THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :
Anis Rajhi

Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de l'immeuble affine de GL(N)

Directeur(s) de Thèse :
Paul Broussous

Soutenue le 01 octobre 2014 devant le jury

Jury :

Président	**Pierre Torasso**	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Rapporteur	**Jean-François Dat**	Professeur des Universités, Université de Paris 6
Rapporteur	**Pascal Boyer**	Professeur des Universités, Université de Paris 13
Membre	**Paul Broussous**	Maître de conférences, Université de Poitiers
Membre	**Corinne Blondel**	Chargée de recherche CNRS, Université de Paris 7
Membre	**François Courtès**	Chargé de recherche CNRS, Université de Poitiers

Pour citer cette thèse :
Anis Rajhi. *Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de l'immeuble affine de GL(N)* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THESE

pour l'obtention du Grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

Ecole Doctorale S2IM

Secteur de Recherche : Mathématiques

présentée par
Anis Rajhi

Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de l'immeuble affine de GL(N)

Directeur de Thèse : Paul Broussous

Soutenue le 1 octobre 2014
devant la commission d'examen

JURY

Mme. Corinne BLONDEL	CNRS, université Paris 7	Examinatrice
M. Pascal BOYER	Université Paris 13	Rapporteur
M. Jean-Francois DAT	Université de Paris 6	Rapporteur
M. Paul BROUSSOUS	Université de Poitiers	Directeur
M. François COURTÈS	CNRS, Université de Poitiers	Examinateur
M. Pierre TORASSO	Université de Poitiers	Examinateur

À la mémoire de mon père

Remerciements

Mes premiers remerciements vont bien sur à Paul Broussous. Il a été pour moi, depuis le début et tout au long de ma thèse, un guide remarquable. Mais au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes. Il a toujours été très attentif à ce que je ressentais, et pas seulement aux maths qui nous liaient formellement. Il m'est parfois arrivé au cours de ma thèse d'être démotivé ; mais, invariablement, en sortant de son bureau, j'étais de nouveau confiant et prêt à travailler. Je lui exprime donc toute ma reconnaissance.

Je remercie Jean-François Dat et Pascal Boyer pour avoir accepté de rapporter cette thèse et pour leurs remarques fort constructives qui ont permis l'amélioration de ce manuscrit.

Je remercier vivement Corinne Blondel, Pierre Torasso et François Courtès qui me font un grand honneur en acceptant d'être membres de mon jury de soutenance.

Un merci tout particulier à Pol Vanhaecke, Abderrazak Bouaziz et Nadir Matringe pour l'aide inconditionnelle qu'ils m'ont apporté durant les quatre années de ma thèse. Je souhaite aussi remercier Frédéric Bosio pour les petites discussions de maths qui on suivi les quelques parties d'échecs qu'on a disputé. Je remercie Mohamed-Salah Kalgui pour avoir guidé mes premiers pas dans la recherche et de m'avoir encouragé et aidé dans les moments difficiles.

Merci aux doctorants ou ex-doctorants : Apolinaire, Brice, Yasmine, Paola et tous les autres pour leur présence et leur amitié. Merci surtout à Charlène qui a eu la gentillesse de relire le texte de ma thèse et de me faire part de ses observations, à Kévin et Frédéric avec qui j'ai partagé le bureau pendant trois ans, à claire et Jules et tous les autres sportifs pour le plaisir qu'on a partagé au match de foot et de basket.

Grâce à la gentillesse et la patience des personnels administratifs des différents services du laboratoire de maths de Poitiers, l'ambiance de travail au LMA est incomparable. Je remercie surtout Jocelyne Attab, Nathalie Marlet, Brigitte Brault, Nathalie Mongin et Benoît Métrot.

Mon séjour à Paris n'aurait jamais été le même sans l'amitié des membres du club d'échecs de Sèvres Ville d'Avray. Je remercie surtout Pascal Colin, Guy Wanner et Pascal Champagne.

Je remercie mes frères Riadh, Walid et Ziad et ma sœur Hajeur pour leurs encouragements et leurs soutiens. Je remercie aussi tous les membres de ma famille, et surtout Chahad, Hala et Badis.

Mes remerciements s'adressent enfin à ma très chère mére. Tes prières et tes encouragements m'ont apporté le réconfort pendant les moments difficiles.

Pour vous tous, un grand merci ....

Anis

Table des matières

1 Introduction **9**
1.1 Histoire et motivation 9
1.2 Présentations des résultats obtenus 10
1.2.1 Première construction 10
1.2.2 Deuxième construction 11

2 Représentations lisses des groupes localement profinis **15**
2.1 Groupes localement profinis 15
2.2 Représentations lisses d'un groupe localement profini 17
2.3 Représentations induites 21
2.4 Représentations génériques de GL(N) 22
2.5 Représentations cuspidales 23
2.6 Représentations cuspidales de niveau zéro de GL(N) 25
2.7 Types de GL(N) 28

3 Complexes simpliciaux, Immeubles **31**
3.1 Combinatoire et topologie des complexes simpliciaux 31
3.1.1 Combinatoire des complexes simpliciaux 31
3.1.2 Topologie des complexes simpliciaux 35
3.2 Complexes de classes d'un groupe localement profini 39
3.2.1 Définitions et premières propriétés 39
3.2.2 Action de G sur $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ 41
3.2.3 Connexité des complexes $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ 42
3.3 Complexes de Coxeter 44
3.3.1 Groupes de Coxeter 44
3.3.2 Représentation canonique d'un groupe de Coxeter 45
3.3.3 Complexes de Coxeter 46
3.4 L'immeuble affine du groupe G_n 47

4 Cohomologie à support compact **51**
4.1 Cohomologie à support compact d'un complexe simplicial 51

4.1.1 Généralités 51
4.1.2 Homomorphisme induit par une application simpliciale 55
4.1.3 Lien entre la cohomologie simpliciale et topologique 56
4.2 Représentations dans des espaces de cohomologie 59
4.2.1 Formes harmoniques 60
4.2.2 Points fixes de la cohomologie d'un G-complexe 63
4.3 Cohomologie à support compact dans un système de coefficients 63
4.4 Appendice : Suites spectrales 68
4.4.1 Bicomplexes, graduations et filtrations 68
4.4.2 Suites spectrales 70
4.4.3 Cohomologie du recouvrement 72

5 Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Première construction 83
5.1 Chemins géodésiques de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ 83
5.2 Limite projective des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$ 87
5.3 Prolongement des chemins géodésiques de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ 91
5.4 Combinatoire des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$ 95
5.5 Représentations cuspidales de G_n et cohomologie des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$ 96
5.6 Les représentations $H^1_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C})$, pour $k \geqslant 1$ 99
5.7 Les représentations $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,0}, \mathbb{C})$ 102
5.8 Détermination des représentations induites 103
5.9 Structure des G_n-modules lisses $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C})$ 109

6 Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Deuxième construction 111
6.1 Complexes de classes 111
6.1.1 Définition et premières propriétés 112
6.1.2 Actions sur les complexe de classes de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ 114
6.1.3 Lien avec les complexes de Wagoner affines de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ 116
6.1.4 Combinatoire du complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ 118
6.1.5 Description des complexes $\mathcal{W}^s_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ 119
6.2 Cohomologie à support compact de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, $n \geqslant 3$ 126
6.3 Détermination de la représentation $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}^s_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ 129
6.4 Représentations cuspidales de niveau zéro de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ 138
6.5 Représentations cuspidales de $\mathrm{G}_3(k_{\mathrm{F}})$ 145

Bibliographie 149

Chapitre 1

Introduction

1.1 Histoire et motivation

Soient F un corps local non-archimédien, $\mathrm{G} := \mathbb{G}(\mathrm{F})$ le groupe des points F-rationnels d'un groupe réductif défini sur F et $\mathcal{B}(\mathrm{G})$ son immeuble de Bruhat-Tits. Dans leur article [BS71], Armand Borel et Jean-Pierre Serre ont étudié la cohomologie à support compact de $\mathcal{B}(\mathrm{G})$. Ils ont montré que l'espace de cohomologie à support compact $\mathrm{H}_c^k(\mathcal{B}(\mathrm{G}), \mathbb{C})$, où k est le rang semi-simple de G, s'identifie comme représentation complexe lisse à la représentation de Steinberg et que les espaces de cohomologies $\mathrm{H}_c^p(\mathcal{B}(\mathrm{G}), \mathbb{C})$ sont nuls pour $p \neq k$.

Se pose donc la question de l'existence d'autres espaces G-équivariants pour lesquels les espaces de cohomologie à support compact fournissent les représentations lisses les plus intéressantes.

Un deuxième travail dans cette direction, mais avec des idées très différentes, est celui de Peter Schneider et Ulrich Sthuler. Dans [PU97], Schneider et Sthuler définissent la catégorie $\mathrm{Coeff}_{\mathrm{G}}(\mathcal{B}(\mathrm{G}))$ des systèmes de coefficients G-équivariants sur $\mathcal{B}(\mathrm{G})$. Ils montrent que la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$ des représentations complexes lisses de G est un quotient de $\mathrm{Coeff}_{\mathrm{G}}(\mathcal{B}(\mathrm{G}))$. Voir une représentation comme un élément de $\mathrm{Coeff}_{\mathrm{G}}(\mathcal{B}(\mathrm{G}))$ revient en quelque sorte à coder l'information qu'elle contient dans certaines représentations des sous-groupes parahoriques de G.

Une sérieuse tentative de construction géométrique de représentations dans des espaces de cohomologie à support compact est donnée par Paul Broussous dans son article [Bro04b]. Paul Broussous a construit une tour projective équivariante d'espaces au-dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire p-adique $\mathrm{G}_n =: \mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$. Son idée était de construire des espaces qui se fibrent sur l'immeuble de Bruhat-Tits de façon minimale. Il montre que dans le cas n égale à 2, la cohomologie à support compact de cette tour d'espaces donne lieu à des représentations intéressantes. Puis dans [Bro08] et [Bro13], il considère une tour modifiée de sa tour d'espaces construite dans [Bro04b]. En s'appuyant sur la théorie des nouveaux vecteurs, il montre que toute représentation générique non

sphérique (π, V) de G_2 est un quotient du premier espace de cohomologie à support compact $\mathrm{H}^1_c(\widetilde{\mathrm{X}}_k, \mathbb{C})$ du k-ième étage de la tour, où $k = n(\pi)$ est le conducteur de π, et qu'en particulier toute représentation cuspidale est une sous-représentation de $\mathrm{H}^1_c(\widetilde{\mathrm{X}}_k, \mathbb{C})$. Il obtient ensuite le résultat remarquable suivant. Toute représentation cuspidale de G_2 admet une unique réalisation dans $\mathrm{H}^1_c(\widetilde{\mathrm{X}}_k, \mathbb{C})$ pour tout entier $k \geqslant n(\pi)$. Enfin dans [Bro13], après avoir totalement décrypté la structure de représentation des espaces $\mathrm{H}^1_c(\widetilde{\mathrm{X}}_k, \mathbb{C})$, Paul Broussous montre que presque tous les types de Bushnell et Kutzko de G_2 apparaissent dans la cohomologie de certains graphes finis.

Cette thèse est consacrée à la construction géométrique dans des espaces de cohomologie à support compact de représentations complexes lisse et de certains types de Bushnell et Kutzko du groupe linéaire sur un corps p-adique $\mathrm{G}_n =: \mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$.

1.2 Présentations des résultats obtenus

1.2.1 Première construction

On a commencé par généraliser à G_n, avec $n \geqslant 3$, la tour d'espaces construite par Paul Broussous dans [Bro08]. On a défini une tour projective équivariante d'espaces,

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{X}_{n,k+1} \longrightarrow \mathrm{X}_{n,k} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathrm{X}_{n,0} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathrm{G}_n)^{(1)}$$

qui se projettent sur le 1-squelette $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)^{(1)}$ de l'immeuble de Bruhat-Tits, où $\mathrm{X}_{n,k}$ est le graphe dirigé dont les sommets sont les chemins géodésiques de longueur k de l'immeuble de Bruhat-Tits et les arêtes sont les chemins géodésiques de longueur $k+1$. Le premier résultat qu'on a obtenu est le suivant :

Théorème 1.1. *(Théorème (5.21)) Toute représentation lisse irréductible générique non-sphérique (π, V) de G_n de caractère central trivial est un quotient de l'espace de cohomologie à support compact $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$, où $c(\pi)$ est le conducteur de π. De plus, si (π, V) est cuspidale, alors elle se plonge dans l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$.*

Ensuite, nous démontrons que ces modéles géométriques sont de plus uniques pour les représentations cuspidales irréductibles de G_n de caractère central trivial :

Théorème 1.2. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible cuspidale de G_n de caractère central trivial, alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\pi, \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})) = 1$$

L'unicité de ces modèles géométriques provient essentiellement de l'existence et unicité du nouveau vecteur pour les représentations lisses irréductibles génériques de G_n. L'étape suivante consistait à déterminer la structure de G_n-module lisses des espaces $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C})$. Pour décrypter la structure de G_n-modules lisses des espaces $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C})$, l'idée consiste à les fibrer sur l'immeuble de Bruhat-Tits. Nous avons obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a un isomorphisme de G_n-modules lisses,*

$$\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}) = \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,0},\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{\lambda\in k_{\mathrm{F}},q=0,\dots,k} c\text{-ind}_{\Gamma_{q,\lambda}}^{\mathrm{G}_n} \widetilde{\Psi}_{\lambda,q}$$

où k_{F} est le corps résiduel de F et pour $\lambda \in k_{\mathrm{F}}$ et $q \in \{0,\dots,k\}$, $\Gamma_{q,\lambda}$ est un certain sous-groupe ouvert compact de G_n et $\widetilde{\Psi}_{\lambda,q}$ un certain caractère lisse de $\Gamma_{q,\lambda}$ (voir le Théorème (5.28)).

Remarque 1.4.

(1) Pour $n = 3$, on a donné une description du le G_3-module lisse $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{3,0},\mathbb{C})$, par contre dans le cas $n \geqslant 4$ on n'a pas pu donner pour le moment une description du G_n-module lisse $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,0},\mathbb{C})$.

(2) Dans l'isomorphisme du théorème ci-dessus, on connaît explicitement les caractères $\widetilde{\Psi}_{\lambda,q}$. Par contre on n'a pas pu donner la structure des induites compactes intervenant dans l'isomorphisme du théorème.

1.2.2 Deuxième construction

En s'inspirant de [Wag75] et [Ess10], nous avons construit un espace $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ au-dessus de la première subdivision barycentrique $\mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ de l'immeuble de Bruhat-Tits de G_n. Plus précisément, notre espace est muni d'une projection simpliciale G_n^0-équivariante et propre, où G_n^0 est le sous-groupe fermé de G_n formé des matrices dont le déterminant est une unité :

$$p : \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$$

Dans [Ess10], Jan Esssert définit la tour projective de complexes de Wagoner affines au-dessus de la première subdivision barycentrique $\mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G})$ de l'immeuble affine d'un groupe muni d'une donnée radicielle valuée,

$$\dots \longrightarrow \mathcal{W}^{k+1}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathcal{W}^k(\mathrm{G}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{W}^1(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G})$$

L'espace $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ que nous considèrons est en fait un quotient par le groupe discret $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n \times \mathbb{Z}^{n-1}$ du premier espace de Wagoner affine $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n)$ de G_n.

Nous avons commencé a étudier les propriétés topologiques et combinatoires de notre espace $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. On a obtenu les résutats suivants :

Proposition 1.5. *L'espace $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ admet les propriétés suivantes :*

1. *Le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est non connexe et on a $\pi_0(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})) \simeq \mathbb{Z}$. De plus, les composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ sont les translatés $g\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, pour $g \in \mathrm{G}_n/\mathrm{G}_n^0$, d'un sous-complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ muni d'une action de G_n^0.*

2. Le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ *est muni d'une projection simpliciale propre et* G_n^0*-équivariante,*

$$p : \mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$$

En considérant le recouvrement de la subdivision barycentrique $\mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ par les complexes de drapeaux des résidus des sommets de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$,

$$\mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n) = \bigcup_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)} \mathcal{C}_s \text{ , où } \mathcal{C}_s = \mathrm{Flag}\{\sigma \in \Sigma_{\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)}, s \in \sigma\}$$

on obtient un recouvrement localement fini propre et G_n^0-équivariant de l'espace $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$,

$$\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} = \bigcup_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)} \mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \text{ , où } \mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} = p^{-1}(\mathcal{C}_s)$$

En étudiant ce dernier recouvrement de l'espace $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, on a montré que son nerf s'identifie de façon G_n^0-équivariante à l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ et que les termes $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ sont isomorphes à des complexes très proches du complexe de Wagoner du groupe linéaire sur le corps résiduel de F.

Pour calculer la cohomologie à support compact de notre espace $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ comme G_n^0-module lisse, on a eu besoin d'utiliser les suites spectrales du recouvrement pour la cohomologie simpliciale à support compact. En s'inspirant de [Bro82], on a obtenu le résulat suivant :

Théorème 1.6. *(Théorème (4.57)) Soit* G *un groupe localement profini,* X *un* G*-complexe simplicial propre muni d'un recouvrement* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ G*-équivariant, localement fini et propre par des sous-complexes, et* K *le nerf du recouvrement* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$*. Alors il existe une suite spectrale* E^r *dans la catégorie des représentation lisses de* G *dont le deuxième terme est donné par*

$$\mathrm{E}^2_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathrm{K}, \mathcal{H}^q)$$

où pour tout entier naturel q*,* $\mathcal{H}^q$ *est un certain système de coefficients* G*-équivariant sur* K*, telle que,*

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}^{p+q}_c(\mathrm{X})$$

En utilisant ce résulat on obtient l'existence d'une suite spectrale E^r dans la catégorie des repésentations lisses de G_n^0 qui converge vers la cohomologie à support compact de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. De plus, la suite spectrale E^r est n-triangulaire (voir définition (4.5.11), donc elle converge vers sa n-ième page (Théorème (4.53)), c'est-à-dire qu'il existe une filtration décroissante de $\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ telle que le gradué de $\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ pour cette filtration est donné par,

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=m} \mathrm{E}^n_{p,q}$$

On a commencé par traiter le cas $n = 3$. Dans ce cas, on a calculé la cohomologie à support compact du complexe $\mathcal{W}_3(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. En fait la représentation qui nous intéresse est $\mathrm{H}^2_c(\mathcal{W}_3(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$. Pour cette représentation on a obtenu :

Proposition 1.7. *Il existe une filtration décroissante de la représentation* $\mathrm{H}_c^2(\mathcal{W}_3(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ *de* $\mathrm{G}_3^0(\mathrm{F})$ *telle que*

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^2(\mathcal{W}_3(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})) = \mathrm{coKer}(\rho)\oplus \mathrm{H}_c^1(\mathrm{X},\mathcal{H}^1)\oplus\bigoplus_{s\in\mathrm{C}} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3^0(\mathrm{F})}\mathrm{H}^2(\mathcal{W}_3^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

où C *est une chambre de l'immeuble de Bruhat-Tits* X, $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ *le sous-groupe parahorique correspondant à un sommet* s *de* C, *et*

$$\rho : \mathrm{H}_c^0(\mathrm{X},\mathcal{H}^1)\longrightarrow \mathrm{H}_c^2(\mathrm{X},\mathcal{H}^0)$$

un opérateur d'entrelacement.

Enfin on a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.8. *Toute représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial du groupe* $\mathrm{G}_3(k_{\mathrm{F}})$ *se plonge dans le* $\mathrm{G}_3(k_{\mathrm{F}})$*-module* $\mathrm{H}^2(\mathcal{W}_3(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$

Corollaire 1.9. *Le* $\mathrm{G}_3(\mathrm{F})$*-module* $\mathrm{H}_c^2(\widetilde{\mathcal{W}}_3(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ *contient toutes les représentations cuspidales irréductibles de niveau zéro et de caractère central trivial sur* ${\mathcal{O}_{\mathrm{F}}}^{\times}$ *de* $\mathrm{G}_3(\mathrm{F})$.

Ensuite on a traité le cas $n\geqslant 3$. On a d'abord obtenu le résultat suivant :

Proposition 1.10. *Il existe une filtration décroissante de la représentation* $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ *de* $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ *telle que*

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})) = \bigoplus_{\substack{p+q=n-1\\ q\in\{0,\dots,n-3\}}} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n \oplus \mathrm{H}_c^1(\mathrm{X},\mathcal{H}^{n-2})\oplus\bigoplus_{s\in\mathrm{C}} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

où C *est une chambre de l'immeuble de Bruhat-Tits* X *et* $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ *le sous-groupe parahorique correspondant à un sommet* s *de* C. *De plus, le* $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$*-modules lisses* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n$ *s'identifie à un quotient de l'espace de cohomologie* $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{H}^q)$.

Puis en utilisant les formes harmoniques sur $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-complexe simplicial $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$, on a montré que les représentations cuspidales irréductibles de caractères central trivial de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ apparaissent dans l'espace de cohomologie $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$ avec une même multiplicité. Plus précisément, on a le théorème :

Théorème 1.11. *Toute représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial du groupe* $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ *se plonge dans le* $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$*-module* $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$. *De plus, la multiplicité d'une représentation cuspidale irréductible de* $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ *de caractère central trivial, qu'on note* m_{cusp}, *est égale à*

$$m_{\mathrm{cusp}} = \frac{1}{q^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)\cdots(q^{n-1}-q^{n-2})$$

Comme conséquence, on a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.12. *Toute représentation cuspidale irréductible de niveau zéro de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *de caractère central trivial sur* ${\mathcal{O}_\mathrm{F}}^\times$ *est isomorphe à un sous-quotient irréductible de*

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

.

Enfin, en montrant que le système de coefficients constant est un facteur direct dans le système de coefficients G-équivariant $\mathcal{H}^0$, on a obtenu le résultat suivant :

Théorème 1.13. *La représentation de Steinberg de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *est isomorphe à un sous-quotient irréductible de*

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

Chapitre 2

Représentations lisses des groupes localement profinis

Cette section rassemble quelques faits standards autour des groupes localement profinis et leurs représentations lisses. Tous les résultats indiqués ici sont facilement disponibles dans la littérature, et la plupart des preuves ici se trouvent dans l'une des références suivantes : [BH06], [Ren10], [BZ76].

2.1 Groupes localement profinis

Dans ce chapitre, tous les espaces topologiques seront supposés séparés. Un espace topologique X est dit totalement discontinu si toute composante connexe dans X est réduite à un singleton. Un espace topologique X est totalement discontinu si et seulement si chaque point admet une base de voisinages ouverts fermés. Un groupe topologique totalement discontinu est un groupe topologique dont l'espace topologique sous-jacent est totalement discontinu.

Proposition-Définition 2.1. *Soit* G *un groupe topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est une limite projective de groupes finis.*

(ii) G *est compact et l'élément neutre possède un système fondamental de voisinages formé de sous-groupes ouverts compacts.*

(iii) G *est compact et totalement discontinu.*

Un groupe profini est un groupe topologique vérifiant l'une des propriétés équivalentes précédentes.

Démonstration. Voir [HR95] □

Définition 2.2. *Un groupe localement profini est un groupe topologique* G *tel que l'élément neutre possède un système fondamental de voisinages formé de sous-groupes ouverts compacts.*

Proposition 2.3. *Un groupe topologique* G *est localement profini si et seulement si* G *est localement compact et totalement discontinu.*

Démonstration. Voir [HR95] □

Exemple 2.4. *(i) Le groupe additif du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques est un groupe localement profini. Un système fondamental de voisinages formé par des sous-groupes ouverts compact est donné par les sous-groupes $p^k\mathbb{Z}_p$, pour $k \in \mathbb{Z}$*

(ii) Le groupe additif de l'anneau $\mathbb{Z}_p$ des entiers p-adiques est un groupe profini.

Notations 2.5.

On rappelle qu'un corps localement compact non-archimédien est un corps F *localement compact et complet pour une valuation discrète. A isomorphisme près, un tel corps est soit une extension finie du corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques, soit le corps $\mathbb{F}_q((\mathrm{X}))$ des séries de Laurent, voir [Wei95]. On appellera corps p-adique tout corps localement compact non-archimédien. Dans toute la suite, on fixe les notations suivantes :*

- F *est un corps localement compact non archimédien.*
- $\mathcal{O}_\mathrm{F}$ *l'anneau des entiers de* F.
- $\mathfrak{p}_\mathrm{F}$ *l'idéal maximal de* $\mathcal{O}_\mathrm{F}$.
- k_F *le corps résiduel de* F *et* q_F *son cardinal.*
- *On fixe une uniformisante* ϖ_F *de* F *une fois pour toute et on note* υ_F *la valuation normalisée de* F.

Exemple 2.6. *(i) Pour tout corps p-adique* F*, le groupe additif de* $\mathrm{M}_n(\mathrm{F}) \simeq \mathrm{F}^{n^2}$ *muni de la topologie produit, est un groupe localement profini. Le groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$*, muni de la topologie induite, est un ouvert dense de* $\mathrm{M}_n(\mathrm{F})$ *et c'est un groupe localement profini. Le sous-groupe* $\mathrm{K} = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_\mathrm{F})$ *est ouvert compact dans* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ *et un système fondamental de voisinages de l'élément neutre formé de sous-groupes ouverts compacts est donné par les sous-groupes de congruences*

$$\mathrm{K}_m = \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{F})/\ g - 1 \in \mathrm{M}_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^m)\},\ m \geqslant 1$$

(ii) Plus généralement, si $\mathrm{G} = \mathbb{G}(\mathrm{F})$ *est le groupe des points* F*-rationnels d'un groupe algébrique défini sur* F*, alors* G *est un groupe localement profini. En effet* G *se plonge, en tant que* F*-groupe algèbrique, dans* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ *pour un certain n. Via ce plongement,* G *s'identifie à un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ *et est donc un groupe localement profini.*

2.2 Représentations lisses d'un groupe localement profini

Définition 2.7. *Une représentation d'un groupe* G *est un morphisme de groupes*

$$\pi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$$

de G *dans le groupe des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel complexe* V*. Un* G*-module est un espace vectoriel complexe* V *muni d'une représentation de* G*.*

Des telles représentations seront notées (π, V), π ou V. S'il n'y a pas risque de confusion, on utilisera parfois la notation $g.v$ pour désigner $\pi(g)(v)$.

Définition 2.8. *Soit* G *un groupe localement profini. Une représentation lisse de* G *est une représentation* (π, V) *de* G *telle que pour tout* $v \in \mathrm{V}$*, le stabilisateur*

$$Stab_{\mathrm{G}}(v) = \{g \in \mathrm{G} / \ \pi(g)(v) = v\}$$

est ouvert. Un G*-module lisse est un espace vectoriel complexe* V *muni d'une représentation lisse de* G*.*

Soit G un groupe localement profini et (π, V) une représentation de G. Pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, on définit l'espace des vecteurs fixés par K,

$$\mathrm{V}^{\mathrm{K}} = \{v \in \mathrm{V} / \ k.v = v, \ \forall \ k \in \mathrm{K}\}$$

La partie lisse de V, qu'on note V^{∞}, est définie par,

$$\mathrm{V}^{\infty} = \bigcup_{\mathrm{K}} \mathrm{V}^{\mathrm{K}}$$

où K parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G.

Remarque 2.9. *La correspondance* $\mathrm{V} \longmapsto \mathrm{V}^{\infty}$ *détermine un foncteur, de la catégorie des* G*-modules dans la catégorie des* G*-modules lisses. Ce foncteur est exact à gauche, c'est-à-dire que toute suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{V}_1 \longrightarrow \mathrm{V}_2 \longrightarrow \mathrm{V}_3 \longrightarrow 0$$

de G*-modules induit une suite exacte de* G*-modules lisses*

$$0 \longrightarrow \mathrm{V}_1^{\infty} \longrightarrow \mathrm{V}_2^{\infty} \longrightarrow \mathrm{V}_3^{\infty}$$

Soit (π, V) une représentation lisse d'un groupe localement profini G. La représentation de G dans un sous-espace G-invariant W de V est lisse, et est appellée sous-représentation de G. Un quotient de (π, V) est une représentation de G dans un quotient V/W, où W est une sous-représentation de V. Un sous-quotient de (π, V) est un quotient de sous-représentations de V, c'est-à-dire si $\mathrm{W}_2 \subset \mathrm{W}_1$ sont deux sous-représentations de V, alors la représentation de G dans $\mathrm{W}_1/\mathrm{W}_2$ est un sous-quotient de V. Il est immédiat que la représentation de G dans un quotient (resp. sous-quotient) de V est une représentation lisse.

Une représentation (π, V) de G est dite irréductible si $\mathrm{V} \neq 0$ et si V n'admet aucune sous-représentation non triviale. Si (π, V) et (σ, W) sont deux représentations lisses de G, un opérateur d'entrelacement (ou application linéaire G-équivariante) de V dans W est une application linéaire $f : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ vérifiant

$$f \circ \pi(g) = \sigma(g) \circ f, \quad \text{pour tout } g \in \mathrm{G}.$$

L'espace des opérateurs d'entrelacement de V dans W sera noté $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \sigma)$ ou $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$. La notation $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\pi)$ ou $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$ sera utilisée pour désigner $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \pi) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{V})$.

Deux représentations (π, V) et (σ, W) de G sont dites isomorphes (ou équivalentes) si l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \sigma)$ contient un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

On notera $\widehat{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$) l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses (resp. représentations lisses irréductibles) de G.

Notons enfin $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$ la catégorie des représentations lisses de G, les morphismes étant les opérateurs d'entrelacements. C'est une catégorie abélienne.

Exemple 2.10. *(i) Un caractère lisse de* G *est un morphisme de groupes* $\chi : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ *à noyau ouvert. Un tel caractère, définit une représentation lisse de* G

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C})$$

par $g.v = \chi(g)v$*, pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *et* $v \in \mathbb{C}$*. C'est une représentation lisse de* G*. Réciproquement, toute représentation lisse de dimension 1 de* G *est équivalente à une telle représentation. Par conséquent, l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations lisses de dimension 1 de* G *s'identifie canoniquement au groupe des caractères lisses de* G*.*

(ii) Soit $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})$ *l'espace des fonctions* $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathbb{C}$ *localement canstantes et à support compact. On définit deux représentations de* G *dans l'espace* $\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})$

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})),\ g \longmapsto \lambda(g)(f) \qquad et \qquad \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})),\ g \longmapsto \rho(g)(f)$$

par $\lambda(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$ *et* $\rho(g)(f)(x) = f(xg)$*, pour tout* $x \in \mathrm{G}$*. Si* $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{G})$*, on vérifie facilement qu'il existe deux sous-groupes ouverts compacts* K_1 *et* K_2 *de* G *(dépendants de* f*) tel que* $f(k_1 g k_2) = f(g)$ *pour tout* $k_1 \in \mathrm{K}_1$*,* $k_2 \in \mathrm{K}_2$ *et* $g \in \mathrm{G}$*. Ce qui prouve que les représentations* λ *et* ρ *de* G *sont lisses.*

Définition 2.11. *Une représentation lisse* (π, V) *de* G *est dite semi-simple si elle est somme directe de sous-représentations irréductibles.*

Proposition 2.12. *Soit* (π, V) *une représentation lisse de* G*. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) (π, V) *est semi-simple.*

(2) Tout sous-espace G*-invariant de* V *possède un supplémentaire* G*-invariant.*

Démonstration. Voir [BH06]. □

Proposition 2.13. *Si* G *est un groupe profini. Toute représentation lisse de* G *est semi-simple.*

Démonstration. Voir [BH06], lemme page 15. □

Soit G un groupe localement profini et K un sous-groupe ouvert compact de G. Si $\rho \in \mathrm{Irr}(\mathrm{K})$ et (π, V) est une représentation lisse de G, la composante ρ-isotypique de V, qu'on note V^ρ, est la somme des tous les sous-K-représentations de V isomorphes à ρ. Par exemple, l'espace V^K des vecteurs fixés par K est la composante isotypique de V pour la représentation triviale 1_K de K.

Proposition 2.14. *Soit* (π, V) *une représentations lisse de* G *et* K *un sous-groupe ouvert compact de* G*.*

(1) L'espace V *est somme directe de ses composantes* K*-isotypiques :*

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\rho \in \mathrm{Irr}(\mathrm{K})} \mathrm{V}^\rho$$

(2) Soit (σ, W) *une représentation lisse de* G*. Pour tout opérateur d'entrelacement* $f : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$ *et* $\rho \in \mathrm{Irr}(\mathrm{K})$*, on a* $f(\mathrm{V}^\rho) \subset \mathrm{W}^\rho$ *et* $\mathrm{W}^\rho \cap f(\mathrm{V}) = f(\mathrm{V}^\rho)$

Démonstration. Voir [BH06], proposition page 15. □

Remarque 2.15. *Une suite de* G*-modules*

$$\mathrm{U} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{V} \xrightarrow{\psi} \mathrm{W}$$

est exacte si et seulement si la suite

$$\mathrm{U}^\mathrm{K} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{V}^\mathrm{K} \xrightarrow{\psi} \mathrm{W}^\mathrm{K}$$

est exacte, pour tout sous-groupe ouvert compact K *de* G*.*

Soit (π, V) une représentation lisse de G. Pour tout sous-groupe H de G, on note V(H) le sous-espace de V engendré par les vecteurs $v - \pi(h)(v)$, pour $v \in \mathrm{V}$ et $h \in \mathrm{H}$.

Proposition 2.16. *Soit* K *un sous-groupe ouvert compact de* G*. Alors*

$$\mathrm{V}(\mathrm{K}) = \bigoplus_{\rho\in \mathrm{Irr}(\mathrm{K}),\ \rho\neq 1} \mathrm{V}^{\rho} \quad , \quad \mathrm{V} = \mathrm{V}^{\mathrm{K}} \oplus \mathrm{V}(\mathrm{K})$$

et $\mathrm{V}(\mathrm{K})$ *est l'unique supplémentaire* K*-invariant de* V^{K} *dans* V*.*

Démonstration. Voir [BH06], corollaire 2 page 16. □

Définition 2.17. *Une représentation lisse* (π, V) *d'un groupe localement profini est dite admissible si pour tout sous-groupe ouvert compact* K *de* G*, le sous-espace des vecteurs fixes* V^{K} *est de dimension finie.*

Soit G un groupe localement profini et (π, V) une représentation lisse de G. Notons V^* le dual algébrique de V et

$$\begin{array}{c} \mathrm{V}^* \times \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (v^*, v) \longmapsto < v^*, v > \end{array}$$

le crochet de dualité.

L'espace V^* est muni de la représentation π^* de G définie par :

$$< \pi^*(g)(v^*), v > = < v^*, \pi(g^{-1})(v) >, \text{ pour tout } v^* \in \mathrm{V}^*,\ v \in \mathrm{V} \text{ et } g \in \mathrm{G}$$

Cette représentation n'est pas nécessairement lisse. On note $\widetilde{\pi}$ ou $\widetilde{\mathrm{V}}$ sa partie lisse et on l'appelle la représentation contragrédiente de (π, V).

La représentation V se plonge de façon canonique dans $\widetilde{\widetilde{\mathrm{V}}}$, la contragrédiente de sa contragrédiente, le plongement $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \widetilde{\widetilde{\mathrm{V}}}$ étant donné par,

$$< \varphi(v), \widetilde{v} >_{\widetilde{\mathrm{V}}} = < \widetilde{v}, v >_{\mathrm{V}}$$

Proposition 2.18. *Le plongement canonique* φ *est un isomorphisme si et seulement si* V *est admissible.*

Démonstration. Voir [BH06],2.9. □

A toute application linéaire G-équivariante $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$, on associe une application linéaire G-équivariante

$$\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathrm{W}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{V}}$$

définie par $< \widetilde{\varphi}(\widetilde{w}), v > = < \widetilde{w}, f(v) >$, pour tout $\widetilde{w} \in \widetilde{\mathrm{W}}$ et $v \in \mathrm{V}$. Cela signifie que que la correspondance

$$\mathfrak{R}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathrm{G}), \quad \mathrm{V} \longmapsto \widetilde{\mathrm{V}}$$

est un foncteur contravariant.

Lemme 2.19. *Le foncteur contravariant*

$$\mathfrak{R}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathrm{G}), \quad \mathrm{V} \longmapsto \widetilde{\mathrm{V}}$$

est exact.

2.3 Représentations induites

Soit G un groupe localement profini et H un sous-groupe fermé de G. Si (σ, V) est une représentation lisse de G, alors la restriction de π à H est une représentation lisse de H, qu'on note $\pi_{|\mathrm{H}}$ ou $\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\pi$. Toute application linéaire G-équivariante entre deux représentations lisses de G est évidemment H-équivariante. Donc $\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$ est un foncteur covariant de la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$ dans la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$. Comme pour le cas des groupes finis ([Ser77, 3.3 Lemma 1]), ce foncteur possède un adjoint à droite, c'est le foncteur $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$.

Définition 2.20. *Soit* G *un groupe localement profini,* H *un sous-groupe fermé de* G *et* (σ, V) *une représentation lisse de* H*. On définit la représentation induite*

$$(\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\sigma, \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V})$$

comme suit. L'espace $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$ *est l'espace des fonctions* $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{V}$ *vérifiant :*

(a) $f(hg) = \sigma(h).f(g)$ *pour tout* $h \in \mathrm{H}$ *et* $g \in \mathrm{G}$*.*

(b) Il existe un sous-groupe ouvert compact K_f *de* G*, tel que* $f(gk) = f(g)$ *pour tout* $k \in \mathrm{K}_f$ *et* $g \in \mathrm{G}$*.*

Cet espace est muni de la représentation $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\sigma$ *de* G *définie par*

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\sigma(g)(f)(x) = f(xg), \quad \text{pour tout } x \in \mathrm{G} \text{ et tout } g \in \mathrm{G}$$

La représentation $(\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\sigma, \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V})$ *est appelée la représentation induite de* H *à* G *de* (σ, V)*.*

On définit aussi $c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$ *comme le sous-espace de* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$ *des fonctions* f *dont le support est compact modulo* H*. Il est clair que* $c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$ *est un sous-espace* G*-invariant de* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$*. La représentation de* G *dans* $c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$ *est appelé l'induite compacte de* H *à* G *de* σ*, qu'on note* $(c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\sigma, c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V})$*.*

A toute application linéaire H-équivariante $\varphi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{W}$, on associe une application linéaire G-équivariante

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{W}, \ f \longmapsto \varphi \circ f$$

Cette application envoie $c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{V}$ dans $c\text{-}\mathrm{ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\mathrm{W}$. Par conséquent, l'induction et l'induction compact définissent deux foncteurs de $\mathfrak{R}(\mathrm{H})$ dans $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$.

Théorème 2.21. *(Réciprocité de Frobenius)*

(1) Le foncteur $\mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$ *est l'adjoint à droite du foncteur* $\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$*. C'est-à-dire que pour toute représentation lisse* (π, V) *de* G *et toute représentation lisse* (σ, W) *de* H*, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \mathrm{Ind}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\sigma) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{Res}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}\pi, \sigma)$$

(2) Si H *est un sous-groupe ouvert de* G*, alors le foncteur* $c\text{-ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}$ *est l'adjoint à gauche du foncteur* $\mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}$*. C'est-à-dire que pour toute représentation lisse* (π, V) *de* G *et toute représentation lisse* (σ, W) *de* H*, on a un isomorphisme naturel :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(c\text{-ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\sigma, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\sigma, \mathrm{Res}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\pi)$$

Démonstration. Voir [BH06], 2.4. □

Lemme 2.22. *Les foncteurs* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}$ *et* $c\text{-ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}$ *sont exacts.*

Démonstration. Voir [BH06], 2.5. □

Proposition 2.23. *Soit* K *un sous-groupe ouvert compact de* G *et* Λ *un système de représentants des doubles classes* $\mathrm{H}\backslash\mathrm{G}/\mathrm{K}$*. Alors l'application*

$$(c\text{-ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\sigma)^{\mathrm{K}} \longrightarrow \bigoplus_{g\in\Lambda} \mathrm{W}^{\mathrm{H}\cap g\mathrm{K}g^{-1}}$$

qui à une fonction $f \in (c\text{-ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\sigma)^{\mathrm{K}}$ *associe* $(f(g))_{g\in\Lambda}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. Voir [Ren10], III.2.2.

□

2.4 Représentations génériques de GL(N)

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^k)$ le sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$ donné par

$$\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^k) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^\times & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \vdots \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^\times & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \hline \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^k & \cdots & \cdots & \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^k & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^\times \end{array}\right)$$

On fixe un caractère lisse ψ du groupe $(\mathrm{F}, +)$ trivial sur $\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}$ et non trivial sur $\mathcal{O}_F$ et on définit un caractère lisse θ_ψ du groupe U_n formé par les matrices unipotentes supérieures par

$$\theta_\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & u_{1,2} & \cdots & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \psi(u_{1,2} + ... + u_{n-1,n})$$

Une représentation lisse irréductible (π, V) de G_n est dite générique si l'espace des entrelacements $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{U}_n}^{\mathrm{G}_n}\theta_\psi)$ est non nul. Par la réciprocité de Frobenius, ceci est équivalent à l'existence d'une forme linéaire non nulle $\ell : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $\ell(\pi(u).v) = \theta_\psi(u)\ell(v)$ pour tout $v \in \mathrm{V}$ et $u \in \mathrm{U}_n$. Si π est générique alors elle se réalise dans un certain espace de fonction f avec la propriété $f(ug) = \theta_\psi(u)f(g)$ pour tout $u \in \mathrm{U}_n$ et $g \in \mathrm{G}_n$ et l'action de G_n sur l'espace de π est par translation à droite, une telle réalisation est appelé modèle de Whittaker de π.
Le théorème suivant du à Bernstein et Zelevinski montre que les représentations génériques possédent un unique modèle de Whittaker, voir [BZ76], V.16.

Théorème 2.24 (J.Bernstein et A.Zelevinski)**.** *Soit (π, V) une représentation irréductible et admissible de G_n. Alors la dimension de l'espace des entrelacement de π à $\mathrm{Ind}_{\mathrm{U}_n}^{\mathrm{G}_n}\theta_\psi$ est inférieure à 1, c'est-à-dire*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{U}_n}^{\mathrm{G}_n}\theta_\psi) \leqslant 1$$

En particulier, si π est générique, alors elle possède un unique modèle de Whittaker.

Soit (π, V) une représentation générique de G_n. Le théorème suivant du à H. Jacquet, J. L Piatetski-Shapiro et J. Shalika permet de définir le conducteur de π, voir [JPSJ81], V.1.

Théorème 2.25 (H. Jacquet, J. L Piatetski-Shapiro et J. Shalika)**.**

1. *Pour k assez grand, l'espace des vecteurs fixes $\mathrm{V}^{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^k)}$ est non nul.*
2. *Soit $c(\pi)$ le plus petit entier positis tel que $\mathrm{V}^{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})} \neq 0$. Alors on a*

$$\dim V^{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{c(\pi)+1})} = 1$$

L'entier $c(\pi)$ est appellé le conducteur de π.

2.5 Représentations cuspidales

Dans cette section G sera le groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique réductif défini sur F et P un sous-groupe parabolique de G de décomposition de Levi $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$.

Soit (π, V) une représentation lisse de G. On note V(N) le sous-espace de V engendré par les vecteurs $\pi(n).v - v$, pour $v \in \mathrm{V}$ et $n \in \mathrm{N}$. L'espace des co-invariants est par définition le quotient :

$$\mathrm{V}_\mathrm{N} = \mathrm{V}/\mathrm{V}(\mathrm{N})$$

On remarque que $\mathrm{V}(g\mathrm{N}g^{-1}) = \pi(g)\mathrm{V}(\mathrm{N})$ pour tout $g \in \mathrm{G}$. Comme M normalise N, l'espace $\mathrm{V}(\mathrm{N})$ est invariant pour l'action de M. On définit le foncteur de Jacquet, $(\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi, \mathrm{V}_{\mathrm{N}}) \in \mathfrak{R}(\mathrm{M})$, par l'action naturelle de M sur l'espace coinvariant,

$$(\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi)(m)(v + \mathrm{V}_{\mathrm{N}}) = \pi(m).v + \mathrm{V}_{\mathrm{N}}$$

On obtient un foncteur de la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$ dans la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{M})$,

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}} : \mathfrak{R}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathrm{M}),\ (\pi, \mathrm{V}) \longmapsto (\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi, \mathrm{V}_{\mathrm{N}})$$

Soit (ρ, W) une représentation lisse de M. On étend ρ à P en mettant N dans son noyau et on note encore ρ la représentation de P obtenu. On définit la représentation $(\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho, \boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\mathrm{W})$ par,

$$(\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho, \boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\mathrm{W}) = (\mathrm{Ind}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho, \mathrm{Ind}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\mathrm{W})$$

On obtient un foncteur de la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{M})$ dans la catégorie $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$,

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}} : \mathfrak{R}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathrm{G}),\ (\rho, \mathrm{W}) \longmapsto (\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho, \boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\mathrm{W})$$

Proposition 2.26. *Soit (π, V) une représentation lisse de G, $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$ un sous-groupe parabolique de G, et (ρ, W) une représentation lisse de M. On a les propriétés suivantes :*

(i) Les foncteurs

$$\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}} : \mathfrak{R}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathrm{M}),\ \boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}} : \mathfrak{R}(\mathrm{M}) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathrm{G})$$

sont exacts.

(ii) Le foncteur $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}$ est adjoint à gauche à $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi, \rho) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho)$$

(iii) Si $\mathrm{L} \subset \mathrm{M}$ est un sous-groupe de Levi de G, alors ces foncteurs sont transitifs, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}} \circ \boldsymbol{i}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{i}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{G}}, \quad \mathbf{r}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{M}} \circ \mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}} = \mathbf{r}_{\mathrm{L}}^{\mathrm{G}}$$

(iv) Si ρ et π sont admissibles (resp. de longueur finie), alors $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho$ et $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi$ le sont aussi.

Démonstration. Voir [Ren10], page 200. □

Définition 2.27. *Une représentation (π, V) de G est dite cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$ de G, $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi$ est nul.*

Remarque 2.28.

1. *Une représentation lisse (π, V) de G est cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre standard $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$ de G, $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\pi$ est nul.*
2. *Etant donné que le foncteur $\mathbf{r}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}$ est exact, tout sous-quotient d'une représentation cuspidale est cuspidale.*
3. *Une représentation cuspidale (π, V) de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$ est générique.*

Il y a quelques autres conditions équivalentes dues à Jacquet pour caractériser une représentation cuspidale.

Théorème 2.29. *Soit* (π, V) *une représentation lisse de* G. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) (π, V) *est cuspidale.*

(b) $(\widetilde{\pi}, \widetilde{\mathrm{V}})$ *est cuspidale.*

(c) Les coefficients matriciels de (π, V) *sont à support compact modulo le centre* $\mathrm{Z}(G)$.

(d) Pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$ *de* G *et pour toute représentation lisse* ρ *de* M *on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\pi, \boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho) = 0$$

(e) Pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathrm{P} = \mathrm{MN}$ *de* G *et toute toute représentation admissible* ρ *de* M, π *n'est pas une sous-repésentation de* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho$.

Pour la dernière condition, il faut que π *soit irréductible.*

Démonstration. Voir [Ren10], VI.2.1, page 201. □

Théorème 2.30. *Soit* (π, V) *une représentation irréductible et admissible de* G. *Alors, il existe un sous-groupe de Levi* M *de* G *et une représentation lisse irréductible cuspidale de* M *telle que* π *est une sous-représentation de* $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\rho$.

Démonstration. Voir [Ren10], VI.2.1, corollaire page 205. □

Soit χ un caractère lisse de $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$. Une représentation lisse (π, V) de G est dite une χ-représentation si $\pi(zg) = \chi(z)\pi(g)$ pour tout $z \in \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ et $g \in \mathrm{G}$. Les χ-représentations de G forment une sous-catégorie de $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$ qu'on note $\mathfrak{R}_\chi(\mathrm{G})$.

Théorème 2.31. *Soit* χ *un caractère lisse de* $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$. *Si* (π, V) *est une* χ*-représentation admissible cuspidale de* G, *alors* (π, V) *est un objet projectif et injectif de la catégorie* $\mathfrak{R}_\chi(\mathrm{G})$.

Démonstration. Voir [Cas95], théorème (5.4.1), page 49. □

2.6 Représentations cuspidales de niveau zéro de GL(N)

Dans cette section G sera le groupe $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$. Tous les résultats indiqués ici sont facilement disponibles dans la littérature, et la plupart des preuves se trouvent dans la référence [BH06].

Définition 2.32. *Pour $i = 1, 2$, soit K_i un sous-groupe ouvert compact de G, et ρ_i une représentation lisse irréductible de K_i. On dit que $g \in \mathrm{G}$ entrelace ρ_1 avec ρ_2 si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}_1^g \cap \mathrm{K}_2}(\rho_1^g, \rho_2) \neq 0$$

où ρ_1^g désigne la représentation $x \longmapsto \rho_1(gxg^{-1})$ du groupe $\mathrm{K}_1^g = g^{-1}\mathrm{K}_1 g$.

Cette condition signifie qu'il existe une application linéaire non nulle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$, où pour $i = 1, 2$, V_i désigne l'espace de ρ_i, telle que

$$f(\rho_1(gxg^{-1})v_1) = \rho_2(x)(f(v_1))$$

pour tout $v_1 \in \mathrm{V}_1$ et $x \in g^{-1}\mathrm{K}_1 g \cap \mathrm{K}_2$.

Définition 2.33. *Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G et K un sous-groupe ouvert compact de G. Soit ρ une représentation lisse irréductible de K. On dit que π contient ρ, ou que ρ apparaît dans π, si la représentation semisimple $\pi_{|\mathrm{K}}$ contient ρ comme constituant irréductible, autrement dit si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\rho, \pi_{|\mathrm{K}}) \neq 0$$

.

Proposition 2.34. *Pour $i = 1, 2$, soit (K_i, ρ_i) une paire formée d'un sous-groupe ouvert compact K_i de G et d'une représentation lisse irréductible ρ_i de K_i. Supposons qu'une représentation lisse irréductible (π, V) de G contienne à la fois ρ_1 et ρ_2. Alors il existe une élément g de G qui entrelace ρ_1 avec ρ_2.*

Définition 2.35. *Une représentation lisse irréductible (π, V) de G est dite de niveau zéro s'il existe un sous-groupe parahorique P de G de radical pro-unipotent U telle que $\mathrm{V}^{\mathrm{U}} \neq 0$.*

La relation, définie par $(\mathrm{K}_1, \rho_1)\mathfrak{R}(\mathrm{K}_2, \rho_2)$ si et seulement s'il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que g entrelace ρ_1 avec ρ_2, est symétrique et réflexive mais elle n'est pas transitive pour G un groupe quelconque, et en particulier pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$. Si $(\mathrm{K}_1, \rho_1)\mathfrak{R}(\mathrm{K}_2, \rho_2)$, on dira que les paires (K_1, ρ_1) et (K_2, ρ_2) s'entrelacent dans G. On dit que $g \in \mathrm{G}$ entrelace (K, ρ) s'il entrelace ρ avec lui-même. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on appelera paire un couple (K, ρ) formé d'une sous-groupe compact modulo le centre et d'une représentation lisse irréductible lisse ρ de K. L'entrelacement d'une paire (K, ρ) dans G est l'ensemble

$$\mathrm{I}_{\mathrm{G}}(\rho) = \{g \in \mathrm{G},\ g \text{ entrelace } \rho\}$$

Soit (K, ρ) une paire telle que K contienne le centre Z de G. Notons W l'espace de ρ. On définit l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho)$ de G relativement à ρ comme étant l'espace des fonctions $f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{W})$ vérifiant :

(1) f est à support compact modulo le centre.

(2) $f(k_1gk_2) = \rho(k_1) \circ f(g) \circ \rho(k_2)$, $k_1, k_2 \in \mathrm{K}$, $g \in \mathrm{G}$.

Remarquons que les conditions (1) et (2) entraînent que f a un support contenu dans la réunion d'un nombre fini de doubles classes KgK.

On fixe une mesure de Haar μ sur G/Z et on définit la convolution de deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho)$, par

$$f_1 * f_2(g) = \int_{\mathrm{G/Z}} f_1(x) \circ f_2(x^{-1}g) d\mu(\dot{x})$$

On montrera que $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho)$ munie de la convolution des fonctions est une $\mathbb{C}$-algèbre associative avec une unité et on vérifiera que cette unité est la fonction f_0 dont le support est K et qui est donnée par

$$f_0(k) = \frac{1}{\mu(\mathrm{K/Z})} \rho(k), \ k \in \mathrm{K}$$

Le résultat fondamental suivant fait le lien entre l'entrelacement et l'algèbre de Hecke sphérique.

Lemme 2.36. *Avec les notations précédentes, un élément $g \in \mathrm{G}$ entrelace ρ si, et seulement si, il existe une fonction non nulle $f \in \mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho)$ à support dans* KgK.

Nous allons donner une interprétation de l'algèbre $\mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho)$ qui montre que sa structure est liée à celle de l'induite compacte c-$\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho$.

Pour $\phi \in \mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho)$ et toute fonction f dans l'espace de l'induite c-$\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho$, on définit $\mathrm{E}_\phi(f) = \phi * f$ comme étant la convolution

$$(\phi * f)(g) = \int_{\mathrm{G/Z}} \phi(x) f(x^{-1}g) d\mu(x)$$

On vérifie que $\mathrm{E}_\phi(f)$ est dans l'espace de l'induite c-$\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho$ et que E_ϕ est un élément de $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}(c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho)$. On a donc un morphisme d'algèbres :

$$\mathrm{E} : \mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho)$$

Proposition 2.37. *Le morphisme*

$$\mathrm{E} : \mathcal{H}(\mathrm{G}, \rho) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{G}}(c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho)$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Démonstration. Voir [BH06], page 80. □

Théorème 2.38. *Soit* K *un sous-groupe ouvert compact de* G *qui contient le centre* Z *et qui est compact modulo* Z. *Soit* (ρ, W) *une représentation lisse irréductible de* K *telle que :*

$$\mathrm{I}_{\mathrm{G}}(\rho) = \mathrm{K}$$

Alors l'induite compacte c-$\mathrm{ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}}\rho$ est irréductible et cuspidale.

Le théorème d'irréductibilité précédent permet d'obtenir toutes les représentations cuspidales de niveau zéro.

Nous supposons ici que K est le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\mathrm{F})$ de G et

$$\mathrm{K}^1 = \mathrm{I}_n + \varpi_\mathrm{F}\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_\mathrm{F})$$

son radical pro-unipotent. Le groupe quotient K/K^1 s'identifie canoniquement au groupe $\mathrm{G}(k_\mathrm{F}) = \mathrm{GL}(n, k_\mathrm{F})$.

Rappelons qu'une représentation irréductible (π, V) de $\mathrm{G}(k_\mathrm{F})$ est cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre $\mathrm{P}(k_\mathrm{F}) = \mathrm{M}(k_\mathrm{F})\mathrm{N}(k_\mathrm{F})$, où $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$ est un sous-groupe de Levi de $\mathrm{P}(k_\mathrm{F})$ et $\mathrm{N}(k_\mathrm{F})$ son radical unipotent, l'espace des vecteurs fixes $\mathrm{V}^{\mathrm{N}(k_\mathrm{F})}$ est nul.

