THESE

pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

Diplôme National - Arrêté du 7 aout 2006

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs Interactions

Présentée par :

Mohamed Amine CHERIF

Sur l'approximation rationnelle pour le semi-groupe de transport

---

Directeurs de thèse : **Hassan EMAMIRAD et Maher MNIF**

Soutenue le 9 Juillet 2010
devant la commission d'Examen

JURY

M. M-KHARROUBI	Professeur, Université de Besançon	Rapporteur
K. LATRACH	Professeur, Université de Clérmont-Ferrand 2	Rapporteur
H. BAKLOUTI	Maître de Conférences (HDR), Université de Sfax	Examinateur
H. EMAMIRAD	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
M. MNIF	Professeur, Université de Sfax	Examinateur
A. ROUGIREL	Maître de Conférences (HDR), Université de Poitiers	Examinateur

Table des matières

Introduction **3**

1 Introduction **3**
1.1 Equation linéaire de transport dans $\mathbf{L}^1(\Omega \times V)$ 3
1.2 Approximation d'un semi-groupe 7
1.3 Approximation dans le temps et dans l'espace 7
1.4 Méthodes numériques de différent ordre de convergence 9
1.5 Théorème de point fixe 13
1.6 Plan de travail 15

2 Préliminaires **19**
2.1 Définitions sur les semi-groupes 19
2.2 Généralité sur les espaces de Fréchet 22
2.3 Compacité et compacité faible 24

3 Approximation au sens de Kato d'un problème de transport **28**
3.1 Approximation des semi-groupes 28
3.2 Convergence au sens de Kato 30
3.3 Approximation d'une équation de transport 31

4 Approximation rationnelle des semi-groupes de transport au sens de Kato **41**
4.1 Ordre de convergence 41
4.2 Approximation de l'équation de transport sans collision. 44
4.2.1 Les schémas d'Euler explicite et implicite pour l'équation de transport sans collision. 46
4.2.2 Le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de transport sans collision. 46
4.2.3 Le schéma de Predictor-corrector pour l'équation de transport sans collision. 47

4.3 Equation de transport linéaire dans le cas d'une absorption pure . 48
4.3.1 Les schéma d'Euler explicite et implicite pour l'équation de transport dans le cas d'une absorption pure. 50
4.3.2 Le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de transport dans le cas d'une absorption pure. 52
4.3.3 Le schéma de Predictor-corrector pour l'équation de transport dans le cas d'une absorption pure. 53
4.4 Equation de transport linéaire avec production 55
4.4.1 Schémas d'Euler explicite et implicite pour l'équation de transport linéaire avec production. 58
4.4.2 Schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de transport linéaire avec production. 61
4.4.3 Schéma de Predictor-corrector pour l'équation de transport linéaire avec production. 63
4.5 Les résultats numériques 65
4.5.1 Approche numérique dans le cas du transport libre. 66
4.5.2 Approche numérique dans le cas du transport avec pure absorption. 67
4.5.3 Approche numérique dans le cas du transport avec production. 73
4.5.4 Comparaison entre les schémas d'approximation. 75
4.6 Annexe 76

5 Théorèmes de point fixe sur un espace de Fréchet 80
5.1 Introduction. 80
5.2 Théorèmes de point fixe de type Schauder 80
5.3 Théorèmes de point fixe de type Krasnoselskii 85

Chapitre 1

Introduction

1.1 Equation linéaire de transport dans $\mathbf{L}^1(\Omega \times V)$

L'objet d'investigation dans la théorie du transport est la distribution des particules dans l'espace des phases. L'espace des phases est le produit direct de l'espace de configuration et l'espace des vitesses ; normalement, chacun est à trois dimensions, donc l'espace des phases est un espace à six dimensions.

Une équation de transport est une équation de la mécanique statistique qui décrit l'équilibre pour le nombre de particules dans un élément infinitésimal de volume de l'espace des phases. Soit (x, v) les coordonnées d'un point dans l'espace des phases, où x est la coordonnée de la position dans l'espace de configuration $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et v est la coordonnée de la position dans l'espace des vitesses $V (V \subseteq \mathbb{R}^n)$. L'élément $u(x, v, t)dxdv$ désigne le nombre de particules dans un élément infinitésimal de volume $dxdv$ centré en (x, v) à l'instant t. Ainsi,

$$\int_{\Omega \times V} u(x, v, t)dxdv$$

est le nombre total de particules dans l'enceinte Ω à l'instant t. De même,

$$\int_V u(x, v, t)dv$$

est la densité de particules au point x, à l'instant t (toutes vitesses confondues). Il est naturel de prendre $u(x, v, t)$ comme une fonction dans $\mathbf{L}^1_+$, le cône des fonctions positives sur $\Omega \times V$.

Naturellement, l'équation qui régira $u(., ., .)$ dépendra du type d'intéraction physique avec le milieu ambiant, ainsi que les intéractions que peuvent avoir, éventuellement, les particules entre elles. Si, par exemple, les particules s'influencent, l'équation sera non linéaire. Ceci est le cas de l'équation des gaz de Boltzmann. Cependant, lorsque les particules intéragissent essentiellement avec les composants d'un milieu connu sans en affecter les propriétés physiques, alors $u(x, v, t)$ sera gouvernée par une équation linéaire. Ceci est le cas des équations modèlisant le comportement des neutrons dans un réacteur nucléaire. Dans ce cas une équation de transport est une équation pour la fonction u de la forme

$$\frac{\mathrm{d}u}{dt} = \text{flux entrant - flux sortant},$$

c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}u}{dt}$ est la différence de deux termes, un terme de "gain" qui tient compte des changements de vecteur vitesse vers l'intérieur de l'élément infinitésimal de volume, et un terme de "perte" qui tient compte des changement de vecteur vitesse vers l'extérieur de l'élément infinitésimal de volume. Les processus de diffusion et de fussion contribuent aux flux entrant, et la diffusion et l'absorption au flux sortant.

Normalement, les deux termes peuvent être séparés, et $\frac{\mathrm{d}u}{dt}$ qui représente les effets des collisions a la forme :

$$\frac{\mathrm{d}u}{dt} = \int_V k(x, v^{'}, v)u(x, v^{'}, t)d\mu(v^{'}) - \sigma_a(x, v)u$$

où σ_a est la fréquence de collision et k est le noyau de diffusion. D'autre part, nous avons :

$$\frac{\mathrm{d}u}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial v}.\frac{dv}{dt}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + v.\nabla_x u,$$

car $\frac{dx}{dt}$, $(x = x_0 + tv)$ et $\frac{dv}{dt} = 0$ (absence de forces extérieurs).

Alors, l'équation dynamique postulée pour $u(x, v, t)$ est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -v.\nabla_x u - \sigma_a(x, v)u + \int_V k(x, v^{'}, v)u(x, v^{'}, t)d\mu(v^{'}) \tag{1.1.1}$$

qui est appelée l'équation linéaire de Boltzmann ou l'équation d'évolution du transport linéaire. Ici $u(x, v, t)$ représente la densité de neutrons au temps t dans la position x et avec le vecteur vitesse v et on note aussi que la condition à la frontière signifie qu'aucune particule ne peut entrer de l'extérieur i.e. $u(x, v, t) = 0$ si $x.n(x) < 0$ où $n(x)$ désigne le vecteur normal extérieur à Ω au point x de la frontière $\partial\Omega$.

Le premier terme dans la partie droite de (1.1.1) illustre le mouvement classique libre d'un groupe de neutrons sans absorption ni production. Le deuxième terme représente la perte de neutrons à cause de la diffusion ou l'absorption au point (x, v) dans l'espace des phases. Enfin, le dernier terme représente des neutrons produits au point (x, v) dans l'espace des phases à cause de processus comme diffusion et fussion. Dans ce cas, les particules à la position x et vecteur vitesse $v^{'}$ engendrent des particules à la position x avec une nouvelle vitesse v et la transition est dirigée par $k(x, v^{'}, v)$. Le taux total de production par un neutron ou dispersion d'un neutron en (x, v) est donné par :

$$\sigma_s(x, v) = \int_V k(x, v, v^{'})d\mu(v^{'}) \tag{1.1.2}$$

et nous désignons $\sigma_s^{'}$ par :

$$\sigma_s'(x,v) = \int_V k(x,v',v)d\mu(v'). \tag{1.1.3}$$

Nous supposons que μ est une mesure positive sur $\mathbb{R}^n$ avec $\mu(\{0\}) = 0$, et V est le support de μ ; ainsi l'espace de vitesse V est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, une boule, une couronne

$$V = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq v_{\min} \leq |\mathbf{v}| \leq v_{\max} \leq +\infty\}, \tag{1.1.4}$$

ou l'espace $\mathbb{R}^n$ tout entier. Il y a trois situations ayant des interprétations physiques évidentes, la première est le cas où :

$$\sigma_a(x,v) = \sigma_s(x,v), (x,v) \in \Omega \times V. \tag{1.1.5}$$

Ici, le nombre de neutrons qui quittent un élément de volume en (x,v), est précisément égal au nombre de neutrons qui y entrent. C'est le cas de diffusion pure. De la même manière $\sigma_a(x,v) \leq \sigma_s(x,v)$ s'appelle le cas de production, et $\sigma_a(x,v) \geq \sigma_s(x,v)$ est le cas d'absorption.

Dans cette thèse nous allons considérer les méthodes numériques pour résoudre l'équation de transport de type (1.1.1), dans le cas où $\Omega = [-a,a]$, $V = [-1,1]$. Nous effectuons les méthodes numériques qui seront discuter dans la section 1.4, pour les problèmes suivants :

1)Equation de transport libre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla u, \mathbf{x} \in [-a,a], \mathbf{v} \in [-1,1] \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0 \qquad \text{si } \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} < 0, \quad \text{pour tout } \ \mathbf{x} \in \{-a,a\} \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^1(\Omega \times V), \end{cases}$$

2)Equation de transport purement absorbante

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla u - \sigma(x)u, \mathbf{x} \in [-a,a], \mathbf{v} \in [-1,1] \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0 \qquad \text{si } \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} < 0, \quad \text{pour tout } \ \mathbf{x} \in \{-a,a\} \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^1(\Omega \times V), \end{cases}$$

3)Equation de transport avec le terme de production

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla u - \sigma(x)u + \int_V p(x,v',v)u(x,v',t)dv', \mathbf{x}\in[-a,a], \mathbf{v}\in[-1,1] \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0 \qquad \text{si } \ \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} < 0, \quad \text{pour tout } \ \mathbf{x}\in\{-a,a\} \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \mathbf{L}^1(\Omega\times V), \end{cases}$$

1.2 Approximation d'un semi-groupe

L'outil de base de la théorie de l'approximation d'un semi-groupe est le théorème de Trotter qui donne une approximation d'un semi-groupe à contraction par une famille d'opérateurs linéaires à contractions. En effet, même pour les matrices, $e^{tA}e^{tB} \neq e^{t(A+B)}$. Par contre, le théorème de Trotter, montre que si e^{tA} et e^{tB} sont deux semi-groupes à contractions, alors on a pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{t}{n}A}e^{\frac{t}{n}B})^n x = e^{tC}x,$$

où C est la fermeture de $A+B$, lorsque ce dernier engendre aussi un semi-groupe à contraction. Une généralisation de ce théorème a été donnée par P. Chernoff en 1968 qui sera cité dans le Théorème 3.1.1 .

1.3 Approximation dans le temps et dans l'espace

Soit A un opérateur non borné générateur d'un semi-groupe fortement continu e^{tA}. Par une approximation rationnelle, on peut prouver l'existence d'une fonction rationnelle $R(z), z \in \mathbb{C}$ telle que $[R(\frac{t}{n}A)]^n$ converge dans un certain sense vers e^{tA}. Donc il est clair que toutes les fonctions rationnelles n'admettent pas les mêmes propriétés, pour cela et en générale la définition suivante qui affirme : "une fonction rationnelle complexe R est dite ***acceptable***, si elle vérifie pour tout $Re(z) \leq 0$, $|R(z)| \leq 1$; pour tout $x \in \mathbb{R}$ $R(\mathrm{i}x) \neq 0$ et qu'il existe une constante réelle $p \geq 1$ telle que $R(z) = e^z + O(|z|^{p+1})$ lorsque $|z| \to 0$," est très utile pour savoir l'ordre de convergence pour une telle approximation.

La dernière condition dans la définition précédente implique que $R(0) = R'(0) = 1$ et on dit que p est l'ordre de convergence pour cette approximation.

Concernant l'approximation dans le temps (approximation semi-discrète), la littérature est très riche dans le domaine de la convergence et la stabilité des approximations rationnelles d'un problème de Cauchy abstrait(voir [Bak, B-T1, B-T2, CLPT, H-K, LeR, Pal1, Pal2, Sai, Yan]). En 1979, Hersh et Kato [H-K] ont prouvé que si R est p-acceptable, alors pour tout $f \in D(A^{p+2})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\frac{t}{n}A)^n f - e^{tA} f\| = 0 \tag{1.3.1}$$

et $O((\frac{1}{n})^p)$ est l'ordre de convergence.

Dans [B-T1] l'assertion (1.3.1) a été améliorée par P. Brenner et V. Thomée de la manière suivante : "Si R est une fonction rationnelle p-acceptable, alors pour tout $f \in D(A^{p+1})$, on a

$$\|R(\frac{t}{n}A)^n f - e^{tA} f\| = O((\frac{1}{n})^{p+1}). \tag{1.3.2}$$

Autrement dit, p est l'ordre de convergence.

Aussi, dans le cas d'un générateur d'un semi-groupe analytique, une grande amélioration a été donnée dans [CLPT] et [Pal1] en montrant que l'assertion (1.3.1) reste toujours vraie pour toute $f \in X$. Dans [Pal2] et pas plus tard dans [Sai] et [Yan] même problème a été étudié lorsque A est un générateur d'un semi-groupe analytique et l'intervalle du temps n'est pas uniforme. Ce problème a été généralisé dans [E-R] dans lequel on a prouvé, dans le cas où l'intervalle du temps est non uniforme et A est un générateur d'un C_0-semi-groupe, que pour tout $\alpha > 1/2$ et pour tout $s \in (0, \alpha - 1/2)$, il existe une certaine constante C_* qui dépend de α et s telle que dans le cas où la partition du temps est uniforme on a

$$||(R(\frac{t}{n}A)^n - e^{tA})(1-A)^{-\alpha}|| \leq C_*(t+1)^{\frac{3}{2}}(\frac{t}{n})^{\beta}, \tag{1.3.3}$$

où $\beta = \frac{ps}{p+s+1}$.

Concernant l'approximation dans l'espace où A est un générateur d'un C_0-semi-group, on a utilisé dans cette thèse la convergence au sens de Kato (voir [Kat]) qui est définie par : "On dit qu'une suite d'espaces de Banach $\{(X_n, \|.\|_n) : n = 1, 2, \cdots\}$ *converge* vers un espace de Banach $(X, \|.\|)$ *au sens de Kato*, et on note $X_n \xrightarrow{K} X$, si pour tout n il existe un opérateur linéaire $P_n \in \mathcal{L}(X, X_n)$ (dit opérateur *d'approximation*) qui vérifie les deux conditions suivantes :

(K1) $\lim_{n\to\infty} \|P_n f\|_n = \|f\|$ pour tout $f \in X$;

(K2) pour tout $f_n \in X_n$, il existe $f^{(n)} \in X$ telle que $f_n = P_n f^{(n)}$ avec $\|f^{(n)}\| \leq C\|f_n\|_n$ (C est indépendant de n).

Autrement dit, si on suppose que $X_n \xrightarrow{K} X$, $B_n \in \mathcal{L}(X_n)$ et $B \in \mathcal{L}(X)$. On dit que B_n *converge* vers B *au sens de Kato* et on note $B_n \xrightarrow{K} B$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n P_n f - P_n B f\|_n = 0 \tag{1.3.4}$$

pour tout $f \in X$.

Cette notion a été étudiée par T. Ushijima dans [Ush] et il a donné le théorème d'équivalence de Lax dans ce contexte. Une autre étude dans cette direction qui a été accomplie dans [CE] en construisant une famille d'approximation des semi-groupes de transport qui converge au sens de Kato vers un semi-groupe de transport.

1.4 Méthodes numériques de différent ordre de convergence

Pour résoudre un problème de Cauchy abstrait :

$$(\mathbf{CP}) \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}u}{dt} = Au & \text{pour } t > 0, \\ u(0) = f \in X \end{cases}$$

dans un espace de Banach X, lorsque A engendre un semi-groupe borné fortement continu e^{tA} dans X, il existe une grande variété des méthodes d'approximation semi-discrète en temps, dont les plus connues sont :

(a) Schémas d'Euler implicite et explicite :

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = Ax_{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = Ax_n,$$

ou bien d'une manière équivalente

$$x_{n+1} = (I - \tau A)^{-1} x_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} = (I + \tau A) x_n.$$

Si on remplace τA par z, la fonction d'approximation rationnelle du schéma d'Euler implicite devient $R(z) = (1-z)^{-1}$ et pour le schéma d'Euler explicite sera $R(z) = 1 + z$.

(b) Schéma de Crank-Nicolson :

Le schéma de Crank-Nicolson s'obtient en mélangeant les schémas d'Euler explicite et implicite de la façon suivante : Prenant $x_{n+1/2}$ la valeur de u au point $t_{n+1/2}$ au milieu de $[t_n, t_{n+1}]$ tel que

$$\frac{x_{n+1} - x_{n+1/2}}{\tau/2} = Ax_{n+1/2} \quad \text{et} \quad \frac{x_{n+1/2} - x_n}{\tau/2} = Ax_{n+1/2},$$

ce qui donne

$$x_{n+1} = (I + (\frac{\tau}{2})A)(I - (\frac{\tau}{2})A)^{-1} x_n.$$

Ainsi la fonction d'approximation rationnelle sera $R(z) = (2 + z)(2 - z)^{-1}$.

(c) Schéma de Predictor-Corrector :

Ce schéma s'obtient en additionnant

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = A\left(\frac{x_{n+1} + x_n}{2}\right)$$

avec l'équation de prédiction

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} = A(x_{n+1/2}),$$

où la valeur prédite de $x_{n+1/2}$ peut etre corrigé par l'équation

$$\frac{x_{n+1} - x_{n+1/2}}{\tau/2} = A(x_{n+1}).$$

Cette manipulation entraine

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\tau}{3}\left[Ax_n + A\left(2x_{n+1} - \frac{\tau}{2}Ax_{n+1}\right)\right]$$

et en séparant x_{n+1} à x_n nous trouvons

$$x_{n+1} = (I + \frac{\tau}{3}A)(I - \frac{2\tau}{3}A + \frac{\tau^2}{6}A^2)^{-1}x_n.$$

La fonction rationnelle correspondante sera alors $R(z) = (1+\frac{z}{3})(1-\frac{2z}{3}+\frac{z^2}{6})^{-1}$. Nous vérifions dans la suite que les schémas précédents sont tous acceptables mais avec des ordres de convergence différents et tout ceci à partir de la représentation de la fonction d'approximation rationnelle de chaque schéma.

Pour le schéma d'Euler implicite on a

$$R(z) = (1 - z)^{-1} = 1 + z + O(z^2). \tag{1.4.1}$$

Puisque $|R(z)|^2 = 1/[(1 - Re(z))^2 + Im(z)^2]$ et $Re(z) \leq 0$, on vérifie alors la première hypothèse de la définition d'une fonction acceptable. Pour $z = \mathrm{i}x, R(z) = 1/(1 - \mathrm{i}x) \neq 0$ alors la deuxième hypothèse est aussi vérifiée. Finalement $\mathrm{e}^z = \sum_{k\geq 0} z^k/k!$ et (1.4.1) implique que

$$R(z) - \mathrm{e}^z = O(|z|^2), \tag{1.4.2}$$

on a aussi la même estimation pour le schéma d'Euler explicite et par conséquence on vérifie la dernière hypothèse de la définition , et on montre que l'ordre de convergence pour les deux schémas d'Euler implicite et explicite est égale $p = 1$.

Pour le schéma de Crank-Nicolson

$$R(z) = (2+z)(2-z)^{-1} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + O(z^2). \qquad (1.4.3)$$

Comme pour $a \leq 0$, on a $\sqrt{(2-a)^2 + b^2} \geq \sqrt{(2+a)^2 + b^2}$, on vérifie alors que $|R(z)| \leq 1$ pour $z = a + ib$ $(Re(z) \leq 0)$. Pour $z = \mathrm{i}x, |R(z)| = |(2+\mathrm{i}x)/(2-\mathrm{i}x)| = 1 \neq 0$ on obtient aussi la deuxième hypothèse. Finalement, $\mathrm{e}^z = \sum_{k\geq 0} z^k/k!$ et (1.4.3) implique que

$$R(z) - \mathrm{e}^z = O(|z|^3), \qquad (1.4.4)$$

et par conséquence on montre que l'ordre de convergence pour ce schéma est égale $p = 2$.

