THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
École nationale supérieure d'ingénieurs (Poitiers)
Laboratoire d'informatique et d'automatique pour les systèmes - LIAS (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

École doctorale : Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques, Informatique (Limoges)
Secteur de recherche : Automatique, Mathématiques appliquées

Présentée par :
Alexandre Rigaud

Analyse des notions de stabilité pour les modèles 2D de Roesser et de Fornasini-Marchesini

Directeur(s) de Thèse :
Olivier Bachelier, Nima Yeganefar

Soutenue le 14 décembre 2022 devant le jury

Jury :

Président	**Driss Mehdi**	Professeur, LIAS, ENSIP, Université de Poitiers
Rapporteur	**Alban Quadrat**	Directeur de recherche INRIA, Sorbonne Université, Paris
Rapporteur	**Jean-Jacques Loiseau**	Directeur de recherches CNRS, LS2N, École Centrale de Nantes
Membre	**Romain Bourdais**	Professeur, IETR, Centrale Supélec, Université de Rennes
Membre	**Islam Boussaada**	Professeur, Centrale Supélec, Université de Paris-Saclay

Pour citer cette thèse :
Alexandre Rigaud. *Analyse des notions de stabilité pour les modèles 2D de Roesser et de Fornasini-Marchesini* [En ligne]. Thèse Automatique, Mathématiques appliquées. Poitiers : Université de Poitiers, 2022. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THÈSE

Pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE POITIERS

(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES, MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE

Secteur de Recherche : Automatique, Mathématiques Appliquées

Présentée par

Alexandre RIGAUD

Analyse des notions de stabilité pour les modèles 2D de Roesser et de Fornasini-Marchesini

---

Directeur de Thèse : **Olivier BACHELIER**

Co-encadrant : **Nima YEGANEFAR**

Soutenue le 14/12/2022

devant la Commission d'Examen

JURY

Rapporteurs :	Alban QUADRAT	Directeur de Recherche, INRIA Paris
	Jean-Jacques LOISEAU	Directeur de Recherche, IRCCyN Nantes
Examinateurs :	Romain BOURDAIS	Professeur, IETR – Supélec Rennes
	Islam BOUSSAADA	Professeur, L2S – Supélec Paris
	Driss MEHDI	Professeur, LIAS Poitiers
	Olivier BACHELIER	Professeur, LIAS Poitiers
	Nima YEGANEFAR	Maître de Conférence, LIAS Poitiers

Thèse préparée au sein du **Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes de l'Université de Poitiers**

Table des Matières

Remerciements **4**

Introduction générale **5**

Liste des notations **7**

1 Chapitre 1 : Rappels dans le cas 1D, présentation des modèles 2D **10**
1.1 Rappels dans le cas 1D 10
1.1.1 Systèmes 10
1.1.2 Stabilités 11
1.1.3 Relations entre les différentes notions de stabilité 12
1.2 Présentation des modèles 2D 15
1.2.1 Modèle de Roesser 16
1.2.1.1 Modèle de Roesser discret linéaire 16
1.2.1.2 Modèle de Roesser discret 16
1.2.1.3 Modèle de Roesser continu 17
1.2.1.4 Modèle de Roesser hybride 17
1.2.2 Modèle de Fornasini-Marchesini 17
1.2.2.1 Modèle de Fornasini discret linéaire 17
1.2.2.2 Fornasini-Marchesini discret 18
1.2.2.3 Fornasini-Marchesini continu linéaire 18
1.3 Solutions d'un modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire 18
1.4 Conclusion 26

2 Chapitre 2 : Stabilité des modèles 2D. Liens entre les différentes notions de stabilité **27**
2.1 Introduction 27
2.2 Points d'équilibres 28
2.3 Passer d'un modèle de Roesser à un modèle de Fornasini-Marchesini . 29
2.4 Notions de stabilité, définitions 30
2.4.1 Stabilité asymptotique 30
2.4.2 Stabilité exponentielle 30
2.4.3 Stabilité structurelle 32
2.5 Relations précédemment établies 36
2.5.1 Cas du modèle de Fornasini-Marchesini 36
2.5.2 Cas du modèle de Roesser 36
2.6 Nouvelles relations pour le modèle de Fornasini-Marchesini 38
2.7 Nouvelles relations pour le modèle de Roesser 41

2.8 Simulations . . . 46
2.9 Conclusion . . . 47

3 Chapitre 3 : Condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour les modèles de Fornasini-Marchesini linéaires 50
3.1 Introduction . . . 50
3.2 Résultats préliminaires . . . 51
3.3 La suite double $U_{i,j}$ . . . 52
3.3.1 Cas où les deux matrices A et B commutent et sont toutes deux diagonalisables . . . 53
3.3.2 Cas de l'hypothèse 1 . . . 54
3.3.3 Ordonner les valeurs propres de A et B . . . 54
3.3.4 Comportement asymptotique de la suite $U_{i,j}$ . . . 56
3.4 Condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique . . . 61
3.4.1 La condition est suffisante . . . 61
3.4.2 Le cas où $\lambda = 0$ . . . 62
3.4.3 Le cas où $\lambda \neq 0$ . . . 64
3.4.4 La condition est nécessaire . . . 66
3.5 Simulations . . . 69
3.6 Conclusion . . . 73

4 Chapitre 4 : Etude d'un modèle polaire 74
4.1 Introduction . . . 74
4.2 Définitions de stabilité . . . 75
4.3 Etude du modèle 1D . . . 75
4.3.1 Présentation «en polaire» - Modèle P1D . . . 75
4.3.2 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (r_e, \theta_e) = (1, 2\pi)$ pour le Modèle P1D . . . 76
4.3.3 Présentation en cartésien-Modèle C1D . . . 77
4.3.4 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (1, 0)$ pour le modèle C1D 78
4.4 Etude des modèles 2D . . . 80
4.4.1 Présentation en «polaire» en 2D - Modèle P2D . . . 80
4.4.2 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (r_e, \theta_e) = (1, 2\pi)$ pour le modèle P2D . . . 80
4.4.2.1 Attractivité . . . 80
4.4.2.2 R-ES2 . . . 81
4.4.2.3 Stabilité . . . 83
4.4.3 Présentation en cartésien en 2D- Modèle C2D . . . 84
4.4.4 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (1, 0)$ pour le modèle C2D 84
4.4.4.1 Stabilité . . . 84
4.4.4.2 Attractivité . . . 84
4.4.4.3 R-ES2 . . . 85
4.4.5 Présentation en cartésien 2D-Modèle C'2D . . . 85
4.4.6 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (1, 0)$ pour le modèle C'2D 86
4.4.6.1 Stabilité . . . 86
4.4.6.2 Attractivité . . . 89
4.4.6.3 R-ES2 . . . 89

4.5 Résumé des propriétés des différents modèles . . . 91
4.6 Conclusion . . . 92

Conclusion générale et perspectives **93**

A Annexe A : Définition de la stabilité exponentielle R-ES1 pour les modèles de Roesser continus et hybrides **95**
A.1 Solutions d'un Roesser triangulaire . . . 95
A.1.1 Cas discret . . . 95
A.1.2 Cas continu . . . 96
A.1.3 Cas hybride . . . 98
A.2 Définition de la stabilité exponentielle et preuve qu'elle implique la stabilité asymptotique dans chacun des cas. . . . 99
A.2.1 Cas discret . . . 99
A.2.2 Cas continu . . . 100
A.2.3 Cas hybride . . . 102

B Annexe B : Sur la stabilité exponentielle d'une classe de modèles linéaires de Roesser 2D continus implicites **105**
B.1 Introduction . . . 105
B.2 Position du problème et reformulation des modèles . . . 108
B.2.1 Exemples introductifs . . . 108
B.2.2 Modèles étudiés . . . 110
B.2.3 Modèle bien posé . . . 112
B.2.4 Stabilité en t . . . 114
B.2.5 Lien avec la stabilité structurelle . . . 117
B.3 Relaxation LMI du caractère bien posé et conditions de stabilité . . . 118
B.3.1 Contexte . . . 118
B.3.2 Résultat principal . . . 119
B.4 Exemples . . . 123
B.4.1 Premier exemple . . . 123
B.4.2 Deuxième exemple . . . 124
B.4.3 Troisième exemple . . . 125
B.5 Conclusion . . . 125

C Annexe C : Un contre-exemple **127**

D Annexe D : Définitions de stabilité d'un point d'équilibre x_e pour les modèles non-linéaires **128**
D.1 Modèle de Roesser . . . 128
D.2 Modèle de Fornasini-Marchesini . . . 129

Liste des acronymes **130**

Bibliographie **131**

Remerciements

Mes premiers mots de remerciements vont à Samuel BOISSIÈRE sans qui toute cette aventure n'aurait été possible. Il fut mon professeur et a toujours été bienveillant, disponible et à l'écoute à mon égard. Ensuite, je tiens à remercier Olivier BACHELIER et Nima YEGANEFAR chaleureusement et amicalement pour leur accueil dans leur univers, leur patience, leurs conseils, leur sympathie et tous les bons moments que nous avons passés, que ce soit dans le travail et hors du travail. Merci également à Thomas CLUZEAU et Francisco J. SILVA ALVAREZ pour leur sympathie, leur implication, leurs conseils et les très bons moments passés lors de nos réunions. Je remercie chaleureusement Alban QUADRAT et Jean-Jacques LOISEAU d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et pour leurs remarques bienveillantes et constructives. Je remercie également Romain BOURDAIS, Islam BOUSSAADA et Driss MEHDI d'avoir bien voulu constituer le jury de cette thèse. Merci aux doctorants et aux membres du LIAS pour leur accueil très sympathique au laboratoire. Je remercie Florent MALRIEU d'avoir lui aussi contribué à ce que cette aventure soit possible. Je remercie ma chère et tendre pour sa patience au quotidien, son soutien continu, et pour m'avoir laissé le temps et l'espace pour ce travail. Enfin, last but not least, merci à mon ami Guillaume GALLOIS pour son aide précieuse, son infinie générosité et pour le temps qu'il m'a consacré.

Introduction générale

Les systèmes dynamiques sont étudiés dans de nombreux domaines tels que les mathématiques, l'automatique, la physique, la biologie, l'écologie, l'économie...
Le plus souvent, nous étudions un objet, que l'on appelle système, et nous observons son évolution au cours du temps. Autrement dit, nous cherchons à savoir comment un certain nombre d'informations liées à cet objet se propagent selon une direction, en l'occurrence temporelle.

Une fois la modélisation d'un tel système établie, et l'étude effectuée, il s'agit de prévoir, prédire, ajuster, améliorer, contrôler, commander, etc. Les champs d'application d'un telle démarche sont potentiellement infinis, qu'il s'agisse de l'évolution d'une espèce vivante, d'un écosystème, d'un modèle économique ou encore climatique.

Mathématiquement, un système dynamique est communément décrit par un vecteur d'état, par une fonction connue régissant l'évolution du système et par une ou plusieurs équations mettant en jeu le vecteur d'état et la fonction d'évolution. Il s'agit d'équations différentielles, éventuellement aux dérivées partielles, dans le cas où l'information se propage au cours d'un temps continu, et d'équations aux différences dans le cas ou le temps est discret.

Une fois la modélisation effectuée, une question naturelle est de se demander si, connaissant l'état du système à un instant initial, on peut connaître son état en tout temps. La réponse est positive dans le cas où l'on peut trouver une ou plusieurs solutions explicites à ce système, mais l'on peut également connaître les trajectoires du vecteur d'état sans nécessairement avoir une expression de la ou des solutions.

Ensuite vient la question de points d'équilibre du système. Existe t-il des points de l'espace, si l'on travaille dans l'espace, tels que l'objet que l'on étudie soit immobile en ces points ?

Finalement, se pose la question de stabilité de ce point d'équilibre. Que se passe t-il si l'on écarte très légèrement notre objet de ce point d'équilibre ? Aura t-il tendance à y retourner ? Ou au contraire à s'en éloigner ? Que se passe t-il lorsque le temps devient infini ? Notre objet ira t-il vers le point d'équilibre que l'on étudie ? A quelle vitesse ?

Supposons à présent que nous observons un système dont les informations se propagent non plus dans une seule direction, mais dans deux, trois, n directions. C'est cette idée qui est à l'origine des systèmes multidimensionnels, appelés aussi systèmes nD. Pour se faire une idée, on peut imaginer qu'il y a deux directions, une spatiale et l'autre temporelle. Ou alors nous étudions un groupe d'individus qui constitue notre système. Ce groupe évolue au cours du temps ce qui constitue une première dimension, mais l'on peut observer indépendamment un individu du groupe, qui interagit avec le groupe, et si l'on numérote les individus, la deuxième di-

mension peut être le numéro de chaque individu. Avec encore plus d'imagination, on peut imaginer que les informations liées à un systèmes évoluent dans plusieurs dimensions temporelles. Pour de tels systèmes la démarche sera exactement la même que précédemment, à savoir rechercher des solutions explicites si elles existent, rechercher des points d'équilibres et étudier différentes propriétés de stabilité.

