2 \tag{1.60}$$

$$\leqslant -\frac{\nu}{2}|(A - \lambda(t))\xi|^2 + \frac{1}{\nu}(|B(\xi, \overline{u})|^2 + |B(\overline{u}, \xi)|^2).$$

Ici, nous avons utilisé $-a.b \leqslant \frac{1}{2\nu}a^2 + \frac{\nu}{2}b^2, \quad (a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$. Par (1.13)

$$|B(\xi, \overline{u})| \leqslant C_1|\xi|^{\frac{1}{2}}\|\xi\|^{\frac{1}{2}}\|\overline{u}\|^{\frac{1}{2}}|A\overline{u}|^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons

$$|\xi|^{\frac{1}{2}}\|\xi\|^{\frac{1}{2}} = \frac{|w|^{\frac{1}{2}}}{|w|}.\frac{\|w\|^{\frac{1}{2}}}{|w|^{\frac{1}{2}}} \leqslant \lambda^{\frac{1}{4}},$$

et

$$\|\overline{u}\| \leqslant 2\rho_1.$$

Donc

$$|B(\xi, \overline{u})| \leqslant C_1\lambda^{\frac{1}{4}}(2\rho_1)^{\frac{1}{2}}|A\overline{u}|^{\frac{1}{2}}. \tag{1.61}$$

D'autre part, nous avons

$$|B(\overline{u}, \xi)| \leqslant |\overline{u}|_{L^\infty}\|\xi\| \leqslant C_2(\log\frac{|A\overline{u}|^2}{\lambda_1\|\overline{u}\|^2} + 1)\|\overline{u}\|\lambda^{\frac{1}{2}}. \tag{1.62}$$

Par (1.61) et (1.62), nous déduisons par (1.60)

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) \leqslant \frac{2}{\nu}\big(C_1^2\lambda^{\frac{1}{2}}2\rho_1|A\overline{u}| + C_2^2(\log\frac{|A\overline{u}|^2}{\lambda_1\|\overline{u}\|^2} + 1)^2\|\overline{u}\|^2\lambda\big)$$

$$\leqslant \frac{4C_1^2\rho_1}{\nu}|A\overline{u}(t)|\lambda^{\frac{1}{2}}(t) + \frac{C_2^2}{\nu}(\log\frac{|A\overline{u}(t)|^2}{\lambda_1\|\overline{u}\|^2} + 1)\|\overline{u}\|^2\lambda(t). \tag{1.63}$$

Nous posons

$$g(t) := \frac{4C_1^2\rho_1}{\nu}|A\overline{u}(t)|,$$

et

$$f(t) := \frac{C_2^2}{\nu}(\log\frac{|A\overline{u}(t)|^2}{\lambda_1\|\overline{u}\|^2} + 1)\|\overline{u}\|^2.$$

Par (1.63), nous avons

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) \leqslant g(t)\sqrt{\lambda(t)} + f(t)\lambda(t).$$

Nous divisons sur $\sqrt{\lambda(t)}$

$$\frac{d}{dt}\sqrt{\lambda(t)} \leqslant 2\frac{d}{dt}\sqrt{\lambda(t)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda(t)}}\frac{d}{dt}\lambda(t) \leqslant g(t) + f(t)\sqrt{\lambda(t)}.$$

Nous intégrons en utilisant le lemme de Gronwall uniforme entre t_0 et t

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda(t)} &\leqslant \sqrt{\lambda(t_0)}\exp\big(\int_{t_0}^t f(s)ds\big) + \int_{t_0}^t \exp\big(\int_s^t f(\tau)d\tau\big)g(s)ds \\ &\leqslant e^{\int_{t_0}^t f(s)ds}\big(\sqrt{\lambda(t_0)} + \int_{t_0}^t g(s)ds\big).\end{aligned}$$

Nous prenons $t = t_*$ et $\lambda(t_*) = \lambda_*$. Donc la dernière relation s'écrit

$$\sqrt{\lambda(t_0)} \geqslant \exp\big(-\int_{t_0}^t f(s)ds\big)\sqrt{\lambda_*} - \int_{t_0}^t g(s)ds.$$

Nous posons

$$\begin{aligned}E: &= \int_0^{t_*}\lambda(t_0)dt_0 \geqslant \frac{1}{t_*}\big(\int_0^{t_*}\sqrt{\lambda(t_0)}dt_0\big)^2 \\ &\geqslant \frac{1}{t_0}\big(\int_0^{t_*}\exp(-\int_{t_0}^{t_*}f(s)ds)\sqrt{\lambda_*}dt_0 - \int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*}g(s)dsdt_0\big)^2.\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*}g(s)dsdt_0 &= \frac{4C_1^2\rho_1}{\nu}\int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*}|A\overline{u}(s)|dsdt_0 \\ &\leqslant \frac{4C_1^2\rho_1}{\nu}\int_0^{t_*}(t_* - t_0)^{\frac{1}{2}}\big(\int_{t_0}^{t_*}|A\overline{u}(s)|^2ds\big)^{\frac{1}{2}}dt_0.\end{aligned}$$

Par (1.49)

$$\int_0^{t_*}\int_{t_0}^{t_*} g(s)dsdt_0 = \frac{4C_1^2\rho_1}{\nu}\int_0^{t_*}(t_*-t_0)^{\frac{1}{2}}(17G^2\nu\lambda_1)^{\frac{1}{2}}dt_0$$

$$\leqslant C'C_1^2G^2\nu^{\frac{1}{2}}\lambda_1\int_0^{t_*}(t_*-t_0)^{\frac{1}{2}}dt_0 = \frac{2}{3}C'C_1^2G^2\nu^{\frac{1}{2}}\lambda_1 t_*^{\frac{3}{2}}. \tag{1.64}$$

Et

$$\lambda_*^{\frac{1}{2}}\int_0^{t_*}\exp(-\int_{t_0}^{t_*} f(s)ds)dt_0 \geqslant$$

$$\lambda_*^{\frac{1}{2}}\int_0^{t_*}\exp(-\frac{C_2^2}{\nu}\int_{t_0}^{t_*}(log\frac{|A\overline{u}(s)|^2}{\lambda_1\|\overline{u(s)}\|^2}+1)\|\overline{u}\|^2ds)dt_0$$

$$\geqslant \lambda_*^{\frac{1}{2}}\int_0^{t_*} e^{-\beta(t_*-t_0)}dt_0 = \frac{\lambda_*^{\frac{1}{2}}}{\beta}(1-e^{-\beta t_*}), \tag{1.65}$$

où,

$$\beta = \frac{C_2^2}{\nu}\sup_{u\in B}\|u\|^2(\log\frac{|Au|^2}{\lambda_1\|u\|^2}+1).$$

Maintenant, nous allons estimer β. Nous avons

$$\|u\|^2 \leqslant 16G^2\nu^2\lambda_1, \quad |Au|^2 \leqslant (C_2G^2\nu\lambda_1)^2, \quad \forall u\in B.$$

Nous prenons la fonction $\phi(x,y) = x(\log\frac{y}{x}+1)$, définie sur le rectangle

$$0\leqslant x\leqslant 16G^2\nu^2\lambda_1 \ \text{ et } 0\leqslant y\leqslant C_2^2G^4\nu^2\lambda_1.$$

Nous avons deux cas :
Si $x \geqslant (G^4\nu^2\lambda_1)^{-1}$. Donc

$$\phi(x,y) \leqslant 16G^2\nu^2\lambda_1(\log C_2(G^4\nu^2\lambda_1)^2+1)$$

$$\leqslant C_3G^2\nu^2\lambda_1(\log G^4\nu^2\lambda_1+1).$$

Si $x < (G^4\nu^2\lambda_1)^{-1} \leqslant 1$. Nous trouvons

$$\phi(x,y) \leqslant x(\log y + \log\frac{1}{x}+1) \leqslant (\log y+1) + x\log\frac{1}{x}$$

$$\leqslant (\log C_2G^4\nu^2\lambda_1+1)+\frac{1}{2} \leqslant C_3G^2\nu^2\lambda_1(\log G^4\nu^2\lambda_1+1).$$

Donc, dans les deux cas, β est estimé par

$$\beta \leqslant C_3G^2\nu\lambda_1(\log G^4\nu^2\lambda_1+1). \tag{1.66}$$

Par (1.64) et (1.65),

$$E = \int_0^{t_*} \lambda(t_0)dt_0 \geqslant \frac{1}{t_*}[\frac{\lambda_*^{\frac{1}{2}}}{\beta}(1-e^{-\beta t_*}) - C''C_1^2G^2\nu^{\frac{1}{2}}\lambda_1 t_*^{\frac{3}{2}}]^2. \tag{1.67}$$

Nous avons

$$\delta_* = \delta(t_*) = \exp\big\{ -\nu \int_0^{t_*} \big(\lambda(\tau) - (4C_1G\nu\lambda_1^{\frac{1}{2}})\lambda^{\frac{1}{2}}(\tau)\big)d\tau\big\}.$$

Nous appliquons l'inégalité de Young, où

$$a = (\lambda(\tau)\nu)^{\frac{1}{2}}, \quad b = C_1G(\nu\lambda_1)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\delta_* &\leqslant \exp\big\{ -\nu \int_0^{t_*} \lambda(\tau)d\tau + 4C_1^2G^2\nu\lambda_1 t_*\big\} \\
&\leqslant \exp\big\{ -\frac{\nu}{2t_*}[\frac{\lambda_*^{\frac{1}{2}}}{\beta}(1-e^{-\beta t_*}) - C''C_1^2G^2\nu^{\frac{1}{2}}\lambda_1 t_*^{\frac{3}{2}}]^2 + 4C_1^2G^2\nu\lambda_1 t_*\big\} \\
&\leqslant \exp\big\{ -C_4\nu\beta[\frac{\lambda_*}{2\beta^2} - C_5G^4\nu\lambda_1^2(\frac{1}{\beta})^3] + 4C_1^2G^2\nu\lambda_1\beta^{-1}\big\}.
\end{aligned}$$

Nous avons $t_* = \frac{1}{\beta}$. Donc

$$\delta_* \leqslant \exp\big\{ -\frac{C_4}{2}\nu\lambda_*\beta^{-1} + C_6G^4\nu^2\lambda_1^2\beta^{-2} + 4C_1^2G^2\nu\lambda_1\beta^{-1}\big\}.$$

Et nous avons déjà vu que $\lambda_* \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{N_0+1} \sim \omega_0 N_0\lambda_1$. Donc, pour avoir $\delta_* < \frac{1}{8}$, nous devons chercher N_0, tel que

$$\begin{aligned}
N_0 &\geqslant C_7 \max\big\{\frac{\beta}{\nu\lambda_1}, \frac{G^4\nu^2\lambda_1^2}{\beta^2}.\frac{\beta}{\nu\lambda_1}, \frac{G^2\nu\lambda_1}{\beta}.\frac{\beta}{\nu\lambda_1}\big\} \\
&\geqslant C_7 \max\big\{\frac{\beta}{\nu\lambda_1}, \frac{G^4\nu\lambda_1}{\beta}, G^2\big\} \\
&\geqslant C_8G^2(\log G^4\nu\lambda_1 + 1).
\end{aligned} \tag{1.68}$$

Nous avons aussi, pour $t = t_* = \beta^{-1}$, la constante de Lipschitz de $S_* = S(t_*)$ est estimée par

$$\begin{aligned}
L_* &= \mathrm{Lip}_B S_* \leqslant \exp\big(8C_1^2G^2\nu\lambda_1 t_*\big) \\
&\leqslant \exp C_9\big(\log\ (G^4\nu^2\lambda_1 + 1)\big)^{-1} \leqslant e^{C_{10}}.
\end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 1.19 nous avons le résultat suivant.

Théorème 1.21. *Le semi-groupe pour le problème de Navier-Stokes possède un attracteur exponentiel, $\mathcal{M}$, en B, tel que sa dimension fractale est estimée par*

$$dim_F(\mathcal{M}) \leqslant C_8G^2(log\ G^4\nu^2\lambda_1 + 1).$$

Chapitre 2

Problème de Navier-Stokes non autonome

Dans le chapitre précédent nous avons trouvé l'attracteur global et un attracteur exponentiel pour le problème de Navier-Stokes autonome, i.e., $f = f(x)$ et f ne dépend pas de t. Dans ce chapitre nous allons trouver les attracteurs exponentiels, uniforme et rétrograde pour le problème de Navier-Stokes non autonome suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \nu A u + B(u,u) = f(x,t), \\ &u(\tau) = u_\tau, \qquad u_\tau \in H, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où, H est le même espace utilisé dans le chapitre précédent (pour V aussi), et nous supposons que f dans ce cas vérifie

(A). $f(s) = f(.,s)$ est dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$,

$$\|f\|^2_{L^2_b} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |f(s)|^2 ds < +\infty.$$

(On peut aussi supposer $|f|^2 \leqslant M$, M suffisamment grand).

Nous associons au problème (2.1) les conditions aux limites de Dirichlet homogène et les conditions aux limites périodiques du chapitre précédent et d'après ce chapitre , nous avons l'existence et l'unicité d'une solution de ce problème.

2.1 Un attracteur exponentiel

Pour trouver un attracteur exponentiel, on va utiliser les espaces H et V que l'on a déjà trouvés dans le chapitre précédent pour le problème (2.1).

2.1.1 Borné absorbant

Borné absorbant dans H

Multiplions (2.1) par u, procédons comme dans le chapitre précédent, nous obtenons, pour $\|u\|^2 \geqslant \lambda_1 |u|^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 &= (f,u)\\
&\leqslant |f|\ |u|\\
&\leqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|f|^2, \quad |u| \leqslant \lambda_1^{-\frac{1}{2}}\|u\|.
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leqslant \frac{1}{\nu\lambda_1}|f|^2 \leqslant C_M. \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\lambda_1|u|^2 \leqslant C_M.$$

Ce qui donne en intégrant sur $[\tau, t]$

$$\begin{aligned}
|u(t)|^2 &\leqslant |u_\tau|^2 e^{-\nu\lambda_1(t-\tau)} + \frac{C_M}{\nu^2\lambda_1^2}\big(1 - e^{-\nu\lambda_1(t-\tau)}\big)\\
&\leqslant |u_\tau|^2 e^{-\nu\lambda_1(t-\tau)} + \frac{C_M}{\nu^2\lambda_1^2} \xrightarrow[t-\tau\to\infty]{} \frac{C_M}{\nu^2\lambda_1^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons alors l'existence d'un borné absorbant dans H. De plus, nous avons par (2.2)

$$\int_t^{t+1} \|u(s)\|^2 ds \leqslant |u_\tau|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{C_M}{\nu^2\lambda_1^2} < \infty.$$

Borné absorbant dans V

En multipliant (2.1) par Au, procédons comme dans le chapitre précédent, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\lambda_1\|u\|^2 \leqslant \frac{2}{\nu}|f|^2 + \frac{2c_1}{\nu^3}|u|^2\|u\|^4.$$

Ce qui donne, en intégrant et par le lemme de Gronwall uniforme, l'existence d'un borné absorbant $\mathcal{B}$ dans V. $\mathcal{B}$ est donc compact dans H.

2.1.2 Construction d'attracteurs exponentiels

$\mathcal{B}$ étant le borné absorbant dans V alors, il existe t_1 tel que

$$S(t)\mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad \text{pour} \quad t \geqslant t_1,$$

$S(t)$ est le semi-groupe dans H.
Ensuite, nous définissons, pour le problème (2.1), une famille de processus dans H comme suit

$$\{U_f(t,\tau),\ \tau \in \mathbb{R},\ t \geqslant \tau\},$$

$U_f(t,\tau)u_\tau := u(t)$, où $u(t)$ est la solution de (2.1). Nous avons déjà trouvé par (2.2) l'estimation

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(\tau)|^2 e^{-\lambda(t-\tau)} + C, \quad \text{pour } t \geqslant \tau \ \text{ et } \lambda = \nu\lambda_1. \tag{2.3}$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.1. *Soit u une solution du problème* (2.1). *Alors*

$$|u(t)|^2 + \nu \int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant |u(\tau)|^2 + c\int_\tau^t |f(s)|^2 ds. \tag{2.4}$$

Démonstration.
Multiplions (2.1) par u

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu\|u\|^2 \leqslant c|u|^2 \leqslant |f|\ |u| &\leqslant c_1|f|\|u\| \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}\|u\|^2 + c'|f|^2.\end{aligned}$$

En intégrant entre τ et t nous trouvons (2.4). ■

Lemme 2.2. *Soit u une solution du* (2.1). *Nous avons alors une borne pour u dans $L^\infty(\tau,t;V)$, i.e.,*

$$\|u(t)\|^2 < \infty.$$

Démonstration.
Nous multiplions (2.1) par $-\Delta u$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu|\Delta u|^2 + (B(u),Au) = (f,Au).$$

Nous avons (voir les estimations du chapitre précédent)

$$|(B(u),\Delta u)| \leqslant \frac{\nu}{4}|\Delta u|^2 + c|u|^2\|u\|^4.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leqslant c_1|f|^2 + c_2|u|^2\|u\|^4.$$

Pour appliquer le lemme de Gronwall uniforme 1.13 nous posons

$$g := c_2|u|^2\|u\|^2, \quad h := c_1|f|^2, \quad y := \|u\|^2$$

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leqslant a_1, \quad \int_t^{t+r} h(s)ds \leqslant a_2, \quad \int_t^{t+r} y(s)ds \leqslant a_3.$$

Nous avons alors

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \big(\frac{a_3}{r} + a_2\big)e^{a_1}, \tag{2.5}$$

où, par (2.4),

$$\begin{aligned} a_1 &\leqslant c_2\big(|u(\tau)|^2 + c\int_\tau^t |f(s)|^2 ds\big)a_3 \leqslant Ca_3, \\ a_2 &= c_1\int_t^{t+r} |f(s)|^2 ds < \infty, \\ a_3 &= \int_t^{t+r} \|u(s)\|^2 ds < \infty \quad \text{(par (2.4))}. \end{aligned}$$

■

Nous trouvons ensuite une estimation pour la différence entre deux solutions, soit le résultat suivant.

Lemme 2.3. *La famille* $\{U_f(t,\tau)\} : u_\tau \to u(t)$ *est continue pour la topologie de* H.

Démonstration.
Soient $u_1(t) := U_{f_1}(t,\tau)u_{1\tau}$ et $u_2(t) := U_{f_2}(t,\tau)u_{2\tau}$ deux solutions du problème (2.1). Posons $w := u_1 - u_2$ et $w(\tau) = u_{1\tau} - u_{2\tau}$. Alors, w vérifie

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nu Aw + B(w,u_1) + B(u_2,w) = f.$$

Multiplions par w, notons que $(B(u_2,w),w) = 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\|^2 + (B(w,u_1),w) = (f,w). \tag{2.6}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |(B(w,u_1),w)| \leqslant \|w\|_{L^4}^2\|u_1\| &\leqslant c|w|\ \|w\|\ \|u_1\| \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}\|w\|^2 + c|w|^2\|u_1\|^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne, en particulier,

$$\frac{d}{dt}|w|^2 \leqslant \big(c\|u_1\|^2 + 1\big)|w|^2 + |f|^2.$$

En intégrant

$$|w(t)|^2 \leqslant \big(|w(\tau)|^2 + \int_\tau^t |f(s)|^2 ds\big) e^{\int_\tau^t a(s)ds},$$

$a(s) = c\|u_1\|^2 + 1$, et par (2.4) nous avons

$$\int_\tau^t \|u_1(s)\|^2 ds \leqslant C_1,$$

C_1 dépend de $|u_1(\tau)|$ et de $\int_\tau^t |f_1(s)|^2 ds$. Nous avons alors

$$|w(t)|^2 \leqslant c\big(|w(\tau)|^2 + \int_\tau^t |f(s)|^2 ds\big) e^{K(t-\tau)},$$

d'où nous avons l'estimation suivante

$$|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant C\big(|u_{1\tau} - u_{2\tau}|^2 + \int_\tau^t |f_1(s) - f_2(s)|^2 ds\big) e^{K(t-\tau)}. \tag{2.7}$$

Pour $f_1 = f_2$ nous avons

$$|U_f(t,\tau)u_{1\tau} - U_f(t,\tau)u_{2\tau}|^2 \leqslant Ce^{K(t-\tau)}\big(|u_{1\tau} - u_{2\tau}|^2\big), \tag{2.8}$$

et par (2.6) nous trouvons l'estimation

$$\int_\tau^t \|w(s)\|^2 ds \leqslant Ce^{K(t-\tau)}|u_{1\tau} - u_{2\tau}|^2. \tag{2.9}$$

Nous avons aussi, pour $u_{1\tau} = u_{2\tau} = u_\tau$

$$|U_{f_1}(t,\tau)u_\tau - U_{f_2}(t,\tau)u_\tau|^2 \leqslant Ce^{K(t-\tau)} \int_\tau^t |f_1(s) - f_2(s)|^2 ds. \tag{2.10}$$

■

Nous trouvons aussi par (2.6) et par l'inégalité de Poincaré

$$\frac{d}{dt}|w|^2 + c|w|^2 \leqslant \frac{c}{2}|w|^2 + c'\|w\|^2\|u_1\|^2 + c_1|f|^2.$$

Nous procédons comme auparavant et nous intégrons, nous trouvons

$$|w(t)|^2 \leqslant c\big(|w(\tau)|^2 + \int_\tau^t |f(s)|^2 ds\big) e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \alpha \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Afin de trouver des attracteurs exponentiels, nous allons appliquer le résultat suivant.

Théorème 2.4. *([26] et [60])*
Supposons que la famille $\{U_f(t,\tau)\}$, définie comme auparavant, vérifie la propriété de régularisation, i.e.,

$$\|U_f(t,\tau)u_1 - U_f(t,\tau)u_2\| \leqslant K|u_1 - u_2|, \quad \forall u_1, u_2 \in H, \quad V \subset H \text{ compacte.}$$

Alors, le système dynamique discret possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}^d$.
De plus, si $U_f(t,\tau)$ est Hölder continue sur $[\tau, t] \times B$, pour des données initiales dans B, alors nous avons l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels pour le système dynamique continu.

Pour appliquer le Théorème 2.4 nous démontrons le résultat suivant.

Lemme 2.5. *La famille $\{U_f(t,\tau)\}$ vérifie l'estimation suivante*

$$\|U_f(t,\tau)u_1(\tau) - U_f(t,\tau)u_2(\tau)\| \leqslant \frac{c}{t-\tau} e^{K(t-\tau)} |u_1(\tau) - u_2(\tau)|, \quad t > \tau. \tag{2.12}$$

Démonstration.
Soient u_1 et u_2 deux solutions de (2.1). Posons $w := u_1 - u_2$. Alors, nous avons

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \Delta w + B(w, u_1) + B(u_2, w) = 0, \qquad f_1 = f_2.$$

Multiplions par $-(t-\tau)\Delta w$

$$\frac{t-\tau}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \nu (t-\tau) |\Delta w|^2 \leqslant (t-\tau) |(B(w, u_1), \Delta w)| + (t-\tau) |(B(u_2, w), \Delta w)|.$$

Nous avons par (1.10) et (1.13)

$$\begin{aligned} |(B(w, u_1), \Delta w)| &\leqslant c_1 |w|^{\frac{1}{2}} \|u_1\| |\Delta w|^{\frac{3}{2}} \\ &\leqslant c \|w\|^{\frac{1}{2}} \|u_1\| |\Delta w|^{\frac{3}{2}}, \end{aligned}$$

et

$$|(B(u_2, w), \Delta w)| = 0.$$

Ce qui donne

$$\frac{(t-\tau)}{2} \frac{d}{dt} \|w\|^2 + \nu (t-\tau) |\Delta w|^2 \leqslant \frac{\nu}{2} (t-\tau) |\Delta w|^2 + c_1 (t-\tau) \|w\|^2 \|u_1\|^4$$

$$\frac{d}{dt}\big((t-\tau)\|w\|^2\big) + \nu (t-\tau) |\Delta w|^2 \leqslant C (t-\tau) \|u_1\|^4 \|w\|^2 + \|w\|^2.$$

D'après (2.5)

$$\frac{d}{dt}\big((t-\tau)\|w\|^2\big) + \nu (t-\tau) |\Delta w|^2 \leqslant C' (t-\tau) \|w\|^2 + \|w\|^2.$$

En intégrant entre τ et t et par (2.9) nous avons (2.12). ■

Nous avons déjà trouvé un borné absorbant B dans H ; $B := \{u \in H, \quad |u| \leqslant R_1\}$, i.e., il existe T tel que

$$U_f(\tau + T, \tau)\mathcal{O}_1(B) \subset B, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.13}$$

La dernière relation avec (2.8) donnent

$$U_f(\tau + T, \tau) \in S_{1,K}(B), \qquad \text{pour } K \text{ suffisamment grand.}$$

D'après le Théorème 2.4, la famille

$$U_f^\tau := U_f(\tau + nT, \tau + \ell T), \quad n, \ell \in \mathbb{Z}, \ n \geqslant \ell,$$

possède un attracteur exponentiel dans H, $\ell \mapsto \mathcal{M}_f(\ell, \tau)$, pour le système dynamique discret. Par cette construction nous avons (voir [29])

$$\mathcal{M}_f(\ell, \tau) = \mathcal{M}_f(0, \ell T + \tau), \quad \mathcal{M}_{T_s f}(\ell, \tau) = \mathcal{M}_f(\ell, \tau + s). \tag{2.14}$$

Pour définir un attracteur exponentiel pour un temps continu, nous démontrons d'abord que la famille $\{U_f(t, \tau)\}$ est Hölder continue.

Lemme 2.6. *Soit u une solution du problème* (2.1). *Nous avons l'estimation suivante*

$$\int_t^{t+r} \Big|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\Big|^2 ds \leqslant c, \quad r \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Démonstration.
Multiplions (2.1) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$$\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \big(B(u), \frac{\partial u}{\partial t}\big) = \big(f, \frac{\partial u}{\partial t}\big).$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\Big|\big(B(u,u), \frac{\partial u}{\partial t}\big)\Big| &\leqslant |B(u)|\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big| \\
&\leqslant c\|B(u)\|\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big| \\
&\leqslant c_1|u| \ \|u\|\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big| \\
&\leqslant \frac{1}{4}\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + c_2|u|^2\|u\|^2.
\end{aligned}$$

Nous avons alors
$$|\frac{\partial u}{\partial t}|^2+\nu\frac{d}{dt}\|u\|^2 \leqslant c|u|^2\|u\|^2+c'|f|^2.$$
Par le lemme de Gronwall uniforme 1.13, où $g:=c|u|^2$, $h:=c'|f|^2$, $y:=\|u\|^2$, nous avons (comme dans (2.5))
$$\int_t^{t+r}|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\big|^2 ds+\nu\|u(t)\|^2 \leqslant \big(\frac{a_3}{r}+a_2\big)e^{a_1} \leqslant \quad \text{const.}$$
■

Lemme 2.7. *Nous avons*
$$|U_f(t+\tau+s,\tau)u_\tau - U_f(t+\tau,\tau)u_\tau| \leqslant C|s|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.16}$$
et
$$|U_f(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_f(t+\tau,\tau)u_\tau| \leqslant C_T e^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.17}$$
pour $s \geqslant 0$.

Démonstration.
Nous avons par (2.15)
$$\begin{aligned}|U_f(t+\tau+s,\tau)u_\tau - U_f(t+\tau,\tau)u_\tau| &= \Big|\int_{t+\tau}^{t+\tau+s}\frac{\partial u(\theta)}{\partial t}d\theta\Big| \\ &\leqslant \int_{t+\tau}^{t+\tau+s}\Big|\frac{\partial u(\theta)}{\partial t}\Big|d\theta \\ &\leqslant |s|^{\frac{1}{2}}\int_{t+\tau}^{t+\tau+s}\Big|\frac{\partial u(\theta)}{\partial t}\Big|^2 d\theta \\ &\leqslant c|s|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$
Pour trouver (2.17), nous avons par (2.8) et (2.16)
$$\begin{aligned} &|U_f(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_f(t+\tau,\tau)u_\tau| \leqslant \\ \leqslant\ & |U_f(t+s+\tau,t+\tau)\big(U_f(t+\tau,\tau+s)u_\tau\big) - U_f(t+\tau,\tau+s)u_\tau| \\ +\ & |U_f(t+\tau,\tau+s)u_\tau - U_f(t+\tau,\tau+s)\big(U_f(\tau+s,\tau)u_\tau\big)| \\ \leqslant\ & c|s|^{\frac{1}{2}} + Ce^{K(t-s)}|u_\tau - U_f(\tau+s,\tau)u_\tau| \\ \leqslant\ & ce^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}, \quad s\geqslant 0, \quad t\in\mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

■

D'après ce qui précède et par le Théorème 2.4, nous avons l'existence d'attracteurs exponentiels pour le système dynamique continu. Nous définissons ces attracteurs par

$$\mathcal{M}_f(\tau) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_f(\tau, \tau - T - s)\mathcal{M}_f(0, \tau - T - s). \tag{2.18}$$

Nous vérifions que $\mathcal{M}_f(\tau)$ sont des attracteurs exponentiels.

(1). La propriété de semi-invariance, i.e.,

$$U_f(t,\tau)\mathcal{M}_f(\tau) \subset \mathcal{M}_f(t), \quad \text{et} \;\; \mathcal{M}_f(t+s)\mathcal{M}_{T_s f}(t).$$

La démonstration sera présentée dans le chapitre de Cahn-Hilliard non autonome (voir (4.40)).

(2). $f \mapsto \mathcal{M}_f(t)$ est Hölder continu. Soient f_1 et f_2 deux fonctions. Nous avons

$$\mathcal{M}_{f_1}(t) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_{f_1}(t, t - T - s)\mathcal{M}_{f_1}(0, t - T - s).$$

$\mathcal{M}_f(0,\tau)$ est un attracteur exponentiel, alors

$$\operatorname{dist}_H^{symm}(\mathcal{M}_{f_1}(0,\tau), \mathcal{M}_{f_2}(0,\tau)) \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\alpha(\tau-s)}|f_1(s) - f_2(s)|^2 ds\Big)^{k'}. \tag{2.19}$$

D'après (2.18) et (2.11) nous avons

$$\operatorname{dist}_H^{symm}\Big(\mathcal{M}_{f_1}(t), \mathcal{M}_{f_2}(t)\Big) \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|m_1 - m_2|^2 ds\Big)^{k}.$$

De plus,

$$\operatorname{dist}_H^{symm}(\mathcal{M}_f(0,\tau+s), \mathcal{M}_f(0,\tau)) \leqslant c'|s|^{\frac{1}{2}}, \tag{2.20}$$

$$|U_f(t+\tau+s, \tau+s)u_\tau - U_f(t+\tau,\tau)u_\tau| \leqslant ce^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}.$$

Par les dernières relations nous avons

$$\operatorname{dist}_H^{symm}(\mathcal{M}_f(t+s), \mathcal{M}_f(t)) \leqslant c|s|^{\frac{1}{2}}.$$

(3). $\mathcal{M}_f(t)$ est de dimension fractale finie ; $\dim_F(\mathcal{M}_f(t), H) < \infty$.
Nous avons par (2.17) et (2.20)

$$\operatorname{dist}_H^{symm}\Big(U_f(t, t-T-s_1)\mathcal{M}_f(0, t-T-s_1), U_f(t, t-T-s_2)\mathcal{M}_f(0, t-T-s_2)\Big)$$
$$\leqslant c|s_1 - s_2|^{k''}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Nous estimons $N_\varepsilon(\mathcal{M}_f(t), H)$; le nombre le plus petit de $\varepsilon-$boules nécessaires pour couvrir $\mathcal{M}_f(t)$, et donc nous trouvons N_ε par la dernière inégalité

$$cN_\varepsilon^{k''} < \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$N_\varepsilon^{k''} < \frac{\varepsilon}{2c} \;\Rightarrow\; N_\varepsilon < (\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}.$$

Nous avons

$$\mathcal{M}_f(t) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_f(t, t-T-s)\mathcal{M}_f(0, t-T-s),$$

donc

$$N_\varepsilon(\mathcal{M}_f(t), H) \leqslant \sum_{\ell=0} N_{\frac{\varepsilon}{2}}(U_f(t, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}})\mathcal{M}_f(0, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}, H),$$

$$\dim_F(U_f(t, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}})\mathcal{M}_f(0, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}, H) \leqslant$$

$$\dim_F(\mathcal{M}_f(0, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}, H) < \infty,$$

car $\mathcal{M}_f(\ell, \tau)$ sont des attracteurs et donc de dimension fractale finie.

En appliquant le Théorème 2.4 nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.8. *Supposons que la fonction f du problème (2.1) vérifie l'hypothèse (A). Alors, pour toute f, il existe un attracteur exponentiel $t \mapsto \mathcal{M}_f(t)$, pour la famille de processus U_f, vérifiant les propriétés suivantes :*

(i). Les ensembles $\mathcal{M}_f(t)$ sont compacts et de dimension finie dans H.

(ii). Les ensembles $\mathcal{M}_f(t)$ sont semi-invariant respectivement pour $U_f(t, \tau)$ et ils vérifient

$$U_f(t, \tau)\mathcal{M}_f(\tau) \subset \mathcal{M}_f(t), \quad \mathcal{M}_f(t+s) = \mathcal{M}_{T_s f}(t),$$

où $t, s, \tau \in \mathbb{R}, t \geqslant \tau$ et T_s est défini comme auparavant.

(iii). Ils vérifient la propriété suivante : pour tout ensemble borné B dans H, nous avons, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$,

$$dist_H(U_f(\tau+t, \tau)B, \mathcal{M}_f(\tau+t)) \leqslant Q(\|B\|_H)e^{-\alpha t},$$

où α est une constante positive et Q est une fonction monotone.

(iv). L'application $f \mapsto \mathcal{M}_f(t)$ est Hölder continue.

2.2 L'attracteur uniforme

Dans cette section nous cherchons l'attracteur uniforme du problème de Navier-Stokes non autonome suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t), \qquad (2.21)\\
&\text{div } u = 0,\\
&u = 0 \quad \text{sur } \Gamma,\\
&u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad \tau \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nous supposons que $f(s) = f(\cdot, s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ et elle vérifie
(H1) $|f| \leqslant M < \infty$.

(H2)

$$\|f\|_{L^2_b} := \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |f(s)|^2 ds < \infty.$$

Pour trouver l'attracteur uniforme de ce problème nous avons besoin de définir des symboles ainsi que la famille de processus $\{U(t,\tau)\}$, voir [15] et [60].

2.2.1 Définitions

Le symbole :

Par (2.21) nous pouvons écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu\Delta u - B(u,u) + f(t) := A_{f(t)}u.$$

Nous appelons f le symbole de l'équation (2.21). Ensuite, nous allons définir le groupe $\{T(h), \quad h \in \mathbb{R}\}$ par

$$T(h)f(s) := f(s+h), \quad s, h \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc $T(h)L^2_{loc}(\mathbb{R}; H) \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$.
Finalement, nous définissons le symbole $\mathcal{H}(f)$ comme suit

$$\mathcal{H}(f) := \overline{\{T(h)f, \ h \in \mathbb{R}\}}, \qquad (2.22)$$

tel que la fermeture est dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$. Nous notons $\mathcal{H}(f)$ par Σ, nous avons donc

$$T(h)\Sigma = \Sigma, \ \forall h \in \mathbb{R} \text{ (par définition de } T(h) \text{ et de } \Sigma).$$

Définition 2.9. *La fonction $f(s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$ est translation compacte (et nous notons tr.c) si $\mathcal{H}(f)$ est compact dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}; H)$.*

Par (2.22) nous avons que $\mathcal{H}(f)$ est fermé dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R};H)$ qui est compact, alors $\mathcal{H}(f)$ est compact. Nous trouvons donc que $f(s)$ est tr.c dans $L^2_{loc}(\mathbb{R};H)$. $f(s)$ est translation bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R};H)$, car

$$\|f\|^2_{L^2_b} = \|f\|^2_{L^2_b(\mathbb{R};H)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} |f(s)|^2 ds < \infty.$$

Dans la suite, on suppose que

$$\Sigma := \mathcal{H}(f) \subset\subset L_2^{loc}(\mathbb{R};H) \quad \text{(pour } f \text{ fixé).}$$

Définition 2.10. *Nous définissons la famille de processus* $\{U_f(t,\tau),\ \ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ *dans* H *par*

$$\begin{aligned} U_f(t,\tau) : H &\to H \\ u_\tau &\mapsto u(t), \end{aligned}$$

où $u(t)$ *est la solution du problème (2.21),* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R};H)$*, et* $\{U_f(t,\tau)\}$ *vérifie*

1. $U_f(t,s) \circ U_f(s,\tau) = U_f(t,\tau), \quad \forall t \geqslant s \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}.$
2. $U_f(\tau,\tau) = Id$ *(opérateur identité).*

D'après ce qui précède et l'unicité de la solution, nous avons

$$U_{T(h)f}(t,\tau) = U_f(t+h,\tau+h), \quad \forall h \geqslant 0,\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

Définition 2.11. *Nous disons que l'ensemble* $\mathcal{A}_\Sigma \subset H$ *est l'attracteur uniforme pour la famille* $\{U_f(t,\tau),\ \ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ f \in \Sigma\}$ *si*

(i) il est compact dans H*,*

(ii) il attire uniformément tous les bornés de H*, i.e.,*

$$\forall B \subset H \text{ borné}, \quad \lim_{t\to+\infty} \sup_{f\in\Sigma} \, dist\left(U_f(t,\tau)B, \mathcal{A}_\Sigma\right) = 0,$$

(iii) il est minimal parmi tous les ensembles fermés qui vérifient (ii).

Nous notons par cette définition que l'attracteur uniforme de $\{U_f(t,\tau)\}$ n'est pas invariant (ici nous remplaçons l'invariance par une propriété de minimalité (iii)). Voir [41], où la définition d'un attracteur associé à une famille de la forme $\{U(t,\tau)\}$ a été proposée.

Remarque 2.12. *Si l'attracteur uniforme existe alors il est unique, car, supposons que nous avons deux attracteurs uniformes* $\mathcal{A}_\Sigma$ *et* $\mathcal{A}'_\Sigma$*, nous obtenons alors par la propriété (ii) de la définition précédente, pour* B *borné dans* H

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{f\in\Sigma} \, dist\left(U_f(t,\tau)B, \mathcal{A}_\Sigma\right) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{f\in\Sigma}\ dist\ \big(U_f(t,\tau)B,\mathcal{A}'_\Sigma\big)=0.$$

Or, par (iii), $\mathcal{A}_\Sigma$ est l'ensemble minimal qui vérifie (ii), donc $\mathcal{A}_\Sigma\subset\mathcal{A}'_\Sigma$,
et $\mathcal{A}'_\Sigma$ est l'ensemble minimal qui vérifie (ii), donc $\mathcal{A}'_\Sigma\subset\mathcal{A}_\Sigma$.
Alors, $\mathcal{A}_\Sigma=\mathcal{A}'_\Sigma$, et nous avons l'unicité.

Définition 2.13. *Nous disons que la famille $\{U_f(t,\tau)\}$, $f\in\Sigma$ est $(H\times\Sigma;H)$-continue si, pour tout t fixé et $\tau, t\geqslant\tau$, $\tau\in\mathbb{R}$ donc*

$$(u,f)\ \rightarrow\ U_f(t,\tau)u \quad \textit{est continue.}$$

Proposition 2.14. *Soit $f(t)$ une translation compacte dans $L^{p,w}_{loc}(R;\varepsilon)$. Donc,*

1. *$\forall f_1\in\mathcal{H}(f)$ donc f_1 est tr.c dans $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R};\varepsilon)$ et $\mathcal{H}(f_1)\subseteq\mathcal{H}(f)$.*
2. *$\mathcal{H}(f)$ set borné dans $L^{p}_{loc}(\mathbb{R};\varepsilon)$, et $\forall f_1\in\mathcal{H}(f)$ donc*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+h}\|f_1(s)\|^p_\varepsilon ds\leqslant\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+h}\|f(s)\|^p_\varepsilon ds.$$

3. *L'ensemble $\{T(t)\}$ est continu dans $\mathcal{H}(f)$.*
4.
$$T(t)\mathcal{H}(f)=\mathcal{H}(f)\quad\forall t\geqslant 0.$$

2.2.2 Estimations

Nous prenons le produit scalaire (dans H) de (2.21) par u

$$\big(\frac{d}{dt}u(t),u\big)+\nu(Au,u)+(B(u,u),u)=(f(t),u(t)). \tag{2.24}$$

Nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2=\big(\frac{d}{dt}u,u\big),\quad (Au,u)=((u,u))=\|u(t)\|^2 \text{ et } (B(u,u),u)=0.$$

Par (2.24)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2+\nu\|u(t)\|^2 &= (f(t),u(t))\leqslant\|f(t)\|_{V'}\|u(t)\|\\ &\leqslant \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2+\frac{1}{2\nu}\|f(t)\|^2_{V'}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, nous avons

$$\|v\|^2_{V'}\leqslant\frac{|v|^2}{\lambda_1},\qquad \|v\|^2\geqslant\lambda_1|v|^2,$$

ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{2\nu\lambda_1}|f(t)|^2.$$

Posons $\lambda := \nu\lambda_1$, nous en déduisons

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\lambda_1|u(t)|^2 \leqslant \frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 \leqslant \lambda^{-1}|f(t)|^2. \tag{2.25}$$

Pour intégrer (2.25) nous utilisons le lemme suivant.

Lemme 2.15. *Soit $y(t)$ qui est uniformément continu dans $[0, +\infty[$ et vérifie la relation suivante*

$$y'(t) + \gamma y(t) \leqslant h(t), \qquad \gamma > 0,\ h(t) \geqslant 0,\ \forall t \geqslant 0.$$

Si

$$\int_t^{t+1} h(s)ds \leqslant C, \quad \forall t \geqslant 0$$

alors

$$y(t) \leqslant y(0)exp(-\gamma t) + C(1 - exp(-\gamma))^{-1} \leqslant y(0)exp(-\gamma t) + C(1 + \gamma^{-1}).$$

Pour appliquer ce lemme on pose $y(t) := |u(t)|^2$, $h(t) := \lambda^{-1}|f(t)|^2$, $\gamma = \lambda$ (d'après l'hypothèse (H2), on peut appliquer le Lemme 2.15), et nous avons donc

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(\tau)|^2 \exp(-\lambda(t-\tau)) + \lambda^{-1}(1+\lambda^{-1})\|f\|^2_{L^2_b}. \tag{2.26}$$

De plus, nous avons par (2.25)

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 + \nu\|u(t)\|^2 \leqslant \lambda^{-1}|f(t)|^2.$$

Ce qui donne en intégrant sur $[\tau, t]$ l'estimation suivante

$$|u(t)|^2 + \nu\int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant |u(\tau)|^2 + \lambda^{-1}\int_\tau^t |f(s)|^2 ds. \tag{2.27}$$

Estimation de $(t-\tau)\|u\|$

Nous allons démontrer l'inégalité suivante

$$(t-\tau)\|u(t)\|^2 \leqslant C\big(t-\tau, |u(\tau)|^2, \int_\tau^t |f(s)|^2 ds\big). \tag{2.28}$$

Pour simplifier, on prend $\nu = 1$, $\tau = 0$. Nous multiplions (2.21) par tAu

$$(\frac{d}{dt}u(t), tAu(t)) + \nu(Au(t), tAu(t)) + (B(u,u), tAu) = (f, tAu). \tag{2.29}$$

Nous avons

$$\frac{d}{dt}\big(t\|u\|^2\big) = \frac{d}{dt}(u, tAu) = (\frac{d}{dt}u, tAu) + (u, tA\frac{du}{dt} + Au) = 2(\frac{du}{dt}, tAu) + (u, Au)$$

$$\frac{d}{dt}\big(t\|u\|^2\big) = 2\big(\frac{du}{dt}, tAu\big) + \|u\|^2,$$

$$\nu(Au(t), tAu(t)) = t\|u\|^2_{D(A)}.$$

Par (2.29)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(t\|u\|^2) - \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + t\|u\|^2_{D(A)} + t(Bu, Au) \leqslant t|f(t)|^2 + \frac{1}{4}t\|u(t)\|^2_{D(A)}. \quad (2.30)$$

Nous avons

$$(Bu, Au) \leqslant |Bu|\|u\|_{D(A)}, \quad (2.31)$$

et par Cauchy-Schwarz

$$|Bu| \leqslant \big(\int_\Omega |u|^2|\nabla u|^2 dx\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \big(\int_\Omega |u|^4 dx\big)^{\frac{1}{4}}\big(\int_\Omega |\nabla u|^4 dx\big)^{\frac{1}{4}}$$

$$|Bu| \leqslant \|u\|_{L^4}\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)}. \quad (2.32)$$

Par Cauchy-Schwarz et Poincaré, nous avons

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} = \big(\int_\Omega |u|^4 dx\big)^{\frac{1}{4}} = \Big(\big(\int_\Omega |u|^2 dx\big).\big(\int_\Omega |u|^2 dx\big)\Big)^{\frac{1}{4}} \leqslant C_0|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}. \quad (2.33)$$

De même,

$$\|\nabla u\|_{L^4(\Omega)} \leqslant C_0|\nabla u|^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1\|u\|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{D(A)} \quad (2.34)$$

D'après (2.31), (2.32), (2.33) et (2.34)

$$|Bu| \leqslant C_2|u|^{\frac{1}{2}}\ \|u\|\ \|u\|^{\frac{1}{2}}_{D(A)}, \qquad C_2 = C_0C_1,$$

$$t(Bu, Au) \leqslant C_2 t|u|^{\frac{1}{2}}\ \|u\|\ \|u\|^{\frac{3}{2}}_{D(A)}.$$

Nous utilisons l'inégalité de Young (où $p = 4,\ p' = \frac{4}{3}$)

$$t(Bu, Au) \leqslant \frac{t}{4}\|u\|^2_{D(A)} + \frac{tC}{2}\|u\|^4\ |u|^2. \quad (2.35)$$

Par (2.28) et (2.35)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(t\|u\|^2\big) + \frac{t}{2}\|u(t)\|^2_{D(A)} \leqslant \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + t|f(t)|^2 + \frac{tC}{2}\|u(t)\|^4|u(t)|^2. \quad (2.36)$$

Pour intégrer la dernière relation nous posons

$$z(t) := t\|u(t)\|^2, \quad b(t) := \|u(t)\|^2 + 2t|f(t)|^2, \quad \gamma(t) := C\|u(t)\|^2|u(t)|^2,$$

et nous trouvons

$$z'(t) \leqslant b(t) + \gamma(t)z(t),$$

ce qui donne en intégrant

$$z(t) \leqslant \int_0^t b(s) \exp\big(\int_s^t \gamma(\theta d\theta) ds\big) \leqslant \big(\int_0^t b(s)ds\big) \exp\big(\int_0^t \gamma(s)ds\big).$$

Nous avons par (2.27)

$$\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant |u(0)|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds,$$

et

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(0)|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} t\|u(t)\|^2 &\leqslant \big(\int_0^t (\|u(s)\|^2 + 2s|f(s)|^2) ds\big) \exp\big(\int_0^t C\|u(s)\|^2 |u(s)|^2 ds\big) \\ &\leqslant \big(|u(0)|^2 + (1+2t)\int_0^t |f(s)|^2 ds\big) \exp\Big(C\big(|u(0)|^2 + \int_0^t |f(s)|^2 ds\big)^2\Big) \\ &= C(t, |u(0)|^2, \int_0^t |f(s)|^2 ds), \end{aligned}$$

où,

$$C(z, R, R_1) = (R + (1+2z)R_1) \exp\big(C(R+R_1)^2\big).$$

Estimation pour la difference entre deux solutions

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème (2.21) et f_1 et f_2 correspondant respectivement u_1 et u_2. Nous posons

$$w(t) := u_1(t) - u_2(t) = U_{f_1}(t,\tau)u_{1\tau} - U_{f_2}(t,\tau)u_{2\tau}, \quad f := f_1 - f_2$$

et $w(\tau) := u_{1\tau} - u_{2\tau}$. Nous avons donc

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \nu A u_1 + B(u_1, u_1) = f_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \nu A u_2 + B(u_2, u_2) = f_2,$$

et w est une solution du problème suivant

$$\partial_t w + \nu A w + B(w, u_1) + B(u_2, w) = f, \tag{2.37}$$

$$w(\tau) = w_\tau = u_{1\tau} - u_{2\tau}.$$

Ici nous avons utilisé

$$\begin{aligned} B(u_1,u_1) - B(u_2,u_2) &= B(u_1-u_2,u_1) + B(u_2,u_1) + B(u_2,u_1-u_2) - B(u_2,u_1) \\ &= B(w,u_1) + B(u_2,w). \end{aligned}$$

Multiplions (2.37) par w

$$\big(\frac{d}{dt}w, w\big) + \nu(Aw,w) + (B(w,u_1),w) + (B(u_2,w),w) = (f,w)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 + \nu\|w\|^2 + (B(w,u_1),w) = (f,w).$$

Nous avons

$$\|w\|^2_{L^4} \leqslant C_0|w|\|w\|,$$

$$(B(w,u_1),w) \leqslant \|w\|^2_{L^4}\|u_1\| \leqslant C_0|w|\|w\|\|u_1\| \leqslant \nu\|w\|^2 + \frac{C_0^2}{4\nu}|w|^2\|u_1\|^2,$$

$$|(f,w)| \leqslant \frac{1}{2}|f|^2 + \frac{1}{2}|w|^2.$$

Ce qui donne, en particulier,

$$\frac{d}{dt}|w|^2 \leqslant \big(\frac{C_0^2}{2\nu}\|u_1\|^2 + 1\big)|w|^2 + |f|^2. \tag{2.38}$$

Grâce au lemme de Gronwall

$$|w(t)|^2 \leqslant \big(|w(\tau)|^2 + \int_\tau^t |f(\theta)|^2 d\theta\big) \exp\big(\int_\tau^t a(\theta)d\theta\big), \quad a(\theta) = \frac{C_0^2}{2\nu}\|u_1\|^2 + 1,$$

et

$$\int_\tau^t a(\theta)d\theta = t - \tau + \frac{C_0^2}{2\nu}\int_\tau^t \|u_1\|^2 dt.$$

Nous avons par (2.27)

$$\int_\tau^t \|u_1\|^2 dt \leqslant \frac{1}{\nu}|u_1(\tau)|^2 + \lambda^{-1}\nu^{-1}\int_\tau^t |f_1(s)|^2 ds.$$

Donc

$$\int_\tau^t a(\theta)d\theta = (t-\tau) + \frac{1}{2\nu^2}|u_1(\tau)|^2 + \frac{C_0^2}{2\nu^2\lambda}\int_\tau^t |f_1(s)|^2 ds \leqslant C_1,$$

où

$$C_1 = C_1\big((t-\tau), |u_1(\tau)|^2, \int_\tau^t |f_1(s)|^2 ds\big).$$

Nous avons alors l'estimation suivante

$$|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant (|u_{1\tau} - u_{2\tau}|^2 + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2(\tau,t;H)})\exp(C_1). \tag{2.39}$$

2.2.3 Théorème d'existence d'un attracteur

Pour trouver un attracteur uniforme nous allons appliquer les résultats de [15].

Théorème 2.16. *([15])*
Si la famille de processus $\{U_f(t,\tau),\quad t \geqslant \tau,\quad \tau \in \mathbb{R},\quad f \in \Sigma\}$ possède un ensemble compact qui attire uniformément les bornés de H, alors elle admet un attracteur uniforme $\mathcal{A}_\Sigma$.

Afin d'appilquer ce théorème nous démontrons le résultat suivant.

Proposition 2.17. *La famille de processus $\{U_f(t,\tau),\quad t \geqslant \tau,\quad \tau \in \mathbb{R},\quad f \in \Sigma\}$ associée au problème* (2.21) *est uniformément bornée, $(H \times \mathcal{H}(f); H)$-continue et elle admet un ensemble compact qui attire uniformément les bornés de H, i.e., il existe un ensemble compact B_0 dans H tel que*

$$\forall D \quad \textit{borné}, \qquad \lim_{t\to\infty} \sup_{f\in\Sigma} \; \textit{dist}(U_f(t,\tau)D, B_0) = 0.$$

Démonstration.
D'après l'estimation (2.26), nous avons

$$|u(t)|^2 \leqslant \lambda^{-1}(1+\lambda^{-1})\|f\|^2_{L^2_b} < \infty.$$

Cela donne que la famille $\{U_f(t,\tau)\}$, $f \in \Sigma$, est uniformément bornée dans H. Cette estimation implique aussi que l'ensemble

$$B := \{u \in H, \quad |u|^2 \leqslant R_0^2\}, \quad \text{où} \;\; R_0^2 := \lambda^{-1}(1+\lambda^{-1})\|f\|^2_{L^2_b}$$

est uniformément absorbant. Nous posons $B_0 := \bigcup_{f\in\Sigma} \bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} U_f(\tau+1,\tau)B$. B_0 est également uniformément absorbant. D'après (2.28), B_0 est borné dans V, et alors compact dans H (d'après l'injection compacte entre V et H). Cela donne que la famille $\{U_f(t,\tau)\}$ est uniformément compacte.

Pour démontrer que la famille $\{U_f(t,\tau)\}$ est $(H \times \Sigma; H)$-continue, nous supposons deux suites $u^{(n)}_{2\tau}$ et $f^{(n)}_2(s)$, telles que

$$u^{(n)}_{2\tau} \xrightarrow[n\to\infty]{} u_{1\tau} \quad \text{et} \quad f^{(n)}_2(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} f_1(s) \text{ dans } L^2_{loc}(\mathbb{R}; H),$$

et d'après l'estimation (2.39) nous avons

$$|u_1(t) - u^{(n)}_2(t)|^2 \leqslant |u_{1\tau} - u^{(n)}_{2\tau}|^2 e^{C_1} + \|f_1 - f^{(n)}_2\|_{L^2_{loc}} e^{C_1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Nous avons alors

$$u^{(n)}_{2\tau} \xrightarrow[n\to\infty]{} u_1(t) \text{ dans } H.$$

Donc la famille $\{U_f(t,\tau)\}$, $f \in \mathcal{H}(f)$ est $(H \times \mathcal{H}(f); H)$-continue. ∎

D'après la Proposition 2.17 et le Théorème 2.16, nous avons l'existence d'un attracteur uniforme pour le problème (2.21).

Maintenant, nous définissons une famille d'opérateurs $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$ dans $H \times \mathcal{H}(f)$ par

$$S(t)(u,f) = (U_f(t,0)u, T(t)f), \quad t \geqslant 0, \ \ \forall (u,f) \in H \times \Sigma. \tag{2.40}$$

D'après cette définition $S(t)$ est un semi-groupe dans $H \times \Sigma$ (voir le chapitre de Cahn-Hilliard non autonome).
Nous allons construire un attracteur global dans $H \times \Sigma$ du problème (2.21).

Définition 2.18. *([15]) Nous disons que $\mathcal{K} = \{u(\cdot)\}$ est le noyau de la famille $\{U_f(t,\tau)\}$ si $u(\cdot)$ vérifie*

$$U_f(t,\tau)u(\tau) = u(t), \quad \forall t \geqslant \tau, \ \tau \in \mathbb{R} \ \text{et} \ \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)| < \infty.$$

Nous appelons $\mathcal{K}(s) = \{u(s), \quad u(\cdot) \in \mathcal{K}\} \subseteq H$ la section du noyau de $\{U_f(t,\tau)\}$ au temps $t = s$ (voir [14]).

Théorème 2.19. *Supposons que la famille de processus $\{U_f(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ f \in \Sigma\}$ est $(H \times \Sigma; H)$-continue et elle possède un ensemble compact qui attire uniformément tous les bornés de H. Alors, le semi-groupe $S(t)$ défini par (2.40) possède un attracteur compact $\mathcal{A}$ qui est invariant, i.e., $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \ \forall t \geqslant 0$.*
De plus, si Π_1 et Π_2 sont deux projecteurs de $H \times \Sigma$ dans H et dans Σ respectivement, i.e., $\Pi_1(u,f) = u$, $\Pi_2(u,f) = f$, alors

1. $$\Pi_1\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_\Sigma$$
   est l'attracteur uniforme de $\{U_f(t,\tau)\}$, $f \in \Sigma$,
2. $\Pi_2\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 = \Sigma$,
3. *l'attracteur global vérifie*
   $$\mathcal{A} = \bigcup_{f\in\Sigma} \mathcal{K}_f(0) \times \{f\},$$
4. *l'attracteur uniforme vérifie*
   $$\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_1 = \bigcup_{f\in\Sigma} \mathcal{K}_f(0),$$
   où $\mathcal{K}_f(0)$ est la section du noyau $\mathcal{K}_f$ de la famille $\{U_f(t,\tau)\}$, $f \in \Sigma$, au temps $t = 0$

2.3 L'attracteur rétrograde

2.3.1 Orientation

Afin de trouver l'attracteur rétrograde (dans un système non autonome asymptotiquement compact) du problème de Navier-Stokes, nous allons utiliser les définitions suivantes (voir [11] et [35]).
Soit Ω un ensemble non vide. Nous prenons la famille d'applications

$$\{\varphi(t)\}_{t\in\mathbb{R}}, \quad \varphi_t : \Omega \ \to \ \Omega,$$

qui satisfait

1. $\varphi_0\omega = \omega, \ \ \forall\omega \in \Omega.$
2. $\varphi_t(\varphi_\tau\omega) = \varphi_{t+\tau}\omega, \ \forall\omega \in \Omega, \quad t, \tau \in \mathbb{R}.$

Soient X un espace métrique et ϕ est une application, où $\phi : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times X \ \to \ X$. Nous disons que ϕ est un cocycle dans X si :

–
$$\phi(0, \omega, x) = x, \quad \forall(\omega, x) \in \Omega \times X$$

–
$$\phi(t + \tau, \omega, x) = \phi(t, \varphi_\tau\omega, \phi(\tau, \omega, x)), \ \forall t, \tau \in \mathbb{R}_+, (\omega, x) \in \Omega \times X,$$

et le cocycle ϕ est continu si : $\forall(t, w) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, alors l'application : $\phi(t, \omega, .) : X \ \to \ X$ est continue.

Nous notons par $P(X)$ la famille de tous les sous-ensembles non vides et bornés de X, et $\wp$ est la classe de toutes les familles

$$\hat{D} = \{D(w), \ w \in \Omega\} \subset P(X).$$

Soit $D \in \wp$ une sous-classe non vide.

Définition 2.20. *$\forall\omega \in \Omega, \quad \forall\hat{D} \in D, \quad \forall t_n \ \to \ \infty$ une suite, et $x_n \in D(\varphi_{-t_n}w)$, alors le cocycle ϕ est D-asymptotiquement compact (rétrograde) si :*
la suite $\phi(t_n, \varphi_{-t_n}\omega, x_n)$ contient une suite extraite convergente.

Définition 2.21. *On dit que la famille*

$$\hat{B} = \{B(\omega); \ \omega \in \Omega\} \in \wp,$$

est D-absorbante (rétrograde) si :
$\forall\omega \in \Omega, \ \forall\hat{D} \in D$, il existe $t_0(\omega, \hat{D}) \geqslant 0$ tel que

$$\phi(t, \varphi_{-t}\omega, D(\varphi_{-t}\omega)) \ \subset \ B(\omega), \quad \forall t \geqslant t_0(\omega, \hat{D}).$$

Définition 2.22. *Nous disons que la famille*

$$\hat{C} = \{C(\omega),\ w \in \Omega\} \ \subset \ \wp$$

attire tous les ensembles de D si :

$$\lim_{t\to\infty} dist(\phi(t, \varphi_{-t}\omega, D(\varphi_{-t}\omega)), C(\omega)) = 0, \quad \forall \hat{D} \in D, \quad \omega \in \Omega.$$

Définition 2.23. *La famille* $\hat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}(\omega), \omega \in \Omega\} \subset \wp$ *est un attracteur global rétrograde si :*
- $\mathcal{A}(\omega)$ *est compact,* $\forall \omega \in \Omega$ *;*
- $\hat{\mathcal{A}}$ *attire tous les ensembles de D ;*
- $\hat{\mathcal{A}}$ *est invariant, i.e.*

$$\phi(t, \omega, \mathcal{A}(\omega)) = \mathcal{A}(\varphi_t\omega), \quad \forall (t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega.$$

Définition 2.24. $\forall \hat{D} \in \wp, \forall \omega \in \Omega$, *nous définissons l'ensemble* ω*-limite de* $\hat{D}$ *dans* Ω *par*

$$\Lambda(\hat{D}, \omega) = \bigcap_{s\geqslant 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\geqslant s} \phi(t, \varphi_{-t}\omega, D(\varphi_{-t}\omega))\Big)}.$$

Alors, $y \in \Lambda(\hat{D}, \omega)$ *si et seulement si :*
il existe une suite $t_n \to +\infty$*, et une suite* $x_n \in D(\varphi_{-t_n}\omega)$ *telles que :*

$$\lim_{t_n\to+\infty} d(\phi(t_n, \varphi_{-t_n}\omega, x_n), y) = 0.$$

2.3.2 Théorème d'existence d'attracteur rétrograde

Notre but dans cette section est d'appliquer les résultats suivants sur notre problème pour trouver l'attracteur rétrograde. Les démonstrations peuvent être consultées dans les références indiquées.