Pour le schéma de predictor-corrector

$$R(z) = \frac{1 + \frac{z}{3}}{1 - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + O(|z|^4). \qquad (1.4.5)$$

on remarque que pour $z = \mathrm{i}x, 0 \neq |R(z)| \leq 1$, car $1 + \frac{x^2}{9} \leq 1 + \frac{x^2}{9} + \frac{x^4}{36}$. Par ailleur la fonction de transformation $z \mapsto \frac{2\mathrm{i}(z-1)}{|z-1|^2} + \mathrm{i}$, définie du plan $[Rez \leq 0]$ dans le disque unité $D(0,1)$, principe du maximum pour les fonctions conformes implique que $|R(z)| \leq 1$ pour tout $Re(z) \leq 0$ et parsuite les deux premières hypothèses de la définition d'une fonction acceptable sont bien vérifiées. Finalement, (1.4.5) implique que

$$R(z) - \mathrm{e}^z = O(|z|^4), \qquad (1.4.6)$$

et par suite on vérifie que l'ordre de convergence de ce schéma est égale $p = 3$.

1.5 Théorème de point fixe

Soit X un espace métrique. Un point fixe d'une fonction $F : X \to X$ est un élément $x \in X$ qui vérifie $F(x) = x$. Un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction F possède au moins un point fixe, moyennant quelques conditions sur F. Les théorèmes de point fixe nous donnent les conditions favorables pour que des différentes applications admettent des solutions et ces théorèmes constituent un beau mélange d'analyse, de géométrie et de topologie. Les résultats de ce type sont parmis les plus utiles en mathématiques.

Prenons un ensemble X. Donc, il est possible de proposer la question suivante : "Quel type de fonctions sur X qui admet un point fixe ?". L'existence de point fixe pour une application F nécéssite des conditions avec lesquelles les résultats soient satisfaits. Et ces conditions ou ces hypothèses peuvent être modifiés d'un cas à un autre suivant les propriétés de l'ensemble X.

Dans les dernières 50 années, les théorèmes de point fixe ont été bien convoités et ils ont été des très puissants et importants outils dans l'étude des phénomènes non-linéaires. En particulier, les techniques de point fixe ont été plus appliquables dans les différents champs de recherche de biologie, chimie, économie, théories des jeux et physique. Les théorèmes de point fixe sont des techniques plus puissants dans les espaces vectoriels de dimension finies, pourtant, si on peut obtenir des théorèmes pour des espaces vectoriels de dimension infinies on gagnera plus de puissance et on peut modeler une équation intégrale différentielle de telle manière de trouver un point fixe d'une application continue ou séquentiellement continue sur un espace fonctionnel et ceci est équivalent à résoudre cette équation qui est, en général, assez difficile de prouver l'existence des solutions en utilisant les arguments classiques.

Le théorème de point fixe le plus connu et simple est le théorème de Banach qui est appelé aussi théorème de contraction : "Toute contraction d'un espace métrique complet vers lui même admet un unique point fixe." Ce théorème nous fournit un critère garantissant, s'il est satisfait, la procédure d'itération d'une fonction qui amène à un point fixe. En 1912, Brouwer a trouvé un résultat non constructif : il affirme qu'une fonction continue de la boule unité fermée dans un espace euclidien de dimension n vers elle même doit avoir un point fixe, mais ne décrit pas comment trouver ce point fixe. Ce théorème est une généralisation du théorème de Banach et ce résultat a été aussi généralisé par plusieurs mathématiciens. La plus importante généralisation est obtenue par le mathématicien polonais Juliusz Schauder en 1930 : "Tout application continue et compact d'un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même admet un point fixe." Ce puissant théorème de point fixe intervient surtout dans la démonstration de l'existence de solutions d'une équation différentielle.
Plusieurs problèmes issus dans la majorité des diverses domaines de la science naturelle, nécéssitent l'étude des solutions des équations non-linéaires de la forme

$$Au + Bu = u, \qquad u \in M$$

où M est un sous-ensemble fermé et convexe d'un espace de Banach X (voir [Bur, Bu-K, Dha]). Pour avoir le résultat, Krasnoselskii [Kras] a prouvé qu'il suffit de considérer la somme de deux opérateurs où l'un est contractif et l'autre est compact.

Lorsqu'on a un manque de compacité, les théorèmes de Brouwer et de Schauder ne s'appliquent pas. Une généralisation de ces théorèmes fait appel à la notion de la mesure de non-compacité. En 1955 Dardo a prouvé que : "Toute application μ-Darbo-contractive d'un ensemble borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même, où μ est une mesure quelconque de non-compacité, admet un point fixe." La généralisation de ce théorème est obtenue par Sadovskii : il affirme que toute application condense d'une partie non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers elle-même, où μ est une mesure de non-compacité régulière, admet un point fixe."

Parmis les généralisations du théorème de point fixe de Schauder, on cite aussi, le résultat de Schauder-Tychonoff concernant les espaces localement convexe qui a prouvé que : Toute application continue d'un ensemble convexe et compact d'un espace localement convexe possède un point fixe."

Aussi, parmis les généralisations du théorème de point fixe de type Schauder et de type Krasnoselskii, on cite les résultats de A. Ben Amar, A. Jeribi et M. Mnif [BJM] et celles de K. Latrach, M. Aziz Taoudi et A. Zeghal (voir [Latr, Latr1]) avec lesquels ils ont prouvé l'existence de solutions pour l'équation de transport non linéaire suivante :

$$\xi \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,\xi) + \sigma(x,\xi,\psi(x,\xi)) + \lambda\psi(x,\xi) = \int_{-1}^{1} k(x,\xi,\xi^{'}) f(x,\xi^{'},\psi(x,\xi^{'}))d\xi^{'} \quad (1.5.1)$$

et aussi pour l'équation de Hammerstein qui est représentée par

$$\psi(t) = g(t,\psi(t)) + \lambda \int_{\Omega} \zeta(t,s) f(s,\psi(s))ds. \quad (1.5.2)$$

1.6 Plan de travail

Cette thèse est organisée en cinq chapitres. Dans le chapitre 2, on s'intéresse à la présentation des propriétés et des notions topologiques qui vont être utilisées dans les différentes preuves des théorèmes d'approximation des semi-groupes et des théorèmes de point fixe.

Dans le troisième chapitre, on présente, en utilisant le théorème de Chernoff, un nouveau résultat d'approximation des semigroupes, ensuite on définit la convergence au sens de Kato.Enfin, dans ce chapitre, on construit des espaces d'approximation qui convergent au sens de Kato et on prouve que la famille des opérateurs d'approximation $V(t)$ construite dans notre problème de transport converge au sens de Kato vers la solution de ce problème.

Le quatrième chapitre est réservé à l'étude de l'équation de transport linéaire de Boltzmaãn. Tout d'abord, on définit les espaces d'approximation dans le temps et dans l'espace, ensuite on donne quelques différentes expressions d'une approximation d'une fonction rationnelle et on définit les algorithmes les plus connus qui sont les méthodes d'Euler explicite et implicite, de Crank-Nicolson et de predictor corrector avec leur correspondant ordre de convergence dans le temps qui se déduit du théorème de P. Brenner et V. Thomée, puis on s'intéresse à l'étude des différents cas de notre équation de transport.

Le cas le plus simple est lorsque le taux d'absorption σ et le taux de production p du notre problème de transport **(TP)** sont simultanément nuls. On montre dans cette partie la convergence du problème d'approximation au sens de Kato et on prouve aussi en choisissant l'expression discrète de l'opérateur d'approximation d'une manière adéquate pour tous les shémas d'approximations (Euler explicite et Euler implicite, Crank-Nicolson et Predictor-Corrector) qu'on retrouve un unique algorithme qui est l'expression discrète de la solution exacte de ce problème de transport. Dans le deuxième cas, on prend $\sigma \neq 0$ et $p \equiv 0$, ce problème correspond à une équation dite *tomography* ou équation de *transport avec absorption*. Dans cette partie, puisqu'on ne peut pas retrouver la solution exacte de ce problème de transport, on montre que l'ordre de convergence pour les schémas d'Euler explicite et implicite, Crank-Nicolson et Predictor-Corrector est respectivement 1,2 and 3.

Dans le cas général de notre équation de transport et et à l'aide des nouveaux résultats du chapitre précédent, on prouve la convergence de la solution approchée de ce problème dans le sens de Kato. Finalement, dans ce chapitre, on donne des illustrations et des résultats numériques qui justifient nos résultats.

Dans le dernier chapitre, on donne quelques nouvelles généralisations des théorèmes de point fixe de type Schauder et de type Krasnoselskii qui se basent sur la notion de compacité faible sur des espaces Fréchet ayant la propriété de Dunford-Pettis et sur la notion de la U-equicontraction.

Chapitre 2

Préliminaires

L'étude de la théorie des semi-groupes de transport et les théorèmes de point fixe nécéssite plusieurs propriétés et notions topologiques. Pour cela, dans ce chapitre, on s'intéresse surtout à la présentation des connaissances de base concernant ces deux théories et spécialement les propriétés et les notions des semi-groupes et leurs générateurs infinitésimaux dans les espaces de Banach, compacité, compacité faible, espace localement convexe, espace de Fréchet et enveloppe convexe.

2.1 Définitions sur les semi-groupes

Les semi-groupes d'opérateurs linéaires tiennent un rôle essentiel dans les problèmes d'évolution. Nous donnons dans ce paragraphe les résultats fondamentaux se rattachant à cette notion [Dav, Paz].

Définition 2.1.1. *Une famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires continus sur un espace de Banach X est un semi-groupe si*

(a) $G(0) = I$

(b) $G(t+s) = G(t)G(s), \forall s, t \geq 0$

Un semi-groupe est fortement continu, ou est un C_0-semi-groupe, ou un semi-groupe de classe C_0, s'il vérifie en outre *(c)* $\lim_{t\to 0^+} G(t)x = x, \forall x \in X$, *c'est à dire*

$$\lim_{t\to 0^+} ||G(t)x - x|| = 0, \qquad \forall x \in X$$

Un semi-groupe est uniformément continu si

(c') $\lim_{t\to 0^+} ||G(t) - I|| = 0.$

Remarque 2.1.2. *Ces notions se prolongent à la notion de groupe d'opérateurs si la famille $\{G(t)\}$ est définie sur $\mathbb{R}$.*

Définition 2.1.3. *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ l'opérateur linéaire A, de domaine*

$$D(A) = \{x \in X; \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \quad \textit{existe}\}$$

tel que

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)x - x}{t} \qquad \forall x \in D(A).$$

Théorème 2.1.4. *Soit A un opérateur engendrant un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$. Ce semi-groupe est uniformément continu si et seulement si A est borné.*

Définition 2.1.5. *Soit A un opérateur linéaire sur X. On dit que A est fermé si son graphe $\varsigma(A) = \{(x, Ax); x \in D(A)\}$ est fermé dans $X \times X$.*

Remarque 2.1.6. *Pour montrer que A est fermé, il suffit de démontrer que pour toute suite $\{f_n\}_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$, telle que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ et $\lim_{n\to\infty} Af_n = g$, on a $f \in D(A)$ et $Af = g$.*

Théorème 2.1.7. *[Paz] Soit A un opérateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$. Alors $D(A)$ est dense dans X et A est fermé.*

Proposition 2.1.8. *[Paz] Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur X de générateur infinitésimal A, de domaine $D(A)$, alors on a :*

(a) L'application $t \mapsto ||G(t)||$ est borné sur tout compact de $\mathbb{R}_{+;}$

(b) Pour tout $x \in X$, la fonction $t \mapsto G(t)x$ est continue et

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h G(s)xds = x;$$

(c) Pour tout $x \in D(A), G(t)x \in D(A)$ et

$$\frac{dG(t)x}{dt} = AG(t)x = G(t)Ax;$$

(d) Pour tout $x \in X$,

$$\int_0^t G(s)xds \in D(A) \quad et \quad A\int_0^t G(s)xds = G(t)x - x.$$

Théorème 2.1.9. *[D-L8] Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe. Il existe deux constantes $w \geq 0$ et $M \geq 1$ telles que :*

$$||G(t)|| \leq Me^{wt} \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Dans le cas où $M = 1$ et $w = 0$ on dit que C_0-semi-groupe est à contraction.

Définition 2.1.10. *On appelle type d'un semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$:*

$$w = \inf\{\alpha; \exists M_\alpha, ||G(t)|| \leq M_\alpha e^{\alpha t}\}.$$

On note alors

$$A \in \vartheta(M, w)$$

pour signifier que A engendre un C_0-semi-groupe vérifiant $||G(t)|| \leq Me^{wt}; t \geq 0$.

Définition 2.1.11. *Soit $A : X \to X$ un opérateur linéaire, non borné. On appelle ensemble résolvent de A l'ensemble*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) : D(A) \to X \quad \textit{est une bijection et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}^{\infty}(X)\}$$

L'opérateur $(\lambda I - A)^{-1}$, pour $\lambda \in \rho(A)$, est la résolvante de A.

Définition 2.1.12. *L'espace $L^{\infty}(X, A, \mu)$ est défini comme l'espace vectoriel des fonctions μ-essentiellement bornées (c'est à dire les fonctions bornées presque partout). L'espace $L^{\infty}(X, A, \mu)$ est l'espace vectoriel quotient de $L^{\infty}(X, A, \mu)$ pour la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si sont égales presque partout.*

Théorème 2.1.13. *(Hille-Yosida)*

Soit A un opérateur linéaire fermé, à domaine dense dans un espace de Banach X. Pour que A engendre un C_0-semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$, il faut et il suffit que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe pour $Re(\lambda) - w > 0$, et qu'il vérifie

$$||\ (\lambda I - A)^{-k}|| \leq \frac{M}{(Re(\lambda) - w)^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas :

$$||G(t)|| \leq Me^{wt}.$$

2.2 Généralité sur les espaces de Fréchet

Définition 2.2.1. *[Re-S] Un espace vectoriel E est dit localement convexe s'il est muni d'une famille de semi-normes $\mathbf{P}$ sur E telle que :*

$$\cap_{p \in \mathbf{P}} \{x \in E : p(x) = 0\} = \{0\}.$$

Définition 2.2.2. *Un espace vectoriel topologique E est dit espace de Fréchet s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1) Il est complet.

2) Il est localement convexe.

3) Il est métrisable et sa métrique est invariante par translation, i.e. une telle métrique $d : x \times y \to \mathbb{R}$ telle que

$$d(x, y) = d(x + a, y + a) \quad \text{pour tous} \;\; a, x, y \;\; \text{dans } E.$$

Proposition 2.2.3. *Tout espace vectoriel topogique localement convexe complet et métrisable E est un espace de Fréchet.*

Définition 2.2.4. *Soient X un espace de Fréchet et $T : X \to X$ une application donnée. On appelle point fixe de T tout $x \in X$ vérifiant $Tx = x$.*

Définition 2.2.5. *Soient X un espace Fréchet et A une partie de X.*
1) On appelle enveloppe convexe de A, et on le note $co(A)$, l'intersection de tous les convexes de X contenant A .
$co(A) = \{x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *avec* $n \in \mathbb{N}^*; x_i \in A; \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ $\lambda_i \in [0, 1]$ *et* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ *l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des éléments de A.*

2) On appelle enveloppe convexe fermé de A, et on le note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les convexes fermés de X contenant A.

Définition 2.2.6. *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe. Un ensemble U de E est dit ouvert si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 \in U; \exists \epsilon > 0$ et $p_1, p_2, ..., p_n \in \mathbf{P}$ tels que :*

$$\{x \in E; max_{j=1,2,...,n} p_j(x - x_0) < \epsilon\} \subset U.$$

Proposition 2.2.7. *Soit E un espace vectoriel localement convexe. Alors la famille des ensembles ouverts de E dans le sens de la définition précédente est une topologie c'est à dire :*
a) $\varnothing$ et E sont ouverts.
b) Si $(U_n)_n$ est une famille quelconque d'ouverts alors $\cup_n U_n$ est un ouvert.
c) Si $U_1, U_2, ..., U_n$ sont des ouverts alors $U_1 \cap U_2 ... \cap U_n$ est aussi un ouvert.

2.3 Compacité et compacité faible

Définition 2.3.1. *Soient X et Y deux espaces de Fréchet et $U \subset X$. On dit que $f : U \to Y$ est une application compacte si f est continue et l'image d'un borné de U est un pré-compact de Y, c'est à dire $\overline{f(A)}$ est compact pour tout borné $A \subset U$.*

Définition 2.3.2. *Un opérateur linéaire $A : E \to F$ d'un espace de Fréchet E dans un espace de Fréchet F est dit faiblement compact s'il envoie des ensembles bornés de E dans des parties relativement faiblement compactes de F. Autrement dit, un opérateur linéaire de E dans F est faiblement compact si et seulement si pour tout suite $(\varphi_n)_n$ bornée de E, la suite $(A\varphi_n)_n$ admet une sous suite faiblement convergente dans F.*

Théorème 2.3.3. *(Krein-$\tilde{S}$mulian) Soient E un espace localement convexe complet et métrisable et $M \subset E$. Si M est faiblement compact dans E alors l'enveloppe convexe fermé de M est aussi faiblement compact dans E.*

Lemme 2.3.4. *[Dun] Soient X un espace de Banach et $A, B \subset X$. Alors :*
1) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.
2) Si $A \subset B$ alors $co(A) \subset co(B)$.
3) Si A est compact alors $\overline{co}(A)$ est aussi compact.

Définition 2.3.5. *1) Soient X un espace de Banach et $(x_n)_n \subset X$.*
On dit que $(x_n)_n$ converge faiblement vers un élément $x \in X$ si pour tout $l \in X'$ (dual de X) on a $l(x_n) \longrightarrow_{n\to+\infty} l(x)$.
2) Soient X un espace de Banach et A un endomorphisme de X.
On dit que A est faiblement compact sur X si l'image par A de tout borné de X est relativement faiblement compact dans X. Autrement dit, si pour toute suite bornée $(x_n)_n \subset X$ on a $(f(x_n))_n$ admet une sous suite faiblement convergente dans X.

Définition 2.3.6. *Un espace vectoriel topologique E est dit séquentiellement complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.*

Théorème 2.3.7. *(Eberlein-$\tilde{S}$mulian, voir [Edw](8.12.4)) Soit E un espace localement convexe métrisable.*
Si $(x_n)_n$ est une suite relativement faiblement compacte de E alors $(x_n)_n$ admet une sous suite faiblement convergente dans E.

Définition 2.3.8. *Soient E un espace vectoriel et $C \subset E$. C est dit équilibré si pour tout $x \in C$ on a $\lambda x \in C$ si $|\lambda| \leq 1$.*

Définition 2.3.9. *([Edw, J-Y]) Soit E un espace localement convexe. On dit que E satisfait la propriété de Dunford-Pettis (DP), si pour tout espace localement convexe complet F, l'image de tout sous-ensemble faiblement compact et équilibré de E par un opérateur faiblement compact est un compact de F.*

Remarque 2.3.10. *([Edw]) Si E est complet, alors on peut remplacer dans la définition précédente "tout faiblement compact et équilibré de E" par seulement "tout faiblement compact de E".*

Définition 2.3.11. *Soient E un espace localement convexe et A un ensemble de E. A est dit précompact si A est un ensemble relativement compact dont la fermeture est compact.*

Théorème 2.3.12. *([Ch-A]) Soient E un espace localement convexe et M un convexe dans E. On a alors l'équivalence suivante :*

$$M \text{ est fermé } \Leftrightarrow M \text{ est faiblement fermé.}$$

Théorème 2.3.13. *(Schauder-Tychonoff [Tych]) :Soient M un fermé convexe d'un espace localement convexe E et $A : M \to M$ une application continue telle que $A(M)$ est relativement compact.*
Alors A admet un point fixe dans M.

Chapitre 3

Approximation au sens de Kato d'un problème de transport

Dans ce chapitre, on va construire des espaces d'approximation qui convergent au sens de Kato et on va prouver, en utilisant le théorème de Chernoff, que la famille des opérateurs d'approximation $\{S(t) : t \geq 0\}$ donnée par (3.3.5) converge au sens de Kato vers un semi-groupe de transport.

3.1 Approximation des semi-groupes

Tout d'abord, on fait le rappel du théorème de Chernoff qui est cité dans [Che].

Théorème 3.1.1. *Soient X un espace de Banach et $\{V(t)\}_{t\geq 0}$ une famille d'opérateurs linéaires à contractions sur X avec $V(0) = I$. Supposons que sa dérivée $V'(0)f$ existe pour tout f dans un ensemble $\mathcal{D}$ et la fermeture Λ de $V'(0) \mid_{\mathcal{D}}$ engendre un C_0-semi-groupe $S(t)$ à contraction. Alors, pour tout $f \in X$,*

$$\lim_{n\to\infty} \|V(\frac{t}{n})^n f - S(t)f\| = 0, \tag{3.1.1}$$

uniformément pour tout t dans un compact de $\mathbb{R}_+$.