Les systèmes multidimensionnels ont attiré l'attention d'une communauté petite mais dévouée depuis plusieurs dizaines d'années [1, 2, 3, 4]. Ces systèmes ont été popularisés par, e.g., [5, 1, 6] et peuvent être particulièrement adaptés à des dispositifs ou phénomènes que l'on rencontre dans de nombreux problèmes pratiques d'ingénierie. La plupart des résultats se concentrent sur les modèles 2D linéaires discrets, continus ou hybrides, qui possèdent plusieurs applications telles que le contrôle d'apprentissage itératif (CAI) [7, 8], très utile en robotique, le filtrage numérique, le contrôle des modèles répétitifs [9], l'étude de pelotons de véhicules [10], les systèmes inter-connectés [11, 12, 13, 14], etc. Les deux modèles à espace d'état les plus populaires sont le modèle de Fornasini-Marchesini [15] et le modèle de Roesser [16], qui ont été à l'origine développés pour le filtrage d'images numériques.

L'objectif de cette thèse est d'étudier en détail les différentes notions de stabilité pour les modèles 2D de Roesser et de Fornasini-Marchesini ainsi que les relations entre ces notions de stabilité.

Dans le premier chapitre, nous commencerons par effectuer un certain nombre de rappels sur les systèmes dynamiques en une dimension et les notions de stabilité connues pour ces systèmes. Nous présenterons les relations entre les différentes notions de stabilité. Dans un deuxième temps, nous introduirons les deux modèles que nous étudierons en deux dimensions, les modèles de Roesser et les modèles de Fornasini-Marchesini. Pour finir ce premier chapitre, nous exprimerons la solution d'un modèle de Fornasini-Marchesini linéaire.

Dans le deuxième chapitre, nous présenterons les différentes notions de stabilité que nous allons étudier dans le cadre des systèmes 2D. Il s'agit essentiellement de stabilité au sens de Lyapunov, attractivité, stabilité asymptotique, stabilités exponentielles et stabilité structurelle. Nous étudierons les relations existantes entre ces différentes notions de stabilité pour les modèles de Roesser et les modèles de Fornasini-Marchesini.

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour les modèles de Fornasini-Marchesini linéaires sera proposée pour une certaine classe de modèles dans le troisième chapitre. Plus précisément, nous traiterons le cas où les matrices définissant le modèle commutent et au moins une des deux matrices est supposée diagonalisable.

Le quatrième chapitre sera dans un premier temps consacré à l'étude d'un modèle 1D non-linéaire particulier, que l'on pourrait qualifier de «pathologique». Celui-ci est attractif et instable. Dans la suite de ce chapitre, nous proposerons un modèle 2D de Roesser construit comme une extension naturelle de ce modèle 1D, afin d'observer comment les propriétés de stabilité se transportent du cas 1D vers le cas 2D.

Liste des notations

Ensembles

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{Z}$	ensemble des entiers relatifs.
$\mathbb{R}$	corps des nombres réels.
$\mathbb{C}$	corps des nombres complexes.
$\mathbb{N}^\star$	$\mathbb{N} \setminus \{0\}$.
$\mathbb{R}_+$	$[0, +\infty[$.
$\mathbb{R}_+^\star$	$]0, +\infty[$.
E^n	pour E un ensemble et $n \in \mathbb{N}$, produit cartésien de n copies de E.
F^E	pour E et F deux ensembles, ensemble des applications de E dans F.
$\mathbb{D}$	disque unité ouvert de $\mathbb{C}$: $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| < 1\}$.
$\overline{\mathbb{D}}$	disque unité fermé de $\mathbb{C}$: $\{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \leqslant 1\}$.
$[\![n, m]\!]$	pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, sous-ensemble de $\mathbb{N}$ défini par : $\{n, n+1, \ldots, m-1, m\}$.
$\#A$	si A est un ensemble fini, nombre d'éléments de A.

Algèbre

$\mathbb{C}<X,Y>$	ensemble des polynômes non-commutatifs à deux indéterminées X et Y, à coefficients dans $\mathbb{C}$.
$\lvert\ .\ \rvert$	module.
x^T	pour un vecteur $x \in \mathbb{C}^n$, transposée de x.
$\lVert\ .\ \rVert$	norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$.
$\lVert\ .\ \rVert_2$	norme euclidienne.
$\lvert\lvert\lvert\ .\ \rvert\rvert\rvert$	norme matricielle subordonnée à la norme $\lVert\ .\ \rVert$: $\lvert\lvert\lvert A \rvert\rvert\rvert = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \dfrac{\lVert Ax \rVert}{\lVert x \rVert}$.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	ensemble des matrices carrées à coefficients dans $\mathbb{C}$.
$\mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{C})$	ensemble des matrices rectangulaires à n_1 lignes et n_2 colonnes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	groupe des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$.
I_n	matrice identité de taille n.
$\mathrm{Diag}(.)$	matrice diagonale ou diagonale par blocs.
$\det(A)$	pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, déterminant de A.
$\mathrm{sp}(A)$	spectre de A, *i.e.*, ensemble des valeurs propres de A.
$\rho(A)$	rayon spectral de A, *i.e.*, $\max\{\lvert\lambda\rvert,\ \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.
$\bigoplus_{k=1}^p F_k$	pour $F_1, \ldots, F_p$ sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^n$, somme directe de $F_1, \ldots, F_p$.

Suites

$(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ ensemble des suites vectorielles à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

$(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}^2}$ ensemble des suites doubles vectorielles à valeurs dans $\mathbb{C}^n$.

$(\mathbb{C}^p)^{\mathbb{N}^n}$ ensemble des suites vectorielles à n variables à valeurs dans $\mathbb{C}^p$.

$\|\,.\,\|_\infty$ pour $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$, $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|$,

pour $x = (x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}^2}$, $\|x\|_\infty = \sup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \|x_{i,j}\|$.

$c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}^n)$ ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ qui convergent vers le vecteur nul.

Convergence, comparaison, équivalence

- Pour $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ élément de $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}^2}$ et $l \in \mathbb{C}^n$,

$$\lim_{i+j\to+\infty} x_{i,j} = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad i + j \geqslant N \Rightarrow \|x_{i,j} - l\| \leqslant \varepsilon)\,.$$

- o(.) et O(.) sont les notations de Bachmann-Landau.
- Pour $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$,

$$x_i \underset{i\to+\infty}{\sim} y_i$$

signifie que les deux suites sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, *i.e.*,

$$x_i - y_i = \underset{i\to+\infty}{o}(y_i)\,.$$

Divers

$\binom{n}{k}$ coefficient binômial, i.e.,
nombre de parties à k éléments dans un ensemble à n éléments.

$\lfloor\,.\,\rfloor$ fonction partie entière.

$\mathbb{1}_A$ si A est une assertion , vaut 1 si A est vérifiée et 0 sinon.

1 Chapitre 1 : Rappels dans le cas 1D, présentation des modèles 2D

Nous allons, dans la première partie de ce chapitre, rappeler brièvement les principales définitions et propriétés des systèmes 1D. Ces notions nous seront utiles lorsque nous étudierons les systèmes 2D.

1.1 Rappels dans le cas 1D

1.1.1 Systèmes

Un système dynamique 1D discret autonome peut s'écrire sous la forme d'une suite récurrente

$$x_{i+1} = f(x_i), \tag{1D-D}$$

où $i \in \mathbb{N}$ et x_i, le vecteur d'état à l'instant i, est un élément de $\mathbb{C}^n$ et f est une fonction de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ connue.
Dans ce cas discret, si l'on se donne une condition initiale x_0 dans $\mathbb{C}^n$ alors ce système possède une unique solution que l'on peut calculer par récurrence.
Dans le cas particulier où la fonction f est linéaire, et si l'on note A la matrice de f dans la base canonique, ce système peut se réécrire sous la forme :

$$x_{i+1} = Ax_i. \tag{1D-DL}$$

Un système dynamique 1D continu autonome peut s'écrire sous la forme d'une équation différentielle ordinaire

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1D-C}$$

où $t \in I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x(t)$, le vecteur d'état à l'instant t, et $\dot{x}(t)$, sa dérivée par rapport au temps, sont des éléments de $\mathbb{C}^n$ et f est une fonction de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ connue.
Si l'on se donne une condition initiale $x_0 \in \mathbb{C}^n$ et que l'on suppose f localement Lipschitzienne, alors le théorème de Cauchy-Lipschitz nous donne l'existence d'une solution maximale unique.
Dans le cas où f est linéaire cette unicité est garantie par le fait que f est automatiquement globalement Lipschitzienne.

Remarque 1.1. Les modèles 1D que nous proposons ici sont *autonomes*, c'est-à-dire que la fonction qui définit l'évolution du système ne dépend pas de la variable d'évolution (i dans le cas discret, t dans le cas continu). Si l'on considère un modèle 1D discret *non-autonome* de la forme $x_{i+1} = f(i, x_i)$ par exemple, celui-ci peut se

réécrire comme un système autonome via un changement de variable. En effet, si l'on pose $g : (a, b) \mapsto (a + 1, f(a, b))$ et $y_i := (i, x_i)$ alors le système $y_{i+1} = g(y_i)$ qui vérifie $y_0 = (0, x_0)$ est bien un système autonome. Ainsi, nous ne perdons pas en généralité en considérant des modèles autonomes.

Définissons à présent la notion de point d'équilibre.

Définition 1.1. Un *point d'équilibre* $x_e \in \mathbb{C}^n$ du système (1D-D) est un point fixe de la fonction f, *i.e.*, tel que $f(x_e) = x_e$.
Un *point d'équilibre* $x_e \in \mathbb{C}^n$ du système (1D-C) est un zéro de la fonction f, *i.e.*, tel que $f(x_e) = 0$.

Remarquons que dans le cas où f est linéaire, 0 est toujours point d'équilibre du système.
Par ailleurs, nous pouvons faire la remarque suivante :

Remarque 1.2. On peut toujours se ramener à un système possédant le vecteur nul comme point d'équilibre.
Plus précisément, si $x_e \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est un point fixe de f, alors si l'on pose, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $y_i := x_i - x_e$, $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sera solution de l'équation $y_{i+1} = g(y_i)$ avec $g : \begin{cases} \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \\ \zeta \mapsto f(\zeta + x_e) - x_e \end{cases}$ et g possède le vecteur nul comme point fixe.

1.1.2 Stabilités

Nous allons ici énoncer les différentes notions de stabilité que l'on trouve principalement dans la littérature. Comme nous travaillerons presque exclusivement dans le cas discret, nous allons énoncer ces notions dans le cas discret uniquement.

Définition 1.2. Un point d'équilibre x_e pour le système (1D-D) est dit :

(i) *stable (S)* (au sens de Lyapunov) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta_\varepsilon > 0; \quad \forall x_0 \in \mathbb{C}^n, \left(\|x_0 - x_e\| \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow \sup_{i\in\mathbb{N}} \|x_i - x_e\| \leqslant \varepsilon \right).$$

(ii) *attractif (A)* si :

$$\exists \delta > 0; \ \|x_0 - x_e\| \leqslant \delta \Rightarrow \lim_{i\to+\infty} \|x_i - x_e\| = 0.$$

(iii) *globalement attractif (GA)* si :

$$\forall x_0 \in \mathbb{C}^n, \quad \lim_{i\to+\infty} \|x_i - x_e\| = 0.$$

(iv) *asymptotiquement stable (AS)* s'il est à la fois stable et attractif.

(v) *globalement asymptotiquement stable (GAS)* s'il est à la fois stable et globalement attractif.

(vi) *exponentiellement stable (ES)* si :

$$\exists (M, q, \delta) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0,1[\times \mathbb{R}_+^\star ;$$
$$\|x_0 - x_e\| \leqslant \delta \Rightarrow \|x_i - x_e\| \leqslant M \|x_0 - x_e\| q^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

(vii) *globalement exponentiellement stable (GES)* si :

$$\exists (M, q) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0,1[; \quad \forall x_0 \in \mathbb{C}^n, \quad \|x_i - x_e\| \leqslant M \|x_0 - x_e\| q^i, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Remarque 1.3. Un abus fréquent de langage consiste à parler de stabilité du système plutôt que de stabilité d'un point d'équilibre du système, cela sous entend que le point d'équilibre étudié est zéro. Nous commettrons parfois cet abus de langage lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur le point d'équilibre.

Remarque 1.4. Bien entendu, les notions globales d'attractivité, respectivement stabilité exponentielle impliquent les notions locales d'attractivité, respectivement stabilité exponentielle.

1.1.3 Relations entre les différentes notions de stabilité

Les relations entre les différentes notions de stabilité que nous venons de présenter dans le cas 1D sont données par les deux propositions suivantes.

Proposition 1.3. (i) La stabilité exponentielle globale implique la stabilité asymptotique globale.

(ii) La stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique.

(iii) Il n'y pas d'implication entre stabilité et attractivité (globale ou non).

Preuve 1.1. Considérons le système (1D-D).
Pour les deux premiers points de la proposition, nous pouvons sans perte de généralité supposer que le point d'équilibre est 0 d'après la remarque 1.2.
Nous allons tout d'abord montrer que la stabilité exponentielle implique la stabilité, ce qui impliquera que la stabilité exponentielle globale implique la stabilité.
Supposons donc qu'il existe un triplet $(M, q, \delta) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0,1[\times \mathbb{R}_+^\star$, tel que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\|x_0\| \leqslant \delta$, on ait $\|x_i\| \leqslant M \|x_0\| q^i$.
Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta := \min(\delta, \frac{\varepsilon}{M})$, alors : $\|x_0\| \leqslant \eta \Rightarrow \|x_i\| \leqslant M \frac{\varepsilon}{M} q^i \leqslant \varepsilon$, pour tout entier naturel i, et le vecteur nul est stable pour (1D-D).
Comme $q \in]0,1[$, il est immédiat que la stabilité exponentielle (respectivement stabilité exponentielle globale) implique l'attractivité (respectivement attractivité globale).
Pour le troisième point nous discuterons largement sur le cas d'un modèle attractif instable dans le chapitre 4. En outre, pour trouver un modèle stable mais non attractif, il suffit de considérer le modèle : $x_{i+1} = x_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
Tous les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ sont des points d'équilibre et la solution est donnée par $x_i = x_0, \quad \forall i \in \mathbb{N}$.
Le vecteur nul est stable en prenant $\delta = \varepsilon$. En revanche, si $x_0 \neq 0$, alors le vecteur nul n'est pas attractif. □

Dans le cas particulier d'un modèle linéaire, *i.e.*, 1D-DL, nous avons des résultats supplémentaires. Avant d'énoncer ces résultats, nous introduisons une définition commode, qui nous sera également utile dans le chapitre 3 :

Définition 1.4. [[17], Chap. 4, p. 187] Une valeur propre est dite *semi-simple* si les blocs de Jordan correspondants sont tous diagonaux, *i.e.*, de taille un.