On dit qu'une représentation σ de K est relevée d'une représentation $\bar{\sigma}$ de $\mathrm{G}(k_\mathrm{F})$ si elle est triviale sur K^1 est si elle induit la représentation $\bar{\sigma}$ sur le quotient. Les représentations cuspidales de niveau zéro sont données par le théoréme suivant :

Théorème 2.39 ([Mur09], page 66)**.** *Soit $\bar{\sigma}$ une représentation cuspidale irréductible de $\mathrm{G}(k_\mathrm{F})$, σ sa relevée à $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\mathrm{F})$, et* W *son espace.*

(a) Soit $c \in \mathbb{C}^\times$. Il existe une unique extension σ_c de σ à ZK *telle que $\sigma(\varpi_\mathrm{F}\mathrm{I}_n) = c.\mathrm{Id}_\mathrm{W}$. Soit π l'induite compacte c-$\mathrm{ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}}\sigma_c$. Alors π est une représentation cuspidale irréductible de* G*.*

(b) Soit π une représentation lisse irréductible de G *contenant σ. Alors il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ telle que $\pi = c$-$\mathrm{ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}}\sigma_c$.*

(c) Toute représentation cuspidale irréductible de niveau zéro est obtenu comme en (a) pour une certaine représentation $\bar{\sigma}$ dont la classe d'isomorphie ne dépend que de celle de π.

2.7 Types de GL(N)

Une paire cuspidale de G est un couple (M, σ) formé d'un sous-groupe de Levi M de G et d'une représentation lisse irréductible cuspidale de M. Si π est une représentation irréductible de G, on note $\mathrm{cusp}(\pi)$ son support cuspidal, c'est-à-dire la classe de G-conjugaison d'une paire cuspidale (M, σ) de G telle que π soit isomorphe à une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_{\mathrm{M}}^{\mathrm{G}}\sigma$ pour au moins un sous-groupe parabolique P de facteur de Levi M.

On dit que deux paires cuspidales (M_i, σ_i) sont inertiellement équivalentes s'il existe $g \in \mathrm{G}$ et un caractère non ramifié χ de M_2 telles que

$$\mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_1^g \quad \text{et} \quad \sigma_1^g = \sigma_2 \otimes \chi$$

où, $\mathrm{M}_1^g = g\mathrm{M}_1g^{-1}$ et $\sigma_1^g : x \mapsto \sigma_1(gxg^{-1})$, pour tout $x \in \mathrm{M}_1^g$. On note $[\mathrm{M}, \sigma]_\mathrm{G}$ la classe d'inertie d'une paire cuspidale (M, σ) et $\mathfrak{B}(\mathrm{G})$ l'ensemble des classes d'inertie de G. Soit π est une représentation lisse irréductible de G. D'après le théorème (2.4.2), il existe

une paire cuspidale (M, σ) unique à conjugaison près telle que π est isomorphe à une sous-représentation de $\boldsymbol{i}_M^G\sigma$. On appelle support inertielle de π, qu'on note $\mathfrak{I}(\pi)$, la classe d'inertie de la paire cuspidale (M, σ).

Soit $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$. On définit une sous-catégorie pleine $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ de la catégorie $\mathfrak{R}(G)$ des représentations lisses de G de la façon suivante. Une représentation lisse (π, V) de G est un objet de la catégorie $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ si pour tout sous-quotient irréductible π_0 de π, on a $\mathfrak{I}(\pi_0) = \mathfrak{s}$. Les sous-catégorie pleines $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ sont appelés les blocs de Bernstein de G.

Théorème 2.40 ([BK98], 1.4)**.** *La catégorie* $\mathfrak{R}(G)$ *se décompose en produit direct*

$$\mathfrak{R}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{R}(G)} \mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$$

des sous-catégorie $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$*, lorsque* $\mathfrak{s}$ *parcourt* $\mathfrak{B}(G)$*.*

Plus précisément, cela signifie que si (π, V) *est une représentation lisse de* G*, alors on a une décomposition*

$$V = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)} V^{\mathfrak{s}}$$

telle que

1. *Pour tout* $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$*,* $V^{\mathfrak{s}}$ *est l'unique sous-*G*-espace maximal de* V *telle que* $V^{\mathfrak{s}}$ *est un objet de* $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$*.*
2. *Pour tout* $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2 \in \mathfrak{B}(G)$*,* $\mathrm{Hom}_G(V^{\mathfrak{s}_1}, V^{\mathfrak{s}_2}) = 0$*.*

Notons qu'une conséquence immédiate est que si (π, V) et (ρ, W) sont deux représentations lisses de G, alors on a

$$\mathrm{Hom}_G(V, W) = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{R}(G)} \mathrm{Hom}_G(V^{\mathfrak{s}}, W^{\mathfrak{s}})$$

Si $\mathfrak{s} = [G, \pi]_G$ est la classe d'inertie d'une représentation lisse irréductible cuspidale de G, alors il est clair que toute représentation irréductible dans $\mathfrak{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ est cuspidale. Dans ce cas on dit que $\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)$ est une classe d'inertie cuspidale et on note $\mathfrak{B}(G)^{\mathrm{cusp}}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{B}(G)$ formé des classes d'inertie cuspidales.

Définition 2.41. *Soit* (π, V) *une représentation lisse de* G*. La partie cuspidale de* π*, qu'on note* π^{cusp} *ou* V^{cusp}*, est la sous-représentation*

$$V^{\mathrm{cusp}} = \bigoplus_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{B}(G)^{\mathrm{cusp}}} V^{\mathfrak{s}}$$

Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et (ρ, W) une représentation lisse de K. Si (π, V) est une représentation lisse de G, on note $V[\rho]$ le sous-G-espace de V engendré par la composante ρ-isotypique V^{ρ}. Soit $\mathfrak{R}_{\rho}(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{R}(G)$ dont les objets sont les représentations lisses (π, V) de G telle que $V[\rho] = V$.

Définition 2.42 ([BK98], (4.1)). *Soit* K *un sous-groupe ouvert compact de* G *et* ρ *une représentation lisse irréductible de* K. *On dit que la paire* (K, ρ) *est un type de* G *si la catégorie* $\mathfrak{R}_\rho(\mathrm{G})$ *est fermée par passage au sous-quotients.*

Définition 2.43. *Soit* $\mathfrak{s} = [\mathrm{M}, \sigma]_\mathrm{G}$ *une classe d'inertie de* G *et* (K, ρ) *un type de* G. *On dit que* (K, ρ) *est un type pour* $\mathfrak{s}$ *si* $\mathfrak{R}^\mathfrak{s}(\mathrm{G}) = \mathfrak{R}_\rho(\mathrm{G})$.

Théorème 2.44 (Voir [Car84], [BK93]). *Si* $\mathfrak{s} = [\mathrm{G}, \pi]_\mathrm{G}$ *est une classe d'inertie de* G *avec* π *de niveau zéro. Alors* $\mathfrak{s}$ *possède un type de la forme* (K, ρ), *où* K *est le sous-groupe compact maximal* $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\mathrm{F})$ *de* G *et* ρ *est le relevé d'une représentation cuspidale irréductible* $\bar{\rho}$ *de* $\mathrm{GL}(n, k_\mathrm{F})$. *De plus, si* σ *est une représentation lisse de* G *telle que* $\sigma \in \mathfrak{R}^\mathfrak{s}(\mathrm{G})$, *alors il existe une extension* $\widetilde{\rho}$ *de* ρ *à* ZK *tel que* $\sigma = c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}} \widetilde{\rho}$.

Chapitre 3

Complexes simpliciaux, Immeubles

Ce chapitre a pour but de définir et de donner les principales propriétés qui nous seront utiles pour la suite.

3.1 Combinatoire et topologie des complexes simpliciaux

3.1.1 Combinatoire des complexes simpliciaux

Définition 3.1. *Un complexe simplicial* X *est un ensemble, dont les éléments sont appelés les sommets, muni d'un sous-ensemble* Σ *de l'ensemble des parties finies (non-vides) de* X*, dont les éléments sont appelés les simplexes, tels que :*

(i) Chaque singleton $\{s\}$ *pour* s *dans* X *est un simplexe.*

(ii) Chaque partie d'un simplexe est un simplexe, une telle partie étant appelée une face du simplexe initial.

La dimension d'un simplexe σ*, qu'on note* $\dim(\sigma)$*, est son cardinal moins 1. La dimension de* X*, notée* $\dim(\mathrm{X})$*, est le maximum des dimensions de ses simplexes. Un simplexe de dimension* p *sera dit un* p*-simplexe et on notera* X_p *l'ensemble des* p*-simplexes de* X*.*

Exemple 3.2.

1) L'ensemble $\Delta_n = \{1, 2, ..., n+1\}$*, muni de l'ensemble de toutes ses parties, est un complexe simplicial de dimension* n*, qu'on appelle le simplexe standard de dimension* n*.*

2) Soit X *un espace topologique et* $\mathcal{O} = (O_i)_{i \in I}$ *un recouvrement de* X *par des ouverts. Le nerf de* X *relativement au recouvrement* $\mathcal{O}$ *est le complexe simplicial d'ensemble de sommets* I *et dont les simplexes sont les sous-ensembles* $\sigma = \{i_0, ..., i_p\}$ *de* I *tel que*

$$O_{i_0} \cap ... \cap O_{i_p} \neq \emptyset.$$

Dans toute la suite, si X est un complexe simplicial, on note Σ_{X} l'ensemble de ses simplexes, ordonné par inclusion.

Définition 3.3. *On appelle ensemble ordonné simplicial tout ensemble ordonné isomorphe à l'ensemble ordonné des simplexes d'un complexe simplicial.*

Proposition 3.4. *Un ensemble ordonné $(\Delta, \leqslant)$ est simplicial si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) Pour x et y dans Δ, il existe un plus grand minorant commun à x et y dans Δ.

(ii) Pour tout x de Δ, l'ensemble $\Delta_{\leqslant x}$ des minorants de x est en bijection ordonnée avec l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Démonstration. Voir [Gar97], proposition page 34. □

Si $(\Delta, \leqslant)$ est un ensemble ordonné simplicial, on note X_Δ (ou tout simplement Δ s'il n'y a pas risque de confusion) le complexe simplicial correspondant. C'est le complexe simplicial dont l'ensemble des sommets est l'ensemble $\min(\Delta)$ des éléments minimaux de Δ et dont les simplexes sont de la forme :

$$\sigma_x = \{m \in \min(\Delta) / \ m \leqslant x\}$$

pour $x \in \Delta$.

Définition 3.5. *Soit* X *un complexe simplicial. On dit que :*

(i) X *est un graphe s'il est de dimension 1.*

(ii) X *est un graphe dirigé si* X *est un graphe muni d'une application*

$$\mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_0 \times \mathrm{X}_0, \ a \longmapsto (a^-, a^+)$$

tel que pour toute arête a de X, *$a = \{a^-, a^+\}$. On dit que a^- (resp. a^+) est l'origine (resp. extrémité) de a.*

(iii) X *est localement fini si tout sommet appartient à un nombre fini de simplexes.*

(iv) X *est pur s'il est de dimension fini et si tous les simplexes maximaux ont même dimension, un tel simplexe étant appelé une chambre.*

(v) X *est un complexe de chambres s'il est pur et si pour toutes chambres C, C' de* X, *il existe une suite finie de chambres $(\mathrm{C}_0, ..., \mathrm{C}_m)$ telles que $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}$, $\mathrm{C}_m = \mathrm{C}'$ et pour tout $i = 0, ...m-1$, $\mathrm{C}_i \cap \mathrm{C}_{i+1}$ est une face commune de C_i et C_{i+1} de codimension 1.*

(vi) X *est étiqueté s'il est de dimension fini et s'il existe une application $e : \mathrm{X}_0 \longrightarrow \Delta_n$ tel que sa restriction à tout simplexe est injective, une telle application est appelée un étiquetage de* X. *S'il existe, un étiquetage est unique à une permutation près de l'ensemble Δ_n.*

Définition 3.6.

(i) Un sous-complexe d'un complexe simplicial X *est la donnée d'un sous-ensemble* Σ *de* Σ_{X} *tel que pour tout* σ *dans* Σ*, chaque partie de* σ *appartient à* Σ*. L'ensemble des sommets d'un tel sous-complexe est l'ensemble des sommets* s *de* X *tel que* $\{s\} \in \Sigma$*.*

(ii) Une application simpliciale entre deux complexes simpliciaux est une application entre ensembles de sommets qui envoie chaque simplexe sur un simplexe.

On note $\mathcal{CS}$ la catégorie des complexes simpliciaux. C'est la catégorie dont les objets sont les complexes simpliciaux et dont l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathcal{CS}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ des morphismes, pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{CS})$, est constitué des applications simpliciales $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$.

Remarque 3.7. *Si* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ *est une application simpliciale, l'image par* f *d'un sous-complexe* L *de* X *est un sous-complexe de* Y*. L'ensemble des simplexes du sous-complexe image* $f(\mathrm{L})$ *étant donné par*

$$\Sigma_{f(\mathrm{L})} = \{f(\sigma),\ \sigma \in \Sigma_{\mathrm{L}}\}$$

On définit aussi l'image réciproque d'un sous-complexe par une application simpliciale de la façon suivante. Si L *est un sous-complexe de* Y*, son image réciproque* $f^{-1}(\mathrm{L})$ *est le plus grand sous-complexe* M *de* X *tel que* $f(\mathrm{M}) \subset \mathrm{L}$*. Plus concrètement, l'ensemble des simplexes de* $f^{-1}(\mathrm{L})$ *étant donné par*

$$\Sigma_{f^{-1}(\mathrm{L})} = \{\sigma \in \Sigma_{\mathrm{X}} /\ f(\sigma) \in \Sigma_{\mathrm{L}}\}$$

Définition 3.8. *Soit* $(\mathrm{I}, \leqslant)$ *un ensemble partiellement ordonné. Le complexe des drapeaux de* I*, qu'on note flag*$(\mathrm{I}, \leqslant)$ *(ou tout simplement flag*(I) *s'il n'y a pas de confusion à craindre), est le complexe simplicial dont l'ensemble des sommets est* I *et dont les simplexes sont les chaînes de* I*, c'est-à-dire les sous-ensembles finis* $\sigma = \{i_0, i_1, ..., i_p\}$ *de* I *tel que* $i_0 < i_1 < .... < i_p$*.*

L'ensemble ordonné $(\mathrm{I}, \leqslant)$ *est dit pur si son complexe des drapeaux flag*(I) *est un complexe simplicial pur.*

Lemme 3.9. *Le complexe des drapeaux flag*(I) *d'un ensemble ordonné pur* $(\mathrm{I}, \leqslant)$ *est naturellement étiqueté.*

Démonstration. Soit $(\mathrm{I}, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné pur et notons n la dimension de flag(I). Si s est un sommet de flag(I), il existe une chaine maximale $\mathrm{C} = \{i_0 < i_1 < ... < i_n\}$ de I (une chambre de flag(I)) contenant s. Il existe donc un entier $k \in \Delta_n = \{0, 1, ..., n\}$ tel que $s = i_k$. Cet entier ne dépend pas du choix de la chaine maximale contenant s, on l'appelle l'étiquette de s et on le note $e_{\mathrm{I}}(s)$. En effet si $\mathrm{C}' = \{j_0 < j_1 < ... < j_n\}$ est une autre chaine maximale contenant s et $l \in \Delta_n = \{0, 1, ..., n\}$ tel que $s = j_l$. Supposons que $k \neq l$, par exemple $k < l$. On a $i_0 < i_1 < ... < i_{k-1} < i_k = s$ et $s = j_l < j_{l+1} < ... < j_n$ et donc l'ensemble

$\{i_0 < i_1 < ... < i_{k-1} < i_k < j_{l+1} < ... < j_n\}$ est une chaine de I. Par conséquent, cette dernière chaîne est incluse dans une chaîne maximale de I, or son cardinal est égal à $k - l + n + 1 > n + 1$. Ce qui est absurde, d'où le résultat. On a donc une application

$$e_{\mathrm{I}} : \mathrm{I} \longrightarrow \Delta_n,\ s \longmapsto e_{\mathrm{I}}(s)$$

et il est clair que sa restriction à toute chaine maximale est bijective. □

Soit X un complexe simpliciale et $\sim$ une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets de X. On note $\pi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}/\sim$ la surjection canonique. L'ensemble formé par les parties $\pi(\sigma)$, σ décrivant Σ_{X}, est un complexe simpliciale qu'on appelle le complexe simplicial quotient de X par $\sim$. Le complexe simplicial quotient $\mathrm{X}/\sim$ est caractérisé par la propriété universelle suivante : Pour tout application simpliciale f de X dans un complexe simplicial Y, telle que

$$\text{pour tout } s, t \in \mathrm{X}_0, s \sim t \Rightarrow f(s) = f(t)$$

il existe une unique application simpliciale $\bar{f} : \mathrm{X}/\sim \longrightarrow \mathrm{Y}$ tel que $f \circ \pi = f$.

Définition 3.10. *Soit* G *un groupe et* X *un complexe simplicial. Une action simpliciale de* G *sur* X *est une action de* G *sur l'ensemble des sommets de* X *par des automorphismes simpliciaux. Un complexe simpliciale muni d'une action simpliciale d'un groupe* G *sera appelé un* G*-complexe.*

Si X *est un graphe dirigé, une action d'un groupe* G *sur* X *est une action simpliciale telle que* $g.a^{\varepsilon} = (g.a)^{\varepsilon}$ *pour tout* $g \in \mathrm{G}$ *et* $\varepsilon \in \{-, +\}$*. Un graphe dirigé muni d'une action d'un groupe* G *sera appelé un* G*-graphe dirigé.*

Si G *est un groupe localement profini. Une action simpliciale de* G *sur un complexe simplcial* X *est dite propre si le stabilisateur* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(s) = \{g \in \mathrm{G}/\ g.s = s\}$ *de tout sommet* s *de* X *est ouvert compact. On dit aussi que* X *est un* G*-complexe propre.*

Soit G un groupe et X un G-complexe. Considérons les deux propriétés suivantes concernant l'action de G sur X :

(A) Pour tout $g \in \mathrm{G}$ et pour simplexe σ de X, g fixe point par point $\sigma \cap g\sigma$.

(B) Pour tous éléments $g_0, ..., g_p$ de G et pour tous sommets $s_0, ..., s_p$ de X, si $s_0, ..., s_p$ et $g_0 s_0, ..., g_p s_p$ engendrent deux simplexes de X, alors il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $gs_i = g_i s_i$ pour tout i.

Notons que la propriété (A) est équivalente à la propriété (A') suivante :
(A') Pour tout $g \in \mathrm{G}$ et pour tout sommet s de X, si s et gs sont contenus dans un même simplexe, alors $s = gs$.
Il est clair que (A) implique (A'). En effet, soit s un sommet de X. Suppose que s et gs sont contenus dans un même simplexe. Alors comme g fixe point par point $\sigma = \{s, gs\}$, g fixe le sommet s. Réciproquement, soit g dans G et σ un simplexe de X. Si s est un

sommet contenu dans l'intersection de σ et $g\sigma$ alors l'arête $a = \{s, gs\}$ est contenue dans $g\sigma$, donc par la propriété (A') g fixe le sommet s.

Remarquons aussi que la propriété (B) implique (A') et donc (A), puisque, si pour $g \in \mathrm{G}$ et s un sommet de X, s et gs sont contenus dans un même simplexe, alors s, s et s, gs engendrent deux simplexes de X, donc il existe g' dans G tel que $s = g's$ et $gs = g's$, et donc $gs = g's = s$.

Définition 3.11. *([Bre72], page 116) Une action simpliciale d'un groupe* G *sur un complexe simplicial* X *vérifiant (B) pour l'action de tout sous-groupe de* G *est dite régulière, et* X *est appelé un* G*-complexe régulier.*

Remarque 3.12. *On peut montrer que si* X *est un* G*-complexe, alors l'action induite de* G *sur la deuxième subdivision barycentrique de* X *est régulière.*

Soit G un groupe et X un G-complexe régulier. On définit un complexe simplicial quotient X/G de la façon suivante. Les sommets de X/G sont les classes $\bar{s}$ de l'action de G sur l'ensemble des sommets de X, et les simplexes de X/G sont de la forme

$$\bar{\sigma} = \{\bar{s_0}, ..., \bar{s_p}\}$$

où $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ est un simplexe de X. On dit que le simplexe $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ est au-dessus du simplexe $\bar{\sigma} = \{\bar{s_0}, ..., \bar{s_p}\}$ de X/G. Par régularité de l'action de G sur X, si $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ et $\tau = \{t_0, ..., t_p\}$ sont deux simplexes de X au-dessus du même simplexe $\bar{\sigma} = \bar{\tau}$ de X/G, alors $\sigma = g\tau$ pour un certain g dans G. Par conséquent, les simplexes de X au dessus d'un simplexe fixé de X/G forment une orbite sous l'action de G sur l'ensemble des simplexes de X. L'application $p : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X/G},\ s \longmapsto \bar{s}$ est clairement simpliciale et on l'appelle la projection canonique.

3.1.2 Topologie des complexes simpliciaux

Dans ce paragraphe, on définit un foncteur covariant de la catégorie $\mathcal{CS}$ des complexes simpliciaux dans la catégorie *Top* des espaces topologiques.

Définition 3.13. *Soit* X *un complexe simplicial. La réalisation géométrique de* X*, qu'on note* |X|*, est l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des fonctions* $f : \mathrm{X}_0 \longrightarrow [0, 1]$ *vérifiant,*

(i) Le support de f*, supp(f)* $= \{s \in \mathrm{X}_0 /\ f(s) \neq 0\}$*, est un simplexe de* X*.*

(ii) $\sum_{s \in \mathrm{X}_0} f(s) = 1.$

et dont la topologie est définie de la façon suivante. Pour chaque simplexe $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ *de* X*, la réalisation géométrique* $|\sigma|$ *s'identifie en tant qu'ensemble au p-simplexe géométrique standard* Δ_p *(ie. l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^{p+1}$*),*

$$|\sigma| \longrightarrow \Delta_p,\ f \longmapsto (f(s_0), ..., f(s_p))$$

Via cette identification, on transporte la topologie de Δ_p à $|\sigma|$. La topologie alors définie sur $|\mathrm{X}|$ est la topologie la plus fine qui rende toutes les injections canoniques $|\sigma| \longrightarrow |\mathrm{X}|$ continue. Ainsi, une partie A de $|\mathrm{X}|$ est ouverte si pour tout simplexe σ l'intersection $\mathrm{A} \cap |\sigma|$ est un ouvert de $|\sigma|$.

Remarque 3.14.

(i) On peut aussi munir l'ensemble sous-jacent à $|\mathrm{X}|$ d'une topologie métrisable en posant, pour tout $f, g \in |\mathrm{X}|$,

$$d(f,g) = (\sum_{s \in \mathrm{X}_0} |f(s) - g(s)|^2)^{\frac{1}{2}}$$

On note $|\mathrm{X}|_d$ l'espace topologique obtenu. L'application identité $i : |\mathrm{X}| \longrightarrow |\mathrm{X}|_d$ est continue mais en général ce n'est pas un homéomorphisme.

(ii) La réalisation géométrique $|\mathrm{L}|$ d'un sous-complexe L de X est un fermé de $|\mathrm{X}|$.

(iii) Pour tout complexe simplicial X, l'espace topologique $|\mathrm{X}|$ est naturellement muni d'une structure de CW-complexe.

Théorème 3.15.

(a) Pour tout complexe simplicial X, la réalisation géométrique $|\mathrm{X}|$ est Hausdorff et normale.

(b) Pour tout complexe simplicial X, la réalisation géométrique $|\mathrm{X}|$ est compacte si et seulement si X est fini.

(c) Pour tout complexe simplicial X, si A est une partie compacte de $|\mathrm{X}|$, il existe un sous-complexe fini L de X tel que $\mathrm{A} \subset |\mathrm{L}|$.

Démonstration. Voir [Spa94], III.théorème 17 et [Mun96], I.lemme 2.5. □

Théorème 3.16. *Pour tout complexe simplicial X, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) X est localement fini.

(b) $|\mathrm{X}|$ est localement compact.

(c) L'application $i : |\mathrm{X}| \longrightarrow |\mathrm{X}|_d$ est un homéomorphisme.

(d) $|\mathrm{X}|$ est métrisable.

Démonstration. Voir [Spa94], III.8. □

A tout complexe simplicial X, on a associé un espace topologique, sa réalisation géométrique $|\mathrm{X}|$. Maintenant, on va associer à toute application simpliciale $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$, une application continue $|f| : |\mathrm{X}| \longrightarrow |\mathrm{Y}|$ et on vérifiera que ceci définit un foncteur covariant de la catégorie des complexes simpliciaux dans la catégorie des espaces topologiques.

Si $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est une application simpliciale, on définit une application continue

$$|f| : |\mathrm{X}| \longrightarrow |\mathrm{Y}|$$

par

$$|f|(\alpha)(s) = \sum_{t \in \mathrm{X}_0,\ f(t)=s} \alpha(t)$$

pour tout $s \in \mathrm{X}_0$. La même formule définit une application continue

$$|f|_d : |\mathrm{X}|_d \longrightarrow |\mathrm{Y}|_d$$

de plus, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} |\mathrm{X}| & \longrightarrow & |\mathrm{X}|_d \\ {\scriptstyle |f|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |f|_d} \\ |\mathrm{X}| & \longrightarrow & |\mathrm{Y}|_d \end{array}$$

est commutatif.

Définition 3.17. *Une application simpliciale $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ est dite propre si pour tout sous-complexe fini* L *de* Y*, le sous-complexe $f^{-1}(\mathrm{L})$ de* X *est fini.*

Proposition 3.18. *Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ une application simplicial. Alors f est propre si et seulement si $|f|$ est propre.*

Démonstration. Commensons par montrer que pour tout sous-complexe L de Y, $|f^{-1}(\mathrm{L})| = |f|^{-1}(|\mathrm{L}|)$.

Soit L un sous-complexe de Y. D'une part on a

$$|f^{-1}(\mathrm{L})| = \{\alpha \in |\mathrm{X}|/\ \mathrm{supp}(\alpha) \in \Sigma_{f^{-1}(\mathrm{L})}\} = \{\alpha \in |\mathrm{X}|/\ f(\mathrm{supp}(\alpha)) \in \Sigma_{\mathrm{L}}\}$$

D'autre part

$$|f|^{-1}(|\mathrm{L}|) = \{\alpha \in |\mathrm{X}|/\ |f|(\alpha) \in |\mathrm{L}|\} = \{\alpha \in |\mathrm{X}|/\ \mathrm{supp}(|f|(\alpha)) \in \Sigma_{\mathrm{L}}\}$$

Or $\mathrm{supp}(|f|(\alpha)) = f(\mathrm{supp}(\alpha))$, ce qui donne l'égalité $|f^{-1}(\mathrm{L})| = |f|^{-1}(|\mathrm{L}|)$. En effet, soit s un sommet de Y. Si $s \notin \mathrm{supp}(|f|(\alpha))$, alors

$$|f|(\alpha)(s) = 0 \Rightarrow \sum_{t \in \mathrm{X}_0,\ f(t)=s} \alpha(t) = 0 \Rightarrow \alpha(t) = 0\ \forall\ t \in f^{-1}(s) \Rightarrow s \notin f(\mathrm{supp}(\alpha))$$

D'où $f(\mathrm{supp}(\alpha)) \subset \mathrm{supp}(|f|(\alpha))$.

Réciproquement, si $s \notin f(\mathrm{supp}(\alpha))$, alors

$$\alpha(t) = 0\ ,\ \forall\ t \in f^{-1}(s) \Rightarrow |f|(\alpha)(s) = \sum_{t \in \mathrm{X}_0,\ f(t)=s} \alpha(t) = 0 \Rightarrow s \notin \mathrm{supp}(|f|(\alpha))$$

D'où $\text{supp}(|f|(\alpha)) \subset f(\text{supp}(\alpha))$. Par conséquent, on a bien $\text{supp}(|f|(\alpha)) = f(\text{supp}(\alpha))$.

Montrons maintenant l'équivalence de la proposition. Supposons que l'application continue $|f|$ est propre. Soit L un sous-complexe fini de Y. Donc |L| est un compact de |Y|. Comme $|f|$ est propre, alors $|f|^{-1}(|\text{L}|)$ est un compact de |Y| et donc la réalisation géométrique $|f^{-1}(\text{L})|$ du sous-complexe $f^{-1}(\text{L})$ de X est compacte dans |X| puisque égale à $|f|^{-1}(|\text{L}|)$. Alors $f^{-1}(\text{L})$ est un sous-complexe fini de X. On en déduit que l'application simplicial f est propre.

Réciproquement, supposons que f est propre. Soit A une partie compacte de |Y|. D'après le théorème 3.1.1,(c), A est contenue dans |L| pour un certain sous-complexe fini L de Y. Alors $|f|^{-1}(\text{A}) \subset |f|^{-1}(|\text{L}|)$ et donc $|f|^{-1}(\text{A}) \subset |f^{-1}(\text{L})|$ conte tenu de l'égalité $|f^{-1}(\text{L})| = |f|^{-1}(|\text{L}|)$. Puisque f est propre et que L est un sous-complexe fini de Y, alors $f^{-1}(\text{L})$ est fini et donc $|f^{-1}(\text{L})|$ est un compact de X. L'ensemble $|f|^{-1}(\text{A})$ étant un fermé du compact $|f^{-1}(\text{L})|$, c'est donc un compact de |X|. Par suite $|f|$ est propre. □

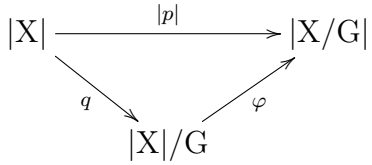
Soit G un groupe et X un G-complexe. Le groupe G agit naturellement sur l'espace topologique |X| par homéomorphismes, l'action étant donnée par

$$g.f(s) = f(g^{-1}.s)$$

pour tout $f \in |\text{X}|$ et tout $g \in \text{G}$. La projection canonique $p : \text{X} \longrightarrow \text{X/G}$ est simpliciale, elle induit donc une application continue $|p| : |\text{X}| \longrightarrow |\text{X/G}|$. On peut définir de façon naturelle une applicaion continue φ de l'espace topologique quotient |X|/G dans |X/G| par

$$\varphi(\bar{f}(\bar{s})) = f(s)$$

pour tout $\bar{f}$ dans |X|/G et pour tout sommet $\bar{s}$ de X/G. On a un diagramme commutatif,



Proposition 3.19. *([Bre72], page 117) Si* X *est un* G*-complexe régulier, alors l'application* φ *est un homéomorphisme.*

Rappelons qu'un groupe discret H agit proprement discontinûment sur un espace topologique E si tout point de E possède un voisinage ouvert V tel que pour tout $g \in \text{G}$,

$$g.\text{V} \cap \text{V} \neq \emptyset \Rightarrow g = 1$$

Proposition 3.20. *Soit* G *un groupe et* X *un* G*-complexe simplicial régulier. Si* G *agit librement sur* X*, alors* G *agit comme groupe discret proprement discontinûment sur le l'espace topologique* |X|*.*

Démonstration. Soit $x \in |\mathrm{X}|$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert V de x tel que pour tout $g \in \mathrm{G}$,

$$g.\mathrm{V} \cap \mathrm{V} \neq \emptyset \Rightarrow g = 1$$

Si σ est un simplexe de X, on note $< \sigma >$ le simplexe ouvert correspondant dans $|\mathrm{X}|$ et $\mathrm{st}(\sigma)$ l'étoile ouverte de σ dans $|\mathrm{X}|$,

$$\mathrm{st}(\sigma) = \bigcup_{\tau \in \Sigma_{\mathrm{X}},\ \sigma \subset \tau} < \tau >$$

Notons que la partie $< \sigma >$ est ouverte pour la topologie de $|\mathrm{X}|$ seulement si σ n'est pas une face stricte d'un simplexe de X et que l'étoile d'un simplexe de X est toujours ouverte dans $|\mathrm{X}|$.

Puisque tout point de $|\mathrm{X}|$ est contenu dans un simplexe ouvert, il existe un simplexe σ de X tel que $x \in < \sigma >$. Par suite x est contenu dans l'ouvert $\mathrm{st}(\sigma)$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Supposons que $\mathrm{st}(g.\sigma) \cap \mathrm{st}(\sigma) = g.\mathrm{st}(\sigma) \cap \mathrm{st}(\sigma) \neq \emptyset$. On sait que les étoiles des sommets d'un complexe simplicial Y forme un recouvrement ouvert de $|\mathrm{Y}|$ et que le nerf de ce recouvrement est égal à Y. En particulier, les étoiles de deux sommets s'intersectent si et seulement si ces deux sommets forment une arête. Par conséquent, pour tout simplexe A et B, $\mathrm{st}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{st}(\mathrm{B}) = \mathrm{st}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. On a $\mathrm{st}(g.\sigma) \cap \mathrm{st}(\sigma) \neq \emptyset$, donc les deux simplexes σ et $g.\sigma$ s'intersectent. Si s un sommet de $\sigma \cap g.\sigma$, alors $s \in \sigma$ et $g^{-1}.s \in \sigma$. Comme le G-complexe simplicial X est régulier, alors $g^{-1}.s = s$, or l'action de G sur l'ensemble des sommets de X est libre. Par suite $g = 1$. On en déduit que G agit proprement discontinûment sur le complexe $|\mathrm{X}|$.

□

3.2 Complexes de classes d'un groupe localement profini

Les complexes de classes d'un groupe ont été introduis et étudiés par plusieurs auteurs, plus particulièrement pour les groupes finis de type de Lie. Dans la littérature ces complexes s'appellent "coset complexes" et dans d'autres références "simple complexes". Dans ce paragraphe, nous définissons ces complexes pour un groupe localement profini quelconque et donnons quelques-unes de leurs propriétés.

3.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 3.21. *Soit* G *un groupe localement profini. On appelle famille ordonnée propre de* G *toute famille* $(\mathrm{G}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de sous-groupes ouverts compacts indexée par un ensemble ordonné* $(\mathrm{I}, \leqslant)$ *tel que pour* $i, j \in \mathrm{I}$*, si* $i < j$ *alors* $\mathrm{G}_i \subsetneq \mathrm{G}_j$*.*

A un groupe localement profini G muni d'une famille ordonné propre $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on associe un ensemble ordonné $\mathrm{E}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. C'est l'ensemble des classes à gauche de G pour les sous-groupes G_i,

$$\mathrm{E}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I}) = \{g\mathrm{G}_i,\ g_{\in}\mathrm{G},\ i \in \mathrm{I}\}$$

On ordonne cet ensemble de la façon suivante. Pour tout $i, j \in \mathrm{I}$ et $g, h \in \mathrm{G}$,

$$g\mathrm{G}_i \leqslant h\mathrm{G}_j \text{ si et seulement si } i \leqslant j \text{ et } g\mathrm{G}_i \cap h\mathrm{G}_j \neq \emptyset$$

Remarque 3.22. *Pour tout $i, j \in \mathrm{I}$, si $i < j$ alors $\mathrm{G}_i \subsetneq \mathrm{G}_j$. Par conséquent :*

$$g\mathrm{G}_i < h\mathrm{G}_j \text{ si et seulement si } i < j \text{ et } g\mathrm{G}_i \subset h\mathrm{G}_j$$

En effet, si $i \leqslant j$ et $g\mathrm{G}_i \cap h\mathrm{G}_j \neq \emptyset$, alors d'une part $\mathrm{G}_i \subset \mathrm{G}_j$ et d'autre part $g\mathrm{G}_i = h\mathrm{G}_j$. Donc $i \leqslant j$ et $g\mathrm{G}_i \subset h\mathrm{G}_j$. La réciproque est claire. Ceci montre que la relation ainsi définie sur $\mathrm{E}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est bien une relation d'ordre.

Définition 3.23. *Le complexe de classes d'un groupe localement profini* G *relativement à une famille ordonnée propre $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, qu'on note $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, est le complexe des drapeaux de l'ensemble ordonné $\mathrm{E}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$,*

$$\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I}) = \mathrm{Flag}(\{g\mathrm{G}_i,\ g \in \mathrm{G} \text{ et } i \in \mathrm{I}\})$$

Les sommets de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ sont les classes à gauche $g\mathrm{G}_i$ et les simplexes sont les ensembles

$$\sigma = \{g_0\mathrm{G}_{i_0}, ..., g_p\mathrm{G}_{i_p}\}$$

vérifiant

$$i_0 < ... < i_p \quad \text{et} \quad g_0\mathrm{G}_{i_0} \subset .... \subset g_p\mathrm{G}_{i_p}$$

On vérifie facilement qu'un simplexe comme ci-dessus se met sous la forme

$$\sigma = \{g\mathrm{G}_{i_0}, ..., g\mathrm{G}_{i_p}\}$$

avec $g \in \mathrm{G}$ et $i_0 < ... < i_p$. Si le complexe Flag(I) est pur, il en est de même du complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, de plus l'étiquetage e_{I} (voir lemme 3.9) induit un étiquetage sur $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, qu'on note $e_{\mathcal{W}}$, défini par $e_{\mathcal{W}}(g\mathrm{G}_i) = e_{\mathrm{I}}(i)$.

Lemme 3.24. *Le complexe de classes $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ d'un groupe localement profini* G *relativement à une famille ordonnée propre $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est localement fini si et seulement si le complexe de drapeaux* Flag(I) *l'est.*

Démonstration. Supposons que le complexe Flag(I) est localement fini. Pour tout sommet i de Flag(I), l'ensemble A_i des simplexes de Flag(I) qui contiennent i est donc fini. Un simplexe de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ qui contient le sommet $s = \mathrm{G}_i$ est de la forme

$$\sigma = \{g\mathrm{G}_{i_0} \subsetneq ... \subsetneq g\mathrm{G}_{i_p}\}$$

avec $i \in \{i_0 < ... < i_p\}$ et $g \in \mathrm{G}_i$. Pour tout simplexe $x = \{i_0 < ... < i_p\}$ de Flag(I) contenant i et pour tout $g \in \mathrm{G}_i$, on note $\sigma_{x,g}$ le simplexe de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ donné par

$$\sigma_{x,g} = \{g\mathrm{G}_{i_0} \subsetneq ... \subsetneq g\mathrm{G}_{i_p}\}$$

Alors l'ensemble A_s des simplexes de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ qui contiennent s est constitué des simplexes $\sigma_{x,g}$, pour $x \in \mathrm{A}_i$ et $g \in \mathrm{G}_i$. Pour tout simplexe $x = \{i_0 < ... < i_p\} \in \mathrm{A}_i$, on note $\mathrm{A}_{s,x}$ l'ensemble des simplexes de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ de la forme $\sigma_{x,g}$, pour $g \in \mathrm{G}_i$. Il est clair que $\mathrm{A}_s = \sqcup_{x \in \mathrm{A}_i} \mathrm{A}_{s,x}$, c'est une réunion disjointe fini puisque A_i est fini. On remarque que $\sigma_{x,g} = \sigma_{x,h}$ si et seulement si $h^{-1}g \in \mathrm{G}_{i_0}$, ainsi $\mathrm{A}_{s,x}$ est en bijection avec le quotient $\mathrm{G}_i/\mathrm{G}_{i_0}$ qui est fini, c'est le quotient d'un groupe compact par un sous-groupe ouvert. On en déduit que les ensembles de simplexes $\mathrm{A}_{s,x}$ sont finis.

□

3.2.2 Action de G sur $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$

Le groupe G agit sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ par translation à gauche,

$$\mathrm{G} \times \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I}) \longrightarrow \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$$

l'action sur les sommets étant donnée par $g.x\mathrm{G}_i = gx\mathrm{G}_i$, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et pour tout sommet $x\mathrm{G}_i$ de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. L'action est clairement simpliciale.

Si G est un groupe localement profini et $(\mathrm{G}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un système ordonné propre de sous-groupes de G, le stabilisateur d'un sommet $s = g\mathrm{G}_i$ est le sous-groupe ouvert compact $g\mathrm{G}_i g^{-1}$. Donc l'action de G sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est propre.

Proposition 3.25. *Soit* G *un groupe localement profini et* $(\mathrm{G}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *un système ordonné propre de* G *. Alors le* G*-complexe propre* $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ *est régulier.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe de G, $h_0, ..., h_p$ des éléments de H et $s_0, ..., s_p$ des sommets de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, avec $s_i = g_i\mathrm{G}_{k_i}$. Supposons que $s_0, ..., s_p$ et $h_0 s_0, ..., h_p s_p$ engendrent deux simplexes de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. Quitte à réindexer les sommets s_i, on peut supposer que $s_i = g_i\mathrm{G}_{k_i}$ avec $g_0\mathrm{G}_{k_0} \subsetneq ... \subsetneq g_p\mathrm{G}_{k_p}$. Si on note $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ et $\tau = \{h_0 s_0, ..., h_p s_p\}$ alors $\sigma = \{g_0\mathrm{G}_{k_0}, ..., g_0\mathrm{G}_{k_p}\}$ et de même $\tau = \{g_0 h_0\mathrm{G}_{k_0}, ..., g_0 h_0\mathrm{G}_{k_p}\}$. Par suite on a $s_i = g_0 h_0^{-1} g_0^{-1}.h_i s_i$ pour tout i. D'où $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est régulier. □

Comme conséquence de la proposition précédente et la proposition (3.19), la réalisation géométrique du quotient du G-complexe $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ par un sous-groupe H de G est homéomorphe à l'espace quotient $|\mathcal{W}|/\mathrm{H}$. Par exemple, on vérifie facilement que $\mathcal{W}/\mathrm{G}$ est isomorphe à Flag(I) et donc $|\mathcal{W}|/\mathrm{G}$ est homéomorphe à |Flag(I)|.

Définition 3.26. *Soit* G *un groupe localement profini,* N *un sous-groupe fermé de* G*, et* $(\mathrm{G}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille ordonnée propre de* G*. On dit que* N *normalise la famille* $(\mathrm{G}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *si* N *agit proprement sur l'ensemble* I*, c'est-à-dire* N *agit sur* I *et le stabilisateur de tout point de* I *est ouvert compact, et si pour tout* $i \in \mathrm{I}$ *et pour tout* $n \in \mathrm{N}$, $n\mathrm{G}_i n^{-1} \in \{\mathrm{G}_j,\ j \in \mathrm{I}\}$

.

Un sous-groupe fermé N de G qui normalise une famille ordonnée propre $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ agit naturellement sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ par translation à droite,

$$\mathrm{N} \times \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I}) \longrightarrow \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I}), (n, g\mathrm{G}_i) \longmapsto gn^{-1}\mathrm{G}_{n.i}$$

L'action de N est clairement propre, de plus les actions de G et de N sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ commutent.

Proposition 3.27. *Soit* G *un groupe localement profini,* $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *un système ordonné propre de* G *et* N *un sous-groupe fermé de* G *qui normalise la famille* $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *. Alors le* N*-complexe propre* $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ *est régulier.*

Démonstration. Soit H un sous-groupe de N, $n_0, ..., n_p$ des éléments de H et $s_0, ..., s_p$ des sommets de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, avec $s_i = g_i\mathrm{G}_{k_i}$. Supposons que $s_0, ..., s_p$ et $n_0.s_0, ..., n_p.s_p$ engendrent deux simplexes de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. Quitte à réindexer les sommets s_i, on peut supposer que $s_i = g_i\mathrm{G}_{k_i}$ avec $g_0\mathrm{G}_{k_0} \subsetneq ... \subsetneq g_p\mathrm{G}_{k_p}$. Si on note $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ et $\tau = \{n_0.s_0, ..., n_p.s_p\}$ alors $\sigma = \{g_0\mathrm{G}_{k_0}, ..., g_0\mathrm{G}_{k_p}\}$ et $\tau = \{g_0n_0^{-1}\mathrm{G}_{n_0.k_0}, ..., g_0n_0^{-1}\mathrm{G}_{n_0.k_p}\}$. Par suite on a $n_0.s_i = n_i.s_i$ pour tout i. On en déduit que $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est régulier. □

Définition 3.28. *On appelle appartement standard de* $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$*, qu'on note* $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ *s'il n'y a pas de confusion à craindre, le sous-complexe de* $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ *formé par les simplexes de la forme*

$$\sigma = \{\mathrm{G}_{i_0} < .... < \mathrm{G}_{i_p}\}$$

On appelle appartement de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ *tout translaté* $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$*, pour* $g \in \mathrm{G}$*, de l'appartement standard.*

Notons que si le complexe Flag(I) est connexe, alors chaque appartement du complexe de classes $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ l'est aussi. En effet le complexe Flag(I) se projete simplicialement sur tout appartement de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ via l'application p : Flag(I) $\longrightarrow g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ définie sur les sommets par $p(i) = g\mathrm{G}_i$ pour tout sommet i de I.

3.2.3 Connexité des complexes $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$

Soit $(\mathrm{G}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille ordonnée propre d'un groupe localement profini G. Notons G^0 le sous-groupe de G engendré par les G_i, pour $i \in \mathrm{I}$:

$$\mathrm{G}^0 = < \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_i >$$

Proposition 3.29. *Supposons que le complexe* Flag(I) *est connexe. Alors le complexe* $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ *est connexe si et seulement si le groupe* G *est engendré par les sous-groupes* G_i*, pour* $i \in \mathrm{I}$*.*

Démonstration. Supposons que G est engendré par les sous-groupes G_i pour $i \in \mathrm{I}$,

$$\mathrm{G} = \langle \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{G}_i \rangle$$

Notons ℓ la fonction longueur de G par rapport à la partie génératrice $\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{G}_i$. C'est la fonction de G dans $\mathbb{N}$ définie par

$$\ell(g) = \min\{r \in \mathbb{N},\ g = g_1 g_2 ... g_r\ ,\ g_k \in \cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{G}_i\}$$

pour tout $g \in \mathrm{G}$. Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$ que deux sommets $s = \mathrm{G}_i$ et $t = g\mathrm{G}_j$, tels que $\ell(g) = r$, sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. Rappelons qu'un chemin de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est une suite $(s_0, ..., s_k)$ de sommets tel que deux sommets consécutifs forment une arête. Pour $r = 0$, la propriété est vraie puisque dans ce cas $g = 1$ et donc s et t sont deux sommets de l'appartement standard $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ qui s'identifie à Flag(I) qu'on a supposé connexe. Soit $r \geqslant 1$. Supposons la propriété vraie à l'ordre r. Soit $s = \mathrm{G}_i$ et $t = g\mathrm{G}_j$ deux sommets de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, tel que $\ell(g) = r + 1$. Soit $g = g_{i_1}....g_{i_{r+1}}$ une écriture réduite de g, où chaque élément $g_{i_k} \in \mathrm{G}_{i_k}$ pour tout $k = 1, ..., r + 1$. Posons $x = g_{i_2}....g_{i_{r+1}}$ et $y = g_{i_1}$. Par hypothèse de récurrence, G_{i_1} et $x\mathrm{G}_j$ sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. En translatant par l'élément y, les sommets $y\mathrm{G}_{i_1} = \mathrm{G}_{i_1}$ et $yx\mathrm{G}_j = g\mathrm{G}_j$ sont reliés par un chemin. Or les deux sommets G_i et G_{i_1} sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ puisque ce sont deux sommets de l'appartement standard $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ qui est connexe par hypothèse. Par suite, les deux sommets s et t sont reliés par un chemin dans $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$, ce qui prouve que $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est connexe.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ est connexe et montrons que $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$. Par hypothèse, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et $i \in \mathrm{I}$, les sommets $s = \mathrm{G}_i$ et $t = g\mathrm{G}_i$ sont reliés par un chemin $c = (c_0, ..., c_m)$ dans $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$. Montrons par récurrence sur m que $g \in \mathrm{G}^0$. Pour $m = 0$, c'est clairement vrai. Supposons que le résultat est vrai à l'ordre m et montrons le à l'ordre $m + 1$. Soit donc $c = (c_0, ..., c_{m+1})$ un chemin de $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ d'origine s et d'extrémité t, où $c_j = g_{i_j}\mathrm{G}_{i_j}$ pour tout $j = 0, ..., m + 1$. Par hypothèse de récurrence, l'élément g_{i_m} appartient à G^0, or $c_m = g_{i_m}\mathrm{G}_{i_m}$ est relié par une arête à $t = g\mathrm{G}_i$. On a deux cas : soit $g_{i_m}\mathrm{G}_{i_m} \subset g\mathrm{G}_i$ et donc $g \in \mathrm{G}^0$ puisque $g_{i_m} \in \mathrm{G}^0$ et $\mathrm{G}_{i_m}, \mathrm{G}_i \subset \mathrm{G}^0$, soit $g\mathrm{G}_i \subset g_{i_m}\mathrm{G}_{i_m}$ et donc de même $g \in \mathrm{G}^0$. Finalement $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0$. □

Corollaire 3.30. *Supposons que le complexe* Flag(I) *est connexe. Alors l'ensemble des composantes connexes de* $\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ *s'identifie de façon* G*-équivariante à* G/G^0*, c'est-à-dire*

$$\pi_0(\mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})) \simeq \mathrm{G}/\mathrm{G}^0$$

Démonstration. On définit un sous-complexe $\mathcal{W}^0$ de $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathrm{G}, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$ par

$$\mathcal{W}^0 = \mathcal{W}(\mathrm{G}^0, \mathrm{G}_i, i \in \mathrm{I})$$

D'après la proposition précédente, le complexe $\mathcal{W}^0$ est connexe. Soit $\mathcal{S}$ un système de représentants dans G de G/G^0. Pour tout $g \in \mathcal{S}$, le translaté $\mathcal{W}^0_g = g.\mathcal{W}^0$ est un sous-complexe connexe de $\mathcal{W}$ et on a clairement

$$\mathcal{W} = \bigcup_{g \in \mathcal{S}} \mathcal{W}^0_g$$

Cette réunion est disjointe. En effet, si pour $g_1, g_2 \in \mathcal{S}$, $\mathcal{W}^0_{g_1} \cap \mathcal{W}^0_{g_2} \neq \emptyset$, alors en prenant un sommet s dans cette intersection on a : $s = g_1 x \mathrm{G}_i = g_2 y \mathrm{G}_i$, avec x et y dans G^0. Ce qui implique que $g_1 \mathrm{G}^0 = g_2 \mathrm{G}^0$ et donc $g_1 = g_2$. Par conséquent, les sous-complexes $\mathcal{W}^0_g$, pour $g \in \mathcal{S}$, sont les composantes connexes de $\mathcal{W}$. D'où le résultat. □

3.3 Complexes de Coxeter

3.3.1 Groupes de Coxeter

Définition 3.31. *Une matrice de Coxeter sur un ensemble S est une matrice symétrique $\mathrm{M} = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ dont les coefficients diagonaux valent 1 et dont les coefficients hors diagonale sont dans $\{2, 3, ...\} \cup \{\infty\}$.*

Le groupe de Coxeter associé à $\mathrm{M} = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ est le groupe W définit par générateurs et relations, d'ensemble de générateurs S et de présentation

$$\mathrm{W} =< S |\ (st)^{m_{s,t}} = 1,\ \forall\ s, t \in S >$$

où $m_{s,t} = \infty$ signifie qu'il n'y a pas de relation entre s et t. Le couple (W, S) est appelé un système de Coxeter et le cardinal de S est appelé son rang.

Notons qu'un groupe de Coxeter est un groupe muni d'un système de générateurs privilégié. Dans toute la suite, lorsqu'on parlera de groupe de Coxeter on le confondera avec le système de Coxeter correspondant.

La donnée d'un système de Coxeter (W, S) est équivalent à la donnée d'un ensemble S de générateurs et d'une matrice de Coxeter $\mathrm{M} = (m_{s,t})_{s,t \in S}$ sur S. Ceci est équivaut à la donnée d'un graphe, qu'on appelle le graphe de Coxeter de (W, S), d'ensemble de sommets S et dont deux sommets s et t sont reliés par une arête si $m_{s,t} \geqslant 3$.

Exemple 3.32.

(i) Le groupe diédral D_n, groupe des isométries du plan laissant globalement invariant un polygône régulier à n cotés, est un groupe de Coxeter. Le groupe D_n est engendré par deux réflexions s_1 et s_2 et admet comme présentation

$$\mathrm{D}_n =< s_1, s_2 |\ s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^n = 1 >$$

(ii) Le groupe diédral infini D_∞ *est le groupe de Coxeter donné par la présentation*

$$\mathrm{D}_\infty =< s_1, s_2 |\ s_1^2 = s_2^2 = 1 >$$

Géométriquement, il s'agit du groupe des isométries de la droite affine engendré par les deux symétries centrales s_1 *et* s_2 *de centres 0 et 1 respectivement.*

(iii) Soit Φ *un système de racines d'un espace euclidien* E *et* W *son groupe de Weyl. Il s'agit du sous-groupe du groupe orthogonal* $\mathrm{O(E)}$ *engendré par les réflexions orthogonales par rapport à l'hyperplan* $a^\perp$ *pour* $a \in \Phi$*. Notons que* W *est un groupe fini. On fixe un système simple* Δ *de* Φ *et on note* $S = \{s_a,\ a \in \Delta\}$ *l'ensemble des réflexions simples de* W*. Alors le groupe* W *est engendré par* S *et admet une présentation de la forme*

$$\mathrm{W} =< S/(st)^{m_{s,t}} = 1\ ,\ \forall\ s,t \in S >$$

Ainsi, W *est un groupe de Coxeter finis. Réciproquement, on montre que tout groupe de Coxeter fini est un groupe de Weyl. Pour plus de détails, voir [Hum. I,1.9].*

3.3.2 Représentation canonique d'un groupe de Coxeter

Soit (W, S) un système de Coxeter. Si W est fini, on sait bien qu'il s'identifie à un groupe engendré par des réflexions d'un espace euclidien (voir [Hum92]). De façon générale, le groupe de Coxeter W peut être réalisé comme un groupe engendré par des réflexions d'un espace vectoriel réel muni d'une forme bilinéaire.

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel de base S. On note $(e_s, s \in S)$ la base canonique de E. On définit une forme bilinéaire b sur E par

$$b(e_s, e_t) = -\cos\frac{\pi}{m_{s,t}},\ \text{pour tout } s,t \in S$$

On définit alors une représentation linéaire $\rho : \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ sur la partie génératrice S par

$$\rho(s)(x) = x - 2b(e_s, x)e_s,\ \text{pour tout } x \in \mathrm{E} \text{ et } s \in S$$

qu'on appelle la représentation canonique de W. Le morphisme ci-dessus est bien défini puisque les $\rho(s)$, pour $s \in S$, sont des involutions, et un calcul simple montre les relations $(\rho(s)\rho(t))^{m_{s,t}} = 1$, pour tout $s,t \in S$.

Théorème 3.33. *La représentation canonique* $\rho : \mathrm{W} \longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(\mathrm{E})$ *est fidèle.*

Démonstration. Voir [Hum. 5.4]. □

Théorème 3.34. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Le groupe de Coxeter W *est fini.*

(b) La forme bilinéaire b *est définie positive.*

Définition 3.35. *Un système de Coxeter* (W, S) *vérifiant une des propriétés équivalentes du théorème précédent est dit sphérique.*

Théorème 3.36. *A isomorphisme près, le graphe de Coxeter d'un groupe de Coxeter irréductible sphérique est l'un des graphes de la liste A.*1 *de l'appendice.*

Définition 3.37. *Un Système de Coxeter* (W, S) *est dit affine si la forme bilinéaire b est positive et dégénérée.*

3.3.3 Complexes de Coxeter

Si (W, S) est un système de Coxeter et T une partie de S. On note $\mathrm{W_T}$ le sous-groupe de W engendré par T. Les sous-groupes $\mathrm{W_T}$, pour T décrivant l'ensemble des parties de S, sont appelés les sous-groupes paraboliques standards de W et leurs conjugués sont appelés les sous-groupes paraboliques de W. Un treillis est un ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. L'ensemble des parties d'un ensemble (resp. l'ensemble des sous-groupes d'un groupe), ordonné par inclusion, est évidemment un treillis.