Ensuite, on va utiliser ce dernier théorème pour démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.2. *Soient A le générateur d'un C_0-semi-groupe $S_0(t)$ tel que $\|S_0(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\omega t}$ $(\omega \geq 0)$, et $B(t)$ une famille d'opérateurs bornés tels que $\|B(t)\| < \omega$ pour tout $t \geq 0$. Supposons de plus que $A + B(0)$ est défini dans $D(A)$ et engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ à contractions. Alors, la conclusion du théorème de Chernoff est valable pour $V(t) := S_0(t) + \int_0^t S_0(t-s)B(s)ds$.*

Preuve :
Remarquons que $V(0) = I$, $V'(0)f = (A + B(0))f$ pour tout $f \in D(A)$ et que $V(t)$ est à contraction. En effet

$$\begin{aligned}\|V(t)\| &\leq \|S_0(t)\| + \|\int_0^t S_0(t-s)B(s)ds\| \\ &\leq \mathrm{e}^{-\omega t} + b\int_0^t \mathrm{e}^{-\omega(t-s)}ds = \left(1 - \frac{b}{\omega}\right)\mathrm{e}^{-\omega t} + \frac{b}{\omega} \leq 1,\end{aligned}$$

où $b = \sup_{t\geq 0} \|B(t)\|$. Puisque toute les hypothèses du théorème de Chernoff sont satisfaites, on a la conclusion. □

Corollaire 3.1.3. *Soient A le générateur d'un C_0-semigroupe $S_0(t)$ tel que $\|S_0(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\omega t}$ $(\omega \geq 0)$, et B un opérateur borné tel que $\|B\| < \omega$. Supposons de plus que $A + B$ est défini dans $D(A)$ et engendre un C_0-semigroupe $S(t)$ à contractions. Alors, la conclusion du théorème de Chernoff est valable pour $V(t) := S_0(t) + \int_0^t S_0(s)Bds$.*

En effet, comme B est indépendant de t, $V(t)$ donné dans le Théorème 3.1.2 est $V(t) := S_0(t) + \int_0^t S_0(t-s)Bds$ et on obtient la conclusion du Corolaire 3.1.3 suite au changement de variable $\tau = t - s$.

3.2 Convergence au sens de Kato

On commence par donner une procédure d'approximation pour les équations de transport non seulement dans le temps, mais aussi dans l'espace. Pour l'approximation dans l'espace, on va rappeler la convergence au sens de Kato (voir [Kat]). On dit qu'une suite des espaces de Banach $\{(X_n, \|.\|_n) \ : \ n = 1, 2, \cdots\}$ *converge* vers un espace de Banach $(X, \|.\|)$ *au sens de Kato* et on note

$$X_n \xrightarrow{K} X$$

si pour tout n il existe un opérateur linéaire $P_n \in \mathcal{L}(X, X_n)$ (dit opérateur *d'approximation*) qui vérifie les deux conditions suivantes :

(K1) $\lim_{n\to\infty} \|P_n f\|_n = \|f\|$ pour tout $f \in X$;

(K2) pour tout $f_n \in X_n$, il existe $f^{(n)} \in X$ telle que $f_n = P_n f^{(n)}$ avec $\|f^{(n)}\| \leq C\|f_n\|_n$ (C est indépendant de n).

Supposons que $X_n \xrightarrow{K} X$, $B_n \in \mathcal{L}(X_n)$ et $B \in \mathcal{L}(X)$. On dit que B_n *converge* vers B *au sens de Kato* et on note $B_n \xrightarrow{K} B$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n P_n f - P_n B f\|_n = 0 \tag{3.2.1}$$

pour tout $f \in X$.

Soient A_n et A deux générateurs des C_0–semi-groupes $\{T_n(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X_n)$ et $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subseteq \mathcal{L}(X)$ respectivement. Considérons les trois conditions suivantes :

(A)(Consistance). Il existe un nombre complexe λ contenu dans les ensembles résolvants $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n)$ et $\rho(A)$, tel que

$$(\lambda - A_n)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda - A)^{-1}.$$

(B)(Stabilité). Il existe une constante positive M et un nombre réel ω tels que

$$\|T_n(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(C)(Convergence). Pour tout $T > 0$, on a

$$T_n(t) \xrightarrow{K} T(t)$$

uniformément sur $[0, T]$, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|T_n(t)P_n f - P_n T(t) f\|_n = 0 \quad \text{pour tout } f \in X. \tag{3.2.2}$$

Dans [Ush], on peut retrouver la version standard du théorème d'équivalence de Lax qui affirme que les conditions **(A)** et **(B)** sont vérifiées si et seulement si **(C)** est vérifiée.

3.3 Approximation d'une équation de transport

Nous considérons dans cette partie une matière constituée de petites particules (neutrons, electrons, ions et photons). Chaque particule se déplace sur une ligne droite à vitesse constante jusqu'elle heurte une autre particule du même milieu et cette collision entraine soit une absorption soit une multiplication. Ce phénomène

est décrit par l'équation suivante dite équation de transport

$$(\mathbf{TP}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla u - \sigma(x,v)u + \int_V p(x,v',v)u(x,v',t)dv' & \text{dans } \Omega\times V, \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0 \qquad \text{si } \mathbf{x}\cdot\mathbf{v} < 0, & \text{pour tout } \mathbf{x}\in\partial\Omega \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in X, \end{cases}$$

dans laquelle l'inconnue du problème est la densité des particules $u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$. C'est une fonction dans l'espace des phases $(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in \Omega\times V \subset \mathbb{R}^{2n}$ à un instant $t \geq 0$, qui appartient à l'espace naturel $X = L^1(\Omega\times V)$. En fait, $\int_{\Omega\times V} u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)\,dx\,dv$ désigne le nombre total des particules dans l'espace entier $\Omega\times V$ à l'instant t.

Cette équation est connue par l'équation linéaire de Boltzmann. Le premier terme dans cette équation $-\mathbf{v}\cdot\nabla u(\mathbf{x},\mathbf{v},t)$ représente le mouvement des particules en absence des intéractions d'absorption et de production. Le deuxième terme représente la perte des particules à cause de la diffusion ou de l'absorption au point $(\mathbf{x},\mathbf{v})$ dans l'espace de phase. Enfin, le dernier terme donné par l'intégrale représente la production des particules au point $(\mathbf{x},\mathbf{v})$ dans l'espace de phase. Le noyau $p(\mathbf{x},\mathbf{v}',\mathbf{v})$ de cette intégrale produit la transition des particules d'un état à un autre d'une position $\mathbf{x}$ ayant la vitesse $\mathbf{v}'$ vers les particules du même position ayant la vitesse $\mathbf{v}$. L'espace de vitesse V est en général un couronne dans $\mathbb{R}^n$, c'est à dire

$$V = \{\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n : 0\leq v_{\min}\leq |\mathbf{v}|\leq v_{\max}\leq +\infty\}.$$

Dans la suite, on va étudier un cas particulier de cette équation de transport dans laquelle on remplace Ω par $(-a,a)$ et on prend $V := [-1,1]$. Dans cette thèse nous avons inclus exprès la vitesse $v=0$ dans l'intervalle pour bien démontrer son effet dans les traitement numérique et montrer le bien fondé de prendre V comme un anneau sphérique. On suppose que σ est une fonction continue strictement positive avec

$$0 < s_m \leq \sigma(x) \leq s_M \text{ pour presque tout } x\in(-a,a). \tag{3.3.1}$$

De plus on remplace le terme $p(x,v,v')$ par $\frac{1}{2}p(x)$ qui désigne une fonction continue, positive et indépendante de (v,v'), telle que

$$0 < \sup_{x\in[-a,a]} p(x) = k_M. \tag{3.3.2}$$

En tenant compte de ces considérations, le problème de transport **(TP)** s'écrit :

$$\textbf{(TP1)}\ \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma(x)u + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)u(x,v,t)dv \text{ dans } (-a,a)\times[-1,1];\\ u(-a,v\geq 0,t)=0 \text{ et } u(a,v\leq 0,t)=0 \text{ pour tout } t>0;\\ u(x,v,0)=f(x,v)\in L^1((-a,a)\times[-1,1]). \end{cases}$$

Remarque 3.3.1. *Le terme de production noté par* $Af = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)f(x,v)dv = p(x)Pf$*, avec*

$$Pf = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x,v)dv, \tag{3.3.3}$$

représente une classe de projection sur $L^1((-a,a)\times[-1,1])$*. Cet espace peut être produit en prenant* $\|P\| = 1$ *et* $\|A\| = k_M$*. On a* $\|A\| \leq k_M$ *et si de plus* $p(x) = k_M$ *est une fonction constante alors on montre facilement l'égalité.*

Théorème 3.3.2. *Dans l'espace de Banach* $X = L^1((-a,a)\times[-1,1])$*, on définit les opérateurs* $T_0 f := -v\partial f/\partial x$*,* $T_1 f := T_0 f - \sigma(x)f$*,* $\widetilde{T}f := T_0 f + Af$ *et* $Tf := T_1 f + Af$ *(A est défini dans la Remarque 3.3.1). Alors, chacun de ces opérateurs est défini sur* $D(T_0) := \{f \in X \ : \ v\partial f/\partial x \in X,\ f(-a, v \geq 0) = 0$ *et* $f(a, v \leq 0) = 0\}$ *et engendre un* C_0*-semi-groupe donné, respectivement, par :*

(0) $U_0(t)$ *qui est de contraction ;*

(1) $U_1(t)$ *avec* $\|U_1(t)\| \leq \mathrm{e}^{-s_m t}$ *;*

(2) $V(t)$ *avec* $\|V(t)\| \leq \mathrm{e}^{k_M t}$ *;*

(3) $U(t)$ *avec* $\|U(t)\| \leq \mathrm{e}^{(k_M - s_m)t}$*.*

Preuve :

(0) Pour $t > 0$ tel que $|x-tv| < a$, le semi-groupe $U_0(t)f(x,v) = f(x-tv,v)$ vérifie que $\|U_0(t)f\| = \|f\|$ et si on a $x - tv < -a$ ou $x - tv > a$, alors $U_0(t)f(x,v) = 0$.

(1) Le C_0-semi-groupe engendré par T_1 est

$$[U_1(t)f](x,v) := \mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(x-sv)ds} f(x-tv,v) \tag{3.3.4}$$

et

$$\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} |[U_1(t)f](x,v)|dxdv \leq \mathrm{e}^{-ts_m}\int_{-a}^{a}\int_{-1}^{1} |f(x-tv,v)|dxdv.$$

(2) Pour $V(t)$ on va utiliser la formule de Dyson-Phillips :

$$V_0(t) = U_0(t), \qquad V(t) := \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t),$$

où

$$V_{n+1}(t) = \int_0^t V_0(t-s)AV_n(s)ds.$$

On suppose de plus que $\|V_n(s)\| \leq (k_M s)^n/n!$. Alors, une simple récurrence utilisant la Remarque 3.3.1, conduit à

$$\begin{aligned}\|V_{n+1}(t)f\| &\leq \int_0^t \|V_0(t-s)AV_n(s)f\|ds \\ &\leq \int_0^t \|AV_n(s)f\|ds \leq \int_0^t k_M \frac{(k_M s)^n}{n!}\|f\|ds \\ &= \frac{(k_M s)^{n+1}}{(n+1)!}\|f\|.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|V(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|V_n(t)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k_M t)^n}{n!} = \mathrm{e}^{k_M t}.$$

(3) Par le même raisonnement utilisé dans **(2)** mais en remplaçant la formule de Dyson-Phillips par $U(t) := \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)$ et on déduit par récurrence pour $\|U_{n+1}(t)\| \leq \mathrm{e}^{-ts_m}(k_M t)^n/n!$, que

$$\|U(t)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|U_n(t)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-ts_m} \frac{(k_M t)^{n-1}}{(n-1)!} = \mathrm{e}^{(k_M - s_m)t}.$$

$\square$

Maintenant, nous allons définir un espace d'approximation X_n dans un cas particulier. Nous divisons l'espace de phase $(-a,a) \times [-1,1]$ en un nombre fini de cellules, où l'intervalle $(-a,a)$ est divisé en $2m_n$ parties égales et l'intervalle $[-1,1]$ est divisé en $2\mu_n$ parties égales ; h_n et k_n sont les longueurs de ces parties, telles que,

$$h_n = \frac{a}{m_n}, \quad k_n = \frac{1}{\mu_n}.$$

Ainsi, chaque cellule peut être indiquée par une paire $(i, j) \in \mathcal{N}$, où

$$\mathcal{N} := \{(i, j) : i = -m_n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, m_n. \; j = -\mu_n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \mu_n\}.$$

Le nombre des particules dans la cellule $\gamma(i, j) = [ih_n, (i+1)h_n] \times [jk_n, (j+1)k_n]$ sera noté par $\xi_{i,j}$. De plus, on définit l'ensemble des vecteurs $\xi_{i,j}$ comme espace matritielle d'un espace de Banach X_n avec la norme

$$\xi \in X_n, \qquad \|\xi\|_n = \sum_{i,j} |\xi_{i,j}|.$$

Ainsi, on va prouver la convergence au sens de Kato de cet espace d'approximation X_n vers X.

Lemme 3.3.3. *Pour $f \in X$, on pose $P_n f = \{\xi_{i,j} \; : \; (i, j) \in \mathcal{N}\}$ où*

$$\xi_{i,j} = \int_{ih_n}^{(i+1)h_n} \int_{jk_n}^{(j+1)k_n} f(x, v) dx dv,$$

on vérifie que

(i) $\|P_n f\|_n = \|f\|$ *pour tout* $0 \leq f \in X$ *;*

(ii) $\|P_n\|_{\mathcal{L}(X, X_n)} = 1$ *;*

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|P_n f\|_n = \|f\|$ *pour tout* $f \in X$.

Preuve :

(i) Pour tout $f(x, v) \geq 0$, on a

$$\|P_n f\|_n = \sum_{i,j} \int_{ih_n}^{(i+1)h_n} \int_{jk_n}^{(j+1)k_n} f(x, v) dx dv = \|f\|.$$

(ii) Comme $\|P_n f\|_n \leq \|f\|$, alors d'après **(i)** on vérifie facilement **(ii)**.

(iii) Soit $f \in C(\Omega \times V)$ l'espace des fonctions continues sur $\Omega \times V$. Soit $N >> 1$ tel que pour tout $n \geq N$, et pour tout $\mu > 0$, il existe une collection Γ

de petites cellules $\gamma(i,j)$ telle que sur chaque $\gamma(i,j) \in \Gamma$, la fonction f admet un signe constant et

$$\left| \int_{(-a,a)\times[-1,1]} |f(x,v)| dxdv - \sum_{\gamma(i,j)\in\Gamma} \int_{\gamma(i,j)} |f(x,v)|\, dxdv \right| < \mu.$$

Si on utilise de plus la densité de $C(\Omega \times V)$ dans $X = L^1(\Omega, V)$ le résultat **(iii)** est vérifiée pour ces fonctions continues. $\square$

La condition **(K1)** s'obtient à partir du Lemme 3.3.3 **(iii)**. Pour la condition **(K2)**, on note par $\chi_{i,j}$ la fonction caractéristique de la cellule $\gamma(i,j)$. Si pour tout $\{\xi_{i,j}\} \in X_n$, on définit $f^{(n)} \in X$ par $f^{(n)}(x) = \sum_{i,j} \frac{\xi_{i,j}}{h_n k_n} \chi_{i,j}$, on aura alors

$$\int_{(-a,a)\times[-1,1]} |f^{(n)}(x)| dxdv \leq \sum_{i,j} \int_{\gamma(i,j)} \left| \frac{\xi_{i,j}}{h_n k_n} \chi_{i,j} \right| dxdv = \sum_{i,j} |\xi_{i,j}|,$$

car $\int_{\gamma(i,j)} \frac{\chi_{i,j}}{h_n k_n} dxdv = 1$.

Dans cette partie, on considère le système **(TP1)** avec la notation de la Remarque 3.3.1, $Af = \frac{1}{2} pPf$, où P est la projection qui est définie dans (3.3.3).

Dans ce cas, on ne peut pas avoir une expression explicite d'un semi-groupe comme $U_0(t)f(x,v) = f(x - tv, v)$ ou $U_1(t)f(x,v) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(x-sv)ds} f(x-tv,v)$. Par ailleur, on peut introduire l'opérateur suivant

$$\begin{aligned}
[V(t)f](x,v) &:= \mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(x-sv)ds} f(x-tv,v) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \mathrm{e}^{-\int_0^s \sigma(x-rv)dr} p(x-sv) \int_{-1}^{1} f(x-sv,v')dv'ds \qquad (3.3.5) \\
&= U_1(t)f + \int_0^t U_1(s)pPf ds = U_1(t)f + \int_0^t U_1(s)Af ds. \qquad (3.3.6)
\end{aligned}$$

L'opérateur $V(t)$ n'est pas un semi-groupe comme $U_0(t)$ ou $U_1(t)$, mais on peut prouver que cet opérateur vérifie les hypothèses du théorème de Chernoff (Théorème 3.1.1).

On approche cet opérateur par

$$U_n(k\tau_n) := U_{1,n}(t)(I+\tau_n A_n)^k, \tag{3.3.7}$$

où

$$[A_n\xi]_{i,j} := \frac{k_n p_i}{2}\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i,l}, \tag{3.3.8}$$

pour tout $j,\ \ -\mu_n \leqslant j \leqslant \mu_n - 1$, avec $p_i = p(\theta_i),\ \theta_i \in [ih_n, (i+1)h_n)$.

Maintenant, soit $U(t)$ le semi-groupe de transport défini dans le Théorème 3.3.2.

Théorème 3.3.4. *Sous l'hypothèse de $2k_M < s_m$, on a la convergence au sens de Kato de $U_n(t)$ vers $U(t)$.*

Preuve :
On va prouver que

$$\|U_n(t)P_nf - P_nU(t)f\|_n \to 0, \tag{3.3.9}$$

lorsque $n \to \infty$.
On commence par prouver que

$$U_n(k\tau_n)P_nf = P_nV(\tau_n)^kf. \tag{3.3.10}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
P_nV(\tau_n)f &= P_n\Big[\mathrm{e}^{-\int_0^{\tau_n}\sigma(x-sv)ds}f(x-\tau_nv,v)\\
&\qquad+\frac{1}{2}\int_0^{\tau_n}\mathrm{e}^{-\int_0^{s}\sigma(x-rv)dr}p(x-sv)\int_{-1}^{1}f(x-sv,v')dv'ds\Big]\\
&= \exp(-\tau_n\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j} + \frac{k_n\tau_n}{2}p_{i-j}\mathrm{e}^{-\tau_n\sigma_{i-j}}\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}\\
&= \left[U_{1,n}(\tau_n)(I+\tau_nA_n)\xi\right]_{i,j}\\
&= U_{1,n}(\tau_n)(I+\tau_nA_n)P_nf = U_n(\tau_n)P_nf.
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $g = V(\tau_n)f$, on obtient

$$P_n V(\tau_n)^2 f = P_n V(\tau_n) g = U_n(\tau_n) P_n g = U_n(\tau_n)^2 P_n f.$$

Alors par une simple récurrence, on trouve (3.3.10). Une fois (3.3.10) est vérifiée, on remplace $U_n(t)P_n f$ par $P_n V(\tau_n)^n f$ dans (3.3.9) et en utilisant le caractère isométrique de P_n (voir Lemme 3.3.3), on montre que

$$\|U_n(t)P_n f - P_n U(t) f\|_n = \|V(t/n)^n f - U(t) f\|.$$

Maintenant, on prend $\omega = s_m - k_M$. Comme on a $\|U(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\omega t}$ (d'après Théorème 3.3.2 **(3)**) et on a aussi $2k_M < s_m$, alors $k_M < \omega$. Ensuite, en remplaçant dans le Corollaire 3.1.3, $S_0(t)$ par $U_1(t)$ et B par l'opérateur de production A et à l'aide de la formule (3.3.6) on trouve (3.3.9). □

Remarque 3.3.5. ***(a)*** *On peut approcher l'intégrale* $\int_0^t \sigma(ih_n - sjk_n)ds$ *par* $\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}$, *où*

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(l)} := \tau_n \sum_{k=1}^{l} \sigma(ih_n - jk\tau_n k_n). \tag{3.3.11}$$

Dans ce cas, l'approximation de U_1 *donnée par* (3.3.4) *sera*

$$U_{1,n}(t) = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}\right) f(ih_n - nj\tau_n k_n, jk_n),$$

où $\sigma_{i-kj} = \sigma(h_n(i-kj))$. *En remplaçant* $f(ih_n - jn\tau_n k_n, jk_n)$ *par* $\xi_{i-nj,j}$, *on obtient*

$$[U_{1,n}(t)\xi]_{i,j} = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}\right) \xi_{i-nj,j}. \tag{3.3.12}$$

Ainsi

$$\left[U_{1,n}(\tau_n)\xi\right]_{i,j} = \mathrm{e}^{-\tau_n \sigma_{i-j}} \xi_{i-j,j}.$$

(b) *Si on prend* $k = n$*, l'opérateur* $U_n(t)$ *donné dans* (3.3.7)*, peut être écrit sous la forme*

$$U_n(t) = U_{1,n}(t)\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k (\tau_n A_n)^k\right).$$

D'où

$$[U_n(t)\xi]_{i,j} = [U_{1,n}(t)\xi]_{i,j} + U_{1,n}(t)\left(\sum_{k=1}^{n} C_n^k (\tau_n p_i)^k\right)\frac{k_n}{2}\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i,l}.$$

Chapitre 4

Approximation rationnelle des semi-groupes de transport au sens de Kato

Les résultats du chapitre précédent nous donne une autre vision sur les procédures d'approximation des problèmes de transport données par J. Hejtmanek dans [Hej]. En effet, Hejtmanek a utilisé ces procédures seulement pour les approximations d'Euler. On va démontrer dans ce chapitre que ces dernières procédures restent aussi valables pour les schémas d'Euler mais aussi pour les schémas de Crank-Nicolson et Predictor-Corrector en prouvant que l'ordre de convergence au sens de Kato pour ces schémas est respectivement 1, 2 et 3. A la fin de ce chapitre, on va donner des résultats numériques qui illustrent nos résultats.