Théorème 2.25. *([11] et [35])*
Supposons que le cocycle ϕ *est continu, D-asymptotiquement compact (rétrograde), et* $\exists \hat{B} \in D$ *tel que* $\hat{B}$ *est D-absorbant (rétrograde).*
Alors, la famille

$$\{\hat{\mathcal{A}},\ \mathcal{A}(\omega) = \Lambda(\hat{B}, \omega),\ \omega \in \Omega\}$$

est un D-attracteur global rétrograde, et il est minimum i.e :
si $\hat{C} \in \wp$ *une famille, telle que* $\forall C \in \hat{C}$ *un ensemble fermé et* $C(\omega)$ *vérifie*

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\phi(t, \varphi_{-t}\hat{C}, B(\varphi_{-t}\hat{C})), C(\hat{C})) = 0,$$

alors

$$\mathcal{A}(\hat{C}) \subset C(\hat{C}).$$

Remarque 2.26. *Ici, nous avons défini l'attracteur global rétrograde à partir d'un coycle continu ϕ (voir aussi [67] et [71]), et nous pouvons aussi le définir à partir d'une famille de processus $U(t,\tau)$, qui est continue pour tout $t \geqslant \tau$. (cf. [12], [21], [34], [60] et [66]). L'attracteur (dans ce cas) est défini par*

$$\mathcal{A}(t) := \overline{\bigcup_{D} \Lambda_D(t)}, \quad \text{où } \Lambda_D(t) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{s\geqslant n} U(t, t-s)D}, \quad D \text{ borné.}$$

Proposition 2.27. *([11])*
Supposons que $\hat{B} \in \wp$ est une famille D-absorbante (rétrograde). Alors

$$\Lambda(\hat{D},\omega) \ \subset \ \Lambda(\hat{B},\omega), \quad \forall \hat{D} \in D, \omega \in \Omega,$$

et si $\hat{B} \in \ D$ alors

$$\Lambda(\hat{D},\omega) \ \subset \ \Lambda(\hat{B},\omega) \ \subset \ \overline{B(\omega)}, \quad \forall \hat{D} \in D, \omega \in \Omega.$$

Proposition 2.28. *([11])*
Si ϕ est D-asymptotiquement compact (rétrograde), alors $\forall \hat{D} \in D, \omega \in \Omega$ l'ensemble $\Lambda(\hat{D},\omega)$ est non vide, compact et

$$\lim_{t\to+\infty} dist(\phi(t, \varphi_{-t}w, D(\varphi_{-t}\omega)), \Lambda(\hat{D},\omega)) = 0.$$

Proposition 2.29. *([11])*
Soit ϕ un cocycle, continu, et D-asymptotiquement compact (rétrograde). Alors $\forall (t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\hat{D} \in D$

$$\phi(t,\omega,\Lambda(\hat{D},\omega)) = \Lambda(\hat{D},\varphi_t\omega).$$

Considérons le problème de Navier-Stokes suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t), \tag{2.41}$$

$$\text{div} u = 0, \quad \text{et} \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$u(\tau) = u_\tau, \ \tau \in \mathbb{R}.$$

Nous avons déjà trouvé l'existence et l'unicité de la solution $u(\cdot,\tau,u_\tau)$ de ce problème. Nous posons $\varphi_\tau := \tau + t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tau \geqslant 0$, et nous définissons ϕ par

$$\phi(\tau,t,u_\tau) := u(\tau+t; t, u_\tau), \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \tau \geqslant 0, \quad u_\tau \in H.$$

Par cette définition $\phi(\tau,t,\cdot) : H \to H$ est un cocycle continu dans H.
Nous avons le résultat suivant.

Proposition 2.30. *([11])*
Soit $\{u_{\tau_n}\} \in H$ *une suite qui converge faiblement dans* H. *Alors*

$$\begin{aligned}\phi(\tau, t-\tau, u_{\tau_n}) &\rightharpoonup \phi(\tau, t-\tau, u_\tau) \text{ faible dans } H, \quad \forall \tau \geqslant 0, \ t \in \mathbb{R}. \\ \phi(.-\tau, \tau, u_{\tau_n}) &\rightharpoonup \phi(.-\tau, \tau, u_\tau) \text{ faible dans } L^2(\tau, t; V), \quad \forall \tau, \ \tau < t.\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{R}_\lambda$ l'ensemble de toutes les fonctions $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, tel que

$$\lim_{t \to -\infty} e^{\lambda t} r^2(t) = 0, \tag{2.42}$$

et supposons que $\mathcal{D}_\lambda$ est la classe de toutes les familles $\hat{D} = \{D(t);\ t \in \mathbb{R}\}$, où $D(t) \subset \bar{B}(0, r_{\hat{D}}(t))$, pour $r_{\hat{D}} \in \mathcal{R}_\lambda$.

Théorème 2.31. *Supposons que* f *dans le problème* (2.41) *vérifie l'hypothèse suivant :*
(A). $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$ *et* $|f(t)|^2 \leqslant M$, *pour* M *suffisamment grand,*
et

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda \xi} \|f(\xi)\|^2_{V'} d\xi < +\infty, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors, il existe un attracteur global rétrograde pour le cocycle ϕ.

Démonstration.
Soient $t \in \mathbb{R}$, $\tau \geqslant 0$, et $u_\tau \in H$ fixé. Nous posons

$$u(r) = u(r; t-\tau, u_\tau) = \phi(r - t + \tau, t - \tau, u_\tau) \text{ pour } r \geqslant t - \tau.$$

Nous prenons le produit scalaire de

$$\frac{\partial u}{\partial r} - \nu \Delta u + Bu = f$$

par u, notons que $b(u, u, u) = 0$,

$$(\frac{du}{dr}, u) + \nu \|u(r)\|^2 = < f(r), u(r) > \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}|u(r)|^2 + 2\nu\|u(r)\|^2 &= 2 < f(r), u(r) > \\ &\leqslant 2\|f(r)\|_{V'}\|u(r)\| \\ &\leqslant \frac{1}{\nu}\|f(r)\|^2_{V'} + \nu\|u(r)\|^2.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dr}|u(r)|^2 + \nu\|u(r)\|^2 \leqslant \frac{1}{\nu}\|f(r)\|^2_{V'}$$

$$\frac{d}{dr}|u(r)|^2 + \lambda|u(r)|^2 \leqslant \frac{1}{\nu}\|f(r)\|^2_{V'}$$

$$\frac{d}{dr}\big(|u(r)|^2 e^{\lambda r}\big) \leqslant \frac{1}{\nu}e^{\lambda r}\|f(r)\|^2_{V'}.$$

En intégrant sur $[t-\tau, t]$, nous avons

$$e^{\lambda t}|u(t)|^2 \leqslant e^{\lambda(t-\tau)}|u_\tau|^2 + \frac{1}{\nu}\int_{t-\tau}^{t} e^{\lambda\xi}\|f(\xi)\|^2_{V'}d\xi \quad \forall\tau \geqslant 0. \tag{2.44}$$

Soit $\hat{D} \in \mathcal{D}_\lambda$ donné. D'après (2.44) nous avons

$$|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)|^2 \leqslant e^{-\lambda\tau}r^2_{\hat{D}}(t-\tau) + \frac{e^{-\lambda t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\xi}\|f(\xi)\|^2_{V'}d\xi,$$

$\forall u_\tau \in D(t-\tau),\ t \in \mathbb{R},\ \tau \geqslant 0$. Posons

$$(R_\lambda(t))^2 := \frac{2e^{-\lambda t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\xi}\|f(\xi)\|^2_{V'}d\xi,$$

et considérons $\hat{B}_\lambda$, la famille de toutes les boules fermées dans H définies par

$$B_\lambda(t) = \{u \in H,\ \ |u| \ \leqslant\ R_\lambda(t)\}.$$

D'après cette définition, $\hat{B}_\lambda \in \mathcal{D}_\lambda$. De plus, nous avons $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{\lambda t}r^2(t) = 0$, i.e., $\exists t_0 \geqslant 0$ tel que

$$e^{\lambda t}r^2(t) < \varepsilon, \quad \forall t \ \geqslant\ t_0.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} |\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)|^2 \ &\leqslant\ e^{-\lambda\tau}r^2_{\hat{D}}(t-\tau) + \frac{1}{2}R^2 \\ &<\ \varepsilon + \frac{1}{2}R^2_\lambda < R^2_\lambda, \quad t-\tau \geqslant t_0, \end{aligned}$$

et donc la famille $\hat{B}_\lambda$ est absorbant pour le cocycle ϕ. Afin de démontrer l'existence d'un attracteur rétrograde nous allons démontrer que le cocycle ϕ est asymptotiquement compact.
Soient $\hat{D} \in \mathcal{D}_\lambda$ fixé, $t \in \mathbb{R}$, (τ_n), $\tau_n \to +\infty$ et $u_{\tau_n} \in D(t-\tau_n)$.

Pour montrer que ϕ est asymptotiquement compact, il faut trouver une suite extraite de la suite $\big(\phi(\tau_n, t-\tau_n, u_{\tau_n})\big)$ qui converge dans H. Nous avons déjà trouvé que $\hat{B}_\lambda$ est absorbant, donc $\forall k \geqslant 0$, il existe $\tau_{\hat{D}}(k) \geqslant 0$ tel que

$$\phi(\tau, t-\tau-k, D(t-\tau-k)) \;\subset\; B_\lambda(t-k) \quad \forall \tau \geqslant \tau_{\hat{D}}(k).$$

Nous avons alors, pour $\tau \geqslant \tau_{\hat{D}}(k) + k$,

$$\phi(\tau-k, t-\tau, D(t-\tau)) \subset B_\lambda(t-k). \tag{2.45}$$

D'après (2.45), nous avons l'existence d'une suite $\{(\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}\} \subset \{(\tau_n, u_{\tau_n}\}$ et une suite (w_k) dans H, telles que, pour tout $k \geqslant 0$ et $w_k \in B_\lambda(t-k)$,

$$\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'}) \;\rightharpoonup\; w_k \;\text{ faiblement dans } H. \tag{2.46}$$

D'après la Proposition 2.30, nous avons

$$\begin{aligned} w_0 &= \text{(faible)} \lim_{n'\to\infty} \phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'}) \\ &= \text{(faible)} \lim_{n'\to\infty} \phi(k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})) \\ &= \phi\big(k, t-k, \text{(faible)} \lim_{n'\to\infty} \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})\big). \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$w_0 = \phi(k, t-k, w_k), \quad \forall k \geqslant 0,$$

et

$$|w_0| \leqslant \liminf_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})|. \tag{2.47}$$

Nous démontrons ensuite l'inégalité suivante

$$\limsup_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})| \leqslant |w_0|. \tag{2.48}$$

Pour cela, nous considérons

$$[u]^2 := \nu\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|^2.$$

Nous notons que $[\cdot]$ est une norme dans V équivalente à $\|\cdot\|$, parce que

$$[u]^2 = \nu\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|^2 \leqslant \nu\|u\|^2,$$

et, par l'inégalité de Poincaré,

$$[u]^2 = \nu\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}|u|^2 \geqslant \nu\|u\|^2 - \frac{\nu}{2}\|u\|^2 = \frac{\nu}{2}\|u\|^2.$$

Nous avons par (2.43)

$$\begin{aligned}|u(t)|^2 \leqslant |u_\tau|^2 e^{-\lambda\tau} &+ 2\int_{t-\tau}^{t} e^{\lambda(\xi-t)} < f(\xi), u(\xi) > d\xi\\ &- 2\nu\int_{t-\tau}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}\|u(\xi)\|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tau \geqslant 0$ et pour $u_\tau \in H$

$$\begin{aligned}|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)|^2 \leqslant |u_\tau|^2\ e^{-\lambda\tau} + 2\int_{t-\tau}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}\big(< f(\xi), \phi(\xi - t + \tau, t-\tau, u_\tau) >\\ -[\phi(\xi - t + \tau, t - \tau, u_\tau)]^2\big) d\xi, \qquad (2.49)\end{aligned}$$

et donc, pour tout $k \geqslant 0$ et $\tau_{n'} \geqslant k$,

$$\begin{aligned}\phi\big(k, t-k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})\big) &= \phi(k + \tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})\\ &= \phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}),\end{aligned}$$

et par (2.49)

$$\begin{aligned}&|\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})|^2 = |\phi(k, t-k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}))|^2\\ \leqslant\ & e^{-\lambda k}|\phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}))|^2\\ +\ & 2\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)} < f(\xi), \phi(\xi - t + k, t-k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})) > d\xi\\ &-2\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}[\phi(\xi - t + k, t-k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}))] d\xi. \qquad (2.50)\end{aligned}$$

Nous avons alors (comme dans (2.45))

$$\phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}) \in B_\lambda(t-k), \quad \forall \tau_{n'} \geqslant \tau_{\hat{D}}(k) + k,\ \ k \geqslant 0,$$

et

$$\lim_{n'\to\infty} \sup e^{-\lambda k}|\phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})|^2 \leqslant e^{-\lambda k}\ R_\lambda^2(t-k), \quad k \geqslant 0. \qquad (2.51)$$

Nous avons

$$\phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}) \rightharpoonup w_k \ \text{ faible dans } H,$$

et, d'après la Proposition 2.30

$$\phi(\cdot - t + k, t-k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})) \rightharpoonup \phi(\cdot - t + k, t-k, w_k) \text{ faible dans } L^2(t-k, t; V), \qquad (2.52)$$

ce qui donne

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)} \;< f(\xi), \phi(\xi - t + k, t - k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})) > d\xi$$

$$= \int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)} < f(\xi), \phi(\xi - t + k, t - k, w_k) > d\xi, \qquad (2.53)$$

puisque $e^{\lambda(\xi-t)}\, f(\xi) \in\; L^2(t-k, t; V')$. De plus, $\big(\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}[v(\xi)]^2 d\xi\big)^{\frac{1}{2}}$ est une norme dans $L^2(t-k, t; V)$, et nous avons par (2.52)

$$\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}[\phi(\xi - t + k, t - k, w_k)]^2 d\xi \leqslant$$

$$\liminf_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}[\phi(\xi - t + k, t - k, \phi(\tau_{n'} - k, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'}))]^2 d\xi. \qquad (2.54)$$

D'après les relations (2.50), (2.51), (2.53) et (2.54), nous avons

$$\limsup_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})|^2 \leqslant e^{-\lambda k} R_\lambda^2(t-k) +$$

$$2\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}(< f(\xi), \phi(\xi - t + k, t - k, w_k) > -[\phi(\xi - t + k, t - k, w_k)]^2)d\xi. \quad (2.55)$$

D'autre part, $w_0 = \phi(k, t - k, w_k), \;\; \forall k \geqslant 0$ et par (2.49), nous avons

$$|w_0|^2 = |\phi(k, t - k, w_k)|^2 \leqslant |w_k|^2 e^{-\lambda k} + 2\int_{t-k}^{t} e^{\lambda(\xi-t)}$$

$$\big(< f(\xi), \phi(\xi - t + k, t - k, w_k) > -[\phi(\xi - t + k, t - k, w_k)]^2\big)d\xi. \qquad (2.56)$$

Par (2.55) et (2.56)

$$\begin{aligned}\limsup_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})|^2 &\leqslant e^{-\lambda k} R_\lambda^2(t-k) + |w_0|^2 - |w_k|^2 e^{-\lambda k} \\ &\leqslant e^{-\lambda k} R_\lambda^2(t-k) + |w_0|^2,\end{aligned}$$

or,

$$R_\lambda^2(t) = \frac{2e^{-\lambda t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\xi}\|f(\xi)\|_{V'}^2 d\xi,$$

et donc

$$e^{-\lambda k} R_\lambda^2(t-k) = \frac{2e^{-\lambda t}}{\nu}\int_{-\infty}^{t-k} e^{\lambda\xi}\|f(\xi)\|_{V'}^2 d\xi \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

Nous trouvons alors (2.48), et par (2.47) nous avons

$$\lim_{n'\to\infty} |\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})|^2 = |w_0|^2.$$

Cela donne, avec la convergence faible, la convergence forte dans H de $\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau n'})$ vers w_0. Donc, ϕ est asymptotiquement compact et d'après le Théorème 2.25, nous avons l'existence d'un attracteur rétrograde. ■

Chapitre 3

Problème de Cahn-Hilliard autonome

3.1 Position du problème

Soient Ω un borné dans $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$, Γ sa frontière et $u(x, t)$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ une fonction scalaire (inconnue).
L'équation de Cahn-Hilliard autonome s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta K(u) = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3.1}$$

$$K(u) = -\nu \Delta u + f(u), \quad \nu > 0. \tag{3.2}$$

Ici f est un polynôme d'ordre $2p - 1$

$$f(u) = \sum_{j=1}^{2p-1} a_j u^j, \quad p \in \mathbb{N},\ p \geqslant 2.$$

Soit g la fonction primitive de f telle que $g(u) = 0$ lorsque $u = 0$,

$$g(u) = \sum_{j=2}^{2p} b_j u^j, \quad j b_j = a_{j-1},\ 2 \leqslant j \leqslant 2p.$$

Nous supposons que les coefficients de f (et de g) sont positifs ;

$$a_{2p-1} = 2p b_{2p} > 0.$$

L'équation "classique" de Cahn-Hilliard correspond au cas où

$$p = 2,\ f(u) = -\alpha u + \beta u^3,\ \alpha,\ \beta > 0.$$

Pour avoir un problème bien posé, nous associons à cette équation les conditions aux limites et les conditions initiales suivantes.

– Les conditions aux limites : nous avons un de ces deux cas :
  1. les conditions de Neumann :
$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}K(u) = 0 \text{ sur } \Gamma \tag{3.3}$$
     n est la norme unitaire extérieure de Γ.
  2. Le cas de l'espace périodique :
     nous supposons que $\Omega = \Pi_{i=1}^{n}]0, L_i[,\ L_i > 0$, et les conditions sont :
$$\psi \mid_{x_i=0} = \psi \mid_{x_i=L_i}, \quad i = 1, 2, ..., n \tag{3.4}$$
     pour u et ses dérivées d'ordre $\leqslant 3$.

  Nous trouvons que les conditions aux limites de Neumann sont équivalentes à :
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{3.5}$$
– La condition initiale :
$$u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega. \tag{3.6}$$

3.2 Les espaces fonctionnels

Nous définissons les espaces fonctionnels de ce problème. Soit
$$H := \{u \in L^2(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0\}.$$
Nous désignons par (u, v) le produit scalaire dans H, i.e.
$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$
ce produit scalaire s'étend en le crochet de dualité pour $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, où $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω (voir [66]), et $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions $\mathbb{C}^\infty$ sur Ω et à support compact dans Ω.
Nous munissons H de la norme $|u| := \|u\|_H = \{(u, u)\}^{\frac{1}{2}}$.
Posons
$$V := \{u \in H^1(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0\},$$
(pour le cas des conditions de Neumann), et $V' = H^{-1}(\Omega)$. Pour le cas de l'espace périodique on suppose $V := H^1_{per}(\Omega)$. Nous munissons V du produit scalaire usuel de $H^1(\Omega)$, $((u, v))$, et de la norme associée $\|u\| = \|u\|_V$.
D'après l'inégalité généralisée de Poincaré (voir [70]), $|\bar{u}| \leqslant c|\nabla u|$, donc V est inclu dans H avec injection continue et dense.

De même, $H \hookrightarrow V'$ avec injection continue, et H est dense dans V'. Nous munissons V' de la norme $\|\cdot\|_{H^{-1}}$, telle que $\|\cdot\|_{H^{-1}} := \|\cdot\|_{-1} := |(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\cdot|$ pour les fonctions à moyenne nulle et pour les fonctions à moyenne conservée (non nulle) la norme $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ est équivalente à $\left(|\cdot|^2 + (\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega udx)^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
Supposons également l'espace

$$V_1 := \{u \in H^2(\Omega),\ \ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0\},$$

muni de la norme usuelle de $H^2(\Omega)$, $\|\cdot\|_2$.

3.3 Théorème d'existence et d'unicité

3.3.1 La formulation variationnelle

Puisque l'opérateur $(-\Delta)$ est inversible sur des espaces de fonctions à moyenne nulle, on introduit les espaces suivantes :

$$\overset{\circ}{H} := \Big\{u \in H,\ \ \int_\Omega udx = 0\Big\},$$

$$\overset{\circ}{V} := \Big\{u \in V,\ \ \int_\Omega udx = 0\Big\},$$

$$\overset{\circ}{V}_1 := \Big\{u \in V_1,\ \ \int_\Omega udx = 0\Big\},$$

$$\overset{\circ}{V'} := \Big\{u \in V',\ \ < u, 1 >_{V',V} = 0\Big\}.$$

Nous trouvons la formulation variationnelle en multipliant l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = 0 \tag{3.7}$$

par une fonction teste $v = v(x)$, nous intégrons et intégrons par parties sur Ω, nous utilisons la formule de Green, nous trouvons

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u, v) + \nu\int_\Omega (\Delta u, \Delta v) - \int_\Omega (f(u), \Delta v) = 0. \tag{3.8}$$

Ici, nous avons utilisé les conditions aux limites.
Nous utilisons la formule de Green encore une fois dans le dernier terme

$$\int_\Omega (f(u), \Delta v) = -\int_\Omega (f'(u)\nabla u, \nabla v) \tag{3.9}$$

et nous obtenons

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu(\Delta u, \Delta v) + (f'(u)\nabla u, \nabla v) = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_1. \tag{3.10}$$

Nous supposons que l'opérateur $A = -\Delta$, avec les conditions aux limites de Neumann (ou le cas périodique), donc $A^2 = \Delta^2$. Nous prenons la forme bilinéaire

$$a^2(u, v) = (\Delta u, \Delta v). \tag{3.11}$$

Celle-ci est continue dans $H^2(\Omega)$. Nous associons à a^2 l'opérateur A^2 dans H de domaine

$$D(A^2) = \{v \in H^4(\Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial \Delta v}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \Gamma\},$$

pour le cas des conditions de Neumann, et $D(A^2) = H^4_{per}(\Omega)$, pour le cas de l'espace périodique.
Pour $u \in D(A^2)$, nous définissons A^2u de la façon suivante

$$(A^2u, v) = a^2(u, v), \quad \forall v \in H, \tag{3.12}$$

$$A^2u = \Delta^2 u.$$

Nous posons $< u >:= \dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$, la moyenne de la fonction u. L'équation (3.10) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}(u- < u >), v\big) + \nu(\nabla(u- < u >), \nabla v)$$
$$+(f(u)- < f(u) >, v) = 0, \qquad \forall v \in \mathring{V}_1. \tag{3.13}$$

Notons que, pour $v = 1$ dans (3.10),

$$\int_\Omega u(x,t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx; \quad \forall t > 0, \qquad \text{(moyenne conservée)}. \tag{3.14}$$

Dans la suite nous allons supposer, sans perte de généralité, que la moyenne est nulle pour démontrer l'existence d'une solution, ceci nous amène à travailler sur des espaces à moyenne nulle. En général, on travaille avec u de moyenne constante, i.e., $< u >=$ const. $\neq 0$.

3.3.2 La fonction de Lyapunov

Nous prenons la fonction de Lyapunov suivante (voir [70]) :

$$J(u) = \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega g(u)dx. \tag{3.15}$$

Soit u une solution suffisamment régulière du problème (3.1)-(3.2). Nous multiplions (3.1) par $K(u)$, intégrons sur Ω et utilisons la formule de Green :

$$\int_\Omega K(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_\Omega \Delta K(u)K(u)dx = 0 \tag{3.16}$$

$$
\begin{aligned}
(K(u), \frac{\partial u}{\partial t}) &= -\nu \int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t} + \int_\Omega f(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&-\nu \int_\Omega \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial t} + \int_\Omega f(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&= \nu \int_\Omega \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \sum_j \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j} + \int_\Omega f(u) \frac{\partial u}{\partial t} dx \\
&= \frac{d}{dt} J(u).
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
-(\Delta K(u), K(u)) &= \int_\Omega |\nabla K(u)|^2 dx - \int_\Gamma \frac{\partial K(u)}{\partial \nu} K(u) d\Gamma \\
&= |\nabla K(u)|^2.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Donc, par (3.17) et (3.18), nous avons

$$
\frac{d}{dt} J(u) + |\nabla K(u)|^2 = 0, \tag{3.19}
$$

et $|\nabla K(u)|^2 \geqslant 0$, d'où

$$
\frac{d}{dt} J(u) \leqslant 0 \Rightarrow J(u(t)) \leqslant J(u_0), \quad \forall t \geqslant 0. \tag{3.20}
$$

L'existence d'une fonction de Lyapunov de ce problème va nous aider à trouver les attracteurs.

Lemme 3.1. *Pour $\eta > 0$,*

$$
\{|\Delta u|^2 + \eta |u|^2\}^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \{|\Delta u|^2 + \eta (\int_\Omega u(x) dx)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}
$$

sont deux normes dans $H^2(\Omega)$ équivalentes à la norme usuelle $\|.\|_{H^2}$. De plus,

$$
\{|\Delta^2 u|^2 + \eta |u|^2\}^{\frac{1}{2}} \quad et \quad \{|\Delta^2 u|^2 + \eta (\int_\Omega u(x) dx)^2\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.22}
$$

sont deux normes dans $D(A^2)$ équivalentes à la norme de H^4.

Théorème 3.2. *Le problème (3.1), (3.2), (3.3) et (3.6) possède une seule solution u qui appartient à*

$$
\mathbb{C}([0,T]; H) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^{2p}(0,T; L^{2p}(\Omega)) \quad \forall T > 0,
$$

pour tout u_0 donné dans H.
De plus, $u_0 \to u(t)$ est continue dans H.

En outre, si $p = 2$ lorsque $n = 3$ (p est quelconque lorsque $n = 1, 2$) et $u_0 \in H^2(\Omega)$ alors

$$u \in \mathbb{C}([0,T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; D(A^2)) \quad \forall T > 0.$$

Enfin, si $u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$ alors

$$u \in L^\infty(0,T; H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

Ce théorème donne l'existence d'un semi-groupe $S(t)$:

$$S(t) : u_0 \in H \;\rightarrow\; u(t) \in H.$$

Nous pouvons aussi montrer une propriété de régularité de $S(t)$ qui implique que $u(t) \in H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega), \quad \forall t > 0$.
Avant de commencer la démonstration de ce théorème nous trouvons des estimations a priori et nous cherchons un borné absorbant.

3.4 L'attracteur global

3.4.1 Borné absorbant

Nous allons ici chercher un borné absorbant dans V' et un borné dans V en utilisant la fonction de Lyapunov $J(u)$.
Dans la suite nous notons par N l'opérateur $(-\Delta)^{-1}$. Nous posons $\bar{u} := u - < u >$, ce qui implique que $\bar{u}$ est à moyenne nulle. Nous allons trouver quelques estimations nécessaires pour la suite. Nous avons, par (3.14), que l'équation (3.1) est équivalente à

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \Delta K(u) = 0.$$

Cette équation est équivalente à

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} + K(u) =< f(u) > . \tag{3.23}$$

Nous prenons le produit scalaire dans H de cette équation par $\bar{u}$, notons que $< \bar{u} >= 0$, nous trouvons

$$\big(\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u}, \bar{u}\big) + (K(u), \bar{u}) = 0.$$

Nous avons

$$((\varphi_1, \varphi_2))_{-1} = (N(\varphi_1), \varphi_2) = (\varphi_1, N\varphi_2)$$

et

$$\frac{d}{dt}(N\bar{u}, \bar{u}) = \big(\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u}, \bar{u}\big) + \big(\bar{u}, \frac{\partial}{\partial t} N\bar{u}\big) = 2\big(\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u}, \bar{u}\big).$$

Donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + (K(u), \bar{u}) = 0. \tag{3.24}$$

Par (3.2)

$$K(u) = -\nu\Delta u + f(u).$$

Alors

$$\begin{aligned}(K(u), \bar{u}) &= (K(u), u) - (K(u), < u >)\\ &= -\nu(\Delta u, u) + (f(u), u) + < u > \int_\Omega f(u)dx.\end{aligned}$$

Par la formule de Green

$$(K(u), u) = \nu|\nabla u|^2 + (f(u), u) + < u > \int_\Omega f(u)dx. \tag{3.25}$$

Par définition de la fonction $f(s)$, nous trouvons que le terme principal de cette fonction est $2pb_{2p}s^{2p-1}$ et celui de $f(s)s$ est $2pb_{2p}s^{2p}$.
Nous avons $b_{2p} > 0$, donc $\exists c_1$ tel que :

$$f(s)s \geqslant pb_{2p}s^{2p} - c_1, \ \forall s \in \mathbb{R}, \tag{3.26}$$

et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c_2 = c_2(\varepsilon)$ telle que :

$$|f(s)| \leqslant \varepsilon b_{2p}s^{2p} + c_2(\varepsilon), \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.27}$$

De même, le terme principal de g est $b_{2p}s^{2p}$, donc $\exists c_3$ telle que :

$$\frac{1}{2}b_{2p}s^{2p} - c_3 \leqslant g(s) \leqslant \frac{3}{2}b_{2p}s^{2p} + c_3 \quad , \ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.28}$$

D'après (3.26) et (3.27), et pour $\varepsilon = \dfrac{1}{< u >}(p - \frac{3}{2})$, nous avons par (3.25)

$$(K(u), \bar{u}) \geqslant \nu|\nabla u|^2 + \frac{3}{2}b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx - c|\Omega|.$$

Nous utilisons (3.28)

$$\begin{aligned}(K(u), \bar{u}) &\geqslant \nu|\nabla u|^2 + \int_\Omega g(u)dx - k_0\\ &\geqslant J(u) - k_0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

où k_0 est positive, dépend de c_1, c_2, c_3 et $|\Omega|$.
Nous avons que $\{(N\varphi, \varphi)\}^{\frac{1}{2}} = \|\varphi\|_{-1}$ est continu dans $L^2(\Omega)$, donc $\exists c_1'$, dépend de Ω, telle que

$$\|\bar{u}\|_{-1} \leqslant c_1'|\bar{u}|, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Et d'après l'inégalité généralisée de Poincaré, nous avons

$$|\bar{u}| \leqslant c(\Omega)|\nabla u|, \quad \forall u \in H^1(\Omega)$$

nous obtenons donc

$$\|\bar{u}\|_{-1} \leqslant c_3'|\nabla u|, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Par (3.29), nous écrivons (3.24) :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + J(u) - k_0 \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + (K(u), \bar{u}) = 0$$

donc

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + J(u) \leqslant k_0. \tag{3.30}$$

En utilisant (3.15) et (3.28), nous écrivons

$$J(u) \geqslant \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega b_{2p}u^{2p}dx - c_3|\Omega|$$

$$\geqslant \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 - c_3|\Omega|.$$

Nous déduisons par (3.30)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2(c_3')^2}\|\bar{u}\|_{-1}^2 \leqslant k_1, \quad k_1 = k_0 + c_3|\Omega|. \tag{3.31}$$

Nous multiplions cette inégalité par $\exp(\nu c_4' t)$, nous trouvons

$$\frac{d}{dt}(e^{\nu c_4' t}\|\bar{u}\|_{-1}^2) \leqslant 2k_1 e^{\nu c_4' t}.$$

Nous intégrons entre 0 et t

$$e^{\nu c_4' t}\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|\bar{u}(0)\|_{-1}^2 + \frac{2k_1}{\nu c_4'}(e^{\nu c_4' t} - 1).$$

Donc

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|\bar{u}(0)\|_{-1}^2 e^{-\nu c_4' t} + \frac{2k_1}{\nu c_4'}(1 - e^{-\nu c_4' t}). \tag{3.32}$$

Nous avons donc

$$\lim_{t\to\infty}\sup \|u(t) - < u(t) > \|_{-1}^2 \leqslant \rho_0^2, \quad \rho_0^2 = \frac{2k_1}{\nu c_4'}. \tag{3.33}$$

Supposons que

$$\|\bar{u}(0)\|_{-1} \leqslant R \quad \text{et} \quad < u_0 > \leqslant \eta. \tag{3.34}$$

Soit $\rho > \rho_0$. Nous allons chercher $t_0 = t_0(R, \rho)$ tel que

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1} \leqslant \rho, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Par (3.32), nous avons

$$\begin{aligned}\|\bar{u}\|_{-1}^2 &\leqslant R^2 e^{-\nu c_4' t_0} + \rho_0^2 - \rho_0^2 e^{-\nu c_4' t_0}\\ &= (R^2 - \rho_0^2) e^{-\nu c_4' t_0} + \rho_0^2.\end{aligned}$$

Nous voulons avoir $\|\bar{u}\|_{-1} < \rho$, c'est à dire

$$\begin{aligned}(R^2 - \rho_0^2) e^{-\nu c_4' t_0} + \rho_0^2 &< \rho^2\\ (R^2 - \rho_0^2) e^{-\nu c_4' t_0} &< \rho^2 - \rho_0^2\\ e^{-\nu c_4' t_0} &< \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{R^2 - \rho_0^2}\\ -\nu c_4' t_0 &< ln \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{R^2 - \rho_0^2}\\ t_0 &> \frac{1}{\nu c_4'} ln \frac{R^2 - \rho_0^2}{\rho^2 - \rho_0^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\exists t_0 = t_0(R, \rho) \text{ tel que } \|\bar{u}(t)\|_{-1} \leqslant \rho, \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{3.35}$$

Ceci donne l'existence d'un borné absorbant pour $S(t)$ dans l'espace $B_\eta := \{u \in L^2(\Omega), \quad < u >= \eta\}$, muni de la norme $\|.\|_{-1}$.
Nous intégrons la relation (3.30), nous trouvons :

$$[\frac{1}{2}\|\bar{u}\|_{-1}^2]_t^{t+r} + \int_t^{t+r} J(u(s))ds \leqslant rk_0.$$

Par (3.35) nous trouvons

$$\int_t^{t+r} J(u(s))ds \leqslant \rho^2 + rk_0, \quad \forall t \geqslant t_0,$$

et donc

$$J(u(t+r)) \leqslant \frac{\rho^2}{r} + k_0.$$

Nous avons $J(u) = \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega g(u)dx$ et

$$\frac{1}{2} b_{2p} s^{2p} - c_3 \leqslant g(s) \leqslant \frac{3}{2} b_{2p} s^{2p} + c_3.$$

Donc

$$\frac{\nu}{2}|\nabla u(t+r)|^2 + \int_\Omega g(u(t+r))dx \leqslant \frac{\rho^2}{r} + k_0$$

$$\frac{\nu}{2}|\nabla u(t+r)|^2 + \frac{1}{2} b_{2p} \int_\Omega u^{2p}(x,t)dx \leqslant \frac{\rho^2}{r} + k_0 + c_3|\Omega|$$

$$\nu|\nabla u(t)|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}(x,t)dx \leqslant k_2, \tag{3.36}$$

où

$$k_2 = 2c_3|\Omega| + \frac{2\rho^2}{r} + 2k_0.$$

Soit B_1 un borné dans $H^1(\Omega)$ tel que, $\forall\varphi \in B_1$,

$$|\nabla\varphi| \leqslant \sqrt{k_2}, \qquad |<\varphi>| \leqslant \eta.$$

Les estimations précédentes et (3.36), impliquent que l'image de tout borné B de $H_\eta := \bigcup_{|<u>|\leqslant\eta} B_\eta$ par $S(t)$ est un ensemble dans B_1 pour $t \geqslant t_1(B) = t_0 + r$, t_0 est comme auparavant. Cela implique aussi l'existence d'un borné absorbant dans $H_\eta \cap H^1(\Omega)$.

Borné absorbant dans $H^2(\Omega) \cap H_\eta$

Tout d'abord nous trouvons une estimation bornée de u dans $H^2(\Omega)$. Nous multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = 0 \tag{3.37}$$

par $\Delta^2 u$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \nu|\Delta^2 u|^2 &= (\Delta f(u), \Delta^2 u)\\
&\leqslant |\Delta f(u)||\Delta^2 u|\\
&\leqslant \frac{\nu}{4}|\Delta^2 u|^2 + c|\Delta f(u)|^2\\
&\leqslant \frac{\nu}{2}|\Delta^2 u|^2 + c.
\end{aligned}$$

Ce qui donne en intégrant entre 0 et t

$$|\Delta u(t)|^2 + \int_0^t |\Delta^2 u|^2 ds \leqslant cT + |\Delta u(0)|^2. \tag{3.38}$$

Par cette estimation nous trouvons que la solution u appartient à $H^2(\Omega)$ si la solution initiale est dans cet espace.
En outre, en multipliant (3.37) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, on trouve

$$\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \leqslant c|\Delta f(u)|^2 + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2.$$

Le terme $|\Delta f(u)|$ sera calculé dans le chapitre de Cahn-Hilliard visqueux, et nous avons, par (5.45),

$$|\Delta f(u)| \leqslant c(\|u\| \ \|u\|_2)|\Delta u|.$$

Par (3.36) et (3.38) nous avons

$$\|u(t)\| \leqslant \text{const.} \quad \text{et} \quad \|u(t)\|_2 \leqslant \text{const.} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Alors

$$\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 \leqslant c|\Delta u|^2. \tag{3.39}$$

Grâce au lemme de Gronwall, nous trouvons un borné absorbant $\mathcal{B}$ dans $H^2(\Omega)\cap H_\eta$, i.e., $\forall B$ borné , il existe t_2 tel que

$$S(t)B \subset \mathcal{B}, \qquad \forall t \geqslant t_2.$$

Nous avons les deux résultat.

Lemme 3.3. *$S(t)$ est uniformément compact sur $H^1(\Omega) \cap H_\eta$.*

Démonstration.
Soit B un borné dans $H^1(\Omega) \cap H_\eta$. D'après l'existence d'un borné absorbant dans $H^1(\Omega)$ et d'un borné absorbant dans $H^2(\Omega) \cap H_\eta$, nous avons

$$\exists t_1 \ \text{ tel que } \ S(t)B \subset B_1, \quad \forall t \geqslant t_1,$$

et

$$\exists t_2 \ \text{ tel que } \ S(t)B \subset \mathcal{B}, \quad \forall t \geqslant t_2.$$

L'injection $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ étant compacte alors l'ensemble $\bigcup_{t\geqslant t_2} S(t)B$ (est borné dans $H^2(\Omega) \cap H_\eta$) est relativement compact dans $H^1(\Omega) \cap H_\eta$. ■

Lemme 3.4. *$S(t)$ est continu sur H_η pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$.*

Démonstration.
Soient u_1 et u_2 deux solutions de (3.23) telles que $< u_1 >=< u_2 >$. Posons $u := u_1 - u_2$. Alors, u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} Nu = \nu\Delta u - \ell(t)u, \tag{3.40}$$

où $\ell(t) := \int_0^1 f'(su_1 + (1-s)u_2)ds$. D'après la définition de f, nous avons $\ell(t) \geqslant -c$. Multiplions (3.40) par u

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u|^2 &\leqslant c|u|^2 \\ &\leqslant c|\nabla u|\|u\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + c\|u\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

En intégrant

$$\|u(t)\|_{-1}^2 + \nu \int_0^t |\nabla u(s)|^2 ds \leqslant e^{ct}\|u(0)\|_{-1}^2. \tag{3.41}$$

D'où la continuité. ■

Nous allons utiliser le théorème suivant.

Théorème 3.5. *Supposons que H est un espace de Banach et que les opérateurs $S(t)$ sont donnés et vérifient :*

1.

$$\begin{cases} S(t+s) = S(t).S(s), & \forall s,t \geqslant 0, \\ S(0) = I. \end{cases}$$

2. $S(t)$ est un opérateur continu dans H, $\forall t \geqslant 0$.

3. Les opérateurs $S(t)$ sont uniformément compacts pour t grand (i.e, $\forall \beta$ borné donc $\exists t_0$ dépend de β tel que $\bigcup_{t\geqslant t_0} S(t)\beta$ est relativement compact dans H).

Nous supposons aussi qu'il existe un ensemble fermé $\mathcal{U}$ et un borné β de $\mathcal{U}$ tel que β est absorbant dans $\mathcal{U}$.
Alors l'ensemble ω-limite de β, $\mathcal{A} = \omega(\beta)$, est un attracteur global dans H qui attire tous les ensembles bornés.
De plus, si $t \mapsto S(t)u_0$ est continue de $\mathbb{R}_+$ dans H, pour $u_0 \in H$, et $\mathcal{U}$ est convexe alors $\mathcal{A}$ est connexe.

D'après ce qui précède, toutes les hypothèses du Théorème 3.5 sont satisfaites, pour le semi-groupe $S(t)$ dans H_η, et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 3.6. *En dimension $1, 2$ ou 3 le semi groupe $S(t): H_\eta \rightarrow H_\eta$, $\eta \geqslant 0$, associé au problème (3.1), (3.3) et (3.4) possède un attracteur global $\mathcal{A}$ dans H_η. Cet attracteur est connexe.*

3.5 Preuve du Théorème 3.2

Nous allons trouver des estimations a priori.

3.5.1 Estimations de u

Estimation de u dans $L^\infty(0,T;H)$ et dans $L^2(0,T;H^2(\Omega))$

Nous avons par (3.10)

$$(\frac{du}{dt}, v) + \nu(\Delta u, \Delta v) + (f'(u)\nabla u, \nabla v) = 0.$$

Nous remplaçons v par $u(t)$ dans la dernière équation

$$(\frac{du}{dt}, u) + \nu|\Delta u|^2 + (f'(u)\nabla u, \nabla u) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + (f'(u)\nabla u, \nabla u) = 0. \tag{3.42}$$

Le terme principal de $f'(s)$ est $2p(2p-1)b_{2p}s^{2p-2}$ et donc, comme dans (3.26), $\exists c_4$ telle que

$$f'(s) \geqslant b_{2p}s^{2p-2} - c_4, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Nous pouvons aussi utiliser $f' \geqslant -c$. Par (3.42) nous trouvons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + b_{2p}(u^{2p-2}\nabla u, \nabla u) \leqslant c_4|\nabla u|^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant c_4|\nabla u|^2. \tag{3.43}$$

On a par interpolation

$$\|u\|_{H^1}^2 \leqslant \|u\|_{L^2}\|u\|_{H^2}.$$

Par cette inégalité nous trouvons :

$$|\nabla u|^2 \leqslant c|u| \; \|u\|_2. \tag{3.44}$$

Par le Lemme 3.1 et l'inégalité (3.44)

$$|\nabla u|^2 \leqslant c_3'|u|(|\Delta u| + | < u > |)$$

$$c_4|\nabla u|^2 \leqslant \frac{\nu}{2}|\Delta u|^2 + \frac{1}{\nu c_4'}|u|^2 + c(\eta). \tag{3.45}$$

Nous déduisons par (3.43)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant \frac{\nu}{2}|\Delta u|^2 + \frac{1}{\nu c_4'}|u|^2 + c(\eta),$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + 2b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant k_3|u|^2 + c(\eta), \tag{3.46}$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2 - k_3|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + 2b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant c(\eta).$$

Par cette inégalité nous obtenons une borne pour u dans $L^\infty(0,T;H)$, parce que

$$\frac{d}{dt}|u|^2 - k_3|u|^2 \leqslant c(\eta).$$

Nous multiplions par e^{-k_3t}

$$e^{-k_3t}\frac{d}{dt}|u|^2 - k_3e^{-k_3t}|u|^2 \leqslant c(\eta)e^{-k_3t} \leqslant c(\eta), \quad \text{où } k_3 \geqslant 0.$$

Ce qui donne en intégrant entre 0 et t où $t \leqslant T$

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 e^{k_3t} + c'(\eta)e^{k_3t}, \qquad t \leqslant T < +\infty,$$

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_0|^2 e^{k_3 T} + c'(\eta) e^{k_3 T} < +\infty, \quad \forall u_0 \in H. \tag{3.47}$$

Donc $u \in L^\infty(0,T;H)$, pour tout $T < \infty$.
De même, nous obtenons, par (3.46) et le Lemme 3.1, une estimation de u dans $L^2(0,T;H^2(\Omega))$;

$$|u(t)|^2 + c_1 \int_0^T \|u\|_{H^2}^2 dt \leqslant c|u_0|^2 e^{k_3 T} + c'(\eta) e^{k_3 T} + c(\eta) T < \infty, \quad \text{puisque } T < \infty.$$

Donc

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)).$$

Estimation de u dans $L^2(0,T;L^{2p}(\Omega))$ et dans $L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega))$

Nous avons par (3.19)

$$\frac{d}{dt} J(u) + |\nabla K(u)|^2 = 0.$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt} J(u) \leqslant 0,$$

$$\frac{d}{dt}\big(\frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega g(u)dx\big) \leqslant 0.$$

Par (3.28)

$$\frac{d}{dt}(\frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \|u\|_{L^{2p}}^{2p} + c_3|\Omega|) \leqslant 0.$$

Nous intégrons entre 0 et t,

$$c'|\nabla u(t)|^2 + \|u(t)\|_{L^{2p}}^{2p} \leqslant c'|\nabla u_0|^2 + \|u_0\|_{L^{2p}}^{2p} < \infty, \quad \text{si } u_0 \in H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega).$$

Nous notons par cette inégalité que $u \in H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$, et nous avons aussi

$$\sup_{t \to \infty} \big(c'\|u(t)\|_{H^1}^2 + \|u(t)\|_{L^{2p}}^{2p}\big) < \infty,$$

i.e., $u \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega))$.
Nous avons par (3.30)

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u|^2 + b_{2p}\|u\|_{L^{2p}}^{2p} \leqslant k_0'.$$

On intégre entre 0 et t

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + c\int_0^t \|u(s)\|_{L^{2p}}^{2p} ds \leqslant \|\bar{u}(0)\|_{-1}^2 + k_1',$$

i.e., $u \in L^2(0,T;L^{2p}(\Omega))$. Nous allons maintenant montrer que $\dfrac{d}{dt}J(u(t)) \leqslant 0$. Pour cela nous allons établire une relation qui ressemble à (3.19) lorsque la solution u

n'est pas suffisamment régulière, donc nous allons utiliser une approximation. Nous prennons une fonction lipschitzienne f_M telle que

$$f_M(s) = f(s), \quad \text{si} \quad |s| \leqslant M$$

et

$$f_M(s) = f(M)\text{sgn } s, \quad \text{si} \quad |s| \geqslant M.$$

D'après cette définition f_M est bornée. Nous considérons u_M comme une solution du problème (3.1) (où f_M remplace f), (3.3) et (3.4). Nous supposons que u_M est suffisamment régulière. Nous avons

$$\frac{d}{dt}J(u_M) + |\nabla K_M(u_M)|^2 = 0 \quad (f_M \text{ remplace } f). \tag{3.48}$$

Lorsque $M \to \infty$ alors $f_M \to f$ et $u_M \to u$. Pour passer à la limite dans la relation (3.48), nous avons par (3.17)

$$\frac{d}{dt}(J(u_M)) = (K(u_M), \frac{du_M}{dt}).$$

$$K(u_M) = -\nu\Delta u_M + f_M \xrightarrow[M\to\infty]{} -\nu\Delta u + f = K(u),$$

car $u_M \to u$ alors $\Delta u_M \to \Delta u$. Donc

$$\frac{d}{dt}(J(u_M)) = (K(u_M), \frac{du_M}{dt}) \to (K(u), \frac{du}{dt}) = \frac{d}{dt}(J(u)).$$

De plus,

$$K(u_M) \to K(u) \Rightarrow |\nabla K(u_M)|^2 \to |\nabla K(u)|^2.$$

Donc, en passant (3.48) à la limite, nous avons

$$\frac{d}{dt}J(u(t)) + |\nabla K(u(t))|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}J(u(t)) \leqslant 0.$$

3.5.2 Démonstration de l'unicité

Notre problème est

$$\frac{du}{dt} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = 0 \quad \text{dans } L^2(0, T, V'),$$

$$u(0) = u_0,$$

avec les conditions de Neumann ou les conditions de l'espace périodique.
Pour montrer que nous avons une solution unique de ce problème, nous supposons que nous avons deux solutions différentes u_1 et u_2. Donc, u_1 et u_2 vérifient respectivement

$$\frac{du_1}{dt} + \nu\Delta^2 u_1 - \Delta f(u_1) = 0,$$

$$u_1(0) = u_0,$$

et

$$\frac{du_2}{dt} + \nu\Delta^2 u_2 - \Delta f(u_2) = 0,$$
$$u_2(0) = u_0.$$

Nous posons $u := u_1 - u_2$ avec $u_0 = u_1(0) - u_2(0) = 0$. Alors, u est une solution du problème suivant

$$\frac{du}{dt} + \nu\Delta^2 u - \big(\Delta f(u_1) - \Delta f(u_2)\big) = 0,$$
$$u(0) = 0.$$

Ce problème équivaut à

$$\frac{d}{dt}N\bar{u} - \nu\Delta u + \big(f(u_1) - f(u_2)\big) =< f(u_1) - f(u_2) >,$$
$$u(0) = 0.$$

Prenons le produit scalaire dans H de la dernière équation par $\bar{u}$, nous intégrons et nous utilisons la formule de Green

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + 2\nu|\nabla u|^2 &= -2(f(u_1) - f(u_2), \bar{u}) \\
&= -2(f(u_1) - f(u_2), u) + 2(f(u_1) - f(u_2), < u >) \\
&= -2\Big(\int_{u_2}^{u_1} f'(s)ds, u\Big) + 2 < u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big).
\end{aligned}$$

Donc, pour $f' \geqslant -c$,

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + 2\nu|\nabla u|^2 \leqslant c|u|^2 + 2| < u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)|. \tag{3.49}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
|u|^2 &\leqslant 2(|\bar{u}|^2 + < u >^2) \leqslant c(\|\bar{u}\|_{-1}|\nabla u| + < u >^2) \\
&\leqslant \gamma|\nabla u|^2 + c(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2), \quad \forall\gamma > 0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Nous examinons le terme $< u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)$.
Nous avons $f(u_1) - f(u_2) = u\int_0^1 f'(su_1 + (1-s)u_2)ds$, et $|f'(s)| \leqslant k_2'(1 + |s|^{2p-2})$.
Donc

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant k_2'|u|\int_0^1 (1 + |su_1 + (1-s)u_2|^{2p-2})ds.$$

Puisque $s \in [0,1]$, nous trouvons

$$|f(u_1) - f(u_2)| \leqslant k_2'\big(1 + |u_1|^{2p-2} + |u_2|^{2p-2}\big)|u|. \tag{3.51}$$

Alors

$$|<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)| \leqslant c|<u>|\int_\Omega \big(1+|u_1|^{2p-2}+|u_2|^{2p-2}\big)|u|dx.$$

Nous traitons ce terme dans deux cas. Pour $n=1,2$ et p quelconque,

$$|<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)| \leqslant c|<u>|\big(1+\|u_1\|^{2p-2}_{L^{4p-4}(\Omega)}+\|u_2\|^{2p-2}_{L^{4p-4}(\Omega)}\big)|u|.$$

Dans ce cas $H^1(\Omega)\subset L^{4p-4}(\Omega)$, donc

$$\begin{aligned}|<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)| &\leqslant c\big(|u|^2+(1+\|u_1\|^{4p-4}+\|u_2\|^{4p-4}\big)<u>^2\big)\\ &\leqslant \frac{\nu}{4}|\nabla u|^2+c\big(1+\|u_1\|^{4p-4}+\|u_2\|^{4p-4}\big)(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2).\end{aligned}$$

Par (3.36)

$$|<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)| \leqslant \frac{\nu}{4}|\nabla u|^2+c'(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2).$$

Nous avons $\dfrac{d<u>^2}{dt}=0$ et par (3.49) et (3.50)

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2\big)\leqslant c\big(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2\big).$$

Grâce au lemme de Gronwall nous avons, pour $n=2$,

$$\|\bar u(t)\|^2_{-1}+<u(t)>^2\leqslant 0,$$

d'où $u(t)=0$ et donc l'unicité.
Pour $n=3$ et $p=2$

$$\begin{aligned}|<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)| &\leqslant c|<u>|\int_\Omega \big(1+|u_1|^2+|u_2|^2\big)|u|dx\\ &\leqslant c|<u>|\big(1+\|u_1\|^2_{L^4}+\|u_2\|^2_{L^4}\big)|u|\\ &\leqslant c|<u>|\big(1+\|u_1\|^2+\|u_2\|^2, \quad H^1\subset L^4\\ &\leqslant \frac{\nu}{4}|\nabla u|^2+c(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2),\ \text{ par (3.50) et (3.36).}\end{aligned}$$

Dans les deux cas nous avons

$$|<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)dx| \leqslant \frac{\nu}{4}|\nabla u|^2+c(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2). \tag{3.52}$$

D'après (3.49)

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2\big)\leqslant c\big(\|\bar u\|^2_{-1}+<u>^2\big),$$

et grâce au lemme de Gronwall nous avons l'unicité.

3.5.3 Démonstration de l'existence

Pour démontrer l'existence d'une solution de notre problème nous allons construire des solutions approchées par la méthode de Faedo-Galerkin, puis nous trouvons des estimations a priori et, enfin, nous passons à la limite (voir [45]). Tout d'abord nous trouvons une base spectrale.
Dans cette section nous démontrons l'existence d'une solutions u telle que $< u >= 0$, i.e., nous allons résoudre le problème suivant :

Trouver $u : [0, T] \to \mathring{V}_1$

$$\frac{d}{dt}(Nu, v) + \nu(-\Delta u, v) + (f(u), v) = 0, \quad \forall v \in \mathring{V}_1.$$

Nous posons $A := -\Delta$. A est un opérateur strictement positif et auto-adjoint dans $\mathring{H}$. Nous avons que l'injection de $\mathring{V}$ dans $\mathring{H}$ est compacte, donc, dans ce cas, nous pouvons considérer A^{-1} comme un opérateur compact et auto-adjoint dans $\mathring{H}$.
Il existe donc une famille orthonormale de $\mathring{H}$, $\{w_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, formée des vecteurs et des valeurs propres de A, avec

$$A^{-1}w_m = \lambda_m^{-1}w_m, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

telle que (λ_m^{-1}) est décroissante et tend vers 0 puisque
$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots, \lambda_m \to \infty$ lorsque $m \to \infty$.
Ainsi $Aw_m = \lambda_m w_m, m = 1, \ldots$. Donc $\{w_m\}_{m\geqslant 1}$ est une base hilbertienne orthonormale de $\mathring{H}$.
Et $\{\lambda_m^{-\frac{1}{2}} w_m\}_{m\geqslant 1}$ est une base hilbertienne orthonormale de $\mathring{V}$ pour $a(.,.)$.
Nous avons (voir [70])

$$(w_i, w_j) = \delta_{ij} = \text{symbole de Kronecker},$$

$$a(w_i, w_j) = \lambda_i \delta_{ij}, \ \forall i, j \ \ \text{(voir aussi [64])},$$

$$((w_i, w_j))_{-1} = ((A^{-1}w_i, w_j)) = \frac{1}{\lambda_i}\delta_{ij}, \ \forall i, j \ \ \text{(voir [19])}.$$

Nous notons par $\mathring{V}_m$ l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres de A, $\mathring{V}_m = \text{Vect}\{w_1, \ldots, w_m\}$. Nous considérons le problème approché

$$\frac{d}{dt}Nu_m - \nu\Delta u_m + P_m f(u_m) = 0, \ \ \text{dans } \mathring{V}',$$

$$u_m(0) = u_{0m},$$

où u_{0m} est la projection orthogonale de u_0 sur $\mathring{V}_m$ pour le produit scalaire de H, $u_{0m} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i)w_i$, $|u_{0m}| \leqslant |u_0|$ et $u_{0m} \to u_0$ dans H.
Le problème approché équivaut à

$$\frac{d}{dt}(Nu_m(t), v) - \nu(\Delta u_m(t), v) + (P_m f(u_m), v) = 0, \quad \forall v \in \mathring{V}_m,$$

$$u_m(0) = u_{0m}.$$

Ce problème équivaut à

$$\frac{d}{dt}(Nu_m(t), w_j) + \nu a(u_m(t), w_j) + (P_m f(u_m(t)), w_j) = 0, \tag{3.53}$$

$$u_m(0) = u_{0m}.$$

La fonction $u_m(t)$ est de la forme

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) w_i, \quad \text{où } \alpha_i(t) \text{ ne dépend pas de } m.$$

Nous avons

$$(Nu_m(t), w_j) = ((u_m(t), w_j))_{-1} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t)((w_i, w_j))_{-1} = \lambda_j^{-1} \alpha_j(t),$$

$$a(u_m(t), w_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) a(w_i, w_j) = \lambda_j \alpha_j(t),$$

$$(P_m f(u_m(t)), w_j) = (\sum_{k=1}^{2p-1} a_k \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^k(t) w_i^k, w_j) = a_j \alpha_j(t).$$

Nous avons donc à résoudre le problème suivant :

$$\lambda_j^{-1} \frac{d\alpha_j(t)}{dt} + (\lambda_j + a_j)\alpha_j(t) = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{3.54}$$

Nous posons

$$\mathbf{W} := \left(\ \lambda_i^{-1}(\delta_{ij}) \ \right)_{i,j=1,\ldots,m},$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{M} := \Big(\nu \lambda_i(\delta_{ij}) \Big)_{i,j=1,\ldots,m}$$

et

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} (P_m f(u_m), w_1) \\ \vdots \\ (P_m f(u_m), w_m) \end{pmatrix}.$$

Alors, par (3.54), nous avons à résoudre l'équation suivante :

$$\mathbf{W} \frac{d\alpha}{dt} + \mathbf{M}\alpha + \mathbf{F} = 0.$$

$\mathbf{W}$ est inversible. Nous avons alors l'existence d'une solution locale. Pour avoir une solution globale nous supposons

$$J_m(t) = \frac{\nu}{2}|\nabla u_m|^2 + \int_\Omega g(u_m)dx.$$

On multiplie le problème approché

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - \Delta K(u_m) = 0$$

par $K(u_m)$. Notons que

$$\big(K(u_m), \frac{\partial u_m}{\partial t}\big) = \frac{d}{dt}J_m.$$

Ce qui donne

$$\frac{d}{dt}J_m + |\nabla K(u_m)|^2 \leqslant 0.$$

Par conséquent $\frac{d}{dt}J_m \leqslant 0$, et donc $J_m(t) \leqslant c_0$, et la solution est globale.

3.5.4 Estimations de (u_m) et de $(\frac{du_m}{dt})$

Nous avons

$$\|u_m(t)\|_{-1}^2 = \|\sum_{i=1}^m \alpha_i(t)w_i\|_{-1}^2 = \sum_{i,j=1}^m \alpha_i(t)\alpha_j(t)((w_i,w_j))_{-1}.$$

Nous dérivons

$$\frac{d}{dt}(\alpha_i(t)\alpha_j(t)) = \alpha_i(t)\frac{d}{dt}\alpha_j(t) + \alpha_j(t)\frac{d}{dt}\alpha_i(t).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{-1}^2 &= \frac{d}{dt}\big(\sum_{i,j=1}^m \alpha_i(t)\alpha_j(t)((w_i,w_j))_{-1}\big)\\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{d}{dt}\big(\alpha_i(t)\alpha_j(t)\big)((w_i,w_j))_{-1}\\
&= \sum_{i,j=1}^m \alpha_i(t)\frac{d\alpha_j(t)}{dt}((w_i,w_j))_{-1} + \sum_{i,j=1}^m \alpha_j(t)\frac{d\alpha_i(t)}{dt}((w_i,w_j))_{-1}\\
&= 2\sum_{i,j=1}^m \alpha_i(t)\frac{d\alpha_j(t)}{dt}((w_i,w_j))_{-1}.
\end{aligned}$$

Par (3.53) nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{d\alpha_i(t)}{dt}((w_i, w_j))_{-1} + \nu a(u_m, w_j) + (f(u_m), w_j) = 0.$$

Nous multiplions par α_j et nous sommons pour j allant de 1 à m, donc

$$\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_j \frac{d\alpha_i(t)}{dt}((w_i, w_j))_{-1} + \nu \sum_{j=1}^{m} \alpha_j a(u_m, w_j) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j (f(u_m), w_j) = 0.$$

Nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{-1}^2 + \nu a(u_m, u_m) + (f(u_m), u_m) = 0. \tag{3.55}$$

Cette équation ressemble à la relation que nous obtenons en prenant le produit scalaire dans H de (3.23) par u, où u_m remplace u, et donc nous trouvons une borne de u_m dans $L^\infty(0,T;V')$ et dans $L^2(0,T;V)$; car, d'après l'inégalité

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u_m|^2 + pb_{2p}\int_\Omega u_m^{2p}dx \leqslant c_1|\Omega|.$$

Ici nous avons utilisé (3.26). Nous intégrons la dernière inégalité entre 0 et $t \leqslant T$,

$$\|u_m(t)\|_{-1}^2 + 2\nu\int_0^T \|u_m\|^2 dt \leqslant \|u_m(0)\|_{-1}^2 + 2c_1|\Omega| < \infty.$$

En particulier,

$$\|u_m(t)\|_{-1}^2 < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \|u_m\|^2 dt < \infty.$$

En outre, nous avons trouvé par (3.42) une estimation de u dans $L^\infty(0,T;H)$ (i.e : la relation (3.47)), nous remplaçons u par u_m, nous trouvons, par (3.47), que (u_m) est bornée dans $L^\infty(0,T;H)$ pour $T < \infty$,

$$|u_m(t)|^2 \leqslant |u_{0m}|^2 e^{k_3 T} < \infty, \quad \text{pour tout } t \leqslant T < \infty.$$

Donc

$$\sup_{t\in[0,T^*[} |u_m(t)|^2 \leqslant c_0 \text{ et } u_m \in L^\infty(0,T;H).$$

Corollaire 3.7. *Nous avons trouvé que (u_m) est bornée indépendamment de m dans $L^2(0,T;V)$ qui est réflexif, car V est réflexif, donc*

$$u_m \rightharpoonup u_1 \ \textit{dans}\ L^2(0,T;V) \ \textit{faible}, \quad u_1 \in L^2(0,T;V).$$

Corollaire 3.8. *(u_m) est bornée indépendamment de m dans $L^\infty(0,T;H)$ et, d'après le théorème de Dunford-Pettis (cf. par exemple [72]), l'espace $L^\infty(0,T;H)$ est le dual de l'espace $L^1(0,T;H)$. Alors*

$$u_m \rightharpoonup u_2 \text{ dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible } *, \quad u_2 \in L^\infty(0,T;H).$$

Nous montrons facilement que $u_1 = u_2 = u$ et donc

$$u_m \ \rightharpoonup u \text{ lorsque } m \to +\infty \ \text{ dans } L^2(0,T;V) \text{ faible, et dans } L^\infty(0,T;H) \text{ faible } *.$$

Pour démontrer que $(\dfrac{du_m}{dt})$ demeure dans un borné de $L^2(0,T;V')$, i.e. $(\dfrac{du_m}{dt})$ est bornée indépendamment de m dans $L^2(0,T;V')$, nous allons utiliser la base spectrale. Nous montrons tout d'abord que $(\Delta f(u_m))$ et $(\Delta^2 u_m)$ sont bornées (indépendamment de m) dans $L^2(0,T;H)$.