Rappelons que $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos et qu'ainsi tous les polynômes caractéristiques étant scindés, toute matrice admet une réduction de Jordan.

Proposition 1.5. Dans le cas linéaire (1D-DL),

(i) l'attractivité implique l'attractivité globale et la stabilité exponentielle implique la stabilité exponentielle globale.

(ii) la stabilité exponentielle, la stabilité asymptotique et l'attractivité sont équivalentes au fait que le rayon spectral de la matrice A est strictement inférieur à 1 : $\rho(A) < 1$ (on dira que la matrice A est Schur-stable). En particulier, l'attractivité implique la stabilité.

(iii) La stabilité est équivalente au fait que d'une part le spectre de A est inclus dans le disque unité fermé et d'autre part les éventuelles valeurs propres de module un sont semi-simples.

Preuve 1.2. Pour le premier point, supposons tout d'abord que 0 est attractif.
Il existe $\delta > 0$ tel que pour toute condition initiale $x_0 \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\|x_0\| \leqslant \delta$, on a $\|A^i x_0\| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$.
Soit $y_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ une condition initiale quelconque, pour montrer l'attractivité globale, nous devons montrer que $\|A^i y_0\| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$ (si $y_0 = 0$ alors $\|y_0\| \leqslant \delta$ et le résultat est établi).
En remarquant que $\left\| \frac{\delta}{\|y_0\|} y_0 \right\| = \delta$, on a, par hypothèse d'attractivité, $\left\| A^i \frac{\delta y_0}{\|y_0\|} \right\| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$, ce qui implique $\|A^i y_0\| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$.

Supposons à présent que 0 est exponentiellement stable.
Il existe $(M, q, \delta) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0,1[\times \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\|x_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|A^i x_0\| \leqslant M \|x_0\| q^i$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.
Soit $y_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ une condition initiale quelconque.
Alors par hypothèse,

$$\left\| A^i \frac{\delta y_0}{\|y_0\|} \right\| \leqslant M\delta q^i,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\delta}{\|y_0\|} \left\|A^i y_0\right\| \leqslant M\delta q^i \Leftrightarrow \left\|A^i y_0\right\| \leqslant M \|y_0\| q^i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

et nous donne la stabilité exponentielle globale.

Pour le deuxième point, nous allons montrer que :

$$[\rho(A) < 1] \Rightarrow \text{ES} \Rightarrow \text{AS} \Rightarrow \text{A} \Rightarrow [\rho(A) < 1]\,.$$

Nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 1.6. [[18],Chap. 4, p. 227] [$\rho(A) < 1$] $\Rightarrow$ [il existe une norme vectorielle $\|.\|_{\complement}$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que $|||A|||_{\complement} < 1$ où $|||.|||_{\complement}$ est la norme subordonnée à $\|.\|_{\complement}$].

Supposons que $\rho(A) < 1$, le lemme nous donne donc l'existence de $\|.\|_{\complement}$ et $|||.|||_{\complement}$ telles que $\forall i \in \mathbb{N}$,

$$\|x_i\|_{\complement} = \left\|A^i x_0\right\|_{\complement} \leqslant \left|||A^i|||_{\complement} \|x_0\|_{\complement} \leqslant |||A|||^i_{\complement} \|x_0\|_{\complement} .$$

En posant $q = |||A|||_{\complement}$, on a bien $0 < q < 1$ (car $|||A|||_{\complement} < 1$ d'après le lemme et $A \neq 0$).
Par ailleurs, par équivalence des normes en dimension finie, il existe $M > 0$ et $M' > 0$ tels que $\|x_0\|_{\complement} \leqslant M \|x_0\|$ et $M' \|x_i\| \leqslant \|x_i\|_{\complement}$ ainsi :

$$\|x_i\| \leqslant \frac{M}{M'} q^i \|x_0\| ,$$

et 0 est GES donc ES.
Les implications : ES $\Rightarrow$ AS $\Rightarrow$ A étant vraies dans le cas général, il nous reste à montrer que l'attractivité implique que $\rho(A) < 1$.
Supposons que 0 est attractif, d'après le premier point de la proposition il est globalement attractif et on a $\|x_i\| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$, c'est-à-dire $\|A^i x_0\| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$ pour tout vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$.
Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(A)$ et X un vecteur propre associé, que l'on peut supposer unitaire. On a, $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$, or $\left(\left\|A^k X\right\|\right)_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ par hypothèse donc $\left(\left\|\lambda^k X\right\|\right)_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ *i.e.*, $(|\lambda|^k)_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$ d'où $|\lambda| < 1$, ce qui conclut le deuxième point.

Pour le troisième point de la proposition, nous allons montrer dans un premier temps que la stabilité de 0 pour le système (1D-DL) est équivalente au fait que la suite $(|||A^i|||)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée, où $|||.|||$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme vectorielle quelconque $\|.\|$ que nous considérons, *i.e.*, $|||A||| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.
Ensuite nous montrerons que cette dernière condition est équivalente à :

$$[\mathrm{sp}(A) \subset \overline{\mathbb{D}} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{sp}(A); |\lambda| = 1, \lambda \text{ semi-simple }],$$

et le résultat sera établi.
Supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $|||A^i||| \leqslant M$, $\forall i \in \mathbb{N}$. On a alors, par définition de la norme subordonnée : $\|A^i x_0\| \leqslant M \|x_0\|$, $\forall x_0 \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.
Soit $\varepsilon > 0$, posons $\delta := \frac{\varepsilon}{M}$.
Alors $\|x_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \|x_i\| = \|A^i x_0\| \leqslant \varepsilon$, $\forall i \in \mathbb{N}$.
Réciproquement, supposons que (1D-DL) est stable :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0; \ \forall x_0 \in \mathbb{C}^n; \ \|x_0\| \leqslant \delta, \ \left\|A^i x_0\right\| \leqslant \varepsilon.$$

En remarquant que $\|x_0\| \leqslant \delta \Leftrightarrow \frac{1}{\delta}\|x_0\| \leqslant 1$, il vient :

$$\left|\left|\left|A^i\right|\right|\right| = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \left\|A^i x\right\| = \frac{1}{\delta} \sup_{\|x_0\|\leqslant\delta} \left\|A^i x_0\right\| \leqslant \underbrace{\frac{\varepsilon}{\delta}}_{:=M}.$$

Montrons à présent l'équivalence :

$$[\mathrm{sp}(A) \subset \overline{\mathbb{D}} \text{ et } \forall \lambda \in \mathrm{sp}(A); |\lambda| = 1, \lambda \text{ semi-simple }] \Leftrightarrow [\left(\left|\left|\left|A^i\right|\right|\right|\right)_{i\in\mathbb{N}} \text{ bornée }] \quad (1.1)$$

En écrivant la réduction de Jordan de la matrice A, nous avons $A = PJP^{-1}$ pour une certaine matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, avec $J = \mathrm{Diag}(J(\lambda_1), \ldots, J(\lambda_r))$ et

$$\forall k \in [\![1, r]\!],\ J(\lambda_k) = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, $\forall i \in \mathbb{N}$, nous avons $J^i = \mathrm{Diag}(J(\lambda_1)^i, \ldots, J(\lambda_r)^i)$ avec, si t désigne la taille du bloc de Jordan $J(\lambda_k)$,

$$J(\lambda_k)^i = \begin{pmatrix} \lambda_k^i & \binom{i}{1}\lambda_k^{i-1} & \binom{i}{2}\lambda_k^{i-2} & \ldots & \binom{i}{t-1}\lambda_k^{i-t+1} \\ & \lambda_k^i & \binom{i}{1}\lambda_k^{i-1} & \ldots & \binom{i}{t-2}\lambda_k^{i-t+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_k^i & \binom{i}{1}\lambda_k^{i-1} \\ & & & & \lambda_k^i \end{pmatrix},$$

avec la convention que les termes comportant des coefficients binomiaux $\binom{i}{p}$, pour $p \in \mathbb{N}$, sont nuls dès que $p > i$.
Remarquons que $(\left|\left|\left|J^i\right|\right|\right|)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\left|\left|\left|A^i\right|\right|\right|)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Supposons qu'il existe une valeur propre λ_k de A telle que $|\lambda_k| > 1$ ou telle que $|\lambda_k| = 1$ et λ_k non semi-simple. Il est clair que la matrice $J(\lambda_k)^i$ diverge et que J^i et A^i ne sont pas bornées, ce qui nous donne le sens réciproque de (1.1) par contraposée.
Réciproquement, il suffit de montrer que si $|\lambda_k| < 1$ alors le bloc $J(\lambda_k)^i$ tend vers 0, quand i tend vers plus l'infini et ainsi J^i sera bornée.
L'équivalent pour p fixé, $\binom{i}{p} \underset{i\to+\infty}{\sim} \frac{i^p}{p!}$ permet de conclure que tous les coefficients de la matrice $J(\lambda_k)^i$ tendent vers 0, ce qui nous donne le sens direct de (1.1) et conclut la preuve. □

Nous nous inspirerons de cette démonstration dans le chapitre 3.

1.2 Présentation des modèles 2D

Nous allons maintenant entrer dans le vif du sujet en présentant, dans cette partie, les deux modèles sur lesquels nous travaillerons principalement.

1.2.1 Modèle de Roesser

1.2.1.1 Modèle de Roesser discret linéaire

Historiquement, le premier modèle 2D discret linéaire de Roesser fut introduit en 1972 par D.Givone et P.Roesser dans le cadre de la représentation d'état de circuits électriques interconnectés [19]. P.Roesser réintroduisit un modèle similaire en 1975 dans le cadre de traitement d'images [16]. Ce modèle de Roesser est très largement utilisé dans la communauté des systèmes nD et trouve de nombreuses applications [20],[21],[22]. Ce modèle peut s'écrire comme suit :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \begin{pmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{pmatrix}, \\ \\ x^h_{0,j} = \Psi^h_j, \quad x^v_{i,0} = \Psi^v_i. \end{cases} \tag{R-DL}$$

Ici le vecteur d'état $x_{i,j} = \begin{pmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{pmatrix}$ est découplé en 2 composantes $x^h_{i,j}$ et $x^v_{i,j}$, avec $x_{i,j} \in \mathbb{C}^n$, $x^h_{i,j} \in \mathbb{C}^{n_1}$ et $x^v_{i,j} \in \mathbb{C}^{n_2}$ et $n = n_1 + n_2$.
$(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est donc une suite double à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Autrement dit, il s'agit d'un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $A_{12} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{C})$, $A_{21} \in \mathcal{M}_{n_2,n_1}(\mathbb{C})$ et $A_{22} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$.
Les conditions initiales Ψ^h_j et Ψ^v_i sont des suites vectorielles respectivement éléments de $(\mathbb{C}^{n_1})^{\mathbb{N}}$ et $(\mathbb{C}^{n_2})^{\mathbb{N}}$.

Remarque 1.5. Le terme 2D fait ici référence au fait que le vecteur d'état se propage dans deux directions, données par les indices i et j, et non à la taille du vecteur d'état.

Remarque 1.6. Dans le cas discret, il n'y a pas de problème d'unicité de la solution. En effet, si l'on se donne un couple de conditions initiales, la solution sera uniquement déterminée par les relations de récurrence données par le modèle (R-DL). Cela dit, il est en général difficile, voire impossible de calculer explicitement la solution d'un modèle de Roesser, même dans le cas linéaire.

1.2.1.2 Modèle de Roesser discret

Plus généralement, nous pouvons considérer, par extension, un modèle de Roesser discret non-linéaire, défini par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{pmatrix} = f(x^h_{i,j}, x^v_{i,j}), \\ \\ x^h_{0,j} = \Psi^h_j, \quad x^v_{i,0} = \Psi^v_i. \end{cases} \tag{R-D}$$

où $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ et f est une fonction de $\mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}$ dans $\mathbb{C}^n$ connue.

1.2.1.3 Modèle de Roesser continu

Nous pouvons également considérer un modèle de Roesser continu :

$$\forall (t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^h(t,s)}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x^v(t,s)}{\partial s} \end{pmatrix} = f(x^h(t,s), x^v(t,s)), \\ \\ x^h(0,s) = \Psi^h(s), \quad x^v(t,0) = \Psi^v(t). \end{cases} \tag{R-C}$$

Le vecteur d'état se propage ici dans deux directions continues.

$$x : \begin{cases} (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{C}^n \\ (t,s) \mapsto x(t,s) = (x^h(t,s), x^v(t,s)). \end{cases}$$

Le décalage en i : $x^h_{i+1,j}$ dans le cas discret correspond à une dérivée partielle par rapport à t : $\dfrac{\partial x^h(t,s)}{\partial t}$ dans le cas continu, et le décalage en j : $x^v_{i,j+1}$ correspond à une dérivée partielle par rapport à s : $\dfrac{\partial x^v(t,s)}{\partial s}$.
Les conditions initiales Ψ^h et Ψ^v sont ici des fonctions respectivement de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n_1}$ et de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n_2}$.