4.1 Ordre de convergence

On commence par faire un rappel sur la notion de p-acceptable : Soit A un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans un espace de Banach X qui engendre un semi-groupe fortement continu e^{tA}. Par une approximation rationnelle, on entend l'existence d'une fonction rationnelle $R(z), z \in \mathbb{C}$ telle que $[R(\frac{t}{n}A)]^n$ converge vers e^{tA}.

Par conséquent, puisque les fonctions rationnelles n'admettent pas nécéssairement une telle propriété, on donne la définition suivante :

Définition 4.1.1. *Une fonction rationnelle complexe R est dite* ***acceptable****, si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) $|R(z)| \leq 1, \quad$ *pour tout* $\quad Re(z) \leq 0.$

(ii) $R(\mathrm{i}x) \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Il existe une constante réelle $p \geq 1$ *telle que* $R(z) = e^z + O(|z|^{p+1})$ *lorsque* $|z| \to 0$.

La condition (iii) dans cette définition implique que $R(0) = R'(0) = 1$ et on dit que p est l'ordre de convergence pour cette approximation.

Concernant l'approximation dans le temps (approximation semi-discrète), Hersh et Kato ont prouvé, dans [H-K], que si R est p-acceptable, alors pour tout $f \in D(A^{p+2})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \|R(\frac{t}{n}A)^n f - e^{tA}f\| = 0, \tag{4.1.1}$$

de plus $O((\frac{t}{n})^p)$ est l'ordre de convergence.

Dans [B-T1] l'assertion (4.1.1) a été amiliorée par P. Brenner et V. Thomée de la manière suivante :

Théorème 4.1.2. *Supposons que R est une fonction rationnelle p-acceptable, alors pour tout $f \in D(A^{p+1})$, on a*

$$\|R(\frac{t}{n}A)^n f - e^{tA}f\| = O((\frac{t}{n})^{p+1}). \tag{4.1.2}$$

Autrement dit, l'ordre de convergence est p.

En ce qui concerne l'approximation dans l'espace lorsque A désigne un générateur d'un C_0- semi-groupe, on definit la convergence au sens de Kato (voir chapitre précédent).

Dans [CE], on a construit une famille d'approximation de semi-groupes de transport qui converge au sens de Kato vers un semi-groupe de transport. La convergence au sens de Kato est définie par :

Définition 4.1.3. *Soit R une fonction rationnelle p-admissible, avec*

$$R(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j}{\sum_{j=0}^{\ell} \beta_j z^j} \tag{4.1.3}$$

*On dit que R, est p-**acceptable au sens de Kato**, si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une suite finie d'opérateurs $A_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, m = (k(k+1)\ell(\ell+1))/2$, telle que chacun parmi eux est une approximation aux différences finies du générateur A du C_0-semigroup $U(t)$ et on a*

$$\|U_n(t)P_n f - P_n U(t) f\|_n = O((\frac{1}{n})^{p+1}), \tag{4.1.4}$$

où

$$U_n(t) = \frac{\alpha_0 I + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \prod_{p=1}^{j} A_n^{(p)}}{\beta_0 I + \sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \prod_{p=1}^{j} A_n^{(p+k)}}. \tag{4.1.5}$$

Il est difficile de prouver l'existence d'une telle suite $A_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \cdots, m$ d'une manière systématique, mais on peut résoudre ce problème si on construit cette suite cas par cas.

Maintenant, nous allons appliquer cette théorie à l'équation de transport neutronique (voir chapitre 3) :

$$(\mathbf{TP}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla u - \sigma(x,v) + \int_V p(x,v',v) u(x,v',t) dv' \quad \text{dans } \Omega \times V, \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},t) = 0 \qquad \text{si } \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} < 0, \quad \text{pour tout } \mathbf{x} \in \partial\Omega \\ u(\mathbf{x},\mathbf{v},0) = f(\mathbf{x},\mathbf{v}) \in X, \end{cases}$$

Concernant les espaces d'approximation dans le temps et dans l'espace, on va garder les définitions données dans le chapitre 3.

4.2 Approximation de l'équation de transport sans collision.

Le cas le plus trivial est lorsque les taux d'absorption et de production sont simultanément nuls. Ce cas ressemble physiquement au milieu d'un gaz raréfié où les particules se déplacent sans collision. Dans ce cas, si à un instant $t = 0$ et à un point donné $\mathbf{x}$, il existe $f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ particules qui se déplacent avec une vitesse $\mathbf{v}$, alors à l'instant t, ces particules se retrouvent au point $\mathbf{x} - t\mathbf{v}$. Ainsi, la solution de ce problème de transport sans collision

$$(\mathbf{CFTP}) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = T_0 u := -v\frac{\partial u}{\partial x} \text{ dans } (-a,a)\times[-1,1]; \\ u(-a, v \geq 0, t) = 0 \text{ et } u(a, v \leq 0, t) = 0 \text{ pour tout } t > 0; \\ u(x,v,0) = f(x,v) \in L^1((-a,a)\times[-1,1]), \end{cases}$$

est donnée par la famille des opérateurs $\{U_0(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ définie par

$$u(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = [U_0(t)f](\mathbf{x}, \mathbf{v}) := f(\mathbf{x} - t\mathbf{v}, \mathbf{v}), \tag{4.2.1}$$

qui désigne le semi-groupe de transport sans collision.

Avec ces considérations, la version discrète du semi-groupe sans collision défini dans (4.2.1) sera donnée par

$$[U_{0,n}(k\tau_n)\xi]_{i,j} = \xi_{i-kj,j} \quad \text{si } (i,j) \in \mathcal{N} \text{ et } k = 1; \cdots, n. \tag{4.2.2}$$

En effet, si pour t, n et μ_n donnés, on prend $\tau_n = t/n$ et $m_n = [na(2\mu_n+1)-t]/(2t)$ de telle sorte que $\tau_n k_n/h_n = 1$, on obtient alors (4.2.2) car $ih_n - \tau_n kjk_n = h_n(\mathrm{i} - \frac{\tau_n k_n}{h_n}kj)$, d'où on obtient (4.2.2).

Remarque 4.2.1. *On adopte la convention qui affirme que $\xi_{i,j} = 0$, lorsque $i < -(m_n + 1)$ or $i > m_n$. Ici la condition à la frontière signifie qu'aucune particule ne peut entrer dans Ω par $\partial\Omega$.*

Théorème 4.2.2. *Pour $U_0(t)f(x,v) = f(x - tv, v)$, on a*

(a)

$$U_{0,n}(t)P_nf = P_nU_0(t)f. \tag{4.2.3}$$

(b) $\|P_nU_0(t)f\|_\infty = \sup\{|\xi_{i-nj,j}| \quad : \text{ } sur \text{ } tous \text{ } les \text{ } partitions \text{ } \mathcal{N}\} \leq M$, *où la constante M est indépendante de n.*

A l'aide de (4.2.3) *on prouve la convergence dans le sens de Kato, avec zéro comme terme à droit dans* (4.1.4).

Preuve :

L'assertion **(a)** résulte de

$$\begin{aligned} U_{0,n}(t)P_nf &= U_{0,n}(t)\{\xi_{i,j}\} = \{\xi_{i-nj,j}\} \\ &= \left\{\int_{\gamma(i-nj,j)} f(x,v)dxdv\right\} \\ &= \left\{\int_{\gamma(i,j)} f(x-tv,v)dxdv\right\} \\ &= P_nU_0(t)f. \end{aligned}$$

et l'assertion **(b)** est une conséquence de

$$|\xi_{i-nj,j}| = \iint_{\gamma(i-nj,j)} f(x,v)dxdv \leq \|f\|.$$

$\square$

Dans la suite On va démontrer que l'équation de transport sans collision est l'une des rares équations aux dérivées partielles où les solutions approchées données par ces méthodes d'approximation coincident avec la solution exacte de ce problème de transport. Il reste à signaler que ceci résulte du bon choix de la discrétisation des opérateurs.

L'opérateur fermé T_0 défini dans le problème **(CFTP)**, correspond aux deux opérateurs matriciels $T_{0,n}^{(1)Euler-exp}$ et $T_{0,n}^{(1)Euler-imp} \in \mathcal{L}(X_n)$ ou bien par combinaison de (4.2.4) et (4.2.6).

4.2.1 Les schémas d'Euler explicite et implicite pour l'équation de transport sans collision.

Pour le schéma d'Euler explicite, on définit l'opérateur suivant

$$T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}} := [T_{0,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = -jk_n\tau_n\frac{\xi_{i,j}-\xi_{i-j,j}}{jh_n} = \tau_n\frac{k_n}{h_n}\left(\xi_{i-j,j}-\xi_{i,j}\right) \qquad (4.2.4)$$

si $(i,j) \in \mathcal{N}$. Le semi-groupe approché $U_{0,n}(\tau_n)$ sera

$$\begin{aligned}[\eta]_{i,j} = [U_{0,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} &= [\xi + T_{0,n}^{(1)}\xi]_{(i,j)} \\ &= \xi_{i,j} + \tau_n\frac{k_n}{h_n}\left(\xi_{i-j,j}-\xi_{i,j}\right) = \xi_{i-j,j}\end{aligned} \qquad (4.2.5)$$

En choisissant m_n et μ_n de telle sorte que $\tau_n\frac{k_n}{h_n} = 1$ pour tout n, on peut trouver un lien entre l'intervalle du temps discrèt τ_n et les largeurs des cellules h_n et k_n, ce qui permet à $[U_{0,n}(\tau_n)\xi]_{i,j}$ d'avoir l'expression de (4.2.2) pour $k = 1$.

On passe maintenant à l'étude du schéma d'Euler implicite. Pour cela, on définit l'opérateur suivant

$$T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-imp}} := [T_{0,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = -jk_n\tau_n\frac{\xi_{i+j,j}-\xi_{i,j}}{jh_n} = \left(\xi_{i,j}-\xi_{i+j,j}\right) \qquad (4.2.6)$$

si $(i,j) \in \mathcal{N}$. Le semi-groupe approché $U_{0,n}(\tau_n)$ sera $[U_{0,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} = \eta_{i,j} := \left[(I - T_{0,n}^{(1)})^{-1}\xi\right]_{i,j}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\xi_{i,j} &= [(I - T_{0,n}^{(1)})\eta]_{i,j} \\ &= \eta_{i,j} - \tau_n\frac{k_n}{h_n}\left(\eta_{i,j}-\eta_{i+j,j}\right) = \eta_{i+j,j}.\end{aligned}$$

D'où on obtient $\eta_{i,j} = \xi_{i-j,j}$.

4.2.2 Le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de transport sans collision.

Pour ce schéma on définit les deux opérateurs suivants :

$$
\begin{aligned}
T_{0,n}^{(1)\mathtt{Cr-Ni}} := T_{0,n}^{(1)} u &= -jk_n\tau_n \frac{u\left(ih_n, jk_n\right) - u\left(\left(i-\frac{j}{2}\right)h_n, jk_n\right)}{jh_n/2} \\
&= 2\left(u\left((i-\frac{j}{2})h_n, jk_n\right) - u(ih_n, jk_n)\right).
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
T_{0,n}^{(2)\mathtt{Cr-Ni}} := T_{0,n}^{(2)} u &= -jk_n\tau_n \frac{u\left(\left(i+\frac{j}{2}\right)h_n, jk_n\right) - u\left(ih_n, jk_n\right)}{jh_n/2} \\
&= 2\left(u\left(ih_n, jk_n\right) - u\left((i+\frac{j}{2})h_n, jk_n\right)\right).
\end{aligned}
$$

Une version abrégée sera donnée par :

$$
[T_{0,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = 2(\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i,j}) \quad \text{et} \quad [T_{0,n}^{(2)}\xi]_{i,j} = 2(\xi_{i,j} - \xi_{i+\frac{j}{2},j}) \tag{4.2.7}
$$

de telle sorte que le schéma de Crank-Nicolson s'écrit

$$
\begin{aligned}
[U_{0,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} &= [(I + \frac{1}{2}T_{0,n}^{(1)})(I - \frac{1}{2}T_{0,n}^{(2)})^{-1}\xi]_{i,j} \\
&= (I + \frac{1}{2}T_n^{(1)})\xi_{i-\frac{j}{2},j} = \xi_{i-j,j}.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a pour ce schéma $U_{0,n}(\tau_n)P_n f = P_n U_0(\tau_n) f$.

4.2.3 Le schéma de Predictor-corrector pour l'équation de transport sans collision.

Ici, on définit les trois opérateurs suivants :

$$
\begin{aligned}
T_{0,n}^{(1)\mathtt{pre-cor}} &= 3\left[T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}}\xi\right]_{i,j} + \left[T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}}\xi\right]_{i-j,j} - 3\left[T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}}\xi\right]_{i-\frac{j}{2},j} \\
&:= [T_{0,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = \left[\xi_{i-2j,j} - 3\xi_{i-\frac{3j}{2},j} + 2\xi_{i-j,j} + 3\xi_{i-\frac{j}{2},j} - 3\xi_{i,j}\right], \\
T_{0,n}^{(2)\mathtt{pre-cor}} &= T_{0,n}^{(3)\mathtt{pre-cor}} := \frac{1}{2}\left[T_{0,n}^{(1)\mathtt{Cr-Ni}}\xi + T_{0,n}^{(2)\mathtt{Cr-Ni}}\xi\right]_{i,j} \\
&= \left[\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i+\frac{j}{2},j}\right]
\end{aligned}
$$

et

$T_{0,n}^{(4)\mathtt{pre-cor}} := T_{0,n}^{(1)\mathtt{Cr-Ni}}$.

Pour le schéma de predictor-corrector, on définit $[U_n(\tau_n)\xi]_{i,j}$ par

$$[U_n(\tau_n)\xi]_{i,j} = [(I + \frac{1}{3}T_{0,n}^{(1)})(I - \frac{2}{3}T_{0,n}^{(2)} + \frac{1}{6}T_{0,n}^{(3)}T_{0,n}^{(4)})^{-1}\xi]_{i,j}.$$

On remarque que

$$\begin{aligned}\Big[(I - \frac{2}{3}T_{0,n}^{(2)} + \frac{1}{6}T_{0,n}^{(3)}T_{0,n}^{(4)})\eta\Big]_{i,j} &= \eta_{i,j} - \frac{2}{3}(\eta_{i-\frac{j}{2},j} - \eta_{i+\frac{j}{2},j}) \\ &\quad + \frac{1}{3}T_{0,n}^{(3)}(\eta_{i-\frac{j}{2},j} - \eta_{i,j}) \\ &= \frac{2}{3}\eta_{i,j} + \frac{1}{3}\eta_{i-j,j} + \eta_{i+\frac{j}{2},j} - \eta_{i-\frac{j}{2},j}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big[(I + \frac{1}{3}T_{0,n}^{(1)})\eta\Big]_{i,j} &= \eta_{i,j} + \frac{1}{3}\Big[-3(\eta_{i,j} - \eta_{i-j,j}) - (\eta_{i-j,j} - \eta_{i-2j,j}) \\ &\quad + 3(\eta_{i-\frac{j}{2},j} - \eta_{i-\frac{3j}{2},j})\Big] \\ &= \frac{2}{3}\eta_{i-,j} + \frac{1}{3}\eta_{i-2j,j} + \eta_{i-\frac{j}{2},j} - \eta_{i-\frac{3j}{2},j} \\ &= \Big[(I - \frac{2}{3}T_{0,n}^{(2)} + \frac{1}{6}T_{0,n}^{(3)}T_{0,n}^{(4)})\eta\Big]_{i-j,j}.\end{aligned}$$

Ceci nous permet d'obtenir

$$[U_n(\tau_n)\xi]_{i,j} = \xi_{i-j,j}.$$

4.3 Equation de transport linéaire dans le cas d'une absorption pure

Dans cette section, on travaille sur le même espace d'approximation X_n choisi dans la section 3 et avec la même condition $\tau_n \frac{k_n}{h_n} = 1$. La solution exacte du problème de transport avec une absorption pure

$$(\mathbf{PATP})\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -v\frac{\partial u}{\partial x} - \sigma(x)u \quad \text{dans } \ (-a,a)\times[-1,1]; \\ u(-a, v\geq 0, t) = 0 \text{ et } u(a, v\leq 0, t) = 0 \text{ pour tout } \quad t>0; \\ u(x,v,0) = f(x,v) \in L^1((-a,a)\times[-1,1]). \end{cases}$$

est donnée par

$$u(x,v,t) = [U_1(t)f](x,v) := \mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(x-sv)ds} f(x-tv,v), \tag{4.3.1}$$

où $U_1(t)$ est un C_0-semi-groupe sur X.

L'approximation de cette solution sera alors

$$u(ih_n, jk_n, t) = \exp\left(-\int_0^t \sigma(ih_n - sjk_n)ds\right) f(ih_n - jn\tau_n k_n, jk_n).$$

En remplaçant l'intégralle $\int_0^t \sigma(ih_n - sjk_n)ds$ par $\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}$, avec

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(l)} := \tau_n \sum_{k=1}^{l} \sigma(ih_n - jk\tau_n k_n) \tag{4.3.2}$$

on trouve,

$$U_{1,n}(t) = u(ih_n, jk_n, t) = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}\right) f(ih_n - nj\tau_n k_n, jk_n),$$

où $\sigma_{i-kj} = \sigma(h_n(i-kj))$. Ee remplaçant $f(ih_n - jn\tau_n k_n, jk_n)$ par $\xi_{i-nj,j}$, on obtient

$$[U_{1,n}(n\tau_n)\xi]_{i,j} = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}\right) \xi_{i-nj,j}. \tag{4.3.3}$$

Théorème 4.3.1. *Supposons que σ est une fonction continue strictement positive vérifiant (3.3.1) et soit $U_1(t)$ l'opérateur défini dans* (4.3.1). *Alors $U_{1,n}(t)$ converge au sens de Kato vers $U_1(t)$.*

Preuve :

Il est clair que si

$$s_n(\sigma) = \tau_n \sum_{k=1}^{n} m_k(\sigma), \quad \text{et} \quad S_n(\sigma) = \tau_n \sum_{k=1}^{n} M_k(\sigma),$$

où

$$m_k(\sigma) = \inf_{s\in[(k-1)\tau_n, k\tau_n]} \sigma(x - sv) \quad \text{et} \quad M_k(\sigma) = \sup_{s\in[(k-1)\tau_n, k\tau_n]} \sigma(x - sv),$$

sont les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $[0, t] \ni s \mapsto \sigma(x - sv) \in \mathcal{C}([-a, a] \times [-1, 1])$, alors $s_n(\sigma) \leq \boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)} \leq S_n(\sigma)$. De plus, $s_n(\sigma)$ et $S_n(\sigma)$ convergent vers $\int_0^t \sigma(\mathbf{x} - s\mathbf{v})ds$ dans $\mathcal{C}([-a, a] \times [-1, 1])$. Ainsi

$$\| \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right) - P_n \left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(\mathbf{x}-s\mathbf{v})ds}\right) \|_n \to 0,$$

où $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} \in X_n$ avec $\left[\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right]_{i,j} = \sigma_{i,j}^{(n)}$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \|U_{1,n}(t)P_n f - P_n U_1(t)f\|_n \leq & \|U_{1,n}(t)P_n f - \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right) P_n U_0(t)f\|_n \\ & + \underbrace{\| \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right) P_n U_0(t)f - P_n U_1(t)f\|_n}_{=0} \\ \leq & \|P_n U_0(t)f\|_\infty \|P_n \left(\mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(\mathbf{x}-s\mathbf{v})ds}\right) - \exp\left(-\tau_n \boldsymbol{\sigma}^{(n)}\right) \|_n, \end{aligned}$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to \infty$. En effet, d'après le Théorème 4.2.2 **(b)**, le terme $\|P_n U_0(t)f\|_\infty$ peut être majoré indépendament de n. $\square$

Maintenant, on s'intéresse à la discrétisation des différents schémas pour le problème de transport **(PATP)**.