Nous démontrons l'inégalité suivante :

$$|\Delta f(u)|^2 \leqslant k(1 + |\Delta^2 u|^{2\sigma}), \ 0 < \sigma < 1, \ \text{ pour } n = 3 \text{ et } p = 2. \tag{3.56}$$

Nous avons $\Delta f(u) = f'(u)\Delta u + f''(u)\nabla u.\nabla u$, et

$$|f'(s)| \leqslant k_2'(1 + |s|^{2p-2}), \quad |f''(s)| \leqslant k_3'(1 + |s|^{2p-3}).$$

Donc

$$|\Delta f(u)| \leqslant \|f'(u)\|_{L^\infty(\Omega)}|\Delta u| + \|f''(u)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)}$$

$$|\Delta f(u)| \leqslant k_4'\Big((1 + \|u\|^{2p-2}_{L^\infty(\Omega)})|\Delta u| + (1 + \|u\|^{2p-3}_{L^\infty(\Omega)})|\nabla u|^2_{L^4(\Omega)}\Big). \tag{3.57}$$

Par interpolation nous avons $H^2(\Omega) = [H^1(\Omega), H^4(\Omega)]_{\frac{2}{3}}$ (voir [46]). Nous obtenons donc

$$\|u\|_{H^2} \leqslant c\|u\|^{\frac{2}{3}}_{H^1}\|u\|^{\frac{1}{3}}_{H^4},$$

$$|\Delta u| \leqslant c|\nabla u|^{\frac{2}{3}}|\Delta^2 u|^{\frac{1}{3}}. \tag{3.58}$$

Par l'injection de Sobolev ; voir [63], nous avons, $H^{\frac{n}{4}}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Alors

$$|\nabla u|_{L^4} \leqslant c\|u\|_{H^{\frac{n}{4}}},$$

$$|\nabla u|_{L^4} \leqslant c|\nabla u|^{1-\frac{n}{12}}|\Delta u|^{\frac{n}{12}}, \quad n = 3. \tag{3.59}$$

Nous avons déjà trouvé par (3.15), (3.28) et (3.36) que $|\nabla u|$ est uniformément borné pour $t \geqslant 0$ avec

$$\nu|\nabla u(t)|^2 \leqslant k_2, \ k_2 = 2c_3|\Omega| + \frac{2\rho^2}{r} + 2k_0.$$

Donc (3.58) et (3.59) donnent :

$$\begin{cases} |\Delta u(t)| \leqslant k_3|\Delta^2 u(t)|^{\frac{1}{3}}, \\ |\nabla u(t)|_{L^4} \leqslant k_4|\Delta u(t)|^{\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{3.60}$$

Pour $n = 1$, $H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ et donc

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty} \leqslant c|\nabla u|, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Pour $n = 2$, $H^{1+\varepsilon}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, $\forall \varepsilon > 0$, et donc

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty} \leqslant c_\varepsilon |\nabla u|^{1-\varepsilon} |\Delta^2 u|^\varepsilon, \quad \forall u \in H^4(\Omega).$$

Pour $n = 3$, nous avons par l'inégalité d'Agmon

$$\|\bar{u}\|_{L^\infty} \leqslant c|\nabla u|^{\frac{5}{6}} |\Delta^2 u|^{\frac{1}{6}},$$

nous appliquons cette relation pour $u(t)$ avec $|\nabla u(t)|$ est borné pour $t \geqslant 0$, nous trouvons donc

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant k_2' |\Delta^2 u(t)|^{\frac{1}{6}}. \tag{3.61}$$

Donc, pour $n = 1, 2, 3$, nous avons pour $| < u > | \leqslant \eta$

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leqslant k(\eta) |\Delta^2 u(t)|^\beta,$$

où $\beta = 0$ si $n = 1$, $\beta = \varepsilon$ si $n = 2$ et $\beta = \frac{1}{6}$ si $n = 3$. Nous utilisons (3.60) et (3.61) pour trouver (3.57)

$$|\Delta f(u)| \leqslant k_4' \big((1 + k_2' |\Delta^2 u|^{(2p-2)\beta}) k_3 |\Delta^2 u|^{\frac{1}{3}} + (1 + k_2' |\Delta^2 u|^{(2p-3)\beta}) k_4' |\Delta^2 u|^{\frac{1}{6}} \big)$$

et nous trouvons donc l'inégalité (3.56).

Nous multiplions l'équation, dans le problème approché, $\dfrac{du_m}{dt} + \nu \Delta^2 u_m - P_m \Delta f(u_m) = 0$, par $\Delta^2 u_m$, et utilisons la formule de Green

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 + \nu |\Delta^2 u_m|^2 &= (P_m \Delta f(u_m), \Delta^2 u_m) \\ &\leqslant \frac{1}{2\nu} |\Delta f(u_m)|^2 + \frac{\nu}{2} |\Delta^2 u_m|^2. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 + \nu |\Delta^2 u_m|^2 \leqslant \frac{1}{\nu} |\Delta f(u_m)|^2. \tag{3.62}$$

Nous utilisons l'inégalité de Young dans (3.56), où u_m remplace u, nous trouvons

$$|\Delta f(u_m)|^2 \leqslant \nu^2 |\Delta^2 u_m|^2 + c_1.$$

Par (3.62)

$$\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 + \frac{\nu}{2} |\Delta^2 u_m|^2 \leqslant c_1'. \tag{3.63}$$

En intégrant cette relation

$$\begin{cases} |\Delta u_m(t)| \leqslant c_2', \\ \int_0^t |\Delta^2 u_m(s)| ds \leqslant c_2''. \end{cases}$$

Nous avons donc trouvé une estimation de $(\Delta^2 u_m)$ dans $L^2(0,T;H)$ et par (3.56) et l'inégalité de Young nous avons vu que

$$|\Delta f(u_m)| \leqslant \nu |\Delta^2 u_m| + c_3.$$

Nous intégrons entre 0 et $t < T$

$$\int_0^t |\Delta f(u_m(s))| ds \leqslant \nu \int_0^t |\Delta^2 u_m(s)| ds + c_3 T < \infty.$$

Alors, $(\Delta f(u_m))$ est bornée dans $L^2(0,T;H)$.

Remarque 3.9. *D'aprés la relation (3.63) nous obtenons une estimation a priori de u_m dans $L^\infty(0,\infty;H^2(\Omega))$ et dans $L^2(0,T;H^4(\Omega))$, $\quad \forall T > 0$.*

Soit $P_m : H \to H$ le projecteur orthogonal sur $\mathring{V}_m$. Donc

$$P_m u = \sum_{i=1}^{m} (u, w_i) w_i, \ \|P_m\|_{H \to H} \leqslant 1.$$

Puisque les injections $\mathring{V}_m \hookrightarrow \mathring{V} \hookrightarrow \mathring{H}$ sont continues, nous pouvons donc définir P_m comme une application linéaire et continue de $\mathring{V}$ dans $\mathring{V}$,

$$P_m : \mathring{V} \xrightarrow{Id} \mathring{H} \xrightarrow{P_m} \mathring{V}_m \xrightarrow{Id} \mathring{V}.$$

Puisque $\mathring{V}$ est muni du produit scalaire $a(.,.)$ donc

$$\|P_m\|_{H \to H} = \sup_{v \neq 0} \frac{\|P_m v\|}{\|v\|} \leqslant 1.$$

Car, si $v \in \mathring{V}$, nous avons

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} (v, w_i) w_i, \quad \|v\|^2 = a(v,v) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (v, w_i)^2,$$

$$P_m v = \sum_{i=1}^{m} (v, w_i) w_i, \quad \|P_m v\|^2 = a(P_m v, P_m v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v, w_i)^2 \leqslant \|v\|^2.$$

Par densité nous étendons P_m à $\mathring{V}'$, et nous avons

$$\|P_m\|_{V' \to V'} \leqslant 1.$$

Nous avons, pour $A = -\Delta$ et $A^2 = \Delta^2$,

$$Aw_i = \lambda_i w_i, \;\; A^2 w_i = \lambda_i^2 w_i.$$

Si $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i \in \mathring{V}_m \subset \mathring{H}$ alors $Au_m \in \mathring{V}_m \subset \mathring{H}$ et $A^2 u_m \in \mathring{V}_m$.
De plus, $\dfrac{du_m}{dt} = \sum_{i=1}^m \alpha_i' w_i \in \mathring{V}_m \subset \mathring{H}$. u_m vérifie

$$\big(\frac{du_m}{dt} + \nu P_m A^2 u_m + P_m A f(u_m), v\big) = 0, \quad \forall v \in \mathring{V}_m. \tag{3.64}$$

$$Af(u_m) = A\sum_{j=1}^{2p_1} a_j u_m^j = \sum_{j=1}^{2p_1} a_j A u_m^j \in \mathring{V}_m \subset \mathring{H}.$$

Nous obtenons par (3.64)

$$\frac{du_m}{dt} = P_m\big(-\nu A^2 u_m - Af(u_m)\big) \quad \text{dans } \mathring{V}_m.$$

$$\begin{aligned} \|\frac{du_m}{dt}\|_{-1} &\leqslant \|P_m\|_{V'\to V'}\big(\nu\|A^2 u_m\|_{-1} + \|Af(u_m)\|_{-1}\big) \\ &\leqslant \big(\nu\|A^2 u_m\|_{-1} + \|Af(u_m)\|_{-1}\big). \end{aligned} \tag{3.65}$$

Nous avons

$$\|A^2 u_m\|_{-1} = \sup_{\substack{v\in\mathring{V} \\ v\neq 0}} \frac{< A^2 u_m, v >_{V',V}}{\|v\|} = \frac{(\Delta^2 u_m, v)}{\|v\|} \leqslant c|\Delta^2 u_m|,$$

car $|v| \leqslant c\|v\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|v\|} \leqslant \dfrac{c}{|v|}$. Et

$$\|Af(u_m)\|_{-1} = \|\Delta f(u_m)\|_{-1} \leqslant c_1|\Delta f(u_m)|.$$

$(\Delta^2 u_m)$ et $(\Delta f(u_m))$ sont bornées dans $L^2(0,T;H)$, donc nous en déduisons par (3.65)

$$\|\frac{du_m}{dt}\|_{-1} \leqslant \text{ constante.}$$

Nous avons donc montré que $(\dfrac{du_m}{dt})$ est bornée, indépendamment de m, dans $L^2(0,T;V')$, et alors

$$\frac{du_m}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \text{ dans } L^2(0,T;V') \text{ faible, } \quad \text{lorsque } m \to \infty.$$

D'après le théorème de compacité d'Aubin-Lions, voir [46], nous trouvons une suite extraite telle que

$$u_m \to u \;\text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ fort et presque par tout, et dans } \mathbb{C}([0,T];V').$$

3.5.5 Passage à la limite

Nous prenons $\overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \mathring{V}_m} = V$, la fermeture est dans $\mathring{V}$.
Soit $m_0 \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\mathring{V}_{m_0} \subset \mathring{V}_m$, donc, pour $m \geqslant m_0$, nous prenons le problème approché

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_m(t), v) + \nu(\Delta^2 u_m(t), v) - (\Delta f(u_m(t)), v) = 0, \ \forall v \in \mathring{V}_m, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, nous avons

$$u_m \to u \ \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ fort et presque par tout,}$$

$$u_m \ \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V),$$

$$u'_m \ \text{ est bornée dans } L^2(0,T;V').$$

Mais, $V \hookrightarrow H$ injection compacte, donc

$$u_m \ \to u \ \text{ fort et presque partout dans } H. \tag{3.66}$$

Puisque $f(u)$ est un polynome nous obtenons par (3.66)

$$f(u_m(x,t)) \ \to f(u(x,t)) \ \text{ presque par tout dans H,}$$

et

$$\Delta f(u_m(x,t)) \ \to \Delta f(u(x,t)) \ \text{ presque par tout dans H.}$$

D'autre part, nous avons trouvé que $(\Delta f(u_m))$ est bornée dans $L^2(0,T;H)$. Donc

$$\Delta f(u_m) \ \rightharpoonup \ y \ \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ faible.}$$

Nous allons maintenant montrer que $\Delta f(u) = y$. Pour cela nous allons appliquer le lemme suivant.

Lemme 3.10. *([45])*
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, g_m et g deux fonctions de $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, telles que,

$$\|g_m\|_{L^p} \leqslant C, \quad g_m \ \to g \ \text{ presque par tout dans } \Omega.$$

Alors, $g_m \ \rightharpoonup g$ dans $L^p(\Omega)$ faible.

Nous appliquons ce lemme, avec $g_m = \Delta f(u_m)$, nous obtenons

$$\Delta f(u_m) \ \rightharpoonup \Delta f(u) \ \text{ dans } L^2(0,T;H) \text{ faible.}$$

En passant à la limite le problème approché, nous trouvons

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \nu(\Delta^2 u(t), v) - (\Delta f(u(t)), v) = 0, \ \forall v \in \mathring{V},$$

$$u(0) = u_0.$$

3.6 Un attracteur exponentiel

Nous prenons l'équation de Cahn-Hilliard

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = 0,$$

qui (par (3.23)) équivaut à

$$\frac{\partial Nu}{\partial t} - \nu\Delta u + f(u) = 0,$$

avec les conditions aux limites (3.3) ou (3.4) et la condition initiale (3.6).
Nous avons trouvé par (3.35) un borné absorbant dans V',

$$B_0 = \big\{u \in V', \quad \|u\|_{-1} \leqslant \rho_0 = \frac{2k_1}{\nu c_4'}\big\}.$$

Par (3.36) nous avons un borné dans V, $B_1 = \{u \in V, \quad \|u\| = |\nabla u| \leqslant k_2\}$, et par (3.39), $\mathcal{B}$ est le borné absorbant dans V_1.
Posons

$$\mathcal{B}_1 := \overline{\bigcup_{t \geqslant t_0} S(t)\mathcal{B}},$$

donc $\mathcal{B}_1$ est compact dans V (et V') et invariant. Nous avons

$$S(t) : \mathcal{B} \ \rightarrow \ \mathcal{B}, \quad \text{pour} \ \ t \geqslant t_2. \tag{3.67}$$

Pour construire un attracteur exponentiel, nous démontrons d'abord que $S(t^d)$ vérifie une propriété de régularisation, pour la différence entre deux solutions, pour certain $t^d \geqslant t_2$, ce qui donne l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}^d$ pour le système discret engendré par $S(t^d)$ (cf. [26] et [60]).
Pour avoir un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$, pour le cas continu, nous démontrons que $(t, u_0) \mapsto S(t)u_0$ est Hölder continue sur $[0, t^d] \times \big(V_1 \cap H_\eta\big)$. Ceci donne l'existence d'un attracteur exponentiel défini par la relation suivante

$$\mathcal{M} := \bigcup_{t \in [t^d, 2t^d]} S(t)\mathcal{M}^d.$$

Nous commençons par la démonstration de la propriété de régularisation.

Lemme 3.11. *Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions telles que $\|u_i(0)\|_2 \leqslant R$, $\forall i = 1, 2$. Alors*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{-1}^2 \leqslant ce^{\alpha t}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{-1}^2. \tag{3.68}$$

Démonstration.
D'après (3.41) nous trouvons (3.68), pour $< u_1 >=< u_2 >$. Nous démontrons ici l'estimation (3.68) pour $< u_1 >\neq< u_2 >$.
Pour $u := u_1 - u_2$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u_1) - f(u_2) =< f(u_1) - f(u_2) > . \tag{3.69}$$

Multiplions par $\bar{u}$, notons que $< \bar{u} >= 0$ et $(|\nabla u|^2+ < u >^2)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à $\|u\|$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u|^2 &= -(\ell(t)u, \bar{u}) \\ &\leqslant |\nabla\ell(t)u|\|\bar{u}\|_{-1} \\ &\leqslant c\|u\|\|\bar{u}\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2+ < u >^2\big). \end{aligned} \tag{3.70}$$

Le terme $|\nabla\ell(t)u|$ sera examiné dans le chapitre 5 ; voir les estimations (5.60) et (5.61), et nous avons

$$|\nabla\ell(t)u| \leqslant c\|u\|, \quad \text{où } p = 2 \ \text{ lorsque } n = 3,$$

pour des données initiales dans $H^2(\Omega)$. Alors,

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u|^2 \leqslant c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2+ < u >^2\big)$$

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}+ < u >^2\big) + \nu|\nabla u|^2 \leqslant c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2+ < u >^2\big).$$

En intégrant entre 0 et t, notons que $\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2+ < u >^2\big)^{\frac{1}{2}}$ est une norme dans $H^{-1}(\Omega)$, nous avons (3.68). De plus,

$$\int_0^t |\nabla u(s)|^2 ds \leqslant ce^{\alpha t}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{-1}^2. \tag{3.71}$$

Notons aussi par (3.70) et (3.68), puisque la norme $(|\nabla u|^2+ < u >^2)^{\frac{1}{2}}$ est équivalente à $\|u\|$

$$\int_0^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant ce^{\alpha t}\|u_1(0) - u_2(0)\|_{-1}^2. \tag{3.72}$$

■

Lemme 3.12. *Pour u_1 et u_2 définis comme dans le lemme précédent nous avons*

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|^2+\int_t^{t+1}\|\frac{\partial u_1}{\partial t}-\frac{\partial u_2}{\partial t}\|^2_{H^{-1}}ds \leqslant \frac{c}{t}e^{\alpha t}\|u_1(0)-u_2(0)\|^2_{H^{-1}}, \quad t>0, \tag{3.73}$$

c et α dépendent de R.

Démonstration.
Multiplions (3.69) par $t\frac{\partial u}{\partial t}$, notons que $<\frac{\partial u}{\partial t}>=0$,

$$\begin{aligned} t\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{H^{-1}}+\frac{\nu}{2}t\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 &\leqslant t\big|\big(\ell(t)u,\frac{\partial u}{\partial t}\big)\big| \\ &\leqslant \frac{t}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{H^{-1}}+ct|\nabla\ell(t)u|. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(|\nabla u|^2+<u>^2\big)\Big)+c_1t\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{H^{-1}}\leqslant ct\|u\|^2+c\|u\|^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall et (3.72), nous obtenons

$$\|u(t)\|^2+c_1\int_t^{t+1}\|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\|^2_{H^{-1}}ds\leqslant ce^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}}.$$

∎

D'après la dernière estimation nous avons la propriété de régularisation entre $H^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$. Le résultat suivant donne la propriété de régularisation entre $H^2(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Lemme 3.13. *Supposons que u est comme auparavant. Alors*

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}}+\int_t^{t+1}\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2ds\leqslant\frac{c}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}},\quad t>0. \tag{3.74}$$

Démonstration.
Dérivons (3.69), posons $\theta:=\frac{\partial u}{\partial t}$ et notons que $<\theta>=0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}N\theta-\nu\Delta\theta=-\ell(t)\theta-\ell'(t)u+<\frac{\partial}{\partial t}\big(\ell(t)u\big)>.$$

Multiplions par $t\theta$, et notons que $|\ell'(t)u|\leqslant c\|u\|$ (voir (5.69)),

$$\begin{aligned} \frac{t}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{-1}}+\nu t|\nabla\theta|^2 &\leqslant ct|\theta|^2+t|\ell'(t)u||\theta| \\ &\leqslant ct|\theta|^2+c't\|u\|^2 \\ &\leqslant \frac{\nu}{2}t|\nabla\theta|^2+ct\|\theta\|^2_{H^{-1}}+C_T\|u\|^2, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\big(t\|\theta\|^2_{H^{-1}}\big) + \nu t|\nabla\theta|^2 \leqslant ct\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \|\theta\|^2_{H^{-1}} + C_T\|u\|^2.$$

D'après le lemme de Gronwall et les estimations (3.72) et (3.73), nous avons

$$\|\theta(t)\|^2_{H^{-1}} + c\int_t^{t+1} |\nabla\theta(s)|^2 ds \leqslant \frac{c}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}}.$$

■

Nous avons par (3.69)

$$\nu\Delta u - \ell(t)u + <\ell(t)u> = \frac{\partial}{\partial t}N\bar{u}.$$

Nous avons alors, pour t fixé,

$$\begin{aligned}
|\Delta u(t)|^2 &\leqslant c_1\Big(\big|\big(\frac{\partial}{\partial t}N\bar{u}, \Delta u\big)\big| + \big|\big(\ell(t)u, \Delta u\big)\big|\Big)\\
&\leqslant c\big\|\frac{\partial u}{\partial t}\big\|^2_{-2} + \frac{1}{2}|\Delta u(t)|^2 + |\nabla\ell(t)u|\ |\nabla u(t)|\\
&\leqslant c\big\|\frac{\partial u}{\partial t}\big\|^2_{-1} + c_1\|u\|^2 + c_2|\nabla u|^2, \qquad \text{par (5.61).}
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$|\Delta u(t)|^2 + <u>^2 \leqslant c\big\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\big\|^2_{-1} + c'\|u(t)\|^2, \quad \text{pour } t \text{ fixé.}$$

Par (3.73) et (3.74)

$$\|u(t)\|^2_2 \leqslant \frac{c}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}}, \qquad t > 0.$$

D'où la propriété de régularisation. D'après cette propriété nous avons l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}^d$ pour le cas discret. Afin de définir l'attracteur exponentiel pour le semi-groupe, nous démontrons le résultat suivant.

Lemme 3.14. *$S(t)$ est Hölder continu sur $[0,T]\times B_R$ pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$, où $B_R := \{u \in H^2(\Omega),\ \ \|u\|_2 \leqslant R\ \ \text{et}\ \ |<u>| \leqslant \eta\}$.*

Démonstration.
D'après les estimations précédentes

$$\int_t^{t+1} \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} ds \leqslant c(R), \qquad \text{pour}\ \ u_0 \in B_R.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|S(t_1)u_1(0) - S(t_2)u_2(0)\|_{H^{-1}} &= \|S(t_1)u_1(0) - S(t_1)u_2(0) + S(t_1)u_2(0) - S(t_2)u_2(0)\|_{H^{-1}} \\
&\leqslant c_T\|u_1(0) - u_2(0)\|_{H^{-1}} + \Big\| \int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial t} ds \Big\|_{H^{-1}} \\
&\leqslant c_T\|u_1(0) - u_2(0)\|_{H^{-1}} + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_2}^{t_1} \Big\| \frac{\partial u}{\partial t} \Big\|_{H^{-1}}^2 ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant c_T(R)\big(\|u_1(0) - u_2(0)\|_{H^{-1}} + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\big),
\end{aligned}$$

d'où la continuité de Hölder. ■

Nous avons alors le résultat suivant (voir [60]).

Théorème 3.15. *Le semi-groupe $S(t)$, défini par (3.67), associé au problème (3.1), (3.2) et (3.3) possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et cet attracteur est défini par*

$$\mathcal{M} := \bigcup_{t \in [t_2, 2t_2]} S(t)\mathcal{M}^d.$$

Chapitre 4

Problème de Cahn-Hilliard non autonome

4.1 Position du problème

Nous prenons le problème suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta^2 u - \Delta f(u) = m(t), \tag{4.1}$$

$$u(x,\tau) = u_\tau, \quad x \in \Omega,$$

avec les conditions aux limites de Neumann ;

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

ou la condition (3.4) en cas de l'espace périodique.
Nous supposons que $m(t)$ vérifie les conditions suivantes :

(M1) $m(t) \in L^\infty(\mathbb{R}; V')$,
(M2) $\int_t |m(t)|^2 dt < M$ (ou $\int_t \|m(t)\|_{-1}^2 dt < M$) pour M suffisamment grand,
(M3) $\int_\Omega m(t) dx = 0, \quad \forall t \geqslant 0$.

En intégrant (4.1) sur Ω, et d'après l'hypothèse (M3), nous trouvons que la moyenne est conservée, $< u(t) >=< u(\tau) >$. Comme dans le chapitre précédent nous considérons $| < u > | \leqslant \eta$, pour $\eta \geqslant 0$.
Nous allons maintenant démontrer le Théorème 3.2 pour le problème non autonome.

4.2 Estimations a priori

4.2.1 Estimation de u

Multiplions (4.1) par u

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\nu|\Delta u|^2+b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2dx \leqslant c_4|\nabla u|^2+c|m|^2+c_1|u|^2.$$

Par (3.44) et (3.45)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2+\frac{\nu}{2}|\Delta u|^2+b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2dx \leqslant \frac{k_3}{2}|u|^2+c|m(t)|^2+c(\eta),$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2-k_3|u|^2+\nu|\Delta u|^2+2b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2dx \leqslant c|m(t)|^2+c(\eta). \tag{4.2}$$

Grâce au lemme de Gronwall nous avons, en particulier,

$$|u(t)|^2 \leqslant |u_\tau|^2e^{k_3(t-\tau)}+c''<\infty, \qquad \text{pour } \tau\leqslant t<\infty. \tag{4.3}$$

Nous avons alors une borne de $u\in L^\infty(\tau,t;H)$. De plus, nous avons par (4.2)

$$\nu\int_\tau^t|\Delta u|^2dt<\infty,$$

i.e., $u\in L^2(\tau,t;H^2(\Omega))$.
L'équation (4.1) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}N\bar{u}-\nu\Delta u+f(u)=Nm+<f(u)>. \tag{4.4}$$

Multiplions (4.4) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $<\dfrac{\partial u}{\partial t}>=0$,

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{-1}+\frac{\nu}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2+\frac{d}{dt}\int_\Omega g(u)dx \leqslant c\|m\|^2_{-1}+\frac{1}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{-1}.$$

Ce qui donne en intégrant entre τ et t, par (M2),

$$\int_\tau^t\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2_{-1}+\nu|\nabla u(t)|^2+2\int_\Omega g(u(t))dx\leqslant c\int_\tau^t\|m\|^2_{-1}dt+2\int_\Omega g(u(\tau))dx<\infty,$$

i.e.,

$$\int_\tau^t\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|^2_{-1}ds\leqslant \quad \text{const.}. \tag{4.5}$$

Nous écrivons (4.1) sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta K(u), \tag{4.6}$$

$$K(u) = -\nu\Delta u + f(u) - Nm.$$

Multiplions (4.6) par $K(u)$

$$\frac{d}{dt}J(u(t)) + |\nabla K(u)|^2 \leqslant c\|m\|_{-1}^2 + c'\Big\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\Big\|_{-1}^2. \tag{4.7}$$

D'après la définition de J et (3.28)

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \|u\|_{L^{2p}}^{2p}\Big) \leqslant c\|m\|_{-1}^2 + c'\Big\|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + c''.$$

En intégrant sur $[\tau, t]$

$$\|u\|^2 + \|u\|_{L^{2p}}^{2p} \leqslant \|u_\tau\|^2 + \|u_\tau\|_{L^{2p}}^{2p} + c,$$

par (4.5) et l'hypothèse (M2). La dernière estimation implique que, pour $u_\tau \in H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega)$, $u \in L^\infty(\tau, t; H^1(\Omega) \cap L^{2p}(\Omega))$.

4.3 Existence et unicité

Afin de démontrer l'existence d'une solution du problème (4.1) nous trouvons d'abord quelques estimations a priori pour une solution approchée u_m, comme dans le chapitre précédent nous supposons que u_m est à moyenne nulle.

4.3.1 Estimations de (u_m) et de $(\frac{du_m}{dt})$

Nous multiplions l'équation approchée

$$\frac{\partial}{\partial t}Nu_m - \nu\Delta u_m + P_m f(u_m) = Nm$$

par u_m, nous obtenons par (3.26)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u_m|^2 + pb_{2p}\int_\Omega u_m^{2p}x &\leqslant c_1|\Omega| + |((m(t), u_m))_{-1}| \\ &\leqslant c_1|\Omega| + c'\|m\|_{-1}^2 + c\|u_m\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Grâce au lemme de Gronwall

$$\|u_m(t)\|_{-1}^2 \leqslant e^{c(t-\tau)}\|u_m(\tau)\|_{-1}^2 + c'' < \infty, \quad \forall t \geqslant \tau, \quad t < \infty,$$

i.e., (u_m) est bornée dans $L^\infty(\tau, t; V')$. Nous avons aussi

$$\int_\tau^t \|u_m\|^2 ds < \infty.$$

D'après cette relation nous obtenons que (u_m) est bornée dans $L^2(\tau, t; V)$. Et par (4.3), où u_m remplace u, nous trouvons que (u_m) est bornée dans $L^\infty(\tau, t; H)$.

En outre, nous avons en multipliant l'équation approchée

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \nu\Delta^2 u_m - P_m \Delta f(u_m) = m,$$

par $\Delta^2 u_m$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 + \nu|\Delta^2 u_m|^2 \leqslant \frac{\nu}{4}|\Delta^2 u_m|^2 + c_1|\Delta f(u_m)|^2 + \frac{\nu}{4}|\Delta^2 u_m|^2 + c_2|m|^2,$$

$$\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 + \nu|\Delta^2 u_m|^2 \leqslant 2c_1|\Delta f(u_m)|^2 + c(M). \tag{4.8}$$

Par (3.56) (trouvé dans le chapitre précédent) et l'inégalité de Young

$$\frac{d}{dt}|\Delta u_m|^2 + \frac{\nu}{2}|\Delta^2 u_m|^2 \leqslant c_1' + c(M), \tag{4.9}$$

ce qui donne en intégrant

$$|\Delta u_m(t)|^2 + \frac{\nu}{2}\int_\tau^t |\Delta^2 u_m(s)|^2 ds \leqslant c''(t-\tau) < \infty, \qquad \text{pour } \tau \leqslant t < \infty. \tag{4.10}$$

D'après la dernière estimation, nous avons que (Δu_m) est bornée dans $L^\infty(\tau, t; H)$ et $(\Delta^2 u_m)$ est bornée dans $L^2(\tau, t; H)$, et d'après (3.56) $(\Delta f(u_m))$ est bornée dans $L^2(\tau, t; H)$.

Nous avons aussi par (4.5), où u_m remplace u, une estimation bornée de $\left(\frac{du_m}{dt}\right)$ dans $L^2(\tau, t; V')$.
Par la suite, nous procédons comme dans le chapitre précédent, nous prenons la base $\{w_m\}$ précédente, et nous trouvons (voir les estimations (3.53) et (3.54))

$$\mathbf{W}\frac{d\alpha}{dt} + \mathbf{M}\alpha + \mathbf{F} = \mathbf{M}_1,$$

où $\mathbf{W}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{F}$ sont définis comme dans le chapitre précédent et $\mathbf{M}_1 := \begin{pmatrix} (m, w_1) \\ \vdots \\ (m, w_n) \end{pmatrix}$.

Nous avons alors l'existence d'une solution locale.
D'après (4.7) et (4.5) nous avons, en particulier,

$$J(u(t)) \leqslant J(u(\tau)) + c < \infty,$$

et donc la solution locale est globale.
La démonstration de l'unicité est comme dans le chapitre précédent (on considère m correspondant les deux solutions u_1 et u_2 et $u_1(\tau) = u_2(\tau)$ et la démonstration est la même que celle du chapitre précédent).

4.4 Borné absobant

En comparant avec le cas autonome nous avons par (3.30), notons que $<\bar{u}>=0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + J(u) \leqslant k_0 + |((m,u))_{-1}|; \tag{4.11}$$

ici nous avons utilisé les inégalités suivantes :

$$f(s)s \geqslant pb_{2p}s^{2p} - c_1, \tag{4.12}$$

et pour tout $\alpha > 0$, il existe $c_2 = c_2(\alpha)$ telle que

$$|f(s)| \leqslant \alpha b_{2p}s^{2p} + c_2(\alpha). \tag{4.13}$$

Par (3.15) et (3.28)

$$J(u) = \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega g(u)dx \geqslant \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 - c_3|\Omega|,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \frac{\nu}{2}|\nabla u|^2 \leqslant k_1 + |((m,\bar{u}))_{-1}|, \quad \text{où } k_1 = k_0 + c_3|\Omega|,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + c_4\|\bar{u}\|_{-1}^2 \leqslant k_1 + \frac{c_4}{2}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \frac{1}{2c_4}\|m\|_{-1}^2.$$

Intégrons entre τ et t

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|\bar{u}_\tau\|_{-1}^2 e^{-c_4(t-\tau)} + (2k_1 + \frac{M}{c_4})\big(1 - e^{-c_4(t-\tau)}\big), \quad \|m\|_{-1}^2 \leqslant M. \tag{4.14}$$

Ce qui donne

$$\lim_{t\to\infty} \sup \|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \rho_0^2, \quad \text{où } \rho_0^2 = 2k_1 + \frac{M}{c_4}.$$

Nous prenons $\|\bar{u}_\tau\|_{-1} \leqslant R$. Soit $\rho > \rho_0$. Nous cherchons $t_0 = t_0(R,\rho)$ tel que $\|u(t)\|_{-1} \leqslant \rho$, $\forall t \geqslant t_0$.
Par (4.14)

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant R^2 e^{-c_4t_0} + \rho_0^2 - \rho_0^2 e^{-c_4t_0} = (R^2 - \rho_0^2)e^{-c_4t_0} + \rho_0^2.$$

Donc, pour $t_0 > \frac{1}{c_4}\log\big(\dfrac{R^2-\rho_0^2}{\rho^2-\rho_0^2}\big)$, nous avons $\|\bar{u}\|_{-1} < \rho$.
Nous avons alors l'existence d'un borné absorbant dans $V' \cap H_\eta$, où $H_\eta := \bigcup_{a\leqslant\eta}\big\{u \in V, \ \ |<u>| = a\big\}$.
Par définition de J et (4.11)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + J(u) &\leqslant k_0 + |((m,\bar{u}))_{-1}|, \\ &\leqslant k_0 + \|m\|_{-1}^2 + \|\bar{u}\|_{-1}^2 \leqslant k_0 + M^2 + \rho^2. \end{aligned}$$

En intégrant entre t et $t+r$

$$[\frac{1}{2}\|\bar{u}\|_{-1}^{2}]_{t}^{t+r}+\int_{t}^{t+r}J(u(s))ds\leqslant r(k_0+M+\rho^2).$$

En particulier,

$$\int_{t}^{t+r}J(u(s))ds\leqslant\rho^2+rk_1,\qquad k_1=k_0+M+\rho^2.$$

Par conséquent

$$J(u(t+r))\leqslant\frac{\rho^2}{r}+k_1,$$

ce qui donne

$$\frac{\nu}{2}|\nabla u(t+r)|^2+\int_{\Omega}g(u(t+r))dx\leqslant\frac{\rho^2}{r}+k_1$$

$$\frac{\nu}{2}|\nabla u(t+r)|^2+\frac{1}{2}b_{2p}\int_{\Omega}u^{2p}(x,t)dx\leqslant\frac{\rho^2}{r}+k_1+c_3|\Omega|.$$

Nous obtenons donc, en particulier,

$$\nu|\nabla u(t)|^2\leqslant k_2,\quad \text{où } k_2=2c_3|\Omega|+\frac{2\rho^2}{r}+2k_1,\tag{4.15}$$

et nous avons l'existence d'un borné absorbant B_1 dans H_η.

4.4.1 Borné absorbant dans $V_1\cap H_\eta$

Nous avons par (4.10)

$$|\Delta u(t)|^2\leqslant\quad\text{const.,}\qquad\text{pour}\quad u_\tau\in H^2(\Omega).$$

Multiplions (4.1) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ et procédons comme dans le chapitre précédent, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2+\big|\frac{\partial u}{\partial t}\big|^2-\big(\Delta f(u),\frac{\partial u}{\partial t}\big)\leqslant|m|\big|\frac{\partial u}{\partial t}\big|.$$

D'après (5.45)

$$\frac{d}{dt}|\Delta u|^2+\big|\frac{\partial u}{\partial t}\big|^2\leqslant c|\Delta u|^2+c'|m|^2.$$

En intégrant cette inégalité nous avons l'existence d'un borné absorbant $\mathcal{B}$ dans $V_1\cap H_\eta$.

4.5 Un attracteur exponentiel

4.5.1 Généralités

Pour trouver un attracteur exponentiel du problème (4.1), nous allons construire une famille d'attracteurs exponentiels comme proposé dans [29]. (voir aussi [2], [25], [33], [32] et [52]). Tout d'abord nous prenons le borné absorbant dans V_1 ; $\mathcal{B}$, nous considérons le semi-groupe $S(t)$ tel que

$$S(t)\mathcal{B} \to \mathcal{B}, \quad \text{pour } t \geqslant t_1.$$

Ensuite, nous démontrons la propriété de régularisation et la continuité Hölder pour le semi-groupe. Nous trouvons des estimations a priori nécessaires pour la suite.

4.5.2 Estimations a priori

Nous prenons dans $\mathcal{B}$ le problème (4.1), où les forces extérieures $m(t)$ vérifie les condition (M1), (M2) et (M3) précédentes. (4.1) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u) = Nm(t) + < f(u) > . \tag{4.16}$$

Nous prenons le produit scalaire de cette équation par $\bar{u}$, nous utilisons la formule de Green et les relations suivantes :

$$\|\bar{u}\|_{-1} \ \leqslant c|\bar{u}| \ \leqslant c_1|\nabla u|, \tag{4.17}$$

(4.12) et (4.13) et nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + c_2\|\bar{u}\|_{-1}^2 + pb_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant k_1 + \frac{1}{2c_2}\|m(t)\|_{-1}^2 + \frac{c_2}{2}\|\bar{u}\|_{-1}^2.$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + c_2\|\bar{u}\|_{-1}^2 \leqslant k_3 = 2k_1 + \frac{M^2}{c_2}.$$

Nous multiplions par $e^{c_2 s}$ et nous intégrons sur $[\tau, t]$

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|\bar{u}(\tau)\|_{-1}^2 e^{c_2(\tau-t)} + k_3'\big(1 - e^{-c_2(t-\tau)}\big) \leqslant \|\bar{u}(\tau)\|_{-1}^2 e^{c_2(\tau-t)} + k_3', \quad t-\tau \geqslant 0. \tag{4.18}$$

Ensuite, nous définissons pour le problème de Cahn-Hilliard (4.1) une famille de processus, dans l'espace V', de la forme

$$\{U_m(t,\tau),\ \tau \in \mathbb{R},\ t \geqslant \tau\},$$

telle que $U_m(t,\tau)u_\tau := u(t)$, où $u(t)$ est la solution de (4.1), (ou de (4.16)), avec $u(\tau) = u_\tau$. Nous allons maintenant trouver une estimation pour la différence entre deux solutions.

Lemme 4.1. *La famille* $U_m(t,\tau)$: $u_\tau \mapsto u(t)$ *est continue pour la topologie de* $H^{-1}(\Omega)$.

Démonstration.
Soient u_1, u_2 deux solutions de (4.1) avec $u_1(\tau) = u_{1\tau}$ et $u_2(\tau) = u_{2\tau}$. Alors, pour m correspondant aux deux solutions u_1 et u_2, nous avons

$$u_1(t) = U_m(t,\tau)u_{1\tau}, \quad u_2(t) = U_m(t,\tau)u_{2\tau}.$$

Nous voulons montrer qu'il existe $c_1 > 0$ tel que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2_{H^{-1}} \leqslant e^{c_1(\tau - t)}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|^2_{H^{-1}}. \tag{4.19}$$

Par ailleurs, u_1, u_2 vérifient les deux équations

$$\frac{\partial}{\partial t}Nu_1 - \nu\Delta u_1 + f(u_1) = m(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Nu_2 - \nu\Delta u_2 + f(u_2) = m(t).$$

Supposons que $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, avec $u(\tau) = u_1(\tau) - u_2(\tau)$. Alors, u vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u_1) - f(u_2) =< f(u_1) - f(u_2) > .$$

Multiplions par $\bar{u}$, (pour le produit scalaire de H)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \nu|\nabla u|^2 + (f(u_1) - f(u_2), \bar{u}) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \nu|\nabla u|^2 \leqslant c|u|^2 + < u > \int_\Omega |f(u_1 - f(u_2)|dx,$$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + 2\nu|\nabla u|^2 \leqslant \nu|\nabla u|^2 + c\big(\|\bar{u}\|^2_{-1} + < u >^2\big).$$

Nous avons

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|^2_{-1} + < u >^2\big) + \nu|\nabla u|^2 ds \leqslant c\big(\|\bar{u}\|^2_{-1} + < u >^2\big). \tag{4.20}$$

Intégrons sur $[\tau, t]$, nous avons, en particulier,

$$\|u(t)\|^2_{H^{-1}} \leqslant e^{c(t-\tau)}\|u_\tau\|^2_{H^{-1}}.$$

Nous avons donc (4.19). ■

Soient m_1 et m_2 différentes, qui correspondent aux deux solutions précédentes $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Posons $m(s) = m_1(s) - m_2(s)$. Donc u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} - \nu \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = Nm + < f(u_1) - f(u_2) > .$$

Multiplions par $\bar{u}$, notons que m est à myenne nulle,

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2 \big) + \nu |\nabla u|^2 \leqslant c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2 \big) + c_1 \|m\|_{H^{-1}}^2.$$

Nous avons en intégrant

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant e^{c(t-\tau)} \|u_\tau\|_{H^{-1}}^2 + c_1 e^{ct} \int_\tau^t e^{-cs} \|m(s)\|_{H^{-1}}^2 ds. \tag{4.21}$$

En particulier, si $m_1 = m_2$ nous obtenons (4.19), et si $u_1(\tau) = u_2(\tau)$ nous obtenons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant c_1 e^{ct} \int_\tau^t e^{-cs} \|m(s)\|_{H^{-1}}^2 ds. \tag{4.22}$$

4.5.3 Construction d'attracteurs exponentiels

Notre but ici est de construire une famille d'attracteurs exponentiels pour le problème de Cahn-Hilliard. Nous commençons d'abord par construire cette famille pour $\{U_m(t,\tau)\}$. Nous prenons $\mathcal{B}$ le borné absorbant précédent. Il existe donc T tel que $U_m(\tau+T,\tau)\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$, et par la relation (4.19), nous obtenons, pour K suffisamment grand,

$$U_m(\tau+T,\tau) \in S_{1,K}(\mathcal{B}).$$

Pour construire cette famille, nous allons appliquer le Théorème 2.4, où $H^2(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ remplacent H et V.
Tout d'abord, nous démontrons que $\{U_m(t,\tau)\}$ vérifie la propriété de régularisation entre les espaces $H^2(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ (puisque l'injection $H^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ est compacte), i.e,

$$\|U_m(t,\tau)u_1 - U_m(t,\tau)u_2\|_2 \leqslant K \|u_1 - u_2\|_{H^{-1}}. \tag{4.23}$$

Pour cela nous allons montrer les résultats suivants (voir [28] pour autre types de problèmes de Cahn-Hilliard).
Nous avons par (4.20) le résultat suivant.

Théorème 4.2. *Soient $u_1(t), u_2(t)$ deux solutions du problème (4.1), telles que $\|u_i(\tau)\|_2 \leqslant R, \quad i = 1,2$. Alors*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant C e^{\alpha t} \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{H^{-1}}^2. \tag{4.24}$$

Où, C et $\alpha > 0$ sont deux constante qui ne dépend que de R.

D'après (4.20) nous avons également l'estimation suivante

$$\int_\tau^t |\nabla u(s)|^2 ds \leqslant Ce^{\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|^2_{H^{-1}}. \tag{4.25}$$

De même, nous avons par (4.20)

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|^2_{-1}+ < u >^2\big) + \nu\big(|\nabla u|^2 + < u >^2\big) \leqslant c\big(\|\bar{u}\|^2_{-1}+ < u >^2\big),$$

ce qui donne en intégrant

$$\int_\tau^t \|u(s)\|^2 ds \leqslant Ce^{\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|^2_{H^{-1}}. \tag{4.26}$$

Lemme 4.3. *Supposons que les hypothèses du Théorème 4.2 soient vérifiées. Alors, pour $u = u_1 - u_2$, nous avons l'estimation suivante :*

$$\int_\tau^t \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + \nu|\nabla u|^2 \leqslant \frac{c}{t-\tau}e^{\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|^2_{H^{-1}}. \tag{4.27}$$

Démonstration.
La différence u vérifie, pour m correspondant aux deux solutions u_1 et u_2,

$$\frac{\partial}{\partial t}N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u_1) - f(u_2) = < f(u_1) - f(u_2) > . \tag{4.28}$$

Nous multiplions par $(t-\tau)\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $< \dfrac{\partial u}{\partial t} >= 0$,

$$\begin{aligned}(t-\tau)\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + \nu\frac{t-\tau}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 &\leqslant (t-\tau)\Big(\ell(t)u, \frac{\partial u}{\partial t}\Big)\\ &\leqslant |\nabla \ell(t)u|\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Le terme $|\nabla\ell(t)u|$ sera traité dans la suite et nous avons $|\nabla\ell(t)u| \leqslant c\|u\|$. Donc

$$\nu\frac{d}{dt}\big((t-\tau)|\nabla u|^2\big) + (t-\tau)\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} \leqslant c(t-\tau)\|u\|^2 + \nu|\nabla u|^2.$$

En intégrant sur $[\tau, t]$, et par (4.25) et (4.26), nous trouvons l'estimation (4.27). ■

Remarque 4.4. *Par* (4.29) *nous avons, en particulier,*

$$\nu(t-\tau)\frac{d}{dt}\big(|\nabla u|^2 + < u >^2\big) \leqslant c(t-\tau)\|u\|^2,$$

$$\nu\frac{d}{dt}\Big((t-\tau)\big(|\nabla u|^2 + < u >^2\big)\Big) \leqslant c(t-\tau)\|u\|^2 + \nu\|u\|^2.$$

Par le lemme de Gronwall et (4.26)

$$\|u(t)\|^2 \leqslant ce^{\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|^2_{H^{-1}}. \tag{4.30}$$

Lemme 4.5. *Nous avons*

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + \int_\tau^t \Big|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}\Big|^2 ds \leqslant \frac{c}{t-\tau}e^{\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|^2_{H^{-1}} \qquad t>\tau. \tag{4.31}$$

Démonstration.
Nous dérivons (4.28) par rapport à t, et nous posons $\theta := \dfrac{\partial u}{\partial t}$,

$$\partial_t N\theta - \nu\Delta\theta = -\ell(t)\theta - \ell'(t)u. \tag{4.32}$$

Multiplions (4.32) par $(t-\tau)\theta$

$$\frac{t-\tau}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \nu(t-\tau)|\nabla\theta|^2 \leqslant (t-\tau)|\nabla\ell(t)\theta|\|\theta\|_{H^{-1}} + (t-\tau)|\ell'(t)u|\ |\theta|.$$

Nous avons par (5.61) et (5.69)

$$|\nabla\ell(t)\theta| \leqslant c|\nabla\theta|,$$

$$|\ell'(t)u| \leqslant c\|u\|.$$

$$(t-\tau)\frac{d}{dt}\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \nu(t-\tau)|\nabla\theta|^2 \leqslant c(t-\tau)\|\theta\|^2_{H^{-1}} + c'(t-\tau)\|u\|^2 + c_1(t-\tau)|\theta|^2.$$

Par interpolation nous avons

$$|\theta|^2 \leqslant \frac{\nu}{2}|\nabla\theta|^2 + c_2\|\theta\|^2_{H^{-1}}.$$

$$\frac{d}{dt}\big((t-\tau)\|\theta\|^2_{H^{-1}}\big) + \nu(t-\tau)|\nabla\theta|^2 \leqslant c(t-\tau)\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \|\theta\|^2_{H^{-1}} + c'(t-\tau)\|u\|^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall et les estimations (4.26) et (4.27) nous obtenons (4.31), pour $t>\tau$. ■

Pour avoir la propriété de régularisation nous interprétons l'équation (4.28) comme une équation elliptique et nous avons, pour t fixé, $t>\tau$,

$$\nu\Delta u(t) - \ell(t)u(t) = \frac{\partial}{\partial t}N\bar{u}(t) - <\ell(t)u(t)> .$$

En multipliant par $\Delta u(t)$

$$\nu|\Delta u|^2 \leqslant \frac{\nu}{2}|\Delta u|^2 + c\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-2}} + (\ell(t)u, \Delta u),$$

$$\begin{aligned}\nu|\Delta u(t)|^2 &\leqslant c\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + |\nabla\ell(t)u|\ |\nabla u|,\\ &\leqslant c\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + c_1\|u\|^2 + c_2|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

$$|\Delta u(t)|^2 + < u(t) >^2 \leqslant c \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} + c' \|u(t)\|^2, \quad \text{pour } t \text{ fixé.}$$

Ceci donne, par (4.30) et (4.31), la propriété de régularisation ou l'estimation suivante :

$$\|u(t)\|_2^2 \leqslant \frac{c}{t-\tau} e^{\alpha(t-\tau)} \|u(\tau)\|^2_{H^{-1}}. \tag{4.33}$$

Ensuite, nous démontrons que la famille $\{U_m(t,\tau)\}$ est Hölder continue. Tout d'abord, nous trouvons le résultat suivant.

Lemme 4.6. *Soit* $u(t)$ *une solution du problème* (4.1)*. Alors, pour* $\|u(\tau)\|_2 \leqslant R$*, nous avons l'estimation suivante*

$$\int_\tau^t \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} ds \leqslant c |\nabla u(\tau)|^2 + c',$$

les constantes sont positives et dépendents de R *et de la norme de* m*.*

Démonstration.
Nous multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} - \nu \Delta u + f(u) =< f(u) > + Nm$$

par $\frac{\partial u}{\partial t}$ pour obtenir

$$\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 \leqslant c_1 |\nabla f(u)|^2 + \frac{\nu}{2} \| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} + c_2 \|m\|^2_{H^{-1}}.$$

Nous trouvons dans la suite l'estimation suivante (voir (6.36))

$$|\nabla f(u)|^2 \leqslant c |\nabla u|^2,$$

ce qui donne

$$\| \frac{\partial u}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} + \frac{\nu}{2} \frac{d}{dt} |\nabla u|^2 \leqslant c |\nabla u|^2 + c_2 \|m\|^2_{H^{-1}}.$$

En intégrant

$$\int_\tau^t \| \frac{\partial u(s)}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} ds \leqslant c |\nabla u(\tau)|^2_{H^{-1}} + c' \leqslant C. \tag{4.34}$$

■

Lemme 4.7. *Pour* $u(t)$ *solution de* (4.1)*, où* $u_\tau \in B_R := \{u \in V_1 \cap H_\eta, \ \ \|u\|_2 \leqslant R\}$*, nous avons*

$$\|U_m(t+\tau+s,\tau)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_{H^{-1}} \leqslant c|s|^{\frac{1}{2}}, \tag{4.35}$$

et

$$\|U_m(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_{H^{-1}} \leqslant c e^{\alpha t} |s|^{\frac{1}{2}}, \tag{4.36}$$

pour $s \geqslant 0$*.*

Démonstration.
Nous avons par (4.34) et pour $u_\tau \in B_R$

$$\begin{aligned}
\|U_m(t+\tau+s,\tau)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_{H^{-1}} &= \| \int_{t+\tau}^{t+\tau+s} \frac{\partial u(\theta)}{\partial t} d\theta \|_{H^{-1}} \\
&\leqslant \int_{t+\tau}^{t+\tau+s} \| \frac{\partial u(\theta)}{\partial t} \|_{H^{-1}} d\theta \\
&\leqslant |s|^{\frac{1}{2}} \int_{t+\tau}^{t+\tau+s} \| \frac{\partial u(\theta)}{\partial t} \|^2_{H^{-1}} d\theta \\
&\leqslant c_R |s|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

D'après (4.21) et (4.35)

$$\|U_m(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_{H^{-1}} \leqslant$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \|U_m(t+s+\tau,t+\tau)\big(U_m(t+\tau,\tau+s)u_\tau\big) - U_m(t+\tau,\tau+s)u_\tau\|_{H^{-1}} \\
&+ \|U_m(t+\tau,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau+s)\big(U_m(\tau+s,\tau)u_\tau\big)\|_{H^{-1}} \\
&\leqslant c|s|^{\frac{1}{2}} + ce^{K(t-s)}\|u_\tau - U_m(\tau+s,\tau)u_\tau\|_{H^{-1}} \\
&\leqslant ce^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}, \quad s \geqslant 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

■

Nous avons déjà trouvé l'existence de $T = T(M)$ tel que

$$U_m(\tau+T,\tau)\mathcal{O}_1(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \tag{4.37}$$

où $\mathcal{B}$ est le borné absorbant (compact) dans V'.
D'après la propriété de régularisation, la famille

$$U_m^\tau := U_m(\tau+nT,\tau+\ell T), \quad n,\ell \in \mathbb{Z}, \quad n \geqslant \ell,$$

possède un attracteur exponentiel dans V', $\ell \to \mathcal{M}_m(\ell,\tau)$, pour le système dynamique discret.
Nous avons par cette construction

$$\mathcal{M}_m(\ell,\tau) = \mathcal{M}_m(0,\ell T+\tau), \ \mathcal{M}_{T_s m}(\ell,\tau) = \mathcal{M}_m(\ell,\tau+s). \tag{4.38}$$

Maintenant, nous définissons les attracteurs exponentiels pour un temps continu par

$$\mathcal{M}_m(\tau) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_m(\tau, \tau - T - s)\mathcal{M}_m(0, \tau - T - s). \tag{4.39}$$

Nous allons vérifier que $\mathcal{M}_m(\tau)$ sont des attracteurs exponentiels.

(1) Propriété de semi-invariance :

$$\left.\begin{array}{l} U_m(t,\tau)\mathcal{M}_m(\tau) \subset \mathcal{M}_m(t) \\ \mathcal{M}_m(t+s) = \mathcal{M}_{T_s m}(t) \end{array}\right\} \tag{4.40}$$

Nous avons trouvé que $\mathcal{M}_m(0,\tau)$ sont des attracteurs donc ils sont semi-invariants, i.e.

$$U_m(\tau + \ell T, \tau)\mathcal{M}_m(0,\tau) \subset \mathcal{M}_m(\ell,\tau) = \mathcal{M}_m(0, \tau + \ell T).$$

Donc il suffit de montrer $(4.40)_1$ pour $t - \tau := \alpha \in [0,T]$. Nous avons

$$U_m(t+\alpha, t)\mathcal{M}_m(t) = \bigcup_{s\in[0,T]} U_m(t+\alpha, t-T-s)\mathcal{M}_m(0, t-T-s)$$

$$= \bigcup_{s\in[\alpha,T]} U_m(t+\alpha, t-T-s)\mathcal{M}_m(0,t-T-s) \cup \bigcup_{s\in[0,\alpha]} U_m(t+\alpha, t-T-s)\mathcal{M}_m(0,t-T-s)$$

$$= \bigcup_{s'\in[0,T-\alpha]} U_m(t+\alpha, t+\alpha-T-s')\mathcal{M}_m(0,t+\alpha-T-s') \cup \bigcup_{s'\in[T-\alpha,T]} U_m(t+\alpha, t+\alpha-T-s')$$

$$\circ U_m(t+\alpha-T-s', t+\alpha-2T-s')\mathcal{M}_m(0, t+\alpha-2T-s')$$

$$\subset \bigcup_{s'\in[0,T-\alpha]} U_m(t+\alpha, t+\alpha-T-s')\mathcal{M}_m(0, t+\alpha-T-s') \cup$$

$$\bigcup_{s'\in[T-\alpha,T]} U_m(t+\alpha, t+\alpha-T-s')\mathcal{M}_m(0, t+\alpha-T-s')$$

$$= \mathcal{M}_m(t+\alpha).$$

Pour montrer $(4.40)_2$, nous avons

$$\mathcal{M}_{T_s m}(\ell,\tau) = \mathcal{M}_m(\ell, \tau+s),$$

$$U_{T_s m}(t,\tau) = U_m(t+s, \tau+s).$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{T_{s'}m}(t) &= \bigcup_{s\in[0,T]} U_{T_{s'}m}(t, t-T-s)\mathcal{M}_{T_{s'}m}(0, t-T-s) \\ &= \bigcup_{s\in[0,T]} U_m(t+s', t+s'-T-s)\mathcal{M}_m(0, t+s'-T-s) \\ &= \mathcal{M}_m(t+s'). \end{aligned}$$

(2) Nous allons montrer que $m \mapsto \mathcal{M}_m(t)$ est Hölder continue. Nous prenons deux fonctions différentes m_1 et m_2. Nous avons

$$\mathcal{M}_{m_1}(t) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_{m_1}(t, t-T-s)\mathcal{M}_{m_1}(0, t-T-s).$$

Puisque $\mathcal{M}_m(0,\tau)$ est un attracteur exponentiel alors il vérifie

$$\mathrm{dist}^{symm}_{V'}(\mathcal{M}_{m_1}(0,\tau), \mathcal{M}_{m_2}(0,\tau)) \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\alpha(\tau-s)}\|m_1(s)-m_2(s)\|^2_{H^{-1}}ds\Big)^{k'}. \tag{4.41}$$

Par définition de l'attracteur $\mathcal{M}_m(t)$ et les estimations (4.19) et (4.22), nous avons

$$\mathrm{dist}^{symm}_{V'}\Big(\mathcal{M}_{m_1}(t), \mathcal{M}_{m_2}(t)\Big) \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\|m_1-m_2\|^2_{H^{-1}}ds\Big)^{k}.$$

De plus, nous avons

$$\mathrm{dist}^{symm}_{V'}(\mathcal{M}_m(0,\tau+s), \mathcal{M}_m(0,\tau)) \leqslant c'|s|^{\gamma}, \tag{4.42}$$

$$\|U_m(t+\tau+s, \tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)u_\tau\|_{H^{-1}} \leqslant ce^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}.$$

Les dernières inégalités donnent

$$\mathrm{dist}^{symm}_{V'}(\mathcal{M}_m(t+s), \mathcal{M}_m(t)) \leqslant c|s|^{\gamma}.$$

(3) Nous allons maintenant montrer que les attracteurs que nous avons trouvés sont de dimension fractale finie i.e. $\dim_F(\mathcal{M}_m(t), V') \leqslant c < \infty$. Par (4.36) et (4.42)

$$\mathrm{dist}^{symm}_{V'}\Big(U_m(t,t-T-s_1)\mathcal{M}_m(0,t-T-s_1), U_m(t,t-T-s_2)\mathcal{M}_m(0,t-T-s_2)\Big)$$
$$\leqslant c|s_1-s_2|^{k''}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Nous allons estimer $N_\varepsilon(\mathcal{M}_m(t), V')$, le nombre le plus petit de $\varepsilon-$boules nécessaires pour couvrir $\mathcal{M}_m(t)$. Nous trouvons N_ε par la dernière inégalité

$$cN_\varepsilon^{k''} < \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$N_\varepsilon^{k''} < \frac{\varepsilon}{2c} \;\Rightarrow\; N_\varepsilon < (\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}.$$

Nous avons

$$\mathcal{M}_m(t) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_m(t, t-T-s)\mathcal{M}_m(0, t-T-s),$$

donc

$$N_\varepsilon(\mathcal{M}_m(t), V') \leqslant \sum_{\ell=0} N_{\frac{\varepsilon}{2}}(U_m(t, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}})\mathcal{M}_m(0, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}, V').$$

$$\dim_F(U_m(t, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}})\mathcal{M}_m(0, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}, V') \leqslant$$

$$\dim_F(\mathcal{M}_m(0, t-T-\ell(\frac{\varepsilon}{2c})^{\frac{1}{k''}}, V') < \infty,$$

car $\mathcal{M}_m(\ell, \tau)$ sont des attracteurs et donc $\dim_F(\mathcal{M}_m(\ell, \tau), V') < \infty$.

Nous avons donc l'attracteur exponentiel pour le problème de Cahn-Hilliard non-autonome, soit le résultat suivant.

Théorème 4.8. *([29], Théorème 4.1)*
Supposons que nous avons les mêmes hypothèses précédentes concernants les fonctions $f(u)$ et $m(t)$ du problème de Cahn-Hilliard. Alors, pour tout m, il existe un attracteur exponential $t \mapsto \mathcal{M}_m(t)$ de U_m vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Les ensembles $\mathcal{M}_m(t)$ sont compacts et de dimension finie dans $H^{-1}(\Omega)$.

(ii) $\mathcal{M}_m(t)$ sont semi-invariant respectivement de $U_m(t, \tau)$ et invariant respectivement du temps, i.e.

$$U_m(t, \tau)\mathcal{M}_m(\tau) \subset \mathcal{M}_m(t), \quad \mathcal{M}_m(t+s) = \mathcal{M}_{T_s m}(t),$$

où $t, s, \tau \in \mathbb{R}, t \geqslant \tau$ et T_s est défini comme auparavant.

(iii) Ils vérifient la propriété suivante : pour tout ensemble borné B dans V', nous avons, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ et $t \geqslant 0$,

$$dist_{V'}(U_m(\tau+t, \tau)B, \mathcal{M}_m(\tau+t)) \leqslant Q(\|B\|_{V'})e^{-\alpha t},$$

où α est une constante positive et Q est une fonction monotone.

(iv) $m \mapsto \mathcal{M}_m(t)$ est Hölder continue.

Pour autres types de problèmes et l'existence d'un attracteur exponentiel voir par exemple [1], [18], [26], [30], [36], [37], [38], [49], [58], [59], [62] et [68].

4.6 L'attracteur rétrograde

Dans cette section, nous allons trouver l'attracteur rétrograde pour un système non autonome asymptotiquement compact du problème de Cahn-Hilliard. Ensuite, nous démontrons l'unicité de l'attracteur pullback. Puis nous montrons que cet attracteur est de dimension finie.

4.6.1 Théorème d'existence d'attracteur rétrograde

Nous prenons le problème de Cahn-Hilliard (4.1). Nous avons déjà trouvé, au début de ce chapitre, l'existence et l'unicité d'une solution $u(.,\tau,u_\tau)$ de ce problème. Nous considérons que $\varphi_\tau = \tau + t, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \ \tau \geqslant 0$, et nous définissons ϕ par

$$\phi(\tau, t, u_\tau) = u(\tau + t; t, u_\tau), \quad t \in \mathbb{R}, \ \tau \geqslant 0, \ u_\tau \in V'.$$

D'après cette définition nous trouvons que $\phi(\tau,t,\cdot) : V' \to V'$ est un cocycle continu dans V'.

Soit D la classe de toutes les familles, $\hat{D} = \{D(t), \quad t \in \mathbb{R}\}$, bornées dans V' (comme dans le chapitre 2, on peut considérer $D(t) \subset \bar{B}(0, r_{\hat{D}}(t))$, où $r_{\hat{D}}(t)$ vérifie $\lim\limits_{t\to-\infty} e^{ct} r^2_{\hat{D}}(t) = 0$).

Proposition 4.9. *([11]) Soit $\{u_{\tau_n}\} \in V'$ une suite qui converge faiblement dans V'. Alors*

$$\phi(\tau, t-\tau, u_{\tau_n}) \ \to \ \phi(\tau, t-\tau, u_\tau) \ \text{ faible dans } V', \quad \forall \tau \geqslant 0, \ t \in \mathbb{R},$$

$$\phi(.-\tau, \tau, u_{\tau_n}) \ \to \ \phi(.-\tau, \tau, u_\tau) \ \text{ faible dans } L^2(\tau, T; H), \quad \forall \tau, \tau < T.$$

Théorème 4.10. *Nous supposons que m dans le problème de Cahn-Hilliard (4.1) vérifie les hypothèses (M1), (M2) et (M3) précédentes et*

$$m \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, V'), \quad \text{où} \ \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda\xi} \|m(\xi)\|^2_{-1} d\xi < +\infty, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Alors, il existe un attracteur global rétrograde "pullback" qui appartient à D pour le cocycle ϕ.