Proposition 3.38. *La correspondance* $\mathrm{T} \longmapsto \mathrm{W_T}$ *est un isomorphisme de treillis, de l'ensemble des parties de S dans l'ensemble des sous-groupes paraboliques standards de* W*. Plus explicitement, pour tout* $\mathrm{J}, \mathrm{K} \subset S$*, on a*

(a) $\mathrm{W_J} \subset \mathrm{W_K}$ *si et seulement si* $\mathrm{J} \subset \mathrm{K}$*.*

(b) $\mathrm{W_{J\cap K}} = \mathrm{W_J} \cap \mathrm{W_K}$*.*

(c) $\mathrm{W_{J\cup K}} =< \mathrm{W_J}, \mathrm{W_K} >$*.*

Démonstration. Voir [AB, 3.1]. □

Définition 3.39. *Un système de Coxeter* (W, S) *est dit irréductible s'il n'existe aucune partition non triviale* $S = S_1 \sqcup S_2$ *telle que* $\mathrm{W}_S = \mathrm{W}_{S_1} \times \mathrm{W}_{S_2}$*.*

Soit (W, S) un système de Coxeter et $\Sigma(\mathrm{W}, S)$ l'ensemble donné par

$$\Sigma(\mathrm{W}, S) = \{w\mathrm{W_T},\ w \in \mathrm{W},\ \mathrm{T} \subset S\}$$

qu'on ordonne par inclusion inversée.

Proposition 3.40. *Pour tout système de Coxeter* (W, S)*, l'ensemble ordonné* $\Sigma(\mathrm{W}, S)$ *est simplicial. Le complexe simplicial corresspondant à* $\Sigma(\mathrm{W}, S)$ *est un complexe de chambres étiqueté, qu'on appelle le complexe de Coxeter de* (W, S) *et qu'on note aussi* $\Sigma(\mathrm{W}, S)$*. L'étiquetage étant donné par*

$$e(w\mathrm{W_T}) = S\backslash\mathrm{T},\ \textit{pour tout } w \in \mathrm{W} \textit{ et } \mathrm{T} \subset S$$

Le groupe W *agit simplicialement sur* $\Sigma(\mathrm{W}, S)$ *par translation à gauche.*

3.4 L'immeuble affine du groupe G_n

Définition 3.41. *Un immeuble est un complexe simplicial $\mathcal{I}$ recouvert par une famille de sous-complexes, qu'on appelle les appartements, vérifiant les propriétés suivantes :*

(I) Tout appartement est un complexe de Coxeter.

(II) Deux simplexes de $\mathcal{I}$ sont contenus dans une même appartement.

(III) Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux appartements contenants deux simplexes fixés σ et τ, il existe un isomorphisme $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ fixant $\sigma \cup \tau$ point par point.

L'immeuble affine de G_n, qu'on notera dans toute la suite $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, se définit de plusieurs façons. Dans notre thèse nous le définissons via les classes d'homothétie de $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux. Pour plus de détail, voir [Gar97], [AB10] et [Wer01].

Soit E le F-espace vectoriel F^n. Deux $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L et M de E sont dits homothétiques s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathrm{F}^\times$ tel que $\mathrm{M} = \lambda\mathrm{L}$. Ceci définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux de E. La classe d'un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L est notée [L]. Le groupe G_n agit naturellement sur l'ensemble des classes d'homothétie de $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux par $g.[\mathrm{L}] = [g.\mathrm{L}]$. Sur l'ensemble des classes d'homothétie d'$\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux de E on définit une structure de complexe simplicial, qu'on note $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Les simplexes sont les ensembles finis de classes d'homothétie d'$\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux de E de la forme $\sigma = \{\Lambda_0, ..., \Lambda_q\}$, où les Λ_i sont des classes d'homothétie d'$\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux telles que l'on peut choisir dans chaque classe un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux $\mathrm{L}_i \in \Lambda_i$ de sorte que :

$$\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}_0 \subsetneq \mathrm{L}_q \subsetneq ... \subsetneq \mathrm{L}_1 \subsetneq \mathrm{L}_0$$

Un q-simplexe σ de dimension non nul comme ci-dessus définit un drapeau du k_F-espace vectoriel $\mathrm{L}_0/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}_0$,

$$\{0\} \subsetneq \mathrm{L}_q/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}_0 \subsetneq ... \subsetneq \mathrm{L}_1/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}_0 \subsetneq \mathrm{L}_0/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}_0$$

On appelle type de σ, noté $t(\sigma)$, le type du drapeau associé défini à une permutation circulaire près, c'est-à-dire la partition de l'entier n définit par les sauts successives des dimensions dans le drapeau modulo une permutation circulaire près. La dimension maximale d'un drapeau associé à un simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ est $n-2$, par conséquent $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ est de dimension $n-1$.

Le groupe G_n agit sur $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ en respectant sa structure simpliciale, l'action étant transitive sur l'ensemble des sommets (resp, des chambres, des q-simplexes d'un type fixé). En tant que complexe simplicial, $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ est recouvert par une famille de sous-complexes, qu'on appelle les appartements construite de la façon suivante. Une croix de E est une famille $\mathcal{C} = \{d_1, ..., d_n\}$ de n droites de E de somme égale à E. L'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ associé à $\mathcal{C}$ est le sous-complexe simplicial de $\mathcal{I}_n$ formé par les simplexes σ dont les sommets sont les classes d'homothétie de $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L qui se mettent sous la forme $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 + ... + \mathrm{L}_n$, où chaque L_i est un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseau de la droite d_i.

Théorème 3.42. *([Gar97],19) Le complexe simplicial $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, muni de la collection d'appartements $\mathcal{A}_\mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ parcourt l'ensemble des croix de* E*, est un immeuble affine qu'on appelle l'immeuble affine de* G_n.

On fixe un étiquetage e de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ une fois pour toute. Le groupe de G_n ne préserve pas l'étiquetage. Cependant le sous-groupe

$$\mathrm{G}_n^0 = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathrm{F}) \ / \ \upsilon_\mathrm{F}(\det(g)) \equiv 0 \bmod n\}$$

le préserve. On a un produit semi-direct $\mathrm{G}_n =< \Pi > \mathrm{G}_n^0$ et l'élément Π agit les sur les étiquettes d'une chambre de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ par une permutation circulaire. Ici Π est la matrice ci-dessous :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \varpi_\mathrm{F} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $i = 1, .., n-1$, on note s_i la matrice de la transposition $(i, i+1)$. Notons que pour $i = 2, ..., n-1$, on a $\Pi s_i \Pi^{-1} = s_{i-1}$. On pose $s_0 = \Pi s_1 \Pi^{-1}$. Posons $S = \{s_0, ..., s_{n-1}\}$. Alors le groupe $\mathbf{W}_{\mathrm{aff}}$ engendré par S s'identifie au groupe de Weyl affine de G_n. On associe à $\mathbf{W}_{\mathrm{aff}}$ son complexe de Coxeter $\Sigma(\mathbf{W}_{\mathrm{aff}}, S)$. C'est un complexe simplicial de réalisation géométrique $\mathbb{R}^{n-1}$, chaque appartement de $\mathcal{I}_n$ lui est isomorphe.

Soit $\mathcal{C}$ une croix de E et $\mathrm{T}_\mathcal{C}$ le tore déployé maximal de G_n associé, c'est-à-dire le sous-groupe fermé de G_n formé des matrices diagonales relativement à la décomposition de E suivant la croix $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{N}_\mathcal{C} = \mathrm{N}_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{T}_\mathcal{C})$ le normalisateur de $\mathrm{T}_\mathcal{C}$ dans G_n. Le quotient $\mathrm{W}_\mathcal{C} := \mathrm{N}_\mathcal{C}/\mathrm{T}_\mathcal{C}$ s'identifie au groupe de Weyl sphérique de G_n, c'est-à-dire, au groupe symétrique S_n. Le tore $\mathrm{T}_\mathcal{C}$ agit transitivement sur l'ensemble des sommets de l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ et $\mathrm{N}_\mathcal{C}$ agit transitivement sur l'ensemble des chambres de l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{C}$. A un scalaire multiplicatif près, l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ est muni d'une unique métrique $d_\mathcal{C}$ invariante sous l'action de $\mathrm{W}_\mathcal{C}$. Une telle métrique se prolonge en une métrique d de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ (unique à un scalaire multiplicatif près) pour laquelle G_n agit via des isométries.

On rappelle l'expression explicite de la métrique d. On fixe une F-base $(u_1, ..., u_n)$ de E associée à la croix $\mathcal{C}$ et on identifie la réalisation géométrique $|\mathcal{A}_\mathcal{C}|$ de $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ avec $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, ..., 1)$ via l'application φ définie de la façon suivante. A tout sommet $s = [\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_1} e_1 + ... + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_n} e_n]$, φ associe la classe de $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ dans le quotient. A tout point $x = t_0 s_0 + ... + t_q s_q$ dans la réalisation géométrique d'un simplexe $\sigma = \{s_0, ..., s_q\}$, avec les t_i sont des réels positifs de somme 1, φ associe $\varphi(x) = t_0\varphi(s_0) + ... + t_0\varphi(s_q)$. A un scalaire multiplicatif près, $\mathbb{R}^n/\mathbb{R}(1, ..., 1)$ possède une unique métrique euclidienne invariante par l'action naturelle du

groupe symétrique S_n. Cette métrique est donnée par $d(\bar{x},\bar{y}) = d_e(x - m(x)e, y - m(y)e)$, où d_e est la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$, $m(z) = (z_1 + ... + z_n)/n$ pour tout $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$ et $e = (1, ..., 1)$. Par transport de structure, on muni l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{C}$ d'une métrique $d_\mathcal{C}$ invariante sous l'action du groupe de Weyl $\mathrm{W}_\mathcal{C}$. L'unique métrique (à un scalaire multiplicatif près) prolongeant $d_\mathcal{C}$ à l'immeuble $\mathcal{I}_n$ sera noté d. Notons que l'immeuble affine $\mathcal{I}_2$ du groupe G_2 est un arbre (ie. graphe connexe sans circuit) homogène de valence $q_\mathrm{F} + 1$ et que la métrique d qu'on vient de définir sur $\mathcal{I}_2$ coincide avec la métrique des chemins de $\mathcal{I}_2$ vu comme graphe connexe, c'est-à-dire la métrique définie par

$$d(s,t) = \min\{\ell(c),\ c \text{ chemin reliant s à t}\}$$

où $\ell(c)$ est la longueur du chemin c. Dans toute la suite, on fixe les notations suivantes. Soit $\mathcal{C}_0 = \{\mathrm{F}e_1, ..., \mathrm{F}e_n\}$ la croix canonique de E et T_0 (resp ; N_0, W_0) le tore (resp. normalisateur, groupe de Weyl) associé à $\mathcal{C}_0$. T_0 est le tore diagonal de G_n. L'appartement associé à la croix $\mathcal{C}_0$ est noté $\mathcal{A}_0$ et on l'appelle appartement standard de $\mathcal{I}_n$. La chambre standard C_0 de $\mathcal{I}_n$ est la chambre de l'appartement $\mathcal{A}_0$ dont la chaîne d'$\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux associée est donnée par

$$L_0 = \mathcal{O}_\mathrm{F}e_1 + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_2 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_{n-2} + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_{n-1} + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_n$$

$$L_1 = \mathcal{O}_\mathrm{F}e_1 + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_2 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_{n-2} + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_{n-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_n$$

$$L_2 = \mathcal{O}_\mathrm{F}e_1 + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_2 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_{n-2} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_{n-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_n$$

$$\vdots$$

$$L_{n-1} = \mathcal{O}_\mathrm{F}e_1 + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_2 + ... + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_{n-2} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_{n-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}e_n$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note s_m le sommet de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ donné par,

$$s_m = [\mathcal{O}_\mathrm{F}e_1 + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_2 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F}e_{n-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^m e_n]$$

On appelle *k-chemin standard* de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, qu'on note c^k, le k-chemin $(s_0, ..., s_k)$. Dans toute la suite on normalise la métrique d de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ de sorte que $d(s_0, s_1) = 1$.

Proposition 3.43. *Soient s et t deux sommets voisins de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. On fixe deux $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux de* E *tel que la classe d'homothétie de* L *et de* M *soit s et t respectivement et $\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L} \subsetneq \mathrm{M} \subsetneq \mathrm{L}$. Alors la distance entre s et t est donnée par*

$$d(s,t) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}(\dim_{k_\mathrm{F}}(\bar{M}) - \frac{1}{n}\dim_{k_\mathrm{F}}(\bar{M})^2)^{\frac{1}{2}}$$

où $\overline{\mathrm{M}}$ *est le k_F-espace vectoriel* $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$.

Démonstration. Soient s et t deux sommets voisins de $\mathcal{I}_n$. Il existe un appartement de $\mathcal{I}_n$ les contenant, et quitte à translater par un élément du groupe G_n on peut supposer que s et t sont contenus dans l'appartement standard $\mathcal{A}_0$. On fixe deux $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L et M de E représentants s et t respectivement et tels que $\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L} \subsetneq \mathrm{M} \subsetneq \mathrm{L}$ $(*)$. Les $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L et M de E se décomposent dans la base canonique sous la forme

$$L = \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_1} e_1 + ... + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_n} e_n \quad \text{et} \quad M = \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\beta_1} e_1 + ... + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\beta_n} e_n$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in \mathbb{Z}^n$. Posons $I = \{i \in \mathbb{N}_n / \ \beta_i = \alpha_i\}$ et $J = \{i \in \mathbb{N}_n / \ \beta_i = \alpha_i + 1\}$, où $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$. D'après la condition $(*)$, I et J sont non vides et $I \sqcup J = \mathbb{N}_n$. Soit $\overline{\mathrm{L}}$ le k_F-espace vectoriel $\mathrm{L}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ et $\overline{\mathrm{M}}$ le sous-espace $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$. On a alors $\overline{M} \simeq \bigoplus_{i \in I} k_\mathrm{F}$. En particulier $\dim_{k_\mathrm{F}}(\overline{\mathrm{M}}) = card(I)$. La distance entre s et t est donnée par $d(s,t) = d_e(\alpha - m(\alpha)e, \beta - m(\beta)e)$. Un simple calcul nous donne $d(s,t)^2 = \sqrt{\frac{n}{n-1}}(card(J) - \frac{1}{n}card(J)^2)$, d'où le résultat. □

Chapitre 4

Cohomologie à support compact

Ce chapitre a pour but de définir et de donner les propriétés basiques de la cohomologie à support compact d'un complexe simplicial. Dans ce chapitre tous les complexes simpliciaux seront supposés localement finis. On commencera ce chapitre par les définitions et les propriétés dont on aura besoin dans toute la suite du texte. On définira tout d'abord la cohomologie à support compact d'un complexe simplicial dans le cas le plus général possible, puis on traitera le cas particulier de complexes simpliciaux étiquetés et le cas des graphes dirigés. Dans la deuxième partie de ce chapitre, on traitera le cas de la cohomologie de complexes muni d'action propre d'un groupe localement profini. Il s'agira de considérer la cohomologie à support compact d'un G-complexe propre comme un G-module. Dans la dernière partie, on présentera quelques notions sur la cohomologie à support compact dans un système de coefficients et on présentera une technique de suite spectrale nous permettant de calculer la cohomologie d'un G-complexe propre muni d'un recouvrement assez particulier.

4.1 Cohomologie à support compact d'un complexe simplicial

4.1.1 Généralités

Définition 4.1. *Soit* X *un complexe simplicial. Un p-simplexe ordonné de* X *est une suite* $(s_0, ..., s_p)$ *de sommets telle que l'ensemble* $\{s_0, ..., s_p\}$ *est un p-simplexe. On dit que deux p-simplexes ordonnés* $(s_0, ..., s_p)$ *et* $(t_0, ..., t_p)$ *sont équivalents si les simplexes correspondants sont les mêmes et si les indexations diffèrent d'une permutation paire. On notera* $[s_0, ..., s_p]$ *la classe de* $(s_0, ..., s_p)$ *et* $\mathrm{X}_{(p)}$ *l'ensemble des p-simplexes orientés de* X*. Si* $x = [s_0, ..., s_p]$ *est un p-simplexe orienté de* X*, on note* $\sigma_x = \{s_0, ..., s_p\}$ *le p-simplexe correspondant.*

Définition 4.2. *Soit* X *un complexe simplicial. Une p-cochaîne orientée de* X *est une*

fonction $f : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \mathbb{C}$ *vérifiant :*

(i) f *est à support fini.*

(ii) $f([s_{\lambda(0)}, ..., s_{\lambda(p)}]) = \varepsilon(\lambda) f([s_0, ..., s_p])$*, pour toute permutation* λ *de* $\{0, ..., p\}$*, et où* ε *désigne la signature d'une permutation.*

On note $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ *l'espace des p-cochaînes orientées de* X*. L'espace* $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ *est trivial pour* $p < 0$ *ou* $p > \dim(\mathrm{X})$*. On définit maintenant une application linéaire*

$$d_p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathbb{C})$$

qu'on appelle l'opérateur cobord. Si f *est une p-cochaîne orienté de* X *et* $[s_0, ..., s_{p+1}]$ *un* $(p+1)$*-simplexe orienté, on pose*

$$d_p(f)([s_0, ..., s_{p+1}]) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k f([s_0, ..., \widehat{s}_k, ..., s_{p+1}])$$

où le symbole $\widehat{s}_k$ *signifie qu'on omet le sommet* s_k *dans le* $(p+1)$*-simplexe orienté* $[s_0, ..., s_{p+1}]$*. Comme* $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ *est trivial pour* $p < 0$ *(resp.* $p > \dim(\mathrm{X})$*), l'opérateur cobord* d_p *est trivial.*

Lemme 4.3. *Pour tout* $p \in \mathbb{Z}$*,* $d_{p+1} \circ d_p = 0$*.*

Démonstration. Soit f une p-cochaîne orientée et $[s_0, ..., s_{p+2}]$ un $(p+2)$-simplexe orienté de X. Alors on a

$$(d_{p+1} \circ d_p)(f)([s_0, ..., s_{p+2}]) = \sum_{k=0}^{p+2} (-1)^k d_p(f)([s_0, ..., \widehat{s}_k, ..., s_{p+2}])$$

$$= \sum_{k<l} (-1)^l (-1)^k f([s_0, ..., \widehat{s}_k, ..., \widehat{s}_l, ..., s_{p+2}]) + \sum_{k>l} (-1)^{l-1} (-1)^k f([s_0, ..., \widehat{s}_k, ..., \widehat{s}_l, ..., s_{p+2}])$$

Les termes de ces deux dernières sommes sont opposés l'un de l'autre. D'où le résultat. □

Définition 4.4. *Le noyau de l'opérateur cobord* $d_p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathbb{C})$ *est appelé l'espace des p-cocycles de* X *et on le note* $\mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*. L'image de l'opérateur cobord* $d_{p-1} : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p-1)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ *est appelé l'espace des p-cobords de* X *et on le note* $\mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*. Par le lemme précédent, tout p-cobord est un p-cocycle, c'est-à-dire* $\mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \subset \mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*. On définit*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = \mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C}) / \mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie (simpliciale) à support compact de X*.*

Exemple 4.5. *(i) Soit* X *le complexe simplicial de dimension 1 d'ensemble de sommets* $\mathbb{Z}$ *et dont les 1-simplexes sont de la forme* $\{n, n+1\}$*, pour* $n \in \mathbb{Z}$*. Pour* $p < 0$ *ou*

$p > 1$, l'espace $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est trivial. L'espace $\mathrm{H}_c^0(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = 0$ est le noyau de l'opérateur cobord

$$d_0 : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)}, \mathbb{C})$$

définie par $d_0(f)([s_0, s_1]) = f(s_1) - f(s_0)$, pour tout $f \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)}, \mathbb{C})$ et $[s_0, s_1] \in \mathrm{X}_{(1)}$. Donc une 0-cochaîne orientée f de X est dans $\mathrm{H}_c^0(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ si et seulement si $f(s) = f(t)$ pour tous sommets reliés par une arête s et t. Mais comme le complexe X est non compact, il existe un sommet s de X tel que $f(s) = 0$. Donc $f = 0$. Par suite, l'espace $\mathrm{H}_c^0(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est trivial. Pour l'espace $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}, \mathbb{C})$, il est facile de vérifier que la suite

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{d_0} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}$$

est exacte, où φ est la forme linéaire donnée par $\varphi(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f([n, n+1])$. Ce qui prouve que $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

(ii) Soit G le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et X son arbre de Bruhat-Tits, c'est un graphe connexe sans circuit. Comme X est connexe et non compact alors $\mathrm{H}_c^0(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = 0$. On montre que $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \neq 0$ et que la représentation de G dans $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est équivalente à la représentation de Steinberg de G.

La cohomologie à support compact d'un complexe simplicial étiqueté X s'obtient de façon plus simple. En effet l'étiquetage permet de fixer une orientation de chaque simplexe. Soit X un complexe simplicial étiqueté de dimension n. On fixe un étiquetage $e : \mathrm{X}_0 \longrightarrow \Delta_n$. Pour tout p-simplexe $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ et pour tout $(p+1)$-simplexe $\tau = \{t_0, ..., t_{p+1}\}$, on définit le coefficient d'incidence $[\tau : \sigma]$ par

$$[\tau : \sigma] = \begin{cases} (-1)^i, & \text{si } \sigma \subset \tau \\ 0 \quad , & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'indice i est l'unique élément de l'ensemble $\{e(t_0), ..., e(t_{p+1})\} \backslash \{e(s_0), ..., e(s_p)\}$.

Définition 4.6. *Une p-cochaîne de X est une fonction à support finis $f : \mathrm{X}_p \longrightarrow \mathbb{C}$. On note $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ l'espace des p-cochaînes de X. L'espace $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est trivial pour $p < 0$ ou $p > \dim(\mathrm{X})$. On définit une application linéaire*

$$d_p : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+1}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

qu'on appelle l'operateur cobord. Si f est une p-cochaîne de X et σ un $(p+1)$-simplexe, on pose

$$d_p(f)(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathrm{X}_p} [\sigma : \tau] f(\tau)$$

Comme $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est trivial pour $p < 0$ (resp. $p > \dim(\mathrm{X})$), l'opérateur cobord d_p est trivial.

Lemme 4.7. *Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $d_{p+1} \circ d_p = 0$.*

Définition 4.8. *Le noyau de l'opérateur cobord $d_p : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+1}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est appelé l'espace des p-cocycles de* X *et on le note $\mathrm{Z}^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. L'image de l'opérateur cobord $d_{p-1} : \mathrm{C}_c^{p-1}(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est appelé l'espace des p-cobords de* X *et on le note $\mathrm{B}^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. Par le lemme précédent, tout p-cobord est un p-cocycle, c'est-à-dire $\mathrm{B}^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \subset \mathrm{Z}^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. On définit*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = \mathrm{Z}^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})/\mathrm{B}^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie (simpliciale étiqueté) à support compact de X*.*

Proposition 4.9. *Soit* X *un complexe simplicial étiqueté. Alors les complexes de cochaînes $(\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C}), d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ et $(\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}), d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ sont isomorphes et donc fournissent la même cohomologie.*

Démonstration. Le résultat est basé sur un calcul simple qu'on laisse au lecteur. □

Théorème 4.10. *Soit* X *un complexe simplicial et $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ la famille de ses composantes connexes. Alors pour tout $p \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}_i, \mathbb{C})$$

Démonstration. La preuve est similaire au cas de la cohomologie habituelle sans support. Voir [Mun96], théorème 42.1. □

Théorème 4.11. *Soit* X *un complexe simplicial. Alors, l'espace $\mathrm{H}_c^0(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ s'identifie à l'espace vectoriel de base l'ensemble des composantes connexes compactes de* X*.*

Démonstration. La preuve est similaire au cas de la cohomologie habituelle sans support. Voir [Mun96], théorème 42.1. □

Si Y est un sous-complexe simplicial d'un complexe simplicial X. Alors le complexe de cochaînes $(\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{Y}_{(p)}), d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$ s'identifie de façon canonique à un sous-complexe de cochaînes de $(\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}), d_p)_{p\in\mathbb{Z}}$. Plus précisement si f est une p-cochaîne orientée de Y (f est une fonction à support fini sur l'ensemble des p-simplexes orientés de Y vérifiant $f(x) = -f(y)$ si y est le p-simplexe orienté opposé à x), on peut voir f comme une p-cochaîne orientée de X en l'étendant par 0 sur $\mathrm{X}_{(p)} \backslash \mathrm{Y}_{(p)}$.

Définition 4.12. *L'espace quotient $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)})/\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{Y}_{(p)})$ est appelé l'espace des p-cochaînes de* X *modulo* Y*, et on le note $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathrm{Y}_{(p)})$.*

L'opérateur cobord $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{Y}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{Y}_{(p+1)})$ est tout simplement la restriction de l'opérateur cobord sur $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)})$. Par abus de notation, on notera d_p l'opérateur cobord

sur $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)})$ et sa restriction à $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{Y}_{(p)})$. Par passage aux quotients, on obtient une application linéaire

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathrm{Y}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathrm{Y}_{(p+1)})$$

qu'on note aussi par d_p. C'est aussi une différentielle, c'est-à-dire $d_{p+1} \circ d_p = 0$. Soit

$$\mathrm{Z}_{or}^p = \ker(d_p) : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathrm{Y}_{(p)}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathrm{Y}_{(p+1)}),$$

$$\mathrm{B}_{or}^p = \mathrm{Im}(d_p) : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p-1)}, \mathrm{Y}_{(p-1)}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathrm{Y}_{(p)}),$$

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Z}_{or}^p / \mathrm{B}_{or}^p \quad .$$

Ces espaces sont appelés, espace des p-cobords relatifs, espace des p-cocycles relatifs, et le p-ième espace de cohomologie relative à support compact, de X modulo Y respectivement.

4.1.2 Homomorphisme induit par une application simpliciale

Proposition-Définition 4.13. *Soit $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{Y}$ une application simpliciale propre. Pour toute p-cochaîne orientée ω de Y, on définit une fonction $f_p(\omega) : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \mathbb{C}$ par,*

$$f_p(\omega)([s_0, ..., s_p]) = \begin{cases} \omega([f(s_0), ..., f(s_p)]) \ , & si \quad \dim(\{f(s_0), ..., f(s_p)\}) = p \\ 0 \ , & sinon \end{cases}$$

Alors $f_p(\omega)$ est une p-cochaîne orientée de X. Par conséquent, f induit un homomorphisme d'espaces vectoriels gradués $f_* : (\mathrm{H}_c^p(\mathrm{Y}))_{p\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}))_{p\in\mathbb{Z}}$ qu'on appelle le morphisme induit par l'application simpliciale propre f.

Démonstration. Soit $\omega \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{Y}_{(p)})$. Pour montrer que $f_p(\omega) \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)})$ il suffit de vérifier que la fonction $f_p(\omega)$ est à support fini. Le fait que la fonction $f_p(\omega)$ vérifie $f_p(\omega)(x) = -f_p(\omega)(-x)$, pour tout $x \in \mathrm{X}_{(p)}$ où $-x$ désigne le p-simplexe orienté opposé à x, est immédiat.

Soit $\mathrm{A} = \{\sigma_x, \ x \in \mathrm{supp}(\omega)\}$. C'est un sous-ensemble fini de Y_p. Notons L le sous-complexe de Y engendré par A. C'est le plus petit sous-complexe de Y contenant A. L'ensemble des simplexes de L est donné par

$$\Sigma_{\mathrm{L}} = \{\sigma \in \Sigma_{\mathrm{Y}} / \ \exists \ x \in \mathrm{supp}(\omega), \ \sigma \subset \sigma_x\}$$

Comme $\mathrm{supp}(\omega)$ est fini, il est donc clair que L est un sous-complexe fini de Y. Montrons d'abord que $\mathrm{supp}(f_p(\omega)) \subset f^{-1}(\mathrm{L})_{(p)}$, où $f^{-1}(\mathrm{L})_{(p)}$ est l'ensemble des p-simplexes orientés du complexe $f^{-1}(\mathrm{L})$.

Soit $x = [s_0, ..., s_p] \in \mathrm{X}_{(p)}$. Si $x \in \mathrm{supp}(f_p(\omega))$, alors $\dim(f(\sigma_x)) = p$ et $\omega(f(x)) \neq 0$. Donc $\dim(\sigma_{f(x)}) = p$ et $f(x) \in \mathrm{supp}(\omega)$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(\mathrm{L})_{(p)}$. D'où $\mathrm{supp}(f_p(\omega)) \subset f^{-1}(\mathrm{L})_{(p)}$. Comme f est propre et que L est un sous-complexe fini de Y, alors $f^{-1}(\mathrm{L})$ est un sous-complexe fini de X. En particulier $f^{-1}(\mathrm{L})_{(p)}$ est un sous-ensemble fini de $\mathrm{X}_{(p)}$. Ce qui prouve que $f_p(\omega)$ est à support fini. □

Théorème 4.14. *La correspondance*

$$\mathrm{X} \longmapsto \mathrm{H}_c^*(\mathrm{X}) = (\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}))_{p\in\mathbb{Z}}$$

qui à un complexe simplicial X *associe l'espace vectoriel gradué* $\mathrm{H}_c^*(\mathrm{X}) = (\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}))_{p\in\mathbb{Z}}$ *est un foncteur contravariant de la catégorie* $\mathcal{CS}$ *des complexes simpliciaux, avec comme morphismes les applications simpliciales propres, dans la catégorie des espaces vectoriels gradués.*

Démonstration. La preuve est similaire au cas de la cohomologie habituelle sans support. Voir [Mun96], paragraphe 12. □

4.1.3 Lien entre la cohomologie simpliciale et topologique

Dans cette section, nous présentons quelques résultats sur la cohomologie d'Alexander-Spanier et nous donnons une comparaison entre la cohomologie à support compact d'un complexe simplicial et de sa réalisation géométrique . Pour plus de détails on renvoie à [Mas78], [Spa94] et [Hu68].

Soit X un espace localement compact. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, soit $\Phi^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions

$$f : \mathrm{X}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{C}$$

On définit un opérateur cobord

$$\delta_p : \Phi^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \Phi^{p+1}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

par $\delta_p(f)(x_0, ..., x_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i f(x_0, ..., \widehat{x}_i, ..., x_{p+1})$. Alors $\delta \circ \delta = 0$ et $\Phi^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est un complexe de cochaîne. La cohomologie du complexe $\Phi^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ n'est pas interéssante, dans le sens où l'on a :

Lemme 4.15. *([Spanier1], page 307) Si* X *est non vide, alors*

$$\mathrm{H}^p(\Phi^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})) \simeq \begin{cases} \mathbb{C}, & si\ p = 0 \\ 0, & sinon \end{cases}$$

Démonstration. Voir [Spa94], lemme page 307. □

En utilisant la topologie de X, on peut considérer un sous-complexe de $\Phi^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ dont la cohomologie est plus intéressante. Soit $p \in \mathbb{N}$. Le support d'une fonction $f : \mathrm{X}^{p+1} \longrightarrow \mathbb{C}$, qu'on note $\mathrm{supp}(f)$, est définie comme étant l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ vérifiants : $x \notin \mathrm{supp}(f)$ si et seulement s'il existe un voisinage U de x tel que f est nulle sur U^{p+1}. Le support d'une telle fonction vérifie les propriétes suivantes :

(1) $\mathrm{supp}(f)$ est un fermé de X.

(2) $\mathrm{supp}(f + g) \subset \mathrm{supp}(f) \cup \mathrm{supp}(g)$.

(3) $\mathrm{supp}(\delta_p(f)) \subset \mathrm{supp}(f)$.

On définit deux sous-complexes de cochaînes $\Phi_0^*(\mathrm{X},\mathbb{C})$ et $\Phi_c^*(\mathrm{X},\mathbb{C})$ de $\Phi^*(\mathrm{X},\mathbb{C})$ par,

$$\Phi_0^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \{f \in \Phi^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \ / \ \mathrm{supp}(f) = \emptyset\}$$

$$\Phi_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \{f \in \Phi^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \ / \ \mathrm{supp}(f) \text{ compact}\}$$

On note $\mathrm{C}_c^*(\mathrm{X},\mathbb{C}) = (\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}))_{p\in\mathbb{Z}}$ le complexe de cochaîne quotient de $\Phi_c^*(\mathrm{X},\mathbb{C})$ par $\Phi_0^*(\mathrm{X},\mathbb{C})$ et d sa différentielle.

Définition 4.16. *([Mas78], I, 1.1)*

On appelle p-cochaîne à support compact de X *à coefficients dans* $\mathbb{C}$ *tout élément de* $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$. *Le noyau de l'opérateur cobord* $d_p : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+1}(\mathrm{X},\mathbb{C})$ *est appelé l'espace des p-cocycles de* X *et on le note* $\mathrm{Z}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$. *L'image de l'opérateur cobord* $d_{p-1} : \mathrm{C}_c^{p-1}(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$ *est appelé l'espace des p-cobords de* X *et on le note* $\mathrm{B}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$.

On définit

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \mathrm{Z}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})/\mathrm{B}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C})$$

et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie à support compact de X.

Remarque 4.17. *Dans [Mas80] XIV, 3. page 359, l'auteur définit la cohomologie à support compact d'un espace topologique quelconque de la façon suivante :*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \varinjlim \mathrm{H}^p(\mathrm{X},\mathrm{X}-\mathrm{K},\mathbb{C})$$

où la limite injective porte sur les sous-espaces compact K *de* X. *Bien que cette définition est équivalente à notre définition dans le cas des espaces localement compact, cette définition permet d'en déduire de façon évidente que si* X *est un espace compact la cohomologie à support compact de* X *coincide avec la cohomologie sans support (singulière) de* X.

Lemme 4.18. *([Mas78], I.1.1)*

Soit X *un espace localement compact. Alors l'espace de cohomologie* $\mathrm{H}_c^0(\mathrm{X},\mathbb{C})$ *est isomorphe à l'espace des fonctions* $f : \mathrm{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ *localement constantes et à support compact.*

Théorème 4.19. *([Mas78], I.1.4)*

Soit X *un espace localement compact et* F *un fermé de* X. *Alors on a une longue suite exacte,*

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}-\mathrm{F},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^p(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^p(\mathrm{F},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^{p+1}(\mathrm{X}-\mathrm{F},\mathbb{C}) \longrightarrow \ldots$$

Démonstration. Voir [Mas78], théorème 1.6, page 19. □

Soit X un CW-complexe, c'est-à-dire, un espace topologique séparé muni d'une suite croissante de sous-espaces fermés,

$$\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}_1 \subset ... \subset \mathrm{X}_n \subset ...$$

où X_n est appelé le n-squelette de X, telle que :

(i) X_0 est un sous-espace discret de X.

(ii) pour tout $p \geqslant 1$, $\mathrm{X}_p - \mathrm{X}_{p-1}$ est une réunion disjointe de parties ouvertes dans X_p, chacune est homéomorphe à la boule ouverte $\mathbb{B}^p$ de $\mathbb{R}^p$.

(iii) L'espace X est recouvert par les sous-espaces fermés X_p et une partie A de X est fermée si son intersection avec chaque X_p est un fermé de X_p.

(voir [Mas78],3.2 page 54)

Si X un complexe simplicial (localement fini) de dimension fini, sa réalisation géométrique |X| est naturellement muni d'une structure de CW-complexe de la façon suivante. L'espace |X| est muni d'une suite croissante de sous-espaces fermés,

$$\mathrm{X}_0 \subset \mathrm{X}_1 \subset ... \subset \mathrm{X}_n \subset ...$$

où $\mathrm{X}_k = |\mathrm{X}^{(k)}|$ est la réalisation géométrique du k-squelette de X, et on vérifie facilement que :

(i) X_0 est un sous-espace discret de |X|.

(ii) pour tout $p \geqslant 1$, $\mathrm{X}_p - \mathrm{X}_{p-1}$ est une réunion disjointe de parties ouvertes dans X_p, chacune est homéomorphe à la boule ouverte $\mathbb{B}^p$ de $\mathbb{R}^p$: $\mathrm{X}_p - \mathrm{X}_{p-1}$ est la réunion disjointe des p-simplexes ouverts de |X|.

(iii) L'espace |X| est recouvert par les sous-espaces fermés X_p et une partie A de |X| est fermée si son intersection avec chaque X_p est un fermé de X_p.

Si X est un CW-complexe, notons

$$\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})_{cell} = \mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}^p - \mathrm{X}^{p-1}, \mathbb{C})$$

et on l'appelle l'espace des p-cochaînes cellulaires à support compact de X.

Soit $\partial : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})_{cell} \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+}(\mathrm{X}, \mathbb{C})_{cell}$ le morphisme composé des deux morphismes suivants,

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}^p - \mathrm{X}^{p-1}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\partial^*} \mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}^p, \mathbb{C}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{H}_c^{p+1}(\mathrm{X}^{p+1} - \mathrm{X}^p, \mathbb{C})$$

où j est l'inclusion. Le morphisme ∂ est une différentielle, c'est-à-dire $\partial \circ \partial = 0$ (voir [Massey, 3.3, page 56]). Le complexe de cochaînes $\mathrm{C}_c^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})_{cell} = (\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})_{cell}, \partial)$ est appelé le complexe de cochaînes cellulaires à support compact de X. De plus, la cohomologie de ce complexe de cochaîne est isomorphe à la cohomologie à support compact de X, voir [Mas78], 5.2, page 129.

Soit X un complexe simplicial de dimension finie et |X| sa réalisation géométrique muni de sa structure naturelle de CW-complexe. Si on note Σ_p (resp. $\Sigma_{(p)}$) l'ensemble des p-simplexes (resp. p-simplexes orientés) de X, alors comme $\mathrm{X}_p - \mathrm{X}_{p-1}$ est la réunion disjointe des p-simplexes ouverts de |X|,

$$\mathrm{X}_p - \mathrm{X}_{p-1} = \coprod_{\sigma \in \Sigma_n} \overset{o}{|\sigma|}$$

on a

$$\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}^p - \mathrm{X}^{p+1}, \mathbb{C}) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq p \\ \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_p} \mathrm{H}_c^p(\overset{o}{|\sigma|}, \mathbb{C}), & \text{si } n = p \end{cases}$$

Par conséquent, l'espace $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}^p - \mathrm{X}^{p-1}, \mathbb{C})$ s'identifie à l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ des p-cochaînes orientées à support compact de X. De plus, on vérifie que via cette identification, la différentielle du complexe du cochaînes cellulaire à support compact de $|X|$ correspond bien à la différentielle du complexe de cochaînes orientées à support compact de X. Pour plus de détails, voir [Mas78], 5.2, page 129. Les deux complexes de cochaînes $\mathrm{C}_c^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})_{cell}$ et $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ étant isomorphes, on a

$$\mathrm{H}_c^*(|\mathrm{X}|, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}_c^*(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

4.2 Représentations dans des espaces de cohomologie

Un groupe G, agissant simplicialement sur un complexe simplicial X, agit linéairement de façon naturelle sur chaque espace de cohomologie $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. Donc chaque action simpliciale d'un groupe G sur un complexe simplicial nous fournit une famille de représentations linéaires complexes. Ce procédé fonctionne pour n'importe quel groupe, mais dans cette section on s'intéressera au cas des groupes localement profinis. Plus précisement, on va voir que pour un groupe localement profini G, et en notant $\mathcal{CS}(\mathrm{G})$ la catégorie des G-complexes simpliciaux propres, on a un foncteur

$$\mathrm{H}_c^* : \mathcal{CS}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathrm{G})_{\mathbb{Z}},\ \mathrm{X} \longmapsto (\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}))_{p \in \mathbb{Z}}$$

de la catégorie $\mathcal{CS}(\mathrm{G})$ dans la catégorie des $\mathcal{R}(\mathrm{G})_{\mathbb{Z}}$ des G-modules gradués.

Proposition 4.20. *Soit* G *un groupe localement profini et* X *un* G*-complexe propre. Alors l'espace vectoriel gradué* $(\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C}))_{p \in \mathbb{Z}}$ *est un de* G*-modules lisse gradué.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que chaque espace $\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est équipé d'une représentation lisse du groupe G. Pour cela il suffit de montrer que chaque espace de cochaînes orientés à support compact $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ est muni d'une représentation lisse de G. Soit donc p un entier naturel. Le groupe G agit linéairement dans l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ par,

$$g.f([s_0, ..., s_p]) = f([g^{-1}.s_0, ..., g^{-1}.s_p])$$

pour tout g dans G et toute fonction f dans $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$. L'action de G dans $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ est lisse. En effet, soit f dans $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ et $\{x_0, ..., x_m\}$ le support de f, avec $x_i = [s_0^i, ..., s_p^i]$ et $\sigma_i = \{s_0^i, ..., s_p^i\}$ le p-simplexe correspondant. Comme l'action de G sur X est propre, alors le stabilisateur de chaque p-simplexe est en particulier ouvert. Par suite, comme le stabilisateur $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(f)$ de f dans G contient l'intersection des stabilisateurs des p-simplexes σ_i, $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(f)$ est ouvert. □

4.2.1 Formes harmoniques

Soit G un groupe localement profini et X un G-complexe simplicial pur, propre et étiqueté. On fixe un étiquetage $e : \mathrm{X}_0 \longrightarrow \Delta_n$ une fois pour toute, où n est la dimension de X, et on suppose que le groupe G préserve l'étiquetage.

Définition 4.21. *Une forme harmonique sur* X *est une fonction* $f : \mathrm{X}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ *vérifiant,*

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

pour tout simplexe $\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}$*. On note* $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ *l'espace des formes harmoniques sur* X*.*

Le groupe G agit linéairement sur l'espace $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ des formes harmoniques de façon naturelle, l'action étant donnée par $g.f(\mathrm{C}) = f(g^{-1}.\mathrm{C})$, pour tout $g \in \mathrm{G}$ et pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n$. La partie lisse du G-module $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ sera notée $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{X}, \mathbb{C})$, et on l'appelle l'espace des formes harmoniques lisses de X sous l'action de G.

Théorème 4.22. *Le dual algébrique de* $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ *s'identifie naturellement avec* $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*. Via cette identification, la représentation contragrédiente de* $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ *s'identifie avec* $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*.*

Démonstration. Voir [Bro12], théorème 2.1, page 5. □

Soit G un groupe localement profini et X un G-complexe simplicial pur propre et étiqueté. On fixe un étiquetage $e : \mathrm{X}_0 \longrightarrow \Delta_n$ une fois pour toute, où n est la dimension de X, et on suppose que le groupe G préserve l'étiquetage. Si $\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}$ (resp. $\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n$), on note G_σ (resp. G_C) son stabilisateur dans G. On fait les hypothèses suivantes.

- L'action de G sur X_{n-1} (resp. X_n) est transitive.
- Pour tout $\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}$, l'action du stabilisateur G_σ de σ sur les ensembles

$$\mathrm{A}_\sigma^+ = \{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n / \ [\mathrm{C} : \sigma] = +1\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}_\sigma^- = \{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n / \ [\mathrm{C} : \sigma] = -1\}$$

  est transitive.

On fixe $\sigma_0 \in \mathrm{X}_{n-1}$ et $\mathrm{C}_0 \in \mathrm{X}_n$. On note $\mathrm{J} = \mathrm{G}_{\sigma_0}$ et $\mathrm{I} = \mathrm{G}_{\mathrm{C}_0}$. Sous les conditions énoncées, on a le résultat suivant qui généralise un résultat de Paul Broussous (notes non publiés) :

Théorème 4.23. *Soit* (π, V) *une représentation irréductible de* G. *On suppose que* $\mathrm{V}^{\mathrm{I}} \neq 0$ *tandis que* $\mathrm{V}^{\mathrm{J}} = 0$. *Alors* π *est un quotient de l'espace de cohomologie* $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C})$.

Démonstration. Par définition, l'espace $\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ est le conoyau de l'opérateur cobord

$$d_{n-1} : \mathrm{C}_c^{n-1}(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

définie par $d_{n-1}(f)(\sigma) = \sum_{\tau \in \mathrm{X}_{n-1}} [\sigma : \tau] f(\tau)$, pour tout $\sigma \in \mathrm{X}_n$.

Il s'agit de trouver une application $p : \mathrm{C}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{V}$, qui soit G-équivariante et qui se factorise à travers le quotient. Pour cela fixons $v_0 \in \mathrm{V}^{\mathrm{I}}$, $v_0 \neq 0$, et pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n$ posons $v_{\mathrm{C}} = g.v_0$, où $g \in \mathrm{G}$ est tel que $\mathrm{C} = g.\mathrm{C}_0$. Par construction v_{C} ne dépend pas du choix de g et appartient à $\mathrm{V}^{\mathrm{G_C}}$. On définit p par

$$p(f) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n} f(\mathrm{C}) v_{\mathrm{C}}, \quad f \in \mathrm{C}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

Soit $h \in \mathrm{C}_c^{n-1}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. Montrons que $p(d_{n-1}(h)) = 0$. On a

$$p(d_{n-1}(h)) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n} d_{n-1}(h)(\mathrm{C}) v_{\mathrm{C}} = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n} \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}} [\mathrm{C} : \sigma] h(\sigma) \Big) v_{\mathrm{C}}$$

$$= \sum_{\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}} \Big(\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n} [\mathrm{C} : \sigma] v_{\mathrm{C}} \Big) h(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}} h(\sigma) \Big\{ \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{A}_\sigma^+} v_{\mathrm{C}} \Big\} - \sum_{\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}} h(\sigma) \Big\{ \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{A}_\sigma^-} v_{\mathrm{C}} \Big\}$$

Or pour tout $\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}$, les sommes

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{A}_\sigma^+} v_{\mathrm{C}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{A}_\sigma^-} v_{\mathrm{C}}$$

sont nulles. En effet, pour $\sigma \in \mathrm{X}_{n-1}$, par transitivité de l'action de G_σ, l'ensemble fini $\mathrm{A}_\sigma^+ = \{\mathrm{C} \in \mathrm{X}_n / \ [\mathrm{C} : \sigma] = +1\}$ s'écrit $\mathrm{A}_\sigma^+ = \{g\mathrm{C}_1;\ g \in \mathrm{G}_\sigma / \mathrm{G}_{\mathrm{C}_1}\}$, pour tout choix de C_1 dans A_σ^+.
Ainsi

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{A}_\sigma^+} v_{\mathrm{C}} = \sum_{g \in \mathrm{G}_\sigma / \mathrm{G}_{\mathrm{C}_1}} v_{g\mathrm{C}_1} = \sum_{g \in \mathrm{G}_\sigma / \mathrm{G}_{\mathrm{C}_1}} g.v_{\mathrm{C}_1}$$

Or par hypothèse, ce vecteur est nul puisqu'il est fixé par G_σ (un conjugué de I). De façon similaire, on obtient

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{A}_\sigma^-} v_{\mathrm{C}} = 0$$

ce qui termine notre démonstration.

□

Cas d'un graphe dirigé

Soient X un graphe dirigé localement fini et G un groupe localement profini. On suppose que G agit sur X et que l'action est propre. Pour $i = 0, 1$, on a un crochet

$$\langle ., . \rangle : \mathrm{C}^i(X, \mathbb{C}) \times \mathrm{C}^i_c(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

où $\mathrm{C}^i(X, \mathbb{C})$ est l'espace des i-cochaînes à support quelconque. Le crochet est défini par

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathrm{X}^i} f(x)g(x) \quad , \quad i = 0, 1$$

Via ce crochet, on identifie le dual algébrique $\mathrm{C}^i_c(X, \mathbb{C})$ de $\mathrm{C}^i_c(X, \mathbb{C})$ avec $\mathrm{C}^i(X, \mathbb{C})$, $i = 0, 1$. La représentation contragrédiente $\mathrm{C}^i_c(X, \mathbb{C})^\vee$ s'identifie donc à l'espace des formes linéaires lisses dans $\mathrm{C}^i(X, \mathbb{C})$. Par un calcul simple on obtient la formule :

$$\langle f, dg \rangle = \langle d^* f, g \rangle \quad , \ f \in \mathrm{C}^1(X, \mathbb{C}) \quad , g \in \mathrm{C}^0_c(X, \mathbb{C})$$

où $d^* : \mathrm{C}^1(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}^0(X, \mathbb{C})$ est définie par :

$$d^*(f)(s) = \sum_{a \in \mathrm{X}^1} [a : s] f(a) \quad , \ s \in \mathrm{X}^0$$

On appelle forme harmonique sur X tout élément du noyau de d^* et on note $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C}) = \ker(d^*)$ l'espace des formes harmoniques sur X. Le groupe G agit naturellement sur $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ et on note $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ sa partie lisse.

Proposition 4.24. *(Voir [Bro08]) Le dual algébrique de* $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ *s'identifie naturellement avec* $\mathcal{H}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*. Via cette identification, la représentation contragrédiente de* $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ *s'identifie avec* $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{X}, \mathbb{C})$*.*

Avant de passer à la section suivante, rappelons le théorème de Borel-Serre dont on se servira dans la suite (voire [BS71], théorème 3) :

Théorème 4.25. *(Borel-Serre) Soit* G *le groupe des points rationnels d'un groupe réductif défini sur* F *et* $\mathcal{B}(\mathrm{G})$ *son immeuble affine, alors on a des isomorphismes de* G*-modules lisses,*

$$\mathrm{H}^p_c(\mathcal{B}(\mathrm{G}), \mathbb{C}) = \begin{cases} 0 \ , & si \quad p \neq \mathrm{rg}_{ss}(\mathrm{G}) \\ \mathrm{St}_\mathrm{G} \ , & si \quad p = \mathrm{rg}_{ss}(\mathrm{G}) \end{cases}$$

où St_G *(resp.* $\mathrm{rg}_{ss}(\mathrm{G})$*) est la représentation de Steinberg (resp. le rang semi-simple) du groupe* G*.*

4.2.2 Points fixes de la cohomologie d'un G-complexe

Soit G un groupe fini et X un G-complexe régulier. On rappelle que le complexe de cochaînes de X,

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(0)},\mathbb{C}) \xrightarrow{d_0} \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C}) \xrightarrow{d_1} .... \longrightarrow \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(n-1)},\mathbb{C}) \xrightarrow{d_{n-1}} \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(n)},\mathbb{C}) \longrightarrow ...$$

est un complexe de cochaînes dans la catégorie des représentations complexes de G, où $\mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(p)},\mathbb{C})$ est l'espace des fonctions à support fini de l'ensemble $\mathrm{X}_{(p)}$ des p-simplexes orientés de X dans $\mathbb{C}$ et l'opérateur cobord

$$d_p : \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(p)},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)},\mathbb{C})$$

est définie par $d_p(f)([s_0,...,s_p]) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i f([s_0,...,\widehat{s_i},...,s_p])$, pour tout $f \in \mathrm{C}^{or}(\mathrm{X}_{(p)},\mathbb{C})$ et $[s_0,...,s_p] \in \mathrm{X}_{(p+1)}$.

Théorème 4.26. *([Bre72], III.2.4) Le* G*-module* $\mathrm{H}^*(\mathrm{X}/\mathrm{G},\mathbb{C})$ *est isomorphe à l'espace des points fixes* $\mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathbb{C})^{\mathrm{G}}$ *de la cohomologie de* X *sous l'action de* G*, c'est-à-dire,*

$$\mathrm{H}^*(\mathrm{X}/\mathrm{G},\mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^*(\mathrm{X},\mathbb{C})^{\mathrm{G}}$$

4.3 Cohomologie à support compact dans un système de coefficients

Les systèmes de coefficients sur un complexe simplicial sont l'analogue pour les espaces topologique des préfaisceaux. Si X est un complexe simplicial, on note $\mathcal{C}_{\mathrm{X}}$ la catégorie des simplexes de X. C'est la catégorie dont les objets sont les simplexes de X et dont l'ensemble des homomorphismes $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{\mathrm{X}}}(\mathrm{A},\mathrm{B})$, pour $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{X}})$, est vide si A n'est pas une face de B et est réduite à un singleton si A est une face de B

Définition 4.27. *Soit* X *un complexe simplicial. Un système de coefficients (cohomologique) sur* X *est un foncteur* $\mathcal{F}$ *de la catégorie* $\mathcal{C}_{\mathrm{X}}$ *dans la catégorie* $Vect_{\mathbb{C}}$ *des espaces vectoriels complexes. Plus concrétement, un système de coefficients sur* X *consiste en la donnée d'un système* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$*, où pour tout* $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{X}}$*,* $\mathcal{F}_\sigma$ *est un espace vectoriel complexe et pour tout* $\sigma,\tau \in \Sigma_{\mathrm{X}}$*, tel que* $\sigma \subset \tau$*,* $r_\tau^\sigma : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_\tau$ *est une application linéaire, telles que :*

(i) Pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{X}}$*,* $\mathbf{r}_\sigma^\sigma = Id$*.*

(ii) Pour tout $\sigma,\tau,\varsigma \in \Sigma_{\mathrm{X}}$*, tel que* $\sigma \subset \tau \subset \varsigma$*,* $r_\varsigma^\tau \circ r_\tau^\sigma = r_\varsigma^\sigma$*.*

Exemple 4.28. *(i) Le système de coefficients constant sur un complexe simplicial* X *est le foncteur constant* $\mathcal{F} : \mathcal{C}_{\mathrm{X}} \longrightarrow Vect_{\mathbb{C}}, \sigma \longmapsto \mathcal{F}_\sigma = \mathbb{C}$ *et* $r_\tau^\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ *pour tout* $\sigma \subset \tau$*.*

(ii) Soit G *un groupe localement profini,* X *un* G*-complexe simplicial propre et* (π, V) *une représentation lisse de* G*. Pour tout simplexe* σ *de* X*, on note* K_σ *le stabilisateur point par point de* σ *dans* G *et* $\mathrm{V}^{\mathrm{K}_\sigma}$ *le sous-espace de* V *des vecteurs fixés par* K_σ*. Pour tout simplexes* σ, τ *de* X *tel que* $\sigma \subset \tau$*, on note* $\mathcal{F}_\sigma = \mathrm{V}^{\mathrm{K}_\sigma}$ *et* i_τ^σ *l'inclusion naturelle de* $\mathrm{V}^{\mathrm{K}_\sigma}$ *dans* $\mathrm{V}^{\mathrm{K}_\tau}$*. Alors le système* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ *est un système de coefficients sur* X*.*

Définition 4.29. *Soit* X *un complexe simplicial et* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ *un système de coefficients sur* X*. Une p-cochaîne orientée de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *est une fonction*

$$f : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_{\mathrm{X}}} \mathcal{F}_\sigma$$

vérifiant :

(a) f *est à support fini.*

(b) Pour tout p-simplexe orienté $x = [s_0, ..., s_p]$*,* $f(x) \in \mathcal{F}_{\sigma_x}$*, où* σ_x *est le p-simplexe* $\{s_0, ..., s_p\}$*.*

(c) $f([s_{\lambda(0)}, ..., s_{\lambda(p)}]) = \varepsilon(\lambda) f([s_0, ..., s_p])$*, pour tout* $[s_0, ..., s_p] \in \mathrm{X}_{(p)}$ *et toute permutation* λ *de l'ensemble* $\{0, 1, ..., p\}$*.*

On note $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ *l'espace des p-cochaînes orientées à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *de* X*. L'espace* $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ *est trivial pour* $p < 0$ *ou* $p > \dim(\mathrm{X})$*. On définit une application linéaire*

$$d_p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathcal{F})$$

qu'on appelle l'opérateur cobord. Si f *est une p-cochaîne orientée à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *de* X *et* $x = [s_0, ..., s_{p+1}] \in \mathrm{X}_{(p+1)}$*, on pose*

$$d_p(f)([s_0, ..., s_{p+1}]) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k r_{\{s_0,...,s_{p+1}\}}^{\{s_0,...,\widehat{s_k},...,s_{p+1}\}} f([s_0, ..., \widehat{s}_k, ..., s_{p+1}])$$

où le symbole $\widehat{s}_k$ *signifie qu'on omet le sommet* s_k *dans le* $(p+1)$*-simplexe orienté* $[s_0, ..., s_{p+1}]$*. Comme* $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ *est trivial pour* $p < 0$ *(resp.* $p > \dim(\mathrm{X})$*), l'opérateur cobord* d_p *est trivial.*

Lemme 4.30. *Pour tout* $p \in \mathbb{Z}$*,* $d_{p+1} \circ d_p = 0$*.*

Démonstration. Similaire au lemme 4.3, page 54. □

Définition 4.31. *Le noyau de l'opérateur cobord* $d_p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p+1)}, \mathcal{F})$ *est appelé l'espace des p-cocycles orientés de* X *à cofficients dans* $\mathcal{F}$ *et on le note* $\mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathcal{F})$*. L'image de l'opérateur cobord* $d_{p-1} : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p-1)}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ *est appelé l'espace des p-cobords orientés de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *et on le note* $\mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathcal{F})$*. Par le lemme précédent, tout p-cobord est un p-cocycle, c'est-à-dire* $\mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathcal{F}) \subset \mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathcal{F})$*. On définit*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}) = \mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})/\mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X}, \mathbb{C})$$

et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie à support compact de X *et à coefficients dans* $\mathcal{F}$*.*

Cas d'un complexe étiqueté

Définition 4.32. *Soit* X *un complexe simplicial étiqueté et* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ *un système de coefficients sur* X*. L'espace des p-cochaînes de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$*, qu'on note* $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F})$*, est défini par*

$$\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F}) = \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{X}_p} \mathcal{F}_\sigma$$

L'espace $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F})$ *est trivial pour* $p<0$ *ou* $p>\dim(\mathrm{X})$*. On définit une application linéaire*

$$d_p : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+1}(\mathrm{X},\mathcal{F})$$

qu'on appelle l'opérateur cobord. Si $x = \sum_{\sigma\in\mathrm{X}_p} x_\sigma \in \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F})$ *on pose*

$$d_p(x_\sigma) = \sum_{\tau\in\mathrm{X}_{p+1},\ \sigma\subset\tau} [\tau:\sigma] r_\tau^\sigma(x_\sigma)$$

Comme $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F})$ *est trivial pour* $p<0$ *(resp.* $p>\dim(\mathrm{X})$*), l'opérateur cobord* d_p *est trivial. On vérifie que* d_p *est une différentielle.*

Définition 4.33. *Le noyau de l'opérateur cobord* $d_p : \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{p+1}(\mathrm{X},\mathcal{F})$ *est appelé l'espace des p-cocycles de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *et on le note* $\mathrm{Z}_p(\mathrm{X},\mathcal{F})$*. L'image de l'opérateur cobord* $d_{p-1} : \mathrm{C}_c^{p-1}(\mathrm{X},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F})$ *est appelé l'espace des p-cobords de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *et on le note* $\mathrm{B}_p(\mathrm{X},\mathcal{F})$*. Tout p-cobord est un p-cocycle, c'est-à-dire* $\mathrm{B}_p^{or}(\mathrm{X},\mathcal{F}) \subset \mathrm{Z}_p^{or}(\mathrm{X},\mathcal{F})$*. On définit*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X},\mathcal{F}) = \mathrm{Z}_p(\mathrm{X},\mathbb{C})/\mathrm{B}_p(\mathrm{X},\mathbb{C})$$

et on l'appelle le p-ième espace de cohomologie à support compact de X *et à coefficients dans le système de coefficients* $\mathcal{F}$*. Notons que les définitions (4.31) et (4.33) des espaces de cohomologie sont équivalentes.*

Soit G est un groupe localement profini et X un G-complexe propre. On dit que G agit sur un système de coefficients $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ de X si pour tout $g\in\mathrm{G}$ et tout $\sigma\in\Sigma_\mathrm{X}$, il existe une application linéaire

$$\mathbf{r}_\sigma^g : \mathcal{F}_\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_{g.\sigma}$$

tel que :

(a) $\mathbf{r}_{h.\sigma}^g \circ \mathbf{r}_\sigma^h = \mathbf{r}_\sigma^{gh}$ pour tout $g,h\in\mathrm{G}$ et $\sigma\in\Sigma_\mathrm{X}$.