1.2.1.4 Modèle de Roesser hybride

Enfin, un modèle de Roesser qui fut beaucoup étudié est le cas d'un modèle hybride où une dimension est continue et l'autre dimension est discrète [23],[24],[9],[25],[26]. Ce modèle fut par exemple utilisé dans [27] pour modéliser un peloton de véhicules.

$$\forall (t,i) \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}), \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^h(t,i)}{\partial t} \\ x^v(t,i+1) \end{pmatrix} = f(x^h(t,i), x^v(t,i)), \\ \\ x^h(0,i) = \Psi^h_i, \quad x^v(t,0) = \Psi^v(t). \end{cases} \tag{R-H}$$

1.2.2 Modèle de Fornasini-Marchesini

1.2.2.1 Modèle de Fornasini discret linéaire

Différents modèles furent proposés par E. Fornasini et G.Marchesini. Le premier modèle discret linéaire 2D fut introduit en 1976 pour traiter de problèmes de réalisation de filtres 2D [28].
Un second modèle de Fornasini-Marchesini fut présenté en 1978, à nouveau pour la réalisation de filtres 2D [15]. C'est ce second modèle que nous présentons ici :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} x_{i+1,j+1} = Ax_{i,j+1} + Bx_{i+1,j}, \\ \\ x_{0,j} = \Psi^{(1)}_j, \quad x_{i,0} = \Psi^{(2)}_i. \end{cases} \tag{FM-DL}$$

où pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, le vecteur d'état $x_{i,j}$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$.
$(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est donc une suite double à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Autrement dit, il s'agit d'un élément de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.
A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Les conditions initiales $\Psi_j^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$ sont des éléments de $(\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$.
Ce modèle, comme nous allons le voir dans la section suivante, présente l'avantage que nous pouvons donner une formule explicite de la solution en fonction des conditions initiales.

Remarque 1.7. Pour que le modèle soit bien défini, il faut que les conditions initiales soient compatibles en 0. En effet, on doit avoir $\Psi_0^{(1)} = \Psi_0^{(2)}$. Ce n'était pas le cas dans le modèle de Roesser, dû au découplage du vecteur d'état.

1.2.2.2 Fornasini-Marchesini discret

Plus généralement, nous pouvons considérer un modèle de Fornasini-Marchesini discret non-linéaire, défini par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} x_{i+1,j+1} = f(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}), \\ \\ x_{0,j} = \Psi_j^{(1)}, \quad x_{i,0} = \Psi_i^{(2)}. \end{cases} \tag{FM-D}$$

où $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$ et f est une fonction de $(\mathbb{C}^n)^2$ dans $\mathbb{C}^n$ connue.

1.2.2.3 Fornasini-Marchesini continu linéaire

Nous ne déclinerons pas ici toutes les variantes possibles : continu, hybride, linéaire ou non. Nous donnons juste la version continue et linéaire :

$$\forall (t_1,t_2) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = A\dfrac{\partial x(t_1,t_2)}{\partial t_2} + B\dfrac{\partial x(t_1,t_2)}{\partial t_1}, \\ \\ x(0,t_2) = \Psi_1(t_2), \quad x(t_1,0) = \Psi_2(t_1). \end{cases} \tag{FM-CL}$$

avec

$$x : \begin{cases} (\mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{C}^n \\ (t_1,t_2) \mapsto x(t_1,t_2), \end{cases}$$

et $(\Psi_1, \Psi_2) \in ((\mathbb{C}^n)^{\mathbb{R}+})^2$.

1.3 Solutions d'un modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire

Avant de parler de points d'équilibre et de stabilités, nous allons nous attarder un instant sur les solutions du modèle (FM-DL).
En effet, une particularité de ce modèle est que nous pouvons donner une expression explicite des solutions.
La proposition suivante a été démontrée dans [29] :

Proposition 1.7. Les solutions du modèle (FM-DL) soumis aux conditions initiales $\Psi_j^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$ peuvent s'écrire de la façon suivante, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$x_{i+1,j+1} = \sum_{k=0}^{j} U_{i,k} A \Psi_{j+1-k}^{(1)} + \sum_{k=0}^{i} U_{k,j} B \Psi_{i+1-k}^{(2)}, \tag{FM-Sol1}$$

où la suite de matrices $U_{i,j}$ est définie par, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$\begin{cases} U_{i+1,j+1} = AU_{i,j+1} + BU_{i+1,j}, \\ U_{i,0} = A^i, \quad U_{0,j} = B^j. \end{cases} \tag{1.2}$$

Ainsi la recherche de la solution $x_{i,j}$ passe par la recherche de la suite $U_{i,j}$ qui est elle-même définie comme étant la solution d'un modèle qui ressemble beaucoup au modèle (FM-DL) mais avec une «matrice d'état» $U_{i,j}$.
Ceci semble seulement déplacer le problème. En realité, la formule (FM-Sol1) est très utile dans le cas particulier où les deux matrices A et B commutent car, dans ce cas, la suite $U_{i,j}$ prend une forme très simple : $U_{i,j} = \binom{i+j}{i} A^i B^j$ (voir [29]).
Nous proposons ici de donner une formule explicite de la suite $U_{i,j}$ dans le cas où les matrices A et B ne commutent pas forcément. Ainsi, nous aurons une expression générale de (FM-Sol1), qui ne fait plus appel à la suite $U_{i,j}$.

Notons $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mu_{i,j} := \{$monômes unitaires de $\mathbb{C}<X,Y>$ de degré partiel i en X et de degré partiel j en $Y\}$.
Ces monômes sont tous de degré total $i+j$.
Remarquons tout d'abord que $\#\mu_{i,j} = \binom{i+j}{i}$.
Pour se convaincre, il s'agit de remplir $i+j$ emplacements, et l'on doit en remplir i avec des X et les j restant avec des Y.
Par exemple, on a : $\mu_{i,0} = X^i$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et $\mu_{1,2} = \{XY^2, YXY, Y^2X\}$.

Proposition 1.8. L'unique solution du système (1.2) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \; U_{i,j} = \sum_{P \in \mu_{i,j}} P(A,B). \tag{U-Sol}$$

Preuve 1.3. Notons $\hat{U}_{i,j} = \sum_{P \in \mu_{i,j}} P(A,B)$. Si nous montrons que $\hat{U}_{i,j}$ est solution de (1.2), nous aurons $\hat{U}_{i,j} = U_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ et le résultat sera établi par unicité de la solution.
Tout d'abord, $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\hat{U}_{i,0} = \sum_{P \in \mu_{i,0}} P(A,B) = A^i$ et $\hat{U}_{0,j} = \sum_{P \in \mu_{0,j}} P(A,B) = B^j$.
Ainsi les conditions initiales sont bien vérifiées.

Calculons :

$$\begin{aligned} A\hat{U}_{i,j+1} + B\hat{U}_{i+1,j} &= A \sum_{P \in \mu_{i,j+1}} P(A,B) + B \sum_{P \in \mu_{i+1,j}} P(A,B) \\ &= \sum_{P \in \mu_{i,j+1}} AP(A,B) + \sum_{P \in \mu_{i+1,j}} BP(A,B) \end{aligned}$$

Or si $P \in \mu_{i,j+1}$, alors $AP(A,B)$ est bien un élément de $\mu_{i+1,j+1}$ évalué en (A,B). De même, si $P \in \mu_{i+1,j}$, alors $BP(A,B)$ est bien un élément de $\mu_{i+1,j+1}$ évalué en (A,B).
Ainsi $A\hat{U}_{i,j+1} + B\hat{U}_{i+1,j}$ est bien une somme d'éléments de $\mu_{i+1,j+1}$. Il reste à voir que l'on a bien sommé tous les polynômes de $\mu_{i+1,j+1}$ et qu'ainsi la somme est égale à $\hat{U}_{i+1,j+1} = \sum_{P \in \mu_{i+1,j+1}} P(A,B)$.
Pour cela, on observe que le premier terme $A\hat{U}_{i,j+1}$ est une somme de $\binom{i+j+1}{i}$ termes et que le deuxième terme $B\hat{U}_{i+1,j}$ est une somme de $\binom{i+j+1}{i+1}$ termes. Or d'après la formule de Pascal,

$$\binom{i+j+1}{i} + \binom{i+j+1}{i+1} = \binom{i+j+2}{i+1} = \#\mu_{i+1,j+1}.$$

Par ailleurs les éléments de $A\hat{U}_{i,j+1}$ et de $B\hat{U}_{i+1,j}$ sont bien distincts deux à deux car ils comportent respectivement A et B en première position. On a donc bien l'égalité désirée. □

Grâce à ce résultat intermédiaire, nous obtenons :

Proposition 1.9. L'unique solution de (FM-DL) est donnée par :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2, \quad x_{i,j} = \sum_{k=1}^{\max(i,j)} \left(\sum_{P \in \mu_{i-1,j-k}} P(A,B) A \Psi_k^{(1)} + \sum_{P \in \mu_{i-k,j-1}} P(A,B) B \Psi_k^{(2)} \right). \tag{FM-Sol2}$$

Preuve 1.4. La formule ci dessus n'étant pas définie pour $(i,j) = (0,0)$, nous allons donner une caractérisation de la solution $x_{i,j}$ du système sur les deux «demi-droites» discrètes $\mathbb{N}^\star \times \{1\}$ et $\{1\} \times \mathbb{N}^\star$, grâce à la relation de récurrence fournie par (FM-DL) :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} x_{i+1,1} = A^{i+1}\Psi_1^{(1)} + \sum_{k=0}^{i} A^k B \Psi_{i+1-k}^{(2)} \\ x_{1,j+1} = B^{j+1}\Psi_1^{(2)} + \sum_{k=0}^{j} B^k A \Psi_{j+1-k}^{(1)}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Ceci se montre aisément par récurrence respectivement sur i et j. Nous le montrons pour i, le calcul est identique pour j.
L'initialisation est immédiate, pour l'hérédité :

$$\begin{aligned} x_{i+2,1} &= A x_{i+1,1} + B x_{i+2,0} \\ &= A^{i+2}\Psi_1^{(1)} + \sum_{k=0}^{i} A^{k+1} B \Psi_{i+1-k}^{(2)} + B\Psi_{i+2}^{(2)} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{i+2}\Psi_1^{(1)} + \sum_{k=1}^{i+1} A^k B \Psi_{i+1-(k-1)}^{(2)} + B\Psi_{i+2}^{(2)} \\ &= A^{i+2}\Psi_1^{(1)} + \sum_{k=0}^{i+1} A^k B \Psi_{i+2-k}^{(2)}. \end{aligned}$$

Comme pour la preuve de la proposition 1.8, nous allons appeler $\hat{x}_{i,j}$ le membre de droite de la formule (FM-Sol2), montrer qu'il vérifie bien (1.3), et qu'il est bien solution de (FM-DL). Par unicité de la solution, nous aurons bien $x_{i,j} = \hat{x}_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2$, et le résultat sera établi.

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \hat{x}_{i+1,1} = \sum_{k=1}^{i+1} \left(\sum_{P \in \mu_{i,1-k}} P(A,B) A \Psi_k^{(1)} + \sum_{P \in \mu_{i+1-k,0}} P(A,B) B \Psi_k^{(2)} \right).$$

Or $\mu_{i+1-k,0} = \{A^{i+1-k}\}$, $\mu_{i,0} = \{A^i\}$ et $\mu_{i,1-k} = \{\emptyset\},\ \forall k > 1$, d'où

$$\forall i \in \mathbb{N},\ \hat{x}_{i+1,1} = A^{i+1}\Psi_1^{(1)} + \sum_{k=1}^{i+1} A^{i+1-k} B \Psi_k^{(2)} = A^{i+1}\Psi_1^{(1)} + \sum_{k=0}^{i} A^k B \Psi_{i+1-k}^{(2)}.$$

Par symétrie, on a également :

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \hat{x}_{1,j+1} = B^{j+1}\Psi_1^{(2)} + \sum_{k=0}^{j} B^k A \Psi_{j+1-k}^{(1)}$$

et $\hat{x}_{i,j}$ vérifie bien (1.3).

Montrons maintenant que $(\hat{x})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^\star)^2}$ est bien solution de (FM-DL).

Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.