Démonstration.
Soient $t \in \mathbb{R}$, et $\tau \geqslant 0$. Nous fixons $u_\tau \in V'$. Nous posons

$$u(r) := u(r; t-\tau, u_\tau) = \phi(r - t + \tau, t-\tau, u_\tau), \quad \text{pour} \ \ r \geqslant t - \tau.$$

Nous multiplions l'équation

$$\frac{\partial N\bar{u}}{\partial s} - \nu\Delta u + f(u) = Nm(s) + < f(u) > \tag{4.43}$$

par $\bar{u}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \nu|\nabla u|^2 + (f(u), u) = ((m(s), \bar{u}))_{-1} + < u > \int_\Omega f(u) dx.$$

Nous utilisons (3.26) et la continuité de l'injection $V \subset V'$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|\bar{u}\|^2_{-1} + c\|\bar{u}\|^2_{-1} + pb_{2p}\int_\Omega u^{2p} dx \leqslant \frac{c}{2}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \frac{1}{2c}\|m(s)\|^2_{-1} + c_1|\Omega|.$$

En particulier,
$$\frac{d}{ds}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + c\|\bar{u}\|_{-1}^2 \leqslant \frac{1}{c}\|m(s)\|_{-1}^2 + 2c_1|\Omega|.$$
En multipliant par e^{cs} et en intégrant entre $t-\tau$ et t, nous avons

$$e^{ct}\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant e^{c(t-\tau)}\|\bar{u}(\tau)\|_{-1}^2 + \frac{1}{c}\int_{t-\tau}^{t} e^{cs}\|m(s)\|_{-1}^2 ds + 2c_1|\Omega|e^{c\tau}.$$

Notons que $\|u\|_{H^{-1}}^2 \leqslant c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big)$, donc pour $\hat{D}$ donné, nous trouvons

$$\|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant c' e^{-c\tau} r_{\hat{D}}^2(t-\tau) + \frac{e^{-ct}}{c}\int_{-\infty}^{t} e^{cs}\|m(s)\|_{H^{-1}}^2 ds + 2c_1|\Omega|e^{c(\tau-t)},$$

pour tout $u_\tau \in D(t-\tau),\ t \in \mathbb{R},\ \tau \geqslant 0.$

Nous supposons que

$$R^2(t) = \frac{2e^{-ct}}{c}\int_{-\infty}^{t} e^{cs}\|m(s)\|_{-1}^2 ds.$$

Nous prenons la famille $\hat{B}$ dans V', telle que

$$B = \{u \in V', \|u\|_{H^{-1}} \leqslant R(t)\}.$$

Par cette définition nous notons que $\hat{B} \in D$. En observant le terme $e^{ct}r^2(t)$, nous trouvons que
$$\lim_{t\to-\infty} e^{ct}r^2(t) = 0.$$
C'est-à-dire, il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que

$$e^{ct}r^2(t) < \frac{1}{2}\varepsilon,\ \forall t \geqslant t_0.$$

De même, nous trouvons que $c_1|\Omega|e^{c(\tau-t)} \ \to\ 0$, lorsque t tend vers l'infini. Donc

$$\exists t_1 \geqslant 0 \ \text{ tel que } c_1|\Omega|e^{c(\tau-t)} < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \forall t \geqslant t_1.$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned}\|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_{H^{-1}}^2 &< e^{-c\tau} r_{\hat{D}}^2(t-\tau) + \frac{1}{2}R^2 + \frac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{où } t-\tau \geqslant t_1 \\ &< \varepsilon + \frac{1}{2}R^2 < R^2, \quad \text{où } t-\tau \geqslant \max\{t_0, t_1\}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Cela montre que $\hat{B}$ est absorbant dans V'. Si nous montrons aussi que ϕ est D-asymptotiquement compact rétrograde nous trouvons alors, par le Théorème 2.25, l'existence d'une famille d'attracteurs rétrogrades.

Nous fixons $\hat{D} \in D, t \in \mathbb{R}$, et prenons les deux suites (τ_n), $\tau_n \to +\infty$, et $u_{\tau_n} \in D(t-\tau_n)$. Nous allons démontrer que nous pouvons trouver une suite extraite de la suite $\big(\phi(\tau_n, t-\tau_n, u_{\tau_n})\big)$ qui converge dans V'.
Nous avons que $\hat{B}$ est absorbant. Donc, pour tout $k \geqslant 0$, il existe $\tau_{\hat{D}}(k) \geqslant 0$ vérifiant

$$\phi(\tau, t-\tau-k, D(t-\tau-k)) \ \subset \ B(t-k), \quad \forall \tau \geqslant \tau_{\hat{D}}(k).$$

Par cette relation nous trouvons, pour $\tau \geqslant \tau_{\hat{D}}(k)+k$,

$$\phi(\tau-k, t-\tau, D(t-\tau)) \subset B(t-k). \tag{4.45}$$

Donc, par (4.45), il existe une suite $\{w_k; k \geqslant 0\} \subset V'$, où $w_k \in B(t-k)$, et une suite $\{(\tau_{n'}, u_{\tau n'})\} \ \subset \{(\tau_n, u_{\tau n})\}$ où

$$\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'}) \ \rightharpoonup \ w_k \ \text{ faiblement dans } V'.$$

D'après la Proposition 4.9, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
w_0 \ &= \ (\text{faible}) \lim_{n'\to\infty} \ \phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'}) \\
&= \ (\text{faible}) \lim_{n'\to\infty} \ \phi(k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})) \\
&= \ \phi(k, t-k, (\text{faible}) \lim_{n'\to\infty} \ \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})).
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
w_0 \ &= \ \phi(k, t-k, w_k), \quad \forall k \geqslant 0, \\
\|w_0\|_{H^{-1}} \ &\leqslant \ \lim_{n'\to\infty} \inf \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})\|_{H^{-1}}.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons montrer l'inégalité suivante

$$\lim_{n'\to\infty} \sup \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})\|_{H^{-1}} \leqslant \|w_0\|_{H^{-1}}, \tag{4.46}$$

nous aurons alors

$$\|w_0\|_{H^{-1}} = \lim_{n'\to\infty} \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})\|_{H^{-1}},$$

et avec la convergence faible nous obtenons la convergence forte, dans V', de $\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau n'})$ vers w_0.

Nous multiplions l'équation (4.43) par u, et nous procédons comme auparavant, nous trouvons

$$\frac{d}{ds}\|u\|_{H^{-1}}^2 + c\|u\|_{-1}^2 \leqslant c(\eta) + 2((m(s),u(s)))_{H^{-1}}.$$

Nous multiplions par e^{cs} et nous intégrons entre $t-\tau$ et t

$$\|u(t)\|_{-1}^2 \leqslant 2c_1'|\Omega|e^{c(\tau-t)} + e^{-c\tau}\|u(\tau)\|_{H^{-1}}^2 + 2\int_{t-\tau}^{t} e^{c(s-t)}((m(s),u(s)))_{H^{-1}}ds,$$

ou

$$\begin{aligned}\|\phi(\tau,t-\tau,u_\tau)\|_{H^{-1}}^2 &\leqslant c(\eta)e^{c(\tau-t)} + \|u(\tau)\|_{H^{-1}}^2 e^{-c\tau}\\ &+2\int_{t-\tau}^{t} e^{c(s-t)}((m(s),\phi(s-t+\tau,t-\tau,u_\tau)))_{H^{-1}}ds. \qquad (4.47)\end{aligned}$$

Nous avons, pour tout $k\geqslant 0$ et pour tout $\tau_{n'}\geqslant k$,

$$\begin{aligned}\phi(k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}})) &= \phi(k+\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}})\\ &= \phi(\tau_{n'},t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}),\end{aligned}$$

car $\phi(t+s,\tau,u_\tau)=\phi(t,s+\tau,\phi(s,\tau,u_\tau))$. Alors, nous pouvons écrire par (4.47)

$$\begin{aligned}\|\phi(\tau_{n'},t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}})\|_{H^{-1}}^2 &= \|\phi(k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))\|_{H^{-1}}^2\\ &\leqslant 2c_1'|\Omega|e^{c(k-t)} + e^{-ck}\|\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))\|_{H^{-1}}^2\\ +2\int_{t-k}^{t} e^{c(s-t)}((m(s),\phi(s-t+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))))_{-1}ds. &\qquad (4.48)\end{aligned}$$

Nous avons $\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}})\in B(t-k),\ \forall\tau_{n'}\geqslant\tau_{\hat{D}}(k)+k,\ k\geqslant 0$, nous obtenons alors

$$\lim_{n'\to\infty}\sup\left(e^{-ck}\|\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))\|_{-1}^2\right)\leqslant e^{-ck}R^2(t-k).$$

Nous avons aussi $\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))\rightharpoonup w_k$ faiblement dans V', et par la Proposition 4.9

$$\phi(.-t+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))\rightharpoonup\phi(.-t+k,t-k,w_k)\text{ faible dans }L^2(t-k,t;V'). \qquad (4.49)$$

Nous avons $e^{c(s-t)}m(s)\in L^2(t-k,t;V)$. Nous obtenons par (4.49) :

$$\begin{aligned}&\lim_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t} e^{c(s-t)}((m(s),\phi(s-t+k,t-k,\phi(\tau_{n'}-k,t-\tau_{n'},u_{\tau_{n'}}))\ ))_{-1}ds\\ &\qquad=\int_{t-k}^{t} e^{c(s-t)}((m(s),\phi(s-t+k,t-k,w_k)\ ))_{-1}ds.\end{aligned}$$

Nous déduisons par (4.48)

$$\lim_{n'\to\infty}\sup \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_{-1}^2 \leqslant 2c_1'|\Omega|e^{c(k-t)} + e^{-ck}R^2(t-k)$$

$$+2\int_{t-k}^{t} e^{c(s-t)}((m(s), \phi(s-t+k, t-k, w_k)\ ))_{-1}ds. \quad (4.50)$$

Nous avons $w_0 = \phi(k, t-k, w_k)$, $\forall k \geqslant 0$, et par (4.47), nous obtenons

$$\|w_0\|_{H^{-1}}^2 = \|\phi(k, t-k, w_k)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant 2c_1'|\Omega|e^{c(k-t)}$$

$$+\|w_k\|_{-1}^2 e^{-ck} + 2\int_{t-k}^{t} e^{c(s-t)}((m(s), \phi(s-t+k, t-k, w_k)\ ))_{-1}ds. \quad (4.51)$$

Par (4.50) et (4.51), nous trouvons

$$\lim_{n'\to\infty}\sup \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_{H^{-1}}^2 \leqslant e^{-ck}R^2(t-k) + \|w_0\|_{-1}^2 - \|w_k\|_{H^{-1}}^2 e^{-ck}$$

$$\leqslant e^{-ck}R^2(t-k) + \|w_0\|_{H^{-1}}^2, \quad (4.52)$$

où,

$$R^2(t) = \frac{2e^{-ct}}{c}\int_{-\infty}^{t} e^{cr}\|m(r)\|_{-1}^2 dr,$$

donc

$$e^{-ck}R^2(t-k) = \frac{2e^{-c(t+k)}}{c}\int_{-\infty}^{t-k} e^{cr}\|m(r)\|_{-1}^2 dr \to 0, \text{ lorsque } k\to\infty.$$

Nous déduisons par (4.52)

$$\lim_{n'\to\infty}\sup \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_{H^{-1}}^2 \leqslant \|w_0\|_{H^{-1}}^2,$$

et donc nous obtenons $\|w_0\|_{H^{-1}} = \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_{H^{-1}}$.
Nous trouvons donc, par le Théorème 2.25, l'existence d'une famille d'attracteurs globaux rétrogrades pour le problème de Cahn-Hilliard,

$$\hat{\mathcal{A}} = \left\{\mathcal{A}(t) = \Lambda(\hat{B}, t) = \bigcap_{s\geqslant 0}\overline{\Big(\bigcup_{\tau\geqslant s}\phi(\tau, \varphi_{-\tau}t, B(\varphi_{-\tau}t))\Big)},\ t\in\mathbb{R},\ \tau\geqslant 0\right\},$$

où $\hat{B}$ est une famille d'ensembles (pullbacks) absorbants donnée par

$$B(t) = \left\{u\in V', \|u\|_{H^{-1}} \leqslant R(t)\right\}, \quad R^2(t) = \frac{2e^{ct}}{c}\int_{-\infty}^{t} e^{-cr}\|m(r)\|_{H^{-1}}^2 dr,$$

et cette famille $\hat{\mathcal{A}}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\hat{\mathcal{A}}$ est compact.

2. $\hat{\mathcal{A}}$ attire tous les ensembles de D, i.e : $\forall \hat{D} \in D$ (une famille (pullback) bornée) alors
$$\lim_{t\to\infty}(\phi(\tau,\varphi_{-\tau}t, D(\varphi_{-\tau},\mathcal{A}(t)) = 0. \tag{4.53}$$
3. L'invariance : $\phi(\tau,\varphi_{-\tau}t,\mathcal{A}(t)) = \mathcal{A}(\varphi_\tau t)$.

■

Remarque 4.11. *En général, les conditions 1, 2 et 3 démontrent l'existence de l'attracteur global pullback mais elles ne sont pas suffisantes pour montrer l'unicité.*

4.6.2 Unicité de l'attracteur

Remarque 4.12. *(Voir [8], Remarque 2.11. et [23], Remarque 2.1.)*
Vue à la remarque précédente et en ajoutant la condition suivante
4. $\hat{\mathcal{A}}$ est une famille pullback-bornée, i.e, $\hat{\mathcal{A}} \in D$,
alors, il existe au plus une famille qui vérifie 2 et 4, i.e. l'attracteur global pullback-borné est unique dans la classe des familles pullback-bornées, car, supposons qu'il existe deux attracteurs globaux pullback-bornés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, par (4.53) *nous avons*

$$(\phi(\tau,\varphi_{-\tau}t,\mathcal{A}'(\varphi_{-\tau}t)),\mathcal{A}(t)) \;\to\; 0, \quad \textit{lorsque } \tau\to\infty.$$

Or,
$$\phi(\tau,\varphi_{-\tau}t,\mathcal{A}'(\varphi_{-\tau}t)) = \mathcal{A}'(\varphi_\tau(\varphi_\tau t)) = \mathcal{A}'(\varphi_0 t) = \mathcal{A}'(t),$$
(par définition de φ), et donc $\mathcal{A}'(t)\subset\mathcal{A}(t)$ puisque $\mathcal{A}(t)$ est fermé.
De même façon nous trouvons $(\phi(\tau,\varphi_{-\tau}t,\mathcal{A}(\varphi_{-\tau}t)),\mathcal{A}'(t)) \;\to\; 0$, et donc $\mathcal{A}(t)\subset\mathcal{A}'(t)$, et alors il existe un seul attracteur.

Pour démontrer l'unicité de l'attracteur nous utilisons la décomposition introduite par Di Plinio et al. [23] pour le coycle ϕ (ou pour la famille de processus utilisé dans [23])

Lemme 4.13. *Soit B le borné absorbant pour $\phi(.,.,.)$. Si $\phi(.,.,.)$ admet la décomposition suivante*
$$\phi(\tau,\varphi_{-\tau}t,B(t)) = P(\tau,t) + N(\tau,t),$$
où $\lim_{\tau\to\infty}|P(\tau,t)| = 0$ et $N(\tau,t)$ est un sous-ensemble compact de H (ou de V'), alors
$$\mathcal{A}(t) = \Lambda(B,t)$$
est l'attracteur global pullback.

Pour notre problème $P(\tau,t) = 0$.

Lemme 4.14. *Supposons que nous avons les mêmes hypothèses du lemme précédent avec, $H \hookrightarrow V'$ l'injection est continue et compacte.*
En vue du lemme précédent, si nous rajoutons la condition suivante

$$\|N(\tau,t)\|_{H^{-1}} = h < \infty,$$

alors $\mathcal{A}$ est une famille pullback-bornée. Nous avons donc l'unicité de l'attracteur global pullback dans le sens de la remarque 2.6.15.

Démonstration.
nous fixons $x \in \mathcal{A}(t)$, donc par la définition de $\omega-$limite, il existe deux suites $(\tau_n), \tau_n \to +\infty$, et $(x_n) \in B(\varphi_{-\tau_n} t)$ telles que

$$\|\phi(\tau_n, \varphi_{-\tau_n} t, x_n) - x\|_{H^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Par le Lemme 4.13, nous avons $\phi(\tau_n, \varphi_{-\tau_n} t, x_n) = N_{x_n}(\tau_n, t) + P_{x_n}(\tau_n, t)$ où $N_{x_n}(\tau_n, t) \in N(\tau_n, t)$, et $P_{x_n}(\tau_n, t) \in P(\tau_n, t)$. Nous avons $\|N_{x_n}(\tau_n, t)\|_{H^{-1}} \leqslant h$, alors la suite $N_{x_n}(\tau_n, t)$ est contenue dans une boule fermée dans V' de rayon h, nous l'appelons E. Nous avons aussi

$$\|N_{x_n}(\tau_n, t) - x\|_{H^{-1}} \leqslant \|\phi(\tau_n, \varphi_{-\tau_n} t, x_n) - x\|_{H^{-1}} + \|P_{x_n}(\tau_n, t)\|_{H^{-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

x est donc un point d'accumulation de E dans V', or E est fermé dans V', donc $x \in E$, alors $\mathcal{A}(t) \subset E$, i.e : $\|\mathcal{A}(t)\|_{H^{-1}} \leqslant h$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Cela donne que $\mathcal{A}$ est une famille pullback-bornée dans V', et nous avons l'unicité. ■

Pour notre problème $P(\tau, t) = 0$, et par (4.44)

$$\|N(\tau,t)\|_{H^{-1}} = \|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_{H^{-1}} < R, \quad \text{pour } t-\tau \geqslant \max\{t_0, t_1\},\ u_\tau \in B.$$

D'après les résultats précédents ; le Lemme 4.13, le Lemme 4.14 et la Remarque 4.12, nous avons l'unicité de l'attracteur pullback.

4.6.3 La dimension de l'attracteur

Ici, nous allons démontrer que la dimension de Hausdorff de l'attracteur pullback de notre problème est finie dans l'espace V'.

Définition 4.15. *([10] et [22])*
Soient H un espace de Hilbert et $\mathcal{A} \subset H$ un ensemble compact de H. Soit $\mathcal{U}$ une famille finie des boules $B(a_i, r_i)$ qui couvre $\mathcal{A}$, tels que $\sup_i(r_i) \leqslant \delta(\mathcal{U}) \leqslant \delta$, et $B(a,r)$ dénote une boule fermée centrée en a et de rayon r. Alors, la mesure d-dimensionnelle de Hausdorff de $\mathcal{A}$ est définie par

$$\mu_H(\mathcal{A}, d) = \lim_{\delta\to\infty} \mu_H(\mathcal{A}, d, \delta),$$

telle que

$$\mu_H(\mathcal{A}, d, \delta) = \inf_{\delta(\mathcal{U}) \leqslant \delta} \sum_i r_i^d.$$

De plus, il existe $d = d_H(\mathcal{A}) \in [0, +\infty)$ *tel que,* $\mu_H(\mathcal{A}, d) = 0$ *pour* $d > d_H(\mathcal{A})$*, et* $\mu_H(\mathcal{A}, d) = \infty$ *pour* $d < d_H(\mathcal{A})$*.*
Nous appelons $d_H(\mathcal{A})$ *la dimension de Hausdorff de* $\mathcal{A}$*.*

Nous allons ici appliquer les résultats trouvés par Caraballo et al. dans [10]. Pour des autres exemples de problèmes où la dimension (ou la dimension fractale) de Hausdorff de l'attracteur rétrograde est finie voir [14], [22] et [34].

Théorème 4.16. *([10])*
Supposons qu'il existe $K_0, K_1, \theta > 0$*, telles que*

$$\|\mathcal{A}(t)\|^+_{H^{-1}} := \sup_{y \in \mathcal{A}(t)} \|y\|_{H^{-1}} \leqslant K_0|t|^\theta + K_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.54}$$

Supposons aussi que, pour tout $t \in \mathbb{R}$*, il existe* $T^* = T^*(t)$*,* $\ell = \ell(t, T^*) \in [1, +\infty)$*,* $\delta = \delta(t, T^*) \in (0, 1/\sqrt{2})$ *et* $N = N(t)$*, tels que*
pour tout $u, v \in \mathcal{A}(\tau), \tau \leqslant t - T^*$*,*

$$\|\phi(T^*, \tau, u) - \phi(T^*, \tau, v)\|_{H^{-1}} \leqslant \ell\|u - v\|_{H^{-1}}, \tag{4.55}$$

$$\|Q_N(\phi(T^*, \tau, u) - \phi(T^*, \tau, v))\|_{H^{-1}} \leqslant \delta\|u - v\|_{H^{-1}}. \tag{4.56}$$

Ici Q_N *est le projecteur de* V' *dans un sous espace* $V_N'^{\perp}$ *de la dimension* $N \in \mathbb{N}$*.*
Alors, pour tout $\eta = \eta(t) > 0$*, tel que* $\sigma = \sigma(t) = (6\sqrt{2}\ell)^N(\sqrt{2}\delta)^\eta < 1$*, nous obtenons l'inégalité suivante*

$$d_{V'}(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant N + \eta. \tag{4.57}$$

Pour appliquer le théorème précédent nous démontrons les résultats suivants.

Lemme 4.17. *Nous prenons le problème de Cahn-Hilliard (4.1), où* $m(.) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, V')$*, avec la condition initiale et les conditions aux limites. Supposons qu'il existe* $r \geqslant 0, c, c'$*, telles que*

$$\|m(t)\|_{H^{-1}} \leqslant c|t|^r + c', \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.58}$$

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$*, il existe* $B_1(t)$ *borné dans* V' *tel que*

$$\phi(t - \tau, \tau, D(\tau)) \subset B_1(t), \quad \forall \hat{D} \in D.$$

Démonstration.

Nous prenons le produit scalaire de l'équation (4.43) par u. Nous procédons comme auparavant et nous utilisons (4.58)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u\|_{-1}^2 + \nu|\nabla u|^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|u\|_{-1}^2 + c_2\|u\|_{-1}^2 \leqslant k_1 + \|u\|_{-1}\|m\|_{-1}$$

$$\leqslant k_1 + \frac{c_2}{2}\|u\|_{-1}^2 + \frac{1}{2c_2}(c|s|^r + c')^2. \tag{4.59}$$

$$\frac{d}{ds}\|u\|_{-1}^2 + c_2\|u\|_{-1}^2 \leqslant 2c_1|\Omega| + \frac{1}{c_2}(c|s|^r + c')^2.$$

Nous multiplions par $e^{c_2 s}$ et nous intégrons entre τ et t

$$\|u(t)\|_{-1}^2 e^{c_2 t} \leqslant \|u(\tau)\|_{-1}^2 e^{c_2\tau} + \int_\tau^t e^{c_2 s}\Big(2c_1|\Omega| + \frac{1}{c_2}(c|s|^r + c')^2\Big)ds.$$

Si nous prenons $B_1(t) = \{y \in V',\ \|y\|_{-1} \leqslant \sqrt{K(t)+\alpha}\}$, où $\alpha = \|u(\tau)\|_{-1}e^{\frac{1}{2}c_2(\tau-t)} \geqslant 0$ et

$$K(t) = \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}c_2(s-t)}\Big(2c_1|\Omega| + \frac{1}{c_2}(c|s|^r + c')^2\Big)ds,$$

alors $B_1(t)$ est le borné recherché. ■

Lemme 4.18. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t$, il existe $B_2(t_0,t)$, borné dans H et compact dans V', tel que*
$\forall \hat{D} \in D$, il existe $T = T(\hat{D}, t_0) < t_0$ tel que

$$\phi(t-\tau, \tau, D(\tau)) \subset B_2(t_0, t), \qquad \forall \tau \leqslant T.$$

Démonstration.
Multiplions

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = m$$

par u

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 &\leqslant -(f'(u)\nabla u, \nabla u) + \int_\Omega |u||m|dx \\ &\leqslant c|\nabla u|^2 + c_1\|m\|_{-1}^2 \\ &\leqslant |u|\ |\Delta u - <u>| + c_1\|m\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

Nous avons, en particulier,

$$\frac{d}{dr}|u|^2 \leqslant c_1\|m(r)\|_{-1}^2 + c(\eta) + c|u|^2. \tag{4.60}$$

Posons $a_1 = a_1(t) = \int_{t_0}^{t} \|m(r)\|_{-1}^2 dr, \quad a_2 = a_2(t) = e^{c(t-t_0)}$. Supposons que $t_0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t$ et multiplions (4.60) par $e^{-c(r-t_0)}$

$$\frac{d}{dr}\big(e^{-c(r-t_0)}|u|^2\big) \leqslant \big(\|m(r)\|_{-1}^2 + c(\eta)\big)e^{-c(r-t_0)} \leqslant \|m(r)\|_{-1}^2 + c(\eta).$$

Intégrons entre s et t

$$|u(t)|^2 \leqslant e^{c(t-s)}|u(s)|^2 + e^{c(t-t_0)} \int_s^t \big(\|m(r)\|_{-1}^2 + c(\eta)\big)dr,$$

$$\begin{aligned} |u|^2 &\leqslant 2\big(|\bar{u}|^2 + < u >^2\big) \\ &\leqslant c|\nabla u|^2 + 2\eta^2. \end{aligned}$$

Ceci donne

$$|u(t)|^2 \leqslant \big(c|\nabla u(s)|^2 + c(\eta) + a_1\big)a_2.$$

Enfin intégrons par rapport à s sur (t_0, t)

$$(t-t_0)|u(t)|^2 \leqslant \Big(c\int_{t_0}^t |\nabla u(s)|^2 ds + \big(c(\eta) + a_1\big)(t-t_0)\Big)a_2.$$

Le terme $\int_{t_0}^t |\nabla u(s)|^2 ds$ est trouvé par (4.59) ;

$$\int_{t_0}^t |\nabla u(s)|^2 ds \leqslant R(t_0,t), \quad R(t_0,t) = 2k_1(t-t_0) + c_3\int_{t_0}^t \big(c|s|^r + c'\big)^2 ds + K(t) + \alpha.$$

Alors, l'ensemble

$$B_2(t_0,t) := \Big\{u \in H, \quad |u|^2 \leqslant \Big(c\frac{R(t_0,t)}{t-t_0} + a_1 + c(\eta)\Big)a_2\Big\}$$

est l'ensemble recherché. ■

Théorème 4.19. *Le cocycle $\phi(.,.,.)$, associée au problème de Cahn-Hilliard, possède un attracteur global rétrograde, $\hat{\mathcal{A}} = \{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. De plus, il existe $K_0, K_1, \theta > 0$ tels que*

$$\|\mathcal{A}(t)\|_{-1}^+ \leqslant K_0|t|^\theta + K_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4.61}$$

Démonstration.

Nous avons déjà trouvé l'attracteur global pullback de ce problème. Nous allons montrer (4.61). Puisque $\mathcal{A}(t) \subset B_1(t), \ \forall t$, donc nous trouvons d'abord $\|B_1(t)\|_{-1}^+$. Par le lemme précédent nous avons $\|B_1(t)\|_{-1}^+ = \sup_{y\in B_1(t)} \|y\|_{-1} \leqslant \sqrt{K(t)+\alpha}$, où

$$K(t) = \int_{-\infty}^t e^{\frac{1}{2}c_2(s-t)}\Big(2c_1|\Omega| + \frac{1}{c_2}(c|s|^r + c')^2\Big)ds.$$

De ce calcul nous pouvons dire qu'il existe $r_1 > 0, R_1$ et R_2 telles que $\|B_1(t)\|_{-1}^+ \leqslant R_1|t|^{r_1} + R_2$. Nous obtenons donc (4.61). ■

Théorème 4.20. *Nous prenons le problème de Cahn-Hilliard (4.1) avec les conditions aux limites et la condition initiale, où $f(u)$ et $m(t)$ sont comme auparavant, et la solution de ce problème (ou la condition initiale) apprtient à $L^\infty(\Omega)$. Alors, l'attracteur global rétrograde de ce problème est de dimension finie, i.e : $d_{V'}(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) < \infty$. De plus, il existe $L_1 > 0$ qui dépend de Ω et de n, tel que*

$$d_{V'}(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant L_1(\xi)^{\frac{n}{2}}, \tag{4.62}$$

où $\xi > 0$ est la constante donnée par $f'(s) \geqslant -\xi$.

Démonstration.

Tout d'abord nous allons montrer que $d_{V'}(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) < \infty$, en vérifiant (4.54), (4.55) et (4.56) du Théorème 4.16.
Par (4.61) nous trouvons (4.54). Nous allons démontrer (4.55). Nous prenons u_1 et u_2 deux solutions différentes de (4.1), (ou de (4.43)). Nous posons $w = u_1 - u_2$ (pour simplifier on prend $< u_1 >=< u_2 >$). Alors w vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}Nw - \nu\Delta w + f(u_1) - f(u_2) =< f(u_1) - f(u_2) > . \tag{4.63}$$

En multipliant par w (pour le produit scalaire de H), nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|w\|_{-1}^2 + \nu|\nabla w|^2 &\leqslant \xi|w|^2 \qquad (4.64)\\ &\leqslant \xi\|w\|_{-1}\|w\|\\ &\leqslant \frac{\nu}{2}|\nabla w|^2 + \frac{\xi^2}{2\nu}\|w\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

En intégrant entre τ et t

$$\|w(t)\|_{-1}^2 \leqslant e^{\frac{\xi^2}{\nu}(t-\tau)}\|w(\tau)\|_{-1}^2. \tag{4.65}$$

D'où

$$\|u_1(\tau+T^*) - u_2(\tau+T^*)\|_{-1}^2 \leqslant e^{2c_1\xi^2T^*}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_{-1}^2, \quad 2c_1 = \frac{1}{\nu}.$$

Alors nous obtenons (4.55) avec $\ell(t, T^*) = e^{c_1\xi^2T^*}$.
Nous allons maintenant montrer (4.56). Prenons $w(s)$ comme auparavant.
Soit Q_N le projecteur de V' dans un sous espace $V_N'^{\perp}$. Nous multiplions (4.63) par $Q_Nw(s)$, sachant que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|Q_Nw(s)\|_{-1}^2 = (Q_Nw(s), \frac{\partial Nw}{\partial s}) = ((Q_Nw(s), \frac{\partial w}{\partial s}))_{-1}$$

et

$$-(\nu\Delta w, Q_N w(s)) = \nu|\nabla Q_N w(s)|^2, \quad \text{par la formule de Green.}$$

Nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|Q_N w(s)\|_{-1}^2 + \nu|\nabla Q_N w(s)|^2 = -(f(u_1) - f(u_2), Q_N w(s)). \tag{4.66}$$

Nous prenons les valeurs propres λ_j de $-\Delta$ dans V, étant rangées en ordre croissant, $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_N \to \infty$, donc

$$\lambda_{N+1}|Q_N w(s)|^2 \leqslant |\nabla Q_N w(s)|^2.$$

Par (4.66)

$$\frac{d}{ds}\|Q_N w(s)\|_{-1}^2 + 2\nu\lambda_{N+1}|Q_N w(s)|^2 \leqslant 2\xi|Q_N w(s)|^2,$$

$$\frac{d}{ds}\|Q_N w(s)\|_{-1}^2 + 2(\nu\lambda_{N+1} - \xi)|Q_N w(s)|^2 \leqslant 0,$$

$$\frac{d}{ds}\|Q_N w(s)\|_{-1}^2 + 2c_2(\nu\lambda_{N+1} - \xi)\|Q_N w(s)\|_{-1}^2 \leqslant 0, \quad \nu\lambda_{N+1} > \xi,$$

$$\frac{d}{ds}\left(e^{2c_2(\nu\lambda_{N+1}-\xi)(s-\tau)}\|Q_N w(s)\|_{-1}^2\right) \leqslant 0.$$

Intégrons sur $(\tau, \tau + T^*)$

$$\|Q_N w(\tau + T^*)\|_{-1}^2 e^{2c_2(\nu\lambda_{N+1}-\xi)T^*} \leqslant \|u_\tau - v_\tau\|_{-1}^2$$

$$\|Q_N w(\tau + T^*)\|_{-1}^2 \leqslant e^{-2c_2(\nu\lambda_{N+1}-\xi)T^*}\|u_\tau - v_\tau\|_{-1}^2$$

$$\|Q_N w(\tau + T^*)\|_{-1}^2 \leqslant \delta^2(t, T^*, N)\|u_\tau - v_\tau\|_{-1}^2,$$

où $\delta^2(t, T^*, N) = e^{-2c_2(\nu\lambda_{N+1}-\xi)T^*}$.
De cette relation, il faut bien choisir $N = N(t)$ et T^* pour que nous ayons $\delta(t) = \delta(t, T^*, N) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, i.e.

$$e^{-2c_2(\nu\lambda_{N+1}-\xi)T^*} < \frac{1}{2}.$$

De la dernière relation nous avons

$$T^* > \frac{\log\,(2)}{2c_2(\nu\lambda_{N+1} - \xi)}, \quad \text{si } \nu\lambda_{N+1} > \xi,$$

i.e. pour avoir $\delta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ il faut choisir T^*, où T^* vérifie

$$T^* > \frac{\log\,(2)}{2c_2(\nu\lambda_{N+1} - \xi)} \tag{4.67}$$

et N tel que λ_{N+1} vérifie

$$\nu\lambda_{N+1} > \xi. \tag{4.68}$$

Nous obtenons donc (4.56). Par le Théorème 4.16, nous trouvons que $d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant N + \eta$, où η est donné par

$$\sigma(t) = (6\sqrt{2}\ell(t))^N(\sqrt{2}\delta(t))^\eta < 1.$$

Nous allons maintenant montrer (4.62). Il est bien connu, voir [5] ou [50], qu'il existe $D > 0$ telle que $\dfrac{\lambda_N}{N^{\frac{2}{n}}} \geqslant D,\ \forall N \in \mathbb{N}$. Nous posons $\eta = N$. Alors,

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= (12\delta(t)\ell(t))^{2N}\\ &= 12^{2N}\left(e^{-2c_2(\nu\lambda_{N+1}-\xi)T^*}.e^{2c_1\xi T^*}\right)^N < 1.\end{aligned}$$

$$e^{(2c_2\xi+2c_1\xi-2c_2\nu\lambda_{N+1})T^*} < \frac{1}{\gamma^2}, \quad \text{où } \gamma = 12. \tag{4.69}$$

Nous obtenons de cette relation

$$T^* > \frac{\log\gamma^2}{2c_2\nu\lambda_{N+1} - 2c_2\xi - 2c_1\xi}, \tag{4.70}$$

où, $2c_2\nu\lambda_{N+1} > 2\xi(c_1 + c_2)$. Nous avons

$$2c_2\nu\lambda_{N+1} \geqslant 2c_2\nu D(N+1)^{\frac{2}{n}},$$

car $\lambda_{N+1} \geqslant D(N+1)^{\frac{2}{n}}$. Nous voulons donc

$$2c_2\nu D(N+1)^{\frac{2}{n}} > 2\xi(c_1 + c_2). \tag{4.71}$$

Alors, si nous choisissons T^* et N tels que T^* satisfait (4.70) et N satisfait (4.71) nous vérifions (4.69). De plus, nous avons par (4.71)

$$2c_2\nu D(N+1)^{\frac{2}{n}} > 2(c_1 + c_2)\xi = 2c_3\xi,$$

$$(N+1)^{\frac{2}{n}} \geqslant \frac{c_3}{c_2\nu D}\xi \quad\Rightarrow\quad N \geqslant \left(\frac{c_3\xi}{c_2\nu D}\right)^{\frac{n}{2}} - 1.$$

Nous choisissons N tel que $N \leqslant \left(\dfrac{c_3\xi}{c_2\nu D}\right)^{\frac{n}{2}}$. Alors,

$$d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant 2N \leqslant L_1(\xi)^{\frac{n}{2}}, \quad \text{où } L_1 = 2\left(\frac{c_3}{c_2\nu D}\right)^{\frac{n}{2}} > 0.$$

■

4.7 L'attracteur uniforme

Dans cette section nous allons chercher l'attracteur uniforme du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = m(x,t), \tag{4.72}$$

$$u|_{t=\tau} = u_\tau, \quad u_\tau \in V',$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega.$$

Ici, nous supposons que $m(s) = m(.,s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$, et elle vérifie

(1) $\int_\Omega m(x,t)dx = 0$, et $|m|^2 = M < \infty$,

(2)

$$\|m\|^2_{L^2_b} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|m(s)\|^2_{-1} ds < \infty.$$

et l'injection de H dans V' est compacte.

4.7.1 Orientation

Pour trouver l'attracteur uniforme de notre problème nous avons besoin de définir des symboles et la famille de processus $\{U(t,\tau)\}$, voir [15] et [60].

Le symbole

Par (4.72) nous pouvons écrire

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nu\Delta^2 u + \Delta f(u) + m(t) := A_{m(t)}u.$$

Nous appelons m le symbole de l'équation (4.72). Ensuite, nous allons définir le groupe $\{T(h), \ \ h \in \mathbb{R}\}$ par

$$T(h)m(s) := m(s+h), \quad s,h \in \mathbb{R}.$$

Nous avons donc $T(h)L^2_{loc}(\mathbb{R}; V') \subset L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$.
Finalement, nous définissons le symbole $\mathcal{H}(m)$ comme suivant

$$\mathcal{H}(m) := \overline{\{T(h)m, \ h \in \mathbb{R}\}}, \tag{4.73}$$

tel que la fermeture est dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$. Nous notons $\mathcal{H}(m)$ par Σ, et nous avons

$$T(h)\Sigma = \Sigma, \ \forall h \in \mathbb{R} \text{ (par définition de } T(h) \text{ et de } \Sigma).$$

Définition 4.21. *La fonction $m(s) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$ est translation compacte (et nous notons tr.c) si $\mathcal{H}(m)$ est compact dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$.*

Par (4.73) nous avons que $\mathcal{H}(m)$ est fermé dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R};V')$ qui est compact, alors $\mathcal{H}(m)$ est compact. Nous trouvons donc que $m(s)$ est tr.c dans $L^2_{loc}(\mathbb{R};V')$. La fonction $m(s)$ est translation bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R};V')$. En effet,

$$\|m\|^2_{L^2_b} = \|m\|^2_{L^2_b(\mathbb{R};V')} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|m(s)\|^2_{-1} ds < \infty.$$

Définition 4.22. *Nous définissons la famille* $\{U_m(t,\tau),\quad t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}\}$ *dans* V' *par*

$$U_m(t,\tau) : V' \to V'$$
$$u_\tau \mapsto u(t),$$

telle que, $u(t)$ *est la solution du problème (4.72),* $m \in L^2_{loc}(\mathbb{R};V')$*, et* $\{U_m(t,\tau)\}$ *vérifie*

1. $U_m(t,s) \circ U_m(s,\tau) = U_m(t,\tau), \quad \forall t \geqslant s \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}.$
2. $U_m(\tau,\tau) = Id$ *(opérateur d'identité).*

D'après ce qui a précédé et l'unicité de la solution, nous avons

$$U_{T(h)m}(t,\tau) = U_m(t+h,\tau+h), \quad \forall h \geqslant 0,\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}. \tag{4.74}$$

L'attracteur uniforme est, par définition, un ensemble compact qui attire uniformément tous les bornés dans V' et il est l'ensemble minimal qui attire uniformément les bornés de V', voir [15] et Chapitre 2.
Afin de démontrer l'existence de cet attracteur, nous trouvons d'abord quelques estimations a priori.

4.7.2 Estimations

Estimation de u

Pour avoir une estimation bornée de u nous multiplions l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u) = Nm + < f(u) > \tag{4.75}$$

par $\bar{u}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + c\|\bar{u}\|^2_{-1} + (f(u),u) \leqslant \frac{c}{2}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \frac{1}{2c}\|m(t)\|^2_{-1} + |<u>| \int_\Omega f(u)dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \frac{c}{2}\|\bar{u}\|^2_{-1} + pb_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant c' + \frac{1}{2c}\|m(t)\|^2_{-1},$$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + c\|\bar{u}\|^2_{-1} \leqslant 2c' + \frac{1}{c}\|m(t)\|^2_{-1}.$$

Pour intégrer la dérnière inégalité nous utilisons le Lemme 2.15, où

$$y(t) = \|\bar{u}(t)\|_{-1}^2, h(t) = 2c' + \frac{1}{c}\|m\|_{-1}^2 \quad \text{et } \gamma = c.$$

Nous avons $\int_t^{t+1} h(s)ds = 2c' + c^{-1}\|m\|_{L_b^2}^2$. Nous obtenons donc

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|\bar{u}(\tau)\|_{-1}^2 e^{-c(t-\tau)} + (1+c^{-1})\Big(2c' + c^{-1}\|m\|_{L_b^2}^2\Big) < \infty. \tag{4.76}$$

D'autre part, si nous multiplions l'équation (4.72) par u nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 + (f'(u)\nabla u, \nabla u) = (m(t), u),$$

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + \nu|\Delta u|^2 - k_3|u|^2 + 2b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant k_3|u|^2 + \frac{1}{k_3}|m|^2,$$

(pour les détails voir (3.43), (3.44), (3.45) et (3.46) du chapitre précédent).
Nous obtenons, en particulier,

$$\frac{d}{dt}|u|^2 - 2k_3|u|^2 \leqslant \frac{1}{k_3}|m|^2 \leqslant \frac{M}{k_3}.$$

En intégrant entre τ et t

$$|u(t)|^2 \leqslant |u(\tau)|^2 e^{2k_3(t-\tau)} + \frac{M}{k_3}e^{2k_3\tau} < \infty, \quad \forall t \leqslant T < \infty. \tag{4.77}$$

Estimation de la différence entre deux solutions

Nous prenons deux symoles m_1 et m_2 correspondants aux deux solutions u_1 et u_2, où $u_1(\tau) = u_{1\tau}, u_2(\tau) = u_{2\tau}$ et $< u_1(\tau) >=< u_2(\tau) >$. Ensuite, nous posons

$$w(t) := u_1(t) - u_2(t) = U_{m_1}(t,\tau)u_{1\tau} - U_{m_2}(t,\tau)u_{2\tau}, \quad m := m_1 - m_2.$$

Donc $\|m\|_{L_b^2}^2 < \infty$ et w est la solution du problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}Nw - \nu\Delta w + f(u_1) - f(u_2) = Nm, \tag{4.78}$$

$$w(\tau) = w_\tau = u_{1\tau} - u_{2\tau}.$$

Nous multiplions (4.78) par w

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2 + 2\nu|\nabla w|^2 \leqslant c|w|^2 + ((m,w))_{-1}.$$

Par interpolation

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2 + 2\nu|\nabla w|^2 \leqslant \nu|\nabla w|^2 + c\|w\|_{-1}^2 + c'\|m\|_{-1}^2.$$

En utilisant le Lemme 2.15 nous obtenons

$$\|w(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|w(\tau)\|_{-1}^2 e^{c(t-\tau)} + c'^{-1}(1+c'^{-1})\|m\|_{L_b^2}^2. \tag{4.79}$$

4.7.3 Théorème d'existence d'attracteur uniforme

Nous avons le résultat suivant, voir [15] et [60].

Théorème 4.23. *Si la famille* $\{U_m(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ m \in \Sigma\}$ *possède un ensemble compact qui attire uniformément les bornés de* V' *alors elle admet un attracteur uniforme* $\mathcal{A}_\Sigma$.

La preuve de ce théorème est faite dans [15].
Nous allons maintenant appliquer ce théorème pour notre problème. Tout d'abord nous rappelons quelques propriétés dans $\Sigma = \mathcal{H}(m)$.

Proposition 4.24. *Soit* $m(t)$ *une tr.c dans* $L^{p,w}_{loc}(\mathbb{R},\varepsilon)$, *alors*

1. $\forall m_1 \in \mathcal{H}(m)$, m_1 *est tr.c dans* $L^{p,w}_{loc}$ *et* $\mathcal{H}(m_1) \subset \mathcal{H}(m)$.
2. $\mathcal{H}(m)$ *est borné dans* $L^p_{loc}(\mathbb{R};\varepsilon)$, $\forall m_1 \in \mathcal{H}(m)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+h} \|m_1(s)\|^p_\varepsilon \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+h} \|m(s)\|^p_\varepsilon ds.$$

3. *L'ensemble* $\{T(t)\}$ *est continu dans* $\mathcal{H}(m)$.
4. $T(t)\mathcal{H}(m) = \mathcal{H}(m), \quad \forall t \geqslant 0$.

Proposition 4.25. *La famille* $\{U_m(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ m \in \Sigma\}$ *associée au problème (4.72) est uniformément bornée,* $(V' \times \mathcal{H}(m_0); V')$*- continue (i.e.,* $(u,m) \mapsto U_m(t,\tau)$ *est continue pour tout* $t \geqslant \tau$*) et elle admet un ensemble compact qui attire uniformément les bornés de* V'*, i.e., il existe* B_1 *un ensemble compact dans* V' *tel que*

$$\forall D \subset V' \text{ borné}, \quad \lim_{t\to\infty} \sup_{m\in\Sigma} dist(U_m(t,\tau)D, B_1) = 0.$$

Démonstration.
Par l'estimation (4.76) nous avons, pour $< u_1(\tau) >=< u_2(\tau) >$,

$$\|u(t)\|^2_{-1} \leqslant (1 + c^{-1})(2c' + c^{-1}\|m\|^2_{L^2_b}) < \infty.$$

Et, pour $< u_1(\tau) >\neq< u_2(\tau) >$, nous avons (voir les estimations trouvées précédemment)

$$\|\bar{u}(t)\|^2_{-1} \leqslant (1 + c^{-1})(2c' + c^{-1}\|m\|^2_{L^2_b}) < \infty,$$

et donc

$$\|u(t)\|^2_{H^{-1}} \leqslant (1 + c^{-1})(2c' + c^{-1}\|m\|^2_{L^2_b}) + \eta^2 < \infty,$$

i.e., la famille $\{U_m(t,\tau)\}$, $m \in \Sigma$ est uniformément bornée dans V'. Cette estimation implique aussi que l'ensemble

$$B_0 := \{u \in V', \quad \|u\|^2_{H^{-1}} \leqslant R_0^2\}, \quad \text{où } R_0^2 = (1 + c^{-1})(2c' + c^{-1}\|m\|^2_{L^2_b}) + \eta^2,$$

est uniformément absorbant. Et également que l'ensemble $B_1 = \bigcup_{m\in\Sigma}\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} U_m(\tau+1,\tau)B_0$ est uniformément absorbant. D'après (4.77), B_1 est borné dans H, et alors B_1 est compact dans V' (car l'injection de H dans V' est compacte). Donc, la famille $\{U_m(t,\tau)\},\ m\in\Sigma$ est uniformément compacte.
Nous allons démontrer que $\{U_m(t,\tau)\}$ est $(V'\times\Sigma;V')$-continue.
Nous prenons deux suites $u_{2\tau}^{(n)}$ et $m_2^{(n)}$, telles que

$$u_{2\tau}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} u_{1\tau},\quad m_2^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} m_1(s) \ \text{ dans } \ L^2_{loc}(\mathbb{R};V').$$

Par (4.79), nous avons

$$\|u_1(t)-u_2^{(n)}(t)\|_{-1}^2 \leqslant \|u_1(\tau)-u_2^{(n)}(\tau)\|_{-1}^2 e^{c_3(\tau-t)}+c_3^{-1}(1+c_3^{-1})\|m_1(s)-m_2^{(n)}(s)\|^2_{L^2_{loc}} \ \to 0.$$

Cette relation implique que $u_2^{(n)}(t) \ \to\ u_1(t)$ dans V' et donc la famille $\{U_m(t,\tau)\}, m\in\ \Sigma$ est $(V'\times\Sigma;V')$-continue. ■

D'après la Proposition 4.25 et le Théorème 4.23, nous avons l'existence d'un attracteur uniforme pour le problème de Cahn-Hilliard.

Nous pouvons aussi construire un attracteur global dans l'espace $V'\times\Sigma$. Pour cela, nous définissons une famille d'opérateurs $\{S(t),\ t\geqslant 0\}$ dans $V'\times\Sigma$ comme suit : pour tout $(u,m)\in V'\times\Sigma, t\geqslant 0$,

$$\begin{aligned} S(t)\ &:\ V'\times\Sigma\to V'\times\Sigma \\ (u,m)&\mapsto (U_m(t,0)u,T(t)m). \end{aligned} \tag{4.80}$$

Par cette définition nous trouvons que $S(t)$ est un semi-groupe dans $V'\times\Sigma$, car, pour $t_1,t_2\geqslant 0$, nous avons

$$\begin{aligned} S(t_1+t_2)(u,m) &= (U_m(t_1+t_2,0)u,T(t_1+t_2)m) \\ &= (U_m(t_1+t_2,t_2)U_m(t_2,0)u,T(t_1)(T(t_2)m)) \\ &= (U_{T(t_2)m}(t_1,0)U_m(t_2,0)u,T(t_1)(T(t_2)m)) \\ &= S(t_1)\big(U_m(t_2,0)u,T(t_2)m\big) = S(t_1)S(t_2)(u,m), \end{aligned}$$

et

$$S(0)(u,m) = (U_m(0,0)u,m) = Id\ (u,m).$$

Définition 4.26. *Nous disons que $\mathcal{K}=\{u(.)\}$ est le noyau de la famille $\{U_m(t,\tau)\}$ si $u(.)$ vérifie*

$$U_m(t,\tau)u(\tau)=u(t),\ \forall t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R},\ \textit{et}\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_{-1}<\infty.$$

Nous appelons $\mathcal{K}(s) = \{u(s),\ u(.) \in \mathcal{K}\} \subseteq V'$ *la section du noyau de* $\{U_m(t,\tau)\}$ *au temps* $t = s$.

Nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.27. *Supposons que la famille* $\{U_m(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ m \in \Sigma\}$ *est* $(V' \times \Sigma; V')$*-continue et elle possède un ensemble compact qui attire uniformément tous les bornés de* V'. *Alors le semi-groupe* $S(t)$ *défini par (4.80) possède un attracteur compact* $\mathcal{A}$ *qui est invariant, i.e.,* $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A},\ \forall t \geqslant 0$.
De plus, si Π_1 *et* Π_2 *sont deux projecteurs de* $V' \times \Sigma$ *dans* V' *et dans* Σ *respectivement, i.e.* $\Pi_1(u,m) = u,\ \Pi_2(u,m) = m$, *alors*

1. $\Pi_1\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_\Sigma$ *est l'attracteur uniforme de* $\{U_m(t,\tau)\},\ m \in \Sigma$,
2. $\Pi_2\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 = \Sigma$,
3. *l'attracteur global de ce problème vérifie*
$$\mathcal{A} = \bigcup_{m\in\Sigma} \mathcal{K}_m(0) \times \{m\},$$
4. *l'attracteur uniforme vérifie*
$$\mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_1 = \bigcup_{m\in\Sigma} \mathcal{K}_m(0),$$
tel que $\mathcal{K}_m(0)$ *est la section du noyau* $\mathcal{K}_m$ *de la famille* $\{U_m(t,\tau)\}, m \in \Sigma$ *au temps* $t = 0$.

La démonstration peut être consultée dans [15] , page 291.

4.8 L'attracteur exponentiel rétrograde

Dans cette section nous allons chercher un attracteur exponentiel rétrograde du problème de Cahn-Hilliard suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu\Delta^2 u - \Delta f(u) = m(t) \quad \text{dans} \ \ (\tau, +\infty) \times \Omega, \tag{4.81}$$

$$u(\tau, x) = u_0(x) \quad \text{dans } \Omega,$$

avec les conditions aux limites de Neumann ou de l'espace périodique, (3.3) et (3.4).
Précédemment nous avons vu que (4.81) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t} Nu - \nu\Delta u + f(u) = Nm(t), \tag{4.82}$$

et la condition initiale $u(\tau, x) = u_0(x)$.
Nous avons aussi trouvé le résultat suivant.

Théorème 4.28. *Si* $m \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, V')$*, alors, pour* $\tau \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $u_0 \in V'$*, il existe une seule solution* $u(t) = u(t; \tau, u_0)$ *pour (4.81).*
De plus, cette solution satisfait

$$u \in \mathbb{C}([\tau, T]; H) \cap L^2(\tau, T; H^2(\Omega)) \cap L^{2p}(\tau, T; L^{2p}(\Omega)) \quad \textit{pour tout } T > \tau.$$

Finalement, si $u_0 \in H^2(\Omega)$ *alors*

$$u \in \mathbb{C}([\tau, T]; H^2(\Omega)) \cap L^2(\tau, T; D(A)) \quad \textit{pour tout } T > \tau.$$

4.8.1 Préliminaires

Pour tout $\delta > 0, K > 0$ et $B \subset V'$, nous notons par $S_{\delta,K}(B)$ l'ensemble d'applications $S : V' \to V'$ telles que $S(\mathcal{O}_\delta(B)) \subset B$ et

$$\|Su_1 - Su_2\|_{H^{-1}} \leqslant K\|u_1 - u_2\|_{H^{-1}}, \quad \text{pour tout } \ u_1, u_2 \in \mathcal{O}_\delta(B),$$

où $\mathcal{O}_\delta(B) := \{u \in V' : \inf_{w \in B} \|u - w\|_{H^{-1}} < \delta\}$. Et

$$\|S_1 - S_2\|_{S_{\delta,K}(B)} := \sup_{u \in \mathcal{O}_\delta(B)} \|S_1 u - S_2 u\|_{H^{-1}}$$

est la métrique dans $S_{\delta,K}(B)$.

Nous définissons pour le problème de Cahn Hilliard une famille d'applications U_{m,t_0} telle que

$$U_{m,t_0} := \{U_m(t, \tau) : \ \tau \leqslant t \leqslant t_0\},$$

$$U_m(t, \tau)u_0 := u(t; \tau, u_0), \ \tau \leqslant t \leqslant t_0, u_0 \in H \subset V'.$$

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, nous notons par $\mathcal{U}(V', t_0)$ la classe de toutes les familles $U = \{U(t, s) : \ s, t \in \mathbb{R}, s \leqslant t \leqslant t_0\}$ d'applications $U(t, s) : V' \to V'$ telles que

1. $U(s, s) = Id$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

2. $U(t, r)U(r, s) = U(t, s)$ pour tout $s \leqslant r \leqslant t$.

Il est clair que $U_{m,t_0} \in \mathcal{U}(V', t_0)$, pour $t_0 \in \mathbb{R}$.

4.8.2 Théorème d'existence d'attracteur exponentiel rétrograde

Pour trouver un attracteur exponentiel rétrograde du problème de Cahn Hilliard nous allons appliquer le Théorème 2.3 de [43], et pour cela il faut que U_{m,t_0} vérifie les conditions suivantes :

(H0) Nous fixons $\tau_0 > 0$. Alors, pour tout $B \subset V'$ ensemble borné et fermé dans V',

$$U_m(t, t-\tau_0) \in S_{\delta,K}(B), \quad \forall t \leqslant t_0. \tag{4.83}$$

(H1) Il existe $C_0 > 0$, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \tau_0$ et $\gamma > 0$ telles que pour tout $t \leqslant t_0, \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon_0$ et $v \in \mathcal{O}_\delta(B)$,

$$\|U_m(t, t-r)v - U_m(t-s, t-r-s)v\|_{H^{-1}} \leqslant C_0|s|^\gamma.$$

(H2) Il existe une constante $C_B > 0$ telle que

$$\|U_m(t, t-s)v - U_m(t-s, t-r-s)w\|_{H^{-1}} \leqslant C_B\|v-w\|_{H^{-1}},$$

pour tout $v, w \in B$, pour $t \leqslant t_0$, $0 \leqslant s \leqslant 2\tau_0$.

(H3) Il existe $C_0' > 0$ et $\gamma' > 0$ telles que pour tout $t \leqslant t_0, \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon_0$ et $v \in B$,

$$\|U_m(t, t-r)v - U_m(t-s, t-r)v\|_{H^{-1}} \leqslant C_0'|s|^{\gamma'}.$$

(H4) Pour tout $t > t_0$ et D_1, D_2 deux bornés de V', il existe une constante $L(t, D_1, D_2) > 0$ telle que

$$\|U_m(t, t_0)v - U_m(t, t_0)w\|_{H^{-1}} \leqslant L(t, D_1, D_2)\|v-w\|_{H^{-1}} \quad \text{pour tout } v \in D_1, w \in D_2.$$

A partir de maintenant, dans cette section, nous supposons que m satisfait les hypôthèses suivantes :

(A1) $m \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; V')$.

(A2) $M_m(t) := \sup_{r \leqslant t} \int_{r-1}^r \|m(s)\|^2_{H^{-1}} ds < \infty, \quad$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(A3) il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $q > 2$ tels que

$$M_{m,q}(t_0) := \sup_{r \leqslant t_0} \int_{r-1}^r \|m(s)\|^q_{H^{-1}} ds < \infty.$$

4.8.3 Quelques estimations a priori :

Estimation de $\|u(t)\|_{H^{-1}}$

Soit $u(t) = u(t; \tau, u_0)$ une solution de notre problème. Donc u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u) = Nm(t) + < f(u) > .$$

Nous multiplions par $\bar{u}$ et nous utilisons (4.12) et (4.13)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_{-1} + \nu|\nabla u|^2 + (f(u), u) = ((m(t), \bar{u}))_{-1} + | < u > | \int_\Omega |f(u)| dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + c\|\bar{u}\|_{-1}^2 + pb_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant \frac{c}{2}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \frac{1}{2c}\|m(t)\|_{-1}^2 + c_1.$$

Notons que $\dfrac{d < u >^2}{dt} = 0$, donc

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big) + \big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big) \leqslant \frac{1}{c}e^{ct}\|m(t)\|_{-1}^2 + k_1,$$

k_1 dépend de c_1 et de η ($| < u > | \leqslant \eta$). Nous intégrons, respectivement de t, entre τ et t

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|u_0\|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{c}e^{-ct}\int_\tau^t e^{cs}\|m(s)\|_{-1}^2 ds + k_2\big(1 - e^{-c(t-\tau)}\big),$$

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|u_0\|_{H^{-1}}^2 + \frac{1}{c}e^{-ct}\int_\tau^t e^{cs}\|m(s)\|_{-1}^2 ds + k_2, \tag{4.84}$$

pour tout $t \geqslant \tau$.
Nous avons

$$\begin{aligned} e^{-ct}\int_\tau^t e^{cs}\|m(s)\|_{-1}^2 ds &\leqslant e^{-ct}\int_{-\infty}^t e^{cs}\|m(s)\|_{-1}^2 ds \\ &= e^{-ct}\sum_{n=0}^{\infty} e^{c(t-n)}\int_{t-(n+1)}^{t-n}\|m(s)\|_{-1}^2 ds \\ &\leqslant (1 - e^{-ct})^{-1}M_m(t) \\ &\leqslant (1 + c^{-1})M_m(t). \end{aligned}$$

Par (4.84), nous trouvons

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|u_0\|_{H^{-1}}^2 + c^{-1}(1 + c^{-1})M_m(t) + k_2, \tag{4.85}$$

pour tout $t \geqslant \tau$.
Nous posons, pour D un borné dans V',

$$\|D\|_{H^{-1}} := \max(1, \sup_{v\in D}\|v\|_{H^{-1}}).$$

Par (4.85)

$$\|u(t;\tau,u_0)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant 1 + c^{-1}(1 + c^{-1})M_m(t_0), \quad u_0 \in D, \tag{4.86}$$

pour tout $t \leqslant t_0,\ \tau \leqslant t - \frac{1}{c}\log(C_1\|D\|_{H^{-1}})$.
Car, pour avoir (4.86) il faut avoir l'inégalité suivante

$$e^{-c(t-\tau)}\|D\|_{H^{-1}}^2 + k_2 \leqslant 1,$$

$$-c(t-\tau)+2\log\|D\|_{H^{-1}}-c(t-\tau)+\log(k_2)\leqslant 0.$$

Donc

$$\tau\leqslant t-\frac{1}{c}\log(C_1\|D\|_{H^{-1}}),\quad \text{où } C_1=k_2.$$

Nous obtenons par (4.86) le résultat suivant.