(b) $\mathbf{r}_\sigma^1 = \mathrm{id}_{\mathcal{F}_\sigma}$ pour tout $\sigma\in\Sigma_\mathrm{X}$.

(c) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_\sigma & \xrightarrow{\mathbf{r}_\tau^\sigma} & \mathcal{F}_\tau \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{r}_\sigma^g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{r}_\tau^g} \\ \mathcal{F}_{g.\sigma} & \xrightarrow[r_{g.\tau}^{g.\sigma}]{} & \mathcal{F}_{g.\tau} \end{array}$$

commute pour tout $\sigma \subset \tau$ et pour tout $g \in \mathrm{G}$. En particulier, le stabilisateur G_σ dans G du simplexe σ de X agit linéairement sur $\mathcal{F}_\sigma$.

Définition 4.34. *([PU97], page 106) Un système de coefficients* G*-équivariant sur* X *est un système de coefficients* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ *sur* X *muni d'une action de* G *tel que pour tout simplexe* σ *de* X*, l'action du stabilisateur* G_σ *sur* $\mathcal{F}_\sigma$ *est lisse.*

Les espaces $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ sont équipés d'une action lisse de G via

$$g.f(x) = r^g_{g^{-1}.\sigma_x}(f([g^{-1}.s_0, ..., g^{-1}.s_p]))$$

pour tout $g \in \mathrm{G}$, pour tout $f \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_p, \mathcal{F})$, et pour tout $x = [s_0, ..., s_p] \in \mathrm{X}_{(p)}$.

Dans le cas où X est étiqueté et que G préserve l'étiquetage, les espaces $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ sont équipés d'une action lisse de G via

$$g.x = \sum_{\sigma\in \mathrm{X}_p} \mathbf{r}^g_\sigma(x_\sigma)$$

pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout $x = \sum_{\sigma\in\mathrm{X}_p} x_\sigma \in \mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F})$. Notons que dans ce cas, les espaces $\mathrm{C}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F})$ et $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ sont isomorphes comme G-modules lisses.

Proposition 4.35. *Pour tout système de coefficients* G*-équivariants* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$*,* $(\mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}, \mathcal{F}))_{p\in\mathbb{Z}}$ *est un* G*-module lisse gradué.*

Démonstration. Résulte d'un calcul simple et est laissée au lecteur. □

Proposition 4.36. *Soit* X *un* G*-complexe propre et* $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\sigma, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$ *un système de coefficients* G*-équivariant de* X *et* p *un entier compris entre 0 et la dimension de* X*. Alors la représentation de* G *dans l'espace* $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ *des* p*-cochaînes orientées de* X *à coefficients dans* $\mathcal{F}$ *est isomorphe à la somme directe*

$$\bigoplus_{\sigma\in\mathcal{S}_p} c\text{-ind}_{\mathrm{G}_\sigma}^{\mathrm{G}} \mathcal{F}_\sigma$$

où $\mathcal{S}_p$ *est un système de représentants de l'action de* G *sur l'ensemble des* p*-simplexes de* X *et pour tout* p*-simplexe* σ*,* G_σ *est le stabilisateur global de* σ *dans* G*. En particulier, si l'action de* G *sur l'ensemble des* p*-simplexes de* X *est transitive alors*

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F}) \simeq c\text{-ind}_{\mathrm{G}_\sigma}^{\mathrm{G}} \mathcal{F}_\sigma$$

Démonstration. Pour tout entier p, l'espace $\mathrm{V}_p = \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ des p-cochaines orientées de X à coefficients dans $\mathcal{F}$ se décompose en somme directe de sous-espaces vectoriels,

$$\mathrm{V}_p = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{X}_p} \mathrm{V}_p^\sigma$$

où V_p^σ est le sous-espace de $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{F})$ constitué des fonctions

$$f : \mathrm{X}_{(p)} \longrightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_\mathrm{X}} \mathcal{F}_\sigma$$

dont le support est égal à $\{x_\sigma^-, x_\sigma^+\}$, où x_σ^-, x_σ^+ sont les deux simplexes orientés correspondants à σ. Comme le système de coefficients $\mathcal{F}$ est G-équivariant, alors le groupe G permute les sous-espaces V_p^σ. De plus pour tout $g \in \mathrm{G}$ et tout simplexe $\sigma \in \mathrm{X}_p$, $g.\mathrm{V}_p^\sigma = \mathrm{V}_p^{g.\sigma}$. En effet, si $f \in \mathrm{V}_p^\sigma$, alors $\mathrm{supp}(f) = \{x_\sigma^-, x_\sigma^+\}$. Pour montrer que $g.f \in \mathrm{V}_p^{g.\sigma}$, il suffit de montrer que $\mathrm{supp}(g.f) = \{g.x_\sigma^-, g.x_\sigma^+\}$. Soit $x \in \mathrm{X}_{(p)}$. Si $x \notin \{g.x_\sigma^-, g.x_\sigma^+\}$ alors $g^{-1}.x \notin \{x_\sigma^-, x_\sigma^+\}$ ce qui implique que $f(g^{-1}.x) = 0$ ($f(g^{-1}.x) \in \mathcal{F}_{g^{-1}.\sigma_x}$). D'autre part $\mathbf{r}^g_{g^{-1}.\sigma_x} : \mathcal{F}_{g^{-1}.\sigma_x} \longrightarrow \mathcal{F}_{\sigma_x}$, donc $g.f(x) = r^g_{g^{-1}.\sigma_x}(f(g^{-1}.x)) = 0$. D'où $\mathrm{supp}(g.f) = \{g.x_\sigma^-, g.x_\sigma^+\}$, et par suite $g.\mathrm{V}_p^\sigma = \mathrm{V}_p^{g.\sigma}$. Soit $\mathcal{S}_p$ un système de représentants de l'action de G sur l'ensemble des p-simplexes de X. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_p$, le sous-espace

$$\bigoplus_{\tau \in \mathrm{G}.\sigma} \mathrm{V}_p^\tau$$

est clairement G-invariant, c'est donc une sous-représentation de V_p. Le groupe G permute transitivement les sous-espaces vectoriels V_p^τ de $\bigoplus_{\tau \in \mathrm{G}.\sigma} \mathrm{V}_p^\tau$, alors

$$\bigoplus_{\tau \in \mathrm{G}.\sigma} \mathrm{V}_p^\tau \simeq c\text{-ind}_{\mathrm{G}_\sigma}^{\mathrm{G}} \mathrm{V}_p^\tau$$

où G_τ est le stabilisateur global de τ dans G. D'autre part, chaque sous-espace V_p^σ est isomorphe à $\mathcal{F}_\sigma$, puisque l'application

$$\psi_\sigma : \mathrm{V}_p^\sigma \longrightarrow \mathcal{F}_\sigma,\ f \longmapsto f(x_\sigma^+)$$

(pour un choix quelconque de l'orientation) est clairement un isomorphisme. D'où le résultat.

□

4.4 Appendice : Suites spectrales

La motivation essentielle de cet appendice est d'exposer une technique qui nous permet de calculer la cohomologie à support compact d'un complexe simplicial à partir d'un recouvrement particulier. Si X est un complexe simplicial réunion de deux sous-complexes X_1 et X_2, on a la suite exacte de Mayer-Vietoris

$$... \longrightarrow H_c^p(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H_c^p(X_1, \mathbb{C}) \oplus H_c^p(X_2, \mathbb{C}) \longrightarrow H_c^p(X_1 \cap X_2, \mathbb{C}) \longrightarrow H_c^{p+1}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow ...$$

qui nous permet de calculer la cohomologie de X à partir de celle de X_1, X_2 et de l'intersection $X_1 \cap X_2$. Dans le cas où X est recouvert par une famille quelconque $(X_i)_{i\in I}$ de sous-complexes, la suite exacte de Mayer-Vietoris est remplacée par une suite spectrale. Certains résultats seront admis sans démonstrations axquels cas on renvoie à [Rot], [God1].

4.4.1 Bicomplexes, graduations et filtrations

Soit G un groupe localement profini. Dans la suite de cette partie, on se place dans la catégorie Mod(G) des G-modules lisses.

Définition 4.37. *On appelle* G*-module gradué toute famille* $M = (M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *d'objets de la catégorie* Mod(G)*. De même, on appelle* G*-module bigradué toute famille* $M = (M_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ *d'objets de la catégorie* Mod(G)*.*

Soient M et N deux G-modules gradués. Par un morphisme de degré r de M dans N, on entend toute collection $f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de morphismes $f_n : M_n \longrightarrow N_{n+r}$ de G-modules ; si $r = 0$ on dit que f est un morphisme de M dans N. De même, si M et N sont deux G-modules bigradués, par un morphisme de bidegré (p, q), on entend toute collection $f = (f_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ de morphismes $f_{n,m} : M_{n,m} \longrightarrow N_{n+p,m+q}$ de G-modules ; si $(p, q) = (0, 0)$ on dit que f est un morphisme de M dans N. Dans la suite on ne traitera que le cas des G-modules bigradués $M = (M_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ du premier cadrant, c'est-à-dire vérifiant, $M_{n,m} = 0$ si $n, m < 0$.

Définition 4.38. *On appelle complexe (dans la catégorie* Mod(G)*) tout* G*-module gradué* M *muni de la structure définie par la donnée d'un morphisme* $d : M \longrightarrow M$ *d'un certain degré* r*, qu'on appelle différentielle, tel que* $d \circ d = 0$*. Le cas qui nous intéresse est celui des complexes de cochaînes : on suppose que* $M_n = 0$ *pour* $n < 0$ *et que la différentielle* d *est de degré 1. On écrit alors généralement* M^n *au lieu de* M_n*, les éléments de* $\ker(d_n)$ *(resp.* $\mathrm{Im}(d_n)$*) s'appellent les cocycles (resp. cobord) de degré* n*.*

La condition $d \circ d = 0$ *implique que tout cobord de degré* $n - 1$ *est un cocycle de degré* n*. Les cocycles forment un* G*-module* $Z^n(M) = \ker(d_n)$*, les cobords un* G*-module* $B^n(M) = \mathrm{Im}(d_{n-1})$*. Le* n*-ième groupe de cohomologie du complexe de cochaînes* M *est défini par*

$$H^n(M) = Z^n(M)/B^n(M)$$

De même, si M est un G-module bigradué muni d'un morphisme $d : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ d'un certain bidegré (p, q), qu'on appelle différentielle, tel que $d \circ d = 0$, on définit son module dérivé par

$$\mathrm{H}^{n,m}(\mathrm{M}) = \ker(d_{n,m})/\mathrm{Im}(d_{n-p,m-q})$$

Définition 4.39. *On appelle bicomplexe (dans la catégorie* Mod(G)*) tout* G*-module bigradué* $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{n,m})_{n,m\in\mathbb{Z}}$ *muni de la structure définie par la donnée de morphismes*

$$d' : \mathrm{M}_{n,m} \longrightarrow \mathrm{M}_{n+1,m}, \quad d'' : \mathrm{M}_{n,m} \longrightarrow \mathrm{M}_{n,m+1}$$

vérifiant les relations

(i) $d' \circ d' = d'' \circ d'' = 0$.

(ii) $d' \circ d'' = d'' \circ d'$. *C'est-à-dire,* $d'_{n,m+1} \circ d''_{n,m} = d''_{n+1,m} \circ d'_{n,m}$.

On peut visualiser un bicomplexe M comme suit. On met chaque terme $\mathrm{M}_{n,m}$ au point (n, m) du réseau $\mathbb{Z}^2$. L'application d' agit sur les lignes du réseau et d'' sur les colonnes. Les conditions $d' \circ d' = d'' \circ d'' = 0$ signifie que chaque ligne et chaque colonne du réseau est un complexe et la condition $d' \circ d'' = d'' \circ d'$ signifie que chaque carré du réseau est commutatif.

Au bicomplexe M est associé un complexe Tot(M), appelé le complexe total associé à M, défini par

$$\mathrm{Tot}(\mathrm{M})^n = \bigoplus_{p+q=n} \mathrm{M}_{p,q}$$

et dont la différentielle $d = (d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donnée par

$$d_n = \sum_{p+q=n} (d'_{p,q} + (-1)^p d''_{p,q})$$

On vérifie sans peine que Tot(M) est un complexe de cochaînes, c'est-à-dire $d_{n-1} \circ d_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 4.40. *Soit* M *un* G*-module (resp. un* G*-module gradué). On appelle filtration de* M *toute suite* $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *(resp.* $\Phi\mathrm{M} = (\Phi^p\mathrm{M})_{p\in\mathbb{Z}}$*) de sous-*G*-modules (resp. sous-*G*-modules gradués) tel que* $\mathrm{M}_{n+1} \subset \mathrm{M}_n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ *(resp.* $\Phi^{p+1}\mathrm{M} \subset \Phi^p\mathrm{M}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$*).*

Le G*-module gradué associé au* G*-module filté* M*, qu'on note* Gr(M)*, est défini par*

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{M})_n = \mathrm{M}_n/\mathrm{M}_{n+1}$$

On peut également définir les filtrations d'un complexe de cochaînes M de la même manière que précédemment : Si M est un complexe de cochaînes, une filtration de M est une suite $\mathrm{FM} = (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{p\in\mathbb{Z}}$ de sous-complexes vérifiant :

(i) $\mathrm{F}^{p+1}\mathrm{M} \subset \mathrm{F}^p\mathrm{M}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$.

(ii) $d(\mathrm{F}^p\mathrm{M})_n \subset (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{n+1}$.

Définition 4.41. *Soit* (M, d', d'') *un bicomplexe.*

(i) La filtration verticale de $\mathrm{Tot}(\mathrm{M})$ *est définie par*

$$({}^{\mathrm{I}}\mathrm{F}^p\mathrm{Tot}(\mathrm{M}))_n = \bigoplus_{i \leqslant p} \mathrm{M}_{i,n-i}$$

(ii) La filtration horizontale de $\mathrm{Tot}(\mathrm{M})$ *est définie par*

$$({}^{\mathrm{II}}\mathrm{F}^p\mathrm{Tot}(\mathrm{M}))_n = \bigoplus_{j \leqslant p} \mathrm{M}_{n-j,j}$$

4.4.2 Suites spectrales

Définition 4.42. *([Rot08], page 313) Une suite spectrale est un système* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r \geqslant 1}$ *de* G*-modules bigradués* $\mathrm{E}^r = (\mathrm{E}^r_{p,q})$ *et d'opérateurs différentiels* $d^r = (d^r_{p,q})$ *de bidegré* $(r, 1-r)$*, c'est-à-dire :*

$$d^r_{p,q} : \mathrm{E}^r_{p,q} \longrightarrow \mathrm{E}^r_{p+r,q+1-r} \qquad \textit{et} \qquad d^r \circ d^r = 0$$

tel que

$$\mathrm{E}^{r+1} = \mathrm{H}(\mathrm{E}^r, d^r)$$

Notons que si E^{r+1} est déterminé par E^r, il n'en est pas de même de d^{r+1}, la suite spectrale n'est donc pas déterminée par son premier terme E^1. Il est trivial et néanmoins très utile de remarquer que si $\mathrm{E}^r_{p,q} = 0$ alors $\mathrm{E}^l_{p,q} = 0$ pour tout $l \geqslant r$.

Théorème 4.43. *([Rot08], page 316) Toute filtration* $\mathrm{FM} = (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{p \in \mathbb{Z}}$ *d'un complexe de cochaîne* M *détermine une suite spectrale* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r \geqslant 1}$ *tel que* $\mathrm{E}^1_{p,q} \simeq \mathrm{H}^{p+q}(\mathrm{F}^p\mathrm{M}/\mathrm{F}^{p+1}\mathrm{M})$

Définition 4.44. *([Rot08], page 317) Une filtration* $\mathrm{FM} = (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{p \in \mathbb{Z}}$ *d'un complexe de cochaînes* M *est dite bornée si pour tout* n *il existe des entiers* s *et* t *tels que*

$$(\mathrm{F}^s\mathrm{M})_n = 0 \qquad \textit{et} \qquad (\mathrm{F}^t\mathrm{M})_n = \mathrm{M}_n$$

Proposition-Définition 4.45. *([Rot08], page 318) Soit* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r \geqslant 1}$ *une suite spectrale provenant d'une filtration bornée d'un complexe de cochaîne. Alors, pour tout* $p, q \in \mathbb{Z}$ *il existe un entier* r *(dépendant de* p *et* q*) tel que* $\mathrm{E}^s_{p,q} = \mathrm{E}^r_{p,q}$ *pour tout* $s > r$*. Pour une telle suite spectrale on définit*

$$\mathrm{E}^\infty_{p,q} := \mathrm{E}^r_{p,q},$$

où p, q *et* r *sont comme précédemment et on dit que la suite spectrale* E^r *converge vers* E^∞*.*

Soit $\mathrm{FM} = (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{p \in \mathbb{Z}}$ une filtration d'un complexe de cochaînes M. Notons

$$i_p : \mathrm{F}^p\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$$

l'inclusion naturelle et

$$i_p^* : \mathrm{H}(\mathrm{F}^p\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{M})$$

le morphisme induit en cohomologie. Comme $\mathrm{F}^{p+1}\mathrm{M} \subset \mathrm{F}^p\mathrm{M}$, alors on a $\mathrm{Im}i_{p+1}^* \subset \mathrm{Im}i_p^*$ et donc $(\mathrm{Im}i_p^*)_{p\in\mathbb{Z}}$ définit une filtration de H(M), (voir [Rot08], page 316).

Définition 4.46. *([Rot08], page 316) Soit* $\mathrm{FM} = (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{p\in\mathbb{Z}}$ *une filtration d'un complexe de cochaînes* M *et* $i_p : \mathrm{F}^p\mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}$ *l'inclusion naturelle. On définit une filtration* $\Phi\mathrm{H}(\mathrm{M}) = (\Phi^p\mathrm{H}(\mathrm{M}))_{p\in\mathbb{Z}}$ *de* H(M) *par,*

$$\Phi^p\mathrm{H}(\mathrm{M}) = \mathrm{Im}i_p^* \qquad où \qquad i_p^* : \mathrm{H}(\mathrm{F}^p\mathrm{M}) \longrightarrow \mathrm{H}(\mathrm{M})$$

On dit que $(\Phi^p\mathrm{H}(\mathrm{M}))_{p\in\mathbb{Z}}$ *est la filtration induite par* FM *sur* H(M).

Définition 4.47. *([Rot08], page 317) Soit* H *un* G*-module gradué. On dit qu'une suite spectrale* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r\geqslant 1}$ *converge vers* H*, et on note*

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}_n,$$

s'il existe une filtration $\Phi\mathrm{H} = (\Phi^p\mathrm{H})_{p\in\mathbb{Z}}$ *de* H *telle que*

$$\mathrm{E}^\infty_{p,q} \simeq \Phi^p\mathrm{H}_n/\Phi^{p+1}\mathrm{H}_n = \mathrm{Gr}(\mathrm{H})^p_n$$

pour tout n*, où on utilise la convention* $n = p + q$.

Théorème 4.48. *([Rot08], page 318) Soit* $\mathrm{FM} = (\mathrm{F}^p\mathrm{M})_{p\in\mathbb{Z}}$ *une filtration d'un complexe de cochaînes* M*,* $\Phi^p\mathrm{H}(\mathrm{M})$ *la filtration induite , et* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r\geqslant 1}$ *la suite spectrale correpondante. Alors*

$$\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}_n(\mathrm{M})$$

Soit M un bicomplexe. Les filtrations verticale et horizontale de Tot(M) induisent deux suites spectrales ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}_r$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_r$, respectivement. On dit que ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}_r$ (resp. ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_r$) est une suite usuelle de M.

Définition 4.49. *([Rot08], page 328) Soit* E^r *une des deux suites spectrales usuelles d'un bicomplexe du premier cadrant* M*. On dit que la suite spectrale* E^r *dégénère (ou qu'elle est dégénérée) si* $\mathrm{E}^2_{p,q} = 0$ *pour* $q \neq 0$.

Lemme 4.50. *([Rot08], page 328,329) Soit* E_r *une suite spectrale usuelle d'un bicomplexe du premier cadrant* M*, alors*

$$\mathrm{E}^\infty_{p,q} = \mathrm{E}^2_{p,q} \ \ et \ \ \mathrm{H}^n(\mathrm{Tot}(\mathrm{M})) \simeq \mathrm{E}^2_{n,0}$$

Théorème 4.51. *([Rot08], page 325) Soit* M *un bicomplexe du premier cadrant,* ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ *et* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ *les deux suites spectrales provenant des filtrations verticale et horizontale de* Tot(M)*, respectivement. Alors*

$${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}_n(\mathrm{Tot}(\mathrm{M})) \qquad et \qquad {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}_n(\mathrm{Tot}(\mathrm{M}))$$

Définition 4.52. *Soit* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r\geqslant 1}$ *une suite spectrale du premier cadrant et* $n \geqslant 2$ *un entier. On dit que* E^r *est* n*-triangulaire si* $\mathrm{E}^2_{p,q} = 0$ *pour tout entier* p *et* q *tel que* $p+q \geqslant n$.

Théorème 4.53. *Soit* $(\mathrm{E}^r, d^r)_{r\geqslant 1}$ *une suite spectrale du premier cadrant. Si* E^r *est* n*-triangulaire, alors*

$$\mathrm{E}^\infty_{p,q} = \mathrm{E}^n_{p,q}$$

Démonstration. Dans la n-ième page E^n, les complexes de cochaînes sont donnés par,

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{E}^n_{p-n,q-1+n} \longrightarrow \mathrm{E}^n_{p,q} \longrightarrow \mathrm{E}^n_{p+n,q+1-n} \longrightarrow \ldots$$

Soit T_n l'ensemble des points (p,q) du réseau $\mathbb{Z}^2$ du plan vérifiant $p, q \geqslant 0$ et $p+q < n$. Par hypothèse, tous les termes $\mathrm{E}^r_{p,q}$ pour (p,q) en dehors de T_n sont nuls pour tout $r \geqslant 2$. Soit (p,q) un point du triangle T_n. Alors les deux termes $\mathrm{E}^n_{p-n,q-1+n}$ et $\mathrm{E}^n_{p+n,q+1-n}$ sont nuls puisque les points $(p-n, q-1+n)$ et $(p+n, q+1-n)$ sont en dehors du triangle T_n, par suite, $\mathrm{E}^{n+1}_{p,q} = \mathrm{H}^{p,q}(\mathrm{E}^n_{p,q}) = \mathrm{E}^n_{p,q}$. On en déduit que $\mathrm{E}^{n+1}_{p,q} = \mathrm{E}^n_{p,q}$ pour tout (p,q) dans $\mathbb{Z}^2$. En faisant le même raisonnement, on obtient que $\mathrm{E}^{n+k}_{p,q} = \mathrm{E}^n_{p,q}$ pour tout (p,q) dans $\mathbb{Z}^2$ et tout entier k. D'où le résultat.

□

4.4.3 Cohomologie du recouvrement

Dans cette section, en s'inspirant de [Bro82] VII.4. page 166, on se propose de donner une technique utilisant les suites spectrales qui va nous permettre de calculer la cohomologie d'un G-complexe propre, muni d'un recouvrement équivariant, comme G-module lisse.

Soit G un groupe localement profini et X un G-complexe propre. On suppose que X est recouvert par une famille $(\mathrm{X}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ G-équivariante et localement fini de sous-complexes. Notons K le nerf de ce recouvrement :

$$\mathrm{K} = \mathrm{Nerf}\{\mathrm{X}_i,\ i \in \mathrm{I}\}$$

C'est le complexe simplicial d'ensemble de sommets I et dont les simplexes sont de la forme $\sigma = \{i_0, ..., i_p\}$ tel que

$$\mathrm{X}_{i_0} \cap \mathrm{X}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathrm{X}_{i_p} \neq \emptyset$$

Dire que la famille de sous-complexes $(\mathrm{X}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est G-équivariante signifie que l'ensemble des indices I est muni d'une action de G de telle façon que $g.\mathrm{X}_i = \mathrm{X}_{g.i}$ pour tout $g \in \mathrm{G}$ et $i \in \mathrm{I}$ et dire que la famille $(\mathrm{X}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est localement fini signifie le nerf K est localement fini comme complexe simplicial. L'action de G sur le nerf K est simpliciale et on supposera qu'elle est de plus propre.

Pour tout simplexe σ de K, l'intersection

$$\mathrm{X}_\sigma = \bigcap_{i\in\sigma} \mathrm{X}_i$$

est un sous-complexe fini non vide de X. Notons $\mathcal{C}^p_\sigma = \mathrm{C}^{or}_c((\mathrm{X}_\sigma)_{(p)}, \mathbb{C})$ l'espace des p-cochaînes orientés de X_σ. Si σ et τ sont deux simplexes de K, tels que $\sigma \subset \tau$, alors l'inclusion canonique $\mathrm{X}_\tau \hookrightarrow \mathrm{X}_\sigma$ induit une application linéaire

$$r^\sigma_\tau : \mathcal{C}^p_\sigma \longrightarrow \mathcal{C}^p_\tau$$

qui à une p-cochaîne orientée ω de X_σ associe sa restriction à $(\mathrm{X}_\tau)_{(p)}$. De plus, pour tout simplexe σ de K et tout $g \in \mathrm{G}$, on a une application linéaire

$$r^g_\sigma : \mathcal{C}^p_\sigma \longrightarrow \mathcal{C}^p_{g.\sigma}$$

définie par $r^g_\sigma(\omega)(x) = \omega(g^{-1}.x)$, pour tout $\omega \in \mathcal{C}^p_\sigma$ et tout $x \in (\mathrm{X}_{g.\sigma})_p$.

Lemme 4.54. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^p = (\mathcal{C}^p_\sigma, r^\sigma_\tau)_{\sigma\subset\tau}$ est un système de coefficients* G*-équivariant sur* K*.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{C}^p$ est un système de coefficients sur K est immédiat. Pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma_\mathrm{K}$ et $g \in \mathrm{G}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^p_\sigma & \xrightarrow{r^\sigma_\tau} & \mathcal{C}^p_\tau \\ {\scriptstyle r^g_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r^g_\tau} \\ \mathcal{C}^p_{g.\sigma} & \xrightarrow[r^{g.\sigma}_{g.\tau}]{} & \mathcal{C}^p_{g.\tau} \end{array}$$

commute. En effet, pour tout $\omega \in \mathcal{C}^p_\sigma$ et $x \in (\mathrm{X}_{g.\tau})_p$, on a

$$r^g_\tau \circ r^\sigma_\tau(\omega)(x) = r^g_\tau(\omega_{|(\mathrm{X}_\tau)_{(p)}})(x) = \omega(g^{-1}.x)$$

et

$$r^{g.\sigma}_{g.\tau} \circ r^g_\sigma(\omega)(x) = r^{g.\sigma}_{g.\tau}(r^g_\sigma(\omega))(x) = \omega(g^{-1}.x)$$

Donc $r^g_\tau \circ r^\sigma_\tau = r^{g.\sigma}_{g.\tau} \circ r^g_\sigma$. De plus, il est clair que $r^1_\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{C}^p_\sigma}$ pour tout simplexe σ de K et que $r^g_{h.\sigma} \circ r^h_\sigma = r^{gh}_\sigma$ pour tout $g, h \in \mathrm{G}$ et tout simplexe σ de K. □

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, soit $\mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q)$ l'espace des p-cochaînes orientées de K à coefficients dans $\mathcal{C}^q$. On définit un G-module bigradué du premier cadrant $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$, par

$$\mathcal{C}_{p,q} = \mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \text{ si } p, q \geqslant 0 \text{ et } \mathcal{C}_{p,q} = 0 \text{ sinon}$$

Proposition 4.55. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a un complexe de cochaînes augmenté,*

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon_q} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^0} \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^p} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)}, \mathcal{C}^q) \longrightarrow \cdots$$

où l'augmentation

$$\varepsilon_q : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)}, \mathcal{C}^q)$$

est définie par $\varepsilon_q(\omega)(s) = \omega_{|(\mathrm{X}_s)_q}$, pour tout $\omega \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C})$ et tout sommet s de K*, et où*

$$d_q^p : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)}, \mathcal{C}^q)$$

est l'opérateur cobord du complexe de cochaînes de K *à coefficients dans $\mathcal{C}^q$.*

Démonstration. La suite de G-modules

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^0} \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^p} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)}, \mathcal{C}^q) \longrightarrow \cdots$$

est un complexe de cochaînes dans la catégorie Mod(G). Il suffit de vérifier que l'application ε_q est un morphisme de G-module et que $d_q^0 \circ \varepsilon_q = 0$. L'application ε_q est clairement bien définie et linéaire. La G-équivariance de ε_q provient du fait que la famille $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est G-équivariante. Pour l'égalité $d_q^0 \circ \varepsilon_q = 0$, pour tout $g \in \mathrm{G}$, $\omega \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C})$, et $x = [s_0, s_1] \in \mathrm{K}_1$, on a

$$d_q^0 \circ \varepsilon_q(\omega)(x) = \varepsilon_q(\omega)(s_1) - \varepsilon_q(\omega)(s_0) = \omega_{|(\mathrm{X}_{s_1})_q} - \omega_{|(\mathrm{X}_{s_0})_q} \in \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_{\sigma_x})_q, \mathbb{C})$$

Comme $(\mathrm{X}_{\sigma_x})_q = (\mathrm{X}_{s_1})_q \cap (\mathrm{X}_{s_0})_q$, alors pour tout $\tau \in (\mathrm{X}_{\sigma_x})_q$,

$$d_q^0 \circ \varepsilon_q(\omega)(x)(\tau) = \omega_{|(\mathrm{X}_{s_1})_q}(\tau) - \omega_{|(\mathrm{X}_{s_0})_q}(\tau) = \omega(\tau) - \omega(\tau) = 0$$

On a donc bien $d_q^0 \circ \varepsilon_q = 0$. □

La proposition précédente nous dit que les lignes du G-module bigradué $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ (*i.e.*, la suite de G-modules $(\mathcal{C}_{p,q})_{p\in\mathbb{Z}}$) sont des complexes de cochaînes augmentés. En fait, les colonnes $(\mathcal{C}_{p,q})_{q\in\mathbb{Z}}$ de $\mathcal{C}$ sont aussi des complexes de cochaînes. Plus précisément, on a un G-module bigradué du premier cadrant muni de différentielles sur les lignes et d'autres sur les colonnes qu'on représente par le diagramme (D) suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q+1)},\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varepsilon_{q+1}} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)},\mathcal{C}^{q+1}) & \xrightarrow{d_{q+1}^0} & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^{q+1}) & \xrightarrow{d_{q+1}^p} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)},\mathcal{C}^{q+1}) \longrightarrow \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \delta_q} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)},\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varepsilon_q} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)},\mathcal{C}^{q}) & \xrightarrow{d_{q}^0} & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^{q}) & \xrightarrow{d_{q}^p} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)},\mathcal{C}^{q}) \longrightarrow \cdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\
\\
\vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varepsilon_1} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)},\mathcal{C}^{1}) & \xrightarrow{d_{1}^0} & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^{1}) & \xrightarrow{d_{1}^p} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)},\mathcal{C}^{1}) \longrightarrow \cdots \\
\uparrow{\scriptstyle \delta_0} & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)},\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varepsilon_0} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)},\mathcal{C}^{0}) & \xrightarrow{d_{0}^0} & \cdots & \longrightarrow & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^{0}) & \xrightarrow{d_{0}^p} & \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p+1)},\mathcal{C}^{0}) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

où les morphismes

$$\delta_q : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q+1)},\mathbb{C})$$

sont les opérateurs cobord du complexe de cochaîne orienté de X. Pour les colonnes

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^0) \xrightarrow{d_{\mathcal{C}}^{0,p}} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^1) \xrightarrow{d_{\mathcal{C}}^{1,p}} \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_{\mathcal{C}}^{q,p}} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^{q+1}) \longrightarrow \cdots$$

les opérateurs cobord $d_{\mathcal{C}}^{q,p} : \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^q) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^{q+1})$ sont définis par

$$d_{\mathcal{C}}^{q,p}(\omega)(x) = \delta_q(\omega(x))$$

pour tout $\omega \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)},\mathcal{C}^q)$ et tout $x \in \mathrm{K}_{(p)}$, où $\omega(x)$ (qui appartient à $\mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_{\sigma_x})_{(q)},\mathbb{C})$) est considérée comme une fonction de $\mathrm{X}_{(q)}$ en la prolongeant par zéro en dehors de $(\mathrm{X}_{\sigma_x})_{(q)}$.

Proposition 4.56. *Le* G*-module bigradué* $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$*, muni des différentielles des lignes et des colonnes, est un bicomplexe. De plus, chaque ligne de* $\mathcal{C}$ *est exacte.*

Démonstration. Montrons que pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_{p,q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}^p} & \mathcal{C}_{p+1,q+1} \\
{\scriptstyle d_{\mathcal{C}}^{q,p}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle d_{\mathcal{C}}^{q,p+1}} \\
\mathcal{C}_{p,q} & \xrightarrow[d_q^p]{} & \mathcal{C}_{p+1,q}
\end{array}$$

Soit $\omega \in \mathcal{C}_{p,q} = \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q)$ et $x = [s_0, ..., s_{p+1}] \in \mathrm{X}_{(p+1)}$. On note $\sigma_x = \{s_0, ..., s_{p+1}\}$ le $(p+1)$-simplexe correspondant à x, pour tout $i = 0, ..., p+1$, x_i le p-simplexe orienté $[s_0, ..., \widehat{s}_i, ..., s_{p+1}]$, et $\sigma_{x_i} = \{s_0, ..., \widehat{s}_i, ..., s_{p+1}\}$ le p-simplexe correspondant à x_i. D'une part, on a

$$(d_{\mathcal{C}}^{q,p+1} \circ d_q^p)(\omega)(x) = d_{\mathcal{C}}^{q,p+1}(d_q^p(\omega))(x) = \delta_q(d_q^p(\omega)(x)) = \delta_q(\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i r_{\sigma_x}^{\sigma_{x_i}}(\omega(x_i)))$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \delta_q(r_{\sigma_x}^{\sigma_{x_i}}(\omega(x_i))) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \delta_q(\omega(x_i))$$

puisque $r_{\sigma_x}^{\sigma_{x_i}} : \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_{\sigma_{x_i}})_{(q)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_{\sigma_x})_{(q)}, \mathbb{C})$ est l'application linéaire qui à une p-cochaîne orientée de $\mathrm{X}_{\sigma_{x_i}}$ associe sa restriction à $(\mathrm{X}_{\sigma_x})_{(q)}$. D'autre part, on a

$$(d_{q+1}^p \circ d_{\mathcal{C}}^{q,p})(\omega)(x) = d_{q+1}^p(d_{\mathcal{C}}^{q,p}(\omega))(x) = d_{q+1}^p(\delta_q(\omega(x))) = \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i r_{\sigma_x}^{\sigma_{x_i}}(\delta_q(\omega(x_i)))$$

$$= \sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i \delta_q(\omega(x_i))$$

D'où $d_{\mathcal{C}}^{q,p+1} \circ d_q^p = d_{q+1}^p \circ d_{\mathcal{C}}^{q,p}$. Par suite, le G-module bigradué $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ est un bicomplexe. Montrons que chaque ligne de $\mathcal{C}$ est exacte. Regardons la q-ième ligne,

$$(4.4.3.1)\quad \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon_q} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^0} \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \longrightarrow \cdots$$

Pour prouver le résultat, on va écrire différement l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q)$. Si e est un simplexe de X, on note

$$\mathrm{K}_e = \{\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}} / \ e \subset \mathrm{X}_\sigma\}$$

C'est un sous-complexe simplicial de K dont l'ensemble des sommets est donné par $\mathrm{J}_e = \{s \in \mathrm{K}_0 / e \subset \mathrm{X}_s\}$. Si $s_0, ..., s_p \in \mathrm{J}_e$ sont des sommets de K_e, alors $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ est un simplexe de K et $\sigma \in \mathrm{K}_e$. En effet, par définition même de K_e, on a $e \subset \mathrm{X}_{s_i}$ pour tout $i = 0, ..., p$. Donc $e \subset \mathrm{X}_{s_0} \cap ... \cap \mathrm{X}_{s_p}$, ce qui implique que $\mathrm{X}_{s_0} \cap ... \cap \mathrm{X}_{s_p} \neq \emptyset$ et par suite $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ est un simplexe de K et $\sigma \in \mathrm{K}_e$.

Le complexe simplicial K_e est fini, car sinon d'après ce qui précéde, K_e est un simplexe infini dans le sens où tout sous-ensemble fini de sommets de K_e est un simplexe. Donc si on fixe un sommet s de K_e, il existe une infinité de simplexes de K_e contenant s, ce qui est en contradiction avec le fait que le complexe simplicial K est localement fini. Il s'ensuit que pour tout simplexe e de X, K_e est un simplexe de K.

Par conséquent, le complexe de cochaînes augmenté de K_e est acyclique (voir [Munkres], théorème 8.3, page 46), c'est-à-dire que la suite

$$(4.4.3.2)\quad 0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\varepsilon_e} \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(0)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(p)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \cdots$$

est exacte, où l'augmentation

$$\varepsilon_e : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(0)}, \mathbb{C})$$

est définie par $\varepsilon_e(\lambda)(s) = \lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout sommet s de K_e et où l'on note les opérateurs cobord par

$$d_e^p : \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(p)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(p+1)}, \mathbb{C})$$

On a l'isomorphisme G-équivariant

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{K}_p} \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_\sigma)_{(q)}, \mathbb{C})$$

pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, d'une part pour tout simplexe $\sigma \in \mathrm{K}_p$, le sous-espace E_σ de $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q)$ donné par

$$\mathrm{E}_\sigma = \{\omega \in \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) / \ \mathrm{supp}(\omega) \subset \{\sigma^-, \sigma^+\}\}$$

s'identifie de façon G_σ-équivariante à $\mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_\sigma)_{(q)}, \mathbb{C})$, où G_σ est le stabilisateur dans G de σ. D'autres part, on a clairement $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{K}_p} \mathrm{E}_\sigma$.

Pour tout $\sigma \in \mathrm{K}_p$, l'espace $\mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_\sigma)_{(q)}, \mathbb{C})$ admet pour base les q-cochaînes orientées élémentaires $f_{e,\sigma}$ de X_σ, où e parcourt l'ensemble des q-simplexes de X_σ. Il s'agit des fonctions $f_{e,\sigma} : (\mathrm{X}_\sigma)_{(q)} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$f_{e,\sigma}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x = e^+ \\ -1, & \text{si } \ x = e^- \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où l'on fixe une orientation arbitraire e^+ (resp. son orientation opposée e^-) de chaque simplexe $e \in (\mathrm{X}_\sigma)_q$. Notons $\mathrm{D}_{e,\sigma}$ la droite vectorielle engendrée par $f_{e,\sigma}$

On a alors,

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_p, \mathcal{C}^q) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{K}_p} \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_\sigma)_{(q)}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{K}_p} \bigoplus_{e \in (\mathrm{X}_\sigma)_q} \mathrm{D}_{e,\sigma} \simeq \bigoplus_{e \in \mathrm{X}_q} \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{K}_e} \mathrm{D}_{e,\sigma} \simeq \bigoplus_{e \in \mathrm{X}_q} \mathrm{C}^{or}((\mathrm{K}_e)_{(p)}, \mathbb{C})$$

Par un simple calcul on vérifie que le complexe de cochaîne (4.4.3.1) est isomorphe à la somme directe des complexes

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{\varepsilon_e} \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(0)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{K}_e)_{(p)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \cdots$$

où e parcourt l'ensemble des q-simplexes de X. Par conséquent, le complexe (4.4.3.1) est acyclique, c'est-à-dire que la suite

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varepsilon_q} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(0)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^0} \cdots \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \xrightarrow{d_q^p} \cdots$$

est exacte.

□

Notons ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ les suites spectrales correspondantes aux filtrations verticale et horizontale du complexe total de $\mathcal{C}$, respectivement. De l'exactitude des lignes de $\mathcal{C}$ (proposition 4.56, page 77), la première page de la suite spectrale ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ est donnée par

$$ {}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^1_{p,q} = \begin{cases} 0, & \text{si } p > 0 \\ \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(q)}, \mathbb{C}), & \text{si } p = 0 \end{cases} $$

La deuxième page de ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ est obtenue calculant la cohomologie suivant q dans la page précédente,

$$ {}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^2_{p,q} = \begin{cases} 0, & \text{si } p > 0 \\ \mathrm{H}_c^q(\mathrm{X}, \mathbb{C}), & \text{si } p = 0 \end{cases} $$

La suite spectrale ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ dégénère. Alors d'après le lemme (4.50), on a

$$ {}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^\infty_{p,q} = {}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^2_{p,q} \text{ et } \mathrm{H}^n(\mathrm{Tot}(\mathrm{C})) \simeq \mathrm{H}_c^n(\mathrm{X}, \mathbb{C}) $$

Pour la deuxième suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r_{p,q}$, la première page est donnée par

$$ {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^1_{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathcal{C}_{*,q}) $$

c'est-à-dire que les termes ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^1_{p,q}$ sont obtenus en calculant la cohomologie des colonnes dans le bicomplexe $\mathcal{C}$. Pour calculer les termes de la deuxième page de ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r_{p,q}$ on a besoin de définir un nouveau système de coefficients G-équivariant sur le nerf K. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{H}^q = (\mathcal{H}^q_\sigma, v^\sigma_\tau)_{\sigma\subset\tau}$ le système de coefficients sur K défini par $\mathcal{H}^q_\sigma = \mathrm{H}_c^q(\mathrm{X}_\sigma, \mathbb{C})$ et pour tous simplexes σ et τ de K, tels que $\sigma \subset \tau$,

$$ v^\sigma_\tau : \mathrm{H}_c^q(\mathrm{X}_\sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^q(\mathrm{X}_\tau, \mathbb{C}) $$

est le morphisme induit par l'inclusion de X_τ dans X_σ. De l'isomorphisme

$$ \mathcal{C}_{p,q} = \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_p, \mathcal{C}^q) \simeq \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{K}_p} \mathrm{C}_c^{or}((\mathrm{X}_\sigma)_{(q)}, \mathbb{C}) $$

on déduit que

$$ {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^1_{p,q} = \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{K}_p} \mathrm{H}_c^q(\mathrm{X}_\sigma, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{H}^q) $$

et donc, la deuxième page de la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r_{p,q}$ est donnée par

$$ {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q} = \mathrm{H}_c^p(\mathrm{K}, \mathcal{H}^q) $$

Notons que la suite ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r_{p,q}$ ne converge pas en général vers sa deuxième page. D'après ce qui précéde, on obtient le résultat suivant.

Théorème 4.57. *Soit* G *un groupe localement profini,* X *un* G*-complexe simplicial propre muni d'un recouvrement* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ G*-équivariant localement fini et propre par des sous-complexes. Alors il existe une suite spectrale* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ *dans la catégorie des représentation lisses de* G *dont le deuxième terme est donné par*

$$ {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathrm{K}, \mathcal{H}^q) $$

tel que,

$$ {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}^{p+q}_c(\mathrm{X}) $$

Ici la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ *vérifie la condition de la proposition-définition (4.45).*

Démonstration. Soit K le nerf du recouvrement $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{p,q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ le G-module bigradué du premier cadrant défini par

$$ \mathcal{C}_{p,q} = \mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{K}_{(p)}, \mathcal{C}^q) \ \text{ si } \ p,q \in \mathbb{N} \ \text{ et } \ \mathcal{C}^{p,q} = 0 \ \text{ sinon} $$

où pour tout entier naturel q, $\mathcal{C}^q$ est le système de coefficients G-équivariant sur K défini dans la page 75. Notons ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ les deux suites spectrales provenant des filtrations verticale et horizontale du complexe total $\mathrm{Tot}(\mathcal{C})$ respectivement. D'après le théorème (4.51), les deux suites spectrales ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ convergent vers la cohomologie du complexe $\mathrm{Tot}(\mathcal{C})$. Or dans la discussion faite ci-dessus (page 79 et 80), on a vu que la suite spectrale ${}^{\mathrm{I}}\mathrm{E}^r$ dégénere et donc $\mathrm{H}^n(\mathrm{Tot}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. De plus on a vu que la deuxième page de la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ est donnée par

$$ {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathrm{K}, \mathcal{H}^q) $$

où pour tout enier naturel q, $\mathcal{H}^q$ est le système de coefficients sur K défini ci-dessus. Ainsi la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ converge vers la cohomologie de X et admet pour deuxième terme ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r_{p,q} = \mathrm{H}^p_c(\mathrm{K}, \mathcal{H}^q)$. □

Remarque 4.58.

(i) Plus concrètement, si G *est un groupe localement profini et* X *un* G*-complexe propre recouvert par une famille de sous-complexes* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ G*-équivariante et propre, alors pour tout entier naturel* n *il existe une filtration décroissante de* $\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ *par des sous-*G*-modules tels que*

$$ (*) \quad \mathrm{Gr}(\mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=n} ({}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^\infty_{p,q}) $$

(ii) Dans le cas où G *est un groupe profini, l'isomorphisme* $(*)$ *ci-dessus devient,*

$$ (**) \quad \mathrm{H}^n_c(\mathrm{X}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=n} ({}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^\infty_{p,q}) $$

Voir 2.13.

(iii) Dans le cas où $\mathrm{G} = \mathbb{G}(\mathrm{F})$ *est le groupe des points rationnels d'un groupe algèbrique simple défini sur un corps local non archimédien* F *et* X *un* G*-complexe propre, le théorème précédent nous permet de déterminer la partie cuspidale de la cohomologie de* X*. Plus précisément on a*

$$\mathrm{H}_c^n(\mathrm{X},\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \simeq \bigoplus_{p+q=n} ({}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^{\infty})^{\mathrm{cusp}}$$

Voir 2.31.

Nous terminons ce chapitre par un résultat qu'on va utiliser dans la suite. Soit G un groupe localement profini, X un G-complexe simplicial propre, et $(\mathrm{X}_s)_{s\in\mathrm{I}}$ un recouvrement G-équivariant propre et localement fini de X par des sous-complexes compacts. Soit $\mathbb{W}$ un groupe fini agissant simplicialement de façon regulière sur X et laissant globalement invariant chaque sous-complexe X_s, pour tout $s \in \mathrm{I}$. On suppose que les actions de G et $\mathbb{W}$ commutent. Notons K le nerf du recouvrement $(\mathrm{X}_s)_{s\in\mathrm{I}}$. Pour tout entier naturel q, on définit un système de coefficients G-équivariant

$$\mathcal{H}^q = (\mathcal{H}_\sigma^q, r_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$$

sur le nerf K par :

(i) Pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, $\mathcal{H}_\sigma^q = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C})$.

(ii) Pour tout $\sigma,\tau \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, tel que $\sigma \subset \tau$, $r_\tau^\sigma : \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\tau,\mathbb{C})$ est le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion de X_τ dans X_σ.

On définit un système un coefficients

$$(\mathcal{H}^q)^{\mathbb{W}} = ((\mathcal{H}_\sigma^q)^{\mathbb{W}}, u_\tau^\sigma)_{\sigma\subset\tau}$$

sur le nerf K par :

(i) Pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, $(\mathcal{H}_\sigma^q)^{\mathbb{W}} = \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C})^{\mathbb{W}}$ est l'espace des vecteurs fixes de $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C})$ sous l'action de $\mathbb{W}$.

(ii) Pour tout $\sigma,\tau \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, tel que $\sigma \subset \tau$, $u_\tau^\sigma : \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C})^{\mathbb{W}} \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\tau,\mathbb{C})^{\mathbb{W}}$ est la restriction du morphisme $r_\tau^\sigma : \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\tau,\mathbb{C})$ à $\mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma,\mathbb{C})^{\mathbb{W}}$.

Comme les actions de G et $\mathbb{W}$ sur X commutent, le système de coefficients $(\mathcal{H}^q)^{\mathbb{W}}$ est G-équivariant. Notons que $(\mathcal{H}^q)^{\mathbb{W}}$ est clairement un sous-système de coefficients de $\mathcal{H}^q$.

Théorème 4.59. *Pour tout entier naturel* q*, le système de coefficients* $\mathcal{H}^q$ *se décompose en somme directe*

$$\mathcal{H}^q = \mathcal{A}^q \oplus \mathcal{B}^q$$

de deux sous-systèmes de coefficients G*-équivariant. En particulier, on a un isomorphisme de* G*-modules lisses,*

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{K},\mathcal{H}^q) \simeq \mathrm{H}_c^p(\mathrm{K},\mathcal{A}^q) \oplus \mathrm{H}_c^p(\mathrm{K},\mathcal{B}^q)$$

De plus, le système de coefficients $\mathcal{B}^q$ est isomorphe au système de coefficients $(\mathcal{H}^q)^{\mathbb{W}}$. En particulier,

$$\mathrm{H}_c^p(\mathrm{K}, \mathcal{B}^q) \simeq \mathrm{H}_c^p(\mathrm{K}, (\mathcal{H}^q)^{\mathbb{W}})$$

Démonstration. On définit un endomorphisme de systèmes de coefficients

$$p : \mathcal{H}^q \longrightarrow \mathcal{H}^q$$

de la façon suivante. Pour tout simplexe $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$,

$$p_\sigma : \mathcal{H}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^q_\sigma$$

est l'application linéaire définie par,

$$p_\sigma(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} w.v$$

Montrons que p est un endomorphisme G-équivariant de systèmes de coefficients. Rappelons que l'action de G sur $\mathcal{H}^q$ est donné par : pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$ et pour tout $g \in \mathrm{G}$,

$$r_\sigma^g : \mathcal{H}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^q_{g.\sigma}$$

est le morphisme induit en cohomologie par l'application simpliciale,

$$\mathrm{X}_{g.\sigma} \longrightarrow \mathrm{X}_\sigma, \ s \longmapsto g^{-1}.s$$

1) Pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, $\sigma \subset \tau$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q_\sigma & \xrightarrow{r_\tau^\sigma} & \mathcal{H}^q_\tau \\ {\scriptstyle p_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\tau} \\ \mathcal{H}^q_\sigma & \xrightarrow[r_\tau^\sigma]{} & \mathcal{H}^q_\tau \end{array}$$

commute. En effet, pour tout $v \in \mathcal{H}^q_\sigma$ on a

$$(p_\tau \circ r_\tau^\sigma)(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} w.r_\tau^\sigma(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} r_\tau^\sigma(w.v) = (r_\tau^\sigma \circ p_\tau)(v)$$

puisque les morphismes de restrictions r_τ^σ sont $\mathbb{W}$-équivariant.
2) Pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$ et pour tout $g \in \mathrm{G}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^q_\sigma & \xrightarrow{\mathbf{r}_\sigma^g} & \mathcal{H}^q_{g.\sigma} \\ {\scriptstyle p_\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{g.\sigma}} \\ \mathcal{H}^q_\sigma & \xrightarrow[r_\sigma^g]{} & \mathcal{H}^q_{g.\sigma} \end{array}$$

commute. En effet, pour tout $v \in \mathcal{H}^q_\sigma$ on a

$$(p_{g.\sigma} \circ r^g_\sigma)(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} w.r^g_\sigma(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} r^g_\sigma(w.v) = (r^g_\sigma \circ p_{g.\sigma})(v)$$

puisque les morphismes de restrictions r^σ_τ sont $\mathbb{W}$-équivariant. Par suite, p est endomorphisme G-équivariant de systèmes de coefficients. L'endomorphisme p est un projecteur dans le sens où $p \circ p = p$. En effet, pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$ et pour tout $v \in \mathcal{H}^q_\sigma$,

$$(p_\sigma \circ p_\sigma)(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} w.p_\sigma(v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|^2} \sum_{w \in \mathbb{W}} \sum_{w' \in \mathbb{W}} w.(w'.v) = \frac{1}{|\mathbb{W}|^2} (\sum_{w \in \mathbb{W}} 1) \sum_{x \in \mathbb{W}} x.v$$

$$= \frac{1}{|\mathbb{W}|} \sum_{w \in \mathbb{W}} w.p_\sigma(v) = p_\sigma(v)$$

On définit deux systèmes de coefficients $\mathcal{A}^q = (\mathcal{A}^q_\sigma, a^\sigma_\tau)$ et $\mathcal{B}^q = (\mathcal{B}^q_\sigma, b^\sigma_\tau)$ sur le nerf K par :

(i) Pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, $\mathcal{A}^q_\sigma = \ker(p_\sigma)$.