4.3.1 Les schéma d'Euler explicite et implicite pour l'équation de transport dans le cas d'une absorption pure.

Pour le schéma d'Euler explicite, on définit l'opérateur d'approximation suivant

$$T_{1,n}^{(1)Euler-exp} := [T_{1,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = (\xi_{i-j,j} - \xi_{i,j}) - \tau_n \sigma_{i-j} \xi_{i-j,j} \quad \text{si } (i,j) \in \mathcal{N}. \tag{4.3.4}$$

Alors,le semi-groupe d'approximation $U_{1,n}(\tau_n)$ sera

$$[\eta]_{i,j} = [\xi + T_{1,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = \xi_{i,j} + \left((\xi_{i-j,j} - \xi_{i,j}) - \tau_n \sigma_{i-j} \xi_{i-j,j}\right).$$

Par suite,

$$[\eta]_{i,j} = (1 - \tau_n \sigma_{i-j})\xi_{i-j,j}.$$

Une comparaison entre ce résultat et la version discrète de la solution exacte de notre problème de transport (4.3.3) nous donne l'estimation suivante :

$$|[\eta - U_{1,n}(\tau_n)\xi]_{i,j}| = |1 - \tau_n\sigma_{i-j} - \exp(-\tau_n\sigma_{i-j})\,||\xi_{i-j,j}| = O(\tau_n^2)|\xi_{i-j,j}|,$$

ce qui implique l'existence d'une constante C qui dépend seulement du σ, telle que

$$\|(I + T_{1,n}^{(1)} - U_{1,n}(\tau_n))\xi\|_n \leq C\tau_n^2\|\xi\|_n.$$

Ceci nous donne l'estimation (1.4.2). Par conséquent l'ordre de convergence pour ce schéma est $p = 1$.

Pour le schéma d'Euler implicite, l'opérateur d'approximation est défini par

$$T_{1,n}^{(1)Euler-imp} := [T_{1,n}^{(1)}\xi]_{i,j} == (\xi_{i,j} - \xi_{i+j,j}) - \tau_n\sigma_i\xi_{i+j,j}, \quad \text{si } (i,j) \in \mathcal{N} \qquad (4.3.5)$$

et par suite le semi-groupe d'approximation $U_{1,n}(\tau_n)$ sera

$$[\eta]_{i,j} = [\left(I - T_{1,n}^{(1)}\right)^{-1}\xi]_{i,j}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\xi_{i,j} &= [\eta - T_{1,n}^{(1)}\eta]_{i,j} \\
&= \eta_{i,j} - ((\eta_{i,j} - \eta_{i+j,j}) - \tau_n\sigma_i\eta_{i+j,j}) \\
&= \eta_{i+j,j} + \tau_n\sigma_i\eta_{i+j,j},
\end{aligned}$$

ce qui nous donne,

$$[\eta]_{i,j} = (1 + \tau_n\sigma_{i-j})^{-1}\xi_{i-j,j}.$$

En conséquence

$$|\left[\left(I - T_{1,n}^{(1)}\right)^{-1}\xi - U_{1,n}(\tau_n)\xi\right]_{i,j}| = |(1 + \tau_n\sigma_{i-j})^{-1} - \exp(-\tau_n\sigma_{i-j})\,||\xi_{i-j,j}|$$

ce qui implique aussi que

$$\| \left(I - T_{1,n}^{(1)}\right)^{-1} \xi - U_{1,n}(\tau_n))\xi\|_n \leq C\tau_n^2 \|\xi\|_n.$$

D'où, l'ordre de convergence pour ce schéma est égal à $p = 1$.

4.3.2 Le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de transport dans le cas d'une absorption pure.

Pour ce schéma d'approximation, on définit les deux opérateurs $T_{1,n}^{(1)\texttt{Cr-Ni}}$ et $T_{1,n}^{(2)\texttt{Cr-Ni}} \in \mathcal{L}(X_n)$ par :

$$T_{1,n}^{(1)\texttt{Cr-Ni}} := [T_{1,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = 2(\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i,j}) - \tau_n \sigma_{i-\frac{j}{2}} \xi_{i-\frac{j}{2},j}$$

et

$$T_{1,n}^{(2)\texttt{Cr-Ni}} := [T_{1,n}^{(2)}\xi]_{i,j} = 2(\xi_{i,j} - \xi_{i+\frac{j}{2},j}) - \tau_n \sigma_{i+\frac{j}{2}} \xi_{i+\frac{j}{2},j}.$$

On définit aussi l'opérateur :

$$[M\xi]_{i,j} = R(-\tau_n\sigma_i)\xi_{i,j} \quad \text{où} \quad R(z) = (2+z)(2-z)^{-1},$$

et on remarque que

$$\begin{aligned} [(1 + \frac{1}{2}T_{1,n}^{(1)})\xi]_{i,j} &= \xi_{i,j} + (\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i,j}) - \tfrac{\tau_n}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}}\xi_{i-\frac{j}{2},j} \\ &= (1 - \tfrac{\tau_n}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}})\xi_{i-\frac{j}{2},j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [(1 - \frac{1}{2}T_{1,n}^{(2)})M\xi]_{i-j,j} &= [M\xi]_{i-j,j} - \left([M\xi]_{i-j,j} - [M\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\right) + \frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M\xi]_{i-\frac{j}{2},j} \\ &= (1 + \frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}})[M\xi]_{i-\frac{j}{2},j} = (1 - \frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}})\xi_{i-\frac{j}{2},j} \\ &= [(1 + \frac{1}{2}T_{1,n}^{(1)})\xi]_{i,j}. \end{aligned}$$

Tout ceci prouve que

$$\begin{aligned} [\eta]_{i,j} &= [(1 + \frac{1}{2}T_{1,n}^{(1)})(1 - \frac{1}{2}T_{1,n}^{(2)})^{-1}\xi]_{i,j} \\ &= [M\xi]_{i-j,j} = (2 - \tau_n\sigma_{i-j})(2 + \tau_n\sigma_{i-j})^{-1}\xi_{i-j,j}. \end{aligned}$$

Une comparaison avec le semi-groupe d'approximation dans le cas d'une absorption pure $U_{1,n}(t)$ nous donne l'estimation suivante :

$$|[\eta - U_{1,n}(\tau_n)\xi]_{i,j}| = |(2 - \tau_n\sigma_{i-j})(2 + \tau_n\sigma_{i-j})^{-1} - \exp(-\tau_n\sigma_{i-j})||\xi_{i-j,j}|$$

ce qui implique

$$\|(1 + \frac{1}{2}T_{1,n}^{(1)})(1 - \frac{1}{2}T_{1,n}^{(2)})^{-1}\xi - U_{1,n}(\tau_n)\xi\|_n \leq C\tau_n^3||\xi||_n,$$

où C est une constante qui dépend seulement de σ et qui est indépendante de τ_n. On peut alors, retrouver l'estimation (1.4.4) qui vérifie que l'ordre de ce schéma est égal à $p = 2$.

4.3.3 Le schéma de Predictor-corrector pour l'équation de transport dans le cas d'une absorption pure.

On définit pour ce schéma quatre opérateurs différents :

$$T_{1,n}^{(3)\mathtt{pre-cor}} := [T_{1,n}^{(3)}\xi]_{i,j} = (\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i+\frac{j}{2},j}) - \frac{2}{3}\tau_n\sigma_i\xi_{i+\frac{j}{2},j} - \frac{1}{3}\tau_n\sigma_{i-j}\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \tau_n\sigma_{i+\frac{j}{2}}\xi_{i+j,j} + \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}\xi_{i,j}$$

$$\begin{aligned}T_{1,n}^{(2)\mathtt{pre-cor}} := [T_{1,n}^{(2)}\xi]_{i,j} = (\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i+\frac{j}{2},j}) + \frac{1}{2}\tau_n\sigma_{i+\frac{j}{2}}\xi_{i+j,j} - \frac{3}{4}\tau_n\sigma_{i-j}\xi_{i-j,j} - \tau_n(\frac{3}{4}\sigma_i + \frac{1}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}})\xi_{i,j}\\ + \tau_n(\frac{1}{3}\sigma_i - \frac{3}{2}\sigma_{i+\frac{j}{2}})\xi_{i+\frac{j}{2},j} - \tau_n(\frac{1}{6}\sigma_{i-j} + \frac{3}{2}\sigma_{i-\frac{j}{2}})\xi_{i-\frac{j}{2},j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{1,n}^{(1)\mathtt{pre-cor}} := [T_{1,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = 3[T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}}\xi]_{i,j} + [T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}}\xi]_{i-j,j} - 3[T_{0,n}^{(1)\mathtt{Euler-exp}}\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\\ - \frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}\xi_{i-j,j} - \frac{1}{3}\tau_n\sigma_{i-2j}\xi_{i-2j,j} - \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}\xi_{i-\frac{j}{2},j} + \tau_n\sigma_{i-\frac{3}{2}j}\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}\end{aligned}$$

$$T_{1,n}^{(4)\mathtt{pre-cor}} := [T_{1,n}^{(4)}\xi]_{i,j} = [T_{1,n}^{(1)\mathtt{Cr-Ni}}\xi]_{i,j}$$

et on définit aussi l'opérateur suivant :

$$[M_1\xi]_{i,j} = R_1(-\tau_n\sigma_i)\xi_{i,j} \quad \text{où} \quad R_1(z) = (1 + \frac{z}{3})(1 - \frac{2}{3}z + \frac{z^2}{6})^{-1}.$$

Par un simple calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
[(1+\frac{1}{3}T^{(1)}_{1,n})\xi]_{i,j} &= \frac{2}{3}\xi_{i-j,j}+\frac{1}{3}\xi_{i-2j,j}+\xi_{i-\frac{j}{2},j}-\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}-\frac{2}{9}\tau_n\sigma_{i-j}\xi_{i-j,j}\\
&\quad -\frac{\tau_n}{9}\sigma_{i-2j}\xi_{i-2j,j}-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}}\xi_{i-\frac{j}{2},j}+\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{3}{2}j}\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}\\
&= \frac{2}{3}(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-j})\ \xi_{i-j,j}+\frac{1}{3}(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-2j})\xi_{i-2j,j}\\
&\quad +(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}})\xi_{i-\frac{j}{2},j}-(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{3}{2}j})\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}
\end{aligned}$$

et

$$[(1-\frac{2}{3}T^{(2)}_{1,n}+\frac{1}{6}T^{(3)}_{1,n}T^{(4)}_{1,n})M_1\xi]_{i-j,j}=A_{i,j}+\frac{1}{6}B_{i,j}$$

où

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= [M_1\xi]_{i-j,j}-\frac{2}{3}([M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}-[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j})-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_1\xi]_{i,j}\\
&\quad +\frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-2j}[M_1\xi]_{i-2j,j}+\frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-j}[M_1\xi]_{i-j,j}+\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{3}{2}j}[M_1\xi]_{i-j,j}\\
&\quad -\frac{2\tau_n}{9}\sigma_{i-j}[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}+\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}-\frac{\tau_n}{9}\sigma_{i-2j}[M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}\\
&\quad -\tau_n\sigma_{i-\frac{3}{2}j}[M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
B_{i,j} &= \Big([T^{(4)}_{1,n}M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}-[T^{(4)}_{1,n}M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\Big)-\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}[T^{(4)}_{1,n}M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\\
&\quad -\frac{1}{3}\tau_n\sigma_{i-2j}[T^{(4)}_{1,n}M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}-\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[T^{(4)}_{1,n}M_1\xi]_{i,j}+\tau_n\sigma_{i-\frac{3}{2}j}[T^{(4)}_{1,n}M_1\xi]_{i-j,j}\\
&= \Big\{2\Big([M_1\xi]_{i-2j,j}-[M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}-[M_1\xi]_{i-j,j}+[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\Big)\\
&\quad -\tau_n\sigma_{i-2j}[M_1\xi]_{i-2j,j}+\tau_n\sigma_{i-j}[M_1\xi]_{i-j,j}\Big\}-\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}\Big\{2\Big([M_1\xi]_{i-j,j}\\
&\quad -[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\Big)-\tau_n\sigma_{i-j}[M_1\xi]_{i-j,j}\Big\}-\frac{1}{3}\tau_n\sigma_{i-2j}\Big\{2\Big([M_1\xi]_{i-2j,j}-[M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}\Big)\\
&\quad -\tau_n\sigma_{i-2j}[M_1\xi]_{i-2j,j}\Big\}-\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}\Big\{2\Big([M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}-[M_1\xi]_{i,j}\Big)-\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\Big\}\\
&\quad +\tau_n\sigma_{i-\frac{3}{2}j}\Big\{2\Big([M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}-[M_1\xi]_{i-j,j}\Big)-\tau_n\sigma_{i-\frac{3}{2}j}[M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}\Big\}.
\end{aligned}$$

Alors, on trouve

$$A_{i,j}+\frac{1}{6}B_{i,j}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}+\frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-j}^2\right)[M_1\xi]_{i-j,j}+\frac{1}{3}\Big(1+\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-2j}$$
$$+\frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-2j}^2\Big)[M_1\xi]_{i-2j,j}+\left(1+\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}+\frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-\frac{j}{2}}^2\right)$$
$$[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}-\left(1+\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-\frac{3}{2}j}+\frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-\frac{3}{2}j}^2\right)[M_1\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}.$$

Finalement, on aura

$$[(1-\frac{2}{3}T_{1,n}^{(2)}+\frac{1}{6}T_{1,n}^{(3)}T_{1,n}^{(4)})M_1\xi]_{i-j,j}=\frac{2}{3}(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j}$$
$$+\frac{1}{3}(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-2j})\xi_{i-2j,j}+(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}})\xi_{i-\frac{j}{2},j}-(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{3}{2}j})\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}$$
$$=[(1+\frac{1}{3}T_{1,n}^{(1)})\xi]_{i,j}$$

ce qui implique

$$[\eta]_{i,j}=[(1-\frac{2}{3}T_{1,n}^{(2)}+\frac{1}{6}T_{1,n}^{(3)}T_{1,n}^{(4)}))^{-1}(1+\frac{1}{3}T_{1,n}^{(1)})\xi]_{i,j}=[M_1\xi]_{i-j,j}$$
$$=(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-j})(1+\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}+\frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-j}^2)^{-1}\xi_{i-j,j}.$$

Tout d'abord, on note que

$$|[\eta-U_{1,n}(\tau_n)\xi]_{i,j}|=|(1-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-j})(1+\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}+\frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-j}^2)^{-1}$$
$$-\exp(-\tau_n\sigma_{i-j})||\xi_{i-j,j}|$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$\|(1+\frac{1}{3}T_{1,n}^{(1)})(1-\frac{2}{3}T_{1,n}^{(2)}+\frac{1}{6}T_{1,n}^{(3)}T_{1,n}^{(4)})^{-1}\xi-U_{1,n}(\tau_n)\xi\|_n\leq C\tau_n^4||\xi||_n$$

et ceci vérifie que l'ordre de convergence pour ce schéma est $p=3$.

4.4 Equation de transport linéaire avec production

Dans cette partie, on va considérer le système **(TP)** dans le cas où $\sigma\neq 0$ et $p(x)\neq 0$.

Puisqu'on ne peut pas avoir une expression explicite pour le semi-groupe $U(t)$ comme $U_0(t)$ ou $U_1(t)$ on va utiliser pour ce semi-groupe $U(t)$ la formule de Dyson-Phillips qui est la suivante :

$$V_0(t) = U_1(t), \qquad U(t) := \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t),$$

où

$$V_{n+1}(t) = \int_0^t V_0(t-s)V_n(s)Ads,$$

$$[U_1(t)f](x,v) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(x-sv)ds} f(\mathbf{x}-t\mathbf{v},\mathbf{v}) \text{ and } [Af](x,v) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} p(x)f(\mathbf{x},\mathbf{v}')d\mathbf{v}'.$$

On définit l'approximation de $U(t)$ par $U_N(t)$, où

$$\begin{aligned} U_N(t)f &= [\sum_{k=0}^{N+1} V_k(t)]f \\ &= U_1(t)f + \int_0^t U_1(t-s)B(s)fds, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B(s) =& U_1(s)A + \int_0^s U_1(s-s_1)U_1(s_1)A^2 ds_1 + \cdots \\ &+ \int_0^s \cdots \int_0^{s_N} U_1(s-s_1)U_1(s_1-s_2)\cdots U_1(s_N)A^{N+1} ds_N \cdots ds_1. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

L'opérateur $U_N(t)$ n'est pas un semi-groupe comme $U_0(t)$ ou $U_1(t)$ mais il peut se comporter comme la fonction $V(t)$ du théorème de Chernoff.

La version discrète de notre solution approchée $U_N(t)$ est donnée par $W_{N,n}(n\tau_n)$:

$$[W_{N,n}(n\tau_n)\xi]_{i,j} = \sum_{k=0}^{N+1} [V_{k,n}(n\tau_n)\xi]_{i,j}$$

où $[V_{0,n}(n\tau_n)\xi]_{i,j} = [U_{1,n}(n\tau_n)\xi]_{i,j}$ donnée dans (4.3.3) et

$$[V_{k+1,n}(n\tau_n)\xi]_{i,j} = \tau_n \sum_{k=1}^{n} [V_{0,n}(n\tau_n - k\tau_n)V_{k,n}(k\tau_n)A_n\xi]_{i,j} \tag{4.4.2}$$

avec

$$[A_n\xi]_{i,j} = \frac{1}{2}p_i k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i,l}.$$

qui est indépendant de j. Puisque $U_{1,n}(n\tau_n)$ est un opérateur borné dans X_n, alors par une simple récurrence on montre, d'après (4.4.2), que

$$\|V_{k,n}(n\tau_n)\xi\|_n = \theta(\tau_n^k) \tag{4.4.3}$$

Remarque 4.4.1. *On approche l'intégrale* $\int_0^t \sigma(ih_n - sjk_n)ds$ *par* $\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}$*, où*

$$\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(l)} := \tau_n \sum_{k=1}^{l} \sigma(ih_n - jk\tau_n k_n).$$

Dans ce cas, l'approximation de $[V_0(t)f](\mathbf{x},\mathbf{v}) = [U_1(t)f](\mathbf{x},\mathbf{v}) := \mathrm{e}^{-\int_0^t \sigma(\mathbf{x}-s\mathbf{v})ds} f(\mathbf{x}-t\mathbf{v},\mathbf{v})$ *sera*

$$V_{0,n}(t) = U_{1,n}(t) = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}\right) f(ih_n - nj\tau_n k_n, jk_n),$$

où $\sigma_{i-kj} = \sigma(h_n(i-kj))$*. En remplaçant* $f(ih_n - jn\tau_n k_n, jk_n)$ *par* $\xi_{i-nj,j}$*, on obtient*

$$[V_{0,n}(t)\xi]_{i,j} = [U_{1,n}(t)\xi]_{i,j} = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(n)}\right) \xi_{i-nj,j}.$$

Ainsi

$$[V_{0,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} = [U_{1,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} = \mathrm{e}^{-\tau_n\sigma_{i-j}}\xi_{i-j,j}.$$

Théorème 4.4.2. *Si on a* $2k_M < s_m$*, alors on a la convergence de* $W_{N,n}(t)$ *vers* $U(t)$ *au sense de Kato.*

Preuve :

Nous allons prouver que

$$\|W_{N,n}(t)P_n f - P_n U(t)f\|_n \to 0, \tag{4.4.4}$$

lorsque $n \to \infty$.

Tout d'abord, on prouve que

$$W_{N,n}(k\tau_n)P_nf = P_nU_N(\tau_n)^kf. \tag{4.4.5}$$

A partir de $P_n\int_0^{\tau_n} U_1(\tau_n - s)V_{k-1}(s)Af(x,v)ds = \tau_n^k[U_{1,n}(\tau_n)A_n^k)\xi]_{i,j}$, on montre que

$$\begin{aligned} P_nU_N(\tau_n)f &= P_n[\sum_{k=0}^{N+1} V_k(\tau_n)f(x,v)] \\ &= [U_{1,n}(\tau_n)\sum_{k=0}^{N+1}\tau_n^kA_n^k\xi]_{i,j} \\ &= [U_{1,n}(\tau_n)\sum_{k=0}^{N+1}\tau_n^kA_n^kP_nf = W_{N,n}(\tau_n)P_nf. \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $g = U_N(\tau_n)f$, on obtient alors

$$P_nU_N(\tau_n)^2f = P_nU_N(\tau_n)g = W_{N,n}(\tau_n)P_ng = W_{N,n}(\tau_n)^2P_nf,$$

et par récurrence on trouve (4.4.5). Une fois l'idendité (4.4.5) est prouvée, on remplace $W_{N,n}(t)P_nf$ par $P_nU_N(\tau_n)^nf$ dans (4.4.4) et en utilisant le caractère isométrique de P_n (voir Lemme 3.3.3), on trouve que

$$\|W_{N,n}(t)P_nf - P_nU(t)f\|_n = \|U_N(t/n)^nf - U(t)f\|.$$

Maintenant, on prend $\omega = s_m - k_M$. Comme on a $\|U(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\omega t}$ (d'après le Théorème 3.3.2 (3)) et $2k_M < s_m$, alors $k_M < \omega$. Ainsi, on peut remplacer dans le Théorème 3.1.2, $S_0(t)$ par $U_1(t)$ et $B(s)$ par l'opérateur défini dans (4.4.1) et par conséquent le théorème de Chernoff (Théorème 3.1.1) nous permet de prouver (4.4.4). □

4.4.1 Schémas d'Euler explicite et implicite pour l'équation de transport linéaire avec production.

Dans la suite, on va utiliser les opérateurs suivants Σ_n et Λ_n qui sont définis par :

$$[\Sigma_n\xi]_{i,j,k} = \tau_n\sigma_i\xi_{j,k} \tag{4.4.6}$$

et

$$[\Lambda_n\xi]_{i,j} = \frac{1}{2}p_i k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{j,l}, \tag{4.4.7}$$

pour $(i,j) \in \mathcal{N}$ et $-\mu_n \leq k \leq \mu_n$. On remarque, d'après la convention de la Remarque 4.2.1, que dans (4.4.7) j peut prendre n'importe quelles valeurs de x.