Proposition 4.29. *Soit $D\subset V'$ un borné. Alors*

$$\|U_m(t,\tau)u_0\|_{H^{-1}}\leqslant C_m(t_0),\quad \textit{pour tout } t\leqslant t_0, \tau\leqslant t-\frac{1}{c}\,log(C_1\|D\|_{H^{-1}}), u_0\in D.$$

Estimation pour la différence entre deux solutions

Proposition 4.30. *Il existe une fonction positive $L=L(t,\tau)$, qui dépend de Ω et ne dépend pas de m, telle que*

$$\|U_m(t,\tau)u_{01}-U_m(t,\tau)u_{02}\|_{H^{-1}}\leqslant L\|u_{01}-u_{02}\|_{H^{-1}}. \tag{4.87}$$

Démonstration.
Nous prenons $u_1(t)=U_{m_1}(t,\tau)u_{01},\ u_2(t)=U_{m_2}(t,\tau)u_{02}$ deux solutions du problème (4.81) (ou du problème (4.82)) et nous posons

$$v(t):=u_1(t)-u_2(t),\ m(t):=m_1(t)-m_2(t).$$

Supposons $<u_1>\neq<u_2>$, alors v vérifie le problème suivant :

$$\frac{d}{dt}N\bar{v}-\nu\Delta v+f(u_1)-f(u_2)=Nm(t)+<f(u_1)-f(u_2)>,\quad \text{dans } D'(\tau,\infty;V') \tag{4.88}$$

$$v(\tau)=u_{01}-u_{02}.$$

Multiplions par $\bar{v}$

$$\frac{d}{dt}(\|\bar{v}(t)\|_{-1}^2)+2\nu|\nabla v(t)|^2\leqslant c|v|^2+c_2\|v\|_{-1}^2+c_1\|m\|_{H^{-1}}^2+|v|\int_\Omega|f(u_1)-f(u_2)|dx.$$

D'après (3.50) et (3.52)

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{v}(t)\|_{-1}^2+<v>^2\big)+2\nu|\nabla v(t)|^2\leqslant\nu|\nabla v(t)|^2+\big(\|\bar{v}(t)\|_{-1}^2+<v>^2\big)+c_1\|m\|_{H^{-1}}^2.$$

En intégrant sur $[\tau,t]$ nous avons, en particulier,

$$\|v(t)\|_{H^{-1}}^2\leqslant\|v_0\|_{H^{-1}}^2e^{c(t-\tau)}+c_1\int_\tau^t e^{c(t-s)}\|m(s)\|_{H^{-1}}^2. \tag{4.89}$$

Pour avoir (4.87) nous prenons $m_1(t)=m_2(t)$, ce qui donne

$$\|U_m(t,\tau)u_{01}-U_m(t,\tau)u_{02}\|_{H^{-1}}\leqslant e^{c(t-s)}\|u_{01}-u_{02}\|_{H^{-1}}. \tag{4.90}$$

Nous terminons la démonstration de cette proposition, où $L(t,\tau)=e^{c(t-\tau)}$. ∎

Estimation de $\|U_m(t,\tau)u_0 - u_0\|_{H^{-1}}$

Nous posons $w(t) := u(t) - u_0 = U_m(t,\tau)u_0 - u_0$. w satisfait (notons que $< w >= 0$)

$$\frac{d}{dt}Nw(t) = \nu\Delta u - f(u) + Nm(t) + < f(u) >, \quad \text{dans } V',$$
$$w(\tau) = 0.$$

Nous multiplions par w

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{-1}} &= \nu(\Delta u, w) - (f(u), w) + ((m(t), w))_{-1} \\
&= \nu(\Delta w, w) + \nu(\Delta u_0, w) - (f(u), u) + (f(u), u_0) + ((m(t), w))_{-1} \\
&= -\nu|\nabla w|^2 - \nu(\nabla u_0, \nabla w) - (f(u), u) + (f(u), u_0) + ((m, w))_{-1},
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{-1}} + 2\nu|\nabla w|^2 + 2(f(u), u) \leqslant 2\nu|(\nabla u_0, \nabla w)| + 2|(f(u), u_0)| + 2|((m(t), w))_{-1}|.$$

Par (4.12), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{-1}} + 2\nu|\nabla w|^2 + 2pb_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx &\leqslant k_1 + \nu|\nabla w|^2 + c|\nabla u_0|^2 \\
&\quad +2|(f(u), u_0)| + 2|((m(t), w))_{-1}|.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{-1}} + \nu|\nabla w|^2 &\leqslant k_1 + c|\nabla u_0|^2 + 2|(f(u), u_0)| - 2|f(u_0), u_0)| \\
&\quad +2|((m(t), w))_{-1}| + 2|f(u_0), u_0)|. \qquad (4.91)
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
|(f(u), u_0)| - |f(u_0), u_0)| &\leqslant |(f(u) - f(u_0), u_0)| \\
&\leqslant |(f(u) - f(u_0)|^2 + |u_0|^2 \\
&\leqslant c\int_\Omega \big((|u|^{2p-2} + |u_0|^{2p-2} + 1)|w|\big)^2 dx + |u_0|^2.
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$ et $p = 2$

$$\begin{aligned}
|(f(u), u_0)| - |f(u_0), u_0)| &\leqslant c\big(\|u\|^4_{L^\infty} + \|u_0\|^4_{L^\infty} + 1\big)|w|^2 + |u_0|^2 \\
&\leqslant C\big(\|u\|_2, \|u_0\|_2\big)|w|^2 + |u_0|^2 \\
&\leqslant \frac{\nu}{2}|\nabla w|^2 + c\|w\|^2_{H^{-1}} + |u_0|^2, \quad \text{où } \|u\|_2, \|u_0\|_2 \leqslant \text{ const.}.
\end{aligned}$$

Nous déduisons par (4.91)

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{-1}} + \nu|\nabla w|^2 \leqslant k_1 + c'|\nabla u_0\|^2 + |f(u_0)|^2 + 2|u_0|^2 + \frac{1}{c}\|m\|^2_{H^{-1}} + c\|w\|^2_{H^{-1}}.$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\|w\|^2_{H^{-1}} \leqslant k_1 + 2c_2^2(\alpha) + 2|u_0|^2 + c'|\nabla u_0|^2 + 2\alpha^2 b_{2p}^2|u_0|^{4p} + \frac{1}{c}\|m\|^2_{H^{-1}} + c\|w\|^2_{H^{-1}}.$$

En intégrant entre τ et t, notons que $w(\tau) = 0$, nous trouvons

$$\|w(t)\|^2_{H^{-1}} \leqslant \Big(\big(k_1'+2|u_0|^2+c'|\nabla u_0\|^2+2\alpha^2 b_{2p}^2|u_0|^{4p}\big)(t-\tau)+\frac{1}{c}\int_\tau^t \|m(\theta)\|^2_{-1}d\theta\Big)e^{c(t-\tau)}. \tag{4.92}$$

Pour trouver un attracteur exponentiel rétrograde nous allons démontrer que U_{m,t_0} vérifie (4.83), (H1), (H2), (H3) et (H4).
Nous prenons dans V' la boule $B := \{u \in V' : \|u\|_{H^{-1}} \leqslant C_m(t_0)\}$, et posons $\tau_0 := 1 + c^{-1} \log\big(C_1 \max(1, (1 + C_m(t_0)))\big)$.
Pour $\delta = 1$, $\mathcal{O}_1(B) := \{u \in V' : \inf_{w\in V'} \|u - w\|_{H^{-1}} < 1\}$. Nous avons déjà trouvé

$$\|U_m(t, t - \tau_0)u_0\|_{H^{-1}} \leqslant C_m(t_0) \quad \text{pour tout } t \leqslant t_0,$$

$$t-\tau_0 = t-1-c^{-1} \log\big(C_1 \max(1, (1+C_m(t_0)))\big) \leqslant t-c^{-1} \log\big(C_1\|\mathcal{O}_1(B)\|_{H^{-1}}\big), u_0 \in \mathcal{O}_1(B).$$

Notons ici que $\|\mathcal{O}_1(B)\|_{H^{-1}} = \max\big(1, C_1(1 + C_m(t_0))\big)$. Et par l'estimation (4.90)

$$\|U_m(t, t - \tau_0)u_{01} - U_m(t, t - \tau_0)u_{02}\|_{H^{-1}} \leqslant K\|u_{01} - u_{02}\|_{H^{-1}},$$

où $K = e^{c\tau_0}$.
Alors $U_m(t, t - \tau_0) \in S_{1,K}(B)$, pour tout $t \leqslant t_0$.
De plus, nous avons par (4.89)

$$\|U_{m_1}(t,\tau)u_{01}-U_{m_2}(t,\tau)u_{02}\|^2_{H^{-1}} \leqslant e^{c(t-\tau)}\|u_{01}-u_{02}\|^2_{H^{-1}}+\frac{1}{c}\int_\tau^t e^{c(t-\theta)}\|m_1(\theta)-m_2(\theta)\|^2_{H^{-1}}d\theta,$$

dont nous déduisons que l'application $U_m(t, s) : V' \to V'$ est continue pour tout $s \leqslant t$.
U_m satisfait (H2) et (H4).
D'après l'estimation (4.90)

$$\|U_m(t, t - s)u_{01} - U_m(t, t - s)u_{02}\|_{H^{-1}} \leqslant e^{\frac{c}{2}s}\|u_{01} - u_{02}\|_{H^{-1}},$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$, $u_{01}, u_{02} \in V'$ et, en particulier, pour tout $t \leqslant t_0, s \in [0, 2\tau_0], u_{01}, u_{02} \in B$.
Alors U_m satisfait (H2) avec $C_B = 2\tau_0$.

De plus, par (4.90), U_m satisfait (H4) avec $L(t, D_1, D_2) = e^{\frac{c}{2}(t-t_0)} > 0$.
U_m **satisfait (H1) et (H3).**
Posons $u(t) = U_m(t,\tau)u_0$. Pour tout $s \geqslant 0, t-s \geqslant \tau$, nous avons

$$u(t) - u(t-s) = \int_{t-s}^{t} u'(\theta)d\theta,$$

$$\begin{aligned}\|U_m(t,\tau)u_0 - U_m(t-s,\tau)u_0\|_{H^{-1}} &\leqslant \int_{t-s}^{t} \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(\theta)\Big\|_{H^{-1}} d\theta \\ &\leqslant s^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{t-s}^{t} \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(\theta)\Big\|^2_{H^{-1}} d\theta\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Pour estimer l'intégrale $\int_{t-s}^{t} \Big\|\dfrac{\partial u}{\partial t}(\theta)\Big\|^2_{H^{-1}} d\theta$, nous multiplions l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}N\bar{u} - \nu\Delta u + f(u) = Nm+ < f(u) >,$$

par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\nu|\nabla u|^2 + 2\int_\Omega g(u)dx\big) \leqslant c\|m\|^2_{H^{-1}} + \frac{1}{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}}.$$

Intégrons sur $[t-s,t]$

$$\int_{t-s}^{t} \Big\|\frac{\partial u}{\partial t}(\theta)\Big\|^2_{H^{-1}} d\theta + \nu|\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega g(u(t))dx \leqslant$$

$$c\int_{t-s}^{t} \|m(\theta)\|^2_{H^{-1}} d\theta + \nu|\nabla u_0|^2 + 2\int_\Omega g(u(0))dx \leqslant \quad \text{const.}$$

Nous déduisons par (4.93)

$$\|U_m(t,\tau)u_0 - U_m(t-s,\tau)u_0\|_{H^{-1}} \leqslant \hat{c}_1 s^{\frac{1}{2}}, \tag{4.94}$$

pour tout $t \leqslant t_0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ \tau \leqslant t - c^{-1}\log\big(C_1\|\mathcal{O}_1(B)\|_{H^{-1}}\big),\ u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$.
Nous prenons $r \geqslant \tau_0$. Alors

$$t - r \leqslant t - 1 - c^{-1}\log\big(C_1\|\mathcal{O}_1(B)\|_{H^{-1}}\big). \tag{4.95}$$

Par (4.94) et (4.95)

$$\|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-r)u_0\|_{H^{-1}} \leqslant \hat{c}_1 s^{\frac{1}{2}}, \tag{4.96}$$

pour tout $t \leqslant t_0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ r \geqslant \tau_0,\ u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$.
Donc U_m satisfait (H3) avec $\gamma' = \frac{1}{2}$.
De plus,

$$\|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_{H^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-r)u_0\|_{H^{-1}} \\
&+\|U_m(t-s,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_{H^{-1}}. \qquad (4.97)
\end{aligned}
$$

Par (4.90)

$$
\begin{aligned}
&\|U_m(t-s,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_{H^{-1}} \\
= \; &\|U_m(t-s,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-r)U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_{H^{-1}} \\
\leqslant \; &e^{\frac{c}{2}(r-s)}\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_{H^{-1}} \\
\leqslant \; &e^{c\tau_0}\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_{H^{-1}}, \quad \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, 0 \leqslant s \leqslant 1. \qquad (4.98)
\end{aligned}
$$

Par (4.92)

$$
\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_{H^{-1}} \leqslant \tilde{C}_1 s^{\frac{1}{2}} + c^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_{t-r-s}^{t-r} \|m(\theta)\|_{H^{-1}} d\theta\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad (4.99)
$$

où $\tilde{C}_1 = \Big(k_1 + 2c_2^2(\alpha) + 2|u_0|^2 + c'|\nabla u_0|^2 + 2\alpha^2 b_{2p}^2 |u_0|^{4p}\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $t \leqslant t_0$ nous avons, par l'inégalité de Hölder,

$$
\int_{t-r-s}^{t-r} \|m(\theta)\|_{H^{-1}} d\theta \leqslant \Big(\int_{t-r-s}^{t-r} \|m(\theta)\|_{H^{-1}}^q d\theta\Big)^{\frac{2}{q}} \Big(\int_{t-r-s}^{t-r} 1 d\theta\Big)^{\frac{q-2}{q}}, \qquad \text{pour } q > 2
$$

donc

$$
\int_{t-r-s}^{t-r} \|m(\theta)\|_{H^{-1}} d\theta \leqslant \Big(M_{m,q}(t_0)\Big)^{\frac{2}{q}} s^{\frac{q-2}{q}}. \qquad (4.100)
$$

Pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ nous avons $s^{\frac{1}{2}} \leqslant s^{\frac{q-2}{2q}}$, et par (4.99) et (4.100)

$$
\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_{H^{-1}} \leqslant \Big(\tilde{C}_1 + c^{-\frac{1}{2}}\big(M_{m,q}(t_0)\big)^{\frac{1}{q}}\Big)\; s^{\frac{q-2}{2q}}, \qquad (4.101)
$$

pour tout $t \leqslant t_0, 0 \leqslant s \leqslant 1, \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, u_0 \in V'$.
Par (4.96), (4.97) et (4.101)

$$
\|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_{H^{-1}} \leqslant \hat{C}_2\; s^{\frac{q-2}{2q}}, \qquad (4.102)
$$

pour tout $t \leqslant t_0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0,\ u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$.
Alors U_m satisfait (H1), avec $\delta = 1, \varepsilon = 1, C_0 = \hat{C}_2$.

Pour D_1, D_2 deux bornés dans V' et pour tout $t > t_0$, nous posons

$$
s_{D_1} := c^{-1}\log(C_1\|D\|_{-1}),
$$
$$
L_m(t, D_1, D_2) = e^{\frac{c}{2}(t-t_0)}.
$$

D'après les résultats ci-dessus, nous déduisons que nous pouvons appliquer [43], le Théorème 2.3 et le Corollaire 1 et nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 4.31. *Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3) sur la fonction* m *du problème de Cahn Hilliard (4.81), il existe une famille* $\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m} := \{\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t) : \ t \in \mathbb{R}\}$ *d'ensembles non vides de* V' *qui satisfait*

1. $U_m(t,\tau)\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(\tau) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)$ *pour tout* $\tau \leqslant t$,
2. $\widetilde{\mathcal{M}}_{T_{-\tau}U_m}(t) = \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t-\tau)$ *pour tout* $\tau \geqslant 0$ *et* $t \leqslant t_0$ *et*
   $\widetilde{\mathcal{M}}_{T_{-\tau}U_m}(t) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t-\tau)$ *pour tout* $\tau \geqslant 0$ *et* $t > t_0$,
   où $T_{-\tau}U_m(t,s) := U_m(t-\tau, s-\tau)$,
3. *Pour* $D \subset V'$ *borné,*
$$dist_{V'}(U_m(t,t-\tau)D, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)) \leqslant \tilde{C}_1 e^{\tilde{\alpha} s_D} e^{-\tilde{\alpha}\tau},$$
$$\textit{pour tout } \tau \geqslant s_D \quad \textit{et pour } t \leqslant t_0,$$
   et
$$dist_{V'}(U_m(t,t-\tau)D, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)) \leqslant L_m(t, D, \mathcal{M}_{U_m}(t_0))\tilde{C}_1 e^{\tilde{\alpha}(s_D+t-t_0)} e^{-\tilde{\alpha}\tau},$$
   pour tout $t > t_0$ *et pour* $\tau \geqslant s_D + t - t_0$, *tels que* $\tilde{C}_1$ *et* $\tilde{\alpha}$ *sont deux constantes positive dépendantes de* Ω *et* $M_m(t_0)$,
4. *pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)$ *est compact dans* V' *de dimension fractale finie et, plus précisément,*
$$dim_F(\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t), V') \leqslant \begin{cases} \check{C}_1, & si\ t \leqslant t_0, \\ \dfrac{\check{C}_1}{L_m(t, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0), \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0))}, & si\ t > t_0, \end{cases}$$
   telle que $\check{C}_1 > 0$ *et dépend de* Ω *et* $M_m(t_0)$,
5. *il existe l'attracteur global rétrograde de* U_m, $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, *qui satisfait*
$$\mathcal{A}(t) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t) \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$
   Et sa dimension fractale est finie et estimée par
$$dim_F(\mathcal{A}(t), V') \leqslant \begin{cases} \check{C}_1, & si\ t \leqslant t_0, \\ \dfrac{\check{C}_1}{L_m(t, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0), \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0))}, & si\ t > t_0, \end{cases}$$
6. *pour tout* $0 \leqslant r \leqslant 1$ *et pour* $t \leqslant t_0$,
$$dist_{V'}^{symm}\Big(\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t), \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t-r)\Big) \leqslant \check{C}_2 |r|^{(k+1)\gamma},$$
   tel que $\gamma = \dfrac{q-2}{2q}$ *et* $\check{C}_2$ *et* k *sont deux constantes positives dépendantes de* $\Omega, q, M_m(t_0)$ *et* $M_{m,q}(t_0)$.

Nous avons donc l'attracteur exponentiel rétrograde du problème de Cahn-Hilliard.

Chapitre 5

Problème de Cahn-Hilliard visqueux

5.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous allons travailler avec l'équation de Cahn-Hilliard visqueuse de la forme suivante :

$$\partial_t u = \Delta K(u), \tag{5.1}$$

$$K(u) = -\Delta u + \varepsilon \partial_t u + f(u), \tag{5.2}$$

où $f(s)$ est un polynôme, i.e., $f(s) = \sum_{j=1}^{2p-1} a_j s^j,\ p \in \mathbb{N}$. Supposons que le coefficient $a_{2p-1} = 2pb_{2p} > 0$ (voir [70]).
Par définition de f, nous avons

$$f'(s) \geqslant -c. \tag{5.3}$$

Nous associons au problème (5.1), (5.2) les conditions aux limites de Neumann et la condition initiale suivantes

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0. \tag{5.4}$$

Nous allons utiliser les notations suivantes :
$(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ sont le produit scalaire et la norme dans l'espace

$$H := \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ sont le produit scalaire et la norme dans l'espace

$$V := \left\{ u \in H^1(\Omega),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

$\|\cdot\|_2$ est la norme dans l'espace

$$V_1 := \left\{ u \in H^2(\Omega),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

et $\|\cdot\|_{-1} = |(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}\cdot|$ est une norme sur $H^{-1}(\Omega)$; pour les fonctions à moyennes nulles.
Par (5.1) et (5.2) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2 u - \Delta f(u) = 0. \tag{5.5}$$

5.2 Formulation variationnelle

Nous posons

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{H} &:= \Big\{u \in H, \quad \int_\Omega u dx = 0\Big\},\\
\overset{\circ}{V} &:= \Big\{u \in V, \quad \int_\Omega u dx = 0\Big\},\\
\overset{\circ}{V_1} &:= \Big\{u \in V_1, \quad \int_\Omega u dx = 0\Big\},\\
\overset{\circ}{V'} &:= \Big\{u \in V', \quad < u, 1 >_{V',V} = 0\Big\}.
\end{aligned}$$

Nous avons $\overset{\circ}{V} \subset \overset{\circ}{H} \subset \overset{\circ}{V'}$ avec injections continues et denses. Et l'opérateur $A := -\Delta : \overset{\circ}{V} \to \overset{\circ}{V'}$ est continu, inversible et son inverse est compact. L'équation (5.5) équivaut à (voir par exemple [54] et [57])

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon\big)(u- < u >) - \Delta(u- < u >) + f(u) =< f(u) >, \tag{5.6}$$

où $< u > := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.
Pour avoir la formulation variationnelle nous multiplions (5.6) par $v \in \overset{\circ}{V}$ (pour le produit scalaire de H)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big(((-\Delta)^{-1}(u- < u >), v) + \varepsilon(u- < u >, v)\Big) + (\nabla(u- < u >), \nabla v)&\\
+(f(u)- < f(u) >, v) = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V_1}.&
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Notons ici, en multipliant (5.5) par $v \in V$, nous avons

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \varepsilon\frac{d}{dt}(\nabla u, \nabla v) + (\Delta u, \Delta v) + (\nabla f(u), \nabla v) = 0,$$

et pour $v = 1$, nous avons $\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u dx = 0$. Cela donne que

$$\int_\Omega u(x, t)dx = \int_\Omega u_0(x)dx \quad \text{(moyenne conservée)}. \tag{5.8}$$

Donc $< u >=< u_0 >$. Dans ce qui suit, nous supposons que

$$\frac{1}{|\Omega|}\Big|\int_\Omega u(x)dx\Big| \leqslant \eta. \tag{5.9}$$

5.3 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 5.1.

(i) Supposons que $u_0 \in H^1(\Omega)$. Alors (5.1), (5.2) et (5.4) possède une seule solution u qui appartient à

$$L^\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega)),\ \forall t > 0.$$

(ii) De plus, si $u_0 \in H^2(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$ et $\partial_t u \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, $\forall T > 0$, avec restriction sur p lorsque $n = 3$ ($p = 2$ lorsque $n = 3$).

(iii) Si $u_0 \in H^3(\Omega)$, alors $u \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^4(\Omega))$, $\forall T > 0$, où $p = 2$ lorsque $n = 3$.

5.4 Fonction de Lyapunov

La fonction de Lyapunov est donnée par

$$J(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \int_\Omega g(u)dx,$$

où, g est la fonction primitive de f.
Nous multiplions (5.1) par $K(u)$, et intégrons sur Ω

$$\int_\Omega K(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx - (\Delta K(u), K(u)) = 0. \tag{5.10}$$

Nous avons par (5.2)

$$(K(u), \frac{\partial u}{\partial t}) = -\int_\Omega \Delta u \frac{\partial u}{\partial t}dx + \varepsilon|\partial_t u|^2 + \int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx$$

$$= \frac{d}{dt}J(u) + \varepsilon|\partial_t u|^2.$$

Nous avons donc par (5.10)

$$\frac{d}{dt}J(u) + \varepsilon|\partial_t u|^2 + |\nabla K(u)|^2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}J(u) \leqslant 0 \quad \Rightarrow J(u(t)) \leqslant J(u_0), \quad \forall t \geqslant t_0.$$

5.5 Démonstration de Théorème 5.1

Nous posons $\bar{u} := u - < u >$. Nous avons $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\Delta \bar{u} = \Delta u$ et $\Delta^2 \bar{u} = \Delta^2 u$, et par (5.5) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\bar{u} + \varepsilon(-\Delta)\bar{u}\Big) + \Delta^2 \bar{u} + \Delta f(u) = 0,$$

ou l'équation équivalente (5.6).
Nous commençons à démontrer l'unicité.

5.5.1 L'unicité

Nous prenons deux solutions u_1 et u_2 de (5.5) (ou de (5.6)), où $u_1(0) = u_2(0)$. Posons $u := u_1 - u_2$. Donc $\bar{u}$ vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon \bar{u}\big) - \Delta \bar{u} + f(u_1) - f(u_2) = < f(u_1) - f(u_2) > . \tag{5.11}$$

Nous avons

$$u_1(0) = u_2(0) \;\Rightarrow < u > = < u_1 - u_2 > = 0.$$

Alors en multipliant (5.11) par u, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + |\nabla u|^2 + (f(u_1) - f(u_2), u) = (< f(u_1) - f(u_2) >, u),$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + |\nabla u|^2 + (f(u_1) - f(u_2), u) = 0, \tag{5.12}$$

Par (5.3)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + 2|\nabla u|^2 &\leqslant 2c|u|^2 \\ &\leqslant c'\|u\|_{-1}^2 + |\nabla u|^2.\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + |\nabla u|^2 \leqslant c\Big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\Big),$$

c ne dépend pas de ε. Par le lemme de Gronwall nous avons

$$\|u(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|u(t)|^2 \leqslant 0.$$

Alors nous avons l'unicité.

5.5.2 L'existence

Pour l'existence il suffit de prendre $< u >= 0$, sans perte de généralité, et alors il suffit de montrer l'existence d'une solution du problème suivant (par (5.7))

$$\begin{cases} \text{Trouver } u : [0,T] \to \overset{\circ}{V}_1 \\ \dfrac{d}{dt}\Big(((-\Delta)^{-1}u, v) + \varepsilon(u,v)\Big) + (-\Delta u, v) + (f(u), v) = 0, \quad v \in \overset{\circ}{V}_1. \end{cases}$$

Pour montrer l'existence nous considérons une famille de solutions approchées u_m (obtenue par la méthode de Galerkin) et nous passons à la limite. Nous posons $A := -\Delta$. La suite

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_m, \qquad \lambda_m \to \infty,$$

est la suite des m premières valeurs propres de A, associé avec la condition de Neumann et agissant sur des fonctions à moyenne nulle. $\{w_i\}_{i=1,\ldots,m}$ est une suite des vecteurs propres de A.
Les $\{w_i\}$ forment une base hilbertienne orthonormale de $\overset{\circ}{H}$,
Les $\{\lambda_i^{-\frac{1}{2}} w_i\}$ forment une base hilbertienne orthonormale de $\overset{\circ}{V}$.
Nous posons $\overset{\circ}{V}_m := \mathrm{Vect}\{w_1, \ldots, w_m\}$. Alors pour tout $u_m \in \overset{\circ}{V}_m$ nous avons $u_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) w_j$. Nous notons par P_m la projection orthogonale de $\overset{\circ}{H}$ dans $\overset{\circ}{V}_m$. Nous avons alors à résoudre le problème approché suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_m \text{ solution de} \\ \dfrac{d}{dt}\Big((-\Delta)^{-1}u_m + \varepsilon u_m\Big) - \Delta u_m + P_m f(u_m) = 0, \quad \text{dans } \overset{\circ}{V}{}', \\ u_m(0) = u_{0m}, \end{cases} \tag{5.14}$$

où, u_{0m} est la projection orthogonale de u_0 sur $\overset{\circ}{V}_m$, $u_{0m} = \sum_{i=1}^m (u_0, w_i) w_i$, $|u_{0m}| \leqslant |u_0|$ et $u_{0m} \to u_0$ dans H. Le problème (5.14) équivaut à

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(((-\Delta)^{-1}u_m, v) + \varepsilon(u_m, v)\Big) - (\Delta u_m, v) + (P_m f(u_m), v) = 0, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_m. \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases}$$

De manière équivalente,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(((-\Delta)^{-1}u_m, w_i) + \varepsilon(u_m, w_i)\Big) - (\Delta u_m, w_i) + (P_m f(u_m), w_i) = 0, \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(((-\Delta)^{-1}\sum_{j=1}^m \alpha_j(t) w_j, w_i) + \varepsilon(\sum_{j=1}^m \alpha_j(t) w_j, w_i)\Big) - (\Delta \sum_{j=1}^m \alpha_j(t) w_j, w_i) + (P_m f(u_m), w_i) = 0. \tag{5.15}$$

Nous posons

$$\mathbf{W} := \left(\ \lambda_i^{-1}(\delta_{ij}) + \varepsilon(\delta_{ij})\ \right)_{i,j=1,\dots,m},$$

$$\alpha := \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_m(t) \end{pmatrix},\ \mathbf{M} := \Big(\lambda_i(\delta_{ij})\Big)_{i,j=1,\dots,m},$$

et

$$\mathbf{F} := \begin{pmatrix} (P_m f(u_m), w_1) \\ \vdots \\ (P_m f(u_m), w_m) \end{pmatrix}.$$

Alors par (5.15)

$$\mathbf{W}\frac{d\alpha}{dt} + \mathbf{M}\alpha + \mathbf{F} = 0. \tag{5.16}$$

W est inversible. Nous avons alors par (5.16) l'existence d'une solution locale (en temps). Pour montrer que la solution est globale, nous supposons (voir [53] et [56])

$$J_m(t) = \frac{1}{2}|\nabla u_m|^2 + \int_\Omega g(u_m)dx.$$

Par (5.1), (5.2) et (5.10)

$$\frac{dJ_m}{dt} + \varepsilon|\frac{\partial u_m}{\partial t}|^2 + |\nabla K(u_m)|^2 = 0.$$

Cela donne que $\frac{dJ_m}{dt} \leqslant 0$, et donc $J_m(t) \leqslant c_0$ (c_0 dépend de u_0). Nous en déduisons que la solution locale est globale (voir aussi [55]).

5.5.3 Estimations

Nous avons montré l'existence pour $< u >= 0$ et nous allons ici trouver les estimations pour $u_m \in \mathring{V}_m$, où u_m est à moyenne nulle. Puis nous trouvons des estimations pour $u \in H$ (ou dans V), u est à moyenne conservée.

Estimation pour u_m

Nous avons

$$\|u_m(t)\|_{-1}^2 = \|\sum_{i=1}^m \alpha_i(t)w_i\|_{-1}^2 = \sum_{i,j=1}^m \alpha_i(t)\alpha_j(t)((-\Delta)^{-1}w_i, w_j),$$

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{-1}^2 = 2\sum_{i,j=1}^m \alpha_i(t)\frac{d\alpha_j(t)}{dt}((-\Delta)^{-1}w_i, w_j).$$

De même,

$$\frac{d}{dt}|u_m(t)|^2 = 2\sum_{i,j=1}^{m} \alpha_i(t)\frac{d\alpha_j(t)}{dt}(w_i, w_j).$$

Nous avons par (5.15)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \frac{d\alpha_j(t)}{dt}((-\Delta)^{-1}w_j, w_i) + \varepsilon\sum_{j=1}^{m} \frac{d\alpha_j(t)}{dt}(w_j, w_i) \quad &+ \quad \sum_{j=1}^{m}\alpha_j(t)((-\Delta)w_j, w_i)\\ &+ \quad (P_m f(u_m), w_i) = 0.\end{aligned}$$

Nous multiplions la dernière équation par α_i et sommons pour i allant de 1 à m

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i(t)\frac{d\alpha_j(t)}{dt}((-\Delta)^{-1}w_j, w_i) + \varepsilon\sum_{j=1}^{m} \alpha_i(t)\frac{d\alpha_j(t)}{dt}(w_j, w_i) + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)((-\Delta)u_m, w_i)\\ + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(t)(P_m f(u_m), w_i) = 0.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_m\|_{-1}^2 + \varepsilon|u_m|^2\Big) + |\nabla u_m|^2 + (P_m f(u_m), u_m) = 0, \tag{5.17}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg(\|u_m\|_{-1}^2 + \varepsilon|u_m|^2\Bigg) + |\nabla u_m|^2 + (f(u_m), u_m) = 0. \tag{5.18}$$

Nous avons

$$(f(u_m), u_m) \geqslant pb_{2p}u_m^{2p} - c_3'. \tag{5.19}$$

Par (5.18)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Bigg(\|u_m\|_{-1}^2 + \varepsilon|u_m|^2\Bigg) + |\nabla u_m|^2 + pb_{2p}\int_\Omega u_m^{2p}dx - c_3'|\Omega| \leqslant 0,$$

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\|u_m\|_{-1}^2 + \varepsilon|u_m|^2\Bigg) + 2|\nabla u_m|^2 + 2pb_{2p}\int_\Omega u_m^{2p}dx \leqslant 2c_3'|\Omega|. \tag{5.20}$$

En intégrant (5.20) entre 0 et T nous obtenons une estimation bornée de u_m dans $L^{2p}(0, T; L^{2p}(\Omega))$ et dans $L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$.
Ensuite, nous multiplions l'équation (du problème approché)

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u_m + \varepsilon(-\Delta)u_m\Big) + \Delta^2 u_m - P_m\Delta f(u_m) = 0, \tag{5.21}$$

par $u_m \in \mathring{V}_m$, pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|u_m|^2 + \varepsilon|\nabla u_m|^2\big) + |\Delta u_m|^2 - (\Delta f(u_m), u_m) = 0. \tag{5.22}$$

Nous avons $-(\Delta f(u_m), u_m) = (f'(u_m)\nabla u_m, \nabla u_m)$ et

$$f'(u_m) \geqslant b_{2p} u_m^{2p-2} - c_4.$$

Nous déduisons par (5.22) et par une inégalité d'interpolation

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\big(|u_m|^2 + \varepsilon|\nabla u_m|^2\big) + 2|\Delta u_m|^2 + 2b_{2p}(u_m^{2p-2}\nabla u_m, \nabla u_m) &\leqslant 2c_4|\nabla u_m|^2,\\
\frac{d}{dt}\big(|u_m|^2 + \varepsilon|\nabla u_m|^2\big) + 2|\Delta u_m|^2 + 2b_{2p}(u_m^{2p-2}\nabla u_m, \nabla u_m) &\leqslant c|u_m|^2 + |\Delta u_m|^2,
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\big(|u_m|^2 + \varepsilon|\nabla u_m|^2\big) + |\Delta u_m|^2 + 2b_{2p}\int_\Omega u_m^{2p-2}|\nabla u_m|^2 dx \leqslant c\big(|u_m|^2 + \varepsilon|\nabla u_m|^2\big),$$

où c ne dépend pas de ε. Grâce au lemme de Gronwall nous avons

$$|u_m(t)|^2 + \varepsilon|\nabla u_m(t)|^2 + 2\int_0^T |\Delta u_m(s)|^2 ds \leqslant e^{ct}\big(|u_{0m}|^2 + \varepsilon|\nabla u_{0m}|^2\big) < \infty, \quad (5.23)$$

pour $u_{0m} \in V$, et $t \leqslant T < \infty$. Cela donne que $u_m \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$. De même, nous obtenons en multipliant (5.5) par u et en faisant les estimations précédentes que $u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Estimation de (Δu_m)

Nous avons par (5.23) une estimation bornée de (Δu_m) dans $L^2(0,T;H)$. Pour $u_0 \in H^2(\Omega)$, nous multiplions (5.21) par $(-\Delta u_m)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\nabla u_m|^2 + \varepsilon|\Delta u_m|^2\big) + |\nabla\Delta u_m|^2 + (P_m\Delta f(u_m), \Delta u_m) = 0, \quad (5.24)$$

$$(P_m\Delta f(u_m), \Delta u_m) = -(\nabla f(u_m), \nabla\Delta u_m) = -(f'(u_m)\nabla u_m, \nabla\Delta u_m).$$

Par (5.24)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\nabla u_m|^2 + \varepsilon|\Delta u_m|^2\big) + |\nabla\Delta u_m|^2 &\leqslant |(f'(u_m)\nabla u_m, \nabla\Delta u_m)|\\
&\leqslant c|\nabla\Delta u_m|\big(1 + \|u_m^{2p-2}\|_{L^4}\big)\|\nabla u_m\|_{L^4}.
\end{aligned}$$

Pour $n = 1,\ 2$ et $p \in \mathbb{N}$ quelconque, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|\nabla u_m|^2 + \varepsilon|\Delta u_m|^2\Big) + |\nabla\Delta u_m|^2 &\leqslant c_1|\nabla\Delta u_m|\big(1 + \|u_m\|_{L^{8p-8}}^{2p-2}\big)\|u_m\|_{H^2}\\
&\leqslant c|\nabla\Delta u_m|\big(1 + \|u_m\|^{2p-2}\big)\|u_m\|_2\\
&\leqslant \frac{1}{2}|\nabla\Delta u_m|^2 + c\Big(1 + \|u_m\|^{4p-4}\Big)\|u_m\|_2^2.
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$ et $p = 2$, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|\nabla u_m|^2 + \varepsilon|\Delta u_m|^2\Big) + |\nabla\Delta u_m|^2 \leqslant c_1 \int_\Omega |\nabla\Delta u_m|\big(1 + |u_m|^2\big)|\nabla u_m| dx.$$

On va examiner le terme $\int_\Omega |\nabla\Delta u_m||u|^2|\nabla u_m|dx$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla\Delta u_m||u_m|^2|\nabla u_m|dx &\leqslant c|\nabla\Delta u_m|\|u_m\|^2_{L^6}\|\nabla u_m\|_{L^6}\\ &\leqslant c|\nabla\Delta u_m|\|u_m\|^2\|u_m\|_2\\ &\leqslant \frac{1}{2}|\nabla\Delta u_m|^2 + c\|u_m\|^4\|u_m\|_2^2.\end{aligned}$$

Dans les deux cas nous avons

$$\frac{d}{dt}\Big(|\nabla u_m|^2 + \varepsilon|\Delta u_m|^2\Big) + |\nabla\Delta u_m|^2 \leqslant c\Big(1 + \|u_m\|^2\Big)^r\|u_m\|_2^2. \tag{5.25}$$

Puisque J_m est décroissante donc $|\nabla u_m(t)|$ est uniformément borné pour $t \geqslant 0$. Ce qui donne par (5.25) et par interpolation ; $\|u_m\|_2^2 \leqslant c\|u_m\|\|u_m\|_3$, une estimation de u_m dans $L^\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^3(\Omega))$.

Estimation de u

Les estimations trouvées par (5.20) sont vraies pour des fonctions à moyenne nulle, et pour trouver des estimations pour $u \in H$, u est à moyenne conservée, nous multiplions (5.6) par $\bar{u}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\Big) + |\nabla\bar{u}|^2 + (f(u),\bar{u}) =< f(u) > \int_\Omega \bar{u}dx = 0, \tag{5.26}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\right) + |\nabla\bar{u}|^2 + (f(u),u) =< f(u) > \int_\Omega udx. \tag{5.27}$$

Par (5.9)

$$\int_\Omega udx \leqslant |\Omega|\eta.$$

Nous avons aussi par

$$|f(u)| \leqslant \alpha b_{2p}u^{2p} + c_4', \quad \forall\alpha > 0, \tag{5.28}$$

par (5.19) et (5.27),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\right) + |\nabla\bar{u}|^2 + pb_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx - c_3'|\Omega|$$

$$\leqslant \alpha\eta b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx + \eta c_4'|\Omega|, \quad \forall\alpha > 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\bar u\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar u|^2\right) + |\nabla\bar u|^2 + (p-\alpha\eta)b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx$$
$$\leqslant (c_3' + \eta c_4')|\Omega|, \quad \text{pour tout } \alpha > 0,$$

donc pour $\alpha = \dfrac{1}{\eta}(p - \frac{1}{2})$,

$$\frac{d}{dt}\left(\|\bar u\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar u|^2\right) + 2|\nabla\bar u|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant k_1 = 2(c_3' + \eta c_4')|\Omega|. \tag{5.29}$$

Notons que pour un espace X de norme $\|\cdot\|_X$ nous avons

$$\|u\|_X \leqslant \|\bar u\|_X + \| < u > \|_X \leqslant \|\bar u\|_X + c(u_0),$$

où $c(u_0)$ est une constante positive dépendant de u_0. Alors en intégrant la dernière relation entre 0 et T, nous obtenons une estimation de u dans $L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$ et dans $L^2(0,T;V)$.

Estimation de $\Delta^2 u_m$

Nous avons trouvé, dans le chapitre 3, l'inégalité suivante :

$$|\Delta f(u_m)|^2 \leqslant k(1 + |\Delta^2 u_m|^{2\sigma}), \; 0 < \sigma < 1,$$

où $p = 2$ lorsque $n = 3$. Pour $u_0 \in H^3(\Omega)$, nous multiplions l'équation (5.21) par $\Delta^2 u_m$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|\Delta u_m|^2 + \varepsilon|\nabla\Delta u_m|^2\right) + |\Delta^2 u_m|^2 = (\Delta f(u_m), \Delta^2 u_m)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}|\Delta f(u_m)|^2 + \frac{1}{2}|\Delta^2 u_m|^2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(|\Delta u_m|^2 + \varepsilon|\nabla\Delta u_m|^2\right) + |\Delta^2 u_m|^2 \leqslant |\Delta f(u_m)|^2.$$

Par l'inégalité de Young

$$|\Delta f(u_m)|^2 \leqslant \frac{1}{2}|\Delta^2 u_m|^2 + c. \tag{5.30}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\Delta u_m|^2 + \varepsilon|\nabla\Delta u_m|^2\right) + \frac{1}{2}|\Delta^2 u_m|^2 \leqslant c.$$

En intégrant

$$|\Delta u_m(t)|^2 + \varepsilon|\nabla\Delta u_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T |\Delta^2 u_m(s)|^2 ds \leqslant cT + |\Delta u_0|^2 + \varepsilon|\nabla\Delta u_0|^2 < \infty. \tag{5.31}$$

Nous avons donc $u_m \in L^\infty(0,T;H^3(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^4(\Omega))$. Et $(\Delta^2 u_m)$ est bornée dans $L^2(0,T;H)$. Et par (5.30), nous trouvons une borne de $(\Delta f(u_m))$ dans $L^2(0,T;H)$.

Estimation de $\partial_t u_m$

Pour $u_0 \in V$, nous multiplions l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}u_m + \varepsilon u_m\Big) - \Delta u_m + P_m f(u_m) = 0 \tag{5.32}$$

par $\partial_t u_m$

$$\|\partial_t u_m\|_{-1}^2 + \varepsilon|\partial_t u_m|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_m|^2 + (P_m f(u_m), \partial_t u_m) = 0.$$

Nous avons

$$2\|\partial_t u_m\|_{-1}^2 + 2\varepsilon|\partial_t u_m|^2 + \frac{d}{dt}|\nabla u_m|^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega g(u_m)dx = 0.$$

En intégrant

$$2\int_0^T \Big(\|\partial_t u_m\|_{-1}^2 + \varepsilon|\partial_t u_m|^2\Big) + |\nabla u_m(t)|^2 + \int_\Omega g(u_m(T))dx \leqslant |\nabla u_0|^2 + \int_\Omega g(u_0)dx.$$

Nous avons donc $\partial_t u_m \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

5.5.4 Passage à la limite

D'après ce qui a précédé, nous avons les résultats suivant :
(u_m) est bornée dans $L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$,
par (5.28), nous obtenons que $(P_m f(u_m))$ est bornée dans $L^q(0,T;L^q(\Omega))$, $\frac{1}{2p}+\frac{1}{q}=1$ (voir [65], page 223), et
(Δu_m) est bornée dans $L^2(0,T;H)$ et donc dans $L^q(0,T;L^q(\Omega))$.
Par (5.32)

$$\Big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon\Big)\frac{\partial u_m}{\partial t} = \Delta u_m - P_m f(u_m) \ \in L^q(0,T;L^q(\Omega)).$$

Nous avons donc $\dfrac{\partial u_m}{\partial t} \in L^q(0,T;L^q(\Omega)) \subset L^q(0,T;W^{-1,q})$, (posons $A_1 := (-\Delta)^{-1} + \varepsilon I \ \Rightarrow \ -\Delta A_1 = I - \varepsilon\Delta \ \Rightarrow \ A_1^{-1} = -\Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}$, et donc $A_1^{-1} : L^q(\Omega) \ \rightarrow \ L^q(\Omega)$).
Alors, il existe une suite extraite (u_m) qui converge fortement dans $L^q(0,T;L^q(\Omega))$ et presque par tout, voir [65], Théorème 8.1.
Par ailleurs, $u_m \rightarrow u$ dans $L^q(0,T;L^q(\Omega))$ et p.p. x,t, i.e., $u_m(x,t) \rightarrow u(x,t)$ p.p. x,t, et puisque f est un polynôme donc

$$f(u_m(x,t)) \rightarrow f(u(x,t)) \ \text{ presque partout.}$$

Nous avons aussi $\|f(u_m)\|_{L^q} \leqslant$ constante (indépendante de m), alors, grâce à [65], Lemme 8.3,

$$f(u_m) \rightarrow f(u) \ \text{ dans } L^q(0,T;L^q(\Omega)).$$

Alors, en multipliant (5.32) par $v \in \mathring{V}_m$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon\Big)(u_m, v) + (\nabla u_m, \nabla v) + (P_m f(u_m), v) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon\Big)(u_m, w_i) + (\nabla u_m, \nabla w_i) + (P_m f(u_m), w_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5.33}$$

En passant cette équation à la limite nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon\Big)u_m \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon\Big)u \;\text{ dans } L^q(0, T; L^q(\Omega)).$$

Il reste à montrer la condition initiale $u(0) = u_0$, pour des fonctions à moyenne nulle. Pour cela, nous multiplions (5.33) par ψ, $\psi \in \mathbb{C}^1([0, T]; L^{2p}(\Omega))$, $\psi(T) = 0$, et nous intégrons et intégrons par parties entre 0 et T

$$\begin{aligned} -\int_0^T \Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u_m, w_i\Big)\psi'(t)dt - \int_0^T (\Delta u_m, w_i)\psi(t)dt + \int_0^T (P_m f(u_m), w_i)\psi(t)dt \\ = \Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u_{0m}, w_i\Big)\psi(0). \end{aligned} \tag{5.34}$$

Pour $\psi \in L^{2p}(0, T; L^{2p}(\Omega))$, nous avons

$$\int_0^T (\Delta u_m, w_i \psi)dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_0^T (\Delta u, w_i)\psi(t)dt,$$

$$\int_0^T < f(u_m), w_i\psi > dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_0^T < f(u), w_i > \psi dt.$$

$((-\Delta)^{-1}u_m)$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$, ce qui implique

$$\int_0^T \Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u_m, w_i\psi'\Big)dt \xrightarrow[m\to\infty]{} \int_0^T \Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u, w_i\Big)\psi'(t)dt.$$

Par ce qui a précédé, (5.34) à la limite donne

$$\begin{aligned} -\int_0^T \Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u, v\Big)\psi'(t)dt - \int_0^T (\Delta u, v)\psi(t)dt + \int_0^T < f(u), v > \psi(t)dt \\ = \Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u_0, v\Big)\psi(0), \quad \forall v \in \mathring{V}, \end{aligned} \tag{5.35}$$

$\forall \psi \in \mathbb{C}^1([0, T]; L^{2p}(\Omega))$, $\psi(T) = 0$. De même, en multipliant

$$\Big(((-\Delta)^{-1} + \varepsilon)u, v\Big) - (\Delta u, v) + (f(u), v) = 0$$

par ψ nous obtenons

$$-\int_0^T \Big(((-\Delta)^{-1}+\varepsilon)u, v\Big)\psi'(t)dt - \int_0^T (\Delta u, v)\psi(t)dt + \int_0^T < f(u), v > \psi(t)dt$$
$$= \Big(((-\Delta)^{-1}+\varepsilon)u(0), v\Big)\psi(0), \quad \forall v \in \mathring{V}. \tag{5.36}$$

En comparant (5.35) et (5.36)

$$\Big(((-\Delta)^{-1}+\varepsilon)u_0, v\Big)\psi(0) = \Big(((-\Delta)^{-1}+\varepsilon)u(0), v\Big)\psi(0), \quad \forall \psi.$$

Pour $\psi(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Big(((-\Delta)^{-1}+\varepsilon)(u_0 - u(0)), v\Big) = 0, \ \ \forall v \in \mathring{V} \subset \mathring{H}.$

$$\Rightarrow u(0) = u_0 \ \text{ dans } \mathring{H}.$$

5.6 Attracteur global

Nous définissons le semi-groupe

$$S(t) : V \to \ V$$
$$u_0 \mapsto u(t)$$

Grâce au Théorème 5.1, $S(t)$ est bien défini.

5.6.1 Borné absorbant

Nous définissons l'ensemble

$$B_\eta := \bigcup_{|a|\leqslant \eta} \{u \in H^1(\Omega) : < u >= a\}.$$

D'après (5.8)

$$S(t)B_\eta \subset B_\eta, \ \ \forall \eta > 0.$$

Pour avoir des estimations uniformes de u (ou de $\bar{u}$) nous multiplions (5.6) par $\bar{u}$, nous trouvons par (5.29)

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\Big) + 2|\nabla \bar{u}|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant k_1(\eta). \tag{5.37}$$

Nous avons

$$\|\bar{u}\|_{-1}^2 \leqslant c|\bar{u}|^2 \leqslant c'|\nabla \bar{u}|^2 = c'|\nabla u|^2,$$

et par (5.37)

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\Big) + C\Big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\Big) \leqslant k_1(\eta), \tag{5.38}$$

C est indépendant de ε. En intégrant

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}(t)|^2 \leqslant \Big(\|\bar{u}_0\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}_0|^2\Big)e^{-Ct} + k_1(\eta)\Big(1 - e^{-Ct}\Big). \tag{5.39}$$

$$\lim_{t\to\infty}\sup\Big(\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}(t)|^2\Big) \leqslant \rho_0^2 = k_1(\eta).$$

Soit B un borné dans H tel que $B \subset B_H(0,R)$. Pour $\bar{u}_0 \in B$, nous avons $|\bar{u}_0| \leqslant R$, donc $\|\bar{u}_0\|_{-1}^2 \leqslant cR^2$. Soit $\rho > \rho_0$. Nous cherchons $t_0 = t_0(\varepsilon, R, \rho)$, tel que

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}(t)|^2 \leqslant \rho^2, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

Par (5.39)

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}(t)|^2 \leqslant (cR^2 + \varepsilon R^2)e^{-ct_0} + \rho_0^2 - \rho_0^2 e^{-ct_0}.$$

Nous devons avoir

$$(cR^2 + \varepsilon R^2 - \rho_0^2)e^{-ct_0} + \rho_0^2 \leqslant \rho^2,$$

$$e^{-ct_0} < \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{cR^2 + \varepsilon R^2 - \rho_0^2} \Rightarrow \; t_0 > \frac{1}{c}\log\frac{cR^2 + \varepsilon R^2 - \rho_0^2}{\rho^2 - \rho_0^2}, \tag{5.40}$$

i.e., il existe t_0 tel que

$$\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}(t)|^2 \leqslant \rho^2, \quad \forall t \geqslant t_0. \tag{5.41}$$

Cela donne l'existence d'un borné absorbant dans $B_\eta \cap H$. Par (5.37) nous trouvons $t_1 > 0$, tel que

$$\int_t^{t+r} |\nabla u|^2 dt \leqslant k_2(\eta), \quad \forall t \geqslant t_1, \quad r > 0. \tag{5.42}$$

Borné absorbant dans B_η

Nous avons en multipliant (5.5) par u

$$\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + 2|\Delta u|^2 + 2b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant c\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big),$$

et grâce au lemme de Gronwall uniforme nous avons donc un borné absorbant $\mathcal{B}_1$ dans B_η ; nous avons en intégrant la dernière relation, en particulier,

$$\begin{aligned}|\nabla u(t)|^2 &\leqslant e^{ct}\Big(|u_0|^2 + \varepsilon|\nabla u_0|^2\Big)\\ &\leqslant \text{const.},\end{aligned} \tag{5.43}$$

pour $u_0 \in B_\eta$ et $t \leqslant T$. Nous avons aussi l'existence de t_2 tel que

$$\int_t^{t+r} |\Delta u|^2 dt \leqslant k_3, \quad \forall t \geqslant t_2, \quad r > 0.$$

Borné absorbant dans $H^2(\Omega) \cap B_\eta$

Nous multiplions l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u + \varepsilon(-\Delta)u\Big) + \Delta^2 u - \Delta f(u) = 0;$$

par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 - (\Delta f(u), \frac{\partial u}{\partial t}) = 0,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 \leqslant c|\Delta f(u)|^2 + \frac{1}{2}\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2. \tag{5.44}$$

Nous allons estimer le terme $|\Delta f(u)|$.
Par définition de f nous avons

$$\Delta f(u) = f''(u)\nabla u.\nabla u + f'(u)\Delta u.$$

$$|\Delta f(u)|^2 \leqslant c_1 \int_\Omega \Big(1 + |u|^{4p-6}\Big)|\nabla u|^4 + c_2 \int_\Omega \Big(1 + |u|^{4p-4}\Big)|\Delta u|^2.$$

Par interpolation

$$|\nabla u|^2 \leqslant c'|u||\Delta u|,$$

$$|\Delta f(u)|^2 \leqslant c \int_\Omega \Big(1 + |u|^2 + |u|^{4p-4}\Big)|\Delta u|^2.$$

Pour $n = 1$ et p quelconque, $H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, et par $\|u(t)\| \leqslant c$, $\forall t \geqslant 0$ (car J est décroissante, ou bien par (5.43)), nous avons

$$\begin{aligned} |\Delta f(u)|^2 &\leqslant c\Big(1 + \|u\|^2_{L^\infty} + \|u\|^{4p-4}_{L^\infty}\Big)|\Delta u|^2 \\ &\leqslant c(\|u\|)|\Delta u|^2 \leqslant c|\Delta u|^2. \end{aligned}$$

Pour $n = 2$, on utilise l'inégalité d'interpolation $\|u\|^2_{L^\infty} \leqslant \|u\|\ \|u\|_2$ et par (5.31) on a $\|u\|_2 \leqslant$ const. $\forall t \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} |\Delta f(u)|^2 &\leqslant c\Big(1 + \|u\|\ \|u\|_2 + \|u\|^{2p-2}\|u\|_2^{2p-2}\Big)|\Delta u|^2 \\ &\leqslant c|\Delta u|^2. \end{aligned}$$

Pour $n = 3$, $p = 2$

$$|\Delta f(u)|^2 \leqslant c \int_\Omega \big(1 + |u|^2 + |u|^4\big)|\Delta u|^2 dx.$$

Nous avons

$$\int_\Omega |u|^2|\Delta u|^2 dx \leqslant c\|u\|^2_{L^\infty}|\Delta u|^2 \leqslant c\big(\|u\|\ \|u\|_2\big)|\Delta u|^2 \leqslant c|\Delta u|^2,$$

et

$$\int_\Omega |u|^4|\Delta u|^2dx \leqslant c\|u\|_{L^\infty}^4|\Delta u|^2 \leqslant c\big(\|u\|^2\|u\|_2^2\big)|\Delta u|^2 \leqslant c|\Delta u|^2.$$

Ce qui donne, pour $n = 1, 2, 3$,

$$|\Delta f(u)| \leqslant c|\Delta u|. \tag{5.45}$$

Nous déduisons par (5.44) et (5.45)

$$\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + 2\varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 \leqslant c|\Delta u|^2, \tag{5.46}$$

où c ne dépend pas de ε. En appliquant le lemme de Gronwall, nous trouvons par (5.46) l'existence d'un borné absorbant $\mathcal{B}_2$ dans $H^2(\Omega)\cap B_\eta$. Nous avons aussi une borne de $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ dans $L^2(0, T; H)$.

Pour appliquer le Théorème 3.5, nous devons démontrer que

- $S(t)$ est un opérateur continu.
- $S(t)$ est uniformément compact, i.e., $\forall B$ borné, $\exists t_0$ tel que $\cup_{t\geqslant t_0}S(t)B$ est relativement compact.

Lemme 5.2. *L'opérateur $S(t)$ est continu sur l'ensemble B_η pour la topologie de $H^1(\Omega)$.*

Démonstration.
Soient $u_1 = S(t)u_{01}$ et $u_2 = S(t)u_{02}$ deux solutions de (5.1), (5.2) et (5.4), $u = u_1-u_2$ et $u_0 = u_{01} - u_{02}$. Alors, u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2u - \Delta\big(f(u_1) - f(u_2)\big) = 0. \tag{5.47}$$

En multipliant (5.47) par u,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + |\Delta u|^2 = (f(u_1) - f(u_2), \Delta u). \tag{5.48}$$

Nous écrivons

$$f(u_1) - f(u_2) = \int_0^1 uf'(\theta u_1 + (1-\theta)u_2)d\theta := u\ell(u_1, u_2). \tag{5.49}$$

Nous traitons le terme

$$\Big|\int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)\Delta udx\Big| \leqslant \int_\Omega \ell(|u_1|, |u_2|)|u||\Delta u|dx. \tag{5.50}$$

Si $n=1$ ou $n=2$, alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega \ell(|u_1|,|u_2|)|u||\Delta u|dx &\leqslant c\Big(\|u_1^{2p-2}\|_{L^4}+\|u_2^{2p-2}\|_{L^4}+1\Big)\|u\|_{L^4}|\Delta u|\\ &\leqslant c\Big(\|u_1\|^{2p-2}+\|u_2\|^{2p-2}+1\Big)\|u\||\Delta u|.\end{aligned}$$

Si $n=3$, alors $p=2$ et nous avons

$$\int_\Omega \ell(|u_1|,|u_2|)|u||\Delta u|dx \leqslant c\int_\Omega \Big(|u_1|^2+|u_2|^2+1\Big)|u||\Delta u|dx.$$

Nous traitons le terme $\int_\Omega |u_1|^2|u||\Delta u|dx$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_1|^2|u||\Delta u|dx &\leqslant \|u_1\|_{L^6}^2\|u\|_{L^6}|\Delta u|\\ &\leqslant c\|u_1\|^2\|u\||\Delta u|.\end{aligned}$$

De même,

$$\int_\Omega |u_2|^2|u||\Delta u|dx \leqslant c\|u_2\|^2\|u\||\Delta u|.$$

Dans les deux cas nous avons

$$\Big|\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)\Delta u dx\Big| \leqslant c\Big(\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+1\Big)\|u\||\Delta u| \tag{5.51}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}h(t)^2\|u\|^2+\frac{1}{2}|\Delta u|^2, \tag{5.52}$$

$h(t):=c\big(\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+1\big),\ h(t)\in L^2(0,T)$. Par (5.48)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\Big)+|\Delta u|^2 &\leqslant h(t)^2\|u\|^2\\ &\leqslant ch(t)^2\Big(|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\Big).\end{aligned}$$

Et en appliquant le lemme de Gronwall nous avons

$$\|S(t)u_{01}-S(t)u_{02}\|^2 \leqslant c(t)\Big(\|u_{01}-u_{02}\|^2\Big), \tag{5.53}$$

où, $c(t)\in L^1(0,T)$. D'où la continuité de $S(t)$. ■

Lemme 5.3. *L'opérateur $S(t)$ est uniformément compact sur B_η.*

Démonstration.
Soit B un ensemble borné de B_η et t_0 tel que $S(t)B\subset\mathcal{B}_1,\quad \forall t\geqslant t_0$. D'après (5.46) il existe t_1 tel que $S(t)B\subset\mathcal{B}_2,\quad \forall t\geqslant t_1$. L'ensemble $\bigcup_{t\geqslant t_1}S(t)B$ est borné dans $H^2(\Omega)\cap B_\eta$ (et dans B_η), donc il est relativement compact dans B_η (d'après l'injection compacte $H^2(\Omega)\hookrightarrow H^1(\Omega)$). ■

Nous appliquons alors le Théorème 3.5 et nous avons le résultat suivant.

Théorème 5.4. *Le semi-groupe $S(t)$ associé au problème* (5.1), (5.2) *et* (5.4) *possède un attracteur global $\mathcal{A}_\eta=\omega(\mathcal{B}_2)$ sur $B_\eta,\ \eta>0$ (pour la topologie de $H^1(\Omega)$). De plus, $\mathcal{A}_\eta\subset H^2(\Omega)\cap B_\eta$ et $\mathcal{A}_\eta\subset H^3(\Omega)\cap B_\eta$.*

5.7 Un attracteur exponentiel

Nous avons déjà trouvé que $\mathcal{B}_2$ est le borné absorbant dans $H^2(\Omega) \cap B_\eta$ et qu'il existe t_1 tel que

$$S(t)\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2, \quad \text{pour } t \geqslant t_1. \tag{5.54}$$

Afin de construire un attracteur exponentiel pour le problème (5.1), (5.2) et (5.4) dans $H^2(\Omega) \cap B_\eta$, nous procédons comme suit. Nous supposons que $S(t^d)$ satisfait à la propriété de régularisation pour un certain $t^d > 0$, $t^d \geqslant t_1$. Nous avons alors l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}^d$ pour le système discret engendré par $S(t^d)$ (voir [26] et [60]). Ensuite, nous posons

$$\mathcal{M} := \bigcup_{t \in [t^d, 2t^d]} S(t)\mathcal{M}^d.$$

Enfin, si $(t, u_0) \mapsto S(t)u_0$ est lipschitzienne (ou Hölder continue) sur $[0, t^d] \times \big(H^2(\Omega) \cap B_\eta\big)$, nous trouvons que $\mathcal{M}$ est un attracteur exponentiel pour $S(t)$ dans $H^2(\Omega) \cap B_\eta$, cf. [25].

Tout d'abord nous allons vérifier la propriété de régularisation entre $H^2(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$. Pour cela, nous commençons par le résultat suivant.

Théorème 5.5. *Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions telles que $\|u_i(0)\|_2 \leqslant R$, $i = 1, 2$. Alors*

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{-1}^2 \leqslant C_R e^{\alpha_R t} \|u_1(0) - u_2(0)\|_{-1}^2, \tag{5.55}$$

où les constantes C_R et $\alpha_R > 0$ sont indépendantes de $\varepsilon > 0$.

Démonstration.
Posons $w(t) := u_1(t) - u_2(t)$, $w(0) := u_1(0) - u_2(0)$, et nous prenons $< u_1(0) >=< u_2(0) >$, i.e. $< w >= 0$. La différence w vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1} w + \varepsilon w\Big) = \Delta w - \ell(t) w, \tag{5.56}$$

$\ell(t)$ est donnée par (5.49). Posons $A_1 := (-\Delta)^{-1} + \varepsilon I$. Ce qui donne $-\Delta A_1 = I - \varepsilon\Delta$, et $A_1^{-1} = -\Delta(I - \varepsilon\Delta)^{-1}$. D'après (5.56)

$$A_1 \partial_t w = \Delta w - \ell(t) w.$$

Donc

$$\partial_t w = -\Delta^2 (I - \varepsilon\Delta)^{-1} w + \Delta(I - \varepsilon\Delta)^{-1} \ell(t) w.$$

Et

$$(-\Delta)^{-1} \partial_t w = \Delta(I - \varepsilon\Delta)^{-1} w - (I - \varepsilon\Delta)^{-1} \ell(t) w. \tag{5.57}$$

En multipliant (5.57) par w

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2+|A_1^{-\frac{1}{2}}w|^2 &\leqslant c\Big|\Big((I-\varepsilon\Delta)^{-1}\ell(t)w,w\Big)\Big|\\ &\leqslant \|(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\ell(t)w\|_{-1}\|(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}w\|\\ &\leqslant c\|(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\ell(t)w\|_{-1}^2+\frac{1}{2}|A_1^{-\frac{1}{2}}w|^2.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2+|A_1^{-\frac{1}{2}}w|^2\leqslant c\|\ell(t)w\|_{-1}^2. \tag{5.58}$$

Pour trouver $\|\ell(t)w\|_{-1}$, nous avons

$$(\ell(t)w,v)=(w,\ell(t)v)\leqslant\|w\|_{-1}|\nabla\ell(t)v|,\quad v\in H^1(\Omega). \tag{5.59}$$

Nous estimons $|\nabla\ell(t)v|$:

$$|\nabla\ell(t)v|\leqslant c\Big(\|\ell\|_{L^\infty}|\nabla v|+\|\nabla\ell\|_{L^4}\|v\|_{L^4}\Big).$$

Nous avons $H^1\subset L^4$, donc

$$|\nabla\ell(t)v|\leqslant c\Big(\|\ell\|_{L^\infty}+\|\nabla\ell\|_{L^4}\Big)\|v\|. \tag{5.60}$$

Pour $u_i(0)\in H^2(\Omega)$, $i=1,2$, nous avons par (5.46) $\|u_i(t)\|_2\leqslant c_R$, ce qui donne

$$\|\ell\|_{L^\infty}\leqslant c(\|u_i\|_2)\leqslant c(R),\quad\text{pour } n=1,2,\quad\text{et pour } p=2\ \text{ lorsque } n=3.$$

Nous estimons ensuite $\|\nabla\ell\|_{L^4}$.

$$\begin{aligned}\nabla\ell &= \int_0^1 f''(su_1+(1-s)u_2)\big(s\nabla u_1+(1-s)\nabla u_2\big)ds\\ &\leqslant c\big(1+|u_1|^{2p-3}+|u_2|^{2p-3}\big)\int_0^1\big(s\nabla u_1+(1-s)\nabla u_2\big)ds.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\nabla\ell\|_{L^4} &\leqslant c\int_\Omega\Big(1+|u_1|^{2p-3}+|u_2|^{2p-3}\Big)^4\big(|\nabla u_1|^4+|\nabla u_2|^4\big)dx\\ &\leqslant c\Big(1+\|u_1\|_{L^\infty}^{8p-12}+\|u_2\|_{L^\infty}^{8p-12}\Big)\big(\|\nabla u_1\|_{L^4}^4+\|\nabla u_2\|_{L^4}^4\big).\end{aligned}$$

Pour $n=1,2$ et p quelconque, et pour $n=3$ et $p=2$, nous avons l'inégalité

$$\|\nabla\ell\|_{L^4}\leqslant C\Big(\max_{i=1,2}\|u_i\|_{L^\infty}\Big)\Big(\max_{i=1,2}\|\nabla u_i\|_{L^4}\Big)\leqslant c'(R).$$

On a utilisé $H^1(\Omega)\subset L^4$ et $H^2(\Omega)\subset W^{1,4}$. Donc par (5.60)

$$|\nabla\ell(t)v|\leqslant c_1(R)\|v\|,\qquad v\in H^1(\Omega). \tag{5.61}$$

Par (5.59) et (5.61)

$$\|\ell(t)w\|_{-1} \leqslant c_2(R)\|w\|_{-1}. \tag{5.62}$$

Nous avons par (5.58), en particulier,

$$\frac{d}{dt}\|w\|_{-1}^2 \leqslant \alpha_R\|w\|_{-1}^2.$$

En intégrant nous trouvons l'estimation (5.55). ■

De plus, nous avons

$$\|(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\|_{L^2\to L^2} \leqslant C, \tag{5.63}$$

où C ne dépend pas de ε. Parce que, si on prend $u \in L^2(\Omega)$ et $v = (I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}u$, alors

$$\begin{aligned} |u|^2 &= ((I-\varepsilon\Delta)v, v) = |v|^2 + \varepsilon|\nabla v|^2 \\ &\geqslant |v|^2, \end{aligned}$$

i.e. $|(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}u| \leqslant |u|$, et nous avons (5.63).