(ii) Pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, tel que $\sigma \subset \tau$, $a^\sigma_\tau : \mathcal{A}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{A}^q_\tau$ est la restriction du morphisme $r^\sigma_\tau : \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\tau, \mathbb{C})$ à $\mathcal{A}^q_\sigma$.

(i) Pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, $\mathcal{B}^q_\sigma = \mathrm{Im}(p_\sigma)$.

(ii) Pour tout $\sigma, \tau \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, tel que $\sigma \subset \tau$, $b^\sigma_\tau : \mathcal{B}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{B}^q_\tau$ est la restriction du morphisme $r^\sigma_\tau : \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\sigma, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathrm{X}_\tau, \mathbb{C})$ à $\mathcal{B}^q_\sigma$.

Les systèmes de coefficients $\mathcal{A}^q$ et $\mathcal{B}^q$ sont évidemment G-équivariants puisque l'endomorphisme p est un endomorhisme G-équivariant de sytèmes de coefficients. Montrons que

$$\mathcal{H}^q = \mathcal{A}^q \oplus \mathcal{B}^q$$

Soit $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$. Comme p_σ est un projecteur de $\mathcal{H}^q_\sigma$, on a

$$\mathcal{H}^q_\sigma = \mathcal{A}^q_\sigma \oplus \mathcal{B}^q_\sigma$$

Comme les morphismes de restriction $a^\sigma_\tau : \mathcal{A}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{A}^q_\tau$ et $b^\sigma_\tau : \mathcal{B}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{B}^q_\tau$ sont les restriction du morphisme

$$r^\sigma_\tau : \mathcal{H}^q_\sigma \longrightarrow \mathcal{H}^q_\tau$$

à $\mathcal{A}^q_\sigma$ et $\mathcal{B}^q_\sigma$ respectivement, alors les sommes directes $\mathcal{H}^q_\sigma = \mathcal{A}^q_\sigma \oplus \mathcal{B}^q_\sigma$ sont bien compatibles avec les morphismes de restrictions. Par conséquent, on a bien $\mathcal{H}^q = \mathcal{A}^q \oplus \mathcal{B}^q$. Notons que le système de coefficients $\mathcal{B}^q$ est égale au système au coefficients $(\mathcal{H}^q)^{\mathbb{W}}$. En effet, pour tout $\sigma \in \Sigma_{\mathrm{K}}$, $\mathcal{B}^q_\sigma = \mathrm{Im}(p_\sigma) = (\mathcal{H}^q_\sigma)^{\mathbb{W}}$. □

Chapitre 5

Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Première construction

Dans son article [Bro08], Paul Broussous à construit une tour projective $(\widetilde{\mathrm{X}}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de complexes simpliciaux fibrés au-dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}(n,\mathrm{F})$. En s'appuyant sur la théorie des nouveaux vecteurs, il montre que pour $n = 2$, la cohomologie de cette tour d'espaces fournit des représentations intéressantes et, à travers cette construction, il montre que presque tous les types de $\mathrm{GL}(2,\mathrm{F})$ apparaissent dans la cohomologie de certain graphes finis. Dans ce chapitre, nous généralisons une partie de ce travail au cas $n \geqslant 3$.

5.1 Chemins géodésiques de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$

Définition 5.1. *Soit k un entier naturel. Un chemin géodésique de longueur k dans $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ est un chemin dans le 1-squelette $(t_0, ..., t_k)$ tel que pour tous entiers $i, j = 0, ..., k$,*

$$d(t_i, t_j) = |i - j|$$

Remarque 5.2. *La métrique d de l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$ n'est rien d'autre que la métrique des chemins. Ainsi un k-chemin géodésique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$ est tout simplement un chemin sans aller-retour, c'est-à-dire un chemin $(t_0, ..., t_k)$ tel que $t_{i+2} \neq t_i$ pour tout $i = 0, ..., k-2$.*

Notons $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ l'ensemble des k-chemins géodésiques dans $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. L'action de G_n sur son immeuble affine étant par isométries, le groupe G_n agit naturellement sur $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$, l'action étant donnée par,

$$g.(t_0, ..., t_k) = (g.t_0, ..., g.t_k)$$

pour tout $g \in \mathrm{G}_n$. Le k-chemin standard $c^k = (s_0, ..., s_k)$ est un k-chemin géodésique de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, qu'on appelle le k-chemin géodésique standard.

Proposition 5.3. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'action du groupe G_2 sur l'ensemble $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_2))$ est transitive.*

Démonstration. Par récurrence sur k. Pour $k = 0$, $\mathcal{C}_0(\mathcal{B}(\mathrm{G}_2))$ s'identifie à l'ensemble des sommets de l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$. L'action de G_2 sur l'ensemble des sommets de l'arbre étant transitive, le résultat à l'ordre zéro est bien vrai. Soit $(t_0, ..., t_{k+1})$ un $(k+1)$-chemin géodésique dans $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Par hypothèse de récurrence, le tronqué $(t_0, ..., t_k)$ est dans l'orbite du k-chemin géodésique standard, il existe donc une F-base (f_1, f_2) de F^2 tel que $\mathrm{L}_i = \mathcal{O}_\mathrm{F} f_1 + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^i f_2$, $i = 0, ..., k$. Quitte à translater le problème par un élément de G_2, on peut supposer que (f_1, f_2) est la base canonique. Pour $i = 0, ..., k$, le stabilisateur de L_i dans $\mathrm{GL}(2, \mathrm{F})$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_\mathrm{F}^i \end{pmatrix} \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_\mathrm{F}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi_\mathrm{F}^{-i} \end{pmatrix} = \{ g \in \begin{pmatrix} \mathcal{O}_\mathrm{F} & \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{-i} \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F}^i & \mathcal{O}_\mathrm{F} \end{pmatrix} \quad , \quad \det(g) \in \mathcal{O}_\mathrm{F}^\times \}$$

Un élément du stabilisateur de L_i transforme une base de L_i (comme $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-module) en une autre base. Choisissons le représentant L_{k+1} de sorte que $\mathrm{L}_k \supset \mathrm{L}_{k+1} \supset \varpi_\mathrm{F} \mathrm{L}_{k+1}$. Puisque $[\mathrm{L}_{k+1}] \neq [\mathrm{L}_{k-1}]$, on doit avoir $\mathrm{L}_{k+1} \neq \mathcal{O}_\mathrm{F} f_1 + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k f_2$. En d'autres termes, le quotient $\overline{\mathrm{L}_{k+1}}$ de L_{k+1} dans $\mathrm{L}_k / \varpi_\mathrm{F} \mathrm{L}_{k+1}$ doit être différent de la droite vectorielle $k_\mathrm{F}(\overline{\varpi_\mathrm{F}^k f_2})$. Il est facile de voir que dans le stabilisateur de L_k, le sous-groupe

$$\bar{\mathrm{U}}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & 1 \end{pmatrix}$$

agit transitivement sur les droites vectorielles de $\mathrm{L}_k / \mathrm{L}_{k+1}$ différentes de $k_\mathrm{F}(\overline{\varpi_\mathrm{F}^k f_2})$. Soit g dans ce sous-groupe tel que $g k_\mathrm{F} \bar{f}_1 = \mathrm{L}_k / \mathrm{L}_{k+1}$. Cet élément stabilise tous les $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux $\mathrm{L}_0, ..., \mathrm{L}_k$. Remplaçons alors la base (f_1, f_2) par la base $(e_1, e_2) = (g f_1, g f_2)$. Alors pour $i = 0, ..., k$, $(g f_1, g \varpi_\mathrm{F}^i f_2) = (g f_1, \varpi_\mathrm{F}^i g f_2)$ est une $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-base de L_i, et, par construction $\mathrm{L}_{k+1} = \mathcal{O}_\mathrm{F} g f_1 + \varpi_\mathrm{F}^{k+1} g f_2$. D'où le résultal à l'ordre $k+1$.

□

Pour l'immeuble affine $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, où $n \geqslant 3$, la situation est un peu différente. L'action de G_n sur l'ensemble des chemins géodésiques $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ n'est transitive que pour $k = 0$. Pour s'en convaincre, on prend par exemple deux chemins géodésiques de longueur 1, $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ et $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, ayant même origine (ie, $\alpha_0 = \beta_0$) et tels que les étiquettes des deux sommets α_1 et β_1 soient différentes. Alors tout élément $g \in \mathrm{G}_n$ envoyant α sur β doit fixer le sommet commun α_0, en particulier un tel élément préserve l'étiquetage. Or on a choisi α et β de telle façon que les étiquettes de leurs extrémités soient différentes. Par conséquent un tel g ne peut pas exister. Plus précisément, on a

Proposition 5.4. *Soit $n \geqslant 3$. Pour tout $k \geqslant 1$, l'ensemble $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ possède deux orbites sous l'action de G_n.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des triplets $(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s)$, où $\mathcal{A}$ est un appartement de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, C une chambre de $\mathcal{A}$ et s un sommet de C. Le groupe G_n agit naturellement sur $\mathcal{E}$, l'action est donnée par $g.(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s) = (g.\mathcal{A}, g.\mathrm{C}, g.s)$. L'action de G_n sur $\mathcal{E}$ est transitive. En effet, soit $(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s)$ et $(\mathcal{A}', \mathrm{C}', s')$ deux éléments de $\mathcal{E}$. Comme G_n agit transitivement sur l'ensemble des appartements de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, on peut supposer que $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. De plus, comme le stabilisateur global de $\mathcal{A}$ agit transitivement sur les sommets de $\mathcal{A}$, on peut supposer que $s = s'$. On est donc ramené à montrer que pour tout appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ et tout sommet s de $\mathcal{A}$, l'intersection du stabilisateur global de $\mathcal{A}$ avec le stabilisateur de s agit transitivement sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{A}$ contenant s. Soit donc $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ un appartement de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, où T est un tore déployé maximal de G_n et s le sommet standard de $\mathcal{A}_\mathrm{T}$. Le normalisateur $\mathrm{N}_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{T})$ agit transitivement sur les chambres de $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ et on vérifie que $\mathrm{N}_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{T})$ agit transitivement sur les chambres de $\mathcal{A}_\mathrm{T}$ contenant s. Par suite, l'action de G_n sur $\mathcal{E}$ est transitive.

Pour tout triplet $(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s) \in \mathcal{E}$ et tout entier $k \geqslant 1$, on note $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ donné par,

$$\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s) = \{\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k) \in \mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))/\ \alpha \subset \mathcal{A},\ \alpha_0 = s,\ \text{et } \{\alpha_0, \alpha_1\} \subset \mathrm{C}\}$$

La famille $\mathcal{F}_k = \{\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s),\ (\mathcal{A}, \mathrm{C}, s) \in \mathcal{E}\}$ est un recouvrement G_n-équivariant de $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ dans le sens où l'ensemble $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ est réunion des $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s)$ et que pour tout $g \in \mathrm{G}_n$, $g.\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s) = \mathcal{F}_k(g.\mathcal{A}, g.\mathrm{C}, g.s)$. En effet, soit $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ un k-chemin géodésique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Il existe un appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ contenant α puisque tout chemin géodésique de l'immeuble est contenu dans un appartement. On choisit une chambre quelconque de l'appartement $\mathcal{A}$ telle que l'arête $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ est contenue dans C. Alors α appartient à $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s)$, où s est le sommet origine α_0.

L'action de G_n sur $\mathcal{E}$ étant transitive, pour tout $(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s) \in \mathcal{E}$, l'ensemble $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}, \mathrm{C}, s)$ contient un système de représentants de $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$. Soit $(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ le triplet standard de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_0$ (resp. $\mathrm{C}_0 = \{s_0, ..., s_{n-1}\}$, s_0) est l'appartement standard (resp. chambre standard, sommet standard) de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Alors $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ contient exactement deux éléments. En effet, les éléments de $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ sont les arêtes orientées $a_i = (s_0, s_i)$, $i = 1, ..., n-1$, de C_0 de longueur 1. En utilisant la formule de la proposition (3.5.1), on vérifie que $a_i \in \mathcal{F}_1(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ si et seulement si $i = 1$ ou $i = n-1$. D'où $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0) = \{a_1, a_{n-1}\}$. De la même façon, on vérifie que pour tout $k \geqslant 1$, $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ contient deux éléments, puis il n'est pas difficile de vérifier que ces deux éléments ne sont pas dans la même orbite. De plus $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ contient un système de représentants de $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$. Ainsi, les deux éléments de $\mathcal{F}_k(\mathcal{A}_0, \mathrm{C}_0, s_0)$ constituent un système de représentants.

□

Remarque 5.5. *Soit $n \geqslant 3$. Pour $k \geqslant 1$, si $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ est un k-chemin géodésique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ son inverse est le k-chemin géodésique $\alpha^{-1} = (\alpha_k, ..., \alpha_0)$. Pour des raisons*

d'étiquetage, on vérifie qu'un k-chemin géodésique α et son inverse ne sont jamais dans la même orbite. Par conséquent, pour tout k-chemin géodésique α, α et α^{-1} forment un système de représentants de $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$.

Pour tout $n \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{X}_{n,k}$ l'orbite dans $\mathcal{C}_k(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))$ du k-chemin géodésique standard c^k qu'on munit d'une structure de graphe dirigé de la façon suivante : les sommets sont les éléments de $\mathrm{X}_{n,k}$ et les arêtes sont les éléments de $\mathrm{X}_{n,k+1}$. L'orientation d'une arête $a = (a_0, ..., a_{k+1})$ étant donnée par $a^- = (a_0, ..., a_k)$ et $a^+ = (a_1, ..., a_{k+1})$, où l'on désigne par a^- (resp, a^+) l'origine (resp, l'extrémité) de a. Le groupe G_n agit sur les graphes $\mathrm{X}_{n,k}$ en préservant leurs structures de graphes dirigés, et par construction l'action est transitive sur les sommets (resp. les arêtes).

Proposition 5.6. *Pour tout $n \geqslant 3$, le graphe $\mathrm{X}_{n,0}$ est connexe et localement fini, en particulier sa réalisation géométrique est connexe et localement compacte.*

Démonstration. On rappelle que les sommets de $\mathrm{X}_{n,0}$ sont les sommets de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ et ses arêtes sont les arêtes orientées $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ conjugées à l'arête standard $c^1 = (s_0, s_1)$. Soit s et t deux sommets distincts de $\mathrm{X}_{n,0}$. Il existe un appartement $\mathcal{A}$ de $\mathcal{I}_n$ contenant s et t. Le groupe G_n agit transitivement sur les appartements. Ainsi, quitte à translater par un élément du groupe, on peut supposer que l'appartement $\mathcal{A}$ est l'appartement standard $\mathcal{A}_0$. D'autre part, le tore T_0 agit transitivement sur les sommets de l'appartement $\mathcal{A}_0$. Donc, quitte à translater par un élément de T_0, on peut supposer que $s = \delta_0 = [\mathrm{L}_0]$ avec $\mathrm{L}_0 = \mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n$. Soit L un $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux de E tel que $t = [\mathrm{L}]$. Le $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L se décompose dans la base canonique sous la forme $\mathrm{L} = \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_1} e_1 + ... + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_n} e_n$, où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$. On peut supposer que les α_i sont tous positifs et, puisque $s \neq t$ un au moins des α_i est strictement positif. Pour simplifier, on suppose que les α_i sont tout nuls sauf un seul, disons α_j pour un $j \in \{1, ..., n\}$. On est donc dans le cas où $s = [\mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$ et $t = [\mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_j} e_j + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j+1} + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$. On a un chemin $(\sigma_0, ..., \sigma_{\alpha_j})$ dans $\mathrm{X}_{n,0}$ reliant s à t définie par :

$$\sigma_0 = [\mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j-1} + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_j + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j+1} + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$$

$$\sigma_1 = [\mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F} e_j + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j+1} + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$$

$$\sigma_2 = [\mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^2 e_j + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j+1} + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$$

$$\vdots$$

$$\sigma_{\alpha_j} = [\mathcal{O}_\mathrm{F} e_1 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j-1} + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\alpha_j} e_j + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{j+1} + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$$

et en notant g la matrice de la transposition (j, n), on voit que $g.(\sigma_i, \sigma_{i+1}) = (s_i, s_{i+1})$, c'est-à-dire que les arêtes (σ_i, σ_{i+1}) sont bien des arêtes de $\mathrm{X}_{n,0}$. Le cas où les α_i sont quelconques est similaire au cas précédent. Par suite $\mathrm{X}_{n,0}$ est un graphe connexe. $\mathrm{X}_{n,0}$ est clairement localement fini puisque c'est un sous-graphe du 1-squelette de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. □

Proposition 5.7. *Pour tout $n \geqslant 3$ et $k \in \mathbb{N}$, le graphe $\mathrm{X}_{n,k}$ est connexe et localement fini, en particuler sa réalisation géométrique est connexe et localement compacte.*

Démonstration. Pour la connexité des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$, on raisonne par récurrence sur k. Pour $k = 0$, c'est vrai d'après la proposition précédente. Soit $k \geqslant 0$. Supposons que $\mathrm{X}_{n,k}$ est connexe et montrons que $\mathrm{X}_{n,k+1}$ l'est aussi. On dispose d'une projection simpliciale et G_n-équivariante $p : \mathrm{X}_{n,k+1} \twoheadrightarrow \mathrm{X}_{n,k}$ définie sur les sommets par $p(\sigma_0, ..., \sigma_{k+1}) = (\sigma_0, ..., \sigma_k)$. Soit $(\mathcal{C}_i)_{i\in I}$, les composantes connexes de $\mathrm{X}_{n,k+1}$. Les sous-graphes $\mathcal{C}_i$ forment une partition de $\mathrm{X}_{n,k+1}$ et on a $\mathrm{X}_{n,k} = \cup_{i\in I} p(\mathcal{C}_i)$. Cette dernière réunion est en fait disjointe. En effet soient $i, j \in I$ tel que $i \neq j$. Supposons que $p(\mathcal{C}_i) \cap p(\mathcal{C}_j) \neq \emptyset$ et choisissons un sommet α dans cette intersection. On a $\alpha = p(u) = p(v)$ pour un certain sommet u (resp. v) dans $\mathcal{C}_i$ (resp. $\mathcal{C}_j$).

Or pour $\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_{k+1})$ et $t = (t_0, ..., t_{k+1})$ deux sommets distincts de $\mathrm{X}_{n,k+1}$, Si $p(s) = p(t)$, c'est-à-dire $(\sigma_0, ..., \sigma_k) = (t_0, ..., t_k)$ et $\sigma_{k+1} \neq t_{k+1}$, alors σ et t sont dans la même composante connexe. En effet, on choisit un sommet u de $\mathcal{I}_n$ qui prolonge à gauche $p(s)$ et donc aussi $p(t)$, c'est-à-dire telle que $(u, \sigma_0, ..., \sigma_k)$ est un $(k+1)$-chemin géodésique dans $\mathrm{X}_{n,k+1}$. Un tel sommet existe pour le k-chemin géodésique standard c^k. Pour le voir il suffit de prendre le sommet $u = [\mathfrak{p}_\mathrm{F} e_1 + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_2 + ... + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_{n-1} + \mathcal{O}_\mathrm{F} e_n]$. De plus, $\mathrm{X}_{n,k}$ est l'orbite de c^k sous l'action de G_n, donc un tel prolongement existe pour tout sommet de $\mathrm{X}_{n,k}$. Un chemin dans le graphe $\mathrm{X}_{n,k+1}$ reliant le sommet $\sigma = (\sigma_0, ..., \sigma_{k+1})$ au sommet $t = (t_0, ..., t_{k+1})$ est donné par (c_0, c_1, c_2), où $c_0 = \sigma$, $c_1 = (u, \sigma_0, ..., \sigma_k)$ et $c_2 = t$.

Par conséquent, les sommets u et v de $\mathrm{X}_{n,k+1}$ sont dans la même composante connexe. Or $u \in \mathcal{C}_i$ et $v \in \mathcal{C}_j$ donc $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_j$. On a donc une réunion disjointe $\mathrm{X}_{n,k} = \cup_{i\in I} p(\mathcal{C}_i)$, où les $p(\mathcal{C}_i)$ sont des sous-graphes connexes de $\mathrm{X}_{n,k}$, or par hypothèse de récurrence $\mathrm{X}_{n,k}$ est connexe. Nécessairement le cardinal de I est un, ce qui veut dire que $\mathrm{X}_{n,k+1}$ est connexe. □

5.2 Limite projective des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer que dans la cas $n = 2$ la limite projective des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$ est un forêt dans laquelle les composantes connexes sont en correspondance avec les points du bord de l'arbre de Bruhat-Tits de G_2, et que chaque composante connexe est isomorphe à l'arbre de Bruhat-Tits. Notons que les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés dans la suite.

Pour tout $k \geqslant 0$, on a une projection simpliciale naturelle G_n-équivariante,

$$p_{k,k+1} : \mathrm{X}_{n,k+1} \longrightarrow \mathrm{X}_{n,k}$$

définie sur l'ensemble des sommets par

$$p_{k,k+1}(\sigma_0, ..., \sigma_{k+1}) = (\sigma_0, ..., \sigma_k)$$

La projection $p_{k,k+1}$ n'est rien d'autre que la tronquature des chemins géodésiques de longueur $(k+1)$ à droite.

Dans cette partie on va construire une limite projective des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$ et on va montrer que dans le cas $n=2$, cette limite projective est une forêt (ie. un graphe dont les composantes connexes sont des arbres) dont toutes les composantes connexes s'identifient à l'arbre de Bruhat-Tits. Rappelons d'abord la construction de la limite projective.
Un ensemble ordonné $(\mathrm{I}, \leqslant)$ est dit filtrant si pour tout $i, j \in \mathrm{I}$, il existe $k \in \mathrm{I}$ tel que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$. On se donne un ensemble ordonné filtrant $(\mathrm{I}, \leqslant)$ et une catégorie $\mathcal{C}$. Un système projectif d'objets de $\mathcal{C}$ indexé par I, qu'on note $(E_i, f_{i,j})_{i\in\mathrm{I}}$, est une famille $(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'objets de $\mathcal{C}$ munie de morphismes $f_{i,j} : \mathrm{E}_j \longrightarrow \mathrm{E}_i$, pour chaque couple d'indices $(i,j) \in \mathrm{I}^2$ tels que $i \leqslant j$, vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, $f_{i,i} = Id_{\mathrm{E}_i}$.
2. Pour tout triplet $(i,j,k) \in \mathrm{I}^3$, tel que $i \leqslant j \leqslant k$, $f_{i,j} \circ f_{j,k} = f_{i,k}$

Soit $(\mathrm{E}_i, f_{i,j})_{i\in\mathrm{I}}$ un système projectif dans une catégorie $\mathcal{C}$. La limite projective, lorsqu'elle existe, est un objet E de la catégorie $\mathcal{C}$ muni de morphismes $\varphi_i : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}_i$, pour tout $i \in \mathrm{I}$, tels que $f_{i,j} \circ \varphi_j = \varphi_i$ pour tout $i \leqslant j$, vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout objet F de $\mathcal{C}$, muni de morphismes $\psi_i : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}_i$, pour tout $i \in \mathrm{I}$, tel que $f_{i,j} \circ \psi_j = \psi_i$ pour tout $i \leqslant j$, il existe un unique morphisme $\Phi : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ tel que pour tout $i \in \mathrm{I}$,

$$\psi_i = \varphi_i \circ \Phi$$

Lorsqu'elle existe, la limite projective est unique à isomorphisme près, et elle se note $\varprojlim \mathrm{E}_i$. Dans la catégorie des ensembles, la limite projective d'un système projectif d'ensembles $(E_i, f_{i,j})_{i\in\mathrm{I}}$ est donnée par,

$$\varprojlim_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i = \{x = (x_i)_{i\in\mathrm{I}} \in \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{E}_i \ / \ f_{i,j}(x_j) = x_i \ , \forall \ i \leqslant j\}$$

Dans la catégorie $\mathcal{GD}$ des graphes dirigés, la limite projective d'un système projectif $(\mathrm{X}_i, f_{i,j})_{i\in\mathrm{I}}$ est définie de la façon suivante. Notons d'abord $\mathrm{X} = \varprojlim \mathrm{X}_i$ la limite projective du système $(\mathrm{X}_i, f_{i,j})_{i\in\mathrm{I}}$ vu comme système projectif d'ensembles et pour $i \in \mathrm{I}$, $p_i : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}_i$ la projection canonique. On munit alors X de la "plus petite" structure de graphe dirigé qui fait de toutes les projections canoniques des morphismes de graphes dirigés, c'est-à-dire, les arêtes orientées de X sont définies comme étant les couples $a = (s,t)$ d'éléments de X tel que pour tout $i \in \mathrm{I}$, $p_i(a)$ est une arête orientée de X_i de même orientation que a (ie. $p_i(a^\epsilon) = p_i(a)^\epsilon$ pour $\epsilon \in \{-,+\}$). Il est clair que ceci définit bien une structure de graphe dirigé sur X pour laquelle toutes les projections canoniques sont des morphismes de graphes dirigés.

Le système $(\mathrm{X}_{n,k}, p_{k,k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est un système projectif de graphes dirigés, on note $\mathrm{X}_{n,\infty}$ sa limite projectif. Bien entendu, comme le système projectif définissant $\mathrm{X}_{n,\infty}$ est G_n-équivariant, alors G_n agit sur le complexe simplicial $\mathrm{X}_{n,\infty}$ en respectant sa structure. On

va identifier les graphes dirigé $X_{n,\infty}$ avec des graphes plus simples qu'on construit à partir de l'immeuble $\mathcal{B}(G_n)$.

Définition 5.8. *On appelle semi-géodésique (resp. géodésique) de $\mathcal{B}(G_n)$ toute suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (resp, $(t_i)_{i\in\mathbb{Z}}$) de sommets de $\mathcal{B}(G_n)$ telle que :*

(i) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ (resp. $i \in \mathbb{Z}$), t_i et t_{i+1} sont reliés par une arête.

(ii) Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ (resp. $i, j \in \mathbb{Z}$), $d(t_i, t_j) = |i - j|$

Notons $\mathcal{SG}_n$ (resp, $\mathcal{G}_n$) l'ensemble des semi-géodésiques (resp. géodésiques) de $\mathcal{B}(G_n)$. La suite $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (resp, $(s_m)_{m\in\mathbb{Z}}$) est une semi-géodésique (resp. géodésique) de $\mathcal{B}(G_n)$ qu'on appelle la *semi-géodésique* (resp, *géodésique*) standard.

Pour toute semi-géodésique $\alpha = (\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}(G_n)$, et tout $q \in \mathbb{N}$, on note $\alpha + q$ la semi-géodésique définie par $\alpha + q = (\alpha_{m+q})_{m\in\mathbb{N}}$. On définit une structure de graphe dirigé sur $\mathcal{SG}_n$ dont les sommets sont ses éléments et les arêtes dirigées sont de la forme $(\alpha, \alpha + 1)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{SG}_n$. De façon évidente, le groupe G_n agit sur le graphe $\mathcal{SG}_n$ en respectant sa structure simplicial et en préservant son orientation.

L'action de G_2 sur l'ensemble des sommets du graphe $\mathcal{SG}_2$ est transitive. Dans ce cas, une géodésique de l'arbre $\mathcal{B}(G_2)$ est un appartement $\mathcal{A}$ muni d'une orientation pour laquelle $\mathcal{A}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, où $\mathbb{Z}$ est muni de la structure de graphe orienté dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{Z}$ et dont les arêtes orientées sont de la forme $(m, m + 1)$ pour $m \in \mathbb{Z}$. L'action de G_2 est transitive sur les appartements. De plus il est facile de montrer l'existence d'éléments $g \in G_2$ qui agit sur l'appartement $\mathcal{A}$ comme une symétrie centrale. Par conséquent G_2 agit transitivement sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{SG}_2$. Pour des raisons d'étiquetage, l'action de G_n sur l'ensemble des sommets du graphe $\mathcal{SG}_n$ n'est plus transitive pour $n \geqslant 3$.

Proposition 5.9. *$X_{2,\infty}$ et $\mathcal{SG}_2$ sont isomorphes en tant que G_2-graphes dirigés.*

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une semi-géodésique de $\mathcal{B}(G_2)$. Le tronqué $\widetilde{\alpha}_m = (\alpha_0, ..., \alpha_m)$, pour $m \in \mathbb{N}$, est dans $X_{2,m}$ et la suite $(\widetilde{\alpha}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définit un élément de $X_{2,\infty}$. On a donc une application $\varphi : \mathcal{SG}_2 \longrightarrow X_{2,\infty}$ définie par $\varphi(\alpha) = (\widetilde{\alpha}_m)_{m\in\mathbb{N}}$. L'application φ est clairement un morphisme de graphes dirigés G_2-équivariante et injective.
Pour la surjectivité, soit $\gamma = (\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $X_{2,\infty}$, c'est-à-dire pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\gamma_m \in X_{2,m}$ et $p^+_{m,m+1}(\gamma_{m+1}) = \gamma_m$. On écrit $\gamma_m = (\gamma_{m,0}, ..., \gamma_{m,m})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et on pose $\alpha = (\gamma_{m,m})_{m\in\mathbb{N}}$. D'une part, α est un chemin infini (i.e. indexé par $\mathbb{N}$) dans l'arbre $\mathcal{I}_2$ puisque le fait que $p^+_{m,m+1}(\gamma_{m+1}) = \gamma_m$ implique que $\gamma_{m,m} = \gamma_{m+1,m}$ et donc $\gamma_{m,m}$ et $\gamma_{m+1,m+1}$ sont reliés par une arête et ceci pour tout m. D'autre part α est géodésique

puisque, en tronquant q fois à droite le $(q+m)$-chemin géodésique γ_{q+m}, on obtient γ_m pour tous $m, q \in \mathbb{N}$.

□

Dans toute la suite, on identifie le graphe $\mathrm{X}_{2,\infty}$ avec $\mathcal{SG}_2$. On définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{SG}_2$. pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{SG}_2$,

$$\alpha \mathrel{\mathscr{R}} \beta \text{ si et seulement s'il existe } m, l \in \mathbb{N} \text{ tel que } \alpha + m = \beta + l$$

L'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{SG}_2$ pour $\mathscr{R}$ est appelé le bord de l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$, et on le note Ω. Il est bien connu que $\widetilde{\mathcal{B}}(\mathrm{G}_2) := \mathcal{B}(\mathrm{G}_2) \cup \Omega$ est muni d'une topologie qui définit une compactification de l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$, voir [Cho94], page 19.

Proposition 5.10. *L'ensemble des composantes connexes de* $\mathrm{X}_{2,\infty}$ *est en bijection* G_2*-équivariante avec le bord* Ω*,*

$$\pi_0(\mathrm{X}_{2,\infty}) \simeq \Omega$$

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\beta = (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux sommets de $\mathcal{SG}_2$. Montrons que α et β sont dans la même composante connexe si et seulement si $\alpha \mathscr{R} \beta$.
Supposons que $\alpha \mathscr{R} \beta$, il existe alors $m, l \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha + m = \beta + l$. Il est clair que α est relié par un chemin dans $\mathcal{SG}_2$ à $\alpha + m$. De même pour β et $\beta + l$. Par conséquent, α et relié par un chemin dans $\mathcal{SG}_2$ à β, c'est-à -dire α et β sont dans la même composante connexe.
Réciproquement, supposons que α et β sont dans la même composante connexe de $\mathcal{SG}_2$. Il existe donc un chemin $(\eta_0, ..., \eta_q)$ dans $\mathcal{SG}_2$ d'origine α et d'extremité β. On va montrer par récurrence sur q que tous sommets α et β de $\mathcal{SG}_2$ reliés par un chemin de longueur q sont équivalents pour la relation $\mathscr{R}$. Pour $q = 1$, la propriété est clairement vraie. Soit $q \geqslant 0$. Supposons que le résultal est vrai pour tout $0 \leqslant k \leqslant q$. Soit α et β deux sommets de $\mathcal{SG}_2$ reliés par un chemin de longueur $q+1$, et notons $(\eta_0, ..., \eta_{q+1})$ un tel chemin ($\eta_0 = \alpha$ et $\eta_{q+1} = \beta$). D'après l'hypothèse de récurrence, on a $\alpha \mathscr{R} \eta_q$ et $\eta_q \mathscr{R} \beta$, et donc $\alpha \mathscr{R} \beta$. Alors deux sommets de $\mathcal{SG}_2$ dans la même composante connexe sont équivalents pour la relation $\mathscr{R}$. Par conséquent, l'ensemble $\pi_0(\mathrm{X}_{2,\infty})$ des composantes connexes de $\mathrm{X}_{2,\infty}$ s'identifie au bord Ω.

Pour chaque point du bord $\omega \in \Omega$, on note $\mathrm{X}^{\omega}_{2,\infty}$ la composante connexe de $\mathrm{X}_{2,\infty}$ correpondante. Comme sous-graphe de $\mathrm{X}_{2,\infty}$, $\mathrm{X}^{\omega}_{2,\infty}$ est constitué des sommets α de $\mathrm{X}_{2,\infty}$ qui sont dans la classe d'équivalence de α_0 pour la relation $\mathscr{R}$, où α_0 est un représentant quelconque de ω. Pour montrer que $\pi_0(\mathrm{X}_{2,\infty})$ s'identifie de façon G_2-équivariante à Ω, il suffit de vérifier que pour tout $g \in \mathrm{G}_2$ et tout $\omega \in \mathcal{B}(\mathcal{I}_2)$, $g.\mathrm{X}^{\omega}_{2,\infty} = \mathrm{X}^{g.\omega}_{2,\infty}$. D'une part, l'action de G_2 sur le graphe $\mathrm{X}_{2,\infty}$ étant simpliciale, $g.\mathrm{X}^{\omega}_{2,\infty}$ est une composante connexe de $\mathrm{X}_{2,\infty}$, et donc $g.\mathrm{X}^{\omega}_{2,\infty} = \mathrm{X}^{\omega'}_{2,\infty}$ pour un unique point $\omega' \in \mathcal{B}(\mathcal{I}_2)$. D'autres part, si α est un sommet de $\mathrm{X}^{\omega}_{2,\infty}$, alors α est relié à α_0 par un chemin combinatoire, où α_0 un représentant quelconque de ω. Donc $g.\alpha$ (qui est un sommet de $\mathrm{X}^{\omega'}_{2,\infty}$) est relié à $g.\alpha_0$ par un chemin combinatoire, ce qui donne l'égalité $\mathrm{X}^{\omega'}_{2,\infty} = \mathrm{X}^{g.\omega}_{2,\infty}$. □

Proposition 5.11. *Les composantes connexes de $\mathrm{X}_{2,\infty}$ sont des arbres homogènes, et chaque composante connexe est isomorphe à l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une composante connexe de $\mathcal{SG}_2$ et $\gamma = (\gamma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un sommet de $\mathcal{C}$. On définit une application entre ensembles de sommets $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$ par $f(\alpha) = \alpha_0$, pour tout $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Il est clair que f est une application simpliciale G_n-équivariante. Vérifions que f est injective. Soit $\beta = (\beta_i)_{i\in\mathbb{N}}, \beta' = (\beta'_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ tels que $f(\beta) = f(\beta')$, c'est-à-dire tels que $\beta_0 = \beta'_0$. On suppose que $\beta \neq \beta'$. Comme β et β' sont dans la même composante connexe, d'après la proposition (4.2) il existe $i_0, m \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_i = \beta'_{i+m}$ pour tout $i \geqslant i_0$. Comme par hypothèse $\beta \neq \beta'$, alors m est nécessairement strictement positifs, car si $m = 0$ avec le fait que $\beta_0 = \beta'_0$ et $\beta_i = \beta'_i$ pour tout $i \geqslant i_0$, on obtient $\beta = \beta'$ car sinon le chemin $(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{i_0}, \beta'_{i_0-1}, \beta'_{i_0-2}, ..., \beta'_1)$ donne lieu à un circuit dans l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$. Le même raisonnement montre que $i_0 > 0$. Comme $m > 0$ et $i_0 > 0$ la suite $(\beta_0, \beta_1, ...\beta_{i_0}, \beta'_{i_0+m-1}, \beta'_{i_0+m-2}, ..., \beta'_1)$ est un circuit dans l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$, ce qui est absurde. D'où f est injective. Pour la surjectivité de f, soit s un sommet l'arbre $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$. On veut montrer qu'il existe une semi-géodésique $\alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}_2$ qui appartient à la composante connexe $\mathcal{C}$ tel que $\alpha_0 = s$. On distingue deux cas :
premier cas : Si $s \in \{\gamma_i\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$, alors $s = \gamma_m$ pour un certain entier m. Posons $\beta = \gamma + m$, alors $\beta \in \mathcal{C}$ et $f(\beta) = s$.
Deuxième cas : Si $s \notin \{\gamma_i\ ,\ i \in \mathbb{N}\}$, comme $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$ est connexe, il existe un chemin $(t_0, ..., t_k)$ dans $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$ d'origine s et d'extrémité γ_0 (ie. tel que $t_0 = s$ et $t_k = \gamma_0$). Comme de plus $\mathcal{B}(\mathrm{G}_2)$ est un arbre on peut supposer que le chemin $(t_0, ..., t_k)$ est géodésique. Alors la suite $\beta = (t_0, ..., t_k, \gamma_1, \gamma_2, ...)$ est un sommet de $\mathcal{C}$ et $f(\beta) = s$. Finalement, l'application f est un isomorphisme de graphes. □

5.3 Prolongement des chemins géodésiques de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$

Définition 5.12. *Soit $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ un k-chemin géodésique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Un prolongement de α à droite (resp. à gauche) est un sommet s voisin de α_k (resp. α_0) tel que le chemin combinatoire $(\alpha_0, ..., \alpha_k, s)$ (resp. $(s, \alpha_0, ..., \alpha_k)$) est géodésique.*

On note $\mathcal{P}^+(\alpha)$ (resp. $\mathcal{P}^-(\alpha)$) l'ensemble des prolongements à droite (resp. à gauche) de α. On note aussi $\mathcal{P}(\alpha)$ l'ensemble des couples de sommets (s, t) de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ tel que $(s, \alpha_0, ..., \alpha_k, t)$ est un chemin géodésique.

Remarque 5.13. *Remarquons qu'un chemin géodésique $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ de longueur $k \geqslant 1$ possède un unique prolongement à droite (resp. à gauche) dans toute appartement de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ le contenant. En effet, si $\mathcal{A}$ est un appartement contenant α, en passant à la réalisation géométrique $|\mathcal{A}|$, qui s'identifie à l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^{n-1}$, au chemin géodésique α correspond le segment $[\alpha_0, \alpha_k] \subset \mathbb{R}^{n-1}$ et à un prolongement à droite de α dans l'appartement $\mathcal{A}$ correspond un 1-prolongement à droite du segment $[\alpha_0, \alpha_k]$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ (ie. un point x tel que $[\alpha_0, \alpha_k] \subset [\alpha_0, x]$ et $d(\alpha_k, x) = 1$) qui est évidemment unique.*

Notons $\mathrm{E}(k_\mathrm{F})$ le k_F-espace vectoriel k_F^n, $\mathcal{S}(\mathrm{E}(k_\mathrm{F}))$ l'ensemble des couples (D,H) formés d'une droite vectorielle D (resp. hyperplan vectoriel H) de $\mathrm{E}(k_\mathrm{F})$ tels que $\mathrm{D}\oplus\mathrm{H}=\mathrm{E}(k_\mathrm{F})$, et pour D (resp. H) une droite vectorielle (resp. hyperplan) de $\mathrm{E}(k_\mathrm{F})$, $\mathcal{S}_\mathrm{D}(\mathrm{E}(k_\mathrm{F}))$ (resp. $\mathcal{S}_\mathrm{H}(\mathrm{E}(k_\mathrm{F}))$ l'ensemble des hyperplans (resp, droites vectorielles) supplémentaires à D (resp. H).

Proposition 5.14. *Soit α un sommet de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$, vu comme un chemin géodésique de longueur zéro. Alors, les ensembles de prolongements à droite et à gauche de α, $\mathcal{P}^+(\alpha)$ et $\mathcal{P}^-(\alpha)$ respectivement, s'identifient à l'ensemble $\mathbb{P}^1(\mathrm{E}(k_\mathrm{F}))\sqcup\mathbb{P}^1(\mathrm{E}(k_\mathrm{F})^*)$, où $\mathrm{E}(k_\mathrm{F})$ est le k_F-espace vectoriel k_F^n et $\mathrm{E}(k_\mathrm{F})^*$ son dual.*

Démonstration. Soit α un sommet de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ et notons $\mathcal{V}(\alpha)$ l'ensemble des sommets voisins de α dans $\mathcal{I}_n$. L'ensemble $\mathcal{P}^+(\alpha)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{V}(\alpha)$ formé des sommets β tel que $d(\alpha,\beta)=1$. D'après la proposition (3.43), on a

$$d(\alpha,\beta)=\sqrt{\frac{n}{n-1}}(\dim_{k_\mathrm{F}}(\overline{M})-\frac{1}{n}\dim_{k_\mathrm{F}}(\overline{M})^2)^{\frac{1}{2}}$$

où L et M sont deux $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux représentants α et β respectivement tel que $\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}\subsetneq\mathrm{M}\subsetneq\mathrm{L}$ et $\overline{\mathrm{M}}$ est le sous-k_F-espace vectoriel $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ de $\mathrm{L}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$. Soit donc β un sommet voisin de α et fixons deux $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux L et M comme ci-dessus. Alors $\beta\in\mathcal{P}^+(\alpha)$ si et seulement si $\dim_{k_\mathrm{F}}(\bar{\mathrm{M}})\in\{1,n-1\}$, c'est-à-dire $\bar{\mathrm{M}}$ est soit une droite soit un hyperplan du k_F-espace vectoriel $\mathrm{L}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$, d'où le résultat. Pour $\mathcal{P}^-(\alpha)$, la preuve est similaire.
Pour le deuxième point, soit $(s,t)\in\mathcal{P}(\alpha)$. Le chemin (s,α,t) est géodésique. Un tel chemin est contenu dans un appartement, et en translatant par un élément du groupe G_n on peut supposer qu'il est contenu dans l'appartement standard et que le sommet α est représenté par le $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux $\mathrm{L}=\mathcal{O}_\mathrm{F}e_1+...+\mathcal{O}_\mathrm{F}e_n$. Comme s et t sont des sommets voisins à α dans l'appartement standard, alors ils sont représentés par les $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux $\mathrm{M}=\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\gamma_1}e_1+...+\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\gamma_n}e_n$ et $\mathrm{N}=\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\delta_1}e_1+...+\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{\delta_n}e_n$ respectivement, où $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ et $\delta=(\delta_1,...,\delta_n)$ sont deux n-uplets à coefficients dans $\{0,1\}$ et tels que un au moins des coefficients est non nul. De plus, on a $s\in\mathcal{P}^-(\alpha)$ et $t\in\mathcal{P}^+(\alpha)$. Alors d'après le premier point, $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ (resp. $\mathrm{N}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$) est soit une droite vectorielle, soit un hyperplan du k_F-espace vectoriel $\mathrm{L}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$. Les cas où $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ et $\mathrm{N}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ sont des droites (resp. hyperplans) sont réjeter puisque, par un simple calcul on vérifie que dans ces cas $d(s,t)\neq 2$. Pour les deux cas qui restent, traitons le cas où $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ est une droite et $\mathrm{N}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ est un hyperplan, l'autre cas est similaire. Pour simplifier, on peut supposer que $\gamma=(1,...,1,0)$ (ie. $\mathrm{M}=\mathfrak{p}_\mathrm{F}e_1+...+\mathfrak{p}_\mathrm{F}e_{n-1}+\mathcal{O}_\mathrm{F}e_n$). Alors par simple calcul, pour $t\in\mathcal{P}^+(\alpha)$ un sommet voisin de α dans l'appartement standard, t étant représenté par le $\mathcal{O}_\mathrm{F}$-réseaux N, le chemin combinatoire (s,α,t) est géodésique si et seulement si l'hyperplan $\mathrm{N}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$ est supplémentaire à la droite $\mathrm{M}/\varpi_\mathrm{F}\mathrm{L}$. □

Proposition 5.15. *Soit $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ un chemin géodésique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ de longueur $k \geqslant 1$, avec $\alpha \in \mathrm{X}_{n,k}$.*

1. *L'ensemble des prolongements à droite (resp. à gauche) de α ne dépend que l'arête orientée terminale (α_{k-1}, α_k) (resp. (α_0, α_1)).*
2. *Les ensembles des prolongement à droite et à gauche de α, $\mathcal{P}^+(\alpha)$ et $\mathcal{P}^-(\alpha)$, s'identifient à $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}(\mathrm{E}(k_{\mathrm{F}}))$ et $\mathcal{S}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}(k_{\mathrm{F}}))$ respectivement, où* D *(resp,* H*) est une droite vectorielle (resp. hyperplan) fixée.*
3. *L'ensemble $\mathcal{P}(\alpha)$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathrm{D}}(\mathrm{E}(k_{\mathrm{F}})) \times \mathcal{S}_{\mathrm{H}}(\mathrm{E}(k_{\mathrm{F}}))$*

Démonstration. 1) Soit $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ un chemin géodésique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ de longueur $k \geqslant 1$, avec $\alpha \in \mathrm{X}_{n,k}$. Notons $\widetilde{\alpha}$ l'arête orientée (α_{k-1}, α_k). Pour montrer que l'ensemble des prolongements à droite de α ne dépend que de l'arête terminale $\widetilde{\alpha}$, on va montrer que $\mathcal{P}^+(\alpha) = \mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$. L'inclusion $\mathcal{P}^+(\alpha) \subset \mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$ est claire. Les ensembles $\mathcal{P}^+(\alpha)$ et $\mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$ étant finis, pour avoir l'égalité il suffit de vérifier l'égalité des cardinaux. L'arête non orientée $a = \{\alpha_{k-1}, \alpha_k\}$ est une partie convexe de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Alors le stabilisateur dans G_n de a, Γ_a, agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant a (voir [BT72]). Ceci implique que Γ_a agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$. En effet, soit $s, t \in \mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$. Les chemins géodésiques $(\alpha_{k-1}, \alpha_k, s)$ et $(\alpha_{k-1}, \alpha_k, t)$ sont contenus dans deux appartements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ respectivement. D'autre part, les appartements $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ contiennent l'arête a, alors il existe $g \in \Gamma_a$ (sachant qu'on vérifie facilement que Γ_a coincide avec le stabilisateur de $\widetilde{\alpha}$) tel que $g.\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Le chemin géodésique $(\alpha_{k-1}, \alpha_k, s)$ étant contenu dans l'appartement $\mathcal{A}$, alors $g.(\alpha_{k-1}, \alpha_k, s) = (\alpha_{k-1}, \alpha_k, g.s)$ est contenu dans $\mathcal{A}'$. Il s'ensuit que les sommets $g.s$ et t sont deux prolongements à droite de $\widetilde{\alpha}$ dans le même appartement $\mathcal{A}'$, alors par unicité du prolongement dans un appartement fixé, on obtient $g.s = t$, donc l'action de $\Gamma_{\widetilde{\alpha}}$ sur $\mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$ est transitive. En particulier, le cardinal de $\mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$ est égal au cardinal du quotient $\Gamma_{\widetilde{\alpha}}/\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}_n}(s)$ pour $s \in \mathcal{P}^+(\widetilde{\alpha})$. On peut supposer que α est le k-chemin géodésique standard $(\delta_0, ..., \delta_k)$, où l'on rappelle que $\delta_i = [\mathfrak{O}_{\mathrm{F}} e_1 + ... + \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} e_{n-1} + \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^i]$. α et $\widetilde{\alpha}$ sont contenus dans l'appartement standard $\mathcal{A}_0$ et l'unique prolongement de $\widetilde{\alpha}$ dans $\mathcal{A}_0$ est le sommet δ_{k+1}. D'autres part, on a $\widetilde{\alpha} = t^{k-1}.(\delta_0, \delta_1)$, où t est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, ...1, \varpi_{\mathrm{F}})$. Donc les stabilisateurs $\Gamma_{\widetilde{\alpha}} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}_n}(\widetilde{\alpha})$ et $\mathrm{Stab}_{\Gamma_{\widetilde{\alpha}}}(\delta_{k+1})$ sont, à conjugaison près, donnés respectivement par :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathfrak{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} \\ \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} & \vdots \\ \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}} \\ \hline \mathfrak{p}_{\mathrm{F}} & \cdots & \cdots & \mathfrak{p}_{\mathrm{F}} & \mathfrak{O}_{\mathrm{F}}^{\times} \end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \vdots \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \hline \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{2} & \cdots & \cdots & \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{2} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} \end{array}\right)$$

Alors un simple calcul nous donne, $\mathrm{Card}(\mathcal{P}^{+}(\widetilde{\alpha})) = \mathrm{Card}(\Gamma_{\widetilde{\alpha}}/\mathrm{Stab}_{\Gamma_{\widetilde{\alpha}}}(\delta_{k+1})) = q_{\mathrm{F}}^{n-1}$.
Avec le même raisonnement, montre que le stabilisateur Γ_{α} de α agit transitivement sur $\mathcal{P}^{+}(\alpha)$ et que les stabilisateurs Γ_{α} et $\mathrm{Stab}_{\Gamma_{\alpha}}(\delta_{k+1})$ (δ_{k+1} est l'unique prolongement à droite de α dans $\mathcal{A}_0$) sont respectivement donnés par :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \vdots \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \hline \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k} & \cdots & \cdots & \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} \end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \vdots \\ \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \cdots & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}} \\ \hline \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1} & \cdots & \cdots & \mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1} & \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times} \end{array}\right)$$

et on obtient aussi par un simple calcul que $\mathrm{Card}(\mathcal{P}^{+}(\alpha)) = \mathrm{Card}(\Gamma_{\alpha}/\mathrm{Stab}_{\Gamma_{\alpha}}(\delta_{k+1})) = q_{\mathrm{F}}^{n-1}$. Ainsi, $\mathcal{P}^{+}(\alpha) = \mathcal{P}^{+}(\widetilde{\alpha})$. Pour les prolongements à gauche de α, la preuve est similaire. Le preuve de 2) et 3) est similaire à la preuve de la proposition précédente. □

Remarque 5.16. *D'après le premier point de la proposition précédente, si $\alpha, \beta \in \mathrm{X}_{n,k}$ sont deux chemins géodésiques de longueur $k \geqslant 1$ et possédant la même arête terminale (resp. arête initiale), alors un sommet qui prolonge à droite (resp. à gauche) α prolonge aussi β.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout sommet $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_k)$ de $\mathrm{X}_{n,k}$, on notera dans la section qui suit :

a) $\mathcal{Q}^{+}(\alpha) = \{(\alpha_0, ..., \alpha_k, s)/\ s \in \mathcal{P}^{+}(\alpha)\}$

b) $\mathcal{Q}^-(\alpha) = \{(t, \alpha_0, ..., \alpha_k)/\ t \in \mathcal{P}^-(\alpha)\}$
c) $\mathcal{Q}(\alpha) = \{(t, \alpha_0, ..., \alpha_k, s)/\ (t, s) \in \mathcal{P}(\alpha)\}$

5.4 Combinatoire des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$

Soit $k \geqslant 1$. Pour alléger les notations, dans cette partie le graphe $\mathrm{X}_{n,k}$ (resp. $\mathrm{X}_{n,k-1}$) sera noté par X (resp. Y). Pour tout sommet $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$ de Y, on définit un sous-graphe dirigé fini X_α de X de la façon suivante. L'ensemble des arêtes de X_α est $\mathcal{Q}(\alpha)$ et l'orientation d'une arête $a = (t, \alpha_0, ..., \alpha_{k-1}, s)$ est donnée par,

$$a^- = (t, \alpha_0, ..., \alpha_{k-1}) \quad \text{et} \quad a^+ = (\alpha_0, ..., \alpha_{k-1}, s)$$

L'ensemble des sommets de X_α est $\mathcal{Q}^-(\alpha) \sqcup \mathcal{Q}^+(\alpha)$. D'après la section précédente, tout sommet dans $\mathcal{Q}^-(\alpha)$ est relié à tout sommet dans $\mathcal{Q}^+(\alpha)$. De plus, deux sommets dans $\mathcal{Q}^-(\alpha)$ (resp. $\mathcal{Q}^-(\alpha)$) ne sont pas réliés par une arête. Donc X_α est un graphe biparti complet basé sur deux ensembles de sommets formé de q^{n-1} éléments, en particulier c'est un graphe connexe.

Proposition 5.17. *Soit α, β deux sommets de* Y.

1. *Si $\alpha \neq \beta$, alors $\mathrm{X}^1_\alpha \cap \mathrm{X}^1_\beta = \emptyset$.*
2. *Si $\alpha \neq \beta$, alors $\mathrm{X}^0_\alpha \cap \mathrm{X}^0_\beta \neq \{\emptyset\}$ si et seulement si $\alpha \cup \beta \in \mathrm{X}^0$.*

Par conséquent, deux sous-graphes finis X_α et X_β distincts s'intersectent (ie. possédent un sommet ou une arête commune) si et seulement si les sommets α et β sont reliés par une arête dans Y.

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$ et $\beta = (\beta_0, ..., \beta_{k-1})$ deux sommets de Y. Supposons que $\mathrm{X}^1_\alpha \cap \mathrm{X}^1_\beta \neq \emptyset$. Alors la tronquature à droite et à gauche d'une arête $a \in \mathrm{X}^1_\alpha \cap \mathrm{X}^1_\beta$ coincide avec α et β. En particulier $\alpha = \beta$. Pour le deuxième point, supposons que $\mathrm{X}^0_\alpha \cap \mathrm{X}^0_\beta \neq \emptyset$. Soit $t = (t_0, ..., t_k) \in \mathrm{X}^0_\alpha \cap \mathrm{X}^0_\beta$. Comme $\alpha \neq \beta$, on distingue deux cas : Soit $t^+ = (t_1, ..., t_k) = \alpha$ et $t^- = (t_0, ..., t_{k-1}) = \beta$, alors $(\alpha_0, ..., \alpha_{k-2}) = (\beta_1, ..., \beta_{k-1})$ et par suite $\alpha \cup \beta = (\beta_0, \alpha_0, ..., \alpha_{k-1})$ est un sommet de X. Sinon, $t^- = (t_0, ..., t_{k-1}) = \alpha$ et $t^+ = (t_1, ..., t_k) = \beta$, et le raisonnement est similaire au cas précédent.
Réciproquement, on suppose que $\alpha \cup \beta$ est un sommet de X. Alors on est dans l'un des deux cas suivants : $\alpha^- = \beta^+$ ou $\alpha^+ = \beta^-$. Regardons le cas $\alpha^- = \beta^+$, l'autre étant similaire. Posons $t = \alpha \cup \beta = (\beta_0, ..., \alpha, ..., \alpha_{k-1})$, alors il est clair que $\mathrm{X}^0_\alpha \cap \mathrm{X}^0_\beta \neq \emptyset$. □

La famille $(\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{Y}^0}$ forme un recouvrement de X par des sous-graphes finis. On définit le nerf de ce recouvrement, qu'on note $\mathcal{N}_{n,k}$, comme étant le graphe dont les sommets

sont les sous-graphes X_α formant le recouvrement et deux sommets X_α et X_β forment une arête si $\mathrm{X}_\alpha \cap \mathrm{X}_\beta \neq \emptyset$, ce qui est équivaut d'après la proposition précédente à ce que α et β forment une arête dans Y. On en déduit :

Corollaire 5.18. *Comme G_n-graphe dirigé, $\mathcal{N}_{n,k}$ est canoniquement isomorphe à* Y.