Pour ces schémas on définit les deux opérateurs matriciels $T_{2,n}^{(1)Euler-exp} := [T_{2,n}^{(1)}\xi]_{i,j}$ et $T_{2,n}^{(2)Euler-imp} := [T_{2,n}^{(2)}\xi]_{i,j}$ dans $B(X_n)$, par

$$[T_{2,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = (\xi_{i-j,j} - \xi_{i,j}) - [\Sigma_n\xi]_{i-j,i-j,j} + [\Lambda_n\xi]_{i-j,i-j}\,,$$

si $(i,j) \in \mathcal{N}$ et

$$[T_{2,n}^{(2)}\xi]_{i,j} = (\xi_{i,j} - \xi_{i+j,j}) - \tau_n\sigma_i\xi_{i+j,j} + \frac{1}{2}p_i\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i+l,l},$$

si $(i,j) \in \mathcal{N}$. Pour le schéma d'Euler explicite, la solution approchée sera

$$[\eta]_{i,j} = [\xi + T_{2,n}^{(1)}\xi]_{i,j} = (1-\tau_n\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j} + \frac{1}{2}p_{i-j}h_n \sum_{l=-p_n}^{p_n} \xi_{i-j,l},$$

car $\tau_n \frac{k_n}{h_n} = 1$.

Le but des schémas d'Euler explicite et implicite est d'avoir (4.1.4) pour $p = 1$. Selon (4.4.3), on doit tenir compte, pour ces schémas, de $V_{0,n}$ et $V_{1,n}$, autrement dit on prend la solution approchée $W_{0,n}$.

Une comparaison avec cette solution approchée nous donne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} |[W_{0,n}(\tau_n)\xi - \eta]_{i,j}| \quad &= \quad |(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1 + \tau_n\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j} \\ &\quad + \frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i-j,l}(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1)|. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|W_{0,n}(\tau_n)\xi - \eta\|_n \leq A\tau_n^2\|\xi\|_n$$

où la constante A dépend seulement de σ et indépendante de τ_n.

Pour le schéma d'Euler implicite, la solution approchée sera

$$[\eta]_{i,j} = [\left(I - T_{2,n}^{(2)}\right)^{-1} \xi]_{i,j}$$

or

$$\begin{aligned}
\xi_{i,j} &= [\eta - T_{2,n}^{(2)}\eta]_{i,j} \\
&= \eta_{i,j} - (\eta_{i,j} - \eta_{i+j,j}) - \tau_n\sigma_i\eta_{i+j,j} + \frac{1}{2}p_i\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \eta_{i+l,l} \\
&= \eta_{i+j,j} + \tau_n\sigma_i\eta_{i+j,j} - \frac{1}{2}p_i\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \eta_{i+l,l} \\
&= [(I+T)\eta]_{i+j,j}
\end{aligned}$$

où $[T\eta]_{i,j} = \tau_n\sigma_{i-j}\eta_{i,j} - \frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \eta_{i-j+l,l}$. Ainsi, on obtient $\xi_{i-j,j} = [(I+T)\eta]_{i,j}$ ce qui donne,

$$[\eta]_{i,j} = [(I+T)^{-1}N\xi]_{i,j} \quad \text{où} \quad [N\xi]_{i,j} = \xi_{i-j,j}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
[\eta]_{i,j} &= [(I-T)N\xi]_{i,j} + \theta(\tau_n^2)[N\xi]_{i,j} \\
&= \xi_{i-j,j} - \tau_n\sigma_{i-j}\xi_{i-j,j} - \frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} [N\xi]_{i-j+l,l} + \theta(\tau_n^2)\xi_{i-j,j} \\
&= (1 - \tau_n\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j} + \frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i-j,l} + \theta(\tau_n^2)\xi_{i-j,j}
\end{aligned}$$

De même, une comparaison avec la solution approchée $W_{0,n}(t)$ nous donne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|[W_{0,n}(\tau_n)\xi - \eta]_{i,j}| &= |(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1 + \tau_n\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j} \\
&\quad + \frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i-j,l}(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1) \\
&\quad + \theta(\tau_n^2)\xi_{i-j,j}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|W_{0,n}(\tau_n)\xi - \eta\|_n = \theta(\tau_n^2).$$

Ainsi, on trouve l'estimation (4.1.4) et par conséquence l'ordre de convergence pour ce schéma est $p = 1$.

4.4.2 Schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de transport linéaire avec production.

Pour ce schéma, on définit deux opérateurs matriciels $T_{2,n}^{(1)Cr-Ni} = T_{2,n}^{(1)}$ et $T_{2,n}^{(2)Cr-Ni} = T_{2,n}^{(2)}$ dans $\mathcal{L}(X_n)$ par

$$[T_{2,n}^{(1)}\xi]_{i,j} := 2(\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i,j}) - \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}\xi_{i-\frac{j}{2},j} + [\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2}}$$

et

$$[T_{2,n}^{(2)}\xi]_{i,j} := 2(\xi_{i,j} - \xi_{i+\frac{j}{2},j}) - \tau_n\sigma_{i+\frac{j}{2}}\xi_{i+\frac{j}{2},j} + [\Lambda_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+\frac{j}{2}}$$

On définit aussi l'opérateur suivant :

$$[M_1\xi]_{i,j} = [(I - \frac{1}{2}T_1)(I + \frac{1}{2}T_1)^{-1}\xi]_{i,j} \quad \text{où} \quad [T_1\xi]_{i,j} = \tau_n\sigma_i\xi_{i,j} - [\Lambda_n\xi]_{i,i}.$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
[(I + \frac{1}{2}T_{2,n}^{(1)})\xi]_{i,j} &= \xi_{i,j} + (\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i,j}) - \frac{\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}}{2}\xi_{i-\frac{j}{2},j} + \frac{1}{2}[\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2}} \\
&= [(I - \frac{1}{2}T_1)\xi]_{i-\frac{j}{2},j}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
[(I-\frac{1}{2}T_{2,n}^{(2)})M_1\xi]_{i-j,j} &= [M_1\xi]_{i-j,j}-([M_1\xi]_{i-j,j}-[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}) \\
&\quad +\frac{\sigma_{i-\frac{j}{2}}\tau_n}{2}[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j}-\frac{p_{i-\frac{j}{2}}\tau_n}{4}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},l} \\
&= [(I+\frac{1}{2}T_1)M_1\xi]_{i-\frac{j}{2},j} \\
&= [(I+\frac{1}{2}T_1)(I-\frac{1}{2}T_1)(I+\frac{1}{2}T_1)^{-1}\xi]_{i-\frac{j}{2},j} \\
&= [(I-\frac{1}{2}T_1)\xi]_{i-\frac{j}{2},j} \\
&= [(I+\frac{1}{2}T_{2,n}^{(1)})\xi]_{i,j}
\end{aligned}$$

Ceci montre qu'on aura

$$\begin{aligned}
[\eta]_{i,j} &= [(1+\frac{1}{2}T_{2,n}^{(1)})(1-\frac{1}{2}T_{2,n}^{(2)})^{-1}\xi]_{i,j}=[M_1\xi]_{i-j,j} \\
&= [(I-\frac{1}{2}T_1)(I+\frac{1}{2}T_1)^{-1}\xi]_{i-j,j} \\
&= [(I-\frac{1}{2}T_1)(I-\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{4}T_1^2+\theta(\tau_n^3))\xi]_{i-j,j} \\
&= [(I-T_1+\frac{1}{2}T_1^2+\theta(\tau_n^3))\xi]_{i-j,j}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
[\eta]_{i,j} &= \xi_{i-j,j}-\sigma_{i-j}\tau_n\xi_{i-j,j}+\frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2}\xi_{i-j,j}+[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-j}-\sigma_{i-j}\tau_n[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-j} \\
&\quad +\left[\frac{p_{i-j}\tau_n}{2}\Lambda_n\xi\right]_{i-j,i-j}+\theta(\tau_n^3)[\xi]_{i-j,j} \\
&= (1-\sigma_{i-j}\tau_n+\frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2})\xi_{i-j,j}+\frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}(1-\sigma_{i-j}\tau_n) \\
&\quad +\frac{p_{i-j}^2\tau_n^2}{4}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}+\theta(\tau_n^3)[\xi]_{i-j,j}
\end{aligned}$$

Dans ce schéma, $V_{k,n}$, où $k\geq 3$ n'affecte pas l'ordre de l'approximation rationnelle, donc, il suffit de prendre $W_{1,n}(t)$ comme solution approchée.

Une comparaison avec cette solution approchée nous donne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|[W_{1,n}(\tau_n)\xi-\eta]_{i,j}| &= |(\exp(\tau_n\sigma_{i-j})-1+\tau_n\sigma_{i-j}+\frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2})\xi_{i-j,j}\\
&+\frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j})-1+\tau_n\sigma_{i-j})\\
&+\frac{p_{i-j}^2\tau_n^2}{4}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}(2\exp(-\tau_n\sigma_{i-j})-1)\\
&-\theta(\tau_n^3))\xi_{i-j,j}|
\end{aligned}$$

et

$$\|[W_{1,n}(\tau_n)\xi-\eta\|_n=\theta(\tau_n^3),$$

Par conséquent, l'ordre de ce schéma sera $p=2$.

4.4.3 Schéma de Predictor-corrector pour l'équation de transport linéaire avec production.

Pour ce schéma, on définit quatre opérateurs matriciels $[T_{2,n}^{(1)pre-cor}\xi]_{i,j} := [T_{2,n}^{(1)}\xi]_{i,j}, [T_{2,n}^{(2)pre-cor}\xi]_{i,j} := [T_{2,n}^{(2)}\xi]_{i,j}, [T_{2,n}^{(3)pre-cor}\xi]_{i,j} := [T_{2,n}^{(3)}\xi]_{i,j}$ et $[T_{2,n}^{(4)pre-cor}\xi]_{i,j} := [T_{2,n}^{(4)}\xi]_{i,j}$ donnés par :

$$\begin{aligned}
[T_{2,n}^{(1)}\xi]_{i,j} &= 3[T_{0,n}^{(1)Euler-exp}\xi]_{i,j}+[T_{0,n}^{(1)Euler-exp}\xi]_{i-j,j}-3[T_{0,n}^{(1)Euler-exp}\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\\
&- \frac{2}{3}[\Sigma_n\xi]_{i-j,i-j,j}-\frac{1}{3}[\Sigma_n\xi]_{i-2j,i-2j,j}-[\Sigma_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2},j}+[\Sigma_n\xi]_{i-\frac{3j}{2},i-\frac{3j}{2},j}\\
&+ \frac{2}{3}[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-j}+\frac{1}{3}[\Lambda_n\xi]_{i-2j,i-2j}+[\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2}}-[\Lambda_n\xi]_{i-\frac{3j}{2},i-\frac{3j}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T_{2,n}^{(2)}\xi]_{i,j} &= T_{0,n}^{(3)pre-cor}\xi]_{i,j}+\frac{1}{2}[\Sigma_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+j,j}-\frac{3}{4}[\Sigma_n\xi]_{i-j,i-j,j}\\
&- \frac{3}{4}[\Sigma_n\xi]_{i,i,j}-\frac{1}{2}[\Sigma_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i,j}+\frac{1}{3}[\Sigma_n\xi]_{i,i+\frac{j}{2},j}-\frac{3}{2}[\Sigma_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+\frac{j}{2},j}\\
&+ \frac{1}{6}[\Sigma_n\xi]_{i-j,i-\frac{j}{2},j}+\frac{3}{2}[\Sigma_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2},j}+\frac{3}{4}[\Lambda_n\xi]_{i,i}+\frac{1}{2}[\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i}\\
&+ \frac{3}{4}[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-j}+\frac{3}{2}[\Lambda_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+\frac{j}{2}}-\frac{1}{3}[\Lambda_n\xi]_{i,i+\frac{j}{2}}\\
&- \frac{3}{2}[\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2}}-\frac{1}{6}[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-\frac{j}{2}}-\frac{1}{2}[\Lambda_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+j},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[T^{(3)}_{2,n}\xi]_{i,j} &= T^{(3)pre-cor}_{0,n}\xi]_{i,j} - \frac{2}{3}\,[\Sigma_n\xi]_{i,i+\frac{j}{2},j} - \frac{1}{3}\,[\Sigma_n\xi]_{i-j,i-\frac{j}{2},j} - [\Sigma_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+j,j} \\
&+ [\Sigma_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i,j} + \frac{2}{3}[\Lambda_n\xi]_{i,i+\frac{j}{2}} + \frac{1}{3}[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-\frac{j}{2}} + [\Lambda_n\xi]_{i+\frac{j}{2},i+j} \\
&- [\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i}
\end{aligned}$$

et

$$[T^{(4)}_{2,n}\xi]_{i,j} = 2(\xi_{i-\frac{j}{2},j} - \xi_{i,j}) - [\Sigma_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2},j} + [\Lambda_n\xi]_{i-\frac{j}{2},i-\frac{j}{2}}.$$

On définit aussi l'opérateur suivant

$$[M_2\xi]_{i,j} = [(I - \frac{1}{3}T_1)(I + \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}T_1^2)^{-1}\xi]_{i,j} \quad \text{où} \quad [T_1\xi]_{i,j} = [\Sigma_n\xi]_{i,i,j} - [\Lambda_n\xi]_{i,i}.$$

Par un long calcul que l'on détaillera dans un annexe de ce chapitre on montre que

$$\begin{aligned}
[(I + \frac{1}{3}T^{(1)}_{2,n})\xi]_{i,j} = \frac{2}{3}(I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-j,j} + \frac{1}{3}(I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-2j,j} + (I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-\frac{j}{2},j} \\
- (I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

et

$$\begin{aligned}
[(I - \frac{2}{3}T^{(2)}_{2,n} + \frac{1}{6}T^{(3)}_{2,n}T^{(4)}_{2,n})M_2\xi]_{i-j,j} = \frac{2}{3}[(I - \frac{1}{3}T_1)\ \xi]_{i-j,j} + \frac{1}{3}[(I - \frac{1}{3}T_1)\xi]_{i-2j,j} \\
+ [(I - \frac{1}{3}T_1)\xi]_{i-\frac{j}{2},j} - [(I - \frac{1}{3}T_1)\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}.
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

D'où, on aura

$$[(I + \frac{1}{3}T^{(1)}_{2,n})\xi]_{i,j} = [(I - \frac{2}{3}T^{(2)}_{2,n} + \frac{1}{6}T^{(3)}_{2,n}T^{(4)}_{2,n})M_2\xi]_{i-j,j}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
[\eta]_{i,j} &= [(1 - \frac{2}{3}T^{(2)}_{2,n} + \frac{1}{6}T^{(3)}_{2,n}T^{(4)}_{2,n})^{-1}(1 + \frac{1}{3}T^{(1)}_{2,n})\xi]_{i,j} = [M_2\xi]_{i-j,j} \\
&= [(I - \frac{1}{3}T_1)(I + \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}T_1^2)^{-1}\xi]_{i-j,j} \\
&= [(I - T_1 + \frac{1}{2}T_1^2 - \frac{1}{6}T_1^3 + \theta(\tau_n^4))\xi]_{i-j,j} \\
&= (1 - \sigma_{i-j}\tau_n + \frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2} - \frac{\sigma_{i-j}^3\tau_n^3}{6})\xi_{i-j,j} + \Big(1 - \sigma_{i-j}\tau_n + \frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2} \\
&\quad + \frac{1}{2}p_{i-j}(1 - \sigma_{i-j}\tau_n + \frac{1}{3}p_{i-j}\tau_n^2)\Big)[\Lambda_n\xi]_{i-j,i-j} + \theta(\tau_n^4))\xi_{i-j,j}.
\end{aligned}$$

Dans ce schéma, $V_{k,n}$, où $k \geq 4$ n'affecte pas l'ordre de l'approximation rationnelle. D'où, il suffit de prendre $W_{2,n}(t)$ comme solution approchée.

Une comparaison avec cette solution approchée nous donne l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|[W_{2,n}(\tau_n)\xi - \eta]_{i,j}| &= |(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1 + \tau_n\sigma_{i-j} - \frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2} + \frac{\sigma_{i-j}^3\tau_n^3}{6})\xi_{i-j,j} \\
&+\frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i-j,l}(\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1 + \tau_n\sigma_{i-j} - \frac{\sigma_{i-j}^2\tau_n^2}{2}) \\
&+\frac{1}{4}p_{i-j}^2\tau_n^2 k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i-j,l}(2\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1 + \tau_n\sigma_{i-j}) \\
&+\frac{1}{12}p_{i-j}^3\tau_n^3 k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1} \xi_{i-j,l}(6\exp(-\tau_n\sigma_{i-j}) - 1) - \theta(\tau_n^4))\xi_{i-j,j}|
\end{aligned}$$

et par suite

$$\|W_{2,n}(\tau_n)\xi - \eta\|_n = \theta(\tau_n^4).$$

Par conséquent, l'ordre de convergence pour ce schéma sera $p = 3$.

4.5 Les résultats numériques

Cette partie est consacrée à la mise en oeuvre numérique des méthodes d'approximations utilisées dans notre travail. Nous utiliserons le logiciel Fortran pour donner des approximations numériques des semigroupes de transport et ceci dans tous les cas de notre problème de transport. Les simulations numériques réalisées pour une fonction positive bien déterminée et avec des conditions dynamiques sur le bord donnent une idée sur la distribution des particules dans l'espace des phases et vérifient aussi tous les résultats théoriques trouvés dans ce travail.

Dans la suite nous allons donner des exemples numériques pour nos différents schémas numériques. Dans tous ces exemples nous allons approcher l'évolution de l'équation de transport en 4 temps, en prenant $a = 1, m_n = 200$ et $\mu_n = 100$, ainsi pour avoir $\tau_n k_n / h_n = 1$ on est astreint de prendre $\tau_n = 0.5$, ce qui remplacera le choix de n. Les quatre instants qui seront illustrés sont : $t = k\tau_n$ pour $k = 1, 2, 10$ et $k = 400$. Dans tous ces exemples nous prendrons la donnée initiale

$$\varphi_0(x) = \exp(\frac{-1}{(1 - x^2)}).$$

4.5.1 Approche numérique dans le cas du transport libre.

Pour avoir une idée sur l'évolution des particules dans le problème de transport sans collision et pour savoir la différence entre les schémas d'approximations d'Euler implicite et explicite, Crank-Nikolson et Predictor-Corrector, on a utilisé le logitiel Fortran qui a donné, dans ce cas de transport, un résultat numérique qui est identique pour tous ces schémas. Les figures suivantes représentent une approximation des valeurs de la solution de (**CFTP**) en plusieurs étapes. Ces figures sont obtenues à partir de la formule explicite $[U_{0,n}(k\tau_n)\xi]_{i,j} = \xi_{i-kj,j}; (1 \leq k \leq n)$.

`Solution initiale` `Solution pour` $k = 1$

`Solution pour` $k = 2$ `Solution pour` $k = 3$

`Solution pour` $k = 10$ `Solution pour` $k = 400$

4.5.2 Approche numérique dans le cas du transport avec pure absorption.

Dans ce cas de problème de transport, on vérifie numériquement que les solutions approchées données par ces méthodes d'approximations ne sont pas exactement égaux à la solution exacte de notre problème de transport.

Les figures suivantes représentent une approximation des valeurs de la solution exacte de (**PATP**). Ces figures sont obtenues à partir de la formule explicite $[U_{1,n}(k\tau_n)\xi]_{i,j} = \exp\left(-\boldsymbol{\sigma}_{i,j}^{(k)}\right)\xi_{i-kj,j}; (1 \leq k \leq n)$

`Solution pour` $k = 1$ `Solution pour` $k = 2$

`Solution pour` $k = 10$ `Solution pour` $k = 400$

De même, les figures suivantes représentent une approximation des valeurs de la solution approchée donnée par le schéma d'Euler explicite et aussi en plusieurs étapes.