Nous notons que, pour $A_1^{-\frac{1}{2}} = \Big(-\Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}\Big)^{\frac{1}{2}}$, $|A_1^{-\frac{1}{2}}\cdot|$ est une norme dans $H^1(\Omega)$, ce qui donne en intégrant (5.58)

$$\int_t^{t+1} |w|^2 ds \leqslant c(R)e^{\alpha t}\|w(0)\|_{-1}^2. \tag{5.64}$$

et

$$\int_t^{t+1} \|w\|^2 ds \leqslant c(R)e^{\alpha t}\|w(0)\|_{-1}^2. \tag{5.65}$$

Lemme 5.6. *Si w vérifie les hypothèses du théorème précédent, nous avons l'estimation suivante :*

$$\|w(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|w(t)|^2 + \int_t^{t+1} \|w\|^2 ds \leqslant \frac{1}{t}c(R)e^{\alpha t}\|w(0)\|_{-1}^2, \quad t > 0. \tag{5.66}$$

Démonstration.
En multipliant (5.55) par tw nous avons

$$\begin{aligned} \frac{t}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|w\|_{-1}^2 + \varepsilon|w|^2\Big) + t|\nabla w|^2 &\leqslant ct|w|^2 \\ &\leqslant ct|\nabla w|\|w\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{t}{2}|\nabla w|^2 + c_1 t\|w\|_{-1}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(\|w\|_{-1}^2 + \varepsilon|w|^2\big)\Big) + t|\nabla w|^2 \leqslant ct\Big(\|w\|_{-1}^2 + \varepsilon|w|^2\Big) + c'|w|^2. \tag{5.67}$$

En intégrant entre 0 et t, et par (5.64), nous trouvons (5.66). ■

Lemme 5.7. *Pour w comme précédemment nous avons*

$$\|w(t)\|^2 + \int_t^{t+1} \Big(\|\partial_t w(s)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\partial_t w(s)|^2\Big) ds \leqslant \frac{1}{t} c(R) e^{\alpha t} \|w(0)\|_{-1}^2, \ t > 0. \quad (5.68)$$

Démonstration.
Multiplions (5.56) par $t\partial_t w$

$$\begin{aligned} t\Big(\|\partial_t w\|_{-1}^2 + \varepsilon|\partial_t w|^2\Big) + \frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\nabla w|^2 &\leqslant -(\ell(t)w, t\partial_t w) \\ &\leqslant |(\ell(t)w, t\partial_t w)| \\ &\leqslant t|\nabla \ell(t)w| \|\partial_t w\|_{-1} \\ &\leqslant \frac{t}{2}\|\partial_t w\|_{-1}^2 + ct|\nabla w|^2, \quad \text{par } (5.61). \end{aligned}$$

Donc

$$t\Big(\|\partial_t w\|_{-1}^2 + \varepsilon|\partial_t w|^2\Big) + \frac{d}{dt}\Big(t|\nabla w|^2\Big) \leqslant ct|\nabla w|^2 + |\nabla w|^2.$$

Intégrons sur $[0, t]$, pour $t > 0$, et par (5.65) nous trouvons (5.68). ■

Afin de démontrer "Smoothing Property" nous avons besoin d'examiner le terme non linéaire $\ell'(t)w$, ce qui est utile dans la démonstration du prochain lemme.

Estimation pour $|\ell'(t)w|$ **:**

$$\begin{aligned} \ell'(t) &= \int_0^1 f''(su_1 + (1-s)u_2)\big(s\frac{\partial u_1}{\partial t} + (1-s)\frac{\partial u_2}{\partial t}\big) ds \\ &\leqslant c\big(1 + |u_1|^{2p-3} + |u_2|^{2p-3}\big)\Big(\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big). \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 2$

$$\begin{aligned} |\ell'(t)w|^2 &\leqslant c\int_\Omega \big(1 + |u_1|^{4p-6} + |u_2|^{4p-6}\big)\Big(\big|\frac{\partial u_1}{\partial t}\big|^2 + \big|\frac{\partial u_2}{\partial t}\big|^2\Big)|w|^2 dx \\ &\leqslant c\big(\max_{i=1,2}\|u_i(t)\|_{L^\infty}\big)\Big(\big\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\big\|_{L^4}^2 + \big\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\big\|_{L^4}^2\Big)\|w\|_{L^4}^2 \\ &\leqslant C(R)\Big(\big\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\big\|^2 + \big\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\big\|^2\Big)\|w\|^2. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\big|\frac{\partial u}{\partial t}\big|^2 \leqslant C_1(R), \quad \big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\big|^2 \leqslant C_2(R),$$

où les constantes ne dépendent pas de ε, (voir les estimations trouvées dans ce qui suit ; (5.87)-(5.99)).
Nous avons alors dans ce cas

$$|\ell'(t)w|^2 \leqslant C(R)\|w\|^2.$$

De même, pour $n=3$ et $p=2$

$$\begin{aligned}
|\ell'(t)w|^2 &\leqslant c\int_\Omega \left(1+|u_1|^2+|u_2|^2\right)\Big(\big|\frac{\partial u_1}{\partial t}\big|^2+\big|\frac{\partial u_2}{\partial t}\big|^2\Big)|w|^2dx\\
&\leqslant c\big(\max_{i=1,2}\|u_i(t)\|_{L^\infty}\big)\Big(\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\|^2_{L^4}+\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\|^2_{L^4}\Big)\|w\|^2_{L^4}\\
&\leqslant C(R)\Big(\|\frac{\partial u_1}{\partial t}\|^2+\|\frac{\partial u_2}{\partial t}\|^2\Big)\|w\|^2\\
&\leqslant C(R)\|w\|^2.
\end{aligned}$$

Dans les deux cas nous avons

$$|\ell'(t)w|^2 \leqslant C(R)\|w\|^2. \tag{5.69}$$

La constante C ne dépend pas de ε.

Lemme 5.8. *Soit w comme précédemment. Alors*

$$\|\partial_t w(t)\|^2_{-1}+\varepsilon|\partial_t w(t)|^2+\int_t^{t+1}\|\partial_t w(s)\|^2ds \leqslant \frac{1}{t}c(R)e^{\alpha t}\|w(0)\|^2_{-1},\ t>0. \tag{5.70}$$

Démonstration.
Nous dérivons (5.56) et posons $\theta := \partial_t w$

$$\partial_t\Big((-\Delta)^{-1}\theta+\varepsilon\theta\Big)-\Delta\theta = -\ell(t)\theta-\ell'(t)w. \tag{5.71}$$

En multipliant la dernière équation par $t\theta$ et en intégrant sur Ω, nous avons, par interpolation et (5.69),

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|^2_{-1}+\varepsilon|\theta|^2\Big)+t|\nabla\theta|^2 &\leqslant ct|\theta|^2+t|\ell'(t)w||\theta|\\
&\leqslant c't|\theta|^2+ct\|w\|^2\\
&\leqslant c't|\nabla\theta|\|\theta\|_{-1}+ct\|w\|^2\\
&\leqslant \frac{t}{2}|\nabla\theta|^2+c_1t\|\theta\|^2_{-1}+ct\|w\|^2\\
\frac{d}{dt}\Big(t\big(\|\theta\|^2_{-1}+\varepsilon|\theta|^2\big)\Big)+t|\nabla\theta|^2 &\leqslant c_2t\Big(\|\theta\|^2_{-1}+\varepsilon|\theta|^2\Big)+\|\theta\|^2_{-1}+\varepsilon|\theta|^2+ct\|w\|^2.
\end{aligned}$$

Intégrons la dernière relation entre 0 et t et par (5.65) et (5.68) nous trouvons (5.70). ■

Nous interprétons (5.56) comme une équation elliptique, et nous l'écrivons

$$\Delta w - \ell(t)w = \partial_t\Big((-\Delta)^{-1}w + \varepsilon w\Big) := h(t). \tag{5.72}$$

Par les estimations précédentes nous avons, pour t fixé,

$$\begin{aligned} |h(t)|^2 = |(-\Delta)^{-1}\partial_t w + \varepsilon\partial_t w|^2 &\leqslant \|\partial_t w\|_{-2}^2 + \varepsilon|\partial_t w|^2 \\ &\leqslant \|\partial_t w\|_{-1}^2 + \varepsilon|\partial_t w|^2, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Donc

$$|h(t)|^2 \leqslant \frac{1}{t}c_R e^{\alpha t}\|w(0)\|_{-1}^2. \tag{5.73}$$

Ensuite, nous multiplions (5.72) par Δw, pour t fixé,

$$\begin{aligned} |\Delta w(t)|^2 &\leqslant (h(t), \Delta w) + (\ell w, \Delta w) \\ &\leqslant \frac{1}{2}|\Delta w|^2 + c|h(t)|^2 + |\nabla \ell(t)w||\nabla w(t)|. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \|w\|_2^2 \leqslant |\Delta w|^2 &\leqslant c\Big(|h(t)|^2 + |\nabla w|^2\Big) \\ &\leqslant \frac{1}{t}c_R e^{\alpha t}\|w(0)\|_{-1}^2, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{5.74}$$

par (5.68) et (5.73). Alors $S(t)$ vérifie la propriété de régularisation.

Afin de montrer la continuité lipschitzienne (ou la continuité de Hölder) de $S(t)$, nous démontrons le résultat suivant.

Lemme 5.9. *Soit $u(t)$ une solution de* (5.6). *Nous avons alors, pour tout $u_0 \in H^1(\Omega)$,*

$$\int_t^{t+1} \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_{-1}^2 ds \leqslant C, \tag{5.75}$$

où C est positif et ne dépend pas de ε.

Démonstration.
La fonction u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\Big) - \Delta\bar{u} + f(u) =< f(u) > .$$

Nous la multiplions par $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, et notons que $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $< \frac{\partial u}{\partial t} >= 0$,

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\frac{\partial u}{\partial t}|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|\nabla u|^2 + 2\int_\Omega g(u)dx\Big) = 0.$$

Intégrons la dernière équation entre 0 et t et entre t et $t+1$, nous avons respectivement

$$|\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega g(u(t))dx + 2\int_0^t \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2 ds \leqslant |\nabla u(0)|^2 + 2\int_\Omega g(u(0))dx, \quad (5.76)$$

$$|\nabla u(t+1)|^2 + 2\int_\Omega g(u(t+1))dx + 2\int_t^{t+1} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2 ds \leqslant |\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega g(u(t))dx. \quad (5.77)$$

Nous avons par les deux dernières inégalités

$$\begin{aligned} 2\int_t^{t+1} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2 ds &\leqslant |\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega g(u(t))dx \\ &\leqslant |\nabla u(0)|^2 + 2\int_\Omega g(u(0))dx \\ &\leqslant |\nabla u(0)|^2 + c\|u_0\|_{L^{2p}}^{2p} + c' < \infty, \end{aligned}$$

pour $u_0 \in H^1(\Omega)$ et par (5.20). ■

Lemme 5.10. *Le semi-groupe S_ε^t, défini par (5.54), est uniformément Hölder continu, pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$, dans $[0,T]\times\mathcal{B}_R$, où $\mathcal{B}_R := \{u \in H^2(\Omega)\cap B_\eta, \quad \|u\|_2 \leqslant R\}$, i.e.,*

$$\|S_\varepsilon^{t_1}u_0^1 - S_\varepsilon^{t_2}u_0^2\|_{-1} \leqslant C_R(T)\Big(\|u_0^1 - u_0^2\|_{-1} + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\Big), \quad (5.78)$$

pour $u_0^i \in \mathcal{B}_R, t_i \leqslant T$ et la constante $C_R(T)$ est indépendante de ε.

Démonstration.
D'après (5.55) nous avons la continuité lipschitzienne par rapport aux données initiales. Pour démontrer que S_ε^t est Hölder continu par rapport à $t \in [0,T]$, nous avons par (5.75)

$$\int_t^{t+1} \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_{-1}^2 ds \leqslant C(R), \qquad \text{pour} \quad u_0 \in \mathcal{B}_R.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|u(t_1) - u(t_2)\|_{-1} &= \|\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial u(s)}{\partial t} ds\|_{-1} \leqslant \int_{t_2}^{t_1} \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_{-1} ds \\ &\leqslant |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_2}^{t_1} \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_{-1}^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_R(T)|t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Enfin, par (5.55) et (5.79)

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon^{t_1}u_0^1 - S_\varepsilon^{t_2}u_0^2\|_{-1} &= \|S_\varepsilon^{t_1}u_0^1 - S_\varepsilon^{t_1}u_0^2 + S_\varepsilon^{t_1}u_0^2 - S_\varepsilon^{t_2}u_0^2\|_{-1} \\ &\leqslant \|S_\varepsilon^{t_1}u_0^1 - S_\varepsilon^{t_1}u_0^2\|_{-1} + \|S_\varepsilon^{t_1}u_0^2 - S_\varepsilon^{t_2}u_0^2\|_{-1} \\ &\leqslant C_R(T)\Big(\|u_0^1 - u_0^2\|_{-1} + |t_1 - t_1|^{\frac{1}{2}}\Big). \end{aligned}$$

■

5.8 Etude de la limite $\varepsilon \to 0$

Dans cette section nous allons d'abord chercher une famille robuste d'attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$. Pour cela, nous allons vérifier le théorème suivant.

Théorème 5.11. *([28])*
Soient H_1 et H deux espaces de Banach, tels que l'injection $H_1 \subset H$ soit compacte, et soit B un ensemble borné de H. Supposons qu'il existe une famille d'opérateurs $S_\varepsilon : B \to B$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, vérifiant les hypothèses suivantes :

1. *pour tout $u_1, u_2 \in B$, nous avons l'estimation suivante*
$$\|S_\varepsilon^t u_1 - S_\varepsilon^t u_2\|_{H_1} \leqslant L\|u_1 - u_2\|_H, \tag{5.80}$$
où L est une constante indépendante de ε,
2. *pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $u \in B$, nous avons*
$$\|S_\varepsilon^i u - S_0^i u\|_H \leqslant K^i \varepsilon. \tag{5.81}$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, il existe un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_\varepsilon$ pour S_ε dans B. De plus, les attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ peuvent être choisi de telle sorte que l'estimation suivante soit satisfaite
$$dist_{sym}(\mathcal{M}_\varepsilon, \mathcal{M}_0) \leqslant C_1 \varepsilon^k,$$
où la constante C_1 et $0 < k < 1$ peuvent être calculées explicitement.
Enfin, la dimension fractale des attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$ est uniformément bornée respectivement de $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$:
$$dim_F(\mathcal{M}_\varepsilon, H) \leqslant C = C(L),$$
où la constante C est indépendante de ε.

Nous avons par (5.43), (5.46)
$$\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 \leqslant c|\Delta u|^2.$$
Ce qui donne grâce au lemme de Gronwall
$$|\Delta u(t)|^2 \leqslant c_1 e^{c_2 t}|\Delta u(0)|^2, \tag{5.82}$$
pour $u_0 \in B_\eta$. Nous avons aussi, $\mathcal{B}_2$ est le borné absorbant dans $H^2(\Omega) \cap B_\eta$ pour le semi-groupe $S(t) := S_\varepsilon^t$, $\varepsilon \in [0, 1]$. Nous posons
$$\mathcal{B}_2 := \{u \in H^2(\Omega) \cap B_\eta, \quad \|u\|_2 \leqslant R\}, \tag{5.83}$$

pour R assez grand (R est donné par (5.82)). Par définition de $\mathcal{B}_2$, nous avons que, pour tout borné $B \in H^2(\Omega) \cap B_\eta$, il existe t_1, indépendant de ε, tel que

$$S_\varepsilon^t B \subset \mathcal{B}_2, \quad \text{pour } t \geqslant t_1.$$

Par conséquent, il suffit de construire des attracteurs exponentiels sur $\mathcal{B}_2$.
Notons par (5.83)

$$S_\varepsilon^t \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_2, \quad \forall t \geqslant t_1, \ \varepsilon \in [0, 1].$$

Ensuite, nous définissons le semi-groupe $S_\varepsilon^{t_1} : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2$, pour $\varepsilon \in [0, 1]$. Nous allons d'abord construire des attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon^d$ pour les semi-groupes discrets engendrés par $S_\varepsilon^{t_1}$ et puis construire des attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon^c$ pour le système dynamique continu. Pour cela, nous appliquons le Théorème 5.11. Posons $H := H^{-1}(\Omega)$ et $H_1 := H^2(\Omega)$. Nous avons trouvé par (5.55) et (5.74)

$$\|S_\varepsilon^t u_1 - S_\varepsilon^t u_2\|_2^2 \leqslant C e^{\alpha t} \|u_1 - u_2\|_{-1}^2,$$

et donc l'estimation uniforme (5.80) est satisfaite pour $L = Ce^{\alpha t}$ indépendante de ε. Pour trouver (5.81) nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 5.12. *Soient $u_0(t) : S_0^t u_0(0)$ et $u_\varepsilon(t) := S_\varepsilon^t u_\varepsilon(0)$ deux solutions de* (5.6). *Supposons que les données initiales $u_0(0), u_\varepsilon(0) \in \mathcal{B}_2$, i.e, $\|u_0(0)\|_2 \leqslant R$, $\|u_\varepsilon(0)\|_2 \leqslant R$. Alors*

$$\|u_\varepsilon(t) - u_0(t)\|_{-1}^2 \leqslant C_R e^{\alpha_R t}\Big(\|u_\varepsilon(0) - u_0(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big), \tag{5.84}$$

où, $t \geqslant 0$ et C_R et α_R sont indépendantes de ε.

Démonstration.
Posons $v_\varepsilon(t) := u_\varepsilon(t) - u_0(t)$. Supposons que $< u_0(t) >=< u_\varepsilon(t) >$, i.e, $< v_\varepsilon(t) >= 0$. Alors, v_ε vérifie

$$\frac{\partial}{\partial_t}\big((-\Delta)^{-1} v_\varepsilon\big) - \Delta v_\varepsilon + f(u_\varepsilon) - f(u_0) =< f(u_\varepsilon) - f(u_0) > -\varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}.$$

En multipliant la dernière équation par v_ε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{-1}^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2 \leqslant -\Big(\ell_\varepsilon(t) v_\varepsilon, v_\varepsilon\Big) + \varepsilon\Big|\big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, v_\varepsilon\big)\Big|,$$

$$\ell_\varepsilon(t) := \int_0^1 f'(s u_\varepsilon + (1-s) u_0) ds, \quad \ell_\varepsilon(t) \geqslant -c.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{-1}^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2 \leqslant c|v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_\varepsilon|^2.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{-1}^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2 \leqslant 2c|v_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2 \Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2. \tag{5.85}$$

Nous trouvons le dernier terme de cette inégalité en multipliant l'équation

$$\partial_t\Big((-\Delta)^{-1}\bar{u}_\varepsilon + \varepsilon\bar{u}_\varepsilon\Big) - \Delta u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) =< f(u_\varepsilon) >, \tag{5.86}$$

par $\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$, notons que $< \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} >= 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u_\varepsilon|^2 + \Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \varepsilon\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + (f(u_\varepsilon), \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}) &= 0\\
\frac{d}{dt}|\nabla u_\varepsilon|^2 + 2\Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + 2\varepsilon\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega g(u_\varepsilon)dx &= 0\\
|\nabla u_\varepsilon(t)|^2 + 2\int_0^t \Big(\Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \varepsilon\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2\Big)ds + \int_\Omega g(u_\varepsilon(T))dx &\leqslant\\
|\nabla u_\varepsilon(0)|^2 + \int_\Omega g(u_\varepsilon(0))dx < \infty,
\end{aligned} \tag{5.87}$$

g est la fonction primitive de f. Par conséquent,

$$\int_t^{t+1} \Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(s)\Big\|_{-1}^2 ds \leqslant C_R. \tag{5.88}$$

D'après (5.85) et l'inégalité d'interpolation $|v|^2 \leqslant c|\nabla v|\|v\|_{-1}$,

$$\frac{d}{dt}\|v_\varepsilon\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}|\nabla v_\varepsilon|^2 \leqslant c'\|v_\varepsilon\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2.$$

En intégrant cette relation et d'après l'estimation (5.88), nous avons

$$\|v_\varepsilon(t)\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}\int_t^{t+1} |\nabla v_\varepsilon|^2 ds \leqslant C_R e^{\alpha_R t}\Big(\|v_\varepsilon(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big). \tag{5.89}$$

■

Théorème 5.13. *Pour les solutions $u_\varepsilon(t)$ et $u_0(t)$, données dans le Théorème 5.12, nous avons*

$$\|u_\varepsilon(t) - u_0(t)\|_2^2 \leqslant C_R\Big(\|u_\varepsilon(0) - u_0(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big), \tag{5.90}$$

C_R indépendante de ε.

Avant de commencer à démontrer ce théorème (la démonstration ressemble à celles des Lemme 5.6, Lemme 5.7 et Lemme 5.8) on va trouver quelques estimations a priori pour la solution u_ε.

Lemme 5.14. *Soit u_ε une solution du problème* (5.6)*, pour $\varepsilon > 0$, telle que $\|u_\varepsilon(0)\|_2 \leqslant R$. Alors*

$$\|u_\varepsilon(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|u_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t |\nabla u_\varepsilon(s)|^2 ds \leqslant C_T, \tag{5.91}$$

C_T ne dépend pas de ε.

Démonstration.
On multiplie (5.86) par u_ε,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}_\varepsilon\|_{-1}^2 + |\bar{u}_\varepsilon|^2\Big) + |\nabla u_\varepsilon|^2 + c\int_\Omega u_\varepsilon^{2p} dx \leqslant C_T.$$

En intégrant entre 0 et t nous avons l'estimation (5.91). ■

Lemme 5.15. *Nous avons l'estimation suivante*

$$|u_\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon|\nabla u_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t |\Delta u_\varepsilon(s)|^2 ds \leqslant C_T, \tag{5.92}$$

C_T ne dépend pas de ε.

Démonstration.
Multiplions l'équation

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon(-\Delta)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \Delta^2 u_\varepsilon - \Delta f(u_\varepsilon) = 0, \tag{5.93}$$

par tu_ε, pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{t}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u_\varepsilon|^2 + \varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2\Big) + t|\Delta u_\varepsilon|^2 &\leqslant -t\big(f'(u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon\big) \\ &\leqslant ct|\nabla u_\varepsilon|^2, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(|u_\varepsilon|^2 + \varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2\big)\Big) + t|\Delta u_\varepsilon|^2 \leqslant |u_\varepsilon|^2 + \varepsilon|\nabla u_\varepsilon|^2 + c_T|\nabla u_\varepsilon|^2.$$

Par le lemme de Gronwall et (5.91) nous avons (5.92). ■

Lemme 5.16. *Nous avons*

$$|\Delta u_\varepsilon(t)|^2 + \int_0^t \Big(\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2\Big) \leqslant C_T. \tag{5.94}$$

Démonstration.
On multiplie (5.93) par $t\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$

$$t\Big(\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2\Big) + \frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u_\varepsilon|^2 \leqslant ct|\Delta f(u_\varepsilon)|^2.$$

Le terme $|\Delta f(u_\varepsilon)|^2$ est déjà trouvé par (5.45), $|\Delta f(u_\varepsilon)|^2 \leqslant c|\Delta u_\varepsilon|^2$, ce qui donne alors

$$\frac{d}{dt}\big(t|\Delta u_\varepsilon|^2\big) + t\Big(\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2\Big) \leqslant ct|\Delta u_\varepsilon|^2 + |\Delta u_\varepsilon|^2.$$

On intégre entre 0 et t et par (5.92) on obtient (5.94). ■

Lemme 5.17. *Soit u_ε solution du problème (5.6), pour $\varepsilon > 0$, et supposons que la donnée initiale vérifie $\|u_\varepsilon(0)\|_2 \leqslant R$. Alors*

$$\Big\|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \varepsilon\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \int_0^t \Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(s)\Big|^2 ds \leqslant C_{R,T}, \tag{5.95}$$

$C_{R,T}$ ne dépend pas de ε.

Démonstration.
Nous dérivons l'équation

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + f(u_\varepsilon) =< f(u_\varepsilon) >,$$

nous avons alors, pour $\theta = \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}$,

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial \theta}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = -f'(u_\varepsilon)\theta + < f'(u_\varepsilon)\theta > . \tag{5.96}$$

Multiplions par $t\theta$, notons que $< \theta >= 0$,

$$\begin{aligned}\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|_{-1}^2 + \varepsilon|\theta|^2\Big) + t|\nabla\theta|^2 &= -t\big(f'(u_\varepsilon)\theta, \theta\big)\\ &\leqslant ct|\theta|^2\\ &\leqslant \frac{t}{2}|\nabla\theta|^2 + ct\|\theta\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(\|\theta\|_{-1}^2 + \varepsilon|\theta|^2\big)\Big) + t|\nabla\theta|^2 \leqslant ct\Big(\|\theta\|_{-1}^2 + \varepsilon|\theta|^2\Big) + \|\theta\|_{-1}^2 + \varepsilon|\theta|^2.$$

On intègre entre 0 et t et grâce au lemme de Gronwall et l'estimation (5.87) nous avons

$$\|\theta(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon|\theta(t)|^2 + \int_0^t |\nabla\theta(s)|^2 ds \leqslant C_T.$$

■

Lemme 5.18. *si u_ε vérifie les hypothèses du lemme précédent, nous avons*

$$\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \int_0^t \Big|\Delta\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(s)\Big|^2 ds \leqslant C_{R,T}, \tag{5.97}$$

la constante ne dépend pas de ε.

Démonstration.
Multiplions l'équation (5.96) par $(-\Delta)t\theta$

$$\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\big(|\theta|^2 + \varepsilon|\nabla\theta|^2\big) + t|\Delta\theta|^2 \leqslant t|f'(u_\varepsilon)\theta||\Delta\theta|$$

$$\leqslant \frac{t}{2}|\Delta\theta|^2 + ct|f'(u_\varepsilon)\theta|^2. \tag{5.98}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^t |f'(u_\varepsilon)\theta|^2 dt &\leqslant c\int_0^t \Big(|u_\varepsilon|^{4p-4}+1\Big)|\theta|^2 dt\\ &\leqslant c\Big(\sup_{s\in[0,t]}\|u_\varepsilon\|\Big)\int_0^t |\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}|^2 ds, \qquad p=2,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(|\theta|^2+\varepsilon|\nabla\theta|^2\big)\Big) + t|\Delta\theta|^2 \leqslant c_T|f'(u_\varepsilon)\theta|^2 + |\theta|^2 + \varepsilon|\nabla\theta|^2.$$

Intégrons entre 0 et t et d'après (5.94) et (5.95), nous avons

$$|\theta(t)|^2 + \varepsilon|\nabla\theta|^2 + \int_0^t |\Delta\theta(s)|^2 ds \leqslant C.$$

■

Lemme 5.19. *L'estimation suivante est satisfaite*

$$\int_0^t \Big\|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\Big\|_{-1}^2 + 2\varepsilon\int_0^t \Big|\frac{\partial^2 u_\varepsilon(s)}{\partial t^2}\Big|^2 ds + \Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon(s)}{\partial t}\Big|^2 \leqslant C_{R,T}, \tag{5.99}$$

$C_{R,T}$ *ne dépend pas de* ε.

Démonstration.
Multiplions (5.96) par $t\dfrac{\partial\theta}{\partial t}$

$$\begin{aligned} t\Big\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \varepsilon t\Big|\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big|^2 + \frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\nabla\theta|^2 &\leqslant t|\nabla f'(u_\varepsilon)\theta|\Big\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big\|_{-1}\\ &\leqslant \frac{t}{2}\Big\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + ct|\nabla f'(u_\varepsilon)\theta|^2.\end{aligned}$$

Nous trouvons le dernier terme de cette inégalité.

$$\begin{aligned}|\nabla f'(u_\varepsilon)\theta|^2 &\leqslant \int_\Omega |f'(u_\varepsilon)|^2|\nabla\theta|^2 dx + \int_\Omega |f''(u_\varepsilon)|^2|\nabla u_\varepsilon|^2|\theta|^2 dx\\ &\leqslant c\int_\Omega \big(1+|u_\varepsilon|^{4p-4}\big)|\nabla\theta|^2 + c\int_\Omega \big(1+|u_\varepsilon|^{4p-6}\big)|\nabla u_\varepsilon|^2|\theta|^2.\end{aligned}$$

Comme auparavant, nous avons, pour $n=1,2$ et p quelconque, et pour $p=2$ lorsque $n=3$,

$$\begin{aligned}|\nabla f'(u_\varepsilon)\theta|^2 &\leqslant c\big(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}\big)\|\theta\|^2 + c\big(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}\big)\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^4}^2\|\theta\|_{L^4}^2\\ &\leqslant c\big(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}\big)\|\theta\|^2 + c\big(\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}\big)\|u_\varepsilon\|_2^2\|\theta\|^2.\end{aligned}$$

Nous avons par (5.87), (5.92) et (5.94)

$$\|u_\varepsilon\|_2 \leqslant C, \quad (C \text{ indépendante de } \varepsilon).$$

Ceci donne

$$\begin{aligned} |\nabla f'(u_\varepsilon)\theta|^2 &\leqslant C\|\theta\|^2 \\ &\leqslant C|\nabla\theta|^2, \quad (<\theta>=0). \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$t\Big\|\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \varepsilon t\Big|\frac{\partial\theta}{\partial t}\Big|^2 + \frac{d}{dt}\big(t|\nabla\theta|^2\big) \leqslant ct|\nabla\theta|^2 + |\nabla\theta|^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall et (5.95) on obtient (5.99). ■

5.8.1 Démonstration du Théorème 5.13

On divise la preuve de ce théorème en plusieurs lemmes.

Lemme 5.20. *Pour u_ε et u_0 les solutions données dans le Théorème 5.12, nous avons l'estimation suivante*

$$\|u_\varepsilon(t) - u_0(t)\| + \int_0^t \Big(\Big\|\frac{\partial u_\varepsilon(s)}{\partial t} - \frac{\partial u_\varepsilon(s)}{\partial t}\Big\|_{-1}^2\Big)ds \leqslant C_R e^{\alpha t}\Big(\|u_\varepsilon(0) - u_0(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big), \tag{5.100}$$

les constantes ne dépendent pas de ε.

Démonstration.
Nous avons pour $v_\varepsilon(t) = u_\varepsilon(t) - u_0(t)$

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_\varepsilon + f(u_\varepsilon) - f(u_0) =< f(u_\varepsilon) - f(u_0) > -\varepsilon\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}. \tag{5.101}$$

Multiplions (5.101) par $t\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$, nous avons par (5.61)

$$\begin{aligned} t\Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\nabla v_\varepsilon|^2 &\leqslant t\big|\big(\ell_\varepsilon(t)v_\varepsilon, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\big)\big| + \varepsilon t\big|\big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\big)\big| \\ &\leqslant t|\nabla \ell_\varepsilon(t)v_\varepsilon|\Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1} + \varepsilon t\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|\Big|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big| \\ &\leqslant ct|\nabla v_\varepsilon|\Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1} + \varepsilon t\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|\Big|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big|, \end{aligned}$$

$$t\Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \frac{d}{dt}\Big(t|\nabla v_\varepsilon|^2\Big) \leqslant ct|\nabla v_\varepsilon|^2 + |\nabla v_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2 t\Big|\nabla\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2.$$

En intégrant entre 0 et t et d'après (5.89) et (5.95)

$$\int_0^t \Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(s)\Big\|_{-1}^2 ds + |\nabla v_\varepsilon(t)|^2 \leqslant C_{R,T}e^{\alpha t}\Big(\|u_\varepsilon(0) - u_0(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big).$$

■

Lemme 5.21. *Nous avons l'estimation suivante*

$$\Big\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_0}{\partial t}(t) \Big\|_{-1}^2 \leqslant C_R e^{\alpha t}\Big(\|u_\varepsilon(0) - u_0(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2 \Big), \tag{5.102}$$

où les constantes ne dépendent pas de ε.

Démonstration.
On dérive l'équation (5.101), nous avons alors, pour $\theta_\varepsilon = \dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}$,

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} - \Delta\theta_\varepsilon = -\ell_\varepsilon(t)\theta_\varepsilon - \ell'_\varepsilon(t)v_\varepsilon + < \ell_\varepsilon(t)\theta_\varepsilon - \ell'_\varepsilon(t)v_\varepsilon > -\varepsilon\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2},$$

en multipliant par $t\theta_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{t}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_\varepsilon\|_{-1}^2 + t|\nabla\theta_\varepsilon|^2 &\leqslant ct|\theta_\varepsilon|^2 + t|(\ell'_\varepsilon(t)v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)| + \varepsilon t\Big|\Big(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}, \theta_\varepsilon\Big)\Big| \\ &\leqslant ct|\theta_\varepsilon|^2 + ct|\nabla v_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2 t\Big|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\Big|^2. \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\|\theta_\varepsilon\|_{-1}^2\Big) + t|\nabla\theta_\varepsilon|^2 \leqslant ct\|\theta_\varepsilon\|_{-1}^2 + \|\theta_\varepsilon\|_{-1}^2 + ct|\nabla v_\varepsilon|^2 + \varepsilon^2 t\Big|\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2}\Big|^2.$$

Intégrons entre 0 et t et d'après (5.89), (5.100) et (5.99) nous obtenons (5.102). ■

Lemme 5.22. *Nous avons*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2^2 \leqslant C_R e^{\alpha t}\Big(\|u_\varepsilon(0) - u_0(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2 \Big). \tag{5.103}$$

Démonstration.
Multiplions l'équation (5.101) par $(-\Delta)v_\varepsilon$, nous avons, pour t fixé,

$$\begin{aligned} |\Delta v_\varepsilon|^2 &\leqslant \Big|\Big((-\Delta)^{-1}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}, -\Delta v_\varepsilon\Big)\Big| - \big(\ell_\varepsilon v_\varepsilon, \Delta v_\varepsilon\big) + \varepsilon\Big|\Big(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \Delta v_\varepsilon\Big)\Big| \\ &\leqslant c\Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}\Big\|_{-2}^2 + \frac{1}{4}|\Delta v_\varepsilon|^2 + |\nabla \ell_\varepsilon v_\varepsilon||\nabla v_\varepsilon| + c\varepsilon^2\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}\Big|^2 + \frac{1}{4}|\Delta v_\varepsilon|^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors, pour t fixé et par les estimations (5.97), (5.100) et (5.102),

$$\begin{aligned} |\Delta v_\varepsilon(t)|^2 &\leqslant c\Big(\Big\|\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(t)\Big\|_{-1}^2 + |\nabla v_\varepsilon(t)|^2 + \varepsilon^2\Big|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(t)\Big|^2\Big) \\ &\leqslant Ce^{\alpha t}\Big(\|v_\varepsilon(0)\|_{-1}^2 + \varepsilon^2\Big). \end{aligned}$$

■

D'après les résultats précédents on termine la démonstration du Théorème 5.13.

Ainsi, toutes les hypothèses du Théorème 5.11 sont satisfaites et, par conséquence, nous avons des attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon^d$ pour $S_\varepsilon^{t_1}$ tels que

$$\begin{aligned}\dim_F\Big(\mathcal{M}_\varepsilon^d, H^{-1}(\Omega)\Big) &\leqslant C_1,\\ \mathrm{dist}_{\mathrm{sym},H^{-1}}\Big(\mathcal{M}_\varepsilon^d, \mathcal{M}_0^d\Big) &\leqslant C_2\varepsilon^k,\\ \mathrm{dist}_{H^{-1}}\Big(S_\varepsilon^{t_1,(n)}\mathcal{B}_2, \mathcal{M}_\varepsilon^d\Big) &\leqslant C_3e^{-\beta n},\end{aligned}$$

où les constantes $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \beta$ et k sont indépendantes de ε. Maintenant, nous définissons les attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon^c$ par

$$\mathcal{M}_\varepsilon^c := \bigcup_{t\in[t_1,2t_1]} S_\varepsilon^t \mathcal{M}_\varepsilon^d.$$

En effet, d'après le Lemme 5.10, le semi-groupe S_ε^t est uniformément Hölder continu par rapport à $(t,u_0)\in[0,t_1]\times\mathcal{B}_2$, donc $\mathcal{M}_\varepsilon^c$ est un attracteur exponentiel pour S_ε^t (pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$), et nous avons

$$\begin{aligned}\dim_F\Big(\mathcal{M}_\varepsilon^c, H^{-1}(\Omega)\Big) &\leqslant C,\\ \mathrm{dist}_{H^{-1}}\Big(S_\varepsilon^t\mathcal{B}_2, \mathcal{M}_\varepsilon^c\Big) &\leqslant C'e^{-c_2t_1}.\end{aligned}$$

De plus, grâce au Théorème 5.12, nous avons

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{sym},H^{-1}}\Big(\mathcal{M}_\varepsilon^c, \mathcal{M}_0^c\Big) \leqslant \Big(\mathrm{dist}_{\mathrm{sym},H^{-1}}\big(\mathcal{M}_\varepsilon^d, \mathcal{M}_0^d\big) + \varepsilon\Big) \leqslant C''\varepsilon^k.$$

5.9 Etude pour des moyennes de paramètres d'ordres différents

Considérons le problème suivant

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2 u - \Delta f(u) = 0, \tag{5.104}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \Gamma,$$

$$u|_{t=0} = u_0,$$

f est comme auparavant. Nous avons aussi

$$\frac{d < u >}{dt} = 0, \tag{5.105}$$

i.e., $< u(t) >$=const. Dans ce qui suit nous posons

$$| < u_0 > | \leqslant M \quad \text{ou} \quad | < u(t) > | \leqslant M, \quad M \geqslant 0.$$

Nous allons dans cette section démontrer l'unicité d'une solution du problème (5.104) et l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels pour deux solutions de moyennes différentes, i.e., si u_1 et u_2 sont deux solutions, u_{01} ,u_{02} sont les données initiales, nous considérons ici que $< u_{01} > \neq < u_{02} >$ (voir [51]).

5.9.1 Estimations a priori

(5.104) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\big) - \Delta u + f(u) = < f(u) > . \tag{5.106}$$

Multiplions (5.106) par $\bar{u}$, intégrons sur Ω et intégrons par parties, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\big) + |\nabla u|^2 + (f(u), \bar{u}) = 0.$$

Comme auparavant

$$(f(u), \bar{u}) = (f(u), u) - < u > \int_\Omega f(u)dx;$$

$$(f(u), u) \geqslant pb_{2p}u^{2p} - c_1 \quad \text{et} \quad |f(u)| \leqslant \frac{1}{M}(p - \frac{1}{2})b_{2p}u^{2p} + c_2.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\big) + 2|\nabla u|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant c_M,$$

cf. (5.28), (5.29).

Nous avons $\dfrac{d < u >^2}{dt} = 0$. Notons aussi que $\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big)^{\frac{1}{2}}$ est une norme dans $H^{-1}(\Omega)$.

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2 + (1+\varepsilon) < u >^2\big) + 2|\nabla u|^2 + b_{2p}\|u\|_{L^{2p}}^{2p} \leqslant c'_M. \tag{5.107}$$

$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$ injections continues, alors

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2 + (1+\varepsilon) < u >^2\big) +$$

$$c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2 + (1+\varepsilon) < u >^2\big) + b_{2p}\|u\|_{L^{2p}}^{2p} \leqslant$$

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2+(1+\varepsilon)<u>^2\big)+c\big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2+2<u>^2\big)+b_{2p}\|u\|_{L^{2p}}^{2p}\leqslant c_M,$$

pour $0<\varepsilon\leqslant 1$, et c_M ne dépend pas de ε. En intégrant

$$\|\bar u(t)\|_{-1}^2+<u(t)>^2+\varepsilon\big(|\bar u(t)|^2+<u(t)>^2\big)$$
$$\leqslant e^{-ct}\big(\|\bar u_0\|_{-1}^2+<u_0>^2+\varepsilon|\bar u_0|^2+\varepsilon<u_0>^2\big)+c',$$

ou

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon|u(t)|^2\leqslant e^{-ct}\big(\|u_0\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon|u_0|^2\big)+c',$$

où c et c' ne dépendent pas de ε (dépendent de M).
Cela donne l'existence d'un borné absorbant dans $E(\varepsilon)$; l'espace $E(\varepsilon)$ est défini par la norme $\|v\|_E=\big(\|v\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon|v|^2\big)^{\frac12}$, i.e.,
$\forall R>0,\ |u_0|\leqslant R,\ \|u_0\|_{H^{-1}}^2\leqslant cR^2$, alors il existe $t_0=t_0(R)\geqslant 0$ tel que

$$\|u(t)\|_{E(\varepsilon)}\leqslant c,\quad \forall t\geqslant t_0,$$

où c ne dépend pas de R.
Nous avons aussi par (5.107)

$$\int_t^{t+1}|\nabla u|^2ds\leqslant c_r,\quad t\geqslant t_0,\ r>0, \tag{5.108}$$

$$\int_t^{t+1}\|u\|_{L^{2p}}^{2p}ds\leqslant c_r,\quad t\geqslant t_0,\ r>0. \tag{5.109}$$

Multiplions (5.104) par u

$$\begin{aligned}\frac12\frac{d}{dt}\big(|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+|\Delta u|^2-(\Delta f(u),u)&=0,\\ \frac12\frac{d}{dt}\big(|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+|\Delta u|^2+(f'(u)\nabla u,\nabla u)&=0\\ \frac{d}{dt}\big(|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+2|\Delta u|^2&\leqslant c|\nabla u|^2,\quad f'\geqslant -c.\end{aligned}$$

Grâce au lemme de Gronwall et d'après (5.108), nous avons l'existence d'un borné absorbant dans $E_1(\varepsilon)$; l'espace $E_1(\varepsilon)$ est défini par la norme $\|v\|_{E_1}=\big(|v|^2+\varepsilon|\nabla v|^2\big)^{\frac12}$, i.e.,

$$\exists t_1=t_1(R)\geqslant 0\ \text{ tel que }\ \|u(t)\|_{E1(\varepsilon)}\leqslant c,\quad \forall t\geqslant t_1.$$

Nous avons aussi

$$\int_t^{t+1}|\Delta u|^2ds\leqslant c_r,\quad \forall t\geqslant t_1. \tag{5.110}$$

Multiplions (5.104) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, cf. (5.44) et (5.45), nous avons, en particulier

$$\frac{d}{dt}|\Delta u|^2\leqslant c|\Delta u|^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall uniforme et (5.110), nous avons l'existence d'un borné absorbant $\mathcal{B}_2$ dans $H^2(\Omega)$.

5.9.2 Estimations pour la différence entre deux solutions

Tout d'abord nous trouvons les estimations qui donnent l'unicité d'une solution du problème (5.104). Soient u_1 et u_2 deux solutions, u_{01} et u_{02} les données initiales. Posons $u := u_1 - u_2$ et $u_0 := u_{01} - u_{02}$. La différence u est une solution du problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2 u - \Delta\big(f(u_1) - f(u_2)\big) = 0, \tag{5.111}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$
$$u(0) = u_0.$$

Comme auparavant, (5.111) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\bar{u} + \varepsilon(-\Delta)\bar{u}\big) + \Delta^2 u - \Delta\big(f(u_1) - f(u_2)\big) = 0. \tag{5.112}$$

Multiplions (5.112) par $(-\Delta)^{-1}\bar{u}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\big) + |\nabla u|^2 + (f(u_1) - f(u_2), \bar{u}) = 0. \tag{5.113}$$

Nous avons

$$(f(u_1) - f(u_2), \bar{u}) \geqslant -c|u|^2 - < u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)dx,$$

et $u = \bar{u} + < u >$, donc

$$\begin{aligned} |u|^2 &\leqslant 2\big(|\bar{u}|^2 + < u >^2\big) \leqslant c\big(\|\bar{u}\|_{-1}|\nabla u| + < u >^2\big) \\ &\leqslant \gamma|\nabla u|^2 + c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big), \quad \forall \gamma > 0. \end{aligned} \tag{5.114}$$

Nous traitons le terme $| < u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)dx|$.
Pour $n = 1, 2$ et p quelconque, nous avons

$$\begin{aligned} | < u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)dx| &\leqslant | < u > | \, | \int_\Omega \Big(\int_0^1 f'(u_1 + (1-s)u_2)ds\Big)udx| \\ &\leqslant | < u > | \int_\Omega \big(|u_1|^{2p-2} + |u_2|^{2p-2} + 1\big)|u|dx \\ &\leqslant c| < u > |\Big(\|u_1\|_{L^{4p-4}}^{2p-2} + |u_2|_{L^{4p-4}}^{2p-2} + 1\Big)|u| \\ &\leqslant c\Big(|u|^2 + \big(\|u_1\|^{4p-4} + \|u_2\|^{4p-4} + 1\big) < u >^2\Big). \end{aligned}$$

Ceci donne aussi par (5.114) et par $\|u_i\| \leqslant$ const.,

$$| < u > \int_\Omega \big(f(u_1) - f(u_2)\big)dx| \leqslant \frac{1}{4}|\nabla u|^2 + c\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big). \tag{5.115}$$

Pour $n=3$ et $p=2$,

$$\begin{aligned} |<u>\int_\Omega \big(f(u_1)-f(u_2)\big)dx| &\leqslant c|<u>|\int_\Omega \big(|u_1|^2+|u_2|^2+1\big)|u|dx \\ &\leqslant c\Big(|u|^2+\big(\|u_1\|_{L^4}^4+\|u_2\|_{L^4}^4+1\big)<u>^2\Big). \end{aligned}$$

De même, nous trouvons (5.115) dans ce cas. D'après (5.107)

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+<u>^2+\varepsilon\big(|\bar u|^2+<u>^2\big)\Big)+|\nabla u|^2 \leqslant c\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+<u>^2+\varepsilon\big(|\bar u|^2+<u>^2\big)\Big). \tag{5.116}$$

Ceci donne grâce au lemme de Gronwall

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon|u(t)|^2 \leqslant ce^{c't}\big(\|u_0\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon|u_0|^2\big),$$

où c, c' dépendent de M et pas de ε.
Nous avons par cette estimation l'unicité.

Ensuite, nous démontrons l'existence d'un attracteur exponentiel, et pour cela nous prouvons la $H^2(\Omega)\subset H^{-1}(\Omega)$ propriété de régularisation sur la différence entre deux solutions.

Lemme 5.23. *Pour u_1 et u_2 deux solutions, $\|u_i(0)\|_{H^2}\leqslant R$, $i=1,2$, nous avons*

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant c_R e^{\alpha t}\|u_1(0)-u_2(0)\|_{H^{-1}}^2,$$

c_R et α ne dépendent pas de ε.

Démonstration.
Supposons les mêmes notations précédentes et

$$f(u_1)-f(u_2)=\int_0^1 f'\big(su_1+(1-s)u_2\big)ds\ u := \ell(t)u.$$

(5.112) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar u+\varepsilon\bar u\big)=\Delta u-\ell(t)u+<\ell(t)u>,$$

$$\frac{\partial\bar u}{\partial t}=-\Delta^2(I-\varepsilon\Delta)^{-1}\bar u+\Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}\big(\ell(t)u-<\ell(t)u>\big).$$

Donc

$$(-\Delta)^{-1}\frac{\partial\bar u}{\partial t}=\Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}\bar u-(I-\varepsilon\Delta)^{-1}\big(\ell(t)u-<\ell(t)u>\big).$$

Posons $A_1 := (-\Delta)^{-1} + \varepsilon I$ (cf. avant). Multiplions par $\bar{u}$, notons que $< \bar{u} >= 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + |A_1^{-\frac{1}{2}}\bar{u}|^2 &\leqslant c\big|\big((I-\varepsilon\Delta)^{-1}\ell(t)u, \bar{u}\big)\big| \\ &\leqslant c\big|\big((I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\ell(t)u, (I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\bar{u}\big)\big| \\ &\leqslant c\|(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\ell(t)u\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}|A_1^{-\frac{1}{2}}\bar{u}|^2,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + |A_1^{-\frac{1}{2}}\bar{u}|^2 \leqslant c\|\ell(t)u\|_{-1}^2 \leqslant c(R)\|u\|_{-1}^2.$$

Ici, $|A_1^{-\frac{1}{2}}\cdot|$ est une norme dans $H^1(\Omega)$; $c\|u\|_{H^1}^2 \leqslant |A_1^{-\frac{1}{2}}u|^2$. Nous avons alors

$$\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big) + c\|u\|^2 \leqslant c\|u\|_{H^{-1}}^2.$$

En intégrant

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant ce^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2, \tag{5.117}$$

$$\int_t^{t+1}\|u(s)\|^2 ds \leqslant ce^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2. \tag{5.118}$$

■

Lemme 5.24. *Pour u est comme dans le lemme précédent, nous avons l'estimation suivante*

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 + \varepsilon|u(t)|^2 + \int_t^{t+1} t\|u(s)\|^2 ds \leqslant c\frac{1+t}{t}e^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2, \quad t > 0. \tag{5.119}$$

Démonstration.
Multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\big) - \Delta u + \ell(t)u =< \ell(t)u >, \tag{5.120}$$

par $t\bar{u}$, notons que $< \bar{u} >= 0$,

$$\begin{aligned}\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\big) + t|\nabla u|^2 &\leqslant -t(f(u_1) - f(u_2), \bar{u}) \\ &\leqslant -t(f(u_1) - f(u_2), u) + t| < u > |\int_\Omega |f(u_1) - f(u_2)|dx.\end{aligned}$$

D'après les estimations précédentes

$$\begin{aligned}\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \varepsilon|\bar{u}|^2\big) + t|\nabla u|^2 &\leqslant ct|u|^2 + \frac{t}{4}|\nabla u|^2 + ct\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big) \\ &\leqslant \frac{t}{2}|\nabla u|^2 + ct\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2 + < u >^2\big) \quad \text{(par (5.114)).}\end{aligned}$$

Par (5.117)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(t\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar{u}|^2+(1+\varepsilon)<u>^2\big)\Big) &+ ct\big(|\nabla u|^2+<u>^2\big)\\ &\leqslant c(1+t)\big(\|\bar{u}\|_{-1}^2+<u>^2\big)+|\bar{u}|^2, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1\\ &\leqslant c(1+t)e^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2+c_1|\nabla u|^2.\end{aligned}$$

Nous intégrons entre 0 et t et par (5.118)

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon|u(t)|^2\leqslant c\frac{1+t}{t}e^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2,$$

et

$$\int_0^t t\|u\|^2 ds\leqslant c\frac{1+t}{t}e^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2.$$

■

Lemme 5.25. *Nous avons*

$$\|u(t)\|^2+\int_t^{t+1}\Big(\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\varepsilon|\frac{\partial u}{\partial t}|^2\Big)ds\leqslant c\frac{1+t}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2,\quad t>0. \tag{5.121}$$

Démonstration.
Multiplions (5.120) par $t\dfrac{\partial u}{\partial t}$, notons que $<\dfrac{\partial u}{\partial t}>=0$,

$$\begin{aligned}t\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon t\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2+\frac{t}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 &\leqslant -\big(\ell(t)u,t\frac{\partial u}{\partial t}\big)\\ &\leqslant t|\nabla\ell(t)u|\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{-1}^2.\end{aligned}$$

Pour $t>0$,

$$\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\big(|\nabla u|^2+<u>^2\big)+t\Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon t\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2\Big)\leqslant\frac{t}{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{H^{-1}}^2+ct\big(|\nabla u|^2+<u>^2\big)$$

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(|\nabla u|^2+<u>^2\big)\Big)+c_T\Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon t\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2\Big)\leqslant c(1+t)\|u\|^2.$$

En intégrant entre 0 et t et grâce aux estimations (5.118) et (5.119), on termine la démonstration. ■

Lemme 5.26. *Si u est comme précédemment, nous avons*

$$\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{H^{-1}}^2+\varepsilon\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2+\int_t^{t+1}\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2ds\leqslant c\frac{1+t}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|_{H^{-1}}^2,\quad t>0. \tag{5.122}$$

Démonstration.
Dérivons (5.120), posons $\theta := \dfrac{\partial u}{\partial t}$ et notons que $<\theta>= 0$, donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\theta + \varepsilon\theta\big) - \Delta\theta = -\ell(t)\theta - \ell'(t)u + < \frac{\partial}{\partial t}\big(\ell(t)u\big) > .$$

Multiplions par $t\theta$, et par (5.119)

$$\begin{aligned}
\frac{t}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \varepsilon|\theta|^2\big) + t|\nabla\theta|^2 &\leqslant ct|\theta|^2 + t|\ell'(t)u||\theta| \\
&\leqslant ct|\theta|^2 + ct|u|^2 \\
&\leqslant ct|\nabla\theta|\|\theta\|_{H^{-1}} + C_T e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}},
\end{aligned}$$

pour $0 < t \leqslant T < \infty$.

$$\frac{d}{dt}\Big(t\big(\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \varepsilon|\theta|^2\big)\Big) + t|\nabla\theta|^2 \leqslant ct\|\theta\|^2_{H^{-1}} + \|\theta\|^2_{H^{-1}} + \varepsilon|\theta|^2 + C_T e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}}.$$

Grâce au lemme de Gronwall et l'estimation (5.121) nous trouvons (5.122). ■

Maintenant, nous interprétons l'équation(5.120) comme une équation elliptique

$$\Delta u - \ell(t)u + < \ell(t)u >= \frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\big) := h(t). \tag{5.123}$$

Nous avons

$$|h(t)|^2 = |(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}|^2 \leqslant 2\Big(\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2_{H^{-1}} + \varepsilon\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2\Big), \quad t > 0.$$

D'après les estimations précédentes

$$|h(t)|^2 \leqslant c\frac{1+t}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}}.$$

Multiplions (5.123) par Δu, nous avons, pour t fixé,

$$|\Delta u(t)|^2 \leqslant |(h(t), \Delta u)| + |(\ell(t)u, \Delta u)| \leqslant |h(t)||\Delta u| + |\nabla\ell(t)u||\nabla u|.$$

Par (5.61), on a

$$\begin{aligned}
|\Delta u(t)|^2 &\leqslant c\big(|h(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2 + \|u(t)\|^2\big), \\
|\Delta u(t)|^2 + < u(t) >^2 &\leqslant c'\big(|h(t)|^2 + \|u(t)\|^2\big),
\end{aligned}$$

et donc

$$\|u(t)\|^2_{H^2} \leqslant c\frac{1+t}{t}\ e^{\alpha t}\|u(0)\|^2_{H^{-1}}. \tag{5.124}$$

5.9.3 Etude de la limite $\varepsilon \to 0$

Soient u^ε et u^0 deux solutions de (5.104), pour $0 < \varepsilon \leqslant 1$ et $\varepsilon = 0$ respectivement, et pour la même donnée initiale ; $u^\varepsilon(0) = u^0(0)$. Posons $u := u^\varepsilon - u^0$. Donc $u(0) = 0$ et $< u >= 0$. u est une solution du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon(-\Delta)\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta\big(f(u^\varepsilon) - f(u^0)\big) = \varepsilon\Delta\frac{\partial u^0}{\partial t}, \tag{5.125}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma,$$

$$u\big|_{t=0} = u_0 = u^\varepsilon(0) - u^0(0).$$

Nous avons

$$\frac{d < u^\varepsilon >}{dt} = \frac{d < u^0 >}{dt} = 0. \tag{5.126}$$

Nous déduisons par (5.125) et (5.126)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon(-\Delta)\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta^2 u - \Delta\big(f(u^\varepsilon) - f(u^0)\big) = \varepsilon\Delta\frac{\partial u^0}{\partial t}. \tag{5.127}$$

En multipliant (5.127) par $(-\Delta)^{-1}u$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + |\nabla u|^2 + \big(f(u^\varepsilon) - f(u^0), \bar{u}\big) = -\varepsilon\big(\frac{\partial u^0}{\partial t}, u\big),$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + |\nabla u|^2 & \\ &\leqslant c|u|^2 + c\varepsilon^2\Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \frac{1}{4}|\nabla u|^2.\end{aligned} \tag{5.128}$$

Nous trouvons $\Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2$ en multipliant l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta)^{-1}\overline{u^0} - \Delta u^0 + f(u^0) =< f(u^0) >,$$

par $\frac{\partial u^0}{\partial t}$, notons que $< \frac{\partial u^0}{\partial t} >= 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u^0|^2 + \Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \frac{d}{dt}\int_\Omega g(u^0)dx = 0 \tag{5.129}$$

Intégrons entre sur $[0, t]$ et sur $[t, t+1]$, nous avons respectivement

$$\begin{aligned}|\nabla u^0(t)|^2 + 2\int_0^t \Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 ds + 2\int_\Omega g(u^0(t))dx &\leqslant |\nabla u^0(0)|^2 + \int_\Omega g(u^0(0))dx \\ &\leqslant \|u^0(0)\| + c\|u^0(0)\|_{L^4}^4 + c',\end{aligned}$$

$$|\nabla u^0(t+1)|^2 + 2\int_t^{t+1} \Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 ds + 2\int_\Omega g(u^0(t+1))dx \leqslant |\nabla u^0(t)|^2 + \int_\Omega g(u^0(t))dx.$$

D'après les deux dernière relations

$$\int_t^{t+1} \Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 ds \leqslant \text{const.} \tag{5.130}$$

D'après les estimations (5.114) et (5.128)

$$\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) \leqslant c\varepsilon^2 \Big\|\frac{\partial u^0}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + c\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big).$$

En intégrant entre 0 et t, $t \geqslant 0$, nous avons par (5.130)

$$\|u(t)\|_{H^{-1}}^2 + \varepsilon|u(t)|^2 \leqslant c\varepsilon^2 e^{c't}, \quad \text{ou} \quad \|u(t)\|_{H^{-1}}^2 \leqslant c\varepsilon^2 e^{c't}, \tag{5.131}$$

c, c' dépendent de M et pas de ε.

5.9.4 Famille robuste d'attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon$

Nous avons déjà trouvé un borné absorbant $\mathcal{B}_2$ dans $H^2(\Omega)$, i.e., il existe t_1 tel que

$$S(t)B \subset \mathcal{B}_2, \quad \forall t \geqslant t_1 \ \text{ et } \ \forall B \ \text{ borné.}$$

Posons

$$S_\varepsilon^{t_1} : \mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_2, \quad \varepsilon \in]0,1].$$

Considérons $B_R := \{u \in H^2(\Omega), \ \|u\|_{H^2} \leqslant R, \ | < u > | \leqslant M\}$. Nous avons alors par (5.124) et (5.131)

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon^{t_1}u_1 - S_\varepsilon^{t_1}u_2\|_{H^2}^2 &\leqslant c\frac{1+t_1}{t_1}e^{\alpha t_1}\|u_1 - u_2\|_{H^{-1}}^2 \\ &\leqslant L_T\|u_1 - u_2\|_{H^{-1}}^2, \quad t_1 \leqslant T < \infty, \end{aligned}$$

pour tout u_1, $u_2 \in B_R$ et pour L_T ne dépend pas de ε, et

$$\|S_\varepsilon^i u - S_0^i\|_{H^{-1}} \leqslant K^i\varepsilon,$$

pour tout $u \in B_R$ et $i \in \mathbb{N}$.

Il reste à démontrer la continuité de Hölder pour montrer l'existence de la famille $\mathcal{M}_\varepsilon$, soit le lemme suivant.

Lemme 5.27. *S_ε^t est Hölder continu sur $[0, t_1] \times B_R$ pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$;*

$$\|S_\varepsilon^{t_1}u_0^1 - S_\varepsilon^{t_2}u_0^2\|_{H^{-1}} \leqslant C_R(T)\big(\|u_0^1 - u_0^2\|_{H^{-1}} + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\big),$$

où $u_0^i \in B_R$, $t_i \leqslant T$, $C_R(T)$ ne dépend pas de ε.

Démonstration.
Nous avons $\int_t^{t+1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{H^{-1}} ds \leqslant c(R)$, pour $u_0 \in B_R$. Alors

$$\begin{aligned}
\|S_\varepsilon^{t_1} u_0^1 - S_\varepsilon^{t_2} u_0^2\|_{H^{-1}} &= \|S_\varepsilon^{t_1} u_0^1 - S_\varepsilon^{t_1} u_0^2 + S_\varepsilon^{t_1} u_0^2 - S_\varepsilon^{t_2} u_0^2\|_{H^{-1}} \\
&\leqslant c_T \|u_0^1 - u_0^2\|_{H^{-1}} + \left\| \int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial t} ds \right\|_{H^{-1}} \\
&\leqslant c_T \|u_0^1 - u_0^2\|_{H^{-1}} + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{t_2}^{t_1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{H^{-1}} ds \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant c_T(R) \big(\|u_0^1 - u_0^2\|_{H^{-1}} + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \big).
\end{aligned}$$

■

Grâce aux estimations (5.124) et (5.131), toutes les hypothèses du Théorème 5.11 sont satisfaites, pour $H_1 = H^2(\Omega)$ et $H = H^{-1}(\Omega)$, ce qui donne l'existence d'une famille robuste d'attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\varepsilon^{M,d}$ pour le système dynamique discret.