5.5 Représentations cuspidales de G_n et cohomologie des graphes $\mathrm{X}_{n,k}$

Dans cette section, nous fixons une représentation irréductible (π, V) de G_n de caractère central trivial qu'on suppose générique et ne possédant pas de vecteurs non nuls fixes sous $\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^0)$. Soit $c(\pi)$ le conducteur de π. Pour tout sommet s (resp. arête a) de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$, on note Γ_s (resp. Γ_a) le stabilisateur de s (resp. a) dans G_n. En particulier, en notant s_0 (resp. a_0) le sommet (resp. arête) standard de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$, on a $\Gamma_{s_0} = \Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{c(\pi)})$ et $\Gamma_{a_0} = \Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{c(\pi)+1})$.

Lemme 5.19.

1. *Pour tout arête a de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$, $\dim \mathrm{V}^{\Gamma_a} = 1$.*
2. *Soit a une arête de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$ et s un sommet de a. Alors pour tout $v \in \mathrm{V}^{\Gamma_a}$, on a*

$$\sum_{g \in \Gamma_s/\Gamma_a} g.v = 0$$

Démonstration. Le premier point résulte du fait que pour toute arête a de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$, Γ_a est conjugué à $\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{c(\pi)})$ et d'après le théorème (2.25) page 25, l'espace des vecteurs de V fixés par $\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{c(\pi)})$ est de dimension un. Pour le deuxième point, il est clair que le vecteur $\sum_{g\in\Gamma_s/\Gamma_a} g.v$ est fixé par Γ_s, donc c'est le vecteur nul puisque Γ_s est conjugué à $\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{c(\pi)})$. □

Fixons un vecteur non nul v_0 de $\mathrm{V}^{\Gamma_{a_0}}$. Le vecteur v_0 est unique à un scalaire multiplicatif non nul près. Pour toute arête a de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$, on pose

$$v_a = g.v_0, \quad \text{où} \quad a = g.a_0 \qquad (5.1.5.1)$$

Comme l'action de G_n est transitive sur les arêtes de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$ et v_0 est fixé par Γ_{a_0}, alors le vecteur v_a est indépendant du choix de $g \in \mathrm{G}_n$ tel que $a = g.a_0$. Soit $\widetilde{\mathrm{V}}$ la représentation contragrediente de V. On définit une application

$$\widetilde{\Psi}_\pi : \widetilde{\mathrm{V}} \longrightarrow \mathrm{C}^1(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$$

par $\widetilde{\Psi}_\pi(\varphi)(a) = \varphi(v_a)$. D'après (5.1.5.1), l'application $\widetilde{\Psi}_\pi$ est G_n-équivariante.

Lemme 5.20.

1. *L'image de* $\widetilde{\Psi}_\pi$ *est contenue dans* $\mathcal{H}_\infty(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$.
2. *L'application* $\widetilde{\Psi}_\pi$ *est injective.*

Démonstration. La preuve que nous proposons ci-dessous généralise la démonstration du lemme (3.2.3), [Bro08]. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(\widetilde{\Psi}_\pi) \subset \mathcal{H}(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$. Donc il faut montrer que pour tout $\varphi \in \widetilde{V}$, $(\varphi(v_a))_{a\in X^1_{n,c(\pi)}}$ est une forme harmonique sur $X_{n,c(\pi)}$, c'est-à-dire,

$$\sum_{s\in a}[a:s]\varphi(v_a)=0, \text{ pour tout } s\in X^0_{n,c(\pi)}$$

Soit s un sommet de $X_{n,c(\pi)}$. Notons $\bar{s}$ l'enveloppe convexe dans $\mathcal{B}(G_n)$ des sommets formant le chemin s. On sait bien que le stabilisateur point par point de $\bar{s}$ dans G_n (qui coincide avec le stabilisateur Γ_s de s dans G_n) agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant $\bar{s}$. Il en résulte que Γ_s agit transitivement sur

$$A_s^+=\{a\in X^1_{n,c(\pi)}/\ a^+=s\} \text{ et } A_s^-=\{a\in X^1_{n,c(\pi)}/\ a^-=s\}$$

Fixons $a_s^+\in A_s^+$ et $a_s^-\in A_s^-$. Alors

$$\sum_{s\in a}[a:s]\varphi(v_a)=\varphi(\sum_{a\in A_s^+}v_a-\sum_{a\in A_s^-}v_a)$$

$$=\varphi(\sum_{k\in\Gamma_s/\Gamma_{a_s^+}}kv_{a_s^+}-\sum_{k\in\Gamma_s/\Gamma_{a_s^-}}kv_{a_s^-})=0$$

D'après le lemme (5.19). □

En passant aux représentations contragrédientes , on obtient un opérateur d'entrelacement :

$$\widetilde{\widetilde{\Psi}}_\pi : \widetilde{\widetilde{H}}^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})\longrightarrow\widetilde{\widetilde{V}}$$

Pour toute représentation W de G_n, on a une injection canonique $W\longrightarrow\widetilde{\widetilde{W}}$. Il s'agit d'un isomorphisme si et seulement si W est admissible. En particulier, V et $\widetilde{\widetilde{V}}$ sont canoniquement isomorphes puisque V est irréductible et donc admissible.

Théorème 5.21. *La restriction de* $\widetilde{\widetilde{\Psi}}_\pi$ *à* $H^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$ *définit un opérateur d'entrelacement non nul* $\Psi_\pi : H^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})\longrightarrow V\simeq\widetilde{\widetilde{V}}$, *donné par :*

$$\Psi_\pi(\bar{\omega})=\sum_{a\in X^1_{n,c(\pi)}}\omega(a)v_a$$

où pour tout $\omega\in C^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$, $\bar{\omega}$ *désigne l'image de* ω *dans* $H^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$. *En particulier, la représentation* (π,V) *est un quotient de l'espace de cohomologie* $H^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$. *De plus, si* (π,V) *est cuspidale, alors elle se plonge dans l'espace de cohomologie* $H^1_c(X_{n,c(\pi)},\mathbb{C})$

Démonstration. Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de G_n de caractère central trivial. L'application Ψ_π est G_n-équivariante. En effet, pour tout $\omega \in \mathrm{C}^1(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$ et pour tout $g \in \mathrm{G}_n$ on a

$$\Psi_\pi(g.\bar{\omega}) = \sum_{a \in \mathrm{X}^1_{n,c(\pi)}} g.\omega(a)v_a = \sum_{a \in \mathrm{X}^1_{n,c(\pi)}} \omega(g^{-1}.a)v_a = \sum_{a \in \mathrm{X}^1_{n,c(\pi)}} \omega(a)v_{g.a}$$

or pour toute arête a de $\mathrm{X}_{n,c(\pi)}$ et pour tout $g \in \mathrm{G}_n$, on a $v_{g.a} = g.v_a$. Donc

$$\Psi_\pi(g.\bar{\omega}) = \sum_{a \in \mathrm{X}^1_{n,c(\pi)}} \omega(a)g.v_a = g.\Psi_\pi(\bar{\omega})$$

L'application Ψ_π est un opérateur d'entrelacement non nul. En effet, soit $\omega_0 \in \mathrm{C}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$ la fonction qui vaut 1 en a_0 et qui vaut 0 ailleurs. On a

$$\Psi_\pi(\overline{\omega}_0) = \sum_{a \in \mathrm{X}^1_{n,c(\pi)}} \omega_0(a)v_a = v_{a_0} = v_0 \neq 0$$

D'où Ψ_π est un opérateur d'entrelacement non nul. En particulier, Ψ_π est surjective puisque V est irréductible. La représentation π étant cuspidale, elle est générique. Donc d'après le premier point c'est un quotient de $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$. Or π est un projective dans la catégorie des représentations lisses de G_n de caractère cental trivial, alors π se plonge dans l'espace $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$. □

Théorème 5.22. *Soit* (π, V) *une représentation cuspidale irréductible de* G_n *de caractère central trivial, alors on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\pi, \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})) = 1$$

Démonstration. Soit (π, V) une représentation cuspidale de G_n de caractère central trivial et de conducteur $c(\pi) = k$. Ecrivons le complexe de cochaînes pour le graphe $\mathrm{X}_{n,k}$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C}) \xrightarrow{d} \mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Le groupe G_n agit transitivement sur l'ensemble des sommets (resp. arêtes) de $\mathrm{X}_{n,k}$, donc les G_n-modules $\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C})$ et $\mathrm{C}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C})$ s'identifient à $c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^k)}^{\mathrm{G}_n} 1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^k)}$ et $c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})}^{\mathrm{G}_n} 1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})}$ respectivement. Par définition, l'espace $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$ est le conoyau de l'application cobord d. On a donc un opérateur d'entrelacement surjectif

$$p : c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})}^{\mathrm{G}_n} 1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})} \longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi)}, \mathbb{C})$$

Par conséquent, on a une injection

$$p^* : \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}, \mathbb{C}), \pi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})}^{\mathrm{G}_n} 1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k+1})}, \pi)$$

définie par, $p^*(f) = f \circ p$. D'autres part, d'après la réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}^{\mathrm{G}_n} 1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}(1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}, \pi) \simeq \mathrm{V}^{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}$$

Or d'après le théorème (2.25) page 25, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{V}^{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})} = 1$, donc

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}),\pi) \leqslant \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}^{\mathrm{G}_n} 1_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k+1})}, \pi) = 1$$

De plus, la représentation π étant cuspidale, elle est projectif dans la catégorie des représentations lisses de G_n de caractère central trivial. Les deux espaces $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}),\pi)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\pi, \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}))$ sont donc isomorphes, le deuxième étant non nul, on obtient

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n}(\pi, \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,c(\pi),\mathbb{C}},\mathbb{C})) = 1$$

□

5.6 Les représentations $H^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C})$, pour $k \geqslant 1$

Dans la suite on fixe $k \geqslant 1$. Pour simplifier on continue de noter X pour désigner $\mathrm{X}_{n,k}$, X_α pour désigner son sous-complexe fini défini précédemment, et Y pour désigner le complexe $\mathrm{X}_{n,k-1}$.
La réunion disjointe $\mathrm{X}^1 = \bigsqcup_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{X}^1_\alpha$ induit un isomorphisme :

$$\mathrm{C}^1_c(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{C}^1(\mathrm{X}_\alpha,\mathbb{C})$$

défini par, $f \longmapsto (f_{|\mathrm{C}^1(\mathrm{X}_\alpha,\mathbb{C})})_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}$. D'autres part, la réunion non disjointe $\mathrm{X}_0 = \bigcup_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{X}^0_\alpha$ induit une injection

$$\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X},\mathbb{C}) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha,\mathbb{C})$$

définie par, $f \longmapsto (f_{|\mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha,\mathbb{C})})_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}$.

On obtient le diagramme commutatif de G_n-modules suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{H}^0_c(\mathrm{X}) & \longrightarrow & \oplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & coker(j) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}) & \xrightarrow{j} & \oplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}\mathrm{C}^0(X_\alpha) & \longrightarrow & coker(j) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle d} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus_{d_\alpha}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{C}^1_c(\mathrm{X}) & \longrightarrow & \oplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}\mathrm{C}^1(X_\alpha) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}) & \longrightarrow & \oplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}\mathrm{H}^1(X_\alpha) & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

où pour tout $\alpha \in \mathrm{Y}^0$, d_α désigne l'application cobord $\mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha) \to \mathrm{C}^1(X_\alpha)$. La réalisation géométrique de X étant connexe et non compacte (puisque X n'est pas fini), on a $\mathrm{H}^0_c(X) = 0$. Le lemme du serpent nous fournit la suite exacte des noyaux et conoyaux :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^1} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_\alpha) \longrightarrow coker j \longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^{(0)}} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha) \longrightarrow 0$$

On obtient la suite exacte courte suivante :

$$0 \longrightarrow coker\varphi \longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha) \longrightarrow 0 \tag{5.1.6.1}$$

Proposition 5.23. *On a un isomorphisme canonique de* G_n*-modules lisses,*

$$coker\varphi \simeq \mathrm{H}^1_c(\mathrm{Y})$$

Démonstration. Pour montrer l'ismorphisme ci-dessus, on vérifie qu'on a deux isomorphismes G_n-équivariants, $\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} H^0(\mathrm{X}_\alpha) \simeq \mathrm{C}^0_c(\mathrm{Y})$ et $\mathrm{coker}(j) \simeq \mathrm{C}^1_c(\mathrm{Y})$, et que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} H^0(\mathrm{X}_\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{coker}(j) \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathrm{C}^0_c(\mathrm{Y}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{C}^1_c(\mathrm{Y}) \end{array}$$

commute. Pour le premier isomorphisme, on définit une application linéaire et G_n-équivariante

$$\mathrm{A} : \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} H^0(\mathrm{X}_\alpha) \longrightarrow \mathrm{C}^0_c(\mathrm{Y})$$

par, $\mathrm{A}(x)(\alpha) = x_\alpha$ pour tout $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}$. Pour tout sommet α le complexe X_α est connexe donc l'espace $H^0(\mathrm{X}_\alpha)$ s'identifie à l'espace des fonctions constantes sur l'ensemble des sommets de X_α. Donc l'application A est bien définie. Il est clair que A est linéaire injective et G_n-équivariante. Soit $f \in \mathrm{C}^0_c(\mathrm{Y})$. Posant $x = (f(\alpha))_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}$ qui est bien dans $\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} H^0(\mathrm{X}_\alpha)$. On a $\mathrm{A}(x) = f$. Ainsi l'application A est surjective, c'est bien donc un isomorphisme G_n-équivariant. Pour le deuxième isomorphisme, on définit une application linéaire et G_n-équivariante

$$\mathrm{B} : \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha) \longrightarrow \mathrm{C}^1_c(\mathrm{Y})$$

par, $\mathrm{B}(x)(a) = x_{a^+}(a) - x_{a^-}(a)$, pour tout $x = (x_\alpha) \in \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha)$ et $a \in \mathrm{Y}^1$, où on identifie Y^1 avec X^0. Montrons que $\ker(\mathrm{B}) = j(\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}))$. Soit $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \in \ker(\mathrm{B})$. Pour tout $a \in \mathrm{Y}^1$, on a $x_{a^+}(a) = x_{a^-}(a)$. On définit un élément $f \in \mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}, \mathbb{C})$ par $f(a) = x_{a^+}(a) = x_{a^-}(a)$, pour tout $a \in \mathrm{Y}^1 = \mathrm{X}^0$. Soit $\alpha \in \mathrm{Y}^0$. Pour tout $a \in \mathrm{X}^0_\alpha$, on a

$a^+ = \alpha$ ou $a^- = \alpha$. Donc $f(a) = x_\alpha(a)$ pour tout $a \in \mathrm{X}^0_\alpha$. Par suite, pour tout $\alpha \in \mathrm{Y}^0$, la restriction de f à X^0_α coincide avec x_α. Donc $x \in j(\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}))$. D'où on a l'inclusion $\ker(\mathrm{B}) \subset j(\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}))$. Réciproquement, soit $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \in j(\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}))$. Il existe $f \in \mathrm{C}^0_c(\mathrm{X})$ telle que pour tout $\alpha \in \mathrm{Y}^0$, $x_\alpha = f_{|C^0(\mathrm{X}_\alpha)}$. Donc pour tout $a \in \mathrm{Y}^1$, on a

$$\mathrm{B}(x)(a) = x_{a^+}(a) - x_{a^-}(a) = f(a) - f(a) = 0$$

par suite, $x \in \ker(\mathrm{B})$. D'où on a l'inclusion $j(\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X})) \subset \ker(\mathrm{B})$. Finalement, on a l'égalité $\ker(\mathrm{B}) = j(\mathrm{C}^0_c(\mathrm{X}))$. Montrons que l'application B est surjective. Soit $\omega \in \mathrm{C}^1_c(\mathrm{Y})$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{Y}^0$, on définit un élément $x_\alpha \in \mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha)$ par

$$x_\alpha(a) = \begin{cases} 2\omega(a), & \text{si } a^+ = \alpha \\ \omega(a), & \text{si } a^- = \alpha \end{cases}$$

Comme ω est à support fini, $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}$ appartient à la somme directe $\oplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}\mathrm{C}^0(\mathrm{X}_\alpha)$. De plus, pour tout $a \in \mathrm{Y}^1$, $\mathrm{B}(x)(a) = x_{a^+}(a) - x_{a^-}(a) = 2\omega(a) - \omega(a) = \omega(a)$. Donc $\mathrm{B}(x) = \omega$. D'où B est surjective. On en déduit que l'application $\overline{\mathrm{B}}$ déduite de B par passage au quotient est un isomorphisme de G_n-modules lisses de $\mathrm{coker}(j)$ dans $\mathrm{C}^1_c(\mathrm{Y})$. Montrons que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} H^0(\mathrm{X}_\alpha) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{coker}(j) \\ {\scriptstyle \mathrm{A}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\mathrm{B}}} \\ \mathrm{C}^0_c(\mathrm{Y}) & \xrightarrow{d} & \mathrm{C}^1_c(\mathrm{Y}) \end{array}$$

commute. Soit $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}$ un élément de $\oplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}H^0(\mathrm{X}_\alpha)$. Pour tout $a \in \mathrm{Y}^1$, on a

$$(d \circ \mathrm{A})(x)(a) = d(\mathrm{A}(x))(a) = \mathrm{A}(x)(a^+) - \mathrm{A}(x)(a^-) = x_{a^+}(a) - x_{a^-}(a)$$

et on a

$$(\overline{\mathrm{B}} \circ \varphi)(x)(a) = \overline{\mathrm{B}}(\varphi(x))(a) = \mathrm{B}(x)(a) = x_{a^+}(a) - x_{a^-}(a)$$

D'où le diagramme est commutatif. Par conséquent, on a l'isomorphisme de G_n-modules lisses $\mathrm{coker}(\varphi) \simeq \mathrm{coker}(d) = \mathrm{H}^1_c(\mathrm{Y})$.

□

Proposition 5.24. *Pour tout $k \geqslant 1$, on a un isomorphisme de G_n-modules lisses,*

$$\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}) \simeq \mathrm{H}^1_c(\mathrm{Y}) \oplus c\text{-}\mathrm{ind}_{\Gamma_\alpha}^{\mathrm{G}_n}\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha)$$

pour tout sommet α de Y et où Γ_α désigne le stabilisateur de α dans G_n.

Démonstration. D'après la suite exacte courte (5.1.6.1) et la proposition (5.23), on a la suite exacte de G_n-modules :

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}) \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0} \mathrm{H}^0(\mathrm{X}_\alpha) \longrightarrow 0 \qquad (5.1.6.2)$$

Comme G_n agit transitivement sur les sommets de Y, le G_n-module $\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Y}^0}\mathrm{H}^0(\mathrm{X}_\alpha)$ s'identifie à l'induite compacte $\mathrm{ind}_{\mathscr{K}_\alpha}^{\mathrm{G}_n}\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha)$. Or, on sait bien que les induites compactes sont projectives dans la catégorie des représentations lisses de G_n, donc la suite exacte (5.1.6.2) est scindée, ce qui donne le résultat. □

5.7 Les représentations $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,0},\mathbb{C})$

L'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_3)$ possède une propriété particulière par rapport à l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ pour $n\geqslant 4$: les arêtes de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_3)$ ont toutes la même longueur. Ceci implique que $\mathrm{X}_{3,0}$, vu comme graphe, coincide avec le 1-squelette $(\mathcal{B}(\mathrm{G}_3))_{(1)}$ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_3)$. Par contre, pour $n\geqslant 4$, $\mathrm{X}_{n,0}$ est un sous-graphe strict du 1-squelette $(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))_{(1)}$. Plus précisement, $\mathrm{X}_{n,0}$ a même ensemble de sommets que $(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))_{(1)}$ mais ses arêtes non orientées sont les arêtes de $(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))_{(1)}$ de type $(1,n-1)$.

Soit $\mathcal{X}_n=|\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)|$ la réalisation géométrique de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. C'est un espace localement compact et connexe puisque l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$ est localement fini et connexe. La réalisation géométrique $\mathrm{F}_n=|(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))_{(1)}|$ du 1-squelette est un sous-espace fermé de $\mathcal{X}_n$ et l'ouvert $\mathcal{U}_n=\mathcal{X}_n-\mathrm{F}_n$ est la réunion disjointe des chambres ouvertes

$$(5.1.7.1)\quad \mathcal{U}_n=\bigsqcup_{\mathrm{C}\in\mathcal{C}h_{\mathcal{X}_n}}\mathrm{C}$$

où $\mathcal{C}h_{\mathcal{X}_n}$ est l'ensemble des chambres ouvertes de $\mathcal{X}_n$. La longue suite exacte de paires d'espaces topologiques en cohomologie s'écrit, (théorème 4.19, page 59).

$$(5.1.7.2)\quad \ldots\longrightarrow \mathrm{H}^p_c(\mathcal{U}_n)\longrightarrow \mathrm{H}^p_c(\mathcal{X}_n)\longrightarrow \mathrm{H}^p_c(\mathrm{F}_n)\longrightarrow \mathrm{H}^{p+1}_c(\mathcal{U}_n)\longrightarrow\ldots$$

D'après le théorème de Borel-Serre (théorème 4.25, page 64), on a $\mathrm{H}^p_c(\mathcal{X}_n)=0$ pour $p\neq n-1$ et $\mathrm{H}^{n-1}_c(\mathcal{X}_n)$ s'identifie à la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_{\mathrm{G}_n}$. Alors, pour $n=3$, de la longue suite exacte (5.1.7.2), on obtient la suite exacte courte de G_3-modules :

$$(5.1.7.3)\quad 0\longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{F}_3)\longrightarrow \mathrm{H}^2_c(\mathcal{U}_3)\longrightarrow \mathrm{H}^2_c(\mathcal{X}_3)\longrightarrow 0$$

La famille $(\mathrm{C})_{\mathrm{C}\in\mathcal{C}h_{\mathcal{X}_3}}$ est un recouvrement de $\mathcal{U}_3$ par des ouverts deux à deux disjoints, donc $\mathrm{H}^2_c(\mathcal{U}_3)\backsimeq\bigoplus_{\mathrm{C}\in\mathcal{C}h_{\mathcal{X}_3}}\mathrm{H}^2_c(\mathrm{C})$ (voir [Mas78], théorème 8, page 310). D'autre part, le groupes G_3 agit transitivement sur l'ensemble $\mathcal{C}h_{\mathcal{X}_3}$ des chambres ouvertes de $\mathcal{X}_3$. Ainsi, comme G_3-module, la représentation $\mathrm{H}^2_c(\mathcal{U}_3)$ s'identifie à l'induite compacte $c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathcal{K}(I)}^{\mathrm{G}_3}\varepsilon$, où $\mathcal{K}(I)$ est le normalisateur dans G_3 du sous-groupe d'Iwahori (stabilisateur global dans G_3 de la chambre standard) et ε est le caractère signature induit par l'action de $\mathcal{K}(I)$ sur les sommets de la chambre standard.

On obtient enfin la suite exacte de G_3-modules,

$$(5.1.7.4)\quad 0\longrightarrow \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{3,0})\xrightarrow{\rho} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathcal{K}(I)}^{\mathrm{G}_3}\varepsilon\xrightarrow{\sigma}\mathrm{St}_{\mathrm{G}_3}\longrightarrow 0$$

Proposition 5.25. *À un scalaire non nul près, il existe un unique opérateur d'entrelacement non nul σ de l'induite compacte $c\text{-ind}_{\mathcal{K}(I)}^{\mathrm{G}_3}\varepsilon$ dans la représentation de Steinberg $\mathrm{St}_{\mathrm{G}_3}$. Par conséquent, le G_3-module $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}_{3,0})$ est le noyau de l'unique morphisme σ.*

Démonstration. Par la réciprocité de Frobenius on a,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_3}(c\text{-ind}_{\mathcal{K}(I)}^{\mathrm{G}_3}\varepsilon, \mathrm{St}_{\mathrm{G}_3}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(I)}(\varepsilon, \mathrm{St}_{\mathrm{G}_3}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_I(1_I, \mathrm{St}_{\mathrm{G}_3}) \simeq (\mathrm{St}_{\mathrm{G}_3})^I$$

On sait que la dimension de l'espace des points fixes $(\mathrm{St}_{\mathrm{G}_3})^I$ de la Steinberg sous l'Iwahori est égale à 1. Alors, l'espace $\mathrm{Hom}_I(1_I, \mathrm{St}_{\mathrm{G}_3})$ est de dimension un. Comme l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_3}(c\text{-ind}_{\mathcal{K}(I)}^{\mathrm{G}_3}\varepsilon, \mathrm{St}_{\mathrm{G}_3})$ est non nul et qu'il se plonge dans $\mathrm{Hom}_I(1_I, \mathrm{St}_{\mathrm{G}_3})$, sa dimension est égale à 1. D'où le résultat. □

Pour $n \geqslant 4$, $\mathrm{X}_{n,0}$ est un sous-graphe strict du 1-squelette $(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(1)}$. Sa réalisation géométrique $\mathrm{E}_n := |\mathrm{X}_{n,0}|$ est un sous-espace fermé strict de $\mathcal{X}_n$ (resp. $\mathrm{F}_n = |(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))_{(1)}|$). L'idée qu'on a utilisé dans le cas $n = 3$ ne fonctionne plus pour $n \geqslant 4$, puisque $\mathrm{X}_{n,0}$ est un sous-graphe strict du 1-squelette et que $\mathcal{X}_n - \mathrm{E}_n$ n'est plus la réunion des chambres ouvertes de l'immeuble topologique. Pour le moment, nous ne sommes pas parvenus à donner une description de la représentation $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}_{n,0}, \mathbb{C})$. Mais ce qui est clair, c'est que la représentation $\mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}_{n,0}, \mathbb{C})$ est une sous-représentation de $\mathrm{H}_c^1((\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(1)}, \mathbb{C})$. En effet, si on note E le sous-graphe du 1-squelette de l'immeuble dont arêtes sont les arêtes de l'immeuble de type distinct de $(1, n-1)$. Alors, on remarque que le 1-squelette $(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(1)}$ est réunion de $\mathrm{X}_{n,0}$ et de E ($\mathrm{X}_{n,0}$ vu comme graphe non dirigé) et que l'intersection $\mathrm{X}_{n,0} \cap \mathrm{E}$ est le 0-squelette de l'immeuble. De plus $\mathrm{X}_{n,0}$ et E sont deux sous-graphes G_n-invariants. Donc la suite exacte de Mayer-Vietoris nous donne,

$$\mathrm{H}_c^p((\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(1)}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^p(\mathrm{X}_{n,0}) \oplus \mathrm{H}_c^p(\mathrm{E}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^p((\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(0)}) \longrightarrow \mathrm{H}_c^{p+1}((\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(1)})$$

On en déduit l'isomorphisme de G_n-modules $\mathrm{H}_c^p((\mathcal{B}(\mathrm{G}_n))^{(1)}) \simeq \mathrm{H}_c^1(\mathrm{X}_{n,0}) \oplus \mathrm{H}_c^1(\mathrm{E})$.

5.8 Détermination des représentations induites

Soient $k \geqslant 1$ et $\alpha = (s_0, ..., s_{k-1})$ le sommet standard de $\mathrm{Y} = \mathrm{X}_{n,k-1}$. Dans cette partie, notre but est de déterminer la structure du Γ_α-module $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha)$, où $\Gamma_\alpha = \Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k-1})$. Le stabilisateur point par point du complexe simplicial X_α est le sous-groupe normal de $\Gamma_{k-1} := \Gamma_\alpha$, qu'on note Γ_α^0 ou parfois $\Gamma_n^0(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k-1})$ donné par,

$$\Gamma_n^0(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k-1}) = \mathrm{F}^\times \left(\begin{array}{cccc|c} 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \cdots & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathfrak{p}_\mathrm{F} \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \vdots \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \cdots & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & 1+\mathfrak{p}_F & \mathfrak{p}_\mathrm{F} \\ \hline \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & \cdots & \cdots & \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F} \end{array}\right)$$

Le groupe Γ_α^0 agit trivialement sur le complexe simplicial X_α et donc aussi sur l'espace $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha)$. Par conséquent, déterminer la structure du Γ_α-module $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha)$ revient à déterminer sa structure comme G_α-module, où G_α est le groupe quotient $\Gamma_\alpha/\Gamma_\alpha^0$. Le groupe G_α est fini puisque c'est un quotient d'un groupe compact par un sous-groupe ouvert. Il s'identifie au groupe fini

$$\mathrm{A}_{n-1}(k_\mathrm{F}) := (k_\mathrm{F}^{n-1} \oplus k_\mathrm{F}^{n-1}) \rtimes \mathrm{GL}(n-1, k_\mathrm{F})$$

où $\mathrm{A}_{n-1}(k_\mathrm{F})$ est le produit semi-direct du groupe abélien $k_\mathrm{F}^{n-1} \oplus k_\mathrm{F}^{n-1}$ par $\mathrm{GL}(n-1, k_\mathrm{F})$ pour l'action suivante :

$$\mathrm{GL}(n-1, k_\mathrm{F}) \times (k_\mathrm{F}^{n-1} \oplus k_\mathrm{F}^{n-1}) \longrightarrow k_\mathrm{F}^{n-1} \oplus k_\mathrm{F}^{n-1}$$

définie par, $g.(x,y) = (gx, {}^t g^{-1} y)$ pour tout $g \in \mathrm{GL}(n-1, k_\mathrm{F})$ et tout $(x,y) \in k_\mathrm{F}^{n-1} \times k_\mathrm{F}^{n-1}$. Pour ne pas alourdir les notations, pour tout $x \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathcal{O}_\mathrm{F})$ (resp. $y \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathcal{O}_\mathrm{F})$, $z \in 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{GL}(n-1, \mathcal{O}_\mathrm{F})$) on note aussi $x \in (k_\mathrm{F})^{n-1}$ (resp. $y \in \mathrm{M}_{1,n-1}(k_\mathrm{F})$, $z = 1$ et $g \in \mathrm{GL}(n-1, k_\mathrm{F})$) le réduit de x (resp. $y \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathcal{O}_\mathrm{F})$, $z \in 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{GL}(n-1, \mathcal{O}_\mathrm{F})$) modulo $\mathfrak{p}_\mathrm{F}$. On définit un morphisme de groupes

$$\Psi : \Gamma_\alpha \longrightarrow (k_\mathrm{F}^{n-1} \times k_\mathrm{F}^{n-1}) \rtimes \mathrm{GL}(n-1, k_\mathrm{F})$$

par

$$\Psi(\begin{pmatrix} g & x \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1} y & z \end{pmatrix}) = ((x, {}^t g^{-1}\ {}^t y), g)$$

pour tout $\begin{pmatrix} g & x \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1} y & z \end{pmatrix} \in \Gamma_\alpha$, avec $g \in \mathrm{GL}(n-1, \mathcal{O}_\mathrm{F})$, $x \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathcal{O}_\mathrm{F})$, $y \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathcal{O}_\mathrm{F})$ et $z \in 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F}$. On a d'une part

$$\Psi(\begin{pmatrix} g & x \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1} y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g' & x' \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1} y' & z' \end{pmatrix}) = \Psi(\begin{pmatrix} gg' + \varpi_\mathrm{F}^{k-1} xy' & gx' + xz' \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1}(yg' + zy') & \varpi_\mathrm{F}^{k-1} yx' + zz' \end{pmatrix})$$

$$= ((x + gx', {}^t g^{-1}\ {}^t y +^t g^{-1}\ {}^t g'^{-1}\ {}^t y'), gg')$$

et d'autre part

$$\Psi(\begin{pmatrix} g & x \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1} y & z \end{pmatrix})\Psi(\begin{pmatrix} g' & x' \\ \varpi_\mathrm{F}^{k-1} y' & z' \end{pmatrix}) = ((x, {}^t g^{-1}\ {}^t y), g).((x', {}^t g'^{-1}\ {}^t y'), g')$$

$$= ((x, {}^t g^{-1}\ {}^t y) + g.(x', {}^t g'^{-1}\ {}^t y'), gg') = ((x + gx', {}^t g^{-1}\ {}^t y +^t g^{-1}\ {}^t g'^{-1}\ {}^t y'), gg')$$

D'où Ψ est bien un morphisme de groupes. De plus, il est clair que Ψ est surjective et que son noyau est égale à Γ_α^0. Par suite, par passage au quotient, Ψ induit un isomorphisme

de G_α dans le produit semi-direct $(k_{\mathrm{F}}^{n-1} \times k_{\mathrm{F}}^{n-1}) \rtimes \mathrm{GL}(n-1, k_{\mathrm{F}})$.

On a vu dans la section (5.3), page 97, que X_α est un graphe biparti complet basé sur deux ensembles de sommets formés de q^{n-1} éléments. Par conséquent, la caractéristique d'Euler du graphe X_α est donnée par

$$\chi(\mathrm{X}_\alpha) = 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha) = 2q^{n-1} - (q^{n-1})^2$$

ce qui donne

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha) = (q^{n-1})^2 - 2q^{n-1} + 1 = (q^{n-1} - 1)^2$$

Soit $\mathbb{C}[\mathrm{X}_\alpha^1]$ l'espace des fonctions de X_α^1 dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ l'espace des 1-cochaines harmoniques sur X_α :

$$\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha) = \{f \in \mathbb{C}[\mathrm{X}_\alpha^1] \ , \quad \sum_{b \in \mathrm{X}_\alpha^1,\ s \in b} [b : s] f(b) = 0 \ , \text{ pour tout } s \in \mathrm{X}_\alpha^0\}$$

Dans notre cas, une fonction $f : \mathrm{X}_\alpha^1 \longrightarrow \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ si et seulement si :

1. $\displaystyle\sum_{x \in \mathcal{P}_\alpha^-} f(x, s_0, ..., s_{k-1}, y) = 0$, pour tout $y \in \mathcal{P}_\alpha^+$
2. $\displaystyle\sum_{y \in \mathcal{P}_\alpha^+} f(x, s_0, ..., s_{k-1}, y) = 0$, pour tout $x \in \mathcal{P}_\alpha^-$

D'après un résultat classique (voir [Bro08], lemme (1.3.2)), comme G_α-module, $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha)$ est isomorphe à la contragrédiente du G_α-module $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$. Un calcul simple montre que l'ensemble $\mathcal{P}_\alpha^-$ s'identifie à $k_{\mathrm{F}}^{n-1} \times k_{\mathrm{F}}^{n-1}$ de sorte qu'un élément γ de $\widetilde{\Gamma}_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k-1})$ agit par,

$$\begin{pmatrix} g & x \\ \varpi_{\mathrm{F}}^{k-1} y & z \end{pmatrix} .(u, v) = (x + gu, {}^t g^{-1} v - {}^t g^{-1t} y)$$

pour $g \in \mathrm{GL}(n-1, \mathcal{O}_{\mathrm{F}})$, $x \in \mathrm{M}_{n-1,1}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})$, $y \in \mathrm{M}_{1,n-1}(\mathcal{O}_{\mathrm{F}})$ et $z \in \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^\times$. De plus, une fonction $f \in \mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ si et seulement si f vérifie la condition (Harm) :

1. $\displaystyle\sum_{x \in k_{\mathrm{F}}^{n-1}} f(x, y) = 0$, pour tout $y \in k_{\mathrm{F}}^{n-1}$
2. $\displaystyle\sum_{y \in k_{\mathrm{F}}^{n-1}} f(x, y) = 0$, pour tout $x \in k_{\mathrm{F}}^{n-1}$

L'espace $\mathbb{C}[\mathrm{X}_\alpha]$ admet pour base les fonctions de la forme $\chi_1 \otimes \chi_2(u,v) = \chi_1(u)\chi_2(v)$, où pour $i = 1, 2$, χ_i parcourt l'ensemble des caractères de $(k_{\mathrm{F}}^{n-1}, +)$. On voit qu'une fonction $f = \chi_1 \otimes \chi_2$ vérifie la condition (Harm) si et seulement $\chi_1 \not\equiv 1$ et $\chi_2 \not\equiv 1$. De telles fonctions forment une famille libre de $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ et leur nombre est $(q^{n-1}-1)^2$, et donc elles forment une base de cet espace.
Contrairement au cas $n = 2$ (voir [Bro13],6, page 519), une droite engendrée par une fonction $\chi_1 \otimes \chi_2 \in \mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ n'est pas G_α-invariante. En effet, pour $\gamma \in \widetilde{\Gamma}_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k-1})$, avec

$$\gamma = \begin{pmatrix} g & x \\ \varpi_{\mathrm{F}}^{k-1} y & z \end{pmatrix}$$

on a la relation

$$\gamma.(\chi_1 \otimes \chi_2)(u,v) = \chi_1(g^{-1}u)\chi_2({}^t gv)\chi_1(g^{-1}x)^{-1}\chi_2({}^t gy)$$

Pour déterminer les constituants irréductibles du G_α-module $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ on va tout d'abord déterminer les orbites de l'action de $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ sur le groupe des caractères de $(k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}, +)$ qu'on note $\mathrm{C}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$. On identifie $\mathrm{C}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ avec le groupe $(k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}, +)$ de la façon suivante. On fixe un caractère non trivial Ψ du groupe additif de k_{F} et on définit un isomorphisme de groupes, par :

$$f : k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1} \longrightarrow \mathrm{C}_{n-1}(k_{\mathrm{F}}),$$

où pour tout (x,y) dans $k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}$, $f(x,y)$ est le caractère donné par,

$$f(x,y)(u,v) = \Psi(x_1u_1 + ... + x_nu_n)\Psi(y_1v_1 + ... + y_nv_n)$$

Par un calcul simple, on vérifie que l'action de $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ sur $k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}$ est donnée par $\gamma.(u,v) = ({}^t g^{-1}u, gv)$ pour tout $\gamma = ((x,y),g) \in \mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ et tout $(u,v) \in k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}$. Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des vecteurs $(u,v) \in k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}$ tel que $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Il est clair que $\mathscr{E}$ est stable sous l'action de $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$.

Lemme 5.26. *Les orbites de $\mathscr{E}$ sous l'action de $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ sont les ensembles*

$$\mathscr{E}_\lambda = \{(u,v) \in \mathscr{E} \ / \ \mathrm{tr}(u\,{}^t v) = \lambda\}$$

pour $\lambda \in k_{\mathrm{F}}$.

Démonstration. L'application $\varphi : \mathscr{E} \longrightarrow k_{\mathrm{F}}$ définie par, $\varphi(u,v) = \mathrm{tr}(u\,{}^t v) = {}^t uv$, est clairement $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$-équivariante et surjective. L'application φ est un invariant total de l'action de $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ sur $\mathscr{E}$. En effet, soit $(u,v),(x,y) \in \mathscr{E}$ tels que $\varphi(u,v) = \varphi(x,y)$, c'est-à-dire : les deux matrices $u\,{}^t v$ et $x\,{}^t y$ ont même trace. Montrons que pour de tels couples de vecteurs, il existe $\lambda \in k_{\mathrm{F}}^\times$ tel que $(x,y) = (\lambda^{-1}u, \lambda v)$. Les deux matrices ${}^t uv$

et ${}^t xy$ étant égales, leurs vecteurs lignes sont les mêmes, i.e. pour tout $i = 1, ..., n-1$, $u_i {}^t v = x_i {}^t y$. Comme $u, x \neq 0$, les deux vecteurs v et y sont colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in k_{\mathrm{F}}^{\times}$ tel que $y = \lambda v$. De même, de l'égalité des vecteurs colonnes des matrices $u {}^t v$ et $x {}^t y$, on obtient l'existence de $\lambda_1 \in k_{\mathrm{F}}^{\times}$ tel que $x = \lambda_1 u$. En écrivant l'égalité des deux matrices, on obtient $\lambda_1 = \lambda^{-1}$. D'où $(x, y) = (\lambda^{-1} u, \lambda v)$. Puisque $u {}^t v$ et $x {}^t y$ sont deux matrices de rang 1 et de même trace par hypothèse, elle sont semblables. Il existe donc $g \in \mathrm{GL}(n-1, k_{\mathrm{F}})$ tel que $({}^t g)^{-1} u {}^t v {}^t g = x {}^t y$, c'est-à-dire $({}^t g^{-1} u)^t (gv) = x {}^t y$. D'après ce qui précéde, il existe alors $\lambda \in k_{\mathrm{F}}^{\times}$ tel que $(x, y) = (\lambda^{-1 t} g^{-1} u, \lambda g v) = ({}^t h^{-1} u, hv)$, avec $h = \lambda g \in \mathrm{GL}(n-1, k_{\mathrm{F}})$, i.e. les couples (u, v) et (x, y) sont dans la même orbite. □

Pour $\lambda \in k_{\mathrm{F}}$, soit v_λ le vecteur de k_{F}^n donné par $v_\lambda = (\lambda, 0, ..., 0)$ si $\lambda \neq 0$ et $v_0 = (0, 1, 0, ..., 0)$. Un système de représentants de $\mathscr{E}$ pour l'action de $\mathrm{A}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ est donné par l'ensemble $\mathcal{S} = \{s_\lambda,\ \lambda \in k_{\mathrm{F}}\}$, où $s_\lambda = (x_\lambda, e_1)$, avec $e_1 = (1, 0, ..., 0)$ le premier vecteur de la base canonique de k_{F}^n. Pour $\lambda \in k_{\mathrm{F}}$, on note Ψ_λ le caractère du groupe $(k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}, +)$ correspondant à s_λ via l'identification du groupe des caractères $\mathrm{C}_{n-1}(k_{\mathrm{F}})$ avec $(k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}, +)$. Le caractère Ψ_λ est défini par : pour tous $x = (x_1, ..., x_{n-1})$, $y = (y_1, ..., y_{n-1}) \in k_{\mathrm{F}}^{n-1}$.

1. Pour $\lambda \neq 0$, $\Psi_\lambda(x, y) = \Psi(\lambda x_1)\Psi(y_1)$.
2. Pour $\lambda = 0$, $\Psi_0(x, y) = \Psi(x_2)\Psi(y_1)$.

Notons $\mathrm{G}_{\alpha,\lambda}$ le stabilisateur du caractère Ψ_λ dans G_α, alors on a

$$\mathrm{G}_{\alpha,\lambda} = (k_{\mathrm{F}}^{n-1} \oplus k_{\mathrm{F}}^{n-1}) \rtimes \mathrm{G}^0_{\alpha,\lambda}$$

avec :
-Pour $\lambda \neq 0$,

$$\mathrm{G}^0_{\alpha,\lambda} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathrm{GL}_{n-2}(k_{\mathrm{F}}) & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

-Pour $\lambda = 0$,

$$\mathrm{G}^0_{\alpha,0} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & k_{\mathrm{F}} & k_{\mathrm{F}} & \cdots & k_{\mathrm{F}} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & k_{\mathrm{F}} & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathrm{GL}_{n-3}(k_{\mathrm{F}}) & \\ 0 & k_{\mathrm{F}} & & & \end{array}\right)$$

Proposition 5.27. *Comme G_α-module, la décomposition en irréductibles de $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ est donnée par,*

$$\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha) = \bigoplus_{\lambda \in k_\mathrm{F}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_{\alpha,\lambda}}^{\mathrm{G}_\alpha} \Psi_\lambda$$

Démonstration. Ceci découle du lemme (5.26). □

D'après la proposition (4.24), le G_α-module $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)$ s'identifie à la représentation contragrédiente de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha, \mathbb{C})$, et donc $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha, \mathbb{C})$ s'identifie à $\mathcal{H}(\mathrm{X}_\alpha)^*$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha, \mathbb{C}) \backsimeq \bigoplus_{\lambda \in k_\mathrm{F}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_{\alpha,\lambda}}^{\mathrm{G}_\alpha} \widetilde{\Psi}_\lambda \tag{5.1.8.1}$$

où $\widetilde{\Psi}_\lambda$ est le caractère définie par, $\widetilde{\Psi}_\lambda(g) = \Psi_\lambda(g^{-1})$ pour tout $g \in \mathrm{G}_{\alpha,\lambda}$. Le groupe G_α est un quotient du groupe $\Gamma_\alpha = \Gamma_n(\mathfrak{p}_\mathrm{F}^{k-1})$, donc l'inflation de la décomposition (5.1.8.1) au groupe Γ_α, nous fournie la décomposition du Γ_α-module $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha, \mathbb{C})$:

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\alpha, \mathbb{C}) \backsimeq \bigoplus_{\lambda \in k_\mathrm{F}} \mathrm{Ind}_{\Gamma_{\alpha,\lambda}}^{\Gamma_\alpha} \widetilde{\Psi}_\lambda \tag{5.1.8.2}$$

où $\Gamma_{\alpha,\lambda}$, qu'on note aussi $\Gamma_{k-1,0}$ et $\Gamma_{k-1,1}$ pour $\lambda \neq 0$ et $\lambda = 0$ respectivement, est le sous-groupe de Γ_α donné par ;
-Pour $\lambda \neq 0$,

$$\Gamma_{k-1,0} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \cdots & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \hline \mathfrak{p}_\mathrm{F} & & & & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \vdots & & \mathrm{GL}_{n-2}(\mathcal{O}_\mathrm{F}) & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F} & & & & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \hline \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & \cdots & \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F} \end{array}\right)$$

-Pour $\lambda = 0$,

$$\Gamma_{k-1,1} = \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} & \cdots & \mathcal{O}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \cdots & \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \hline \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} & & & & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \vdots & \vdots & & \mathrm{GL}_{n-3}(\mathcal{O}_\mathrm{F}) & & \vdots \\ \mathfrak{p}_\mathrm{F} & \mathcal{O}_\mathrm{F} & & & & \mathcal{O}_\mathrm{F} \\ \hline \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & \mathfrak{p}_\mathrm{F}^k & \cdots & \cdots & 1+\mathfrak{p}_\mathrm{F} \end{array}\right)$$

Par conséquent, d'après la proposition (5.24), on a l'isomorphisme de G_n-modules,

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}) \backsimeq \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_{n,k-1},\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{\lambda\in k_{\mathrm{F}}} c\text{-ind}_{\Gamma_{k-1,\lambda}}^{\mathrm{G}_n} \widetilde{\Psi}_{\lambda,k-1} \tag{5.1.8.3}$$

5.9 Structure des G_n-modules lisses $\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C})$

Théorème 5.28. *Pour tout $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 0$, on a une décompostion en somme directe de G_n-modules,*

$$\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}) = \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,0},\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{\lambda\in k_{\mathrm{F}},q=0,\dots,k-1} c\text{-ind}_{\Gamma_{q,\lambda}}^{\mathrm{G}_n} \widetilde{\Psi}_{\lambda,q}$$

Démonstration. D'après la proposition (5.24), pour tout $k \geqslant 1$, on a un isomorphisme de G_n-modules lisses

$$\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}) \simeq \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k-1}) \oplus c\text{-ind}_{\Gamma_n(\mathfrak{p}_{\mathrm{F}}^{k-1})}^{\mathrm{G}_n} \mathrm{H}^1(\widetilde{\mathrm{X}}_{n,k-1})$$

et, d'après l'étude faite dans la section précédente, on a

$$\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k}) \simeq \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k-1}) \oplus \bigoplus_{\lambda\in k_{\mathrm{F}}} c\text{-ind}_{\Gamma_{k-1,\lambda}}^{\mathrm{G}_n} \widetilde{\Psi}_{\lambda,k-1}$$

Par une simple récurrence on obtient,

$$\mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,k},\mathbb{C}) = \mathrm{H}^1_c(\mathrm{X}_{n,0},\mathbb{C}) \oplus \bigoplus_{\lambda\in k_{\mathrm{F}},q=0,\dots,k-1} c\text{-ind}_{\Gamma_{q,\lambda}}^{\mathrm{G}_n} \widetilde{\Psi}_{\lambda,q}$$

□

Chapitre 6

Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$. Deuxième construction

6.1 Complexes de classes

Dans ce dernier chapitre, en s'inspirant de [Wag75] et [Ess10], on propose une deuxième construction d'espaces au-dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire p-adique. On commence par définir les espaces qu'on appele complexes de classes, puis on donne les propriétés basiques de ces complexes. Enfin en utilisant la suite spectrale de recouvrement on calcule la cohomologie à support compact de ces complexes et on montre que les représentations cuspidales de niveau zéro et de caractère central trivial sur $\mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times}$ de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ apparaissent dans la cohomologie d'un complexe simplicial fibré au-dessus de l'immeuble de Bruhat-Tits.

Notations 6.1.
Dans toute la suite, on fixe les notations suivantes :

– $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ *est le sous-groupe fermé de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F}) = \mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$ *donné par*

$$\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F}) = \{g \in \mathrm{G}_n(\mathrm{F})/\ \upsilon_{\mathrm{F}}(\det(g)) = 0\}$$

On a une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{G}_n(\mathrm{F}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

où $\varphi : \mathrm{G}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *est le morphisme de groupes défini par* $\varphi(g) = \upsilon_{\mathrm{F}}(\det(g))$.

– $\mathrm{T}(\mathrm{F})$ *le tore diagonal de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$, $\mathrm{T}^1(\mathrm{F}) = \mathrm{T}(\mathrm{F}) \cap \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$, *et* $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ *l'unique sous-groupe compact maximal de* $\mathrm{T}(\mathrm{F})$

$$\mathrm{T}^0(\mathrm{F}) = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n), \lambda_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{F}}^{\times}\}$$

$$\mathrm{T}^1(\mathrm{F}) = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n), \lambda_i \in \mathrm{F}^\times / \ \upsilon_\mathrm{F}(\lambda_1) + ... + \upsilon_\mathrm{F}(\lambda_n) = 0\}$$

Le groupe $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ *admet une filtration par des sous-groupes ouverts compacts*

$$\mathrm{T}_m(\mathrm{F}) = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n), \lambda_i \in 1 + \mathfrak{p}_\mathrm{F}^m\}, \quad m \geqslant 1$$

- $\mathrm{N}(\mathrm{F}) = \mathrm{N}_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}(\mathrm{T}(\mathrm{F}))$ *est le normalisateur dans* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *de* $\mathrm{T}(\mathrm{F})$ *et*

$$\mathrm{N}^0(\mathrm{F}) = \mathrm{N}(\mathrm{F}) \cap \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F}).$$

- $\mathbb{T}$ *le groupe quotient de* $\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ *par* $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$, $\mathbb{W}_a = \mathrm{N}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ *le groupe de Weyl affine et* $\mathbb{W} = \mathrm{N}(\mathrm{F})/\mathrm{T}(\mathrm{F})$ *le groupe de Weyl sphérique de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$. *Notons que le groupe* $\mathbb{T}$ *s'identifie à* $\mathbb{Z}^{n-1}$ *et* $\mathbb{W}$ *s'identifie au groupe quotient* $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$.
- $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ *l'appartement standard de* $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ *associé à* $\mathrm{T}(\mathrm{F})$.
- *Pour tout simplexe* σ *de* $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ *est le sous-groupe parahorique associé à* σ *et* $\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ *son radical pro-unipotent.*
- $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ *le groupe réductif fini* $\mathrm{GL}_n(k_\mathrm{F})$ *et* $\mathcal{I}(\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F}))$ *son immeuble de Tits.*
- *Pour tout simplexe* σ *de* $\mathcal{I}(\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F}))$, $\mathrm{P}_\sigma(k_\mathrm{F})$ *est le sous-groupe parabolique associé* $\tilde{A}$ σ *et* $\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})$ *son radical unipotent.*
- $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ *le tore diagonal de* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ *et* $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$ *l'appartement standard de* $\mathcal{I}(\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F}))$ *associé.*
- $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}})$ *le cône de base l'appartement* $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$ *qu'on identifie au complexe simplicial dont l'ensemble ordonné des simplexes est l'ensemble des sous-groupes paraboliques (propres ou non) de* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ *contenant le tore* $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$.

6.1.1 Définition et premières propriétés

Définition 6.2.

(i) Le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ *est le complexe de classes de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *relativement à la famille ordonnée propre* $(\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}))_{\sigma \in \sum_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}}$ *de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$,

$$\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F}) = \mathcal{W}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}), \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}})$$

(ii) Le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ *est le complexe de classes de* $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ *relativement à la famille ordonnée propre* $(\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}))_{\sigma \in \sum_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}}$ *de* $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$,

$$\mathcal{W}_n(\mathrm{F}) = \mathcal{W}(\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F}), \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}})$$

(iii) Le complexe $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ *est le complexe de classes de* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ *relativement à la famille ordonnée* $(\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}))_{\sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}})}}$ *de* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$,

$$\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}) = \mathcal{W}(\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F}), \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}})})$$

Il est clair que $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ est un sous-complexe simplicial de $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$. De plus, d'après le lemme (3.24), ces deux complexes sont localement finis. En particulier, leurs réalisations géométriques sont localement compactes.

Proposition 6.3. *Le complexe simplicial $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ est connexe. En particulier, sa réalisation géométrique est connexe.*

Démonstration. D'après la proposition (3.29), il suffit de montrer que le groupe $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ est engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. Si on note $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ le sous-groupe de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, pour σ dans $\Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}$, il est clair que $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ est contenu dans $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ puisque les sous-groupes $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ sont tous contenu dans $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. D'après la décomposition de Cartan de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$, on a $\mathrm{G}_n(\mathrm{F}) = \mathrm{K}_n\mathrm{A}_n\mathrm{K}_n$, où $\mathrm{K}_n = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_\mathrm{F})$ et A_n est l'ensemble des matrices diagonales de la formes $\mathrm{diag}(\varpi_\mathrm{F}^{k_1}, ..., \varpi_\mathrm{F}^{k_n})$, où les k_i sont des entiers tel que $k_1 \leqslant k_2 \leqslant ... \leqslant k_n$. Par conséquent, on a la décomposition $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F}) = \mathrm{K}_n\mathrm{A}_n^0\mathrm{K}_n$, où A_n^0 est le sous-ensemble de A_n formé par les matrices $\mathrm{diag}(\varpi_\mathrm{F}^{k_1}, ..., \varpi_\mathrm{F}^{k_n})$ tel que $k_1 + ... + k_n = 0$. Donc, pour montrer que $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ est contenu dans $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ il suffit de montrer que K_n et A_n^0 le sont. D'abord K_n est contenu dans $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ puisqu'on vérifie facilement que que pour tout sommet s de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, le sous-groupe parahorique P_s est contenu dans $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ (car il est engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ qui contiennent s). Pour montrer que A_n^0 est contenu dans $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ il suffit de vérifier que $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$ contient le groupe des matrices diagonales de déterminant 1. Par une simple récurrence sur n, on vérifie que ce dernier groupe est engendré par les matrices diagonales de la formes $\mathrm{diag}(1, ..., 1, \lambda^{-1}, \lambda, 1..., 1)$, avec $\lambda \in \mathrm{F}^\times$. Une telle matrice appartient à $\mathrm{G}_n^+(\mathrm{F})$, car elle est de la forme $txt^{-1}x^{-1}$, où x est la matrice de la transposition $(i, i+1)$, $t = \mathrm{diag}(1, ...1, \lambda, 1, ...1)$, et que txt^{-1} est dans $t\mathrm{K}_n t^{-1}$. □

Corollaire 6.4. *Le complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ est non connexe et on a $\pi_0(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})) \simeq \mathbb{Z}$*

Démonstration. D'après la proposition précédente, le sous-groupe de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, est $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. Donc d'après le corollaire (3.30), l'ensemble des composantes connexes de $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ s'identifie au quotient $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})/\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ qui s'identifie lui même à $\mathbb{Z}$. □

On définit *l'appartement standard* $\mathcal{A}_{\mathrm{W}_n(\mathrm{F})}$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ par,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{W}_n(\mathrm{F})} = \mathrm{Flag}(\{\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}),\ \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}})$$

et les translatés à gauche $g.\mathcal{A}(\mathcal{W}_k)$ sont appelés *les appartements* de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$.