`Solution pour` $k = 1$ `Solution pour` $k = 2$

`Solution pour` $k = 10$ `Solution pour` $k = 400$

On donne aussi les figures suivantes qui représentent une approximation des valeurs de la solution approchée donnée par le schéma d'Euler implicite en plusieurs étapes.

`Solution pour` $k = 1$ `Solution pour` $k = 2$

`Solution pour` $k = 10$ `Solution pour` $k = 400$

Ensuite, les figures suivantes représentent une approximation des valeurs de la solution approchée donnée par le schéma de Crank-Nicolson en plusieurs étapes.

`Solution pour` $k = 1$ `Solution pour` $k = 2$

`Solution pour` $k = 10$ `Solution pour` $k = 400$

Finalement, on donne les figures suivantes qui représentent une approximation des valeurs de la solution approchée donnée par le schéma de Predictor-Corrector en plusieurs étapes.

`Solution pour` $k = 1$ `Solution pour` $k = 2$

`Solution pour` $k = 10$ `Solution pour` $k = 400$

Lorsqu'on fait une comparaison entre la solution exacte de notre prolème de transport et la solution approchée de chaque schéma, on vérifie aussi numériquement que l'erreur varie d'un schéma à un autre.
En effet si $\epsilon_n = \|U_{1,n}(k\tau_n)\xi - \eta\|_n$, alors pour $k = 1$ on a

Euler implicite	Euler explicite	Crank-Nicolson	Predictor-Corrector
$\epsilon_n < 4.5 \times 10^{-4}$	$\epsilon_n < 4.5 \times 10^{-4}$	$\epsilon_n < 4 \times 10^{-6}$	$\epsilon_n < 3 \times 10^{-8}$

4.5.3 Approche numérique dans le cas du transport avec production.

Dans ce cas de problème de transport, on vérifie aussi numériquement que les solutions approchées données par ces schémas d'approximation ne sont pas exactement égaux à la solution approchée de notre problème de transport. Dans ce cas, puisque le calcul est très compliqué, on va donner seulement les solution de la première itération. La figure suivante représente une approximation des valeurs de la solution approchée :

$$\begin{aligned}
[W_{2,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} &= \sum_{k=0}^{3}[V_{k,n}(\tau_n)\xi]_{i,j} = [U_{1,n}(\tau_n)\sum_{k=0}^{3}\tau_n^k A_n^k \xi]_{i,j} \\
&= \exp(-\tau_n\sigma_{i-j})\Big\{\xi_{i-j,j} + \frac{1}{2}p_{i-j}\tau_n k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l} \\
&+ \frac{1}{2}p_{i-j}^2\tau_n^2 k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l} + \frac{1}{2}p_{i-j}^3\tau_n^3 k_n \sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}\Big\}.
\end{aligned}$$

Solution approchée dans le cas de production

Dans ce cas de transport, les solutions approchées données par les schémas d'approximation avec lesquels on travaille, sont tous représentées par les schémas suivants :

Solution donnée par Euler explicite

Solution donnée par Euler implicite

Solution donnée par Crank-Nicolson

Solution donnée par Predictor-Corrector

Remarque 4.5.1. *On remarque que lorsque le temps tend vers infini (par exemple k=400) on trouve toujours un résidu de la solution. Ceci provient du fait que dans l'intervalle des vitesses on n'a pas exclu la vitesse nulle. Donc la donnée f(x,0) reste toujours intacte.*

On vérifie aussi numériquement, lorsqu'on fai une comparaison entre la solution approchée du problème et les solutions approchées données par ces schémas d'approximation, que l'erreur change d'un schéma à un autre.

En effet si $\varepsilon_n = \|W_{N,n}(k\tau_n)\xi - \eta\|_n$, alors pour $k = 1$ on a

Euler implicite	Euler explicite	Crank-Nicolson	Predictor-Corrector
$\varepsilon_n < 4.5 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_n < 4.5 \times 10^{-4}$	$\varepsilon_n < 7 \times 10^{-6}$	$\varepsilon_n < 3 \times 10^{-7}$

4.5.4 Comparaison entre les schémas d'approximation.

si on fait, dans le cas de pure absorption, une comparaison entre les résultats données par les schémas d'Euler, Crank-Nicolson et Predictor-Corrector, on trouve ces erreurs pour $k = 1$:

	Euler et C.Nicolson	Euler et P.Corrector	C.Nicolson et P.Corrector
Erreur	$\leq 5 \times 10^{-4}$	$\leq 4.5 \times 10^{-4}$	$\leq 4 \times 10^{-6}$

Le tableau suivant représente la différence entre les solutions approchées pour $k = 1$ données par ces différents schémas dans le cas de transport avec production.

	Euler et C.Nicolson	Euler et P.Corrector	C.Nicolson et P.Corrector
Erreur	$\leq 4.5 \times 10^{-4}$	$\leq 4 \times 10^{-4}$	$\leq 8 \times 10^{-6}$

4.6 Annexe

Dans cette partie nous allons détailler le calcul pour obtenir les formules (4.4.8) et (4.4.9).

$$[(I+\frac{1}{3}T^{(1)}_{2,n})\xi]_{i,j} =$$
$$\frac{2}{3}\xi_{i-j,j}+\frac{1}{3}\xi_{i-2j,j}+\xi_{i-\frac{j}{2},j}-\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}$$
$$-\frac{2}{9}\sigma_{i-j}\tau_n\xi_{i-j,j}-\frac{1}{9}\sigma_{i-2j}\tau_n\xi_{i-2j,j}$$
$$-\frac{1}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}}\tau_n\xi_{i-\frac{j}{2},j}+\frac{1}{3}\sigma_{i-\frac{3j}{2}}\tau_n\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}$$
$$+\frac{1}{9}p_{i-j}\tau_nk_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}+\frac{1}{18}p_{i-2j}\tau_n$$
$$k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-2j,l}+\frac{1}{6}p_{i-\frac{j}{2}}\tau_nk_n$$
$$\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-\frac{j}{2},l}-\frac{1}{6}p_{i-\frac{3j}{2}}\tau_nk_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-\frac{3}{2}j,l}$$
$$=\quad\frac{2}{3}(1-\frac{1}{3}\tau_n\sigma_{i-j})\xi_{i-j,j}+\frac{1}{9}p_{i-j}\tau_nk_n$$
$$\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-j,l}+\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3}\sigma_{i-2j}\tau_n)\xi_{i-2j,j}$$
$$+\frac{1}{18}p_{i-2j}\tau_nk_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-2j,l}$$
$$+(1-\frac{1}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}}\tau_n)\xi_{i-\frac{j}{2},j}+\frac{p_{i-\frac{j}{2}}\tau_n}{6}k_n$$
$$\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-\frac{j}{2},l}-(1-\frac{1}{3}\sigma_{i-\frac{3j}{2}}\tau_n)\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}$$
$$+\frac{1}{6}p_{i-\frac{3j}{2}}\tau_nk_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\xi_{i-\frac{3j}{2},l}$$
$$=\frac{2}{3}(I-\frac{1}{3}T_1)\xi_{i-j,j}+\frac{1}{3}(I-\frac{1}{3}T_1)\xi_{i-2j,j}$$
$$+(I-\frac{1}{3}T_1)\xi_{i-\frac{j}{2},j}-(I-\frac{1}{3}T_1)\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}.$$

Ce qui donne (4.4.8).

Pour obtenir la formule (4.4.9), nous écrivons

$$\left[(I-\frac{2}{3}T^{(2)}_{2,n}+\frac{1}{6}T^{(3)}_{2,n}T^{(4)}_{2,n})M_2\xi\right]_{i-j,j}$$
$$=C_{i,j}+\frac{1}{6}D_{i,j}$$

où

$$C_{i,j}=[M_2\xi]_{i-j,j}$$
$$-\frac{2}{3}\left([M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}-[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\right)$$
$$-\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_2\xi]_{i,j}+\frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-2j}[M_2\xi]_{i-2j,j}$$
$$+\frac{\tau_n}{2}\sigma_{i-j}[M_2\xi]_{i-j,j}+\frac{\tau_n}{3}\sigma_{i-\frac{3j}{2}}[M_2\xi]_{i-j,j}$$
$$-\frac{2\tau_n}{9}\sigma_{i-j}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j}+\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j}$$
$$-\frac{\tau_n}{9}\sigma_{i-2j}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},j}-\tau_n\sigma_{i-\frac{3j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},j}$$
$$-\frac{p_{i-j}\tau_n}{4}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l}$$
$$-\frac{p_{i-\frac{3j}{2}}\tau_n}{6}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l}$$
$$-\frac{p_{i-2j}\tau_n}{4}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l}$$
$$-\frac{p_{i-\frac{j}{2}}\tau_n}{2}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}$$
$$+\frac{p_{i-j}\tau_n}{9}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}$$
$$+\frac{p_{i-\frac{3j}{2}}\tau_n}{2}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l}$$
$$+\frac{p_{i-2j}\tau_n}{18}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l}$$
$$+\frac{p_{i-\frac{j}{2}}\tau_n}{6}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i,l}$$

et

$$D_{i,j} =$$
$$\Big([T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j} - [T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j}\Big)$$
$$- \frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j} - \frac{1}{3}\tau_n\sigma_{i-2j}$$
$$[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j} - \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i,j}$$
$$+ \tau_n\sigma_{i-\frac{3j}{2}}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-j,j}$$
$$+ \frac{1}{3}p_{i-j}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}$$
$$+ \frac{1}{6}p_{i-2j}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l}$$
$$+ \frac{1}{2}p_{i-\frac{j}{2}}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i,l}$$
$$- \frac{1}{2}p_{i-\frac{3j}{2}}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[T^{(4)}_{2,n}M_2\xi]_{i-j,l}$$
$$= \Big\{2([M_2\xi]_{i-2j,j} - [M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j})$$
$$- \tau_n\sigma_{i-2j}[M_2\xi]_{i-2j,j}$$
$$+ \frac{p_{i-2j}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l}\Big\}$$
$$- \Big\{2([M_2\xi]_{i-j,j} - [M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j})$$
$$- \tau_n\sigma_{i-j}[M_2\xi]_{i-j,j}$$
$$+ \frac{p_{i-j}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l}\Big\}$$
$$- \frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-j}\Big\{2([M_2\xi]_{i-j,j} - [M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j})$$
$$- \tau_n\sigma_{i-j}[M_1\xi]_{i-j,j}$$
$$+ \frac{p_{i-j}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l}\Big\}$$
$$- \frac{\tau_n\sigma_{i-2j}}{3}\Big\{2([M_2\xi]_{i-2j,j} - [M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j})$$
$$- \tau_n\sigma_{i-2j}[M_2\xi]_{i-2j,j}$$
$$+ \frac{p_{i-2j}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l}\Big\}$$
$$- \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}\Big\{2([M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j} - [M_2\xi]_{i,j})$$
$$- \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j}$$
$$+ \frac{p_{i-\frac{j}{2}}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}\Big\}$$
$$+ \tau_n\sigma_{i-\frac{3j}{2}}\Big\{2([M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j} - [M_2\xi]_{i-j,j})$$
$$- \tau_n\sigma_{i-\frac{3j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j}$$
$$+ \frac{p_{i-\frac{3j}{2}}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l}\Big\}$$
$$+ \frac{p_{i-j}}{3}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\Big\{2([M_2\xi]_{i-j,l}$$
$$- [M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}) - \tau_n\sigma_{i-j}[M_2\xi]_{i-j,l}$$
$$+ \frac{p_{i-j}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l'}\Big\}$$
$$+ \frac{p_{i-2j}}{6}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\Big\{2([M_2\xi]_{i-2j,l}$$
$$- [M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,l}) - \tau_n\sigma_{i-2j}[M_2\xi]_{i-2j,l}$$
$$+ \frac{p_{i-2j}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l'}\Big\}$$
$$+ \frac{p_{i-\frac{j}{2}}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\Big\{2([M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}$$
$$- [M_2\xi]_{i,l}) - \tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l}$$
$$+ \frac{p_{i-\frac{j}{2}}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l'}\Big\}$$
$$- \frac{p_{i-\frac{3j}{2}}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}\Big\{2([M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,l}$$
$$- [M_2\xi]_{i-j,l}) - \tau_n\sigma_{i-\frac{3j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,l}$$
$$+ \frac{p_{i-\frac{3j}{2}}}{2}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l'}\Big\}.$$

Alors, on trouve

$$
\begin{aligned}
&C_{i,j} + \frac{1}{6}D_{i,j} = \\
&\frac{2}{3}[M_2\xi]_{i-j,j} + \frac{4}{9}\tau_n\sigma_{i-j}[M_2\xi]_{i-j,j} \\
&+ \frac{\tau_n^2}{9}\sigma_{i-j}^2[M_2\xi]_{i-j,j} + \frac{1}{3}[M_2\xi]_{i-2j,j} + \\
&\frac{2}{9}\tau_n\sigma_{i-2j}[M_2\xi]_{i-2j,j} + \frac{\tau_n^2}{18}\sigma_{i-2j}^2[M_2\xi]_{i-2j,j} \\
&+ [M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j} + \frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-\frac{j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j} \\
&+ \frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-\frac{j}{2}}^2[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j} - [M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},j} - \\
&\frac{2}{3}\tau_n\sigma_{i-\frac{3j}{2}}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},j} - \frac{\tau_n^2}{6}\sigma_{i-\frac{3j}{2}}^2[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},j} \\
&+ \frac{p_{i-j}^2\tau_n^2}{18}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l} \\
&- \frac{\sigma_{i-j}\tau_n^2}{9}p_{i-j}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l} \\
&- \frac{2p_{i-j}}{9}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-j,l} \\
&+ \frac{p_{i-2j}^2\tau_n^2}{36}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l} \\
&- \frac{\sigma_{i-2j}\tau_n^2}{18}p_{i-j}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l} \\
&- \frac{p_{i-j}}{9}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-2j,l} \\
&+ \frac{p_{i-\frac{j}{2}}^2\tau_n^2}{12}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l} \\
&- \frac{\sigma_{i-\frac{j}{2}}\tau_n^2}{6}p_{i-\frac{j}{2}}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l} \\
&- \frac{p_{i-\frac{j}{2}}}{3}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},l} \\
&- \frac{p_{i-\frac{3j}{2}}^2\tau_n^2}{12}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l} \\
&+ \frac{\sigma_{i-\frac{3j}{2}}\tau_n^2}{6}p_{i-\frac{3j}{2}}k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l} \\
&+ \frac{p_{i-\frac{j}{2}}}{3}\tau_n k_n\sum_{l=-\mu_n}^{\mu_n-1}[M_2\xi]_{i-\frac{3j}{2},l}.
\end{aligned}
$$

Finalement, on aura

$$
\begin{aligned}
&\left[(I - \frac{2}{3}T_{2,n}^{(2)} + \frac{1}{6}T_{2,n}^{(3)}T_{2,n}^{(4)})M_2\xi\right]_{i-j,j} \\
&= \frac{2}{3}[(I + \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}T_1^2)M_2\xi]_{i-j,j} \\
&+ \frac{1}{3}[(I + \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}T_1^2)M_2\xi]_{i-2j,j} \\
&+ [(I + \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}T_1^2)M_2\xi]_{i-\frac{j}{2},j} \\
&- [(I + \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{6}T_1^2)M_2\xi]_{i-\frac{3}{2}j,j} \\
&= \frac{2}{3}(I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-j,j} + \frac{1}{3}(I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-2j,j} \\
&+ (I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-\frac{j}{2},j} - (I - \frac{1}{3}T_1)\xi_{i-\frac{3}{2}j,j}.
\end{aligned}
$$

Chapitre 5

Théorèmes de point fixe sur un espace de Fréchet

5.1 Introduction.

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'abord, à la généralisation des théorèmes de point fixe de type Schauder sur des espaces de Fréchet ayant la propriété de Dunford-Pettis en remplaçant l'hypothèse de compacité par une hypothèse de compacité faible.

Ensuite, on présente quelques nouvelles versions et généralisations du théorème de point fixe de type Krasnoselskii faisant intervenir les notions de ϑ-contraction et de ϑ-équicontraction.

5.2 Théorèmes de point fixe de type Schauder

Dans cette partie, on présente quelques nouvelles versions du théorème de point fixe de type Schauder qui généralisent le Théorème 2.1 dans [Latr] et le Théorème 2.1 dans [BJM].

Théorème 5.2.1. *Soient A un opérateur linéaire sur un espace de Fréchet E ayant la propriété de Dunfort-Pettis (DP) et M un ensemble des valeurs non nuls de E. On suppose que :*
i) M est un fermé borné convexe et non vide de E.
ii) A est un opérateur faiblement compact de E.
iii) $A(M) \subset M$.

Alors A admet un point fixe dans M.

Preuve :
On pose $N = \overline{co}(A(M))$.

- 1^{ere} étape : montrons que N est faiblement compact de X.

En effet, on a

$$A(M) \subset M \qquad \text{donc} \qquad \overline{co}(A(M)) \subset \overline{co}(M).$$

Par conséquent

$$N = \overline{co}(A(M)) \subset M.$$

On aura donc

$$A(N) \subset A(M) \subset \overline{co}(A(M)) = N.$$

D'où A est un opérateur faiblement compact de N dans N. Comme M est borné, alors $A(M)$ est relativement faiblement compact. Par conséquent $\overline{A(M)}$ est faiblement compact. Par ailleurs, on a

$$A(M) \subset \overline{A(M)} \Longrightarrow N = \overline{co}(A(M)) \subset \overline{co}(\overline{A(M)}),$$

et puisque $\overline{A(M)}$ est faiblement compact alors d'après le théorème 2.3.3 de Krein-S̃mulian $\overline{co}(\overline{A(M)})$ est aussi faiblement compact. Puisque N est un fermé convexe alors N est faiblement fermé et par suite N est un faiblement fermé d'un faiblement compact donc c'est un faiblement compact.

• 2^{eme} étape : montrons que $A(N)$ est un compact de X.
Soit $(\Psi_n)_n$ une suite dans $A(N)$. Alors il existe une suite de Cauchy $(\varphi_n)_n \subset N$ telle que

$$\Psi_n = A(\varphi_n); \forall n \in \mathbb{N}.$$

Puisque N est faiblement compact, alors il existe ρ_n telle que $(\varphi_{\rho_n})_n$ converge faiblement dans N. Comme A est un opérateur faiblement compact et E un espace localement convexe métrisable ayant la propriété de Dunford-Pettis (DP), alors

$$\Psi_{\rho_n} = A(\varphi_{\rho_n}) \text{ converge fortement,}$$

ce qui implique que $A(N)$ est compact.

• 3^{eme} étape : On a

$$A : N \longmapsto N \quad \text{est une application continue}$$

avec N est un convexe fermé et $A(N)$ est un compact. Alors, d'après le théorème de Schauder-Tychonoff, A admet un point fixe dans $N \subset M$ et parsuite il existe $(x \neq 0) \in M$ tel que $Ax = x$. □

Théorème 5.2.2. *Soient E un espace de Fréchet ayant la propriété de Dunford-Pettis et M un ensemble fermé, borné et convexe des valeurs non nuls de E.*
On considère deux opérateurs B et C tels que :
i) B :$E \longmapsto E$ est un opérateur linéaire faiblement compact.
ii) C :$E \longmapsto E$ une application continue vérifiant :
– L'image par C d'un borné est un borné.
– L'image par C d'un faiblement compact est un faiblement compact.
iii) $BC(M) \subset M$.

Alors $A = BC$ admet un point fixe dans M.

Preuve :
On pose $N = \overline{co}(A(M))$.

- 1^{ere} étape : montrons que N est faiblement compact.

On a $C(M)$ est un borné et B est faiblement compact, alors $A(M) = B(C(M))$ est relativement faiblement compact. Par conséquent $\overline{co}(A(M))$ est faiblement compact et par suite N est faiblement compact.

- 2^{eme} étape : montrons que $A(N)$ est compact.

Soit $(\psi_n)_n$ une suite dans $A(N)$. Il exist $(\varphi_n)_n \subset N$ telle que

$$\Psi_n = A(\varphi_n); \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or N est faiblement compact, donc il existe ρ_n tel que φ_{ρ_n} converge faiblement dans N. Par suite $C(\varphi_{\rho_n})$ converge aussi faiblement.
Comme B est faiblement compact et E est un espace ayant la propriété de (D.P), alors

$$B \circ C(\varphi_{\rho_n}) \text{ converge fortement .}$$

Par suite

$$\Psi_{\rho_n} = A(\varphi_{\rho_n}) = B \circ C(\varphi_{\rho_n}) \text{ converge fortement.}$$

On peut donc déduire que $A(N)$ est un compact.