On a d'une part :

$$x_{i+1,j+1} = \sum_{k=1}^{\max(i+1,j+1)} \left(\sum_{P \in \mu_{i,j+1-k}} P(A,B) A \Psi_k^{(1)} + \sum_{P \in \mu_{i+1-k,j}} P(A,B) B \Psi_k^{(2)} \right).$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} A\hat{x}_{i,j+1} + B\hat{x}_{i+1,j} = A & \sum_{k=1}^{\max(i,j+1)} \left(\sum_{P \in \mu_{i,j+1-k}} P(A,B) A \Psi_k^{(1)} + \sum_{P \in \mu_{i-k,j}} P(A,B) B \Psi_k^{(2)} \right) \\ & + B \sum_{k=1}^{\max(i+1,j)} \left(\sum_{P \in \mu_{i,j-k}} P(A,B) A \Psi_k^{(1)} + \sum_{P \in \mu_{i+1-k,j-1}} P(A,B) B \Psi_k^{(2)} \right). \end{aligned}$$

Supposons que $j > i+1$, on a alors :

$$\begin{aligned}
A\hat{x}_{i,j+1} + B\hat{x}_{i+1,j} &= A\sum_{k=1}^{j+1}\left(\sum_{P\in\mu_{i-1,j+1-k}} P(A,B)A\Psi_k^{(1)} + \sum_{P\in\mu_{i-k,j}} P(A,B)B\Psi_k^{(2)}\right) \\
&\quad + B\sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{P\in\mu_{i,j-k}} P(A,B)A\Psi_k^{(1)} + \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j-1}} P(A,B)B\Psi_k^{(2)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{j+1}\left(\sum_{P\in\mu_{i-1,j+1-k}} AP(A,B)A\Psi_k^{(1)} + \sum_{P\in\mu_{i-k,j}} AP(A,B)B\Psi_k^{(2)}\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{P\in\mu_{i,j-k}} BP(A,B)A\Psi_k^{(1)} + \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j-1}} BP(A,B)B\Psi_k^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{P\in\mu_{i-1,j+1-k}} AP(A,B)A\Psi_k^{(1)} + \sum_{P\in\mu_{i,j-k}} BP(A,B)A\Psi_k^{(1)}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{P\in\mu_{i-k,j}} AP(A,B)B\Psi_k^{(2)} + \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j-1}} BP(A,B)B\Psi_k^{(2)}\right) \\
&\quad + \sum_{P\in\mu_{i-1,0}} AP(A,B)A\Psi_{j+1}^{(1)}.
\end{aligned}$$

Or si $P \in \mu_{i-1,j+1-k}$ alors $AP(A,B)$ est bien un élément de $\mu_{i,j+1-k}$ évalué en (A,B) et si $P \in \mu_{i,j-k}$ alors $BP(A,B)$ est bien un élément de $\mu_{i,j+1-k}$ évalué en (A,B).
De même si $P \in \mu_{i-k,j}$ alors $AP(A,B)$ est bien un élément de $\mu_{i+1-k,j}$ évalué en (A,B) et si $P \in \mu_{i+1-k,j-1}$ alors $BP(A,B)$ est bien un élément de $\mu_{i+1-k,j}$ évalué en (A,B).
En utilisant à nouveau la formule de Pascal, on a :

$$\binom{i+j-k}{i-1} + \binom{i+j-k}{i} = \binom{i+j+1-k}{i} = \#\mu_{i,j+1-k}$$

et

$$\binom{i+j-k}{i-k} + \binom{i+j-k}{i+1-k} = \binom{i+j+1-k}{i+1-k} = \#\mu_{i+1-k,j}.$$

Ainsi par le même argument de cardinalité que dans la démonstration de la proposition 1.8, il vient, $\forall k \in [\![1,j]\!]$:

$$\sum_{P\in\mu_{i-1,j+1-k}} AP(A,B)A\Psi_k^{(1)} + \sum_{P\in\mu_{i,j-k}} BP(A,B)A\Psi_k^{(1)} = \sum_{P\in\mu_{i,j+1-k}} P(A,B)A\Psi_k^{(1)},$$

et

$$\sum_{P\in\mu_{i-k,j}} AP(A,B)B\Psi_k^{(2)} + \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j-1}} BP(A,B)A\Psi_k^{(2)} = \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j}} P(A,B)B\Psi_k^{(2)}.$$

Par ailleurs,

$$\sum_{P\in\mu_{i-1,0}} AP(A,B)A\Psi^{(1)}_{j+1} = A^{i+1}\Psi^{(1)}_{j+1} = \sum_{P\in\mu_{i,0}} P(A,B)A\Psi^{(1)}_{j+1}.$$

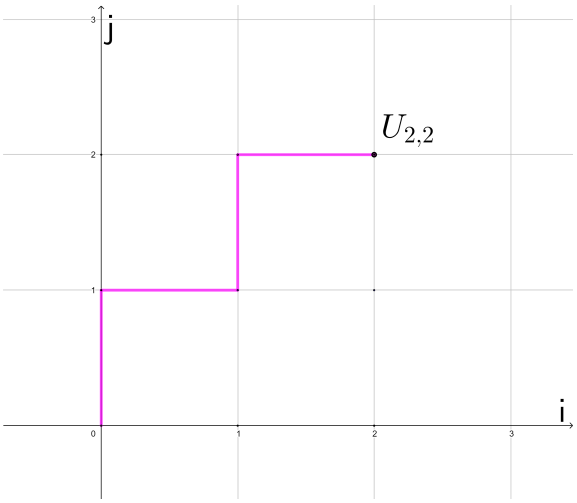
Finalement,

$$\begin{aligned} A\hat{x}_{i,j+1} + B\hat{x}_{i+1,j} &= \sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{P\in\mu_{i,j+1-k}} P(A,B)A\Psi^{(1)}_k + \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j}} P(A,B)B\Psi^{(2)}_k\right) \\ &\quad + \sum_{P\in\mu_{i,0}} P(A,B)A\Psi^{(1)}_{j+1} \\ &= \sum_{k=1}^{j+1}\left(\sum_{P\in\mu_{i,j+1-k}} P(A,B)A\Psi^{(1)}_k + \sum_{P\in\mu_{i+1-k,j}} P(A,B)B\Psi^{(2)}_k\right) \\ &= \hat{x}_{i+1,j+1}. \end{aligned}$$

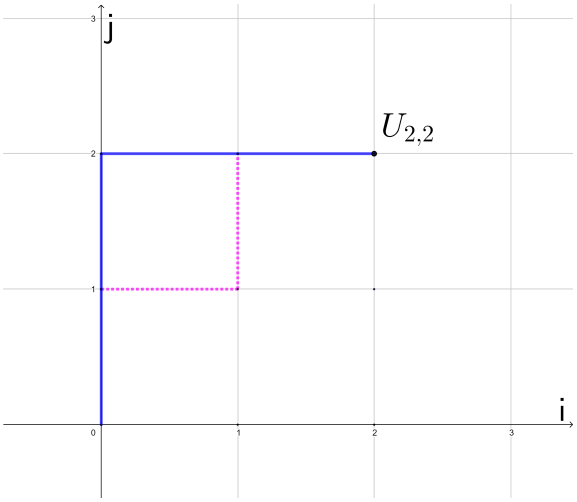
Le cas où $j \leqslant i+1$ se traite de façon similaire. □

Afin de mieux appréhender les formules (U-Sol) et (FM-Sol2), nous allons les illustrer sur un exemple.

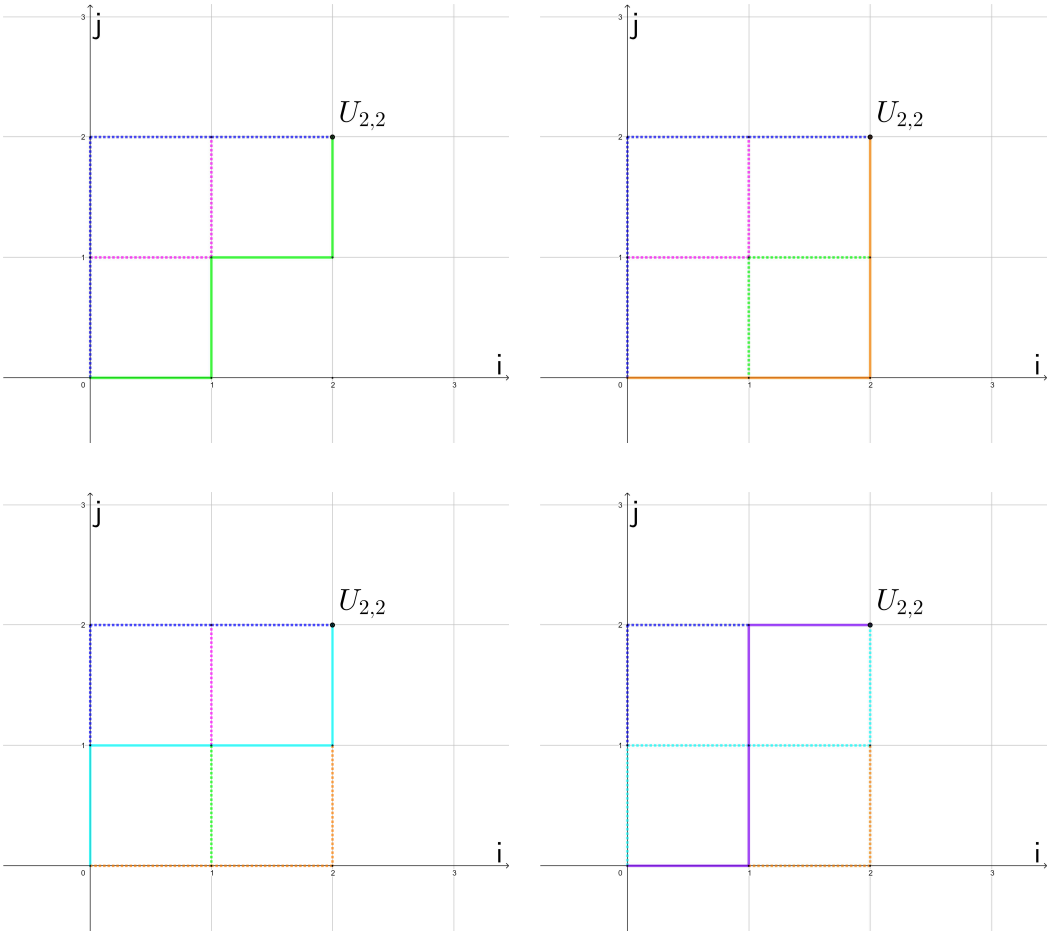
Exemple 1.1. Si l'on considère l'équation (1.2), et que l'on cherche à calculer $U_{2,2}$ par exemple, on observe le principe suivant : il s'agit de «recenser» tous les plus courts chemins joignant le point de coordonnées $(2,2)$ à l'origine $(0,0)$ de $\mathbb{N}^2$ (dans ce sens) et de faire la somme des termes obtenus. Si l'on se déplace vers la gauche, on multiplie par A et si l'on se déplace vers le bas, on multiplie par B. Par exemple, nous pouvons emprunter le chemin rose suivant :



Pour aller du point de coordonnées $(2,2)$ à l'origine $(0,0)$, nous allons une fois vers la gauche, une fois vers le bas, une fois vers la gauche et une fois vers le bas. Ainsi ce chemin correspond au terme $ABAB$.
Nous pouvons également emprunter le chemin bleu foncé suivant :



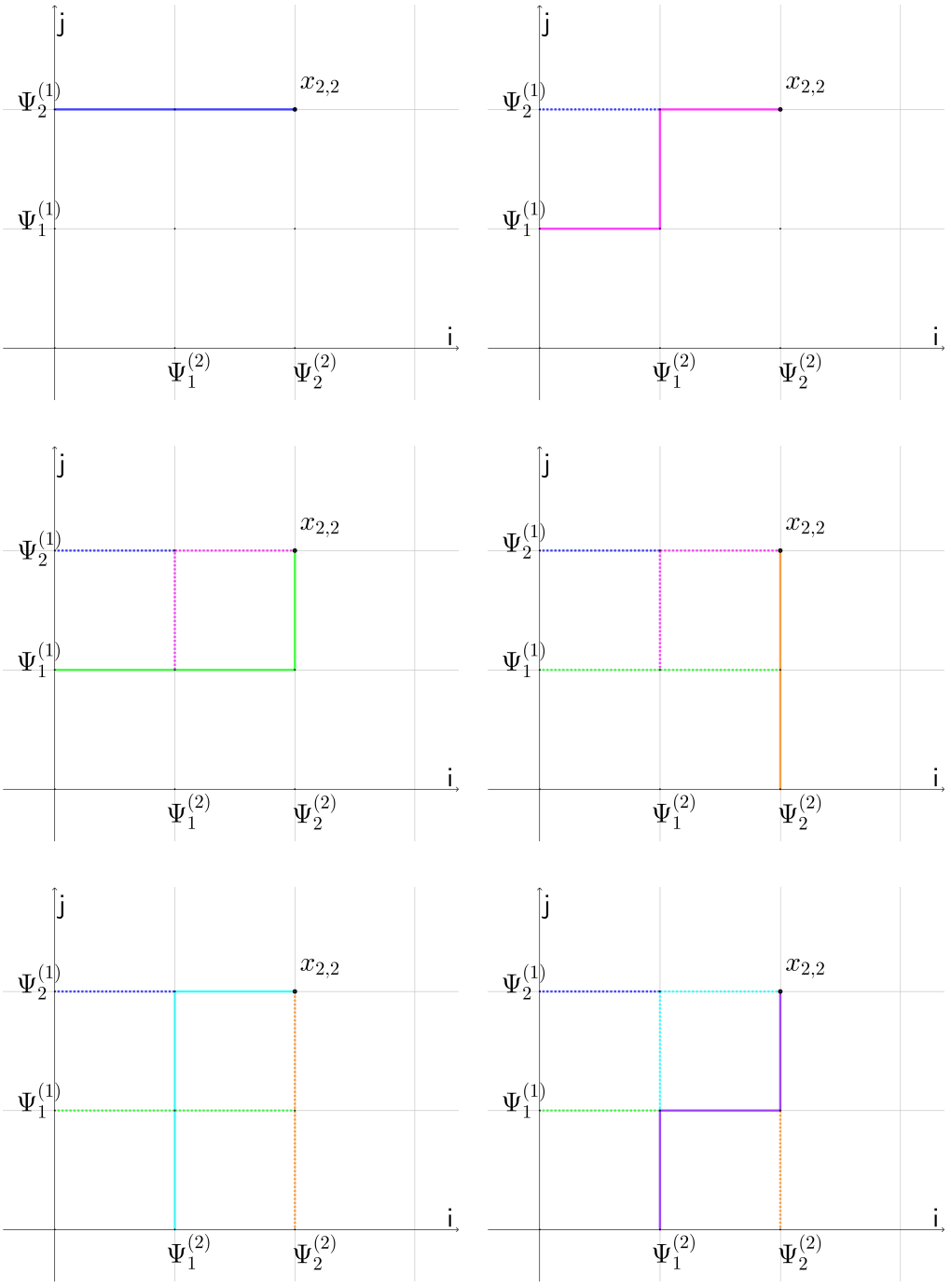
Nous allons deux fois vers la gauche et deux fois vers le bas, ce chemin correspond donc au terme : A^2B^2.
En complétant la liste des chemins possibles,



nous obtenons : $U_{2,2} = ABAB + A^2B^2 + BABA + B^2A^2 + BA^2B + AB^2A$.