On définit de même *l'appartement standard* $\mathcal{A}_{\mathrm{W}_n(k_\mathrm{F})}$ de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ par,

$$\mathcal{A}_{\mathrm{W}_n(k_\mathrm{F})} = \mathrm{Flag}(\{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}),\ \sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}})})$$

et les translatés à gauche $g.\mathcal{A}_{\mathrm{W}_n(k_\mathrm{F})}$ sont appelés *les appartements* de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$.

6.1.2 Actions sur les complexe de classes de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$

Le groupe $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ agit sur le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ par translation à gauche,

$$\mathrm{G}_n(\mathrm{F}) \times \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$$

L'action sur les sommets est donnée par $g.x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = gx\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Le normalisateur $\mathrm{N}(\mathrm{F})$ de $\mathrm{T}(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ agit sur le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ par translation à droite,

$$\mathrm{N}(\mathrm{F}) \times \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F}).$$

L'action sur les sommets est donnée par

$$n.x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})n^{-1} = xn^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\sigma}(\mathrm{F})$$

On vérifie facilement que les actions de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ et de $\mathrm{N}(\mathrm{F})$ sur $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ commutent. Le groupe $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ agit sur le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ par translation à gauche,

$$\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F}) \times \mathcal{W}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathcal{W}_n(\mathrm{F})$$

L'action sur les sommets est donnée par $g.x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = gx\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Le normalisateur $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ de $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ agit sur le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ par translation à droite,

$$\mathrm{N}^0(\mathrm{F}) \times \mathcal{W}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathcal{W}_n(\mathrm{F}).$$

L'action sur les sommets est donnée par

$$n.x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})n^{-1} = xn^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\sigma}(\mathrm{F}).$$

On vérifie facilement que les actions de $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ et de $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ commutent. Remarquons que la restriction de l'action de $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ à $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ est triviale. En effet comme $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ stabilise point par point l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, pour tout $t \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ et pour tout sommet $s = x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$, on a

$$t.s = t.x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = xt^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{t.\sigma}(\mathrm{F}) = x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = s$$

Considérons les quotients du complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ (resp. $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$) par les groupes discret $\mathbb{T}$ et $\mathbb{W}_a$. L'action de $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ (resp. $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$) passe au quotient et induit une action du groupe discret $\mathbb{W}_a$. De même, l'action de $\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ (resp. $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$) passe au quotient et induit une action du groupe discret $\mathbb{T}$.

Définition 6.5.

(i) Le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ est le complexe simplicial quotient de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ par le groupe discret $\mathbb{T}$.

(ii) Le complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est le complexe simplicial quotient de $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ par le groupe discret $\mathbb{T}$.

Remarque 6.6. *On pourrait aussi considérer les complexes $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{W}_a}$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{W}_a}$ quotients de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ par le groupe de Weyl affine $\mathbb{W}_a$ respectivement, mais dans la suite on va se concentrer sur les deux complexes donnés la définition ci-dessus.*

Les sommets de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ sont les orbites $\bar{s}$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ pour l'action de $\mathbb{T}$ sur l'ensemble des sommets et les simplexes sont de la forme $\bar{\sigma} = \{\bar{s_0}, ..., \bar{s_p}\}$, où $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ est un simplexe de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$. Si $s = g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ est un sommet de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$, on notera $[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})]$ le sommet $\bar{s}$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$.

Proposition 6.7.

(i) Le complexe simplicial $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est connexe. En particulier, sa réalisation géométrique est connexe.

(ii) Le complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ n'est pas connexe et on a $\pi_0(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}) \simeq \mathbb{Z}$

Démonstration. Le premier point résulte de fait que $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est l'image par la projection canonique du complexe connexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$. Pour le deuxième point, d'après le corollaire (6.4), on a

$$\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} = \bigcup_{g \in \mathrm{G}_n(\mathrm{F})/\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$$

On va montrer que cette réunion est en faite une réunion disjointe par des sous-complexes connexes, ce qui donnera le résultat. Soient donc g et h deux éléments de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$. Supposons que $g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap h.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \neq \emptyset$. Il existe alors un sommet commun à $g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ et $h.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, c'est-à-dire il existe un sommet $x\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ tel que

$$[gx\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})] = [hx\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})]$$

Alors, il existe $t \in \mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ tel que $gx\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = hxt^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, ce qui donne $tx^{-1}h^{-1}gx \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Comme t et x sont dans $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ et que $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ est contenu dans $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$, alors $h^{-1}g$ est dans $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. Il en résulte que $g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} = h.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. □

Proposition 6.8.

(i) L'action de $\mathbb{T}$ sur $|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|$ est libre et proprement discontinue. Par conséquent, la surjection canonique

$$|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})| \longrightarrow |\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|^{\mathbb{T}}$$

est revêtement galoisien de groupe de Galois $\mathbb{T}$.

(ii) L'action de $\mathbb{T}$ sur $|\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})|$ est libre et proprement discontinue. Par conséquent, la surjection canonique

$$|\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})| \longrightarrow |\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})|^{\mathbb{T}}$$

est revêtement galoisien de groupe de Galois $\mathbb{T}$.

Démonstration. (i) Montrons tout d'abord que l'action de $\mathbb{T}$ sur $|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|$ est libre. Il suffit de montrer que l'action de $\mathbb{T}$ sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ est libre. Soit donc $s = g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ un sommet de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$, avec $g \in \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ et σ un simplexe de l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. Un élément t de $\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ stabilise s si $gt^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{t.\sigma}(\mathrm{F}) = g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, ou encore $t^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{t.\sigma}(\mathrm{F}) = \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Alors $t \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ et $t.\sigma = \sigma$. Par suite, $t \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) \cap \mathrm{T}^1(\mathrm{F}) = \mathrm{T}^0(\mathrm{F})$. Donc le stabilisateur de s dans $\mathbb{T}$ est trivial. Ainsi, l'action de $\mathbb{T}$ sur $|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|$ est libre. De plus, d'après la proposition (3.27), l'action est bien régulière. L'action de $\mathbb{T}$ sur le complexe simplicial $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ étant libre et régulière, d'après la proposition (3.20), $\mathbb{T}$ agit proprement discontinûment sur $|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|$. Le groupe discret $\mathbb{T}$ agit librement et proprement discontinûment sur l'espace topologique $|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|$, alors la surjection canonique

$$|\mathcal{W}_n(\mathrm{F})| \longrightarrow |\mathcal{W}_n(\mathrm{F})|^{\mathbb{T}}$$

est revêtement galoisien de groupe de Galois $\mathbb{T}$.

(ii) Similaire à ce qui précéde. □

6.1.3 Lien avec les complexes de Wagoner affines de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$

Les complexes de Wagoner ont été introduits par J.B. Wagoner dans [Wag75] dans le but de définir les groupes d'homotopies supérieurs d'un groupe spécial linéaire p-adique. Ces complexes ont été généralisés à un groupe réductif p-adique par Jan Essert dans [Ess10]. Dans cette section, on se propose de donner le lien entre les complexes définis dans la section (5.2.1) et les complexes de Wagoner du groupe $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$. On renvoie à [Wag75] et [Ess10] pour plus de détails. On adopte les notations de [Ess10], page 108.

Définition 6.9. *([Ess10], 8.6.2, page 108) Le premier complexe de Wagoner affine de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *est défini par,*

$$\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) = \mathcal{W}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}), \mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}})$$

Dans [Ess10], paragraphe 8.6 page 108, Jan Essert définit pour tout entier $m \geqslant 1$ le m-ième complexes de Wagoner affine de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ par,

$$\mathcal{W}^m(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) = \mathcal{W}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}), \mathrm{U}^m_\sigma(\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}})$$

où pour tout simplexe σ de l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, $(\mathrm{U}^m_\sigma(\mathrm{F}))_{m\geqslant 1}$ est une certaine filtration décroissante par des sous-groupe ouvert compact de $\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ (voir [Ess10], 8.6.2). Les complexes de Wagoner affine de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ définissent une tour projective d'espaces, qu'on appelle la tour de Wagoner affine de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$, se projetants sur la subdivision barycentrique de l'immeuble affine de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$,

$$..... \longrightarrow \mathcal{W}^{m+1}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \xrightarrow{p_{m,m+1}} \mathcal{W}^m(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \longrightarrow ..... \longrightarrow \mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \xrightarrow{p} \mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$$

où

$$p_{m,m+1} : \mathcal{W}^{m+1}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \longrightarrow \mathcal{W}^m(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$$

est la projection simpliciale définie sur les sommets par $p_{m,m+1}(g\mathrm{U}_\sigma^{m+1}(\mathrm{F})) = g\mathrm{U}_\sigma^m(\mathrm{F})$. L'application $p_{m,m+1}$ est bien définie puisque qu'on a $\mathrm{U}_\sigma^m(\mathrm{F}) \subset \mathrm{U}_\sigma^{m'}(\mathrm{F})$ pour tout simplexe $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}$ et tous entiers $1 \leqslant m \leqslant m'$, et

$$p : \mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \longrightarrow \mathrm{sd}\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)$$

est la projection simpliciale définie sur les sommets par $p(g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})) = g\sigma$. L'application p est bien définie puisque $\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) \subset \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ pour tout simplexe $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}$. On dit que l'espace $\mathcal{W}^m(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ est le m-ième étage de la tour de Wagoner affine de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$.

Le groupe $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ agit par translation à droite sur le premier étage de la tour des complexes de Wagoner affine,

$$\mathrm{T}^0(\mathrm{F}) \times \mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \longrightarrow \mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$$

l'action sur les sommets étant donnée par, $t.g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = gt^{-1}\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Le groupe $\mathrm{T}_1(\mathrm{F})$ étant contenu dans $\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ pour tout simplexe $\sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}$, la restriction de l'action de $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ à $\mathrm{T}_1(\mathrm{F})$ est triviale. On a donc une action du groupe quotient fini $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}_1(\mathrm{F})$ sur le premier étage $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Notons que le groupe quotient $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}_1(\mathrm{F})$ s'identifie au groupe $(k_\mathrm{F}^\times)^n$ et que le quotient de $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ par $(k_\mathrm{F}^\times)^n$ s'identifie au complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})$ défini dans (6.1.1). En effet, l'application

$$\phi : \mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F}),\ g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) \longmapsto g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$$

est une application simpliciale surjective et $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-équivariante. De plus, deux sommets quelconque de $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ dans la même orbite sous l'action de $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ ont même image par ϕ. Donc par passage au quotient, l'application ϕ induit une application simpliciale surjective et $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-équivariante

$$\varphi : \mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))/(k_\mathrm{F}^\times)^n \longrightarrow \widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F}),\ < g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) > \longmapsto g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$$

où pour tout sommet $g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, $< g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) >$ désigne son orbite sous l'action du groupe $(k_\mathrm{F}^\times)^n$ qu'on identifie à $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}_1(\mathrm{F})$. L'application φ est injective. En effet, soit $< g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) >$ et $< h\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) >$ deux sommets de $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))/(k_\mathrm{F}^\times)^n$ qui ont même image par φ. On a $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = h\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})$ ou encore $h^{-1}g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})$. Par suite, $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})$ et $h^{-1}g \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})$. Ce qui donne $\sigma = \tau$ et $g = ht^{-1}u$ pour un certain $t \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ et un certain $u \in \mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})$. Donc on a

$$< g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) >=< ht^{-1}\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) >=< h\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) > .$$

D'où φ est injective et par conséquent c'est un isomorphisme $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-équivariant de complexes simpliciaux.

Théorème 6.10. *L'action de $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n$ sur $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ est libre et régulière. Par conséquent, la surjection canonique*

$$|\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))| \longrightarrow |\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})|$$

est un revêtement galoisien de groupe de Galois $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n$.

Démonstration. Le groupe $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ normalise la famille $(\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}))_{\sigma\in\Sigma_{\mathcal{A}_{\mathrm{F}}}}$. D'après la proposition (3.27), l'action de $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ est régulière. Montrons que l'action de $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n$ sur $|\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))|$ est libre. Pour cela, il suffit de montrer que l'action sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ est libre. Soit donc $s = g(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ un sommet de $\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, avec $g \in \mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ et σ un simplexe de l'appartement $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$. Un élément t de $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ stabilise s si $gt^{-1}\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = g\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, ou encore $t^{-1}\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, ce qui donne $t \in \mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ et $t.\sigma = \sigma$. Par suite, $t \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F}) \cap \mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{T}_1(\mathrm{F})$. Donc le stabilisateur de s dans $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n \simeq \mathrm{T}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}_1(\mathrm{F})$ est trivial. L'action du groupe fini $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n$ sur l'espace topologique $|\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))|$ étant libre, la surjection canonique

$$|\mathcal{W}^1(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))| \longrightarrow |\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})|$$

est un revêtement galoisien de groupe de Galois $(k_{\mathrm{F}}^{\times})^n$. □

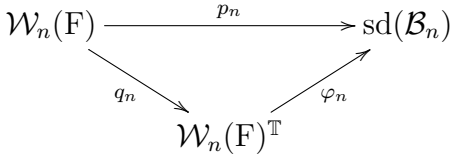
6.1.4 Combinatoire du complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$

Le complexe simpliciale $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ se projette simplicialement sur la subdivision barycentrique de l'immeuble affine de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$. En effet comme $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})U_\sigma(\mathrm{F}) \subset \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ pour tout simplexe σ de $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$, la correspondance

$$p_n : \mathcal{W}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{sd}(\mathcal{B}_n)$$

où $\mathrm{sd}(\mathcal{B}_n)$ est la subdivision barycentrique de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, définie sur les sommets par $p_n(g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})U_\sigma(\mathrm{F})) = g\sigma$, définit bien une application entre ensembles de sommets. De plus, il est facile de vérifier que cette application préserve l'ordre et que c'est une projection $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariante. La projection p_n envoie bijectivement l'appartement standard de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})$ sur l'appartement standard de la subdivision barycentrique de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$.

On note $q_n : \mathcal{W}_n(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ la surjection canonique. L'application p_n se factorise à travers le quotient et induit une projection simpliciale du complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ sur la subdivision barycentrique de l'immeuble,



Pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, on définit un sous-complexe compact R_s de $\mathrm{sd}(\mathcal{B}_n)$ par

$$R_s = \mathrm{Flag}(\mathrm{R}_{\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))}(s))$$

où $\mathrm{R}_{\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))}(s) = \{\sigma \in \Sigma_{\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))} / \ s \in \sigma\}$ est le résidu du sommet s dans l'immeuble. Remarquons que la famille $(R_s)_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n)}$ forme un recouvrement $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariant et localement fini de la subdivision barycentrique de l'immeuble $\mathrm{sd}(\mathcal{B}_n)$, c'est-à-dire :

(a) $\mathrm{sd}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))) = \bigcup_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))} R_s$

(b) Pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ et pour tout g dans $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$, $g.\mathrm{R}_s = \mathrm{R}_{g.s}$

En particulier, on a

$$\mathrm{sd}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))) = \bigcup_{s\in\mathcal{A}_\mathrm{F},\ g\in\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} g.R_s$$

Pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, on note $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ le sous-complexe compact $\varphi_n^{-1}(R_s)$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}$. De même, la famille $(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T})_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))}$ forme un recouvrement $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariant et localement fini de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ par des sous-complexes compacts. En particulier, on a

$$\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T} = \bigcup_{s\in\mathcal{A}_\mathrm{F},\ g\in\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} g.\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$$

6.1.5 Description des complexes $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$

Soit s un sommet de l'appartement standard $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. Les sommets du complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ sont les sommets x de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ dont un représentant est $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ tel que $s \in g\sigma$ et les simplexes sont de la forme

$$A = \{x_0, ..., x_p\}$$

tel que chaque sommet admet un représentant $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_i}(\mathrm{F})$ avec $s \in g\sigma_0 \subsetneq ... \subsetneq g\sigma_p$.

Proposition 6.11. *Pour tout sommet s de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ est le sous-complexe de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ dont les simplexes sont de la forme*

$$A = \{s_0, ..., s_p\}$$

tel que chaque sommet s_i admet un représentant $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_i}(\mathrm{F})$ avec $g \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ et $s \in \tau_i$.

Démonstration. Soit $A = \{s_0, ..., s_p\}$ un simplexe de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$, avec $s_i = [h\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_i}(\mathrm{F})]$ et $s \in h\sigma_0 \subsetneq .... \subsetneq h\sigma_p$. Il suffit de montrer que chaque sommet s_i admet un représentant $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_i}(\mathrm{F})$ avec $g \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ et $s \in \tau_i$. Pour le sommet s_i de A, on a $s \in h\sigma_i$. Posons $s' = h^{-1}.s \in \sigma_i$, c'est un sommet de l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ de même type que s puisque $g \in \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ et $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ préserve l'étiquetage. Comme $\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ agit transitivement sur les sommets de même type de l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, il existe $t \in \mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ tel que $t.s' = s$. Posons $g = ht^{-1}$ et $\tau_i = t.\sigma_i$. On a $h\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_i}(\mathrm{F}) \sim ht^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{t.\sigma_i}(\mathrm{F}) \sim g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_i}(\mathrm{F})$ et donc $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_i}(\mathrm{F})$ est un représentant du sommet s_i. De plus, on a $g.s = ht^{-1}.s = h.s' = s$, donc $g \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$, et $s' \in \sigma_i$. Par suite, $s = t.s' \in t.\sigma_i = \tau_i$.

□

D'après la proposition précédente, quitte à changer les représentants des sommets d'un simplexe, on peut toujours supposer qu'un simplexe de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est de la forme

$$\{s_0, ..., s_p\}$$

où chaque sommet s_i admet un représentant $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_i}(\mathrm{F})$ avec $g \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ et $s \in \sigma_0 \subsetneq ... \subsetneq \sigma_p$. Comme conséquence, on obtient :

Proposition 6.12. *Pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, le groupe quotient $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})/\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ s'identifie à $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. Via cette identification, le complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ s'identifie de façon $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$-équivariante au complexe $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$.*

Démonstration. Soit s un sommet de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. L'ensemble des simplexes du lien $\mathrm{lk}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(s)$ de s dans l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ s'identifie au résidu $\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(s)$ de s dans $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. En effet, l'application

$$\varphi_s : \mathrm{R}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(s) \longrightarrow \mathrm{lk}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}},\ \sigma \longmapsto \sigma - \{s\}$$

est une bijection $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$-équivariante. On sait que le lien dans l'immeuble $\mathrm{lk}_{\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))}(s)$ d'un sommet s s'identifie à l'immeuble de Tits de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ ([Gar97], proposition page 57).
Soit $\varphi : \mathrm{P}_s(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ le morphisme de réduction modulo $\mathfrak{p}_\mathrm{F}$. On définit une application entre ensembles de sommets

$$\psi : \mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$$

par $\psi([g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})]) = \varphi(g)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma)}(k_\mathrm{F})$, pour tout sommet $[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})]$ de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ avec $g \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ et $s \in \sigma$. L'application ψ est bien définie. En effet, soit x un sommet de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, $g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F})$ et $g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$ deux représentants de x tel que $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ et $s \in \sigma_1, \sigma_2$. On a $g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F}) \sim g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$. Alors, il existe $t \in \mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ tel que

$$g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) = g_1t^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{t.\sigma_1}(\mathrm{F})$$

Par suite,

$$\sigma_2 = t.\sigma_1 \text{ et } tg_1^{-1}g_2 \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$$

or $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{P}_s$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$, donc $t \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$, et on vérifie facilement qu'un élément de $\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ qui fixe un sommet de l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ est dans $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})$. Ainsi, $t \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})$ et $g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) = g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F})$. Par passage à la réduction modulo $\mathfrak{p}_\mathrm{F}$, on a $\varphi(g_2)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma_2)}(k_\mathrm{F}) = \varphi(g_1)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma_1)}(k_\mathrm{F})$. Alors ψ est bien définie. L'application ψ est clairement surjective. Vérifions qu'elle est injective. Soit x_1 et x_2 deux sommets de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, $g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F})$ et $g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$ deux représentants de x_1 et x_2 respectivement, avec $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_s$ et $s \in \sigma_1, \sigma_2$. On suppose que x_1 et x_2 ont même image par ψ, alors $\varphi(g_1)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma_1)}(k_\mathrm{F}) = \varphi(g_2)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma_2)}(k_\mathrm{F})$. Ceci implique que $\varphi_s(\sigma_1) = \varphi_s(\sigma_2)$, donc $\sigma_1 = \sigma_2$ puisque φ_s est bijective, et $\varphi(g_1^{-1}g_2) \in \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma_2)}(k_\mathrm{F})$. Mais $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_s(\sigma_2)}(k_\mathrm{F}) = \varphi(\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}))$ et, comme $\ker(\varphi) = \mathrm{U}_s(\mathrm{F}) \subset \mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$, on a $g_1^{-1}g_2 \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$. D'où

$x_1 = x_2$. Par suite, pour tout sommet s de l'appartement $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$, $\psi : \mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ est un isomorphisme $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$-équivariant de complexes simpliciaux. Pour un sommet quelconque s de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, comme $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ agit transitivement sur les sommets de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ et comme $g.\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} = \mathcal{W}_n^{g.s}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ pour tout sommet s et tout $g \in \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$, le complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est le translaté de $\mathcal{W}_n^{s_0}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ pour un certain sommet s_0 de $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$. Par conséquent, $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est isomorphe à $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ et ceci de façon $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$-équivariante.

□

Corollaire 6.13. *Pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est un sous-complexe connexe et compact de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$.*

Démonstration. D'après la proposition précédente, pour tout sommet de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, le complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est isomorphe à $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$. Il suffit donc de montrer que ce dernier complexe est connexe. Comme $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ est le complexe des classes de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ relativement à la famille ordonnée de sous-groupes $(\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_\sigma(k_{\mathrm{F}}))_{\sigma\in\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_{\mathrm{F}}})}$ indexées par le cône $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_{\mathrm{F}}})$ qui est évidemment connexe. D'après la proposition (3.29) page 44, le complexe $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ est connexe si et seulement si $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ est engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_\sigma(k_{\mathrm{F}})$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes du cône $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_{\mathrm{F}}})$, ce qui est clairement vrai.

□

Soit $\mathcal{N}_n$ le nerf du recouvrement $(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}})_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))}$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$

$$\mathcal{N}_n = \mathrm{Nerf}\{\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\ s \in \mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))\}$$

C'est le complexe simplicial dont les sommets sont les sommets de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ et dont les simplexes sont de la forme $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ tel que

$$\mathcal{W}_n^{s_0}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap \mathcal{W}_n^{s_1}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap ... \cap \mathcal{W}_n^{s_p}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \neq \emptyset$$

Proposition 6.14. *Le complexe simplicial $\mathcal{N}_n$ s'identifie de façon $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariante à l'immeuble affine $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, pour tous sommets $s_0, ..., s_p$, deux à deux distincts, de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, l'intersection $\mathcal{W}_n^{s_0}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap \mathcal{W}_n^{s_1}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap ... \cap \mathcal{W}_n^{s_p}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est non vide si et seulement si $s_0, ..., s_p$ sont les sommets d'un p-simplexe. Soient donc $s_0, ..., s_p$ des sommets de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. On suppose que

$$\mathcal{W}_n^{s_0}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap \mathcal{W}_n^{s_1}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap ... \cap \mathcal{W}_n^{s_p}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \neq \emptyset$$

Soit x un sommet dans cette intersection et $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ un représentant de x. Les sommets $s_0, ..., s_p$ appartiennent au simplexe $g\sigma$. Ils forment donc un simplexe de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, et comme ils sont deux à deux distincts alors ils forment un p-simplexe.

Réciproquement, soit $\sigma = \{s_0, ..., s_p\}$ un p-simplexe de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Notons x le sommet de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ de représentant $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Alors x est un sommet de l'intersection $\mathcal{W}_n^{s_0}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}\cap$

$\mathcal{W}_n^{s_1}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \cap ... \cap \mathcal{W}_n^{s_p}(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ puisque $s_i \in \sigma$ pour tout i. Un isomorphisme $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariant du l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ dans le nerf $\mathcal{N}_n$ est donné par

$$f : \mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})) \longrightarrow \mathcal{N}_n,\ s \longmapsto \mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$$

□

Pour tout simplexe σ de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, on note $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ l'intersection des $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ lorsque s parcourt l'ensemble des sommets de σ,

$$\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} = \bigcap_{s\in\sigma} \mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$$

C'est le sous-complexe simplicial de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ dont les sommets sont les sommets x de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ dont un représentant est $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})$ avec $\sigma \subset g\tau$ et les simplexes sont de la forme

$$A = \{x_0, ..., x_p\}$$

tel que chaque sommet admet un représentant $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_i}(\mathrm{F})$ avec $\sigma \subset g\tau_0 \subsetneq ... \subsetneq g\tau_p$.

On a vu que si σ est un sommet de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ (proposition 6.12) le complexe simplicial $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ s'identifie de façon $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$-équivariante à un complexe de classes au niveau résiduel. Ceci n'est pas vrai pour σ un simplexe de dimension plus grande que 1. Par contre un quotient du complexe $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ par un groupe fini s'identifie bien à un complexe de classes au niveau résiduel. En effet, le groupe $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ agit de façon régulière sur $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$

$$\mathrm{N}^0(\mathrm{F}) \times \mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$$

par $n.[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})] = [gn^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\tau}(\mathrm{F})]$. La restriction à $\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ de cette action est triviale. Cette action passe donc au quotient et définit une action du groupe $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})/\mathrm{T}^1(\mathrm{F})$ qui s'identifie au groupe de Weyl sphérique $\mathbb{W}$ de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$. Pour tout sommet $s = [g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})]$ de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ on note $< g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) >$ la classe de s modulo l'action $\mathbb{W}$ et on note $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ le complexe simplicial quotient. Pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, l'action de $\mathbb{W}$ sur $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ laisse globalement invariant le sous-complexe $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. En effet, si $s = [g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})]$ est un sommet de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ et $n \in \mathrm{N}^0(\mathrm{F})$, alors $n.[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})] = [gn^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\tau}(\mathrm{F})]$ est un sommet de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ puisque $\sigma \subset g.\tau = gn^{-1}.n\tau$. Pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, on note $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ le complexe simplicial quotient de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ sous l'action de $\mathbb{W}$.

Proposition 6.15. *Pour tout simplexe σ de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ est le sous-complexe de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ dont les simplexes sont de la forme*

$$A = \{s_0, ..., s_p\}$$

tel que chaque sommet s_i admet un représentant $[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_i}(\mathrm{F})]$ avec $g \in \mathrm{P}_\sigma$ et $\sigma \subset \tau_i$.

Démonstration. Soit x un sommet de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ de représentant $[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F})]$, avec $g \in \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ et τ un simplexe de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ tel que $\sigma \subset g.\tau$. Posons $\sigma' = g^{-1}\sigma$. Alors σ et σ' sont deux simplexes de même type de l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. Comme $\mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ agit transitivement sur les simplexes de même type de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$, alors il existe $n \in \mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ telle que $n.\sigma' = \sigma$. Posons $h = gn^{-1}$ et $\varphi = n.\tau$. On a

$$< h\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\varphi(\mathrm{F}) >=< gn^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\tau}(\mathrm{F}) >=< g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) >$$

Donc $[h\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\varphi(\mathrm{F})]$ est un représentant du sommet x. De plus on a $h.\sigma = gn^{-1}.\sigma = g\sigma' = \sigma$, et donc $h \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$. D'où $[h\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\varphi(\mathrm{F})]$ est un représentant du sommet x tel que $h \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ et $\sigma \subset \varphi$.

□

Soit $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$ un sous-groupe de Levi standard (propre ou non) de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$,

$$\mathrm{M}(k_\mathrm{F}) \simeq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}(n_i, k_\mathrm{F})$$

On note $\mathcal{I}(\mathrm{M})$ l'immeuble de Tits de $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$. On rappelle que $\mathcal{I}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$ est le complexe polysimplicial dont l'ensemble ordonné des polysimplexes est l'ensemble des sous-groupes paraboliques propre de $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$, ordonné par inclusion inversée. Pour plus de détails, voir [Tit86]. Notons que $\mathcal{I}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$ est isomorphe comme complexe polysimplicial au produit,

$$\prod_{i=1}^{r} \mathcal{I}(\mathrm{G}_{n_i}(k_\mathrm{F}))$$

On note $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ le tore diagonal de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$, $\mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})} = \mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}(\mathrm{T}(k_\mathrm{F}))$ le normalisateur de $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ dans $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$, et $\mathbb{W}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})} = \mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}/\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est le groupe de Weyl de $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$. Si S est un tore maximal de $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$, l'appartement $\mathcal{A}_S$ de $\mathcal{I}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$ correspondant est le sous-complexe formé par les sous-groupes paraboliques propres contenant S. On note $\mathcal{A}$ l'appartement correpondant au tore diagonal $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$, et on l'appelle l'appartement standard de $\mathcal{I}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$. Le complexe polysimplicial dont l'ensemble ordonné des polysimplexes est l'ensemble des sous-groupes paraboliques (propres ou non) de $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$ contenant le tore $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est un cône sur l'appartement $\mathcal{A}$, qu'on note $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Pour tout sous-polycomplexe X de $\mathcal{I}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$, on note Σ_X l'ensemble des polysimplexes de X. Si σ est un polysimplexe de $\mathcal{I}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$, on note $\mathrm{P}_\sigma(k_\mathrm{F})$ le sous-groupe parabolique correspondant et $\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})$ son radical unipotent.

Définition 6.16. *Le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$ est le complexe de classes,*

$$\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F})) = \mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}), \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{C}(\mathcal{A})})$$

Le groupe $\mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}$ agit par translation à droite de façon simpliciale et régulière sur le complexe simplicial $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$,

$$\mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})} \times \mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F})) \longrightarrow \mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$$

$$(n, x\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})) \longmapsto n.x\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}) = xn^{-1}\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\sigma}(k_\mathrm{F})$$

La restriction de l'action de $\mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}$ à $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est triviale, donc par passage au quotient, l'action de $\mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}$ induit une action simpliciale et régulière du groupe de Weyl $\mathbb{W}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}$ sur le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$. Soit $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))^{\mathbb{W}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}}$ le complexe simplicial quotient de $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$ sous l'action de $\mathbb{W}_\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$. On note $< x\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}) >$ la classe du sommet $x\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})$ de $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$.

Proposition 6.17. *Pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, le groupe quotient $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})/\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$ s'identifie à un sous-groupe de Levi standard $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$ de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. Via cette identification, le complexe $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ s'identifie de façon $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$-équivariante au complexe $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$. En particulier, pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, le complexe simplicial $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ est connexe.*

Démonstration. Soit σ un simplexe de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ qu'on suppose dans l'appartement standard $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. L'ensemble des simplexes du lien $\mathrm{lk}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(\sigma)$ de σ dans l'appartement $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ s'identifie de façon $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$-équivariante au résidus $\mathrm{R}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(\sigma)$ de σ dans $\mathcal{A}_\mathrm{F}$. En effet, l'application

$$\alpha_\sigma : \mathrm{R}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(\sigma) \longrightarrow \mathrm{lk}_{\mathcal{A}_\mathrm{F}}(\sigma),\ \tau \longmapsto \tau - \sigma$$

est une bijection $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$-équivariante. Soit

$$\varphi_\sigma : \mathrm{P}_\sigma/\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{M}$$

l'isomorphisme de groupes induit par le morphisme de réduction modulo $\mathfrak{p}_\mathrm{F}$, où $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$ est un sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. On définit une application entre ensembles de sommets

$$\psi : \mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}} \longrightarrow \mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))^{\mathbb{W}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}}$$

par

$$\psi(< g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) >) =< \varphi_\sigma(g)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\tau)}(k_\mathrm{F}) >$$

pour tout sommet $< g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(\mathrm{F}) >$ avec $g \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ et $\sigma \subset \tau$. L'application ψ est bien définie. En effet, soit x un sommet de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$, $[g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F})]$ et $[g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})]$ deux représentants de x tel que $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ et $\sigma \subset \sigma_1, \sigma_2$. Il existe $n \in \mathrm{N}^0(\mathrm{F})$ tel que

$$g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) = g_1 n^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\sigma_1}(\mathrm{F})$$

Par suite,

$$\sigma_2 = n.\sigma_1 \text{ et } ng_1^{-1}g_2 \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$$

or $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ et $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$, donc $n \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$. Ainsi, $n \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$, $\sigma_2 = n.\sigma_1$ et $g_2 = g_1 n^{-1} u$, avec $u \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$. Donc

$$< g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) >=< g_1 n^{-1}\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\sigma_1}(\mathrm{F}) >$$

Il en résulte que

$$\psi(< g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) >) =< \varphi_\sigma(g_1)\varphi_\sigma(n)^{-1}\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\varphi_\sigma(n).\alpha_\sigma(\sigma_1)}(k_\mathrm{F}) > \psi(< g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F}) >)$$

D'où Ψ est bien définie.

L'application ψ est clairement surjective. Montrons qu'elle est injective. Soit x_1 et x_2 deux sommets de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$, $< g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F}) >$ et $< g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) >$ deux représentants de x_1 et x_2 respectivement, avec $g_1, g_2 \in \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$ et $\sigma \subset \sigma_1, \sigma_2$. On suppose que x_1 et x_2 ont même image par ψ, alors

$$< \varphi_\sigma(g_1)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\sigma_1)}(k_\mathrm{F}) >=< \varphi_\sigma(g_2)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\sigma_2)}(k_\mathrm{F}) >$$

Il existe $n \in \mathrm{N}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}$ tel que

$$\varphi_\sigma(g_1)n^{-1}\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{n.\alpha_\sigma(\sigma_1)}(k_\mathrm{F}) = \varphi_\sigma(g_2)\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\sigma_2)}(k_\mathrm{F})$$

Par conséquent, $\alpha_\sigma(\sigma_2) = n.\alpha_\sigma(\sigma_2)$ et $\varphi_\sigma(g_2^{-1}g_1)n^{-1} \in \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\sigma_2)}(k_\mathrm{F})$. Or $\mathrm{N}_\mathrm{M} = \varphi_\sigma(\mathrm{N}_\sigma(\mathrm{F}))$, où $\mathrm{N}_\sigma(\mathrm{F}) = \mathrm{N}(\mathrm{F}) \cap \mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$, donc $n = \varphi_\sigma(m)$ avec $m \in \mathrm{N}_\sigma(\mathrm{F})$. Par suite, $\alpha_\sigma(\sigma_2) = \alpha_\sigma(m.\sigma_2)$ et $\varphi_\sigma(g_2^{-1}g_1m^{-1}) \in \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\sigma_2)}(k_\mathrm{F}) = \varphi_\sigma(\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}))$. On a $\alpha_\sigma(\sigma_2) = \alpha_\sigma(m.\sigma_2)$, donc $\sigma_2 = m.\sigma_1$ puisque l'application α_σ est une bijection. De plus, $\varphi_\sigma(g_2^{-1}g_1m^{-1}) \in \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\alpha_\sigma(\sigma_2)}(k_\mathrm{F}) = \varphi_\sigma(\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}))$, alors $g_2^{-1}g_1m^{-1} \in \mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$. Ainsi, $g_2 = g_1m^{-1}u$, avec u un certain élément de $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F})$. Il en résulte que

$$< g_2\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_2}(\mathrm{F}) >=< g_1m^{-1}u\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{m.\sigma_1}(\mathrm{F}) >=< g_1\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(\mathrm{F}) >$$

D'où Ψ est injective. Ainsi, Ψ est un isomorphisme $\mathrm{P}_\sigma(\mathrm{F})$-équivariant de complexes simpliciaux. Le complexe simplicial $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$ est connexe puisqu'on vérifie aisément que le groupe $\mathrm{M}(k_\mathrm{F})$ est engendré par les sous-groupes $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})$, lorsque σ décrit l'ensemble des simplexes du cône $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Par suite, le complexe $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))^{\mathbb{W}_{\mathrm{M}(k_\mathrm{F})}}$ est connexe puisque c'est l'image par la surjection canonique de $\mathcal{W}(\mathrm{M}(k_\mathrm{F}))$.

□

Proposition 6.18. *Pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ de dimension $\geqslant 1$, $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ est un sous-complexe compact, non connexe en général, de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}$. De plus,*

$$\dim(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^\mathbb{T}) = n - 1 - \dim(\sigma)$$

Démonstration. Soit σ un simplexe de $\mathcal{A}_\mathrm{F}$ de dimension $\geqslant 1$. Le complexe simplicial $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^\mathbb{T}$ est l'intersection des $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}$, pour s parcourant l'ensemble des sommets de σ, et

comme chaque complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est compact d'après le corollaire (6.13). Par conséquent, $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est compact. Montrons que $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est de dimension $n-1-\dim(\sigma)$. Un simplexe de dimension maximale de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est de la forme,

$$\mathrm{A} = \{[g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_0}(\mathrm{F})], ..., [g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_k}(\mathrm{F})]\}$$

avec $g \in \mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$, les τ_i des simplexes de $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$, et $\sigma \subset g\tau_0 \subsetneq g\tau_1 \subsetneq ... \subsetneq g\tau_k$. Ceci implique que $d = \{\sigma \subset g\tau_0 \subsetneq g\tau_1 \subsetneq ... \subsetneq g\tau_k\}$ est un drapeau maximal de simplexes de $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ contenant σ, donc en particulier $n-1 = \dim(\tau_k) = \dim(\sigma) + k$. Par suite $\dim(\mathrm{A}) = n - \dim(\sigma) - 1$. Le complexe $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ n'est pas connexe en général si $\dim(\sigma) \geqslant 1$. Par exemple si σ est une chambre, la dimension de $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est égale à zéro. Si on suppose que $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est connexe, alors il est constitué d'un seule sommet, ce qui est clairement faux.

□

6.2 Cohomologie à support compact de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, $n \geqslant 3$

Le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est un $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-complexe propre, ses espaces de cohomologie à support compact sont alors équipés d'une représentation lisse de $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. Dans cette section, on se propose de calculer la cohomologie de cet espace comme $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse et de montrer que toutes les représentations cuspidales irréductibles de niveau zéro et de caractère central trivial sur ${\mathcal{O}_{\mathrm{F}}}^\times$ apparaissent dans la cohomologie du complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$.

D'après la section (6.1.4), la famille $(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}})_{s\in\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))}$ est un recouvrement $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariant propre et localement fini. Le nerf de ce recouvrement s'identifie de façon $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariante à l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. On dispose d'un système de coefficients $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-équivariant

$$\mathcal{H}^q = (\mathcal{H}^q_\sigma, v^\sigma_\tau)_{\sigma\subset\tau}$$

sur le nerf $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ donné par :

(i) Pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, $\mathcal{H}^q_\sigma = \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$, où $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est l'intersection des $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ lorsque s décrit l'ensemble des sommets de σ.

(ii) Pour tout simplexes σ, τ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, $v^\sigma_\tau : \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_n^\tau(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ est le morphisme induit en cohomologie par l'inclusion de $\mathcal{W}_n^\tau(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ dans $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$.

D'après le théorème (4.57), la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ converge vers la cohomologie de $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$:

$${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q} \Rightarrow_p \mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

c'est-à-dire qu'il existe une filtration décroissante de $\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ tel que le gradué de $\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ pour cette filtration est donné par :

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}^m_c(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=m} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^\infty_{p,q} \tag{6.2.1}$$

Lemme 6.19. *La suite spectrale* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ *est* n*-triangulaire.*

Démonstration. Le résultat découle du fait que $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{H}^q) = 0$ pour $p+q \geqslant n$. En effet, d'après la proposition (6.18) pour tout p-simplexe σ de X, $\dim(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}) = n-p-1$. Donc $\mathcal{H}_\sigma^q = \mathrm{H}^q(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C}) = 0$ pour $q \geqslant n-p$, ce qui implique que $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathcal{H}^q) = 0$ pour $p+q \geqslant n$. D'où le résultat. □

Corollaire 6.20. *La suite spectrale* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ *converge vers* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^n$.

Démonstration. Découle du théorème (4.53), page 75. □

D'après le théorème précédent, l'identité (6.2.1) devient

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^m(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=m} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n \tag{6.2.2}$$

Dans la suite de cette section, on s'intéresse au $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$. En effet, d'après des calculs faits dans la cas $n=3$, on s'attend à ce que les représentations cuspidales irréductibles de niveau zéro et de caractère central trivial apparaissent dans le $(n-1)$-ième espace de cohomologie à support compact du complexe $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. La difficulté de l'étude de la cohomologie du complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est que l'on ne peut pas décrire explicitement les $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-modules lisses intervenants dans l'isomorphisme (6.2.2) ci-dessus. Par contre, on peut quand même décrire les deux termes ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{1,n-2}^n$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{0,n-1}^n$.

Proposition 6.21. *Dans l'isomorphisme*

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{p+q=n-1} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n \tag{6.2.2}$$

on a les identifications suivantes :

(i) Le $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$*-module lisse* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{0,n-1}^n$ *s'identifie à la somme directe*

$$\bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

où C *est une chambre de* $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$.

(ii) Le $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$*-module lisse* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{1,n-2}^n$ *s'identifie à* $\mathrm{H}_c^1(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^{n-2})$.

(iii) Pour $0 \leqslant p, q \leqslant n-1$*, avec* $p+q = n-1$ *et* $0 \leqslant q \leqslant n-3$*, le* $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$*-module lisse* ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n$ *s'identifie à un quotient de* $\mathrm{H}_c^p(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^q)$.

Démonstration. i) et ii) On va montrer que les termes ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{0,n-1}^2$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{1,n-2}^2$ de la deuxième page de la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ ne changent pas dans les pages suivantes, c'est-à-dire que

$${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{0,n-1}^k = {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{0,n-1}^2 \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{1,n-2}^k = {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{1,n-2}^2$$

pour tout entier $k \geqslant 2$. Pour $p = 0, 1$, les différentielles dans la deuxième page autour du terme ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q}$, avec $p+q = n-1$, sont représentées par le diagramme suivant :

$$\ldots \longrightarrow {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p-2,q+1} \xrightarrow{d} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q} \xrightarrow{d} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p+2,q-1} \longrightarrow \ldots$$

On note T_n l'ensemble des points (a, b) du réseau $\mathbb{Z}^2$ du plan se situant dans le premier cadrant du plan et tel que $a + b \leqslant n - 1$. La suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ étant n-triangulaire, tous les termes ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{a,b}$, avec (a, b) en dehors de T_n, sont nuls. Pour $p = 0, 1$, il est clair que les deux points $(p-2, q+1)$ et $(p+2, q-1)$ sont en dehors de T_n, et donc les deux termes ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p-2,q+1}$ et ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p+2,q-1}$ sont nuls. Par conséquent, ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^3_{p,q} = \mathrm{H}^{p,q}({}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2) = {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q}$. Avec un raisonnement similaire, on vérifie que ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^{n-1}_{p,q} = {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^2_{p,q}$. On en déduit les deux égalités

$${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^n_{0,n-1} = \mathrm{H}^0_c(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^{n-1}) \qquad \text{et} \qquad {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^n_{1,n-2} = \mathrm{H}^1_c(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^{n-2})$$

Montrons que le $\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})$-module lisse $\mathrm{H}^0_c(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^{n-1})$ s'identifie à la somme d'induites compacte

$$\bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}^s_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

où C est une chambre de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Le complexe de cochaînes de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ à coefficients dans $\mathcal{H}^{n-1}$ est donné par

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(0)}, \mathcal{H}^{n-1}) \xrightarrow{d} \mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(1)}, \mathcal{H}^{n-1}) \xrightarrow{d} \mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(2)}, \mathcal{H}^{n-1}) \longrightarrow \ldots$$

où l'on note X l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. D'après la proposition (6.18), les espaces $\mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(m)}, \mathcal{H}^{n-1})$ sont nuls pour $m+n-1 \geqslant n$, c'est-à-dire $\mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(m)}, \mathcal{H}^{n-1}) = 0$ pour tout $m \geqslant 1$. Par suite, on a l'isomorphisme de $\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})$-modules lisses $\mathrm{H}^0_c(\mathrm{X}, \mathcal{H}^{n-1}) \simeq \mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(0)}, \mathcal{H}^{n-1})$. D'après la proposition (4.36) page 69, on a un isomorphisme de $\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})$-modules lisses

$$\mathrm{C}^{or}_c(\mathrm{X}_{(0)}, \mathcal{H}^{n-1}) \simeq \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_0} c\text{-ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})} \mathcal{H}^{n-1}_s$$

où $\mathcal{S}_0$ est un systèmes de représentants de l'action de $\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})$ sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Pour toute chambre C de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, l'ensemble des sommets de C forme un système de représentants de l'action de $\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})$ sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. De plus, pour tout sommet s, $\mathcal{H}^{n-1}_s = \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}^s_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$. Par conséquent, on a

$$\mathrm{H}^0_c(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^{n-1}) \simeq \bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}^s_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

Finalement, on a l'isomorphisme

$${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^n_{0,n-1} \simeq \bigoplus_{s \in \mathrm{C}} c\text{-ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}^0_n(\mathrm{F})} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}^s_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

iii) Soit p et q deux entiers tels que $0 \leqslant p,q \leqslant n-1$, avec $p+q=n-1$ et $0 \leqslant q \leqslant n-3$. Pour tout entier r compris entre 2 et $n-1$, on a le diagramme,

$$\ldots \longrightarrow {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p-r,q+r-1}^r \xrightarrow{d^r} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^r \xrightarrow{d^r} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p+r,q-r+1}^r \longrightarrow \ldots$$

Le terme ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p+r,q-r+1}^r$ est nul puisque le point $(p+r,q-r+1)$ est en dehors de T_n. Alors le $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^{r+1}$ est un quotient de ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^r$. Comme ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^2$ est égale à $\mathrm{H}_c^p(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})),\mathcal{H}^q)$, ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n$ est un quotient de $\mathrm{H}_c^p(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})),\mathcal{H}^q)$. □

D'après la proposition précédente, on a l'identité (6.2.3) suivante,

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})) \bigoplus_{\substack{p+q=n-1\\ q\in\{0,\ldots,n-3\}}} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n \oplus \mathrm{H}_c^1(\mathrm{X},\mathcal{H}^{n-2}) \oplus \bigoplus_{s\in\mathrm{C}} c\text{-ind}_{\mathrm{P}_s(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

Proposition 6.22. *Pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, la représentation $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ de $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ est triviale sur $\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$. Par conséquent, par passage au quotient $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ est une représentation du groupe réductif fini $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})/\mathrm{U}_s(\mathrm{F}) \simeq \mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$.*

Démonstration. Le résultat provient essentiellement du fait que l'action de $\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ sur le complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est trivial. En effet, soit s un sommet de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathrm{F}}$ et x un sommet de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ de représentant $g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, avec $g \in \mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ et $s \in \sigma$. Pour tout $u \in \mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ on a $ug\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = g(g^{-1}ug)\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Comme $\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ est normal dans $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$, on a $g^{-1}ug \in \mathrm{U}_s(\mathrm{F})$. D'autre part, $\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ est contenu dans $\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. En effet, si $s \in \sigma$ alors $\mathrm{U}_s(\mathrm{F}) \subset \mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$. Par suite, un représentant du sommet $u.x$ est $ug\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = g(g^{-1}ug)\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F}) = g\mathrm{T}^0(\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(\mathrm{F})$, d'où $u.x = x$. L'action de $\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ étant triviale, son action sur la cohomologie de $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est aussi triviale. □

Remarque 6.23. *D'après la proposition précédente, déterminer la structure de $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$-module de l'espace $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ revient à déterminer sa structure de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-module.*

6.3 Détermination de la représentation $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$

Pour tout sommet s de l'immeuble X, le complexe simplicial $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est isomorphe à $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$. De plus, l'action de $\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$ sur $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ est triviale. Donc la représentation de $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})$ dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$ passe au quotient et définit une représentation du groupe $\mathrm{P}_s(\mathrm{F})/\mathrm{U}_s(\mathrm{F})$, qui est isomorphe à $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$, dans $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$. Dans ce paragraphe on se propose de déterminer la structure de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-module de l'espace $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$.

On rappelle que le $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-complexe $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ est naturellement étiqueté. On fixe l'étiquetage

$$e : \mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}) \longrightarrow \Delta_{n-1} = \{0,\ldots,n-1\}$$

défini par $e(g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_\sigma(k_{\mathrm{F}})) = \dim(\sigma)+1$ pour tout sommet $g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_\sigma(k_{\mathrm{F}})$ de $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$. Il est clair que l'action de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ sur $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ préserve l'étiquetage. D'après le théorème

(4.22), page 62, la représentation contragrédiente de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ des formes harmoniques sur $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$.

Dans toute la suite, on fixe les notations suivantes :

- $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ l'appartement standard de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ et $\Omega_\mathcal{W}$ l'ensemble des appartements.
- $\mathrm{Ch}_\mathcal{W}$ l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$. Si $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ est un appartement de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$, on note $\mathrm{Ch}(g.\mathcal{A}_\mathcal{W})$ l'ensemble des chambres de $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$. On note $\mathcal{S}^p_\mathcal{W}$ l'ensemble des p-simplexes de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$.
- Pour $i = 0, 1$, on note $\mathcal{S}^{n-2}_{\mathcal{W},i}$ l'ensemble des $(n-2)$-simplexes $\sigma = \{s_0 < ... < s_{n-2}\}$ de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ tel que $e(s_0) = i$.
- Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}^{n-2}_\mathcal{W}$, on note $\mathrm{Ch}_\mathcal{W}(\sigma)$ l'ensemble des chambres contenant σ.
- Pour tout ensemble S, on note $\mathcal{F}(S)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions complexes sur S.

On rappelle que l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ est l'espace des fonctions $f : \mathrm{Ch}_\mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{S}^{n-2}_\mathcal{W}$. On a un isomorphisme de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-modules,

$$\mathcal{F}(\mathrm{Ch}_\mathcal{W}) \simeq \bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} \tag{6.3.1}$$

En effet, un système de représentants de l'action de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ sur $\mathrm{Ch}_\mathcal{W}$ est donné par l'ensemble $\mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})$ des chambres de l'appartement standard. Alors l'application

$$\varphi : \mathcal{F}(\mathrm{Ch}_\mathcal{W}) \longrightarrow \bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} \mathcal{F}(\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F}))$$

définie par

$$\varphi(f) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} f_\mathrm{C}$$

où f_C est la fonction de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ donnée par $f_\mathrm{C}(g) = f(g^{-1}.\mathrm{C})$, est une application linéaire injective et $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-équivariante. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathrm{Ch}_\mathcal{W})$ et $\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})$. Pour tout $g \in \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ et $t \in \mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ on a,

$$f_\mathrm{C}(tg) = f((tg)^{-1}.\mathrm{C}) = f(g^{-1}t^{-1}.\mathrm{C}) = f(g^{-1}.\mathrm{C}) = f_\mathrm{C}(g)$$

puisque $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est le stabilisateur de toute chambre de l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{W}$. Par suite, f_C est dans l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$. De plus, soit $\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} f_\mathrm{C}$ un élément de $\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} \mathcal{F}(\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F}))$. On définit une fonction f sur l'ensemble $\mathrm{Ch}_\mathcal{W}$ par $f(\mathrm{C}') = f_\mathrm{C}(g)$, pour tout $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_\mathcal{W}$, où C est l'unique chambre de $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ telle que C' est dans l'orbite de C et g un élément quelconque de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ tel que $g^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. On a clairement $\varphi(f) = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} f_\mathrm{C}$. D'où,

φ est surjective et par conséquent c'est un isomorphisme de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-modules.

Notons $\mathcal{H}_i(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$, $i \in \{0, 1\}$, l'espace des fonctions $f : \mathrm{Ch}_\mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{W},i}^{n-2}$. Notons que $\mathcal{H}_i(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ est un sous-$\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-module de $\mathcal{F}(\mathrm{Ch}_\mathcal{W})$ et que $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C}) = \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C}) \cap \mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$.

Rappelons dans un premier temps quelques résultats sur les représentations cuspidales d'un groupe réductif fini. Soit $\mathrm{G} = \mathbb{G}(k)$ le groupe des k-points rationnels d'un groupe réductif défini sur un corps fini k. Une représentation complexe (π, V) de G est dite cuspidale si elle ne se plonge dans aucune induite parabolique $\mathrm{Ind}_\mathrm{P}^\mathrm{G}\sigma$, pour P un sous-groupe parabolique propre de G.

Proposition 6.24. *(voir, [Mur09], page 65) Soit* (π, V) *une représentation complexe de* G. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) La représentation (π, V) *est cuspidale.*

(ii) Pour tout sous-groupe parabolique propre P *de* G *de radical unipotent* U, *le sous-espace* V^U *des vecteurs fixés par* U *est nul.*

(iii) Tout coefficient matricielle f *de* π *est une forme cuspidale :*

$$\sum_{u \in \mathrm{U}} f(gu) = 0 \quad , \quad \textit{pour tout } g \in \mathrm{G}$$

pour tout sous-groupe parabolique propre P *de* G *de radical unipotent* U.

La somme de sous-représentations cuspidales d'une représentation complexe (π, V) de G est clairement cuspidale. En effet, si W_1 et W_2 sont deux sous-représentations cuspidales de G, on a la suite exacte de G-modules,

$$0 \longrightarrow \mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2 \longrightarrow \mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2 \longrightarrow \mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 \longrightarrow 0$$

Donc, pour tout sous-groupe parabolique P de G de radical unipotent U, on a la suite exacte d'espaces vectoriels,

$$0 \longrightarrow (\mathrm{W}_1 \cap \mathrm{W}_2)^\mathrm{U} \longrightarrow (\mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2)^\mathrm{U} \longrightarrow (\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2)^\mathrm{U} \longrightarrow 0$$

Comme W_1 et W_2 sont cuspidales, alors $(\mathrm{W}_1 \oplus \mathrm{W}_2)^\mathrm{U} = \mathrm{W}_1^\mathrm{U} \oplus \mathrm{W}_2^\mathrm{U} = 0$. Par suite,

$$(\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2)^\mathrm{U} = 0$$

Ainsi, la somme $\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2$ est une sous-représentation cuspidale de G. On définit donc la partie cuspidale de (π, V), qu'on note π^cusp ou V^cusp, comme étant la somme de toutes les sous-représentations cuspidales de π. C'est encore la plus grande sous-représentation cuspidale de π.