- 3^{eme} étape : En appliquant le théorème de Schauder-Tychonoff, on aura

alors $A = BC$ admet un point fixe dans $N \subset M$ et parsuite $\exists x \neq 0$ de M tel que $Ax = x$. $\square$

Corollaire 5.2.3. *Soient E un espace de Fréchet ayant la propriété de Dunford-Pettis et M un fermé, borné, convexe et non vide de E.*
On considère les deux opérateurs B et C tels que :

i) $B : E \longmapsto E$ *est un opérateur continu.*

ii) $C : E \longmapsto E$ *est un opérateur linéaire faiblement compact sur* E*.*

iii) $A = BC$ *est faiblement compact sur* E*.*

iv) $A(M) \subset M$*.*

Alors $A = BC$ *admet un point fixe dans* M*.*

Preuve :

On pose $N = \overline{co}(A(M))$.

• 1^{ere} étape : montrons que N est un faiblement compact de X.

En effet, on a

$$A(M) \subset M \qquad \text{alors} \quad \overline{co}(A(M)) \subset \overline{co}(M).$$

Par suite

$$N = \overline{co}(A(M)) \subset M,$$

et par conséquent,

$$A(N) \subset A(M) \subset \overline{co}(A(M)) = N.$$

D'où A est un opérateur faiblement compact de N dans N. Puisque M est borné, on déduit que $A(M)$ est relativement faiblement compact, ce qui donne que $\overline{A(M)}$ est faiblement compact. Or on a

$$A(M) \subset \overline{A(M)} \Longrightarrow N = \overline{co}(A(M)) \subset \overline{co}(\overline{A(M)})$$

et $\overline{A(M)}$ est faiblement compact, alors d'après le théorème de Krein-$\tilde{\text{S}}$mulian $\overline{co}(\overline{A(M)})$ est aussi faiblement compact. Comme N est un fermé convexe, alors N est faiblement fermé et par suite N est un faiblement fermé d'un faiblement compact, donc c'est un faiblement compact.

• 2^{eme} étape : montrons que $C(N)$ est un compact de X.
Soit $(\psi_n)_n$ une suite dans $C(N)$. Il existe une suite $(\varphi_n)_n \subset N$ telle que

$$\Psi_n = C(\varphi_n); \forall n \in \mathbb{N}.$$

Comme N est faiblement compact, alors il existe ρ_n tel que φ_{ρ_n} converge faiblement dans N. Puisque C est un opérateur faiblement compact et E est un espace ayant la propriété de (D.P), alors

$$\Psi_{\rho_n} = C(\varphi_{\rho_n}) \text{ converge fortement.}$$

D'où $C(N)$ est un compact.

• 3^{eme} étape : Comme B est un opérateur continu alors $BC(N)$ est un compact. En conclusion, on

$$A : N \longmapsto N \quad \text{est un opérateur continu}$$

où N est un convexe fermé et $A(N)$ est compact. Alors, d'après le théorème de Schauder-Tychonoff, A admet un point fixe dans $N \subset M$. □

5.3 Théorèmes de point fixe de type Krasnoselskii

Dans le reste de ce chapitre, on prend E un espace Fréchet ayant la propriété de Dunford-Pettis (DP) et ϑ une base de voisinage de l'origine formée d'ouverts convexes de E. Pour tout $U \in \vartheta$, on note par p_U la fonction de Minkowski de U.

Soit M un ensemble non vide d'un espace localement convexe complet et séparé F. Une application $A : M \to F$ est une U-contraction ($U \in \vartheta$) si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x, y \in M$ et si

$$x - y \in (\epsilon + \delta)U, \quad \text{alors} \quad A(x) - A(y) \in \epsilon U. \qquad (1)$$

Si pour tout $U \in \vartheta$ on a $A : M \to F$ est une U-contraction, alors A est une ϑ-contraction. On note que si A est une ϑ-contraction, alors A est une fonction continue (pour plus d'informations sur les ϑ-contraction, voir Taylor [Tay]).

Lemme 5.3.1. *([SeS]) Soit $A : M \to E$ une ϑ-contraction, alors on dit que A est ϑ-contractive, si pour tout $U \in \vartheta$ on a $p_U(A(x) - A(y)) < p_U(x - y)$ si $p_U(x - y) \neq 0$ ou égal à 0 sinon.*

En 1969, Meir et Keeler [MeK] ont donné une généralisation très intéressante du théorème du point fixe de Banach. D'après [MeK], une application A d'un espace métrique (E, d) est une (ϵ, δ) contraction si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in E$ avec $\epsilon \leq d(x, y) \leq \epsilon + \delta$ on a $d(A(x), A(y)) < \epsilon$. Il est clair que les fonctions (ϵ, δ) contractions contiennent les classes de contraction stricte ($d(A(x), A(y)) \leq \lambda d(x, y), 0 < \lambda < 1$) et de contraction non linéaire donnée par Boyd et Wong [B-W].

On remarque que si F est un espace normé avec $\vartheta = \{x \in F : ||x|| < \epsilon, \epsilon > 0\}$ alors (1) est équivalent à (ϵ, δ) contraction [MeK].

Dans la suite, on va présenter quelques résultats qui vont être utilisés dans les démonstrations de nos résultats.

Théorème 5.3.2. *(Théorème de Sehgal et Singh [SeS])Soient M un ensemble séquentiellement complet d'un espace localement convexe séparé F et $A : M \to F$ une ϑ-contraction. Si A vérifie la condition suivante :*

$$\begin{aligned} \textit{pour tout } x &\in M \quad \textit{avec } A(x) \notin M, \\ \textit{il existe } z &\in (x, A(x)) \cap M \ \textit{tel que} \ A(z) \in M \qquad \textit{(2)} \end{aligned}$$

alors A admet un unique point fixe dans M.

Remarque 5.3.3. *D'après [SeS], on peut dire que si M un ensemble d'un espace de Fréchet E et $B : M \longrightarrow E$ une ϑ-contraction alors B est continue.*

Maintenant, on va donner quelques nouveaux résultats de point fixe pour la somme de deux operateurs où E est un espace Fréchet. Tout d'abord, on donne le lemme suivant :

Lemme 5.3.4. *Soient E un espace Fréchet, M un ensemble de E et $B : M \longmapsto E$ une ϑ-contraction. Supposons pour $y \in E$ on a :*

$$\textit{pour tout } x \in M \textit{ avec } Bx + y \notin M,$$

$$\textit{il existe } z \in (x, Bx + y) \cap M \quad \textit{tel que } Bz + y \in M.$$

Alors, il existe un unique $u(y) \in M$ tel que $B(u(y)) + y = u(y)$, ce qui donne $(I - B)^{-1}y = u(y) \in M$.

Preuve :
Conséquence immédiate du Théorème 5.3.2 . □

Le corollaire suivant représente aussi une généralisation du Théorème 2.2 dans [BJM] :

Corollaire 5.3.5. *Soient E un espace de Fréchet ayant la propriété de Dunford-Pettis et M un fermé, borné, convexe et non vide de E.*
On considère les deux opérateurs A et B tels que :
i) A :$E \longmapsto E$ un opérateur linéaire faiblement compact sur E.
ii) $B : M \longmapsto E$ une ϑ-contraction.
iii) Pour tous $x, y \in M$ avec $Ax + By \notin M$, il existe $z \in (x, Bx + Ay) \cap M$ tel que $Bz + Ay \in M$.
iv) $(I - B)^{-1}A(M)$ est faiblement compact.

Alors $\exists y \in M$ tel que $Ay + By = y$.

Preuve :
Tout d'abord, on a B une ϑ-contraction alors B est une fonction continue et comme E est un espace de Fréchet c'est à dire un espace complètement métrisable alors pour tous $x, y \in M$ on a

$$d((I-B)x,(I-B)y) \geq d(x,y) - d(Bx,By) \geq (1-\lambda)d(x,y)$$

avec $\lambda \in (0,1)$ ce qui nous donne la continuité de $(I-B)^{-1}$.
Ensutie, d'après le Lemme 5.3.4 l'équation $z = Bz + Ay$ admet une unique solution $z \in M$ pour tout $y \in M$. Ceci implique que

$$z = (I-B)^{-1}Ay \in M,$$

et par suite

$$(I-B)^{-1}A(M) \subset M.$$

Enfin, on a $(I-B)^{-1}$ une application continue, A un opérateur linéaire faiblement compact sur E et $(I-B)^{-1}A(M)$ est faiblement compact sur E avec $(I-B)^{-1}A(M) \subset M$. Alors, d'après le Corollaire 5.2.3, on prouve que $(I-B)^{-1}A$ admet un point fixe dans M et ceci implique qu'il existe $y \in M$ tel que $Ay+By = y$. $\square$

Prenons $C : M \to C(M) \subseteq E$ un opérateur compact et T un opérateur de $M \times C(M)$ dans E. On s'intéresse maintenant à l'existence d'un point $x \in M \subset E$ tel que

$$x = T(x, C(x)) \ . \qquad \text{(H)}$$

Tout d'abord, on donne la définition suivante :

Définition 5.3.6. *Une famille $\{T(.,y) : y\}$ est dite U-équicontractive ($U \in \vartheta$) si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $(x_1, y), (x_2, y)$ dans le domaine de T et si*

$$x_1 - x_2 \in (\epsilon + \delta)U, \quad \textit{alors} \quad T(x_1, y) - T(x_2, y) \in \epsilon U. \qquad (3)$$

Si $\{T(.,y) : y\}$ est U-équicontractive pour tout $U \in \vartheta$ alors la famille $\{T(.,y) : y\}$ est une ϑ-équicontraction. On note que si la famille $\{T(.,y) : y\}$ est une ϑ-équicontraction, alors l'opérateur $x \to T(x,y)$ est continu pour tout y.

Dans la suite, on prend $\varphi = \{p = p_U$ pour un certain $U \in \vartheta, \mathbb{R}^+$ l'ensemble des réels positifs et ψ la famille des applications definie par $\psi = \{\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que Φ est continue et $\Phi(t) < t$ si $t > 0\}$. Une application $A : M \to E$ est dite φ contraction non linéaire(voir [B-W]) si pour tout $p \in \varphi$, il existe $\Phi_p \in \psi$ tel que pour tout $x, y \in M$ on a $p(A(x) - A(y)) \leq \Phi_p(p(x - y))$. Si cette inégalité est vérifiée avec $\Phi_p(t) = \alpha_p t$ où $0 < \alpha_p < 1$, alors on dit que A est une φ-contraction (voir [Ca-N]).

Définition 5.3.7. *Une famille $\{T(.,y) : y\}$ est dite φ-equicontractive si pour tout $p \in \varphi$, il existe $\Phi_p \in \psi$ tel que si $(x_1, y), (x_2, y)$ dans le domaine de T, alors*

$$p(T(x_1, y) - T(x_2, y)) \leq \Phi_p(p(x_1 - x_2)).$$

Remarque 5.3.8. *a) Toute φ contraction non linéaire est une ϑ-contraction (voir[SeS]).*

b) Toute φ équicontraction non linéaire est une ϑ-équicontraction.

Proposition 5.3.9. *Soient E un espace de Fréchet, M un ensemble borné et séquentiellement complet de E,*

$$T : M \times E \longrightarrow E$$

un opérateur tel que la famille $\{T(.,y) : y \in E\}$ est φ-équicontractive et pour tout $x \in M, y \to T(x,y)$ est continu et qui vérifie pour tout $(x,y) \in M \times E$ avec $T(x,y) \notin M$, qu'il existe

$$(z,y) \in ((x,y), T(x,y)) \cap M \times E \quad \textit{tel que} \quad T(z,y) \in M.$$

Alors il existe un opérateur continu $F_T : E \to M$ tel que

$$T(F_T(y), y) = F_T(y).$$

Preuve :
Soit y un point quelconque de E. Puisque l'opérateur

$$x \to T(x,y) : M \to E \quad \text{est une } \varphi\text{-contraction}$$

qui vérifie pour tout $x \in M$ avec $T(x,y) \notin M$, qu'il existe

$$z \in (x, T(x,y)) \cap M \quad \text{tel que} \quad T(z,y) \in M,$$

alors, d'après la Remarque 5.3.8 et le Théorème 5.3.2, il existe un unique point $x = F_T(y) \in M$ tel que

$$T(F_T(y), y) = F_T(y).$$

Maintenant, montrons que l'application $y \mapsto F_T(y) : E \to M$ est continue. En effet, soit (y_n) une suite dans E, avec $\lim y_n = y_0 \in E$. Supposons que $F_T(y_n)$ ne converge pas vers $F_T(y_0)$. Alors, il existe $\epsilon > 0$ et $\varrho(n)$ tels que

$$p_U(F_T(y_{p(n)}), F_T(y_0)) > \epsilon \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \qquad (4)$$

Comme $\{p_U(F_T(y_{\varrho(n)}), F_T(y_0)) > \epsilon \quad , n \in \mathbb{N}\}$ est une suite réelle bornée, alors elle admet une sous suite $p_U(F_T(y_{\varrho(\varrho_1(n))}), F_T(y_0)) \to r \geq 0$. Or, on a

$$\begin{aligned} p_U(F_T(y_n) - F_T(y_0)) &= p_U(T(F_T(y_n), y_n) - T(F_T(y_0), y_0)) \\ &\leq p_U(T(F_T(y_n), y_n) - T(F_T(y_0), y_n)) \\ &\quad + p_U(T(F_T(y_0), y_n) - T(F_T(y_0), y_0)) \end{aligned}$$

qui implique que $r = 0$. Ce qui contredit (4) et par conséquent F_T est continue.$\square$

Dans la suite, on donne aussi une autre version du théorème de point fixe de type Krasnoselskii :

Théorème 5.3.10. *Supposons que M est un fermé, borné, convexe et non vide d'un espace de Fréchet E ayant la propriété de Dunford-Pettis et $C : M \to E$ un opérateur linéaire faiblement compact tel que l'image de $C(M)$ par toute application continue est contenue dans un faiblement compact de E. Soit*

$$T : M \times C(M) \longrightarrow E$$

un opérateur tel que la famille $\{T(., y) : y \in C(M)\}$ est φ-équicontractive et pour tout $x \in M, y \mapsto T(x, y)$ est continue sur $C(M)$ et qui vérifie pour tout $(x, y) \in M \times C(M)$ avec $T(x, y) \notin M$, qu'il existe

$$(z,y) \in ((x,y), T(x,y)) \cap M \times C(M) \quad \textit{tel que} \quad T(z,y) \in M.$$

Alors l'équation (H) admet une solution dans M.

Preuve :

Soit y un point quelconque dans $C(M)$. D'après la Proposition 5.3.9, on prouve qu'il existe un unique point $x = F_T(y) \in M$ qui vérifie :

$$T(F_T(y), y) = F_T(y),$$

avec $y \mapsto F_T(y) : C(M) \to M$ est une application continue. Alors l'opérateur $F_T C$ de M dans M est aussi continu. Puisque $F_T C : M \to M$ est un opérateur continu tel que $F_T(C(M))$ est contenu dans un faiblement compact de E, alors $F_T C$ est faiblement compact sur E.

D'où, d'après le Corollaire 5.2.3, on prouve l'existence d'un point $\overline{x} \in M$ qui vérifie $F_T(C(\overline{x})) = \overline{x}$, ce qui donne

$$T(\overline{x}, C(\overline{x})) = T(F_T(C(\overline{x})), C(\overline{x})) = F_T(C(\overline{x})) = \overline{x}.$$

□

Bibliographie

[Bak] N. Y. Bakaev, On the bounds of approximations of holomorphic semigroups, *BIT* **35** (1995), 605-608

[B-T1] P. Brenner and V. Thomée, Stability and convergence rates in L_p for certain difference schemes *Math. Scand,* **27** (1970), 5-23.

[B-T2] P. Brenner and V. Thomée, On rational approximations of semigroups, *SIAM J. Numer. Anal,* **16**(1979), 683-694.

[BJM] A.Ben Amar, A. Jeribi and M.Mnif, On a generalization of Schauder and Krasnoselskii fixed point theorems on Dunford-Pettis space and applications, *Math. Meth. Appl. Sci,*(2005)**28**, 1737-1756.

[Bur] T. A. Burton, A fixed-point theorem of Krasnosel'skii, *Appl. Math. Lett,* **11** (1998), 85-88.

[Bu-K] T. A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii's-Schaefer type, *Math. Nachr*, **189**, 23-31 (1998).

[B-W] D. W. Body and S. W. Wong, On nonlinear contractions, *Proc. Amer. Math. Soc*,**20** (1969), 458-464

[Ca-N] G. L. Cain, M. Z. Nashed, Fixed point and stability for sum of two operators in locally convexe spaces, *Pacific.Journal of Math*, **39** (1971), 581-592.

[Ch-A] Charalambos, D. Aliprantis Kim and C. Border, Infinite Dimensional Analysis A Hitchhiker's Guide, *Cataloging-in-Publication Data, Library of Congress Control Number : 2006921177.*

[Che] P. R. Chernoff, Note on product formulas for operator semigroups. *J. Funct. Analysis,* **2** (1968), 238-242.

[CE] M. A. Cherif and H. Emamirad, Approximation in the sens of Kato for the transport problem. *Elect. J. Diff. Equ,* **92** (2009), 1-7.

[CLPT] M. Crouzeix, S. Larsson, S. Piskarev and V. Thomée , The stability of rational approximations of analytic semigroups, *BIT* **33** (1993), 74-84.

[Dav] E. B. Davies. One-Parameter Semigroups, Academic Press, Londres-New York-San Francisco, 1980.

[Dha] B. C. Dhage, Local fixed point theory for the sum of two operators, *Fixed Point Theory,* **4** (2003), 49-60.

[Dun] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators : Part I,General Theory, Intersciences Publisshers*, New York 1958.

[D-L8] R. Dautray and J.L.Lions, Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les sciences et les techniques, *Tome 8 Masson, Paris Milan Barcelone Mexico, 1988.*

[Edw] R. E. Edwards, Functional Analysis , Theory and Applications, *Hold, Rinehart and Winston, Inc,* 1965.

[E-R] H. Emamirad and A. Rougirel A Functional Calculus Approach for the Rational Approximation with Nonuniform Partitions, *Discrete Contin. Dyn. Syst,* **22** (2008), 955-972.

[Gol] J. A. Goldstein, Semigroups of Operators and Applications, *Oxford University Press, London, 1985.*

[Hej] H. J. Hejtmanek, Approximations of linear transport Processes, *J. Math. Phys,* **11** (1970), 995-1000.

[H-K] R. Hersh and T. Kato, High-accurcy stable difference schemes for well-posed initial-value problems, *SIAM J. Numer. Anal,* **16** (1979), 670-682.

[J-Y] J.L. Clerc, Y. Colin De Verdière, Compacité faible dans les espaces localement convexes ; applications aux espaces C(K) et $L^1(\mu)$, *Seminaire Choquet. (Initiation à l'analyse), Tome 7*,**2** (1967-1968).

[Kat] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, *Springer-Verlag*, Berlin-New York (1966).

[Kras] M. A. Krasnosel'skii, Some problems of nonlinear analysis, *Amer. Math. Society Tran*, Series 2 10, **2** (1958), 345-409.

[Latr] K. Latrach, M. A. Taoudi, A. Zeghal, Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonliear transport equation, *J.Differential Equations*,**221** (2006), 256-271.

[Latr1] K. Latrach, M. A .Taoudi, Existence results for a generalized nonliear Hammerstein equation on L_1 spaces, *Nonlinear Analysis,T. M. A*,**66** (2007), 2325-2333.

[LeR] M. N. LeRoux, Semidiscretization in time for parabolic problems, *Math. Comp,* **33** (1979), 919-931.

[MeK] A. Meir and E. Keeler, A theorem on contraction mappings, *J. Math Anal. Appl*, **28** (1969), 326-329.

[Paz] A. Pazy, Semigroups of Operators and Applications to Partial Differential Equations, *Springer-Verlag, New-York,* 1983.

[Pal1] C. Palencia, A stability result for sectorial operators in Banach spaces, *SIAM J. Numer. Anal,* **30** (1993), 1373-1384.

[Pal2] C. Palencia, On the stability of vaiable stepsize rational approximation of holomorphic semigroups, *Math. Comp,* **62** (1994), 93-103.

[Re-S] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical Physics, *I. Academic Press*, New York (1975).

[Sai] N. Saito, Remarks on the rational approximation of semigroups, *Japan J. Indust. Appl. Math,* **21** (2004), 323-337.

[SeS] V. M. Sehgal and S. P. Singh, On a fixed point theorem of Krasnoselskii for locally convexe spaces, *Pacific Journal of Mathematics*, **62** (1976), 561-567.

[Tay] W. W. Taylor, Fixed-point theorems for nonexpensive mapping in linear topological spaces, *J. Math. Anal. Appl*, **40** (1972), 164-173.

[Tych] A. Tychonoff, Ein fixpunktsatz, *Math. Ann*, **111** (1935), 767-776.

[Ush] T. Ushijima, Approximation theory for semigroups of linear operators and its applications, *Japan J. Math,* **1** (1975), 185-224.

[Yan] Y. Yan, Smoothing properties and approximation of time derivatives for parabolic equations : variable time steps, *BIT* **43** (2003), 647-669.