Illustrons à présent la formule (FM-Sol2). Si l'on cherche, par exemple, à calculer $x_{2,2}$, nous observons un principe comparable. Il s'agit cette fois de «recenser» les plus courts chemins reliant le point de coordonnées $(2, 2)$ aux points

sur les bords qui correspondent aux conditions initiales $\Psi_j^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$ pour $j \leqslant 2$ et $i \leqslant 2$, et de faire la somme des termes obtenus. Nous suivons les mêmes règles que celles décrites précédemment, *i.e.*, on multiplie par A lorsque l'on se déplace vers la gauche, et on multiplie par B lorsque l'on se déplace vers le bas.



On obtient ainsi : $x_{2,2} = A^2\Psi_2^{(1)} + ABA\Psi_1^{(1)} + BA^2\Psi_1^{(1)} + B^2\Psi_2^{(2)} + AB^2\Psi_1^{(2)} + BAB\Psi_1^{(2)}$.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué des rappels sur les systèmes 1D et plus particulièrement sur les notions de stabilité de ces modèles, ainsi que les liens entre ces notions.
Ensuite, nous avons présenté les modèles 2D que nous étudierons par la suite, les modèles de Roesser et les modèles de Fornasini-Marchesini.
Dans le chapitre suivant, nous allons introduire la notion de point d'équilibre et les notions de stabilité pour ces modèles 2D. Les définitions de stabilité apparaissent comme des extensions de celles utilisées pour les modèles 1D, et nous allons étudier précisément les relations entre ces différentes notions de stabilité.

2 Chapitre 2 : Stabilité des modèles 2D. Liens entre les différentes notions de stabilité

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter les différentes définitions de stabilité qui ont été utilisées dans la littérature concernant les modèles 2D de Roesser et de Fornasini-Marchesini : stabilité asymptotique (AS), deux différentes notions de stabilité exponentielle (ES1) et (ES2), et stabilité structurelle (SS).

Ces dix dernières années, différents auteurs ont commencé à s'intéresser aux questions relatives à la stabilité dans le champ des systèmes multidimensionnels. La question de la stabilité asymptotique, introduite tout d'abord dans [15] pour les systèmes linéaires, a été complétée [25] et étendue aux systèmes 2D non linéaires [30, 31]. Plusieurs résultats ont été généralisés du cas 1D au cas 2D [32, 29]. Dans cette exploration des questions de stabilité pour les modèles 2D, [33] montre que dans le cas particulier des modèles 2D *linéaires* l'attractivité est équivalente à la stabilité asymptotique. Cette équivalence entre attractivité et stabilité asymptotique est connue comme étant fausse dans le cas des modèles 1D *non linéaires*. A notre connaissance, cette question n'a pas encore été traitée dans le cas des modèles 2D.

Dans le même temps, la stabilité exponentielle, bien qu'introduite à l'origine par [34], a été le point d'investigation de plusieurs auteurs ces dernières années. Ce concept diffère légèrement en fonction des auteurs mais nous pouvons les regrouper en deux principales catégories. Dans la première [35, 36, 37, 38], les auteurs se concentrent sur les trajectoires des modèles et leur demandent d'être bornées exponentiellement pour des conditions initiales elles-mêmes exponentiellement décroissantes. Remarquons que certains de ces articles ne traitent pas de modèles discrets ou linéaires, mais l'idée derrière les définitions proposées est similaire. Le second groupe d'auteurs a adopté une approche différente [31, 29, 39], où aucune contrainte n'est imposée sur les conditions initiales car elles apparaissent explicitement dans la majoration.

Finalement, dans le cas linéaire, la plupart des auteurs, lorsqu'ils traitent de stabilité, s'intéressent à un troisième concept de stabilité que nous appellerons stabilité structurelle, qui concerne la localisaton des racines d'un polynôme caractéristique a deux variables (voir [40, 41, 42, 43, 44]). Cette notion puissante permet l'étude de différents modèles, continus, discrets et même hybrides dans un cadre commun (voir les contributions récentes [45, 46, 47]).

Notre but dans ce chapitre est de clarifier les relations entre ces quatre notions de stabilité dans le cas de modèles 2D discrets linéaires uniquement. Ce travail a déjà été établi dans le cadre du modèle de Fornasini-Marchesini [29] car ce modèle

permet de travailler avec une expression explicite des solutions. Cependant, cette approche n'est pas possible avec un modèle de Roesser car les solutions ne peuvent souvent pas être calculées explicitement. L'approche proposée ici est de transformer un modèle de Roesser en modèle de Fornasini-Marchesini afin d'énoncer le résultat principal de ce chapitre : dans le cas de modèles 2D discrets linéaires, que ce soit Fornasini-Marchesini ou Roesser, (ES1), (ES2) et (SS) sont toutes équivalentes et elles impliquent toutes (AS). D'autre part, (AS) n'implique pas nécessairement les autres.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Nous allons tout d'abord rappeler, dans le cas 2D, la notion de point d'équilibre, ainsi que les différentes définitions de stabilité qui ont été utilisées dans la littérature et que nous avons citées ci-dessus : stabilité asymptotique, les deux définitions de stabilité exponentielle principalement utilisées et la stabilité structurelle. Dans la partie 2.5, nous allons rappeler les liens déjà établis. Dans la partie 2.6, nous allons clarifier les relations entre les deux notions de stabilité exponentielle qui ont été introduites dans le cas d'un modèle de Fornasini-Marchesini. Nous allons ensuite utiliser la transformation proposée d'un modèle de Roesser vers un modèle de Fornasini-Marchesini pour prouver notre résultat principal dans la partie 2.7. Ensuite, nous illustrerons graphiquement la différence entre la stabilité asymptotique et la stabilité structurelle sur un exemple. Enfin, nous conclurons ce chapitre avec quelques questions ouvertes.

2.2 Points d'équilibres

Comme dans le cas 1D, nous devons dans un premier temps définir la notion de point d'équilibre d'un système 2D.
La notion de point d'équilibre d'un modèle 2D est identique à celle utilisée pour les modèle 1D. Plus précisément, si l'on travaille avec un modèle discret, il s'agit d'un point fixe de la fonction définissant le modèle, et si l'on travaille avec un modèle continu, il s'agit d'un zéro de la fonction définissant le modèle.
En fonction du contexte, il faut seulement prendre garde aux dimensions du vecteur d'état en jeu.
Par exemple, si l'on considère le modèle de Roesser discret (R-D), un point d'équilibre pour ce modèle est un point fixe de la fonction f, *i.e.*, un point $x_e = (x_e^h, x_e^v) \in \mathbb{C}^n$ tel que $f(x_e) = x_e$, avec $x_e^h \in \mathbb{C}^{n_1}$ et $x_e^v \in \mathbb{C}^{n_2}$
Si l'on considère le modèle de Fornasini-Marchesini discret (FM-D), alors un point d'équilibre est un point fixe de la fonction f, *i.e.*, un point $x_e \in \mathbb{C}^n$ tel que $f(x_e, x_e) = x_e$.
Comme dans le cas 1D, il est toujours possible de se ramener à une fonction possédant zéro comme point fixe (voir [48] par exemple). D'autre part, dans le cas de modèles linéaires, zéro est toujours un point fixe.
Dans ce chapitre, nous allons travailler sur les deux modèles discrets linéaires de Roesser(R-DL) et de Fornasini-Marchesini (FM-DL) définis au chapitre 1. Comme, dans ce cas, zéro est toujours un point d'équilibre du modèle, nous avons fait le choix d'énoncer les différentes notions de stabilité pour le point d'équilibre zéro. Nous proposons dans la section D ces mêmes définitions pour les modèles non nécessairement linéaires (R-D) et (FM-D) pour un point d'équilibre x_e quelconque.

2.3 Passer d'un modèle de Roesser à un modèle de Fornasini-Marchesini

Afin d'établir les connections entre les différentes définitions de stabilité, nous allons parfois passer d'un modèle de Roesser à un modèle de Fornasini-Marchesini qui lui est associé. Plus précisément, le modèle (R-DL) peut se réécrire comme le modèle de Fornasini-Marchesini suivant :

$$x_{i+1,j+1} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) x_{i,j+1} + \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) x_{i+1,j}, \tag{FMA-DL}$$

où les conditions initiales sont données par :

$$\Psi_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \Psi_j^h \\ x_{0,j}^v \end{pmatrix} \text{ et } \Psi_i^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{i,0}^h \\ \Psi_i^v \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

En effet, si l'on considère le modèle de Roesser (R-DL), nous avons, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ les relations :

$$\begin{cases} x_{i+1,j}^h = A_{11}x_{i,j}^h + A_{12}x_{i,j}^v \\ x_{i,j+1}^v = A_{21}x_{i,j}^h + A_{22}x_{i,j}^v \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x_{i+1,j+1}^h = A_{11}x_{i,j+1}^h + A_{12}x_{i,j+1}^v \\ x_{i+1,j+1}^v = A_{21}x_{i+1,j}^h + A_{22}x_{i+1,j}^v \end{cases}$$

ce qui en posant, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $x_{i,j} = \begin{pmatrix} x_{i,j}^h \\ x_{i,j}^v \end{pmatrix}$, nous donne l'équation (FMA-DL).

Remarque 2.1. Nous avons volontairement choisi de noter de façons différentes les conditions initiales $(\Psi_j^h)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\Psi_i^v)_{i\in\mathbb{N}}$ du modèle de Roesser, respectivement $(\Psi_j^{(1)})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\Psi_i^{(2)})_{i\in\mathbb{N}}$ celles du modèle de Fornasini-Marchesini, afin de ne pas les confondre car ce sont des suites vectorielles de $\mathbb{C}^{n_1}$ et $\mathbb{C}^{n_2}$ respectivement de $\mathbb{C}^n$. Ceci sera important pour certaines démonstrations.
Par ailleurs, dans l'équation (2.1), la première composante de $\Psi_j^{(1)}$ est donnée par la condition initiale Ψ_j^h du modèle de Roesser et la deuxième composante $x_{0,j}^v$ est calculable grâce au modèle de Roesser (R-DL). De même la deuxième composante de $\Psi_i^{(2)}$ est donnée par la condition initiale Ψ_i^v du modèle de Roesser et la première composante $x_{i,0}^h$ se calcule via la relation de récurrence donnée par (R-DL).

Remarque 2.2. Remarquons que le passage du modèle (R-DL) au modèle (FMA-DL) n'est pas une équivalence au sens de l'analyse algébrique (voir [42] pour plus de détails). En effet, il n'y a pas de correspondance bijective entre les solutions de (R-DL) et celles de (FMA-DL). Ainsi, lorsque l'on passe d'un modèle à l'autre, nous devons vérifier que les propriétés de stabilité ne se sont pas perdues pendant la transformation.

2.4 Notions de stabilité, définitions

2.4.1 Stabilité asymptotique

Le concept de stabilité asymptotique a été initialement introduit dans [15] puis étendu aux systèmes 2D non-linéaires dans [30, 31].

Définition 2.1 (R-AS)**.** Le point d'équilibre zéro de (R-DL) est dit :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0; \quad \forall (\Psi_j^h,\, \Psi_i^v) \in (\mathbb{C}^{n_1})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{C}^{n_2})^{\mathbb{N}},$$
$$\max\left(\left\|\Psi^h\right\|_\infty, \|\Psi^v\|_\infty\right) \leqslant \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *attractif* si :

$$\begin{cases} \Psi_j^h \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{n_1}) \\ \Psi_i^v \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}^{n_2}) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{i+j\to+\infty} x_{i,j} = 0.$$

(iii) *asymptotiquement stable* (*R-AS*) s'il est à la fois stable et attractif.

Définition 2.2 (FM-AS)**.** Le point d'équilibre zéro de (FM-DL) est dit :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta_\varepsilon > 0; \quad \forall \Psi_j^{(1)},\, \Psi_i^{(2)} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}},$$
$$\max\left(\left\|\Psi^{(1)}\right\|_\infty, \left\|\Psi^{(2)}\right\|_\infty\right) \leqslant \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *attractif* si :

$$\begin{cases} \Psi_j^{(1)} \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}^n) \\ \Psi_i^{(2)} \in c_0(\mathbb{N}, \mathbb{C}^n) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{i+j\to+\infty} x_{i,j} = 0.$$

(iii) *asymptotiquement stable* (*FM-AS*) s'il est à la fois stable et attractif.