Pour le cas continu nous définissons les attracteurs exponentiels par

$$\mathcal{M}_\varepsilon^M = \bigcup_{t \in [t_1, 2t_1]} S_\varepsilon(t) \mathcal{M}_\varepsilon^{M,d}.$$

Chapitre 6

Problème de Cahn-Hilliard visqueux non autonome

6.1 Position du problème

Dans ce chapitre nous allons chercher les attracteurs exponentiels, rétrograde, uniforme et exponentiel rétrograde du problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u+\varepsilon(-\Delta)u\big)+\Delta^2 u-\Delta f(u)=m, \quad \text{dans } \Omega, \tag{6.1}$$

associé aux conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial \Delta u}{\partial n}=0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{6.2}$$

et la condition initiale

$$u(\tau)=u_\tau, \quad \forall \tau\in\mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous prenons les produits scalaires et les normes associées suivants : $\big((\cdot,\cdot),|\cdot|\big)$ dans l'espace H, $\big(((\cdot,\cdot)),\|\cdot\|\big)$ dans l'espace V et $\|\cdot\|_2$ est la norme dans V_1, où les espaces H, V et V_1 sont définis comme dans le chapitre précédent.
$\|u\|_{-1}=|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}u|$ définit la norme de u dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$ si u est à moyenne nulle.

La fonction f dans l'équation (6.1) est un polynôme de degré $2p-1$ (donné dans le chapitre précédent) et m appartient à $L^\infty(\mathbb{R},L^2(\Omega))$ (et à $L^\infty(\mathbb{R},H^{-1}(\Omega))$) et satisfait

$$\int_{-\infty}^{\infty}|m|^2dt\leqslant c, \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\|m\|_{-1}^2dt\leqslant M,$$

où les constantes c et M sont suffisamment grandes.

En intégrant (6.1) sur Ω nous avons

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u dx = \int_\Omega m dx. \tag{6.4}$$

Alors, si

$$\int_\Omega m(x)dx = 0, \tag{6.5}$$

(6.4) donne

$$\int_\Omega u dx = \int_\Omega u_\tau dx, \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{6.6}$$

Donc à partir de maintenant, nous supposons que (6.5) est satisfaite.
Nous prenons les espaces $\mathring{H}$, $\mathring{V}$ et $\mathring{V}'$ du chapitre précédent et nous considérons la formulation variationnelle

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \varepsilon\frac{d}{dt}(\nabla u, \nabla v) + (\Delta u, \Delta v) + (\nabla f(u), \nabla v) = (m, v), \quad \forall v \in V_1. \tag{6.7}$$

L'équation (6.1) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1} + \varepsilon I\Big)(u - < u >) - \Delta(u - < u >) + f(u) =< f(u) > + (-\Delta)^{-1}m. \tag{6.8}$$

Posons $\bar{u} := u - < u >$, et en multipliant (6.8) par $v \in \mathring{V}$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}(\bar{u}, v) + \varepsilon(\bar{u}, v)\Big) - (\Delta\bar{u}, v) + (f(u), v) = ((-\Delta)^{-1}m, v), \quad \forall v \in \mathring{V}. \tag{6.9}$$

6.2 Théorème d'existence et d'unicité

Nous allons démontrer le théorème 5.1 pour le problème (6.1), (6.2) et (6.3), et nous commençons par l'unicité de la solution.

6.2.1 L'unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions de (6.1) (ou de (6.8)), où $u_1(\tau) = u_2(\tau)$. Posons $u := u_1 - u_2$, et m correspondant aux deux solutions. Alors, u vérifie l'équation suivante, notons que $< u >= 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}u + \varepsilon u\Big) - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) =< f(u_1) - f(u_2) > . \tag{6.10}$$

Multiplions (6.10) par u

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\Big) + |\nabla u|^2 + (f(u), u) = 0.$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\|u\|_{-1}^2+\varepsilon|u|^2\Big)+2|\nabla u|^2 &\leqslant c|u|^2\\ &\leqslant |\nabla u|^2+c\Big(\|u\|_{-1}^2+\varepsilon|u|^2\Big),\end{aligned}$$

on a utilisé l'inégalité d'interpolation $|u|^2 \leqslant |\nabla u|\ \|u\|_{-1}$. Il vient alors en intégrant,

$$\|u(t)\|_{-1}^2+\varepsilon|u(t)|^2 \leqslant 0,$$

où $u(\tau)=0$, d'où l'unicité.

6.2.2 L'existence

Nous procédons comme dans le chapitre précédent et nous obtenons, par (5.16),

$$\mathbf{W}\frac{d\alpha}{dt}+\mathbf{M}\alpha+\mathbf{F}=\mathbf{M}_1, \tag{6.11}$$

telle que $\mathbf{W}$, $\mathbf{M}$ et $\mathbf{F}$ sont comme auparavant et $\mathbf{M}_1 := \begin{pmatrix}(m,w_1)\\ \vdots \\ (m,w_n)\end{pmatrix}$.

Par (6.11), nous avons une solution locale. Pour montrer que la solution est globale nous écrivons (6.1) sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta K(u), \tag{6.12}$$

$$K(u)=-\Delta u+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}+f(u)-(-\Delta)^{-1}m. \tag{6.13}$$

Nous prenons la fonction de Lyapunov

$$J(u)=\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\int_\Omega g(u)dx,$$

où g est la fonction primitive de f. D'après (6.12)

$$(K(u),\partial_t u)+|\nabla K(u)|^2=0, \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}(K(u),\partial_t u) &= -\int_\Omega \Delta u\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int_\Omega f(u)\frac{\partial u}{\partial t}dx+\varepsilon|\partial_t u|^2-((-\Delta)^{-1}m,\partial_t u)\\ &= \frac{d}{dt}J(u)+\varepsilon|\partial_t u|^2-((-\Delta)^{-1}m,\partial_t u).\end{aligned}$$

Par (6.14)

$$\frac{d}{dt}J(u)+\varepsilon|\partial_t u|^2+|\nabla K(u)|^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|\partial_t u|^2+\frac{c}{\varepsilon}\|m\|_{-1}^2.$$

Et en intégrant sur $[\tau,t]$

$$J(u(t)) \leqslant c_\varepsilon M^2+J(u(\tau))<\infty,$$

et la solution est globale.

6.2.3 Estimations a priori

(6.1) équivaut à

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\bar{u}+\varepsilon(-\Delta)\bar{u}\big)+\Delta^2 u-\Delta f(u)=m.$$

On multiplie par $\bar{u}$, pour $u_\tau \in V$, nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\bar{u}|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+|\Delta u|^2-(\Delta f(u),\bar{u})\leqslant|(m,\bar{u})|,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\bar{u}|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+|\Delta u|^2 &\leqslant -\big(\nabla f(u),\nabla u\big)+c\|m\|_{-1}^2+c'|\nabla u|^2\\
&\leqslant c_1|\nabla u|^2+c\|m\|_{-1}^2\\
&\leqslant c_2|\bar{u}|\;|\Delta u-<u>|+c\|m\|_{-1}^2\\
&\leqslant c'\big(|\bar{u}|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+\frac{1}{2}|\Delta u|^2+c\|m\|_{-1}^2+<u>^2,
\end{aligned}$$

les constantes ne dépendent pas de ε. Grâce au lemme de Gronwall nous avons, en particulier,

$$|\bar{u}(t)|^2+\varepsilon|\nabla u(t)|^2\leqslant|\bar{u}(\tau)|^2+\varepsilon|\nabla u(\tau)|^2e^{c(t-\tau)}+c''<\infty,\qquad \tau\leqslant t<\infty,$$

nous avons donc $u\in L^\infty(\tau,t;V)\cap L^2(\tau,t;V_1)$.

Si $u_\tau\in H^2(\Omega)$ alors, en multipliant (6.1) par $-\Delta u$, et d'après (5.25) et l'estimation $|\nabla u(t)|\leqslant$ const., $\forall t\geqslant\tau$ (J est décroissante), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|\nabla u|^2+\varepsilon|\Delta u|^2\Big)+|\nabla\Delta u|^2 &\leqslant \big|\big(f'(u)\nabla u,\nabla\Delta u\big)\big|+\|m\|_{-1}|\nabla\Delta u|,\\
\frac{d}{dt}\Big(|\nabla u|^2+\varepsilon|\Delta u|^2\Big)+|\nabla\Delta u|^2 &\leqslant c\big(1+\|u\|^2\big)\|u\|_2^2+c'\|m\|_{-1}^2\\
&\leqslant c\Big(|\nabla u|^2+\varepsilon|\Delta u|^2\Big)+c'\|m\|_{-1}^2.
\end{aligned}$$

Nous intégrons entre τ et t et nous avons $u\in L^\infty(\tau,t;H^2(\Omega))\cap L^2(\tau,t;H^3(\Omega))$.

Multiplions maintenant (6.1) par $\Delta^2 u$, pour $u_\tau\in H^3(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|\Delta u|^2+\varepsilon|\nabla\Delta u|^2\Big)+|\Delta^2 u|^2 &\leqslant |\Delta f(u)||\Delta^2 u|+|m||\Delta^2 u|\\
&\leqslant \frac{1}{4}|\Delta^2 u|^2+\frac{1}{4}|\Delta f(u)|^2+\frac{c^2}{4}+\frac{1}{4}|\Delta^2 u|^2,
\end{aligned}$$

et par (5.30)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(|\Delta u|^2+\varepsilon|\nabla\Delta u|^2\Big)+\frac{1}{2}|\Delta^2 u|^2 &\leqslant c',\\
|\Delta u(t)|^2+\varepsilon|\nabla\Delta u(t)|^2+\frac{1}{2}\int_\tau^t|\Delta^2 u(s)|^2ds &\leqslant c'(t-\tau)+|\Delta u_\tau|^2+|\nabla\Delta u_\tau|^2<\infty,
\end{aligned}$$

et $u\in L^\infty(\tau,t;H^3(\Omega))\cap L^2(\tau,t;H^3(\Omega)),\ t\geqslant\tau$ et $t<\infty$.

De plus, en multipliant (6.8) par $\bar u$ et nous procédons comme dans le chapitre précédent, cf. (5.27) et (5.29), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2\Big)+|\nabla\bar u|^2+\frac{1}{2}b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx &\leqslant \|m\|_{-1}\|\bar u\|_{-1}+k_1\\
&\leqslant c\|m\|_{-1}|\nabla\bar u|+k_1\\
&\leqslant \frac{1}{2}|\nabla\bar u|^2+c\|m\|_{-1}^2+k_1,
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2\Big)+|\nabla\bar u|^2+b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx\leqslant 2k_1+2c\|m\|_{-1}^2.$$

En intégrant entre τ et t, $t\geqslant\tau$, et $t<\infty$, nous avons $u\in L^{2p}(\tau,t;L^{2p}(\Omega))\cap L^2(\tau,t;V)$.

6.3 Borné absorbant

Posons $B_\eta:=\bigcup_{|a|\leqslant\eta}\{u\in H^1(\Omega),\ <u>=a\}$.
Nous avons trouvé en multipliant (6.8) par $\bar u$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2\Big)+|\nabla\bar u|^2+b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx\leqslant\frac{1}{2}k_1+\|m\|_{-1}\|\bar u\|_{-1}. \tag{6.15}$$

D'après la relation

$$\|\bar u\|_{-1}^2\leqslant c|\bar u|^2\leqslant c'|\nabla\bar u|^2,$$

nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2\Big)+c_1\Big(\|\bar u\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u|^2\Big)\leqslant k_1(\eta)+c_2=k_2.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\|\bar u(t)\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u(t)|^2 &\leqslant \Big(\|\bar u_\tau\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u_\tau|^2\Big)e^{-c_1(t-\tau)}+\frac{k_2}{c_1}\Big(1-e^{-c_1(t-\tau)}\Big)\\
&\leqslant \Big(\|\bar u_\tau\|_{-1}^2+\varepsilon|\bar u_\tau|^2\Big)e^{-c_1(t-\tau)}+\frac{k_2}{c_1}. \qquad (6.16)
\end{aligned}$$

Cela donne l'existence de t_0 tel que, pour tout $t-\tau \geqslant t_0$,

$$\lim_{(t-\tau)\to\infty} \sup \Big(\|\bar{u}(t)\|_{-1}^2 + \varepsilon |\bar{u}(t)|^2 \Big) \leqslant \rho_0^2 = \frac{k_2}{c_1}, \quad \forall t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R}.$$

Cette relation donne l'existence d'un borné absorbant dans $B_\eta \cap H$. D'après (6.15), il existe t_1 tel que

$$\int_t^{t+r} |\nabla u|^2 \leqslant k_2'(\eta), \quad \forall t-\tau \geqslant t_1,\ r>0.$$

6.3.1 Borné absorbant dans $B_\eta \cap V$

Multiplions (6.1) par u

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + |\Delta u|^2 + 2b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2 dx \leqslant c_1|\nabla u|^2 + |(m,u)|,$$

$$\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + |\Delta u|^2 \leqslant c\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + \frac{1}{c_1}|m|^2.$$

Et grâce au lemme de Gronwall nous obtenons un borné absorbant $\mathcal{B}_1$ dans $B_\eta \cap V$. De plus, il existe t_2 tel que

$$\int_t^{t+r} |\Delta u|^2 dt \leqslant k_3, \quad \text{pour } t-\tau \geqslant t_2,\ r>0.$$

6.3.2 Borné absorbant dans $B_\eta \cap V_1$

Prenons le produit scalaire de (6.1) par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 - \Big(\Delta f(u), \frac{\partial u}{\partial t}\Big) \leqslant |m|\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|.$$

Nous avons, par (5.45), $|\Delta f(u)| \leqslant c|\Delta u|$, donc

$$\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + \Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \varepsilon\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 \leqslant c|\Delta u|^2 + c'|m|^2,$$

et par le lemme de Gronwall nous trouvons un borné absorbant $\mathcal{B}_2$ dans $B_\eta \cap V_1$.

6.4 Un attracteur exponentiel

$\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ étant les bornés absorbants dans $B_\eta \cap V$ et $B_\eta \cap V_1$. Nous considérons le semi-groupe

$$\begin{array}{rcl} S : B_\eta \cap V \subset \ V' & \rightarrow & B_\eta \cap V \subset \ V' \\ u_\tau & \mapsto & u(t). \end{array}$$

Pour $\delta, k > 0$, nous définissons la classe $S_{\delta,k}(\mathcal{B}_2)$ d'opérateurs S par :
$S \in S_{\delta,k}(\mathcal{B}_2)$ si $S : \mathcal{O}_\delta(\mathcal{B}_2) \rightarrow \mathcal{B}_2$, où $\mathcal{O}_\delta(\mathcal{B}_2)$ est un voisinage de $\mathcal{B}_2$ pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 6.1. *Les opérateurs $S(t)$ définis auparavant sont continus pour la topologie de $H^1(\Omega)$.*

Démonstration.
Afin de montrer que l'opérateur $S : (u_\tau, m) \mapsto u(t)$ est continu, nous prenons deux solutions $u_1(t), u_2(t) \in B_\eta \cap V$ correspondant aux données initiales $u_1(\tau), u_2(\tau)$ et aux fonctions m_1, m_2. Posons $u := u_1 - u_2$, $u(\tau) := u_1(\tau) - u_2(\tau)$ et $m := m_1 - m_2$. u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(u + \varepsilon(-\Delta)u\Big) + \Delta^2 u - \Delta\Big(f(u_1) - f(u_2)\Big) = m,$$

multiplions par u

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + |\Delta u|^2 = (f(u_1) - f(u_2), \Delta u) + |(m, u)|.$$

D'après (5.50) et (5.51)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + |\Delta u|^2 \leqslant \frac{1}{2}h(t)^2|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\Delta u|^2 + \frac{1}{2}|m|^2 + \frac{1}{2}|u|^2.$$

$$\frac{d}{dt}\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) \leqslant c\Big(|u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2\Big) + c_1\|m\|^2.$$

En intégrant

$$|u(t)|^2 + \varepsilon|\nabla u(t)|^2 \leqslant e^{c(t-\tau)}\Big(|u(\tau)|^2 + \varepsilon|\nabla u(\tau)|^2\Big) + c_1 \int_\tau^t \|m(s)\|^2 e^{c(t-s)} ds. \quad (6.17)$$

Par cette inégalité nous avons

$$\|u(t)\|^2 \leqslant c_2 e^{c(t-\tau)}\|u(\tau)\|^2 + c_1 \int_\tau^t \|m(s)\|^2 e^{c(t-s)} ds,$$

d'où la continuité. ∎

Nous introduisons l'espace $E(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, 1]$, défini par la norme

$$\|u\|_E^2 := \|u\|_{H^{-1}}^2 + \varepsilon|u|^2, \quad \forall\varepsilon \in [0, 1].$$

Ensuite nous définissons la famille $\{U_m(t, \tau),\ \tau \in \mathbb{R},\ t \geqslant \tau\}$ dans $E(\varepsilon)$, telle que $U_m(t, \tau) := u(t)$, où $u(t)$ est la solution du problème (6.1).

Théorème 6.2. *La famille $\{U_m(t,\tau)\}$ est continue pour la topologie de $H^{-1}(\Omega)$ et pour la topologie de $E(\varepsilon)$, (où les donnée initiales vérifient $\|u(\tau)\|_2 \leqslant R$), i.e, soient $u_1(t) = U_{m_1}(t,\tau)u_1(\tau)$ et $u_2(t) = U_{m_2}(t,\tau)u_2(\tau)$ deux solutions telles que $\|u_i(\tau)\|_2 \leqslant R$, $i = 1, 2$, alors*

$$\|U_{m_1}(t,\tau)u_1(\tau)-U_{m_2}(t,\tau)u_2(\tau)\|_{-1}^2 \leqslant c_R e^{\alpha_R(t-\tau)}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_{-1}^2+\int_\tau^t e^{\alpha(t-s)}\|m(s)\|_{-1}^2 ds, \tag{6.18}$$

et

$$\|U_{m_1}(t,\tau)u_1(\tau)-U_{m_2}(t,\tau)u_2(\tau)\|_E^2 \leqslant c_R e^{K(t-\tau)}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2+\int_\tau^t e^{K(t-s)}\|m(s)\|_E^2 ds, \tag{6.19}$$

où les constantes sont positives et indépendantes de t, τ et ε.

Démonstration.
La démonstration de ce théorème ressemble à celle du Théorème 5.5. Posons $u := u_1 - u_2$, $u(\tau) := u_1(\tau) - u_2(\tau)$ et $< u_1(\tau) >=< u_2(\tau) >$. u vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}u + \varepsilon u\Big) = \Delta u - \ell(t)u+ < f(u_1) > - < f(u_2) > +(-\Delta)^{-1}m, \tag{6.20}$$

$$\partial_t u = -\Delta^2(I-\varepsilon\Delta)^{-1}u+\Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}(\ell(t)u- < f(u_1) > + < f(u_2) >)+(I-\varepsilon\Delta)^{-1}m.$$

$$(-\Delta)^{-1}\partial_t u = \Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}u-(I-\varepsilon\Delta)^{-1}(\ell(t)u- < f(u_1) > + < f(u_2) >)+(-\Delta)^{-1}(I-\varepsilon\Delta)^{-1}m.$$

Multiplions par u

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{-1}^2+|A_1^{-\frac{1}{2}}u|^2 \leqslant c|((I-\varepsilon\Delta)^{-1}\ell(t)u,u)|+\Big|\Big(((-\Delta)(I-\varepsilon\Delta))^{-\frac{1}{2}}m,((-\Delta)(I-\varepsilon\Delta))^{-\frac{1}{2}}u\Big)\Big|. \tag{6.21}$$

Afin de trouver le dernier terme de cette inégalité, nous posons $v := ((-\Delta)(I - \varepsilon\Delta))^{-\frac{1}{2}}m$, i.e, $m = ((-\Delta)(I - \varepsilon\Delta))^{\frac{1}{2}}v$, donc

$$|(-\Delta)^{-\frac{1}{2}}m|^2 = \|m\|_{-1}^2 = ((I - \varepsilon\Delta)v, v) = |v|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2 \geqslant |v|^2.$$

Nous avons alors, par (6.21) et (5.62),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u\|_{-1}^2 + |A_1^{-\frac{1}{2}}u|^2 &\leqslant c\|\ell(t)u\|_{-1}^2 + \|m\|_{-1}\|u\|_{-1}\\ &\leqslant \alpha_R\|u\|_{-1}^2 + \|m\|_{-1}^2. \end{aligned}\tag{6.22}$$

En intégrant, nous avons

$$\|u(t)\|_{-1}^2 \leqslant c_R e^{\alpha_R(t-\tau)}\|u(\tau)\|_{-1}^2 + \int_\tau^t e^{\alpha(t-s)}\|m(s)\|_{-1}^2 ds.$$

Pour montrer (6.19), nous multiplions (6.20) par u

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_E^2+|\nabla u|^2 &\leqslant c|u|^2+|((m,u))_{-1}|\\ &\leqslant K\|u\|_E^2+c_1\|m\|_{-1}^2\leqslant K\|u\|_E^2+c\|m\|_E^2.\end{aligned}$$

En intégrant la dernière inégalité nous trouvons (6.19). ■

D'après ce théorème nous trouvons, pour m correspondant aux deux solutions u_1 et u_2,

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{-1}^2\leqslant c_R e^{\alpha_R(t-\tau)}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_{-1}^2.$$

De même, nous avons, d'après (6.19), les deux estimations

$$\|u_1(\tau+t)-u_2(\tau+t)\|_E^2\leqslant ce^{Kt}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2,\quad t\in\mathbb{R}^+,\ \tau\in\mathbb{R}, \tag{6.23}$$

$$\|U_{m_1}(\tau+t,\tau)u_\tau-U_{m_2}(\tau+t,\tau)u_\tau\|_E^2\leqslant ce^{Kt}\int_\tau^{\tau+t}\|m_1(s)-m_2(s)\|_E^2ds, \tag{6.24}$$

c et K ne dépend pas de ε.

6.4.1 Propriété de régularisation

Nous allons ici montrer cette propriété entre $H^2(\Omega)$ et $E(\varepsilon)$. Nous avons trouvé par (6.16)

$$\|u(t)\|_E^2+\int_\tau^t|\nabla u(s)|^2ds\leqslant ce^{-\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|_E^2+C_M. \tag{6.25}$$

Et nous avons la continuité Lipschitzienne

$$\|U_m(t,\tau)u_1(\tau)-U_m(t,\tau)u_2(\tau)\|_E^2\leqslant ce^{-\alpha(t-\tau)}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2.$$

Nous avons les résultats suivants.

Lemme 6.3. *Soient u_1 et u_2 deux solutions de* (6.1), *de moyenne conservé (i.e., $<u_1>=<u_2>$), nous avons alors*

$$\int_\tau^t\|\partial_t\big(U_m(t,\tau)u_1(\tau)-U_m(t,\tau)u_2(\tau)\big)\|_E^2ds+|\nabla\big(U_m(t,\tau)u_1(\tau)-U_m(t,\tau)u_2(\tau)\big)|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{t-\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2. \tag{6.26}$$

Démonstration.
Posons $u:=u_1-u_2$. u satisfait, pour $m_1=m_2$,

$$\partial_t\Big((-\Delta)^{-1}u+\varepsilon u\Big)-\Delta u+f(u_1)-f(u_2)=0. \tag{6.27}$$

Multiplions (6.27) par $(t-\tau)\dfrac{\partial u}{\partial t}$

$$(t-\tau)\Big(\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\varepsilon|\frac{\partial u}{\partial t}|^2\Big)+\frac{t-\tau}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2\leqslant\frac{t-\tau}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+c(t-\tau)|\nabla u|^2$$

$$\frac{d}{dt}\Big((t-\tau)|\nabla u|^2\Big)+c(t-\tau)\Big(\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2+\varepsilon|\frac{\partial u}{\partial t}|^2\Big)+\leqslant c(t-\tau)|\nabla u|^2+|\nabla u|^2.$$

En intégrant entre τ et t, pour $t>\tau$, nous obtenons, par (6.25), l'estimation (6.26). ■

Lemme 6.4. *Pour u_1 et u_2 les solutions données dans le lemme précédent, nous avons*

$$\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_E^2+\int_\tau^t|\nabla\frac{\partial u(s)}{\partial t}|^2ds\leqslant\frac{c}{t-\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}\Big(\|u(\tau)\|_E^2\Big).\tag{6.28}$$

Démonstration.
Dérivons (6.27), posons $\theta:=\dfrac{\partial u}{\partial t}$,

$$\partial_t\Big((-\Delta)^{-1}\theta+\varepsilon\theta\Big)-\Delta\theta=-\ell(t)\theta-\ell'(t)u.\tag{6.29}$$

Multiplions (6.29) par $(t-\tau)\theta$,

$$\frac{t-\tau}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|_{-1}^2+\varepsilon|\theta|^2\Big)+(t-\tau)|\nabla\theta|^2\leqslant\frac{t-\tau}{2}|\nabla\theta|^2+c_1(t-\tau)\|\theta\|_{-1}^2+c(t-\tau)|\nabla u|^2,$$

$$\frac{d}{dt}\Big((t-\tau)\big(\|\theta\|_{-1}^2+\varepsilon|\theta|^2\big)\Big)+(t-\tau)|\nabla\theta|^2\leqslant c_2(t-\tau)\big(\|\theta\|_{-1}^2+\varepsilon|\theta|^2\big)+\|\theta\|_{-1}^2+\varepsilon|\theta|^2+c(t-\tau)|\nabla u|^2.$$

Intégrons entre τ et t, $t>\tau$, et d'après (6.25) et (6.26) nous obtenons l'estimation (6.28). ■

Par (6.27), nous avons

$$\Delta u-\ell(t)u=\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}u+\varepsilon u\Big):=h(t).\tag{6.30}$$

Nous avons, pour t fixé, $t>\tau$ et $0<\varepsilon<1$,

$$\begin{aligned}|h(t)|^2=|(-\Delta)^{-1}\frac{\partial u}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}|^2&\leqslant\|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\|_{-2}^2+\varepsilon^2|\frac{\partial u}{\partial t}(t)|^2\\ &\leqslant c\Big(\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\|_{-1}^2+\varepsilon|\frac{\partial u(t)}{\partial t}|^2\Big)\leqslant ce^{-\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|_E^2.\end{aligned}\tag{6.31}$$

Multiplions (6.30) par Δu,

$$\begin{aligned}|\Delta u|^2&\leqslant|(h(t),\Delta u)|+|(\ell(t)u,\Delta u)|\\&\leqslant\frac{1}{2}|\Delta u|^2+c|h(t)|^2+|\nabla\ell(t)u||\nabla u(t)|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u\|_2^2 = |\Delta u|^2 &\leqslant c\Big(|h(t)|^2 + |\nabla u(t)|^2\Big)\\ &\leqslant \frac{c_1}{t-\tau} e^{-\alpha(t-\tau)}\|u(\tau)\|_E^2, \quad \text{par (6.26) et (6.31).}\end{aligned}$$

Cette estimation donne la propriété de régularisation entre $H^2(\Omega)$ et $E(\varepsilon)$.

Ensuite, nous démontrons que la famille $\{U_m(t,\tau)\}$ est Hölder continue. Pour cela, nous montrons les résultats suivants.

Lemme 6.5. *Soit $u(t)$ une solution de* (6.1). *Alors, pour $\|u(\tau)\|_2 \leqslant R$, nous avons l'estimation suivante*

$$\int_\tau^t \|\partial_t u(s)\|_E^2 ds \leqslant c|\nabla u(\tau)|^2 + c',$$

c dépend de R et c' dépend de la norme de m.

Démonstration.
Nous multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\Big) - \Delta\bar{u} + f(u) =< f(u) > +(-\Delta)^{-1}m, \tag{6.32}$$

par $\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t}$, notons que $< \dfrac{\partial u}{\partial t} >= 0$,

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + \varepsilon\Big|\frac{\partial u}{\partial t}\Big|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 &\leqslant |(f(u), \frac{\partial u}{\partial t})| + |((m, \frac{\partial u}{\partial t}))_{-1}|\\ &\leqslant c_1|\nabla f(u)|^2 + \frac{1}{2}\Big\|\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|_{-1}^2 + c_2\|m\|_{-1}^2. \end{aligned}\tag{6.33}$$

Nous trouvons une estimation de $|\Delta u(t)|$, pour tout $t \geqslant \tau$. Nous multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u} = -\Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}\bar{u} + \Delta(I-\varepsilon\Delta)^{-1}(f(u)- < f(u) >) + (-\Delta)^{-1}(I-\varepsilon\Delta)^{-1}m,$$

par $\Delta^2 u$, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\Delta u|^2 + |(I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Delta^2 u|^2 \leqslant \Big|\Big((I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Delta f(u), (I-\varepsilon\Delta)^{-\frac{1}{2}}\Delta^2 u\Big)\Big| + \Big|\Big((I-\varepsilon\Delta)^{-1}m, \Delta u\Big)\Big|. \tag{6.34}$$

Pour trouver $|(I-\varepsilon\Delta)^{-1}m|$, nous posons $v := (I-\varepsilon\Delta)^{-1}m$, donc

$$|m|^2 = \Big((I-\varepsilon\Delta)v, (I-\varepsilon\Delta)v\Big) = |v|^2 + 2\varepsilon|\nabla v|^2 + \varepsilon^2|\Delta v|^2 \geqslant |v|^2$$

$$|v|^2 \leqslant |m|^2 \leqslant c\|m\|_{-1}^2,$$

c est indépendante de ε.
Et par (6.34) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Delta u|^2 \leqslant c\big(|\Delta f(u)|^2 + |\Delta u|^2 + \|m\|_{-1}^2\big).$$

D'après (5.45)

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Delta u|^2 \leqslant c|\Delta u|^2 + c'\|m\|_{-1}^2.$$

En intégrant cette relation, notons que $\int_\tau^t \|m\|_{-1}^2 ds < \infty$, nous trouvons

$$|\Delta u(t)|^2 \leqslant c|\Delta u(\tau)|^2 + C \leqslant C', \quad \forall t \geqslant \tau. \tag{6.35}$$

Nous majorons maintenant $|\nabla f(u)|$.

$$\begin{aligned} |\nabla f(u)|^2 &\leqslant c\int_\Omega \big(1+|u|^{4p-4}\big)|\nabla u|^2 dx \\ &\leqslant c\big(\|u\|_{L^\infty}\big)|\nabla u|^2 \\ &\leqslant c\big(\|u\|\ \|u\|_2\big)|\nabla u|^2 \\ &\leqslant c|\nabla u|^2, \quad \text{par (6.35)}, \end{aligned} \tag{6.36}$$

où p est quelconque lorsque $n = 1, 2$ et $p = 2$ lorsque $n = 3$. D'après (6.33)

$$\int_\tau^t \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_E^2 ds \leqslant c|\nabla u(\tau)|^2 + C \leqslant C. \tag{6.37}$$

Et, en particulier,

$$\int_\tau^t \|\frac{\partial u(s)}{\partial t}\|_{-1}^2 ds \leqslant c|\nabla u(\tau)|^2 + C \leqslant C.$$

■

Le lemme suivant donne la continuité de Hölder pour la topologie de $E(\varepsilon)$.

Lemme 6.6. *Pour $u(t) = U_m(t,\tau)u_\tau$ solution de (6.1), où $u_\tau \in B_R := \{u \in B_\eta \cap H^2(\Omega),\ \|u\|_2 \leqslant R\}$, nous avons*

$$\|U_m(t+\tau+s,\tau)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_{E(\varepsilon)} \leqslant c_R|s|^{\frac{1}{2}}, \tag{6.38}$$

$$\|U_m(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_E \leqslant c_R e^{\alpha t}|s|^{\frac{1}{2}}, \tag{6.39}$$

pour $s \geqslant 0$, et les constantes C et $\alpha > 0$ ne dépendent pas de ε.

Démonstration.
Nous avons par (6.37) et pour $u_\tau \in B_R$

$$\begin{aligned}\|U_m(t+\tau+s,\tau)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_{E(\varepsilon)} &= \Big\| \int_{t+\tau}^{t+\tau+s} \frac{\partial u(\theta)}{\partial t} d\theta \Big\|_E \\ &\leqslant \int_{t+\tau}^{t+\tau+s} \Big\| \frac{\partial u(\theta)}{\partial t} \Big\|_E d\theta \\ &\leqslant |s|^{\frac{1}{2}} \int_{t+\tau}^{t+\tau+s} \Big\| \frac{\partial u(\theta)}{\partial t} \Big\|_E^2 d\theta \\ &\leqslant C_R |s|^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Nous avons aussi, par (6.38) et (6.19),

$$\begin{aligned}&\|U_m(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)\|_E \leqslant \\ &\leqslant \big\|U_m(t+s+\tau,t+\tau)\big(U_m(t+\tau,\tau+s)u_\tau\big) - U_m(t+\tau,\tau+s)u_\tau\big\|_E \\ &+ \big\|U_m(t+\tau,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau+s)\big(U_m(\tau+s,\tau)u_\tau\big)\big\|_E \\ &\leqslant C|s|^{\frac{1}{2}} + ce^{K(t-s)}\|u_\tau - U_m(\tau+s,\tau)u_\tau\|_E \\ &\leqslant Ce^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}, \quad s \geqslant 0, \ t \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

■

Corollaire 6.7. *La famille $\{U_m(t,\tau)\}$, $t \geqslant \tau$, est uniformément Hölder continue (pour la topologie de $E(\varepsilon)$, ou $H^{-1}(\Omega)$) dans $[0,T] \times B_R$, $\forall T > 0$, i.e.,*

$$\|U_m(t_1,\tau)u_1(\tau) - U_m(t_2,\tau)u_2(\tau)\|_E \leqslant C_R(T)\Big(\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E + |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}\Big),$$

pour $u_i(\tau) \in B_R$, $t_i \leqslant T$ et la constante $C_R(T)$ dépend de la norme de m et de la norme de $u_i(\tau)$ et ne dépend pas de ε.

La preuve ressemble à celle du **Lemme 5.10**.

6.4.2 Théorème d'existence d'un attracteur exponentiel

Nous allons maintenant montrer l'existence d'un attracteur exponentiel grâce aux estimations précédentes, soit le résultat suivant.

Théorème 6.8. *Le problème* (6.1), (6.2) *et* (6.3) *possède un attracteur exponentiel.*

Démonstration.
Nous avons par (6.16)

$$\|\bar{u}(t)\|_E^2 \leqslant ce^{-\alpha(t-\tau)}\|\bar{u}(\tau)\|_E^2 + C_M. \tag{6.40}$$

Ceci donne l'existence d'un borné absorbant dans $E(\varepsilon)$ pour la famille $\{U_m(t,\tau)\}$. Posons $\mathcal{B} := \{u \in E(\varepsilon),\ \|u\|_E \leqslant R_1\}$, pour R_1 est suffisamment grand et donné par (6.40).
Nous commençons à construire une famille d'attracteurs exponentiels pour le système dynamique discret associé au problème (6.1). $\mathcal{B}$ étant le borné absorbant alors, il existe $T = T(M)$ tel que

$$U_m(\tau + T, \tau)\mathcal{O}_1(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \tag{6.41}$$

et nous construisons des attracteurs exponentiels pour des données initiales appartenant à $\mathcal{B}$.
Nous avons aussi, par la propriété de régularisation,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_2 \leqslant ce^{K(t-\tau)}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E, \quad u_i(\tau) \in \mathcal{B}_2,$$

c, K indépendantes de t, τ et ε. D'après cette estimation et (6.41)

$$U_m(\tau + T, \tau) \in S_{1,K}(\mathcal{B}).$$

Alors, la famille

$$U_m^\tau := U_m(\tau + nT, \tau + \ell T), \quad n, \ell \in \mathbb{Z},\ n \geqslant \ell$$

possède des attracteurs exponentiels dans $E(\varepsilon)$, $\ell \mapsto \mathcal{M}_m(\ell, \tau)$, $\ell \in \mathbb{Z}$, pour le système dynamique discret, qui sont compacts de dimension fractale finie,...(voir [29]).
Par cette construction, nous avons

$$\mathcal{M}_m(\ell, \tau) = \mathcal{M}_m(0, \ell T + \tau), \quad \mathcal{M}_{T_s m}(\ell, \tau) = \mathcal{M}_m(\ell, \tau + s). \tag{6.42}$$

Nous définissons les attracteurs exponentiels pour un temps continu par la relation suivante :

$$\mathcal{M}_m(\tau) := \bigcup_{s\in[0,T]} U_m(\tau, \tau - T - s)\mathcal{M}_m(0, \tau - T - s). \tag{6.43}$$

Nous montrons maintenant que $\tau \mapsto \mathcal{M}_m(\tau)$ est bien un attracteur exponentiel.
<u>Semi-invariance :</u> nous allons montrer

$$U_m(t, \tau)\mathcal{M}_m(\tau) \subset \mathcal{M}_m(t). \tag{6.44}$$

D'après la semi-invariance de $\mathcal{M}_m(0, \tau)$ pour la famille discrète $\{U_m(\tau+\ell T, \tau+nT)\}$ (i.e., $U_m(\tau+\ell T, \tau)\mathcal{M}_m(0, \tau) \subset \mathcal{M}_m(\ell, \tau) = \mathcal{M}_m(0, \tau+\ell T)$), il suffit de vérifier (6.44) pour $t-\tau := \alpha \in [0,T]$ et nous obtenons $U_m(t+\alpha,t)\mathcal{M}_m(t) \subset \mathcal{M}_m(t+\alpha)$, cf. dans le chapitre du problème de Cahn-Hilliard non autonome.

$\mathcal{M}_m(t+s) = \mathcal{M}_{T_s m}(t)$: Nous avons

$$\mathcal{M}_{T_s m}(\ell,\tau) = \mathcal{M}_m(\ell,\tau+s), \quad U_{T_s m}(t,\tau) = U_m(t+s,\tau+s).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_m(t+s) &= \bigcup_{k\in[0,T]} U_m(t+s,t+s-T-k)\mathcal{M}_m(0,t+s-T-k) \\
&= \bigcup_{k\in[0,T]} U_{T_s m}(t,t-T-k)\mathcal{M}_m(0,t-T-k) \\
&= \mathcal{M}_{T_s m}(t).
\end{aligned}$$

$m \mapsto \mathcal{M}_m(t)$ est Hölder continue : prenons m_1 et m_2 différentes. Nous allons montrer

$$\mathrm{dist}_E^{sym}\Big(\mathcal{M}_{m_1}(t), \mathcal{M}_{m_2}(t)\Big) \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-s)}\|m_1(s)-m_2(s)\|_E^2 ds\Big)^k. \tag{6.45}$$

$m \mapsto \mathcal{M}_m(0,\tau)$ est un attracteur exponentiel pour la famille discrète, alors il est Holder continu, i.e.,

$$\mathrm{dist}_E^{sym}\Big(\mathcal{M}_{m_1}(0,\tau), \mathcal{M}_{m_2}(0,\tau)\Big) \leqslant c\Big(\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\beta'(\tau-s)}\|m_1(s)-m_2(s)\|_E^2 ds\Big)^{k'}.$$

Et d'après la définition de $\mathcal{M}_m(t)$; (6.43), et les estimations (6.23) et (6.24) nous trouvons (6.45).

Ensuite nous montrons

$$\mathrm{dist}_E^{sym}\Big(\mathcal{M}_m(t+s), \mathcal{M}_m(t)\Big) \leqslant c|s|^\gamma. \tag{6.46}$$

Puisque $\mathcal{M}_m(0,\tau)$ est un attracteur exponentiel, nous avons alors

$$\mathrm{dist}_E^{sym}\Big(\mathcal{M}_m(0,\tau+s), \mathcal{M}_m(0,\tau)\Big) \leqslant c'|s|^\gamma, \tag{6.47}$$

et

$$\|U_m(t+\tau+s,\tau+s)u_\tau - U_m(t+\tau,\tau)u_\tau\|_E \leqslant C_T e^{Kt}|s|^{\frac{1}{2}}. \tag{6.48}$$

Ce qui donne (6.46).

Propriété d'attraction exponentielle : i.e.,

$$\mathrm{dist}_E\Big(U_m(\tau+t,\tau)\mathcal{B}, \mathcal{M}_m(\tau+t)\Big) \leqslant Q(\|\mathcal{B}\|_E)e^{-\alpha t}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \ t \geqslant 0. \tag{6.49}$$

$\mathcal{M}_m(\ell,\tau)$ est un attracteur exponentiel, donc il vérifie la propriété suivante :

$$\mathrm{dist}_E\Big(U_m(\tau+nT,\tau+\ell T)\mathcal{B},\mathcal{M}_m(n,\tau)\Big)\leqslant ce^{-\alpha(n-\ell)}. \tag{6.50}$$

Par (6.16)

$$\|u\|_E^2\leqslant\|u_\tau\|_E^2e^{-c(t-\tau)}+C, \tag{6.51}$$

et puisque $\mathcal{B}$ est uniformément borné pour la famille $\{U_m(t,\tau)\}$ dans $E(\varepsilon)$ nous trouvons (6.49).

<u>$\mathcal{M}_m(t)$ est compact de dimension fractale finie :</u> Nous avons

$$\mathcal{M}_m(t)=\bigcup_s U_m(t,t-T-s)\mathcal{M}_m(0,t-T-s),$$

$\mathcal{M}_m(0,t-T-s)$ est compact et $U_m(t,t-T-s)$ est continu alors $\mathcal{M}_m(t)$ est compact. D'autre part, $\mathcal{M}_m(\ell,\tau)$ est de dimension fractale finie et nous avons

$$\mathbb{H}_\beta(\mathcal{M}_m(\ell,\tau),E(\varepsilon))\leqslant c_1\mathrm{log}_2\frac{1}{\beta}+c_2. \tag{6.52}$$

Nous avons par les estimations (6.47) et (6.48)

$$\mathrm{dist}_E^{sym}\Big(U_m(t,t-T-s_1)\mathcal{M}_m(0,t-T-s_1),U_m(t,t-T-s_2)\mathcal{M}_m(0,t-T-s_2)\Big)\leqslant c|s_1-s_2|^{k''},$$

$s_1,s_2\in[0,T]$ et $t\in\mathbb{R}$. Alors, pour $\beta>0$ donné, le nombre minimum de β-boules nécessaire pour couvrir $\mathcal{M}_m(t)$ est estimé par

$$N_\beta(\mathcal{M}_m(t),E(\varepsilon))\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\ell=0}^{(\frac{2c}{\beta})^{1/k''}}N_\beta\big(U_m(t,t-T-\ell(\frac{\beta}{2c})^{1/k''})\mathcal{M}_m(0,t-T-\ell(\frac{\beta}{2c})^{1/k''}),E(\varepsilon)\big). \tag{6.53}$$

De plus, puisque la famille $U_m(t,t-T-s)$ est uniformément lipschitzienne, nous avons alors, par (6.52),

$$\mathbb{H}_\beta\big(U_m(t,t-T-\ell(\frac{\beta}{2c})^{1/k''})\mathcal{M}_m(0,t-T-\ell(\frac{\beta}{2c})^{1/k''}),E(\varepsilon)\big)$$

$$\leqslant\mathbb{H}_{\frac{\beta}{L}}\big(\mathcal{M}_m(0,t-T-\ell(\frac{\beta}{2c})^{1/k''}),E(\varepsilon)\big)\leqslant\frac{c_1'}{k''}\mathrm{log}_2\frac{1}{\beta}+c_2'. \tag{6.54}$$

D'après (6.53) et (6.54) nous avons

$$\mathbb{H}_\beta(\mathcal{M}_m(t),E(\varepsilon))\leqslant\frac{C}{k''}\mathrm{log}_2\frac{1}{\beta}+C'.$$

■

6.5 L'attracteur uniforme

6.5.1 Orientation

Afin de trouver l'attracteur uniforme du problème (6.1), (6.2) et (6.3) nous définissons des symboles et la famille $\{U_m(t,\tau)\}$. Pour cela, nous écrivons (6.1) sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(I+\varepsilon(-\Delta)\big)u = -\Delta^2 u + \Delta f(u) + m := A_{m(t)}u. \tag{6.55}$$

m est appelée le symbole de l'équation (6.55).
Nous définissons ensuite l'ensemble $\{T(h),\ h\in\mathbb{R}\}$ par

$$T(h)m(s) := m(s+h), \quad s,h\in\mathbb{R},$$

et les symboles $\mathcal{H}(m) := \Sigma$ par

$$\Sigma := \overline{\{T(h)m,\ h\in\mathbb{R}\}},$$

où la fermeture est dans l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R},E(\varepsilon))$. Notons que par cette définition nous avons

$$T(h)\Sigma = \Sigma, \quad \forall h\in\mathbb{R}.$$

La fonction $m(s)$ est translation bornée dans $L^2_{loc}(\mathbb{R},E(\varepsilon))$ car

$$\|m\|^2_{L^2_b} := \|m\|^2_{L^2_{loc}(\mathbb{R},E(\varepsilon))} = \sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|m(s)\|^2_{E(\varepsilon)}ds < \infty.$$

Ensuite, nous définissons la famille $\{U_m(t,\tau),\ t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}\}$ dans $E(\varepsilon)$ par

$$\begin{array}{rccc} U_m(t,\tau): & E(\varepsilon) & \to & E(\varepsilon) \\ & u_\tau & \mapsto & u(t), \end{array}$$

où $u(t)$ est la solution du problème (6.1). D'après l'unicité et ce qui a précédé nous avons

$$U_{T(h)m}(t,\tau) = U_m(t+h,\tau+h), \quad \forall h\geqslant 0,\ t\geqslant\tau,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

6.5.2 Estimations importantes

Multiplions (6.8) par $\bar{u}$ et d'après (5.26), (5.27) et (5.29) nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}\|^2_{-1}+\varepsilon|\bar{u}|^2\Big) + |\nabla\bar{u}|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant \frac{1}{2}k_1 + \|m\|_{-1}\|\bar{u}\|_{-1},$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|^2_E + c\|\bar{u}\|^2_E \leqslant c_1\|m\|^2_E + k_1,$$

où les constantes c, c_1 et k_1 sont positives et ne dépendent pas de ε. Grâce au Lemme 2.15 nous obtenons l'estimation suivante

$$\|\bar{u}(t)\|_E^2 \leqslant \|\bar{u}_\tau\|_E^2 e^{-c(t-\tau)} + (1+c^{-1})\Big(k_1 + c_1\|m\|_{L_b^2}^2\Big) < \infty. \tag{6.56}$$

D'autre part, en multipliant (6.1) par u, nous procédons comme auparavant nous trouvons l'estimation suivante

$$|u(t)|^2 + \varepsilon|\nabla u(t)|^2 \leqslant \Big(|u_\tau|^2 + \varepsilon|\nabla u_\tau|^2\Big)e^{c(t-\tau)} + c'e^{c\tau}, \tag{6.57}$$

les constantes sont indépendantes de ε.

Estimation pour la différence entre deux solutions

Posons $u(t) := u_1(t) - u_2(t) = U_{m_1}(t,\tau)u_{1\tau} - U_{m_2}(t,\tau)u_{2\tau}$, $m := m_1 - m_2$ et $u(\tau) = u_{1\tau} - u_{1\tau}$ et supposons $< u_{1\tau} >=< u_{2\tau} >$. u vérifie le problème suivant

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big((-\Delta)^{-1}u + \varepsilon u\Big) - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) =< f(u_1) - f(u_2) > +(-\Delta)^{-1}m.$$

En multipliant par u, notons que $< u >= 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_E^2 + |\nabla u|^2 \leqslant c|u|^2 + |((m,u))_{-1}|.$$

ceci donne, en particulier,

$$\frac{d}{dt}\|u\|_E^2 \leqslant \|u\|_E^2 + \|m\|_E^2.$$

En intégrant nous avons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_E^2 \leqslant \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E^2 e^{c(t-\tau)} + c'e^{ct}\|m_1 - m_2\|_{L_b^2}^2, \tag{6.58}$$

où les constantes ne dépendent pas de ε.

6.5.3 Théorème d'existence d'attracteur uniforme

Afin d'appliquer Théorème 4.23 nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 6.9. *La famille $\{U_m(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ m \in \Sigma\}$, associée au problème* (6.1), (6.2) *et* (6.3), *est uniformément bornée, $(E(\varepsilon)\times\Sigma; E(\varepsilon))$-continue (i.e., $(u,m) \mapsto U_m(t,\tau)$ est continue pour tout $t \geqslant \tau$) et elle possède un ensemble compact qui attire uniformément les bornés de $E(\varepsilon)$, i.e., il existe $\mathcal{B}$ un ensemble compact dans $E(\varepsilon)$ tel que*

$$\forall B \subset E(\varepsilon) \text{ un borné, alors } \lim_{t\to\infty}\sup_{m\in\Sigma} dist(U_m(t,\tau)B, \mathcal{B}) = 0.$$

Démonstration.
Nous définissons l'espace $E_1(\varepsilon)$ par la norme

$$\|u\|_{E_1}^2 := |u|^2 + \varepsilon|\nabla u|^2.$$

Puisque les injections $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ sont compactes alors l'injection $E_1(\varepsilon) \subset E(\varepsilon)$ est compacte.
D'après l'estimation (6.56) nous trouvons que la famille $\{U_m(t,\tau),\ m \in \Sigma\}$ est uniformément bornée dans $E(\varepsilon)$. Cette estimation montre aussi que l'ensemble $\mathcal{B}_0 := \{u \in E(\varepsilon),\ \|u\|_E^2 \leqslant R^2\}$, où R est donnée par $R^2 = (1+c^{-1})\Big(k_1 + c_1\|m\|_{L_b^2}^2\Big)$, est uniformément absorbant. L'ensemble $\mathcal{B} := \bigcup_{m\in\Sigma}\bigcup_{\tau\in\mathbb{R}} U_m(\tau+1,\tau)\mathcal{B}_0$ est également uniformément absorbant. D'après (6.57), l'ensemble $\mathcal{B}$ est borné dans $E_1(\varepsilon)$ et, alors, $\mathcal{B}$ est compact dans $E(\varepsilon)$, i.e., la famille $\{U_m(t,\tau)\}$ est uniformément compacte.
L'estimation (6.58) implique que la famille $\{U_m(t,\tau),\ m \in \Sigma\}$ est $(E(\varepsilon)\times\Sigma; E(\varepsilon))$-continue. ■

D'après la dernière proposition et grâce au Théorème 4.23, nous avons l'existence d'un attracteur uniforme.
Ensuite, nous allons construire un attracteur compact pour le problème (6.1) dans $E(\varepsilon)\times\Sigma$. Pour cela, nous définissons une famille d'opérateurs $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$ dans $E(\varepsilon)\times\Sigma$ comme suit :

$$\begin{aligned} S(t) : E(\varepsilon)\times\Sigma &\rightarrow E(\varepsilon)\times\Sigma \\ (u,m) &\mapsto (U_m(t,0)u, T(t)m). \end{aligned}$$

Alors $S(t)$ est un semi-groupe dans $E(\varepsilon)\times\Sigma$ (cf. chapitre de Cahn-Hilliard non-autonome). Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 6.10. *([15]) Supposons que la famille $\{U_m(t,\tau),\ t \geqslant \tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ m \in \Sigma\}$ est $(E(\varepsilon)\times\Sigma; E(\varepsilon))$-continue et elle possède un ensemble compact qui attire uniformément tous les bornés de $E(\varepsilon)$. Alors le semi-groupe $S(t)$ défini comme auparavant possède un attracteur compact $\mathcal{A}$ qui est invariant par rapport à $S(t)$.*
De plus, si Π_1 et Π_2 sont des projecteurs de $E(\varepsilon)\times\Sigma$ dans $E(\varepsilon)$ et dans Σ respectivemet, i.e., $\Pi_1(u,m) = u$, $\Pi_2(u,m) = m$, alors

1. *$\Pi_1\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_\Sigma$ est l'attracteur uniforme pour $\{U_m(t,\tau),\ m \in \Sigma\}$,*

2. *$\Pi_2\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 = \Sigma$,*

3. *l'attracteur compact de ce problème et l'attracteur uniforme vérifient respectivement*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{m\in\Sigma} \mathcal{K}_m(0)\times\{m\}, \qquad \mathcal{A}_\Sigma = \mathcal{A}_1 = \bigcup_{m\in\Sigma} \mathcal{K}_m(0),$$

où $\mathcal{K}_m(0)$ est la section du noyau $\mathcal{K}_m$ de la famille $\{U_m(t,\tau),\ m \in \Sigma\}$ au temps $t = 0$.

6.6 L'attracteur rétrograde

6.6.1 Préliminaires

Afin de trouver un attracteur rétrograde pour le problème (6.1), (6.2) et (6.3) nous appliquons les résultats trouvés dans [11] et [35]. Pour cela, nous définissons une famille d'applications $\{\varphi_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}^+}$, telles que

$$\begin{aligned} \varphi_\tau : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ \varphi_\tau t &= \tau + t, \quad t \in \mathbb{R},\ \tau \geqslant 0. \end{aligned}$$

Nous définissons l'application ϕ par

$$\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times E(\varepsilon) \to E(\varepsilon),$$

$$\phi(\tau, t, u_\tau) = u(\tau + t; t, u_\tau), \quad \forall t \in \mathbb{R},\ \tau \geqslant 0,\ u_\tau \in E(\varepsilon). \tag{6.59}$$

D'après (6.19), l'application $\phi(\tau, t, \cdot)$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $\tau \geqslant 0$, est continue. Et par l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.1), nous avons

$$\phi(\tau + s, t, u_\tau) = \phi(\tau, s + t, \phi(s, t, u_\tau)), \quad t \in \mathbb{R},\ \tau, s \geqslant 0,\ u_\tau \in E(\varepsilon). \tag{6.60}$$

Par conséquence l'application $\phi(\tau, t, \cdot)$, définie par (6.59), est un cocycle continu dans $E(\varepsilon)$. Alors, ϕ est faiblement continu et nous avons le résultat suivant, la démonstration peut être consultée dans [48], où l'auteur a montré ce résultat pour une famille de processus de la forme $\{U_{m_\tau}(t, \tau)\}$.

Proposition 6.11. *Soit $\{u_{\tau_n}\} \subset E(\varepsilon)$ une suite faiblemet convergente dans $E(\varepsilon)$ vers un élément $u_\tau \in E(\varepsilon)$. Alors*

$$\phi(\tau, t - \tau, u_{\tau_n}) \rightharpoonup \phi(\tau, t - \tau, u_\tau) \ \ \textit{faiblement dans } E(\varepsilon),\ \textit{pour tout } \tau \geqslant 0,\ t \in \mathbb{R},$$

$$\phi(\cdot - \tau, \tau, u_{\tau_n}) \rightharpoonup \phi(\cdot - \tau, \tau, u_\tau) \ \ \textit{faiblement dans } L^2(\tau, T; H^{-1}(\Omega)),\ \textit{pour tout } \tau < T.$$

Soit $\mathcal{R}_c$ l'ensemble des fonctions $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ telles que

$$\lim_{t \to -\infty} e^{ct} r^2(t) = 0, \tag{6.61}$$

et $\mathcal{D}$ la classe de toutes les familles $\hat{D} = \{D(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ telles que $D(t) \subset \bar{B}(0, r_{\hat{D}}(t))$, pour $r_{\hat{D}} \in \mathcal{R}_c$, où $\bar{B}(0, r_{\hat{D}}(t))$ est une boule fermée dans $E(\varepsilon)$ centrée en zéro avec le rayon $r_{\hat{D}}(t)$.

6.6.2 L'existence d'un attracteur rétrograde

Théorème 6.12. *Supposons que* $m \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; E(\varepsilon))$ *est telle que*

$$\int_{-\infty}^{t} e^{c\zeta} \|m(\zeta)\|_E^2 < +\infty, \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}. \tag{6.62}$$

Alors, il existe un attracteur global rétrograde appartenant à $\mathcal{D}$ *pour le cocycle* ϕ *définie par* (6.59).

Démonstration.
L'idée de la preuve est de montrer que le cocycle ϕ est continu, asymptotiquement compact et il existe un borné absorbant rétrograde, afin d'appliquer le Théorème 2.25. Par ce qui a précédé ϕ est continu.

L'existence d'un borné absorbant rétrograde :
Soit $t \in \mathbb{R}$, $\tau \geqslant 0$ et $u_\tau \in E(\varepsilon)$ fixe, et posons

$$u(r) := u(r; t-\tau, u_\tau) = \phi(r - t + \tau, t - \tau, u_\tau) \;\text{ pour } r \geqslant t - \tau. \tag{6.63}$$

En multipliant (6.32) par $\bar{u}$, nous procédons comme auparavant, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + c\|\bar{u}\|_E^2 \leqslant k_1 + c_1\|m\|_E^2,$$

où les constantes c, c_1 et k_1 sont positives et ne dépendent pas de ε. En l'intégrant entre $t-\tau$ et t

$$e^{ct}\|\bar{u}(t)\|_E^2 \leqslant e^{c(t-\tau)}\|u(\tau)\|_E^2 + \frac{1}{c}\int_{t-\tau}^{t} e^{cs}\|m(s)\|_E^2 ds + k_1 e^{c\tau}. \tag{6.64}$$

Pour $\hat{D} \in \mathcal{D}$ donné, nous avons, par (6.63) et $\|u\|_E \leqslant \|\bar{u}\|_E + < u >$,

$$\|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_E^2 \leqslant e^{-c\tau} r_{\hat{D}}^2(t-\tau) + \frac{e^{-ct}}{c}\int_{-\infty}^{t} e^{c\zeta}\|m(\zeta)\|_E^2 d\zeta + k_1' e^{c(\tau - t)}, \tag{6.65}$$

pour tout $u_\tau \in D(t-\tau)$, $t \in \mathbb{R}$, $\tau \geqslant 0$.
Soit $R(t)$ le nombre non négatif donné, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par

$$\big(R(t)\big)^2 = \frac{2e^{-ct}}{c}\int_{-\infty}^{t} e^{c\zeta}\|m(\zeta)\|_E^2 d\zeta, \tag{6.66}$$

et prenons la famille $\hat{B}$ dans $E(\varepsilon)$ définie par

$$B(t) = \{u \in E(\varepsilon),\; \|u\|_E \leqslant R(t)\}. \tag{6.67}$$

Notons que $\hat{B} \in \hat{D}$, et en utilisant (6.61), nous avons

$$\lim_{t-\tau\to\infty} k_1' e^{c(\tau-t)} = 0,$$

alors, il existe $t_0 \geqslant 0$ tel que

$$k_1' e^{c(\tau-t)} < \frac{1}{2}\alpha, \quad \forall t-\tau \geqslant t_0, \qquad \alpha > 0 \text{ assez petit.}$$

De même, il existe $t_1 \geqslant 0$ tel que

$$e^{-c\tau} r_{\hat{D}}^2(t-\tau) < \frac{1}{2}\alpha, \quad \forall t-\tau \geqslant t_1.$$

D'parès (6.65)

$$\|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_E^2 \leqslant e^{-c\tau} r_{\hat{D}}^2(t-\tau) + \frac{1}{2}\big(R(t)\big)^2 + \frac{1}{2}\alpha < \alpha + \frac{1}{2}\big(R(t)\big)^2 < \big(R(t)\big)^2,$$

pour $t - \tau \geqslant \max\{t_0, t_1\}$ et $\alpha > 0$ assez petit. Cela montre que $\hat{B}$ est absorbant rétrograde dans $E(\varepsilon)$.