Proposition 6.25. *On a un isomorphisme de* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$*-modules,*

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}),\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$$

Démonstration. Soit f dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}),\mathbb{C})$. Alors, pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{W},0}^{n-2}$,

$$\sum_{\mathrm{C}\in\mathrm{Ch}} [\mathrm{C}:\sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

Montrons que f est déterminée par ses valeurs sur les ensembles $\mathrm{Ch}(g.\mathcal{A}_\mathcal{W})$, pour tout appartement $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{W},0}^{n-2}$ fixé,

$$\sigma = \{g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_\mathrm{F}) \subset ... \subset g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_\mathrm{F})\}$$

avec τ_0 est le simplexe vide de l'appartement $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$. Pour tout $j = 0, ..., n-2$, on note le sommet $g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_j}(k_\mathrm{F})$ de σ par s_j. Le simplexe σ est contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$. Soit $i = \max\{j \in \Delta_{n-1}/\ e(s_j) = j\}$. Une chambre C de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ contenant σ est de la forme

$$\mathrm{C} = \{s_0, ...s_i, s, s_{i+1}, ..., s_{n-2}\}$$

où $s = g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\tau(k_\mathrm{F})$ avec τ un simplexe de l'appartement $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$ contenant τ_i et contenu dans τ_{i+1}. Or il existe exactement deux simplexes de $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$ coincés entre τ_i et τ_{i+1}. Ainsi, l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ contenant σ est constitué de deux chambres contenues dans l'appartement $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$, qu'on note $\mathrm{C}_0(\sigma)$ et $\mathrm{C}_1(\sigma)$. Remarquons aussi que le coefficient d'incidence $[\mathrm{C}:\sigma]$ vaut 1 pour n'importe quelle chambre de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ contenant σ. Par conséquent, une fonction $f : \mathrm{Ch}_\mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}),\mathbb{C})$ si et seulement si $f(\mathrm{C}_0(\sigma)) + f(\mathrm{C}_1(\sigma)) = 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{W},0}^{n-2}$. Par conséquent, pour tout $\mathrm{C}, \mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}(g.\mathcal{A}_\mathcal{W})$, $f(\mathrm{C}) = -f(\mathrm{C}')$ ou $f(\mathrm{C}) = f(\mathrm{C}')$. En effet, soit $\mathrm{C}, \mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}(g.\mathcal{A}_\mathcal{W})$ et $(\mathrm{C}_0, ..., \mathrm{C}_k)$ une galerie de l'appartement $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ reliant C à C′ (une telle galerie existe puisque l'appartement $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ est isomorphe à la subdivision barycentrique du cône $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}})$ de l'appartement $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$). Pour tout $i = 0, ..., k-1$, C_i et C_{i+1} sont les uniques chambres de $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ contenant le simplexe $\mathrm{C}_i \cap \mathrm{C}_{i+1}$, on a donc clairement $f(\mathrm{C}) = f(\mathrm{C}_0) = \pm f(\mathrm{C}_k) = \pm f(\mathrm{C}')$. Ainsi, f est bien déterminée par ses valeurs sur les ensembles $\mathrm{Ch}(g.\mathcal{A}_\mathcal{W})$ pour tout appartement $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$. On fixe une chambre C de l'appartement standard $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ et on définit

$$\Psi : \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}),\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$$

par $\Psi(f)(x) = f(x^{-1}.\mathrm{C})$. L'application Ψ est bien définie. En effet, pour tout $x \in \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$, et $t \in \mathrm{T}(k_\mathrm{F})$, on a $\Psi(f)(tx) = f(x^{-1}t^{-1}.\mathrm{C}) = f(x^{-1}.\mathrm{C}) = \Psi(f)(x)$ puisque $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est le stabilisateur de toute chambre de l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{W}$. De plus, Ψ est clairement linéaire et équivariante. Soit $f \in \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}),\mathbb{C})$ telle que $\Psi(f) = 0$. Alors $f(x.\mathrm{C}) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. Soit $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_\mathcal{W}$, alors C′ est contenu dans un appartement $x.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ pour un certain x dans $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. Les chambres de l'appartement standard $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ forment un système de représentants pour l'action de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ sur l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$, donc C′ =

$x.\mathrm{C}''$ pour une certaine chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Par suite $\mathrm{C}' = x.\mathrm{C}''$ et $x.\mathrm{C}$ sont deux chambres de l'appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Alors d'après ce qui précéde, on a $f(\mathrm{C}') = f(x.\mathrm{C}'') = \pm f(x.\mathrm{C}) = 0$. Donc f est l'application nulle. On en déduit que Ψ est injective. L'application Ψ est aussi surjective. En effet, si $f \in \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}$, on définit une fonction $h : \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la façon suivante. Pour tout $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}$, C' est contenu dans un unique appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$, pour un certain $x \in \mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$. Alors C' et $x.\mathrm{C}$ sont deux chambres de $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. Pour définir l'image par h de C', on fixe une gallerie de longueur minimale $(\mathrm{C}_0, ..., \mathrm{C}_m)$ de l'appartement $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ reliant C' à $x.\mathrm{C}$ (ie. une suite de chambres de $x.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telles que deux chambres consécutives sont distinctes et s'intersectent suivant un simplexe de codimension 1, $\mathrm{C}_0 = \mathrm{C}'$ et $\mathrm{C}_m = x.\mathrm{C}$, tels que la longueur m est minimale). On pose $h(\mathrm{C}') = (-1)^m h(x.\mathrm{C})$. Cette définition ne dépend pas de la gallerie de longueur minimale reliant C' à $x.\mathrm{C}$ choisie puisque deux telles galleries ont même longueur. D'après ce qui précède, la fonction h est dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$ et il est clair que $\Psi(h) = f$. Ainsi, Ψ est surjective. Finallement, Ψ est un isomorphisme de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-modules. □

Proposition 6.26. *Le $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-module $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$ contient une sous-représentation isomorphe à la partie cuspidale de la somme directe*

$$\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_{\mathcal{W}})} \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}$$

Démonstration. Soit f dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$. Pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{W},1}^{n-2}$,

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

On considère l'application

$$\varphi : \bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_{\mathcal{W}})} \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})} \longrightarrow \mathcal{F}(\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}})$$

définie de la façon suivante. Pour tout élément $f = \sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_{\mathcal{W}})} f_{\mathrm{C}}$ de la somme directe et pour tout chambre $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}$, on pose $\varphi(f)(\mathrm{C}') = f_{\mathrm{C}}(x)$, où C est l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que C' est dans l'orbite de C et x un élément quelconque de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ tel que $x^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Cette définition est indépendante du choix de x puisque si $x_1, x_2 \in \mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ tel que $x_1^{-1}.\mathrm{C} = x_2^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$, alors $x_1 x_2^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}$ et donc $x_1 = t x_2$ pour un certain $t \in \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})$ puisque le stabilisateur de C est égale à $\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})$. Par suite, comme f_{C} est invariante à gauche par $\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})$, on a $f_{\mathrm{C}}(x_1) = f_{\mathrm{C}}(x_2)$. L'application φ est clairement linéaire, vérifions qu'elle est équivariante. Soit $\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}$ et $g \in \mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$. Soit C l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que C' est dans l'orbite de C et x un élément quelconque de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ tel que

$x^{-1}.\mathrm{C} = \mathrm{C}'$. Alors C est l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que $g^{-1}\mathrm{C}'$ est dans l'orbite de C et on a $(xg)^{-1}.\mathrm{C} = g^{-1}.\mathrm{C}'$. Par suite

$$(g.\varphi(f))(\mathrm{C}') = \varphi(f)(g^{-1}.\mathrm{C}') = f_{\mathrm{C}}(xg) = \varphi(g.f)(\mathrm{C}')$$

D'où φ est bien équivariante. Notre opérateur d'entrelacement φ est clairement injectif. On va montrer que φ envoie la partie cuspidale de la somme directe des induites dans l'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$.

Soit $\sigma \in \mathcal{S}^{n-2}_{\mathcal{W},1}$,

$$\sigma = \{g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

avec τ_0 est un sommet de l'appartement $\mathcal{A}_{k_{\mathrm{F}}}$. Alors σ est contenue dans une unique chambre C' contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. En effet

$$\mathrm{C}' = \{g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

est clairement l'unique chambre de $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant σ. Soit C_0 l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ tel que $\mathrm{C}' = g.\mathrm{C}_0$,

$$\mathrm{C}^0 = \{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

On va montrer d'abord que l'ensemble $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)$ des chambres de $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ contenant σ est donné par,

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma) = \{gu\mathrm{C}_0,\ u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})\}$$

Soit D une chambre de $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ contenant σ, avec

$$\mathrm{D} = \{h\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset h\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\varsigma_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset h\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\varsigma_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

Alors $h\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\varsigma_i}(k_{\mathrm{F}}) = g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_i}(k_{\mathrm{F}})$ pour tout $i = 0, ..., n-2$, ce qui donne $g^{-1}h \in \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_i}(k_{\mathrm{F}})$ et $\varsigma_i = \tau_i$. En particulier $g^{-1}h \in \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})$, c'est-à-dire il existe $t \in \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})$ et $u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})$ tel que $h = gtu$. Donc on a

$$\mathrm{D} = \{gtu\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset gtu\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset gtu\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

$$= \{gtut^{-1}\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset gtut^{-1}\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset gtut^{-1}\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

$$= gtut^{-1}.\{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\} = gu'\mathrm{C}_0$$

avec $u' = tut^{-1} \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})$ puisque $\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})$ normalise $\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})$. D'où pour tout $\sigma \in \mathcal{S}^{n-2}_{\mathcal{W},1}$, $\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma) = \{gu\mathrm{C}_0,\ u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})\}$, où g dans $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ et C_0 est l'unique chambre de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ telle que σ est contenu dans $g\mathrm{C}_0$.

L'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$ est le sous-espace des fonctions $f \in \mathcal{F}(\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}})$ vérifiant la condition d'harmonicité

$$\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}} [\mathrm{C} : \sigma] f(\mathrm{C}) = 0$$

pour tout simplexe $\sigma \in \mathcal{S}^{n-2}_{\mathcal{W},1}$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}^{n-2}_{\mathcal{W},1}$,

$$\sigma = \{g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_\mathrm{F}) \subset ... \subset g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_\mathrm{F})\}$$

et C_0 l'unique chambre de l'appartement $\mathcal{A}_\mathcal{W}$ telle que $g.\mathrm{C}_0$ est l'unique chambre de $g.\mathcal{A}_\mathcal{W}$ contenant σ. On a

$$\sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_\mathrm{F})} [gu.\mathrm{C}_0 : \sigma] f(gu.\mathrm{C}_0) = 0$$

Remarquons que les coefficients d'incidence $[gu.\mathrm{C}_0 : \sigma]$ sont indépendants de la chambre $gu.\mathrm{C}_0$ contenant σ et sont tous égaux à 1. Donc si on note f_C la fonction définie par $f_\mathrm{C}(g) = f(g^{-1}\mathrm{C})$ pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{A}_\mathcal{W}$, on a

$$\sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_\mathrm{F})} f_{\mathrm{C}_0}(ug^{-1}) = 0$$

pour tout $g \in \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. En en déduit que, pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_W)$, la fonction f_C vérifie,

$$(*) \quad \sum_{u \in \mathrm{U}(k_\mathrm{F})} f_\mathrm{C}(ug^{-1}) = 0$$

pour tout $g \in \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ et tout sous-groupe parabolique standard maximal propre $\mathrm{P}(k_\mathrm{F})$ de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ de radical unipotent $\mathrm{U}(k_\mathrm{F})$.

Soit $\sum_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{A}_\mathcal{W}}} f_\mathrm{C}$ un élément de $\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}$. Montrons que $\varphi(f)$ vérifie la condition (*) ci-dessus. Comme pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})$, f_C est dans la partie cuspidale de l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$, alors pour tout sous-groupe parablique propre P de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ de radical unipotent U on a

$$\sum_{u \in \mathrm{U}} f_\mathrm{C}(gu) = 0$$

Soit $g \in \mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ et $\mathrm{P}(k_\mathrm{F})$ un sous-groupe parabolique standard maximal propre de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ de radical unipotent $\mathrm{U}(k_\mathrm{F})$. On a

$$\sum_{u \in \mathrm{U}} f_\mathrm{C}(ug) = \sum_{u \in \mathrm{U}} f_\mathrm{C}(g^{-1}gug) = \sum_{v \in g^{-1}\mathrm{U}g} f_\mathrm{C}(gv) = 0$$

Donc $\varphi(f)$ est bien dans l'espace $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$. Ainsi, l'opérateur d'entrelacement φ envoie injectivement la représentation $\bigoplus_{\mathrm{C} \in \mathrm{Ch}(\mathcal{A}_\mathcal{W})} (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}$ dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$.

□

Proposition 6.27. *Le $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-module $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ contient la représentation*

$$(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}$$

De plus, on a l'isomorphisme

$$\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \simeq (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}$$

Démonstration. Soit C une chambre fixée de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. D'après la preuve de la proposition (6.25), page 136, l'application

$$\Psi : \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}$$

définie par $\Psi(f)(x) = f(x^{-1}.\mathrm{C})$, est un isomorphisme de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$-modules. Notons

$$\varphi : \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})} \longrightarrow \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$$

l'application réciproque de Ψ. On vérifie facilement que φ est définie par,

$$\varphi(f)(\mathrm{C}') = \begin{cases} f(x), & \text{si } \mathrm{C}' = x^{-1}.\mathrm{C} \\ 0\ , & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrons que φ envoie la partie cuspidale de l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}$ dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$. Soit $f \in (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathcal{W},1}^{n-2}$, un simplexe de la forme

$$\sigma = \{g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

avec τ_0 est un sommet de l'appartement $\mathcal{A}_{k_{\mathrm{F}}}$. Le simplexe σ est contenu dans une unique chambre C' contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. En effet

$$\mathrm{C}' = \{g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

est clairement l'unique chambre de $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant σ. Soit C_0 l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ tel que $\mathrm{C}' = g.\mathrm{C}_0$,

$$\mathrm{C}_0 = \{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

Dans la preuve de la proposition (6.26), on a vu que l'ensemble des chambres de $\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}})$ contenant σ est donné par,

$$\mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma) = \{gu\mathrm{C}_0,\ u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})\}$$

Par suite, on a

$$\sum_{\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)} [\mathrm{C}' : \sigma]\varphi(f)(\mathrm{C}') = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} [gu\mathrm{C}_0 : \sigma]\varphi(f)(gu\mathrm{C}_0)$$

Si $\mathrm{C}_0 \neq \mathrm{C}$, la dernière somme est nulle, sinon on a

$$\sum_{\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)} [\mathrm{C}' : \sigma]\varphi(f)(\mathrm{C}') = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} [gu\mathrm{C} : \sigma]\varphi(f)(gu\mathrm{C}) = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} [gu\mathrm{C} : \sigma] f(u^{-1}g^{-1})$$

Or les coefficients d'incidence $[\mathrm{C}':\sigma]$, pour $\mathrm{C}'\in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)$, valent tous 1. Donc on a,

$$\sum_{\mathrm{C}'\in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)}[\mathrm{C}':\sigma]\varphi(f)(\mathrm{C}')=\sum_{u\in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} f(u^{-1}g^{-1})=\sum_{u\in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} f(g^{-1}gu^{-1}g^{-1})$$

$$=\sum_{v\in g\mathrm{U}_{\tau_0 g^{-1}}(k_{\mathrm{F}})} f(g^{-1}v)$$

Comme $f\in (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}$, pour tout sous-groupe parabolique P de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ de radical unipotent U,

$$\sum_{u\in \mathrm{U}} f(xu)=0,\quad \text{pour tout } x\in \mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$$

puisque la fonction $\widetilde{f}$, définie sur $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ par $\widetilde{f}(x)=\sum_{u\in \mathrm{U}} f(xu)$, est dans l'espace de $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}$ et est invariante à droite par U. Par conséquent, on a

$$\sum_{\mathrm{C}'\in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)}[\mathrm{C}':\sigma]\varphi(f)(\mathrm{C}')=\sum_{v\in g\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})g^{-1}} f(g^{-1}v)=0$$

D'où $\varphi(f)$ est bien dans $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$. Par suite, φ envoie $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}$ dans l'intersection de $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$ avec $\mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$ qui est égale à $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$. On en déduit que la restriction de φ à la partie cuspidale de l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}$

$$\varphi:(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}\longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$$

est un plongement de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$. Montrons que le plongement φ induit un isomorphisme de $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}$ dans $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$, c'est-à-dire que l'application

$$\varphi:(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})}1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}\longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$$

est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de vérifier que les espaces $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$ et $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$ ont même partie cuspidale. L'inclusion

$$\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}\subset \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$$

est claire puisque l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$ est contenu dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})$. Pour la deuxième inclusion, soit $f\in \mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}),\mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$. Soit $\sigma\in \mathcal{S}_{\mathcal{W},1}^{n-2}$, un simplexe de la forme

$$\sigma=\{g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})\subset ...\subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

avec τ_0 est un sommet de l'appartement $\mathcal{A}_{k_{\mathrm{F}}}$. Le simplexe σ est contenu dans une unique chambre C' contenu dans l'appartement $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$. En effet

$$\mathrm{C}'=\{g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})\subset ...\subset g\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

est clairement l'unique chambre de $g.\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ contenant σ. Soit C_0 l'unique chambre de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ tel que $\mathrm{C}' = g.\mathrm{C}_0$,

$$\mathrm{C}_0 = \{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}}) \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}}) \subset ... \subset \mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})\mathrm{U}_{\tau_{n-2}}(k_{\mathrm{F}})\}$$

On a

$$\sum_{\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)} [\mathrm{C}' : \sigma] f(\mathrm{C}') = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} f(gu\mathrm{C}_0) = \sum_{u \in \mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})} f(gug^{-1}g.\mathrm{C}_0) = \sum_{v \in g\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})g^{-1}} f(v^{-1}g\mathrm{C}_0)$$

Or comme f est dans la partie cuspidale de $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$, pour tout sous-groupe parabolique P de $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ de radical unipotent U, la fonction

$$\widetilde{f} : \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par, $\widetilde{f}(\mathrm{C}') = \sum_{u \in \mathrm{U}} f(u^{-1}.\mathrm{C}')$, est invariante par U. Donc $\widetilde{f}$ est nulle. En particulier, on a

$$\sum_{\mathrm{C}' \in \mathrm{Ch}_{\mathcal{W}}(\sigma)} [\mathrm{C}' : \sigma] f(\mathrm{C}') = \sum_{v \in g\mathrm{U}_{\tau_0}(k_{\mathrm{F}})g^{-1}} f(v^{-1}g\mathrm{C}_0) = 0$$

Par suite, f appartient à $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \cap \mathcal{H}_1(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C}) = \mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$. D'où on a la deuxième inclusion. Donc on a l'égalité

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} = \mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$$

□

Remarque :

(i) On peut montrer que l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$ contient strictement la partie cuspidale de l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}$. En particulier, le plongement de la preuve ci-dessus n'est pas un isomorphisme.

(ii) Il en découle de la proposition précédente l'isomorphisme suivant,

$$\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}} \simeq (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})}^{\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})} 1_{\mathrm{T}(k_{\mathrm{F}})})^{\mathrm{cusp}}$$

6.4 Représentations cuspidales de niveau zéro de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$

Théorème 6.28. *Toute représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial du groupe* $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$ *se plonge dans le* $\mathrm{G}_n(k_{\mathrm{F}})$*-module* $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_{\mathrm{F}}), \mathbb{C})$.

Démonstration. Commençons par montrer que toute représentation cuspidale irréductible (π, V) de $G_n(k_F)$ se plonge dans le $G_n(k_F)$-module $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_F), \mathbb{C})$.
Montrons que π se plonge dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_F), \mathbb{C})$. D'après la proposition (6.25), la représentation $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_F), \mathbb{C})$ est isomorphe à l'induite $\mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_n(k_F)} 1_{T(k_F)}$. En utilisant le modèle de Kirillov, on va montrer que π se plonge dans cette dernière induite. Soit M_n le sous-groupe mirabolique de $G_n(k_F)$, U_n le sous-groupe unipotent supérieure standard et Z_n le centre de $G_n(k_F)$:

$$M_n = \{ \begin{pmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ g \in \mathrm{GL}_{n-1}(k_F),\ x \in (k_F)^{n-1} \}$$

et

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & k_F & \cdots & k_F \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & k_F \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On fixe un caractère non trivial Ψ du groupe additif de k_F et on définit un caractère χ du groupe U_n par,

$$\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \psi(x_{1,2} + x_{2,3} + ... + x_{n-1,n})$$

Par le modèle de Kirillov, la restriction de π au groupe Z_nM_n est isomorphe à l'induite $\mathrm{Ind}_{Z_nU_n}^{Z_nM_n}\chi$. Donc, d'après la formule de Mackey, la restriction de π au groupe $T(k_F)$ est donnée par,

$$\pi_{|T(k_F)} = (\mathrm{Ind}_{Z_nU_n}^{Z_nM_n}\chi)_{|T(k_F)} = \bigoplus_{g \in Z_nU_n \backslash Z_nM_n / T(k_F)} \mathrm{Ind}_{(Z_nU_n)^g \cap T(k_F)}^{T(k_F)} \chi^g$$

$$= \bigoplus_{g \in Z_nU_n \backslash Z_nM_n / T(k_F)} 1_{T(k_F)}$$

puisque l'intersection $(Z_nU_n)^g \cap T(k_F)$ est toujours triviale. Alors $\pi_{|T(k_F)}$ contient le caractère trivial. Par suite, l'espace $\mathrm{Hom}_{T(k_F)}(\pi_{|T(k_F)}, 1_{T(k_F)})$ est non nul. Par réciprocité de Frobenius, l'espace $\mathrm{Hom}_{G_n(k_F)}(\pi, \mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_n(k_F)} 1_{T(k_F)})$ est non nul, et donc, par irréductibilité de π, la représentation π se plonge dans $\mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_n(k_F)} 1_{T(k_F)}$. Comme π se plonge dans $\mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_n(k_F)} 1_{T(k_F)}$, d'après la proposition (6.25), π se plonge dans $\mathcal{H}_0(\mathcal{W}_n(k_F), \mathbb{C})$. Fixons un plongement de $G_n(k_F)$-modules,

$$\Phi : V \longrightarrow \mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_n(k_F)} 1_{T(k_F)}$$

Comme la représentation V est cuspidale et que Φ est injective, alors $\Phi(\mathrm{V})$ est contenu dans la partie cuspidale de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$, or d'après la proposition (6.27) la représentations $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}$ est contenu dans $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$, alors Φ est un plongement de V dans l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ des formes harmoniques. Montrons que la représentation V se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$. D'après le théorème (4.22), page 62, la représentation $\mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ s'identifie à la contragrédiente de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$, or on a un opérateur d'entrelacement injectif

$$\Phi : \mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})^*$$

Donc en passant aux contragrédientes, on obtient un opérateur d'entrelacement surjectif,

$$\Phi^* : \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})^{**} \simeq \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{V}^*$$

Or, la contragrédiente d'une représentation cuspidale irréductible de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ est cuspidale irréductible, donc V^* est cuspidale irréductible. Par conséquent V^* est isomorphe à une sous-représentation de $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$. Comme l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations cuspidales irréductibles de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ est stable par contragrédientes, alors V se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$.

□

Proposition 6.29. *Toutes les représentations cuspidales irréductibles de* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ *apparaisent dans le* $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$*-module* $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ *avec la même multiplicité égale à*

$$m_{\mathrm{cusp}} = \frac{1}{q^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)\cdots(q^{n-1}-q^{n-2})$$

Démonstration. Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$. Comme la représentation $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}$ est isomorphe à $(\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}$ et que π est cuspidale, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})) &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})^{\mathrm{cusp}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}})\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C}))) &= \dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, (\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})^{\mathrm{cusp}}) \\ &= \dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})\end{aligned}$$

or par la réciprocité de Frobenius,

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})) = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}(\pi_{|\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}, 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}))$$

En utilisant les notations de la démonstration du théorème précédent, la restriction de π au groupe $\mathrm{Z}_n\mathrm{M}_n$ est isomorphe à l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{Z}_n\mathrm{U}_n}^{\mathrm{Z}_n\mathrm{M}_n}\chi$. Donc d'après la formule de Mackey, la restriction de π au groupe $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est donné par,

$$\pi_{|\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} = (\mathrm{Ind}_{\mathrm{Z}_n\mathrm{U}_n}^{\mathrm{Z}_n\mathrm{M}_n}\chi)_{|\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} = \bigoplus_{g\in \mathrm{Z}_n\mathrm{U}_n\backslash\mathrm{Z}_n\mathrm{M}_n/\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} \mathrm{Ind}_{(\mathrm{Z}_n\mathrm{U}_n)^g\cap\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}\chi^g$$

$$= \bigoplus_{g\in \mathrm{Z}_n\mathrm{U}_n\backslash\mathrm{Z}_n\mathrm{M}_n/\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$$

puisque l'intersection $(\mathrm{Z}_n\mathrm{U}_n)^g \cap \mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ est toujours trivial. Alors on a

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}(\pi_{|\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}, 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})})) = |\mathrm{U}_n\backslash\mathrm{Z}_n\mathrm{M}_n/\mathrm{T}(k_\mathrm{F})| = |\mathrm{T}_{n-1}(k_\mathrm{F})/\mathrm{G}_{n-1}(k_\mathrm{F})|$$

$$= \frac{1}{q^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)...(q^{n-1}-q^{n-2})$$

Donc la dimension de l'espace $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})))$ est égale à

$$m_{\mathrm{cusp}} = \frac{1}{q^{n-1}}(q^{n-1}-1)(q^{n-1}-q)...(q^{n-1}-q^{n-2})$$

□

Théorème 6.30. *Toute représentation cuspidale irréductible de niveau zéro de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *de caractère central trivial sur* ${\mathcal{O}_\mathrm{F}}^\times$ *est isomorphe à un sous-quotient irréductible de*

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^\mathbb{T}, \mathbb{C})$$

.

Démonstration. Soit (π, V) une représentation cuspidale irréductible de niveau zéro de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ de caractère central trivial sur ${\mathcal{O}_\mathrm{F}}^\times$. D'après le théorème (2.39), page 30, il existe une représentation cuspidale irréductible $\bar\sigma$ de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ telle que $\pi = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}}\widehat{\sigma}$, où K est le sous-groupe compact maximal $\mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_\mathrm{F})$, Z est le centre de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$, σ l'inflation de $\bar\sigma$ à K, et $\widehat\sigma$ l'unique extension de σ à ZK vérifiant $\widehat\sigma(zk) = \omega_\pi(z)\sigma(k)$ pour tout $z \in \mathrm{Z}$ et $k \in \mathrm{K}$, où ω_π est le caractère central de π. D'après le théorème (6.28), la représentation $\bar\sigma$ de $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$ se plonge dans le $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-module $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$, donc sa relevée σ se plonge dans $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}, \mathbb{C})$ comme représentation lisse de K, pour tout sommet s de l'immeuble $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Par conséquent, par exactitude de l'induction compacte, la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\sigma$ se plonge dans

$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}, \mathbb{C})$$

pour s le sommet standard de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Donc $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\sigma$ se plonge dans la somme directe

$$\bigoplus_{s\in\mathrm{C}} c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^\mathbb{T}, \mathbb{C})$$

Ainsi, de l'identité (6.2.3), page 133, la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\sigma$ se plonge dans le gradué $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$. Montrons que la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\sigma$ de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ se plonge dans le gradué du $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ pour une certaine filtration décroissante.

D'après la proposition (6.7), page 119, les composantes connexes du $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-complexe simplicial $\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ sont les translatés $g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, pour $g \in \mathrm{G}_n(\mathrm{F})/\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. Donc on a un isomorphisme d'espaces vectoriels,

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{g\in \mathrm{G}_n(\mathrm{F})/\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} \mathrm{H}_c^{n-1}(g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

Le groupe $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ permute transitivement les espaces $\mathrm{H}_c^{n-1}(g.\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$, lorsque g parcourt l'ensemble $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})/\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. Alors on a un isomorphisme de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-modules lisses,

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}) \simeq c\text{-ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

La filtration décroissante du $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ donnée par la suite spectrale ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}^r$ de la section (6.2), page 130, induit par induction compacte de $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ à $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ une filtration décroissante du $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$-module $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$.

Le gradué $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$ de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$ relativement à cette dernière filtration est alors donné par,

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})) = c\text{-ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$$

Comme la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}\sigma$ se plonge dans $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$. Par suite, par induction compacte la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\sigma$ se plonge dans le gradué

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$$

Par conséquent, la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\sigma$ se plonge dans un sous-quotient de

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

Par transitivité de l'induction compacte on a,

$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\sigma = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}(c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}\sigma)$$

Or,

$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}\sigma = c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}(\widehat{\sigma}_{|\mathrm{K}}) = \widehat{\sigma}\otimes c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}1_{\mathrm{K}}$$

Donc,

$$c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\sigma = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}(\widehat{\sigma}\otimes c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}}1_{\mathrm{K}}) \tag{6.4.1}$$

La représentation triviale 1_{ZK} de ZK est un sous-quotient irréductible de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}$. En effet d'après la réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{ZK}}(c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}, 1_{\mathrm{ZK}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(1_{\mathrm{K}}, 1_{\mathrm{K}})$$

Donc l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ZK}}(c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}, 1_{\mathrm{ZK}})$ est non nul. Par suite, la représentation 1_{ZK} est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} 1_{\mathrm{K}}$ puisqu'elle est irréductible. Par suite, la représentation $\widehat{\sigma}$ est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{ZK}} \sigma$ puisque la représentation 1_{ZK} l'est. Donc par exactitude de l'induction compacte et vue l'identité (6.4.1), la représentation $\pi = c\text{-ind}_{\mathrm{ZK}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})} \widehat{\sigma}$ est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})} \sigma$. On a montrer ci-dessus que la représentation $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})} \sigma$ se plonge dans un sous-quotient de

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

Comme π est un sous-quotient de $c\text{-ind}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})} \sigma$, π se plonge dans un sous-quotient de l'espace de cohomologie ci-dessus. De plus, π étant irréductible, c'est donc un sous-quotient irréductible de l'espace de cohomologie

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

□

Théorème 6.31. *La représentation de Steinberg de* $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ *est isomorphe à un sous-quotient irréductible de*

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$$

Démonstration. D'après la section (6.2), page 130, il existe une filtration décroissante de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})$ dans la catégorie des représentations lisses de $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$ tel que le gradué est donné par,

$$\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})) = \bigoplus_{p+q=n-1} {}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{p,q}^n$$

D'après la proposition (6.21), page 131, le $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse ${}^{\mathrm{II}}\mathrm{E}_{n-1,0}^n$ est isomorphe à $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^0)$, où $\mathcal{H}^0$ est le système de coefficients introduit dans la section (6.2), page 130. Dans la section (6.1.5), page 126, on a vu que le groupe de Weyl sphérique $\mathbb{W}$ de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ agit simplicialement de façon régulière sur le complexe $\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$. De plus, $\mathbb{W}$ laisse globalement invariant le sous-complexe $\mathcal{W}_n^s(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$, pour tout sommet s de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. Donc d'après le théorème (4.59), page 83, le $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), (\mathcal{H}^0)^{\mathbb{W}})$ s'identifie à un sous-$\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})), \mathcal{H}^0)$, où $(\mathcal{H}^0)^{\mathbb{W}}$ est le sous-système de coefficients des points fixes de $\mathcal{H}^0$ sous l'action de $\mathbb{W}$ (voir page 83). Montrons que le sytème de coefficients $(\mathcal{H}^0)^{\mathbb{W}}$ est constant. Pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$ on a,

$$(\mathcal{H}_\sigma^0)^{\mathbb{W}} = \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}, \mathbb{C})^{\mathbb{W}}$$

L'action de $\mathbb{W}$ sur chaque complexe $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}}$ étant régulière, donc d'après le théorème (4.26), page 65, on a

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})^{\mathbb{W}} \simeq \mathrm{H}^0((\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T}})/\mathbb{W},\mathbb{C}) = \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}},\mathbb{C})$$

Or d'après la proposition (6.17), page 128, pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, le complexe simplicial $\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}}$ est connexe. Par suite,

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}},\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$$

Ainsi, pour tout simplexe σ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$, $(\mathcal{H}^0_\sigma)^{\mathbb{W}} = \mathbb{C}$. De plus, on vérifie facilement que les morphismes de restriction

$$r_\tau^\sigma : \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_n^\sigma(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}},\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{W}_n^\tau(\mathrm{F})^{\mathbb{T},\mathbb{W}},\mathbb{C})$$

s'identifient à l'application identité, pour tout simplexes $\sigma \subset \tau$ de $\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F}))$. On en déduit que le système de coefficients $(\mathcal{H}^0)^{\mathbb{W}}$ est constant. Ainsi, on a un isomorphisme de G_n^0-modules lisses,

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})),(\mathcal{H}^0)^{\mathbb{W}}) \simeq \mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})),\mathbb{C})$$

D'après le théorème de Borel-Serre, théorème (4.25) de la page 65, le $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$-module lisse $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{B}(\mathrm{G}_n(\mathrm{F})),\mathbb{C})$ est isomorphe à la représentation $\mathrm{St}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}$, restriction de la représentation de Steinberg à $\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})$. Par suite, la représentation $\mathrm{St}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}$ se plonge dans le gradué $\mathrm{Gr}(\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}))$, et donc se plonge dans un sous-quotient de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$. D'après la preuve du théorème précédent, on a

$$\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C}) \simeq c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\mathrm{H}_c^{n-1}(\mathcal{W}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$$

Donc par exactitude de l'induction compacte, la représentation

$$c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}\mathrm{St}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})} \simeq \mathrm{St} \otimes c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}$$

se plonge dans un sous-quotient de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$, où St est la représentation de Steinberg de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$. La représentation triviale $1_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}$ de $\mathrm{G}_n(\mathrm{F})$ est un quotient irréductible de $c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}$. En effet d'après la réciprocité de Frobenius, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}(c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})},1_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}(1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})},1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})})$$

Donc l'espace $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}(c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})},1_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})})$ est non nul. Par suite, la représentation $1_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}$ est un quotient de $c\text{-}\mathrm{ind}_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}1_{\mathrm{G}_n^0(\mathrm{F})}$ puisqu'elle est irréductible. Comme on a $\mathrm{St} = \mathrm{St} \otimes 1_{\mathrm{G}_n(\mathrm{F})}$, la représentation St se plonge dans un sous-quotient de $\mathrm{H}_c^{n-1}(\widetilde{\mathcal{W}}_n(\mathrm{F})^{\mathbb{T}},\mathbb{C})$. Par conséquent, St est isomorphe à un sous-quotient irréductible de ce dernier espace de cohomologie.

□

Remarque 6.32. *Le $\mathrm{G}_n(k_\mathrm{F})$-complexe simplicial $\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F})$ est muni d'une action de $\mathrm{K} = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_\mathrm{F})$ trivial sur $\mathrm{K}^1 = \mathrm{I}_n + \varpi_\mathrm{F}\mathrm{M}_n(\mathcal{O}_\mathrm{F})$. L'espace de cohomologie $\mathrm{H}^{n-1}(\mathcal{W}_n(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ contient toutes les représentations cuspidales irréductibles de K/K^1 de cacartère central trivial. Ce sont les types de niveau zéro pour les représentations cuspidales de niveau zéro et de caractère central trivial sur $\mathcal{O}_\mathrm{F}^\times$.*

6.5 Représentations cuspidales de $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$

Dans cette dernière section, en utilisant la cacartéristique d'Euleur-Poincaré, on se propose de redémontrer que le $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$-module $\mathrm{H}^2(\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$ contient toutes les représentations cuspidales irréductibles et de caractère central trivial de $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$.

On rappelle que le complexe de cochaînes du $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$-complexe $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$ est donné par,

$$0 \longrightarrow \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{d_0} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)}, \mathbb{C}) \xrightarrow{d_1} \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(2)}, \mathbb{C}) \longrightarrow 0 \longrightarrow ...$$

où X désigne le complexe $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$.

Théorème 6.33. *Toute représentation cuspidale irréductible de caractère central trivial du groupe $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$ se plonge dans le $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$-module $\mathrm{H}^2(\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F}), \mathbb{C})$*

Démonstration. L'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathrm{X}_p \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $f(-x) = f(x)$ pour tout p-simplexe orienté x, où $-x$ désigne le p-simplexe orienté opposé à x. Pour tout p-simplexe σ, on note f_σ la fonction de $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$ dont le support est contenu dans $\{\sigma^-, \sigma^+\}$, où σ^- et σ^+ sont les deux p-simplexes orientés correspondants à σ pour un choix quelconque de l'orientation de σ. La famille $(f_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{X}_p}$ est une base de $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$. Puisque le groupe permute les sous-espaces $\mathbb{C}f_\sigma$, l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$, comme $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$-module, est somme directe d'induites. Plus précisément on a

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Lambda_p} \mathrm{Ind}_{\mathrm{G}_\sigma}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{G}_\sigma}$$

où Λ_p est un système de représentants de l'action de $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$ sur X_p et G_σ le stabilisateur de σ. Pour identifier les représentations $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(p)}, \mathbb{C})$, il nous suffit donc de déterminer un système de représentants de X_p sous l'action de $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$. Commençons par l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)}, \mathbb{C})$. L'ensemble X_0 des sommets du complexe $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$ est l'ensemble des classes à gauche $g\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})$, pour g dans $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$ et σ un simplexe du cône $\mathcal{C}(\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}})$. Un système de représentants de X_0 est donné par l'ensemble des sommets de l'appartement standard de $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$,

$$\Lambda_0 = \{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\} \cup \{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F}), \sigma \in \Sigma_{\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}}\}$$

En effet, tout sommet de $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$ est le translaté d'un sommet de l'appartement standard. De plus, il est clair que deux sommets distincts de l'appartement standard ne sont pas dans la même orbite.

Par conséquent,

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)},\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} \oplus \bigoplus_{\sigma\in\Sigma_{\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})}$$

D'où l'isomorphisme (1) : $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)},\mathbb{C})$ est isomorphe à la somme directe

$$\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} \oplus 6.\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{B}(k_\mathrm{F})} \oplus 3.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})} \oplus 3.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})}$$

où $\mathrm{B}(k_\mathrm{F})$ est le sous-groupe de Borel standard, $\mathrm{P}^{1,2}(k_\mathrm{F})$ (resp. $\mathrm{P}^{2,1}(k_\mathrm{F})$) est le sous-groupe parabolique standard de type $(1,2)$ (resp. de type $(2,1)$) et $\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})$ (resp. $\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})$) est le radical unipotent de $\mathrm{P}^{1,2}(k_\mathrm{F})$ (resp. $\mathrm{P}^{2,1}(k_\mathrm{F})$).

Pour l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C})$, un système de représentants de X_1 est donné par l'ensemble des arêtes de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})}$ de $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$. Or, les arêtes de $\mathcal{A}_{\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})}$ sont de deux types. Les arêtes $a = \{\mathrm{T}(k_\mathrm{F}) \subset \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})\}$ avec σ un simplexe non vide de l'appartement $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$ ou les arêtes $a = \{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_0}(k_\mathrm{F}) \subset \mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(k_\mathrm{F})\}$ avec σ_0 un simplexe non vide de l'appartement $\mathcal{A}_{k_\mathrm{F}}$. Les arêtes du premier type ont pour stabilisateurs $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$ et ceux du deuxième type ont pour stabilisateur $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_0}(k_\mathrm{F})$. Le nombre d'arêtes du premier type est égale à 12. On obtient,

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C}) \simeq 12.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} \oplus \bigoplus_{a=\{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_0}(k_\mathrm{F})\subset\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_{\sigma_1}(k_\mathrm{F})\}} \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}_\sigma(k_\mathrm{F})}$$

D'où l'isomorphisme (2) : $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C})$ est isomorphe à la somme directe

$$\simeq 12.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})} \oplus 6.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})} \oplus 6.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})}$$

Enfin pour l'espace $\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(2)},\mathbb{C})$, un système de représentants de X_2 est donné par l'ensemble des chambres de l'appartement standard $\mathcal{A}_{\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})}$ de $\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})$. Le stabilisateur de chaque chambre étant égale à $\mathrm{T}(k_\mathrm{F})$. De plus, l'appartement $\mathcal{A}_{\mathcal{W}_3(k_\mathrm{F})}$ contient 12 chambres. Par conséquent :

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(2)},\mathbb{C}) \simeq 12.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$$

D'où l'isomorphisme (3) :

$$\mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(2)},\mathbb{C}) \simeq 12.\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$$

La caractéristique d'Euler-Poincaré du complexe de cochaînes de X dans la catégorie des représentations virtuelles de longueur finie de $\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})$ s'écrit,

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathbb{C}) - \mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathbb{C}) + \mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(2)},\mathbb{C}) - \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C}) + \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)},\mathbb{C})$$

Le complexe X étant connexe, alors $\mathrm{H}^0(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Par suite on a,

$$\mathrm{H}^2(\mathrm{X},\mathbb{C}) - \mathrm{H}^1(\mathrm{X},\mathbb{C}) = \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(2)},\mathbb{C}) - \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(1)},\mathbb{C}) + \mathrm{C}_c^{or}(\mathrm{X}_{(0)},\mathbb{C}) - 1_{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})}$$

Compte tenu des isomorphismes (1), (2) et (3), on obtient l'égalité (4) dans le groupe de Grothendieck des représentations de longueur finie de $G_3(k_F)$

$$(4) \qquad H^2(X,\mathbb{C}) - H^1(X,\mathbb{C}) = \mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)} + 6.\mathrm{Ind}_{B(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)}$$

$$-3.\mathrm{Ind}_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)} - 3.\mathrm{Ind}_{T(k_F)U^{2,1}(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)U^{2,1}(k_F)} + 1_{G_3(k_F)}$$

Soit π une représentation cuspidale irréductible de $G_3(k_F)$ de caractère central trivial. En utilisant le modèle de Kirillov, nous allons montrer que la représentation π se plonge dans l'induite $\mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)}$. Soit M le sous-groupe mirabolique, U le sous-groupe unipotent supérieur standard et Z le centre de $G_3(k_F)$,

$$M = \{\begin{pmatrix} g & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ g \in \mathrm{GL}_2(k_F),\ x \in (k_F)^2\}, \qquad U = \{\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x,y,z \in k_F\}$$

On fixe un caractère non trivial Ψ du groupe additif de k_F et on définit le caractère χ du groupe U par,

$$\chi(\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = \psi(x+y)$$

Par le modèle de Kirillov, la restriction de π au groupe ZM est isomorphe à l'induite $\mathrm{Ind}_{ZU}^{ZM}\chi$. Donc, d'après la formule de Mackey, la restriction de π au groupe $T(k_F)$ est donnée par,

$$\pi_{|T(k_F)} = (\mathrm{Ind}_{ZU}^{ZM}\chi)_{|T(k_F)} = \bigoplus_{g \in ZU\backslash ZM/T(k_F)} \mathrm{Ind}_{(ZU)^g \cap T(k_F)}^{T(k_F)} \chi^g$$

Pour $g = 1$ l'intersection $(ZU)^g \cap T(k_F)$ vaut $T(k_F)$ et que χ est trivial sur $T(k_F)$, alors $\pi_{|T(k_F)}$ contient le caractère trivial. Donc l'espace $\mathrm{Hom}_{T(k_F)}(\pi_{|T(k_F)}, 1_{T(k_F)})$ est non nul. Par réciprocité de Frobenius, l'espace $\mathrm{Hom}_{G_3(k_F)}(\pi, \mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)})$ est non nul, et donc, par irréductibilité de π, la représentation π se plonge dans $\mathrm{Ind}_{T(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)}$. De plus, la représentation π ne se plonge dans aucune des représentations suivantes

$$\mathrm{Ind}_{B(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)},\quad \mathrm{Ind}_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ind}_{T(k_F)U^{2,1}(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)U^{2,1}(k_F)}$$

En effet, comme est cuspidale, elle ne se plonge pas dans l'induite $\mathrm{Ind}_{B(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)}$. De plus, par réciprocité de Frobenius on a

$$\mathrm{Hom}_{G_3(k_F)}(\pi, \mathrm{Ind}_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)}^{G_3(k_F)} 1_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)}) \simeq \mathrm{Hom}_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)}(\pi_{|T(k_F)U^{1,2}(k_F)}, 1_{T(k_F)U^{1,2}(k_F)})$$

Le deuxième espace d'entrelacement est isomorphe à l'espace $\widetilde{V}^{T(k_F)U^{1,2}(k_F)}$, espace des points fixes sous $T(k_F)U^{1,2}(k_F)$ de la contragrédiente de π. Comme π est cuspidale, sa contragrédiente l'est aussi. Donc $\widetilde{V}^{T(k_F)U^{1,2}(k_F)} \subset \widetilde{V}^{U^{1,2}(k_F)} = \{0\}$. Par suite, l'espace

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})}(\pi, \mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})})$ est nul. D'où π n'est isomorphe à aucun constituant irréductible de l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{1,2}(k_\mathrm{F})}$. Par le même raisonnement, π n'est isomorphe à aucun constituant irréductible de l'induite $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})\mathrm{U}^{2,1}(k_\mathrm{F})}$. Comme π se plonge dans $\mathrm{Ind}_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}^{\mathrm{G}_3(k_\mathrm{F})} 1_{\mathrm{T}(k_\mathrm{F})}$, d'après l'identité (4) ci-dessus et d'après ce qui précéde, π se plonge dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{C}) - \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathbb{C})$, et donc π se plonge dans $\mathrm{H}^2(\mathrm{X}, \mathbb{C})$. $\square$

Bibliographie

[AB10] Peter Abramenko and Kenneth S. Brown. *Buildings : Theory and Applications (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, softcover reprint of hardcover 1st ed. 2008 edition, 10 2010.

[BCH91] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson. Classifying Space for Proper Actions and K-Theory of Group C^*-algebras. *Contemporary Mathematics*, 1991.

[BH06] Colin J. Bushnell and Guy Henniart. *The Local Langlands Conjecture for GL(2) (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2006 edition, 8 2006.

[BH11] Martin R. Bridson and André Häfliger. *Metric Spaces of Non-Positive Curvature (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 1st ed. 1999. corr. 2nd printing 2009 edition, 10 2011.

[BK] CJ Bushnell and PC Kutzko. *Supercuspidal representations od GL(N)*. Princeton University Press.

[BK93] CJ Bushnell and PC Kutzko. *The Admissible Dual Of GL(n) Via Compact Open Subgroups*. Princeton University Press, 1993.

[BK98] CJ Bushnell and PC Kutzko. Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types. *London Mathematical Society*, 1998.

[BR] J. Bernstein and K. E. Rummelhart. *Draft of : Representations of p-adic groups. Lectures by Joseph Bernstein*. Harvard University.

[Bre72] Glen E. Bredon. *Introduction to compact transformation groups, Volume 46 (Pure and Applied Mathematics)*. Academic Press, 8 1972.

[Bre97] Glen E. Bredon. *Sheaf Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2nd edition, 2 1997.

[Bro82] Kenneth S. Brown. *Cohomology of Groups (Graduate Texts in Mathematics, No. 87)*. Springer, 1st ed. 1982. corr. 2nd printing 1994 edition, 11 1982.

[Bro00] Kenneth S. Brown. *Buildings (Springer Monographs in Mathematics)*. Springer, 3 2000.

[Bro03] Paul Broussous. Un revêtement équivariant de l'arbre de GL(2) d'un corps local . *Comp. Math*, 2003.

[Bro04a] Paul Broussous. Acyclicity of schneider and stuhler's coefficient systems : another approach in the level 0 case. *J. of Algebra*, 2004.

[Bro04b] Paul Broussous. Simplicial complexes lying equivariantly over the affine building of GL(N). *Math. Ann*, 2004.

[Bro08] Paul Broussous. Representations of PGL(2) of a local field and harmonic cochains on graphs. *Ann. Sci. Univ. Toulouse*, 2008.

[Bro12] Paul Broussous. Distinction of the steinberg representation. *International Math. Research*, 2012.

[Bro13] Paul Broussous. A geometric construction of types for the smooth representations of PGL(2) over a local field. *Represent. Theory*, 2013.

[BS71] Armand Borel and Jean Pierre Serre. Cohomologie à support compacts des immeubles de Bruhat-Tits, applications à la cohomologie des groupes S-arithmétiques. *C.R.Acad.sc.Paris*, janvier 1971.

[BT72] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local :I. Données radicielles valuées. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S*, 1972.

[BT84] François Bruhat and Jacques Tits. Groupes réductifs sur un corps local : II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée. *Publications mathématiques de l'I.H.É.S*, 1984.

[BZ76] N Bernstein, I and V Zelevinskii, A. Representations of the group GL(n, F) where F is a non archimedean local field. *Russian Math*, 1976.

[Car84] Henri Carayol. Représentations cuspidales du groupe linéaire. *Annales scientifiques de l'E.N.S*, 1984.

[Cas95] Bill Casselman. Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups. `http://www.math.ubc.ca/ cass/research/pdf/p-adic-book.pdf` , 1995. [Online ; accessed May 1995].

[CG82] C.W.Curtis and G.I.Lehrer. Homology representations of finite groups of lie type. *Contemporary Mathematics*, 1982.

[Cho94] Francis Choucroun. Analyse harmonique des groupes d'automorphismes d'arbres de Bruhat-Tits. *Mémoire de la S.M.F*, 1994.

[Dol95] Albrecht Dold. *Lectures on Algebraic Topology (Classics in Mathematics)*. Springer, reprint of the 2nd ed. new york, heidelberg, berlin 1980. edition, 2 1995.

[Ess10] Jan Essert. *Buildings, Group Homology and Lattices*. PhD thesis, Mathematisches Institut, Universität Münster, 2010.

[Gar97] Paul B. Garrett. *Buildings and Classical Groups*. Chapman and Hall/CRC, 1 edition, 4 1997.

[Geo08] Ross Geoghegan. *Topological Methods in Group Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2008 edition, 1 2008.

[God98] Roger Godement. *Topologie algebrique et theorie des faisceaux (Actualites scientifiques et industrielles) (French Edition)*. Hermann, 0 edition, 1998.

[Hig96] Nigel Higson. Cyclic Homology of Totally Disconnected Groups Acting on Buildings. *journal of functional analysis*, 1996.

[HR95] E. Hewitt and K.a. Ross. *Abstract Harmonic Analysis : Structure of Topological Groups-Integration Theory-Group Representations (Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften)*. Springer-Verlag, 2nd edition, 5 1995.

[Hu68] Sze-Tsen Hu. *Cohomology Theory*. Markham Publishing Company, 1st edition, 1968.

[Hum92] James E. Humphreys. *Reflection Groups and Coxeter Groups (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, 10 1992.

[Hum98] James E. Humphreys. *Linear Algebraic Groups (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 5 1998.

[JPSJ81] Jacquet.H, Piatetski-Shapiro.I.I, and Shalika. J. Conducteur des représentations du groupe linéaire. *Mathematische Annalen*, 1981.

[Koz08] Dimitry Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology (Algorithms and Computation in Mathematics)*. Springer, 2008 edition, 1 2008.

[LW69] Albert T Lundell and Stephen Weindgram. *The Topology of CW Complexes (The University Series in Higher Mathematics)*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[Mas78] William S Massey. *Homology and cohomology theory : An approach based on Alexander-Spanier cochains (Monographs and textbooks in pure and applied mathematics)*. M. Dekker, 1978.

[Mas80] W.S. Massey. *A basic course in algebraic topology (v. 127)*. Springer, corrected edition, 4 1980.

[Mun96] James R. Munkres. *Elements Of Algebraic Topology*. Westview Press, 1 1996.

[Mur09] Fiona Murnaghan. Representations of reductive p-adic groups. `http://www.math.toronto.edu/murnaghan/courses/mat1197/` , 2009. [Online ; accessed March 2009].

[Pet04] Marko Petzold. *Homologie-Darstellungen des Wagoner-Komplexes und eine Steinberg-Darstellung von* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p^l\mathbb{Z})$. PhD thesis, Mathematisches Institut, Universität Münster, 2004.

[PU91] P.Schneider and U.Stuhler. The cohomology of p-adic symmetric spaces. *Inventiones mathematicae*, 1991.

[PU93] P.Schneider and U.Stuhler. Resolutions for smooth representations of the general linear group over a local field. *Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik - J REINE ANGEW MATH*, 1993.

[PU97] P.Schneider and U.Stuhler. Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. *Publications mathématiques de l'I.H.E.S*, 1997.

[Raj] Anis Rajhi. Représentations de PGL(n) sur un corps local dans la cohomologie à support compact d'une tour projective d'espaces au dessus de l'immeuble affine. *à paraître.*

[Ren10] David Renard. *Representations Des Groupes Reductifs P-Adiques (Cours Specialises : Collection Smf) (French Edition).* Amer Mathematical Society, 1 2010.

[Rot08] Joseph Rotman. *An Introduction to Homological Algebra (Universitext).* Springer, 2nd edition, 11 2008.

[Ser68] Jean Pierre Serre. *Corps locaux.* Paris, Hermann, 1968, 2nd edition, 1968.

[Spa94] Edwin H. Spanier. *Algebraic Topology.* Springer, 12 1994.

[Spr02] *Trees (Springer Monographs in Mathematics) [Paperback] [2002] (Author) Jean-Pierre Serre, J. Stilwell.* Springer, 2002.

[Spr08] T.A. Springer. *Linear Algebraic Groups (Modern Birkhäuser Classics).* Birkhäuser, 2nd ed. 1998. 2nd printing 2008 edition, 11 2008.

[Sti95] John Stillwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory (Graduate Texts in Mathematics) (v. 72).* Springer, 2nd edition, 8 1995.

[Tit86] J. Tits. *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs (Lecture Notes in Mathematics).* Springer, 1 1986.

[Wag75] J.B Wagoner. Homotopy theory for the p-adic special linear group. *Comment.Math*, 1975.

[Wei95] Andre Weil. *Basic Number Theory (Classics in Mathematics).* Springer, reprint of the 2nd ed. berlin, heidelberg, new york 1973. edition, 2 1995.

[Wei08] Richard M. Weiss. *The Structure of Affine Buildings. (AM-168) (Annals of Mathematics Studies).* Princeton University Press, 9 2008.

[Wer01] Annette Werner. Compactification of the Bruhat-Tits building of PGL by lattices of smaller rank. *Documenta Math*, 2001.

Cohomologie d'espaces fibrés au-dessus de l'immeuble affine de GL(N)

Résumé

Cette thèse se compose de deux parties : dans la première on donne une généralisation d'espaces fibrés construit au-dessus de l'arbre de Bruhat-Tits du groupe GL(2) sur un corps p-adique. Plus précisément, on a construit une tour projective d'espaces fibrés au-dessus du 1-squelette de l'immeuble de Bruhat-Tits de GL(n) sur un corps p-adique. On a montré que toute représentation cuspidale π de GL(n) se plonge avec multiplicité 1 dans le premier espace de cohomologie à support compact du k-ième étage de la tour, où k est le conducteur de π. Dans la deuxième partie on a construit un espace $\mathcal{W}$ au-dessus de la subdivision barycentrique de l'immeuble de Bruhat-Tits de GL(n) sur un corps p-adique. Pour étudier les espaces de cohomologie à support compact d'un G-complexe simplicial propre X muni d'un recouvrement équivariant assez particulier, où G est un groupe localement compact totalement discontinu, on a montré l'existence d'une suite spactrale dans la catégorie des représentations lisses de G qui converge vers la cohomologie à support compact de X. En s'appuyant sur ce dernier résultat, on a calculé la cohomologie à support compact de l'espace $\mathcal{W}$ comme représentation lisse de GL(n) puis on a montré que les types cuspidaux de niveau 0 de GL(n) apparaissent avec multiplicité finie dans la cohomologie de certains complexes fini construit au niveau résiduel. Comme conséquence, on montre que les représentations cuspidales de niveau 0 de GL(n) apparaissent dans la cohomologie de $\mathcal{W}$.

Mots clés : Représentations des groupes p-adiques, représentations des groupes réductifs finis, immeuble de Bruhat-Tits, cohomologie à support compact, Types de Bushnell et Kutzko d'un groupe réductif p-adique.

Cohomology of fiber spaces over the affine building of GL(N)

Abstract

This thesis consists of two parts : the first one gives a generalization of fiber spaces constructed above the Bruhat-Tits tree of the group GL(2) over a p-adic field. More precisely we construct a projective tower of spaces over the 1-skeleton of the Bruhat-Tits building of GL(n) over a p-adic field. We show that any cuspidal representation π of GL(n) embeds with multiplicity 1 in the first cohomology space with compact support of k-th floor of the tower, where k is the conductor of π. In the second part we constructed a space $\mathcal{W}$ above the barycentric subdivision of the Bruhat-Tits building of GL(n) over a p-adic field. To study the cohomology spaces with compact support of a proper G-simplicial complex X with a rather special equivariant covering, where G is a totally disconnected locally compact group, we show the existence of a spectrale sequence in the category of smooth representations of G that converges to the cohomology with compact support of X. Based on the latter results, we calculate the cohomology with compact support of $\mathcal{W}$ as smooth representation of GL(n), and then we show that the level zero cuspidal types of GL(n) appear with finite multiplicity in the cohomology of some finite simplicial complexes constructed in residual level. As a consequence, we show that the cuspidal representations of level 0 of GL(n) appear in the cohomology of $\mathcal{W}$.

Keywords : Representations of p-adic groups, representations of finite reductive groups, Bruhat-Tits buildings, cohomology with compact support, Bushnell and Kutzko's types of reductive p-adic groups.