Remarque 2.3. Il a été démontré dans [33] qu'un modèle 2D linéaire est asymptotiquement stable si et seulement s'il est attractif (ce qui est également le cas en 1D). Par conséquent, nous regarderons seulement la propriété d'attractivité car elle suffira à garantir la stabilité asymptotique.

2.4.2 Stabilité exponentielle

La stabilité exponentielle a été définie principalement de trois façons différentes dans la littérature des systèmes 2D.
Historiquement, la première définition de stabilité exponentielle fut proposée dans [34] mais elle n'implique pas la stabilité asymptotique (Définition 2.1). Par conséquent, nous n'en parlerons pas d'avantage ici (voir [31] pour plus de détails). Nous allons rappeler les deux définitions restantes. Comme souligné dans l'introduction de ce chapitre, il n'est pas évident de comparer ces définitions de stabilité exponentielle car certaines furent données dans le cas continu (par exemple [35]) ou parfois dans un cas hybride (continu / discret, e.g. [26]), mais l'idée derrière ces définitions peut être adaptée dans le cadre discret linéaire qui nous intéresse ici.

Définition 2.3 (R-ES1)**.** [31] Le point d'équilibre zéro du modèle (R-DL) est dit *exponentiellement stable* (ou simplement R-ES1) s'il existe $M > 0$ et $q \in]0,1[$ tels que, pour toutes conditions initiales $(\Psi_j^h, \Psi_i^v) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}$, et pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^h\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\|\Psi_k^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}. \tag{2.2}$$

Remarque 2.4. Il y a dans l'équation (2.2) un léger abus de notation sur les normes utilisées. En effet nous avons noté avec le même symbole $\|.\|$ la norme d'éléments de $\mathbb{C}^n$ pour $x_{i,j}$ et de $\mathbb{C}^{n_1}$ respectivement $\mathbb{C}^{n_2}$ pour Ψ_j^h respectivement Ψ_i^v. Nous avons fait ce choix dans le but d'alléger les notations.

Définition 2.4 (FM-ES1)**.** [31] Le point d'équilibre zéro du modèle (FM-DL) est dit *exponentiellement stable* (ou simplement FM-ES1) s'il existe $M > 0$ et $q \in]0,1[$ tels que, pour toutes conditions initiales $(\Psi_j^{(1)}, \Psi_i^{(2)}) \in (\mathbb{C}^n)^2$, et pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^{(1)}\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\left\|\Psi_k^{(2)}\right\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}. \tag{2.3}$$

Définition 2.5 (R-ES2)**.** [35] Le point d'équilibre zéro du modèle (R-DL) est dit *exponentiellement stable* (ou simplement R-ES2) si pour toutes conditions initiales exponentiellement décroissantes Ψ_j^h et Ψ_i^v, *i.e.*, telles que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left\|\Psi_j^h\right\| \leqslant Mq^j, \quad \|\Psi_i^v\| \leqslant Mq^i, \tag{2.4}$$

pour un certain $M > 0$ et $q \in]0,1[$, il existe $\tilde{M} > 0$ et $\tilde{q} \in]0,1[$ tels que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i,j}\| \leqslant \tilde{M}\tilde{q}^{i+j}. \tag{2.5}$$

Définition 2.6 (FM-ES2)**.** [35] Le point d'équilibre zéro du modèle (FM-DL) est dit *exponentiallement stable* (ou simplement FM-ES2) si pour toutes conditions initiales exponentiellement décroissantes $\Psi_j^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$, *i.e.*, telles que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left\|\Psi_j^{(1)}\right\| \leqslant Mq^j, \quad \left\|\Psi_i^{(2)}\right\| \leqslant Mq^i, \tag{2.6}$$

pour un certain $M > 0$ et $q \in]0,1[$, il existe $\tilde{M} > 0$ et $\tilde{q} \in]0,1[$ tels que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i,j}\| \leqslant \tilde{M}\tilde{q}^{i+j}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.5. Au premier abord, ces deux définitions ES1 et ES2 ne semblent pas équivalentes. Remarquons que l'ordre des quantificateurs est important car les constantes dans ES1 sont indépendantes du choix des conditions initiales alors que ce n'est pas le cas dans ES2. D'autre part, il n'y a aucune contrainte sur les conditions initiales dans ES1 alors que l'on fait l'hypothèse qu'elles sont exponentiellement décroissantes dans ES2. Cependant, nous allons voir que, de façon surprenante, dans le cas linéaire, ces deux définitions sont équivalentes.

Remarque 2.6. Dans la suite de ce chapitre, nous commettrons à nouveau l'abus de langage qui consiste à parler de la stabilité du système plutôt que de parler de la stabilité du point d'équilibre zéro pour le système.

2.4.3 Stabilité structurelle

Ce que nous appelons stabilité structurelle est une propriété purement algébrique du système et la définition principalement utilisée dans la littérature des systèmes 2D. Cette définition repose sur l'étude des racines d'un polynôme à deux indéterminées (voir, e.g., [15, 40, 42]). Certains auteurs parlent de stabilité *spectrale* pour définir cette même notion [41]. Il est important de mentionner que d'une part, cette notion de stabilité n'existe, bien entendu, que dans le cas linéaire, et d'autre part, elle est intrinsèque au modèle dans le sens où elle est complètement indépendante du choix des conditions initiales.

Définition 2.7 (R-SS)**.** Un modèle de Roesser (R-DL) est dit *structurellement stable* (ou simplement R-SS) si, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\det\left(\begin{pmatrix}\lambda I_{n_1} & 0\\ 0 & \mu I_{n_2}\end{pmatrix} - A\right) \neq 0, \text{ quand } |\lambda| \geqslant 1 \text{ et } |\mu| \geqslant 1. \tag{2.8}$$

Définition 2.8 (FM-SS)**.** Un modèle de Fornasini-Marchesini (FM-DL) est dit *structurellement stable* (ou simplement FM-SS) si, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\det\left(\lambda\mu I_n - \lambda A - \mu B\right) \neq 0, \text{ quand } |\lambda| \geqslant 1 \text{ et } |\mu| \geqslant 1. \tag{2.9}$$

Nous allons voir que les définitions 2.7 et 2.8 sont respectivement équivalentes à deux autres formulations où l'on exige qu'un certain déterminant soit non nul pour tout $(\lambda, \mu) \in (\overline{\mathbb{D}})^2$.
En effet, dans le cas du modèle de Roesser, nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.9. Un modèle de Roesser (R-DL) est structurellement stable si et seulement si, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix}\lambda I_{n_1} & 0\\ 0 & \mu I_{n_2}\end{pmatrix} A\right) \neq 0, \text{ quand } |\lambda| \leqslant 1 \text{ et } |\mu| \leqslant 1. \tag{2.10}$$

Preuve 2.1. Supposons que le modèle de Roesser (R-DL) vérifie (2.10) et montrons qu'il est R-SS. Considérons deux nombres complexes λ et μ tels que $|\lambda| \geqslant 1$, $|\mu| \geqslant 1$ et considérons la quantité :

$$\begin{aligned}
&\det\left(\begin{pmatrix}\lambda I_{n_1} & 0\\ 0 & \mu I_{n_2}\end{pmatrix} - A\right)\\
&= \det\left(\begin{pmatrix}\lambda I_{n_1} & 0\\ 0 & \mu I_{n_2}\end{pmatrix}\left(I_n - \begin{pmatrix}\lambda^{-1} I_{n_1} & 0\\ 0 & \mu^{-1} I_{n_2}\end{pmatrix} A\right)\right),\\
&= \underbrace{\lambda^{n_1}\mu^{n_2}}_{\neq 0} \underbrace{\det\left(I_n - \begin{pmatrix}\lambda^{-1} I_{n_1} & 0\\ 0 & \mu^{-1} I_{n_2}\end{pmatrix} A\right)}_{\neq 0 \text{ car } |\lambda^{-1}|,|\mu^{-1}| \leqslant 1 \text{ et (2.10) est vérifiée}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le modèle de Roesser est R-SS.

Maintenant, considérons un modèle (R-DL) qui est R-SS. Soient deux nombres complexes λ et μ tels que $|\lambda| \leqslant 1$, $|\mu| \leqslant 1$.

- Traitons tout d'abord le cas trivial où $\lambda = \mu = 0$. Evidemment, (2.10) est vérifiée car le déterminant est toujours égal à 1.

- Dans le cas où $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_2} \end{pmatrix} A\right) \\
&= \det\left(\begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_2} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1} I_{n_2} \end{pmatrix} - A\right)\right), \\
&= \underbrace{\lambda^{n_1}\mu^{n_2}}_{\neq 0} \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu^{-1} I_{n_2} \end{pmatrix} - A\right)}_{\neq 0 \text{ car } |\lambda^{-1}|,|\mu^{-1}| \geqslant 1 \text{ et (2.8) est vérifiée}},
\end{aligned}$$

  ce qui donne (2.10).

- La situation est plus compliquée si $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$ (le cas où $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$ est symétrique). Tout d'abord, pour $z \in \mathbb{C}$, posons

$$\begin{aligned}
f(z) &:= \det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} zI_{n_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A\right), \\
&= \det\left(I_{n_1+n_2} - z\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \\
&= \det\left(I_{n_1} - zA_{11}\right).
\end{aligned}$$

  Nous allons montrer que la fonction entière f ne s'annule pas sur le disque unité $\overline{\mathbb{D}}$ ce qui concluera la preuve (au passage, nous aurons aussi montré que la matrice A_{11} est une matrice Schur-stable, voir le corollaire 2.12). Nous allons ici utiliser un corollaire du théorème de Hurwitz en analyse complexe.

  Lemme 2.10. [[49]] Soit $\mathbb{G}$ un ouvert connexe et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes qui converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{G}$ vers une fonction holomorphe f. Si chaque fonction f_k ne s'annule pas sur $\mathbb{G}$, alors soit f est identiquement nulle, soit elle ne s'annule pas sur $\mathbb{G}$.

  Pour $0 < \epsilon < 1$, considérons le disque ouvert connexe $\mathbb{G}_\epsilon = (1-\epsilon)^{-1}\mathbb{D}$ de rayon $(1-\epsilon)^{-1} > 1$.
  Ce disque ouvert contient $\overline{\mathbb{D}}$ et ce indépendamment du choix de ϵ.
  Considérons la suite de fonctions holomorphes : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
f_k(z) : \mathbb{G}_\epsilon &\to \mathbb{C}, \\
z &\mapsto \det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} zI_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu_k I_{n_2} \end{pmatrix} A\right),
\end{aligned}$$

  où $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes non nuls tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|\mu_k| < 1$ et qui converge vers 0.
  Par construction, f_k converge simplement vers f et comme $f(0) = 1$, f n'est pas identiquement nulle sur $\mathbb{G}_\epsilon$.

Pour conclure la preuve en appliquant le lemme 2.10, il reste à voir que les f_k ne s'annulent pas sur $\mathbb{G}_\epsilon$ et que la convergence est uniforme sur tout compact de $\mathbb{G}_\epsilon$.

$\circ$ $f_k(z) \neq 0$ sur $\mathbb{G}_\epsilon$:

Considérons le polynôme

$$p(\lambda, \mu) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu I_{n_2} \end{pmatrix} - A\right).$$

Comme le modèle est R-SS, ce polynôme ne s'annule pas dans le compact $\mathcal{K} = \{z \in \mathbb{C},\ 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}^2$.
Par ailleurs, comme l'ensemble des racines de p est fermé, la distance entre cet ensemble et $\mathcal{K}$ est non nulle.[50]
Autrement dit, il existe $0 < \alpha < 1$ tel que p ne s'annule pas pour λ et μ tels que :

$$1 - \alpha \leqslant |\lambda| \leqslant \alpha + 2 \text{ et } 1 - \alpha \leqslant |\mu| \leqslant \alpha + 2.$$

Posons $\epsilon := \alpha$, soit $k \in \mathbb{N}$, et soit $z \in \mathbb{G}_\epsilon \backslash \{0\}$.
Nous avons :

$$f_k(z) = \underbrace{z^{n_1}\mu_k^{n_2}}_{\neq 0} \underbrace{\det\left(\begin{pmatrix} z^{-1} I_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu_k^{-1} I_{n_2} \end{pmatrix} - A\right)}_{\neq 0 \text{ car } |z^{-1}|, \left|\mu_k^{-1}\right| \geqslant 1-\epsilon}.$$

Ainsi $f_k(z) \neq 0$ pour $z \in \mathbb{G}_\epsilon \backslash \{0\}$, et par construction $f_k(0) = \det\left(I_{n_2} - \mu_k A_{22}\right) \neq 0$ pour k suffisamment grand, et donc $f_k(z) \neq 0$ pour $z \in \mathbb{G}_\epsilon$.