ϕ est asymptotiquement compacte :
Fixons $\hat{D} \in \mathcal{D}$, $t \in \mathbb{R}$, une suite (τ_n), $\tau_n \to \infty$, et une suite $u_{\tau_n} \in D(t-\tau_n)$. Nous allons démontrer que la suite $(\phi(\tau_n, t-\tau_n, u_{\tau_n}))$ contient une suite extraite qui converge dans $E(\varepsilon)$.
$\hat{B}$ est absorbant rétrograde, cela implique que, pour tout $k \geqslant 0$, il existe $\tau_{\hat{D}}(k) \geqslant 0$ satisfait

$$\phi(\tau, t-\tau-k, D(t-\tau-k)) \subset B(t-k), \quad \forall \tau \geqslant \tau_{\hat{D}}(k).$$

Alors, pour $\tau \geqslant \tau_{\hat{D}}(k) + k$, $\phi(\tau-k, t-\tau, D(t-\tau)) \subset B(t-k)$, i.e., il existe une suite $\{w_k,\ k \geqslant 0\} \subset E(\varepsilon)$, où $w_k \in B(t-k)$, et une suite $\{(\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\} \subset \{(\tau_n, u_{\tau_n})\}$ telles que

$$\phi(\tau_{n'} - k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}) \rightharpoonup w_k \text{ faible dans } E(\varepsilon).$$

D'après la Proposition 6.11, nous avons

$$\begin{aligned}
w_0 &= (\text{faible}) \lim_{n'\to\infty} \phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}) \\
&= (\text{faible}) \lim_{n'\to\infty} \phi\big(k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\big) \\
&= \phi\big(k, t-k, (\text{faible}) \lim_{n'\to\infty} \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\big),
\end{aligned}$$

i.e., $w_0 = \phi(k, t-k, w_k)$, $\forall k \geqslant 0$. Alors

$$\|w_0\|_E \leqslant \liminf_{n'\to\infty} \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E. \tag{6.68}$$

Nous démontrons ensuite

$$\limsup_{n'\to\infty} \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E \leqslant \|w_0\|_E. \tag{6.69}$$

Pour cela, nous multiplions (6.32) par $\bar{u}$, nous obtenons, en particulier,

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + c\|\bar{u}\|_E^2 \leqslant k_1 + 2((m,\bar{u}))_{-1}.$$

En intégrant entre $t-\tau$ et t

$$\begin{aligned}\|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_E^2 &\leqslant k_1 e^{c(\tau-t)} + \|u_\tau\|_E^2 e^{-c\tau}\\ &\quad +2\int_{t-\tau}^{t} e^{c(\zeta-t)}((m(\zeta), \phi(\zeta-t+\tau, t-\tau, u_\tau)))_{-1} d\zeta. \end{aligned}\tag{6.70}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\phi\big(k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\big) &= \phi(k+\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\\ &= \phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}),\end{aligned}$$

alors par (6.70)

$$\begin{aligned}\|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E^2 &= \|\phi\big(k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\big)\|_E^2\\ &\leqslant k_1 e^{c(k-t)} + e^{-ck}\|\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E^2\\ &\quad +2\int_{t-k}^{t} e^{c(\zeta-t)}((m(\zeta), \phi\big(\zeta-t+k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\big)))_{-1} d\zeta.\end{aligned}\tag{6.71}$$

Or,

$$\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}) \in B(t-k), \quad \forall \tau_{n'} \geqslant \tau_{\hat{D}}(k)+k,\ k\geqslant 0,$$

alors

$$\limsup_{n'\to\infty}\Big(e^{-ck}\|\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E^2\Big) \leqslant e^{-ck}R^2(t-k).$$

Nous avons

$$\phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}) \rightharpoonup w_k \ \text{ faiblement dans } E(\varepsilon),$$

alors, d'après la Proposition 6.11,

$$\phi\big((\cdot-t+k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\big) \rightharpoonup \phi(\cdot-t+k, t-k, w_k) \text{ faible dans } L^2(t-k,t;H^{-1}(\Omega)).$$

Donc

$$\lim_{n'\to\infty}\int_{t-k}^{t} e^{c(\zeta-t)}((m(\zeta), \phi(\zeta-t+k, t-k, \phi(\tau_{n'}-k, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}}))\ ))_{-1} d\zeta$$

$$= \int_{t-k}^{t} e^{c(\zeta-t)}((m(\zeta), \phi(\zeta - t + k, t - k, w_k)\ ))_{-1} d\zeta.$$

Par (6.71)

$$\limsup_{n'\to\infty} \|\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E^2 \leqslant k_1 e^{c(k-t)} + e^{-ck}\big(R(t-k)\big)^2$$

$$+2\int_{t-k}^{t} e^{c(\zeta-t)}((m(\zeta), \phi(\zeta-t+k, t-k, w_k)\ ))_{-1} d\zeta. \quad (6.72)$$

D'autre part, nous avons par (6.70)

$$\|w_0\|_E^2 = \|\phi(k, t-k, w_k)\|_E^2 \leqslant k_1 e^{c(k-t)}$$

$$+\|w_k\|_E^2 e^{-ck} + 2\int_{t-k}^{t} e^{c(\zeta-t)}((m(\zeta), \phi(\zeta-t+k, t-k, w_k)\ ))_{-1} d\zeta. \quad (6.73)$$

Nous déduisons par (6.72) et (6.73)

$$\limsup_{n'\to\infty} \|\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E^2 \leqslant e^{-ck}\big(R(t-k)\big)^2 + \|w_0\|_E^2 - \|w_k\|_E^2 e^{-ck}$$

$$\leqslant e^{-ck}\big(R(t-k)\big)^2 + \|w_0\|_E^2, \quad (6.74)$$

où

$$e^{-ck}\big(R(t-k)\big)^2 = \frac{2e^{-c(t+k)}}{c}\int_{-\infty}^{t-k} e^{c\zeta}\|m(\zeta)\|_E^2 d\zeta \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

alors, par (6.74), nous obtenons (6.69). D'après (6.68) et (6.69)

$$\lim_{n'\to\infty} \|\phi(\tau_{n'}, t - \tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})\|_E^2 = \|w_0\|_E^2.$$

Ceci implique, avec la convergence faible, la convergence forte dans $E(\varepsilon)$ de $\phi(\tau_{n'}, t-\tau_{n'}, u_{\tau_{n'}})$ vers w_0, et donc ϕ est asymptotiquement compact.
En appliquant le Théorème 2.25 nous avons l'existence d'une famille d'attracteurs rétrogrades dans $E(\varepsilon)$ de la forme

$$\hat{\mathcal{A}} := \Big\{\mathcal{A}(t),\ \Lambda(\hat{B}, t) = \bigcap_{s\geqslant 0} \overline{\Big(\bigcup_{\tau\geqslant s} \phi(\tau, \varphi_{-\tau}t, B(\varphi_{-\tau}t))\Big)},\ t\in\mathbb{R},\ \tau\geqslant 0\Big\}, \quad (6.75)$$

où $\hat{B}$ est la famille d'ensembles absorbants rétrogrades définie par (6.67). Ceci n'assure pas l'unicité. ■

6.6.3 L'unicité de l'attracteur

Nous démontrons que l'attracteur global rétrograde défini par (6.75) est unique. Pour cela il faut montrer que $\hat{\mathcal{A}}$ est une famille bornée rétrograde, i.e., $\hat{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}$, voir la remarque 4.12.
L'idée de la preuve est de montrer que l'application $\phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ admet une décomposition de la forme

$$\phi(\tau, \varphi_{-\tau}t, B(t)) = P(\tau,t) + N(\tau,t), \tag{6.76}$$

où, $\lim_{\tau\to\infty} \|P(\tau,t)\|_E = 0$, et $N(\tau,t)$ est un sous-ensemble compact dans $E(\varepsilon)$. Pour notre problème, $\hat{B}$ est une famille d'ensembles absorbants rétrogrades et ϕ admet la décomposition (6.76), où $P(\tau,t) = 0$ et $N(\tau,t)$ est un sous-ensemble compact dans $E(\varepsilon)$ (puisque ϕ est asymptotiquement compact dans $E(\varepsilon)$). De plus, si on montre l'estimation suivante

$$\|N(\tau,t)\|_E = h < \infty, \tag{6.77}$$

alors $\hat{\mathcal{A}}$ est une famille bornée rétrograde, et nous avons l'unicité de l'attracteur d'après le Lemme 4.13 et le Lemme 4.14.
Pour cela, en multipliant (6.32) par $\bar{u}$ nous obtenons (6.65) et par définition de l'attracteur rétrograde ; (6.75), nous avons

$$\|N(\tau,t)\|_E^2 = \|\phi(\tau, t-\tau, u_\tau)\|_E^2 < \big(R(t)\big)^2 < \infty, \qquad \text{(par (6.62))}$$

pour $u_\tau \in B$, et $t-\tau \geqslant \max\{t_0,t_1\}$. Nous avons alors l'unicité de l'attracteur.

6.6.4 Dimension de l'attracteur

Nous allons montrer ici que la dimension de l'attracteur rétrograde global du problème de Cahn-Hilliard visqueux est finie dans l'espace $E(\varepsilon)$. Pour cela, nous appilquons le résultat suivant.

Théorème 6.13. *([10] et Théorème 4.16 pour le modèle de Cahn-Hilliard)*
Supposons qu'il existe $K_0, K_1, \theta > 0$, telles que

$$\|\mathcal{A}(t)\|_E^+ := \sup_{y\in\mathcal{A}(t)} \|y\|_E \leqslant K_0|t|^\theta + K_1, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{6.78}$$

et, pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe $T^* = T^*(t)$, $\ell = \ell(t,T^*) \in [1,+\infty)$, $\delta = \delta(t,T^*) \in (0, 1/\sqrt{2})$ et $N = N(t)$, telles que
pour tout $u, v \in \mathcal{A}(\tau), \tau \leqslant t - T^*$,

$$\|\phi(T^*,\tau,u) - \phi(T^*,\tau,v)\|_E \leqslant \ell\|u-v\|_E, \tag{6.79}$$

$$\|Q_N\big(\phi(T^*,\tau,u) - \phi(T^*,\tau,v)\big)\|_E \leqslant \delta\|u-v\|_E, \tag{6.80}$$

où Q_N est le projecteur de $E(\varepsilon)$ dans un sous espace $E(\varepsilon)_N^\perp$ de la dimension $N \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $\eta = \eta(t) > 0$, tel que $\sigma = \sigma(t) = (6\sqrt{2}\ell)^N(\sqrt{2}\delta)^\eta < 1$, nous obtenons l'inégalité suivante

$$d_{E(\varepsilon)}(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant N + \eta. \tag{6.81}$$

Dans ce qui suit nous supposons que m vérifie l'hypothèse suivante :

$$\exists r \geqslant 0, \quad \|m(t)\|_E \leqslant c_1|t|^r + c_2, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{6.82}$$

ainsi que les hypothèses du Théorème 6.12. Nous avons les résultats suivants.

Lemme 6.14. *Pour m vérifie* (6.82) *nous avons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'existence de $B_0(t)$, borné dans $E(\varepsilon)$, tel que*

$$\phi(t-\tau, \tau, D(\tau)) \subset B_0(t), \quad \forall \hat{D} \in \mathcal{D}. \tag{6.83}$$

Démonstration.
Multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\big) - \Delta\bar{u} + f(u) =< f(u) > +(-\Delta)^{-1}m,$$

par $\bar{u}$, procédons comme précédemment, nous avons

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + |\nabla u|^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant 2k_1 + c\big(c_1|s|^r + c_2\big)^2, \tag{6.84}$$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + c\|\bar{u}\|_E^2 + b_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx \leqslant 2k_1 + c\big(c_1|s|^r + c_2\big)^2.$$

Grâce au lemme de Gronwall, $\|u\|_E \leqslant \|\bar{u}\|_E + m_0$,

$$\|u(t)\|_E^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|\bar{u}_\tau\|_E^2 + m_0^2 + \int_\tau^t e^{-c(t-s)}\big(2k_1 + c(c_1|s|^r + c_2)^2\big)ds,$$

donc la boule

$$B_0(t) := \{y \in E(\varepsilon), \quad \|u\|_E \leqslant \sqrt{K(t)+\alpha}\};$$

$$K(t) := \int_{-\infty}^t e^{-c(t-s)}\big(2k_1+c(c_1|s|^r+c_2)^2\big)ds \quad \text{et} \quad \alpha = m_0^2+e^{-c(t-\tau)}\|\bar{u}_\tau\|_E^2 \geqslant 0, \tag{6.85}$$

vérifie (6.83). ■

Lemme 6.15. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t_0 < t$, il existe $B_1(t_0, t)$ borné dans $E_1(\varepsilon)$ et compact dans $E(\varepsilon)$ tel que,*
$\forall \hat{D} \in \mathcal{D}$, il existe $T = T(\hat{D}, t_0) < t_0$,

$$\phi(t-\tau, \tau, D(\tau)) \subset B_1(t_0, t), \qquad \forall \tau \leqslant T.$$

Démonstration.
Multiplions

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2 u - \Delta f(u) = m,$$

par u

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2\big)+|\Delta u|^2+b_{2p}\int_\Omega u^{2p-2}|\nabla u|^2dx\leqslant c\|u\|^2_{E_1}+c'|m|^2,$$

$$\frac{d}{dr}\|u\|^2_{E_1}\leqslant c'\|m(r)\|^2_E+c\|u\|^2_{E_1}. \tag{6.86}$$

Posons $a_1=a_1(t)=\int_{t_0}^t|m(r)|^2dr,\quad a_2=a_2(t)=e^{c(t-t_0)}$. supposons que $t_0\leqslant s\leqslant r\leqslant t$ et multiplions (6.86) par $e^{-c(r-t_0)}$

$$\frac{d}{dr}\big(e^{-c(r-t_0)}\|u\|^2_{E_1}\big)\leqslant c'|m(r)|^2e^{-c(r-t_0)}\leqslant c'|m(r)|^2.$$

Intégrons entre s et t

$$\|u(t)\|^2_{E_1}\leqslant e^{c(t-s)}\|u(s)\|^2_{E_1}+e^{c(t-t_0)}\int_s^t|m(r)|^2dr,$$

$$\begin{aligned}|u|^2+\varepsilon|\nabla u|^2 &\leqslant 2\big(|\bar{u}|^2+<u>^2\big)+\varepsilon|\nabla u|^2\\ &\leqslant (c+\varepsilon)|\nabla u|^2+2m_0^2.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\|u(t)\|^2_{E_1}\leqslant\Big((c+\varepsilon)|\nabla u|^2+2m_0^2+a_1\Big)a_2.$$

Enfin, intégrons par rapport à s sur (t_0,t)

$$(t-t_0)\|u(t)\|^2_{E_1}\leqslant\Big((c+\varepsilon)\int_{t_0}^t|\nabla u(s)|^2ds+\big(a_1+2m_0^2\big)(t-t_0)\Big)a_2.$$

Le terme $\int_{t_0}^t|\nabla u(s)|^2ds$ est majoré par (6.84) comme suit ;

$$\int_{t_0}^t|\nabla u(s)|^2ds\leqslant R(t_0,t),\quad R(t_0,t)=2k_1(t-t_0)+c\int_{t_0}^t\big(c_1|s|^r+c_2\big)^2ds+K(t)+\alpha.$$

Alors, l'ensemble

$$B_1(t_0,t):=\Big\{u\in E_1(\varepsilon),\quad \|u\|^2_{E_1}\leqslant\Big((c+\varepsilon)\frac{R(t_0,t)}{t-t_0}+a_1+2m_0^2\Big)a_2\Big\}$$

est l'ensemble recherché. ■

Théorème 6.16. *Le cocycle ϕ possède un attracteur global rétrograde $\hat{\mathcal{A}}=\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$. De plus, $\exists K_0,\ K_1,\ \theta>0$ telles que*

$$\|\mathcal{A}(t)\|^+_E\leqslant K_0|t|^\theta+K_1,\quad \forall t\in\mathbb{R}, \tag{6.87}$$

i.e., $\hat{\mathcal{A}}\in\mathcal{D}$.

Démonstration.
Nous avons déjà montré l'existence d'une famille d'attracteurs rétrogrades, et par l'unicité, i.e., la famille $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ est bornée rétrograde, nous avons $\hat{\mathcal{A}} \in \mathcal{D}$. Nous trouvons (6.87).
Puisque $\mathcal{A}(t) \subset B_0(t)$ (par (6.83)), nous avons

$$\|B_0(t)\|_E^+ := \sup_{y\in B_0(t)} \|y\|_E \leqslant \sqrt{K(t)+\alpha},$$

où $K(t)$ et α sont donnés par (6.85). Nous obtenons de ce calcul, l'existence de $r_1 > 0$, R_1 et R_2 tels que

$$\|B_0\|_E^+ \leqslant R_1|t|^{r_1} + R_2,$$

ce qui donne (6.87). ■

Théorème 6.17. *L'attracteur global rétrograde du problème de Cahn-Hilliard visqueux est de dimension finie,*

$$d_E(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) < \infty.$$

De plus, il existe $L_1 > 0$, dépend de Ω, de ε et de n, telle que

$$d_E(\mathcal{A}(t)) \leqslant d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant L_1(C)^{\frac{n}{2}}, \tag{6.88}$$

où C est la constante donnée par $f'(s) \geqslant -C$.

Démonstration.
Pour montrer que l'attracteur rétrograde est de dimension finie nous appliquons le Théorème 6.13. D'après (6.87) nous trouvons la première inégalité de ce théorème. Soient u_1 et u_2 deux solutions différentes correspondant à m. Pour simplifier on prend $< u_1 >=< u_2 >$, sinon on fait exactement comme dans la section 5.9.2 et nous obtenons le même résultat. Posons $w := u_1 - u_2$. Alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}w + \varepsilon w\big) - \Delta w + f(u_1) - f(u_2) = 0. \tag{6.89}$$

Multiplions par w, notons que $< w >= 0$ et que

$$\|w\|_E^2 = \|w\|_{-1}^2 + \varepsilon|w|^2 \geqslant \|w\|_{-1}^2,$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|_E^2 + |\nabla w|^2 &\leqslant C|w|^2 \\
&\leqslant cC|\nabla w|\ \|w\|_{-1} \\
&\leqslant \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + c_2C\|w\|_{-1}^2 \\
&\leqslant \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + c_1\|w\|_E^2, \qquad c_1 := c_2C.
\end{aligned}$$

où les constantes ne dépendent pas de ε. Nous avons, en particulier,

$$\frac{d}{dt}\|w\|_E^2 - 2c_1\|w\|_E^2 \leqslant 0$$

$$\|w(t)\|_E^2 \leqslant e^{2c_1(t-\tau)}\|w(\tau)\|_E^2, \tag{6.90}$$

ou

$$\|u_1(\tau+T^*) - u_2(\tau+T^*)\|_E^2 \leqslant e^{2c_1T^*}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E^2.$$

Nous avons alors la deuxième inégalité du Théorème 6.13, où $\ell(t,T^*) = e^{c_1T^*}$.

Soit w est comme précédemment et soit Q_N le projecteur de $E(\varepsilon)$ dans un sous espace $E(\varepsilon)_N^\perp$. Multiplions (6.89) par $Q_Nw(s)$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\|Q_Nw(s)\|_E^2 + |\nabla Q_Nw(s)|^2 \leqslant C|w(s)|^2.$$

D'après (6.90)

$$\frac{d}{ds}\|Q_Nw(s)\|_E^2 + 2|\nabla Q_Nw(s)|^2 \leqslant 2c'e^{2c_1(s-\tau)}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E^2,$$

$$\begin{aligned}\|Q_Nw(s)\|_E^2 = \|Q_Nw(s)\|_{-1}^2 + \varepsilon|Q_Nw(s)|^2 &\leqslant (c+\varepsilon)|Q_Nw(s)|^2\\ &\leqslant \lambda_{N+1}^{-1}(c+\varepsilon)|\nabla Q_Nw(s)|^2.\end{aligned}$$

Il vient alors

$$\frac{d}{ds}\|Q_Nw(s)\|_E^2 + 2\lambda_{N+1}(c+\varepsilon)^{-1}\|Q_Nw(s)\|_E^2 \leqslant 2c'e^{2c_1(s-\tau)}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E^2.$$

Multiplions par $e^{2c\lambda_{N+1}(s-\tau)}$, $c := (c+\varepsilon)^{-1} > 0$

$$\frac{d}{ds}\Big(e^{2c\lambda_{N+1}(s-\tau)}\|Q_Nw(s)\|_E^2\Big) \leqslant 2c'e^{2(c_1+c\lambda_{N+1})(s-\tau)}\|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E^2.$$

Intégrons sur $(\tau, \tau+T^*)$,

$$\|Q_Nw(\tau+T^*)\|_E^2 e^{2c\lambda_{N+1}T^*} \leqslant \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|_E^2\Big(1 + \frac{c'}{c_1 + c\lambda_{N+1}}\big(e^{2(c_1+c\lambda_{N+1})T^*} - 1\big)\Big).$$

Ce qui donne

$\|Q_Nw(\tau+T^*)\|_E^2$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2\Big(e^{-2c\lambda_{N+1}T^*}+\frac{c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{2c_1T^*}-\frac{c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{-2c\lambda_{N+1}T^*}\Big)\\
&\leqslant \|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2\Big(\frac{c_1+c\lambda_{N+1}-c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{-2c\lambda_{N+1}T^*}+\frac{c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{2c_1T^*}\Big)\\
&\leqslant \|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2\Big(e^{-2c\lambda_{N+1}T^*}+\frac{c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{2c_1T^*}\Big),\quad \text{pour } c'\geqslant 0\\
&= \delta^2(t,T^*,N)\|u_1(\tau)-u_2(\tau)\|_E^2.
\end{aligned}
$$

Pour vérifier (6.80) du Théorème 6.13, il faut bien choisir T^* et $N=N(t)$ pour avoir $\delta=\delta(t,T^*,N)<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Et alors nous obtenons $d_f(\mathcal{A}(t))\leqslant N+\eta$, (d'après le Théorème 6.13), où η est donné par la condition suivante

$$\big(6\sqrt{2}\ell(t)\big)^N\big(\sqrt{2}\delta(t)\big)^\eta=\sigma(t)<1.$$

Pour démontrer (6.88), nous avons

$$\exists D>0\quad \text{telle que}\quad \frac{\lambda_N}{N^{\frac{2}{n}}}\geqslant D,\quad \forall N\in\mathbb{N}.$$

Posons $\eta=N$, donc

$$
\begin{aligned}
\sigma(t) &= \big(12\delta(t)\ell(t)\big)^{2N}\\
&= 12^{2N}\Big(e^{-2c\lambda_{N+1}T^*+2c_1T^*}+\frac{c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{4c_1T^*}\Big)^N.
\end{aligned}
$$

Posons $\gamma=12$. Nous devons choisir T^* et λ_{N+1} tels que

$$e^{-2(c\lambda_{N+1}-c_1)T^*}=\frac{1}{2\gamma^2},\tag{6.91}$$

$$\frac{c'}{c_1+c\lambda_{N+1}}e^{4c_1T^*}\leqslant\frac{1}{2\gamma^2+\alpha},\quad \alpha>0.\tag{6.92}$$

Ce qui donne

$$T^*=\frac{\log 2\gamma^2}{2(c\lambda_{N+1}-c_1)},$$

et l'inégalité (6.92) sera satisfaite si nous avons

$$(c\lambda_{N+1}-c_1)\,\log\Big(\frac{c_1+c\lambda_{N+1}}{c'(2\gamma^2+\alpha)}\Big)\geqslant 4c_1\log\,(\sqrt{2}\gamma).$$

En utilisant $\lambda_{N+1}\geqslant D(N+1)^{\frac{2}{n}}$, nous obtenons

$$(c\lambda_{N+1}-c_1)\,\log\Big(\frac{c_1+c\lambda_{N+1}}{c'(2\gamma^2+\alpha)}\Big)\geqslant\big(cD(N+1)^{\frac{2}{n}}-c_1\big)\,\log\Big(\frac{c_1+cD(N+1)^{\frac{2}{n}}}{c'(2\gamma^2+\alpha)}\Big).$$

En choisissant $N = N(t)$ telle que

$$cD(N+1)^{\frac{2}{n}} \geqslant 5c_1 \quad \text{et} \quad \frac{c_1 + cD(N+1)^{\frac{2}{n}}}{c'(2\gamma^2+\alpha)} \geqslant \sqrt{2}\,\gamma,$$

et donc l'inégalité (6.92) est satisfaite si

$$(N+1)^{\frac{2}{n}} \geqslant \frac{5c_1}{cD} = \frac{5c_2 C}{cD}, \quad \text{où } c = (c+\varepsilon)^{-1}.$$

Donc

$$N \geqslant \Big(\frac{5c_2 C}{cD}\Big)^{\frac{n}{2}} - 1.$$

Alors, en choisissant N telle que $N \leqslant \Big(\dfrac{5c_2(c+\varepsilon)C}{D}\Big)^{\frac{n}{2}}$, nous avons

$$d_f(\mathcal{A}(t)) \leqslant 2N \leqslant L_1(C)^{\frac{n}{2}}, \quad L_1 = \big(\frac{5c_2(c+\varepsilon)}{D}\big)^{\frac{n}{2}} > 0.$$

■

6.7 L'attracteur exponentiel rétrograde

6.7.1 Généralités

Nous allons chercher un attracteur exponentiel rétrograde du problème de Cahn-Hilliard visqueux suivant :

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(u + \varepsilon(-\Delta)u\big) + \Delta^2 u - \Delta f(u) = m(t), \tag{6.93}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma,$$

$$u(\tau, x) = u_0(x).$$

f est un polynôme de degree $(2p-1)$, défini comme auparavant, et m est une fonction dépendant de t et vérifiant les hypothèses suivantes :

(A1) $m \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, E(\varepsilon))$ et $\int_\Omega m dx = 0$,

(A2)

$$M_m(t) := \sup_{r \leqslant t} \int_{r-1}^{r} \|m(s)\|_E^2 ds < \infty, \qquad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R},$$

(A3) il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $q > 2$ tels que

$$M_{m,q}(t_0) := \sup_{r \leqslant t_0} \int_{r-1}^{r} \|m(s)\|_E^q ds < \infty.$$

u est la solution du problème (6.93), de moyenne constante. Supposons ici que $| < u_0 > | \leqslant M$ ou $| < u > | \leqslant M$.

Nous définissons, pour tout $\delta > 0, K > 0$ et $B \subset E(\varepsilon)$, l'ensemble $S_{\delta,K}(B)$ d'applications $S : E(\varepsilon) \to E(\varepsilon)$ telles que $S(\mathcal{O}_\delta(B)) \subset B$ et

$$\|Su_1 - Su_2\|_E \leqslant K\|u_1 - u_2\|_E, \qquad \text{pour tout} \;\; u_1, u_2 \in \mathcal{O}_\delta(B),$$

où $\mathcal{O}_\delta(B) := \{u \in E(\varepsilon) : \inf_{w\in B} \|u-w\|_E < \delta\}$. Et la métrique dans $S_{\delta,K}(B)$ est définie par

$$\|S_1 - S_2\|_{S_{\delta,K}(B)} := \sup_{u\in\mathcal{O}_\delta(B)} \|S_1u - S_2u\|_E.$$

Nous définissons pour le problème (6.93) une famille d'applications U_{m,t_0} telle que

$$U_{m,t_0} := \{U_m(t,\tau) : \;\tau \leqslant t \leqslant t_0\},$$

$$U_m(t,\tau)u_0 := u(t;\tau,u_0), \;\; \tau \leqslant t \leqslant t_0, u_0 \in E(\varepsilon).$$

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, nous notons par $\mathcal{U}(E(\varepsilon), t_0)$ la classe de toutes les familles $U = \{U(t,s) : \;s,t \in \mathbb{R}, s \leqslant t \leqslant t_0\}$ d'applications $U(t,s) : E(\varepsilon) \to E(\varepsilon)$, tels que

1. $U(s,s) = Id, \qquad$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.
2. $U(t,r)U(r,s) = U(t,s), \quad$ pour tout $s \leqslant r \leqslant t$.

Par cette définition, $U_{m,t_0} \in \mathcal{U}(E(\varepsilon), t_0)$, pour $t_0 \in \mathbb{R}$.

6.7.2 Estimation a priori

Estimation de $\|u(t)\|_E^2$

Soit $u(t) = u(t;\tau,u_0)$ une solution. Alors

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\big) - \Delta u + f(u) = (-\Delta)^{-1}m(t) + < f(u) > .$$

Multiplions par $\bar{u}$, $\bar{u} = u - < u >$ donc $< \bar{u} >= 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + |\nabla u|^2 + (f(u),u) \leqslant | < u > | \int_\Omega |f(u)|dx + \|m\|_{-1}\|\bar{u}\|_{-1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{-1}^2 &\leqslant c_1|\nabla u|^2, \\ |\bar{u}|^2 &\leqslant c_2|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + c\|\bar{u}\|_E^2 + \frac{1}{2}pb_{2p}\int_\Omega u^{2p}dx &\leqslant \frac{1}{2}k_1 + \frac{c}{2}\|\bar{u}\|_{-1}^2 + \frac{1}{2c}\|m\|_{-1}^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}k_1 + \frac{c}{2}\|\bar{u}\|_E^2 + \frac{1}{2c}\|m\|_E^2.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}\|_E^2 + c\|\bar{u}\|_E^2 \leqslant k_1 + \frac{1}{c}\|m\|_E^2.$$

Nous avons $\dfrac{d < u >^2}{dt} = 0$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}\|_E^2 + (1+\varepsilon) < u >^2\Big) + c\Big(\|\bar{u}\|_E^2 + 2 < u >^2\Big) \leqslant k_1' + \frac{1}{c}\|m\|_E^2,$$

k_1' dépend de M et de Ω.

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\bar{u}\|_E^2 + (1+\varepsilon) < u >^2\Big) + c\Big(\|\bar{u}\|_E^2 + (1+\varepsilon) < u >^2\Big) \leqslant k_1' + \frac{1}{c}\|m\|_E^2, \quad (6.94)$$

les constantes k_1' et c sont positives et indépendantes de ε. Multipliant par e^{ct} et intégrant sur $[\tau, t]$, $t \geqslant \tau$, nous avons

$$\|u(t)\|_E^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|u_0\|_E^2 + k_2\Big(1 - e^{-c(t-\tau)}\Big) + \frac{1}{c}e^{-ct}\int_\tau^t e^{cs}\|m(s)\|_E^2 ds,$$

$$\|u(t)\|_E^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|u_0\|_E^2 + k_2 + \frac{1}{c}e^{-ct}\int_\tau^t e^{cs}\|m(s)\|_E^2 ds, \quad (6.95)$$

pour tout $t \geqslant \tau$.
Nous estimons le dernier terme.

$$\begin{aligned} e^{-ct}\int_\tau^t e^{cs}\|m(s)\|_E^2 ds &\leqslant e^{-ct}\int_{-\infty}^t e^{cs}\|m(s)\|_E^2 ds \\ &= e^{-ct}\sum_{n=0}^{\infty} e^{c(t-n)}\int_{t-(n+1)}^{t-n}\|m(s)\|_E^2 ds \\ &\leqslant (1 - e^{-ct})^{-1}M_m(t) \\ &\leqslant (1 + c^{-1})M_m(t).\end{aligned}$$

Ce qui donne d'après (6.95)

$$\|u(t)\|_E^2 \leqslant e^{-c(t-\tau)}\|u_0\|_E^2 + c^{-1}(1+c^{-1})M_m(t) + k_2, \quad (6.96)$$

pour tout $t \geqslant \tau$.
Soit D un borné de $E(\varepsilon)$, où $\|D\|_E := \max\big(1, \sup_{v\in D}\|v\|_E\big)$. Nous avons alors par (6.96)

$$\|u(t;\tau,u_0)\|_E^2 \leqslant 1 + c^{-1}(1+c^{-1})M_m(t_0), \tag{6.97}$$

pour tout $t \leqslant t_0$, $\tau \leqslant t - \frac{2}{c}\log\big(C_1\|D\|_E\big)$, et pour $u_0 \in D$.
τ dans la relation précédente est trouvé par

$$e^{-c(t-\tau)}\|D\|_E^2 + k_2 \leqslant 1,$$

et donc

$$\tau \leqslant t - \frac{2}{c}\log\big(C_1\|D\|_E\big), \qquad C_1 = k_2.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 6.18. *Soit $D \subset E(\varepsilon)$ un borné. Alors*

$$\|U_m(t,\tau)u_0\|_E \leqslant C_m(t_0), \quad \text{pour tout}\, t \leqslant t_0,\ \tau \leqslant t-\frac{2}{c}log\big(C_1\|D\|_E\big),\ u_0 \in D. \tag{6.98}$$

Estimation pour la différence entre deux solutions

Proposition 6.19. *Il existe une fonction positive $L = L(t,\tau)$, indépendante de m et de ε, telle que*

$$\|U_m(t,\tau)u_{01} - U_m(t,\tau)u_{02}\|_E \leqslant L\|u_{01} - u_{02}\|_E. \tag{6.99}$$

Démonstration.
Soient $u_1(t) = U_{m_1}(t,\tau)u_{01}$ et $u_2(t) = U_{m_2}(t,\tau)u_{02}$ deux solutions de (6.93). Posons $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$, $m(t) = m_1(t) - m_2(t)$ et $< u_1 >=< u_2 >$. Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}u + \varepsilon u\big) - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = (-\Delta)^{-1}m,$$
$$u(\tau) = u_{01} - u_{02}.$$

Multiplions par u, par interpolation et $f' \geqslant -c$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u\|_{-1}^2 + \varepsilon|u|^2\big) + |\nabla u|^2 &\leqslant c|u|^2 + \|m\|_{-1}\|u\|_{-1}\\ &\leqslant \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + c\|u\|_E^2 + c_1\|m\|_E^2,\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\|u\|_E^2 \leqslant c\|u\|_E^2 + c_1\|m\|_E^2,$$

$$\|u(t)\|_E^2 \leqslant \|u_0\|_E^2 e^{c(t-\tau)} + c_1\int_\tau^t e^{c(t-s)}\|m(s)\|_E^2 ds. \tag{6.100}$$

Pour m correspond les deux solutions, nous trouvons (6.99) où $L(t,\tau) = e^{\frac{c}{2}(t-\tau)}$, $t \geqslant \tau$.
Pour $< u_1 >\neq< u_2 >$ nous faisons comme dans la section 5.9.2, où $f(s) = s^3 - s$, et nous obtenons par (5.116) l'estimation (6.99), où $L(t,\tau) = e^{\frac{c}{2}(t-\tau)}$. ■

Estimation de $\|U_m(t,\tau)u_0 - u_0\|_E$

Posons $w(t) := u(t) - u_0 = U_m(t,\tau)u_0 - u_0$. w vérifie, notons que $< w >= 0$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}w + \varepsilon w\big) - \Delta u + f(u) = (-\Delta)^{-1}m + < f(u) > .$$

Multiplions par w

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|w\|_{-1}^2 + \varepsilon|w|^2\big) &= (\Delta u, w) - (f(u),w) + ((-\Delta)^{-1}m, w) \\ &= -|\nabla w|^2 - (\nabla u_0, \nabla w) - (f(u),u) + (f(u),u_0) + ((-\Delta)^{-1}m, w).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|w\|_E^2 + 2|\nabla w|^2 + 2(f(u),u) \\ &\quad \leqslant c|\nabla u_0|^2 + 2|(f(u),u_0)| - 2|(f(u_0),u_0)| + 2|((-\Delta)^{-1}m, w) + 2|(f(u_0),u_0)|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|w\|_E^2 + 2|\nabla w|^2 + c_1\|u\|_{L^{2p}}^{2p} \leqslant k_1 + c|\nabla u_0|^2 + \\ &\qquad +2|(f(u),u_0)| - 2|(f(u_0),u_0)| + |((-\Delta)^{-1}m, w) + 2|(f(u_0),u_0)|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(f(u),u_0)| - |(f(u_0),u_0)| &\leqslant |(f(u) - f(u_0), u_0)| \\ &\leqslant c|f(u) - f(u_0)|^2 + |u_0|^2 \\ &\leqslant \Big(\int_\Omega \big(|u|^{2p-2} + |u_0|^{2p-2} + 1\big)|w|dx\Big)^2 + |u_0|^2 \\ &\leqslant \Big(\int_\Omega \big(|u|^{4p-4} + |u_0|^{4p-4} + 1\big)dx\Big)|w|^2 + |u_0|^2.\end{aligned}$$

Nous avons alors, pour $p = 2$,

$$\begin{aligned}|(f(u),u_0)| - |(f(u_0),u_0)| &\leqslant c|w|^2 + |u_0|^2 \\ &\leqslant \frac{1}{2}|\nabla w|^2 + c\|w\|_{-1}^2 + |u_0|^2.\end{aligned}$$

En particulier, et par $|f(u_0)| \leqslant c_1|u_0|^4 + c_2$,

$$\frac{d}{dt}\|w\|_E^2 \leqslant k_1' + c_1|\nabla u_0|^2 + c'|u_0|^2 + |u_0|^8 + c^{-1}\|m\|_E^2 + c\|w\|_E^2.$$

En intégrant entre τ et t, $t > \tau$, et notons que $w(\tau) = 0$,

$$\begin{aligned}&\|U_m(t,\tau)u_0 - u_0\|_E^2 \\ &\leqslant \Big(k_1'(t-\tau) + c_1|\nabla u_0|^2(t-\tau) + c'\big(|u_0|^2 + |u_0|^8\big)(t-\tau) + c^{-1}\int_\tau^t \|m(s)\|_E^2 ds\Big)e^{c(t-\tau)},\end{aligned} \tag{6.101}$$

pour tout $\tau \leqslant t$ et $u_0 \in H^1(\Omega)$.

6.7.3 Théorème d'existence d'attracteur exponentiel rétrograde

Pour trouver un attracteur exponentiel rétrograde du problème de Cahn-Hilliard visqueux nous appliquons [43], Théorème 2.3, et pour cela, il faut vérifier les conditions suivantes (déjà vu au chapitre 4) :

(H0) Nous fixons $\tau_0 > 0$. Alors, pour tout $B \subset E(\varepsilon)$, ensemble borné et fermé dans $E(\varepsilon)$,

$$U_m(t, t-\tau_0) \in S_{\delta,K}(B), \quad \forall t \leqslant t_0. \tag{6.102}$$

(H1) Il existe $C_0 > 0$, $0 < \varepsilon_0 \leqslant \tau_0$ et $\gamma > 0$ tels que pour tout $t \leqslant t_0, \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon_0$ et $v \in \mathcal{O}_\delta(B)$,

$$\|U_m(t, t-r)v - U_m(t-s, t-r-s)v\|_E \leqslant C_0|s|^\gamma.$$

(H2) Il existe une constante $C_B > 0$ telle que

$$\|U_m(t, t-s)v - U_m(t-s, t-r-s)w\|_E \leqslant C_B\|v-w\|_E,$$

pour tout $v, w \in B$, pour $t \leqslant t_0$, $0 \leqslant s \leqslant 2\tau_0$.

(H3) Il existe $C_0' > 0$ et $\gamma' > 0$ telles que pour tout $t \leqslant t_0, \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon_0$ et $v \in B$,

$$\|U_m(t, t-r)v - U_m(t-s, t-r)v\|_E \leqslant C_0'|s|^{\gamma'}.$$

(H4) Pour tout $t > t_0$ et D_1, D_2 deux bornés de $E(\varepsilon)$, il existe une constante $L(t, D_1, D_2) > 0$ telle que

$$\|U_m(t, t_0)v - U_m(t, t_0)w\|_E \leqslant L(t, D_1, D_2)\|v-w\|_E, \quad \text{pour tout } v \in D_1, w \in D_2.$$

Considérons l'ensemble $B := \{u \in E(\varepsilon) : \ \|u\|_E \leqslant C_m(t_0)\}$, et posons $\tau_0 := 1 + 2c^{-1}\log\big(C_1 \max\{1, 1 + C_m(t_0)\}\big)$.
Nous avons, pour $\delta = 1$, $\mathcal{O}_1(B) := \{u \in E(\varepsilon) : \inf\limits_{w \in E(\varepsilon)} \|u - w\|_E < 1\}$.
D'après la Proposition 6.18, nous avons

$$\|U_m(t, t-\tau_0)u_0\|_E \leqslant C_m(t_0),$$

pour tout $t \leqslant t_0, t-\tau_0 \leqslant t-c^{-1}\log\big(C_1\|\mathcal{O}_1(B)\|_E\big), u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$. Posons $\|\mathcal{O}_1(B)\|_E := \max 1, C_1(1 + C_m(t_0))$.
D'après la Proposition 6.19

$$\|U_m(t, t-\tau_0)u_{01} - U_m(t, t-\tau_0)u_{02}\|_E \leqslant K\|u_{01} - u_{02}\|_E,$$

où $K = e^{\frac{c}{2}\tau_0}$. Alors $U_m(t, t-\tau_0) \in S_{1,K}(B)$ pour tout $t \leqslant t_0$.
La continuité de l'opérateur $U_m(t, s) : E(\varepsilon) \to E(\varepsilon)$, pour tout $s \leqslant t$, se déduit de

l'estimation (6.100).

U_m satisfait (H2) et (H4)
Nous avons par la Proposition 6.19

$$\|U_m(t,t-s)u_{01} - U_m(t,t-s)u_{02}\|_E \leqslant e^{\frac{c}{2}s}\|u_{01}-u_{02}\|_E,$$

pour tout $t \leqslant t_0$, $s \in [0, 2\tau_0]$, u_{01}, $u_{02} \in B$.
Alors U_m satisfait (H2) avec $C_B = e^{c\tau_0}$. U_m satisfait également (H4) grâce à l'estimation (6.100) où $L(t, D_1, D_2) = e^{\frac{c}{2}(t-t_0)}$.

U_m satisfait (H1) et (H3)
Posons $u(t) = U_m(t,\tau)u_0$. Pour $s \geqslant 0$, $t-s \geqslant \tau$, nous avons

$$u(t) - u(t-s) = \int_{t-s}^{t} \frac{\partial u}{\partial t}(\theta)d\theta,$$

$$\begin{aligned}\|U_m(t,\tau)u_0 - U_m(t-s,\tau)u_0\|_E &\leqslant \int_{t-s}^{t} \|\frac{\partial u}{\partial t}(\theta)\|_E d\theta \\ &\leqslant s^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{t-s}^{t} \|\frac{\partial u}{\partial t}(\theta)\|_E^2 d\theta\Big)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.103)\end{aligned}$$

Pour estimer le terme $\int_{t-s}^{t} \|\dfrac{\partial u}{\partial t}(\theta)\|_E^2 d\theta$ nous multiplions l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\big((-\Delta)^{-1}\bar{u} + \varepsilon\bar{u}\big) - \Delta\bar{u} + f(u) =< f(u) > +(-\Delta)^{-1}m$$

par $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $< \dfrac{\partial u}{\partial t} >= 0$,

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_E^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(|\nabla u|^2 + 2\int_\Omega g(u)dx\big) &\leqslant c\|m\|_{-1}^2 + \frac{1}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{-1}^2 \\ &\leqslant c\|m\|_E^2 + \frac{1}{2}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_E^2.\end{aligned}$$

En intégrant sur $[t-s, t]$ et sur $[0, t-s]$ nous avons

$$\begin{aligned}\int_{t-s}^{t} \|\frac{\partial u}{\partial t}\|_E^2 + |\nabla u(t)|^2 + 2\int_\Omega g(u(t))dx &\leqslant c\int_0^t \|m(\theta)\|_E^2 d\theta + |\nabla u_0|^2 + 2\int_\Omega g(u_0)dx \\ &\leqslant \text{const.} \qquad \text{(par (A2))}.\end{aligned}$$

Nous déduisons par (6.103)

$$\|U_m(t,\tau)u_0 - U_m(t-s,\tau)u_0\|_E \leqslant \hat{c}_1 s^{\frac{1}{2}}, \qquad (6.104)$$

pour tout $t \leqslant t_0$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, $\tau \leqslant t - 2c^{-1}\log\big(C_1\|\mathcal{O}_1(B)\|_E\big)$, $u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$.

Soit $r \geqslant \tau_0$. Alors

$$t - r \leqslant t - 1 - 2c^{-1}\log\big(C_1\|\mathcal{O}_1(B)\|_E\big). \tag{6.105}$$

Par (6.104) et (6.105)

$$\|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-r)u_0\|_E \leqslant \hat{c}_1 s^{\frac{1}{2}}, \tag{6.106}$$

pour tout $t \leqslant t_0$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, $r \geqslant \tau_0$, $u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$.
Donc U_m satisfait (H3) avec $\gamma' = \frac{1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned} & \|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_E \\ \leqslant \ & \|U_m(t,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-r)u_0\|_E \\ & + \|U_m(t-s,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_E. \end{aligned} \tag{6.107}$$

D'après (6.100), nous avons

$$\begin{aligned} & \|U_m(t-s,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-s-r)u_0\|_E \\ = \ & \|U_m(t-s,t-r)u_0 - U_m(t-s,t-r)U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_E \\ \leqslant \ & e^{\frac{c}{2}(r-s)}\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_E \\ \leqslant \ & e^{c\tau_0}\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_E, \quad \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, 0 \leqslant s \leqslant 1. \end{aligned} \tag{6.108}$$

D'après (6.101)

$$\|u_0 - U_m(t-r,t-r-s)u_0\|_E \leqslant \tilde{C}_1 s^{\frac{1}{2}} + c^{-\frac{1}{2}}\Big(\int_{t-r-s}^{t-r}\|m(\theta)\|_E^2 d\theta\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{6.109}$$

où $\tilde{C}_1 = \big(k_1' + c_1|\nabla u_0|^2 + c'(|u_0|^2 + |u_0|^8)\big)^{\frac{1}{2}}$.

Pour $0 \leqslant s \leqslant 1$ et $t \leqslant t_0$, nous avons par l'inégalité de Hölder

$$\int_{t-r-s}^{t-r}\|m(\theta)\|_E d\theta \leqslant \Big(\int_{t-r-s}^{t-r}\|m(\theta)\|_E^q d\theta\Big)^{\frac{2}{q}}\Big(\int_{t-r-s}^{t-r} 1 d\theta\Big)^{\frac{q-2}{q}}, \quad \text{pour } q > 2,$$

donc

$$\int_{t-r-s}^{t-r}\|m(\theta)\|_E d\theta \leqslant \Big(M_{m,q}(t_0)\Big)^{\frac{2}{q}} s^{\frac{q-2}{q}}. \tag{6.110}$$

Pour $0 \leqslant s \leqslant 1$, $s^{\frac{1}{2}} \leqslant s^{\frac{q-2}{2q}}$ et par (6.109) et (6.110)

$$\|u_0 - U_m(t-r, t-r-s)u_0\|_E \leqslant \left(\tilde{C}_1 + c^{-\frac{1}{2}}\left(M_{m,q}(t_0)\right)^{\frac{1}{q}}\right) s^{\frac{q-2}{2q}}, \tag{6.111}$$

pour tout $t \leqslant t_0, 0 \leqslant s \leqslant 1, \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0, u_0 \in E(\varepsilon)$.
Nous déduisons par (6.106), (6.107) et (6.111)

$$\|U_m(t, t-r)u_0 - U_m(t-s, t-s-r)u_0\|_E \leqslant \hat{C}_2\, s^{\frac{q-2}{2q}}, \tag{6.112}$$

pour tout $t \leqslant t_0,\ 0 \leqslant s \leqslant 1,\ \tau_0 \leqslant r \leqslant 2\tau_0,\ u_0 \in \mathcal{O}_1(B)$.
Alors U_m satisfait (H1), avec $\delta = 1, \varepsilon = 1, C_0 = \hat{C}_2$.

Nous avons alors, en appliquant [43], Théorème 2.3 et Corollaire 1, le résultat suivant.

Théorème 6.20. *Supposons que m dans le problème (6.93) vérifie les hypothèses (A1), (A2) et (A3). Alors il existe une famille $\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m} := \{\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t) :\ t \in \mathbb{R}\}$ d'ensembles non vides de $E(\varepsilon)$ vérifiant*

1. *$U_m(t,\tau)\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(\tau) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)$, pour tout $\tau \leqslant t$,*
2. *$\widetilde{\mathcal{M}}_{T_{-\tau}U_m}(t) = \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t-\tau)$, pour tout $\tau \geqslant 0$ et $t \leqslant t_0$ et*
   $\widetilde{\mathcal{M}}_{T_{-\tau}U_m}(t) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t-\tau)$, pour tout $\tau \geqslant 0$ et $t > t_0$,

   où $T_{-\tau}U_m(t,s) := U_m(t-\tau, s-\tau)$
3. *Pour $D \subset E(\varepsilon)$ borné,*

   $$dist_{E(\varepsilon)}(U_m(t, t-\tau)D, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)) \leqslant \tilde{C}_1 e^{\tilde{\alpha} s_D} e^{-\tilde{\alpha}\tau},$$

   pour tout $\tau \geqslant s_D$ et pour $t \leqslant t_0$

   et

   $$dist_{E(\varepsilon)}(U_m(t, t-\tau)D, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)) \leqslant L_m(t, D, \mathcal{M}_{U_m}(t_0))\tilde{C}_1 e^{\tilde{\alpha}(s_D+t-t_0)} e^{-\tilde{\alpha}\tau},$$

   pour tout $t > t_0$ et pour $\tau \geqslant s_D + t - t_0$, où $\tilde{C}_1$ et $\tilde{\alpha}$ sont deux constantes positives dépendantes de Ω et $M_m(t_0)$.
4. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t)$ est compact dans $E(\varepsilon)$ de dimension fractale finie et, plus précisément,*

   $$dim_F(\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t), E(\varepsilon)) \leqslant \begin{cases} \check{C}_1, & si\ t \leqslant t_0, \\ \dfrac{\check{C}_1}{L_m(t, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0), \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0))}, & si\ t > t_0, \end{cases}$$

   telle que $\check{C}_1 > 0$ et dépend de Ω et $M_m(t_0)$,

5. *il existe l'attracteur global rétrograde de U_m, $\{\mathcal{A}(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, qui satisfait*

$$\mathcal{A}(t) \subset \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t), \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Et sa dimension fractale est finie et estimée par

$$dim_F(\mathcal{A}(t), E(\varepsilon)) \leqslant \begin{cases} \check{C}_1, & \textit{si } t \leqslant t_0, \\ \dfrac{\check{C}_1}{L_m(t, \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0), \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t_0))}, & \textit{si } t > t_0, \end{cases}$$

6. *pour tout $0 \leqslant r \leqslant 1$ et pour $t \leqslant t_0$,*

$$dist_{E(\varepsilon)}^{symm}\Big(\widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t), \widetilde{\mathcal{M}}_{U_m}(t-r)\Big) \leqslant \check{C}_2|r|^{(k+1)\gamma},$$

tels que $\gamma = \dfrac{q-2}{2q}$ et $\check{C}_2$ et k sont deux constantes positives dépendantes de $\Omega, q, M_m(t_0)$ et $M_{m,q}(t_0)$.

Conclusion

Ce travail a été porté sur les attracteurs pour des systèmes dissipatifs non autonome.
Trois modèles d'équations aux dérivées partielles ont été étudiés :

i) l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci a été étudiée en dimension deux sur un domaine borné avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène et des conditions aux limites périodiques,

ii) l'équation de Cahn-Hilliard en petite dimension d'espace $(1, 2$ et $3)$, avec des conditions aux limites de Neumann,

iii) l'équation de Cahn-Hilliard visqueuse en petite dimension d'espace $(1, 2$ et $3)$, avec des conditions aux limites de Neumann.

Ces modèle ont été étudiés dans le cas autonome et non autonome.
Pour des équations autonomes, nous avons démontré l'existence des attracteurs globaux et d'attracteurs exponentiels. Les attracteurs exponentiels ont été démontrés pour le problème de Navier-Stokes autonome en utilisant la prpriété de laminage. Ainsi, l'existence d'attracteurs exponentiels, uniforme, rétrograde et exponentiels rétrogrades pour des équations non autonomes. L'existence d'attracteurs exponentiels a été prouvée en utilisant la propriété de régularisation dans ce cas. Nous avons également construit une famille robuste d'attracteurs exponentiels, uniforme par rapport à la perturbation, pour le modèle de Cahn-Hilliard visqueux.

Les résultats obtenus montrent qu'il serait intéressant d' :

- Etudier d'autres équations, notamment pour les attracteurs exponentiels rétrogrades. Nous pensons notamment à des équations hyperboliques amorties (typyquement l'equation d'onde amortie) et a des perturbations hyperboliques de Cahn-Hilliard.

- Etudier la Continuité/robustesse par rapport a un paramètre.

Bibliographie

[1] M. Aida, M. Efendiev, and A. Yagi. Quasilinear abstract parabolic evolution equations and exponential attractors. *Osaka J. Math.*, 42(1) :101–132, 2005.

[2] A. Babin and B. Nicolaenko. Exponential attractors of reaction-diffusion systems in an unbounded domain. *J. Dynam. Differential Equations*, 7(4) :567–590, 1995.

[3] A. V. Babin and M. I. Vishik. *Attractors of evolution equations*, volume 25 of *Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. Translated and revised from the 1989 Russian original by Babin.

[4] F. Bai, C. M. Elliott, A. Gardiner, A. Spence, and A. M. Stuart. The viscous Cahn-Hilliard equation. I. Computations. *Nonlinearity*, 8(2) :131–160, 1995.

[5] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.

[6] J.W. Cahn. On spinodal decomposition. *Acta Met*, 9 :795–801, 1961.

[7] J.W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a non-uniform system i. interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 2 :258–267, 1958.

[8] T. Caraballo and J. A. Langa. On the upper semicontinuity of cocycle attractors for non-autonomous and random dynamical systems. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 10(4) :491–513, 2003.

[9] T. Caraballo, J. A. Langa, and J. C. Robinson. Upper semicontinuity of attractors for small random perturbations of dynamical systems. *Comm. Partial Differential Equations*, 23(9-10) :1557–1581, 1998.

[10] T. Caraballo, J. A. Langa, and J. Valero. The dimension of attractors of nonautonomous partial differential equations. *ANZIAM J.*, 45(2) :207–222, 2003.

[11] T. Caraballo, G. Lukaszewicz, and J. Real. Pullback attractors for asymptotically compact non-autonomous dynamical systems. *Nonlinear Anal.*, 64(3) :484–498, 2006.

[12] T. Caraballo and J. Real. Attractors for 2D-Navier-Stokes models with delays. *J. Differential Equations*, 205(2) :271–297, 2004.

[13] D. N. Cheban, P. E. Kloeden, and B. Schmalfuss. The relationship between pullback, forward and global attractors of nonautonomous dynamical systems. *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, 2(2) :125–144, 2002.

[14] V. Chepyzhov and M. Vishik. A Hausdorff dimension estimate for kernel sections of nonautonomous evolution equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 42(3) :1057–1076, 1993.

[15] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. Attractors of nonautonomous dynamical systems and their dimension. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 73(3) :279–333, 1994.

[16] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. Non-autonomous evolutionary equations with translation-compact symbols and their attractors. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321(2) :153–158, 1995.

[17] V. V. Chepyzhov and M. I. Vishik. Kolmogorov ϵ-entropy of attractors of reaction-diffusion systems. *Mat. Sb.*, 189(2) :81–110, 1998.

[18] M. Conti, V. Pata, and M. Squassina. Singular limit of dissipative hyperbolic equations with memory. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (suppl.) :200–208, 2005.

[19] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics. Vol. I.* Interscience Publishers, Inc., New York, N.Y., 1953.

[20] H. Crauel, A. Debussche, and F. Flandoli. Random attractors. *J. Dynam. Differential Equations*, 9(2) :307–341, 1997.

[21] H. Crauel and F. Flandoli. Attractors for random dynamical systems. *Probab. Theory Related Fields*, 100(3) :365–393, 1994.

[22] H. Crauel and F. Flandoli. Hausdorff dimension of invariant sets for random dynamical systems. *J. Dynam. Differential Equations*, 10(3) :449–474, 1998.

[23] F. Di Plinio, G. S. Duane, and R. Temam. Time-dependent attractor for the oscillon equation. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 29(1) :141–167, 2011.

[24] A. Eden, C. Foias, and V. Kalantarov. A remark on two constructions of exponential attractors for α-contractions. *J. Dynam. Differential Equations*, 10(1) :37–45, 1998.

[25] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, and R. Temam. *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, volume 37 of *RAM : Research in Applied Mathematics*. John-Wiley, New York, 1994.

[26] M. Efendiev, A. Miranville, and S. Zelik. Exponential attractors for a nonlinear reaction-diffusion system in $\mathbf{R}^3$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(8) :713–718, 2000.

[27] M. Efendiev, A. Miranville, and S. Zelik. Infinite dimensional exponential attractors for a non-autonomous reaction-diffusion system. *Math. Nachr.*, 248/249 :72–96, 2003.

[28] M. Efendiev, A. Miranville, and S. Zelik. Exponential attractors for a singularly perturbed Cahn-Hilliard system. *Math. Nachr.*, 272 :11–31, 2004.

[29] M. Efendiev, A. Miranville, and S. Zelik. Exponential attractors and finite-dimensional reduction for non-autonomous dynamical systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 135(4) :703–730, 2005.

[30] M. Efendiev and A. Yagi. Continuous dependence on a parameter of exponential attractors for chemotaxis-growth system. *J. Math. Soc. Japan*, 57(1) :167–181, 2005.

[31] C. M. Elliott and A. M. Stuart. Viscous Cahn-Hilliard equation. II. Analysis. *J. Differential Equations*, 128(2) :387–414, 1996.

[32] P. Fabrie and C. Galusinski. Exponential attractors for a partially dissipative reaction system. *Asymptotic Anal.*, 12(4) :329–354, 1996.

[33] P. Fabrie and C. Galusinski. Exponential attractors for the slightly compressible 2D-Navier-Stokes. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 2(3) :315–348, 1996.

[34] X. Fan and Y. Wang. Attractors for a second order nonautonomous lattice dynamical system with nonlinear damping. *Phys. Lett. A*, 365(1-2) :17–27, 2007.

[35] F. Flandoli and B. Schmalfuss. Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equation with multiplicative white noise. *Stochastics Stochastics Rep.*, 59(1-2) :21–45, 1996.

[36] S. Gatti, M. Grasselli, A. Miranville, and V. Pata. Memory relaxation of first order evolution equations. *Nonlinearity*, 18(4) :1859–1883, 2005.

[37] S. Gatti, M. Grasselli, and V. Pata. Exponential attractors for a conserved phase-field system with memory. *Phys. D*, 189(1-2) :31–48, 2004.

[38] M. Grasselli, A. Miranville, V. Pata, and S. Zelik. Well-posedness and long time behavior of a parabolic-hyperbolic phase-field system with singular potentials. *Math. Nachr.*, 280(13-14) :1475–1509, 2007.

[39] M. Grinfeld and A. Novick-Cohen. The viscous Cahn-Hilliard equation : Morse decomposition and structure of the global attractor. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(6) :2375–2406, 1999.

[40] J. K. Hale. *Asymptotic behavior of dissipative systems*, volume 25 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[41] A. Haraux. *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, volume 17 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1991.

[42] J. A. Langa, G. Lukaszewicz, and J. Real. Finite fractal dimension of pullback attractors for non-autonomous 2D Navier-Stokes equations in some unbounded domains. *Nonlinear Anal.*, 66(3) :735–749, 2007.

[43] J. A. Langa, A. Miranville, and J. Real. Pullback exponential attractors. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 26(4) :1329–1357, 2010.

[44] J. A. Langa and B. Schmalfuss. Finite dimensionality of attractors for non-autonomous dynamical systems given by partial differential equations. *Stoch. Dyn.*, 4(3) :385–404, 2004.

[45] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.

[46] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1 et 2*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 18. Dunod, Paris, 1968.

[47] J.-L. Lions and E. Magenes. *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*. Springer-Verlag, New York, 1972.

[48] G. Lukaszewicz and W. Sadowski. Uniform attractor for 2D magneto-micropolar fluid flow in some unbounded domains. *Z. Angew. Math. Phys.*, 55(2) :247–257, 2004.

[49] K. Matsuura. Exponential attractors for 2D magneto-micropolar fluid flow in a bounded domain. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (suppl.) :634–641, 2005.

[50] G. Métivier. Valeurs propres d'opérateurs définis par la restriction de systèmes variationnels à des sous-espaces. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 57(2) :133–156, 1978.

[51] A. Miranville. Asymptotic behavior of the Cahn-Hilliard-Oono equation. *to appear in Journal of Applied Analysis and Computation*.

[52] A. Miranville. Exponential attractors for a class of evolution equations by a decomposition method. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(2) :145–150, 1999.

[53] A. Miranville. Existence of solutions for a Cahn-Hilliard-Gurtin model. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 331(10) :845–850, 2000.

[54] A. Miranville. Some generalizations of the Cahn-Hilliard equation. *Asymptot. Anal.*, 22(3-4) :235–259, 2000.

[55] A. Miranville. Long-time behavior of some models of Cahn-Hilliard equations in deformable continua. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2(3) :273–304, 2001.

[56] A. Miranville. Existence of solutions for Cahn-Hilliard type equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, (suppl.) :630–637, 2003. Dynamical systems and differential equations (Wilmington, NC, 2002).

[57] A. Miranville, A. Piétrus, and J. M. Rakotoson. Dynamical aspect of a generalized Cahn-Hilliard equation based on a microforce balance. *Asymptot. Anal.*, 16(3-4) :315–345, 1998.

[58] A. Miranville and S. Zelik. Robust exponential attractors for singularly perturbed phase-field type equations. *Electron. J. Differential Equations*, pages 1–28, 2002.

[59] A. Miranville and S. Zelik. Robust exponential attractors for Cahn-Hilliard type equations with singular potentials. *Math. Methods Appl. Sci.*, 27(5) :545–582, 2004.

[60] A. Miranville and S. Zelik. Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains. In *Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. IV*, Handb. Differ. Equ., pages 103–200. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[61] A. Novick-Cohen. On the viscous Cahn-Hilliard equation. In *Material instabilities in continuum mechanics (Edinburgh, 1985–1986)*, Oxford Sci. Publ., pages 329–342. Oxford Univ. Press, New York, 1988.

[62] V. Pata and M. Squassina. On the strongly damped wave equation. *Comm. Math. Phys.*, 253(3) :511–533, 2005.

[63] J. Peetre. Espaces d'interpolation et théorème de Sobolev. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :279–317, 1966.

[64] F. Riesz and B. Sz. Nagy. *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Akadémiai Kado., Budapest and Gauthier-Villars, Paris, 1982.

[65] J. C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors.

[66] L. Schwartz. *Théorie des distributions. Tome II.* Actualités Sci. Ind., no. 1122 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **10**. Hermann & Cie., Paris, 1951.

[67] H. Song and H. Wu. Pullback attractors of nonautonomous reaction-diffusion equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 325(2) :1200–1215, 2007.

[68] Y. Takei, M. Efendiev, T. Tsujikawa, and A. Yagi. Exponential attractor for an adsorbate-induced phase transition model in non smooth domain. *Osaka J. Math.*, 43(1) :215–237, 2006.

[69] R. Temam. *Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis.* 3rd rev. ed.,. North-Holland, Amsterdam, 1984.

[70] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[71] Y. Wang. Pullback attractors for nonautonomous wave equations with critical exponent. *Nonlinear Anal.*, 68(2) :365–376, 2008.

[72] K. Yosida. *Functional analysis.* Grundlehren B.123. Academic Press Inc., New York, 1965.

Attracteurs pour des systèmes dissipatifs non autonomes

Résumé L'objectif de notre recherche est d'étudier l'existence d'attracteurs de dimension finie pour trois modèles d'équations aux dérivées partielles non linéaires : Navier-Stokes, Cahn-Hilliard et Cahn-Hilliard visqueux. En outre, nous étudions ces modèles dans les cas autonome et non autonome. Dans le but de définir les attracteurs pour chaque modèle nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution, puis l'existence d'un ensemble borné absorbant. Nous avons démontré également l'existence d'un attracteur global et d'attracteurs exponentiels dans le cas autonome, ainsi que les attracteurs exponentiels, uniforme, rétrograde et exponentiels rétrogrades dans le cas non autonome. Par ailleurs, nous avons démontré que pour les deux derniers modèles, l'attracteur pullback est unique et de dimension finie.
L'existence d'un paramètre ε, dans le modèle de Cahn-Hilliard visqueux, nous a conduit à construire une famille robuste d'attracteurs exponentiels en étudiant la limite ε tend vers zéro.

Mot-clefs
Equations de Navier-Stokes, équation de Cahn-Hilliard, équation de Cahn-Hilliard visqueux, attracteur global, attracteur exponentiel, attracteur rétrograde, attracteur uniforme, attracteur exponentiel rétrograde, attracteurs exponentiels robustes.

Attractors for some non-autonomous dissipative systems

Abstract The aim of our research is to study the existence of finite-dimensional attractors associated with three nonlinear models of partial differential equations : Navier-Stokes, Cahn-Hilliard and viscous Cahn-Hilliard. Furthermore, we study these models both in the autonomous and non-autonomous cases. In order to define the attractors for each model we have proved the existence and uniqueness of the solution and then the existence of a bounded absorbing set. We have also proved the existence of global and exponentials attractors in the autonomous case, as well as exponential, uniform, pullback and pullback exponential attractors in the non-autonomous one. In addition we have shown that for the last two models, the pullback attractor is unique and with finite dimension.
The existence of a parameter ε in the viscous Cahn-Hilliard model has led us to define a robust family of exponential attractors by studying the limit ε goes to zero.

Keywords
Navier-Stokes equations, Cahn-Hilliard equation, viscous Cahn-Hilliard equation, global attractor, exponential attractor, pullback attractor, uniform attractor, pullback exponential attractor, robust exponential attractors.