$\circ$ Convergence uniforme de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers f sur tout compact de $\mathbb{G}_\epsilon$:
Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} zI_{n_1} & 0 \\ 0 & \mu_k I_{n_2} \end{pmatrix} A\right), \\ &= \sum_{r=0}^{d_1} \sum_{s=0}^{d_2} q_{rs} z^r \mu_k^s, \end{aligned}$$

où les q_{rs} sont les coefficients d'une fonction polynômiale de deux variables z et μ_k. Comme $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, pour z fixé nous avons :

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z) = \sum_{r=0}^{d_1} \sum_{s=0}^{d_2} q_{rs} z^r 0^s = \sum_{r=0}^{d_1} q_{r0} z^r = f(z).$$

Soit K un compact inclus dans $\mathbb{G}_\epsilon$, en particulier, il existe $M > 0$ tel que pour

tout $z \in K$, $|z| \leqslant M$. Ainsi, pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f(z)| &= \left| \sum_{r=0}^{d_1} \sum_{s=0}^{d_2} q_{rs} z^r \mu_k^s - \sum_{r=0}^{d_1} q_{r0} z^r \right|, \\ &= \left| \sum_{r=0}^{d_1} \sum_{s=1}^{d_2} q_{rs} z^r \mu_k^s \right|, \\ &\leqslant \underbrace{\sum_{r=0}^{d_1} \sum_{s=1}^{d_2} |q_{rs}| \, M^r \, |\mu_k|^s}_{\text{converge vers 0 quand } k \to \infty}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne la converge uniforme et conclut la preuve. □

Remarque 2.7. Les deux caractérisations (2.8) et (2.10) de la stabilité structurelle ont été utilisées dans la littérature de manière interchangeable. Cela dit, on peut voir que la preuve de l'équivalence entre ces deux définitions n'est pas évidente, et il semblait important de la clarifier une fois pour toutes.

Dans le cas du modèle de Fornasini-Marchesini, nous avons la proposition :

Proposition 2.11. Un modèle de Fornasini-Marchesini linéaire (FM-DL) est stable structurellement si et seulement si, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$:

$$\det(I_n - \lambda A - \mu B) \neq 0, \text{ quand } |\lambda| \leqslant 1 \text{ et } |\mu| \leqslant 1. \tag{2.11}$$

Preuve 2.2. La preuve est similaire à la preuve de la proposition 2.9. Une version détaillée se trouve dans [48, Proposition 23].

Afin de comprendre dans quelle mesure les définitions de stabilité structurelle proviennent du cas 1D, nous devons faire la remarque importante suivante :

Remarque 2.8. Si l'on définit le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme étant égal à $P_A(X) := \det(A - XI_n)$, alors en remarquant que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}^\star, \quad \det(I_n - \lambda A) = \det\left(-\lambda(A - \frac{1}{\lambda} I_n)\right) = (-\lambda^n) P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{2.12}$$

nous obtenons l'équivalence :

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow [\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leqslant 1, \quad \det(I_n - \lambda A) \neq 0].$$

Ainsi, dans le cas 1D, la stabilité exponentielle, la stabilité asymptotique et l'attractivité sont toutes équivalentes à

$$[\forall \lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leqslant 1, \quad \det(I_n - \lambda A) \neq 0] \text{ (voir la proposition 1.5).}$$

Par conséquent, si l'on interprète les déterminants en jeu dans les équations (2.10) et (2.11) comme une «généralisation» du polynôme caractéristique, les formulations de stabilité structurelle (2.10) et (2.11) s'apparentent au critère de stabilité exponentielle, stabilité asymptotique et attractivité pour le cas 1D linéaire. L'idée de parler de polynôme caractéristique en deux indéterminées n'est pas nouvelle, puisque la quantité $\det(I_n - \lambda A - \mu B)$ que l'on étudie pour vérifier la stabilité structurelle du modèle de Fornasini-Marchesini FM-DL dans la formulation (2.11) a été dénommée polynôme caractéristique de la paire de matrices (A, B) dans [51].

Une conséquence directe des propositions 2.9 et 2.11 peut être résumée par les deux corollaires suivants :

Corollaire 2.12. Si le modèle (R-DL) est structurellement stable, alors $\rho(A_{11}) < 1$ et $\rho(A_{22}) < 1$ (*i.e.*, les matrices A_{11} et A_{22} sont Schur-stables).

Corollaire 2.13. Si le modèle (FM-DL) est structurellement stable, alors $\rho(A) < 1$ et $\rho(B) < 1$ (*i.e.*, les matrices A et B sont Schur-stables).

Nous allons démontrer le corollaire 2.13, le corollaire 2.12 se démontre de façon similaire en adaptant les notations.

Preuve 2.3. Supposons que le modèle (FM-DL) est structurellement stable. En vertu de la proposition 2.11, $\forall(\lambda, \mu) \in \overline{\mathbb{D}}^2$, $\det(I_n - \lambda A - \mu B) \neq 0$. En particulier, pour $\mu = 0$, on a : $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, $\det(I_n - \lambda A) \neq 0$.
Si l'on note $P_A(X) := \det(A - XI_n)$ le polynôme caractéristique de A, on a, d'après (2.12), $\forall \lambda \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$, $(-\lambda)^n P_A\left(\frac{1}{\lambda}\right) \neq 0$, *i.e.*, $\frac{1}{\lambda}$ n'est pas valeur propre de A. Autrement dit, A n'a pas de valeur propre supérieure ou égale à 1, *i.e.*, $\rho(A) < 1$.
Par symétrie, nous avons également $\rho(B) < 1$ en effectuant exactement le même raisonnement. □

2.5 Relations précédemment établies

2.5.1 Cas du modèle de Fornasini-Marchesini

Nous résumons ici les résultats obtenus dans [29] and [33]. Pour un modèle de Fornasini-Marchesini 2D linéaire, les relations entre les différentes définitions de stabilité introduites précédemment sont les suivantes :

$$\text{FM-SS} \Leftrightarrow \text{FM-ES1} \nRightarrow \text{FM-AS}.$$

2.5.2 Cas du modèle de Roesser

Une seule implication a été étudiée dans [31] pour le modèle de Roesser :

$$\text{R-ES1} \Rightarrow \text{R-AS}.$$

Cependant la démonstration détaille seulement la propriété de stabilité. Afin d'être complet, nous détaillons ici la preuve pour l'attractivité. (voir aussi la remarque 2.3).

Proposition 2.14. Si le modèle de Roesser (R-DL) est R-ES1, alors il est aussi R-AS.

Preuve 2.4. Nous devons montrer que pour des conditions initiales telles que $\lim_{i\to\infty} \Psi_i^h = \lim_{i\to\infty} \Psi_i^v = 0$, nous avons $\lim_{i+j\to\infty} x_{i,j} = 0$.
Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $i + j \geqslant N \Rightarrow \|x_{i,j}\| \leqslant \epsilon$.
Supposons R-ES1, alors il existe $M > 0$ et $q \in]0, 1[$ tels que pour toutes conditions initiales, nous avons :

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^h\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\|\Psi_k^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Par hypothèse, les suites $(\Psi_k^h)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\Psi_k^v)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 (en particulier elles sont bornées donc $\left\|\Psi^h\right\|_\infty$ et $\|\Psi^v\|_\infty$ sont des quantités finies).
Ainsi, il existe $(K_0, K_1) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\forall k \geqslant K_0$, $\left\|\Psi_k^h\right\| \leqslant \varepsilon$ et $\forall k \geqslant K_1$, $\|\Psi_k^v\| \leqslant \varepsilon$.
Si l'on pose $K_2 := \max(K_0, K_1)$, alors $\forall k \geqslant K_2$, $\left\|\Psi_k^h\right\| \leqslant \varepsilon$ et $\|\Psi_k^v\| \leqslant \varepsilon$.
Soit $K_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant K_3$, $q^K \leqslant \varepsilon$.
Nous allons montrer que si $i + j \geqslant 2[(K_2 + K_3) + 1]$ alors $\|x_{i,j}\| \leqslant \varepsilon$.
Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $i + j \geqslant 2[(K_2 + K_3) + 1]$, alors on a soit $i \geqslant K_2 + K_3 + 1$, soit $j \geqslant K_2 + K_3 + 1$.
Nous allons seulement considérer le cas où $i \geqslant K_2 + K_3 + 1$, le deuxième cas étant symétrique.
On a :

$$\begin{aligned}
\|x_{i,j}\| &\leqslant M q^{i+j} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^h\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{K_2-1} \frac{\|\Psi_k^v\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=K_2}^{i} \frac{\|\Psi_k^v\|}{q^{k+1}} \right) \\
&\leqslant M q^{i+j} \left(\left\|\Psi^h\right\|_\infty \underbrace{\sum_{k=0}^{j} \frac{1}{q^{k+1}}}_{s_1(k)} + \|\Psi^v\|_\infty \underbrace{\sum_{k=0}^{K_2-1} \frac{1}{q^{k+1}}}_{s_2(k)} + \varepsilon \underbrace{\sum_{k=K_2}^{i} \frac{1}{q^{k+1}}}_{s_3(k)} \right).
\end{aligned}$$

Or

$$s_1(k) = \frac{(\frac{1}{q}) - (\frac{1}{q})^{j+2}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{(\frac{1}{q}) - (\frac{1}{q})^{j+2}}{\frac{q-1}{q}} = \frac{q^{-j-1} - 1}{1 - q} \leqslant \frac{q^{-j-1}}{1 - q}.$$

De même,

$$s_2(k) = \frac{(\frac{1}{q}) - (\frac{1}{q})^{K_2+1}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q^{-K_2} - 1}{1 - q} \leqslant \frac{q^{-K_2}}{1 - q},$$

et

$$s_3(k) = \frac{(\frac{1}{q})^{K_2} - (\frac{1}{q})^{i+2}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q^{-i-1} - q^{-K_2+1}}{1 - q}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|x_{i,j}\| &\leqslant \frac{Mq^{i+j}}{1-q}\left(\left\|\Psi^h\right\|_\infty q^{-j-1} + \|\Psi^v\|_\infty q^{-K_2} + \varepsilon(q^{-i-1} - q^{-K_2+1})\right)\\ &\leqslant \frac{M}{1-q}\left(\left\|\Psi^h\right\|_\infty \underbrace{q^{i-1}}_{\substack{\leqslant\varepsilon\\ \text{car } i-1\geqslant K_3}} + \|\Psi^v\|_\infty \underbrace{q^{i+j-K_2}}_{\substack{\leqslant\varepsilon\\ \text{car } i+j-K_2\geqslant K_3}} + \varepsilon \underbrace{(q^{j-1} - q^{i+j-K_2+1})}_{\leqslant 2}\right)\\ &\leqslant \frac{M}{1-q}\left(\left\|\Psi^h\right\|_\infty \varepsilon + \|\Psi^v\|_\infty \varepsilon + 2\varepsilon\right). \square\end{aligned}$$

Remarque 2.9. Cette démonstration reste valable dans le cas d'un modèle de Roesser non-linéaire (R-D). En effet, elle fait seulement intervenir les définitions de stabilité et les conditions initiales, et non la matrice (ou fonction dans le cas non-linéaire) définissant le modèle.

2.6 Nouvelles relations pour le modèle de Fornasini-Marchesini

Le seul lien manquant est d'établir que : FM-ES1 $\Leftrightarrow$ FM-ES2.

Proposition 2.15. Si le modèle de Fornasini-Marchesini linéaire (FM-DL) est FM-ES1, alors il est aussi FM-ES2.

Preuve 2.5. Supposons que (FM-DL) est FM-ES1. Il existe $M > 0$ et $q \in]0,1[$ tels que (2.3) soit vérifiée. Considérons des conditions initiales exponentiellement décroissantes, c'est à dire telles qu'il existe $\bar{M} > 0$ et $\bar{q} \in]0,1[$ tels que

$$\left\|\Psi_j^{(1)}\right\| \leqslant \bar{M}\bar{q}^j \text{ et } \left\|\Psi_i^{(2)}\right\| \leqslant \bar{M}\bar{q}^i.$$

D'après (2.3), nous avons :

$$\begin{aligned}\|x_{i,j}\| &\leqslant M\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{\left\|\Psi_k^{(1)}\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i}\frac{\left\|\Psi_k^{(2)}\right\|}{q^{k+1}}\right)q^{i+j}\\ &\leqslant M\bar{M}\left(\sum_{k=0}^{i}\frac{\bar{q}^k}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{j}\frac{\bar{q}^k}{q^{k+1}}\right)q^{i+j}\\ &\leqslant \frac{M\bar{M}}{q}\left(\sum_{k=0}^{i}(\frac{\bar{q}}{q})^k + \sum_{k=0}^{j}(\frac{\bar{q}}{q})^k\right)q^{i+j}\end{aligned}$$

- **premier cas** : $\bar{q} = q$, alors

$$\|x_{i,j}\| \leqslant \frac{M\bar{M}}{q}\left((i+1)+(j+1)\right)q^{i+j} = \frac{M\bar{M}}{q}(i+1)q^iq^j + \frac{M\bar{M}}{q}(j+1)q^iq^j$$

Si l'on prend $\hat{q}$ tel que $0 < q < \hat{q} < 1$, alors
$(i+1)(\frac{q}{\hat{q}})^i \underset{i\to+\infty}{\to} 0$ donc la suite $\left((i+1)(\frac{q}{\hat{q}})^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Ainsi, il existe $\tilde{M} > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $(i+1)q^i \leqslant \tilde{M}\hat{q}^i$.
On a donc, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned}\|x_{i,j}\| &\leqslant \frac{M\bar{M}\tilde{M}}{q}\hat{q}^i q^j + \frac{M\bar{M}\tilde{M}}{q} q^i \hat{q}^j \\ &\leqslant \underbrace{2\frac{M\bar{M}\tilde{M}}{q}}_{:=\hat{M}} \hat{q}^{i+j}.\end{aligned}$$

- **deuxième cas** : $\bar{q} \neq q$, on pose $\hat{q} := \max(q, \bar{q})$.
  Alors :

$$\begin{aligned}\|x_{i,j}\| &\leqslant \frac{M\bar{M}}{q}\left(\frac{1-(\frac{\bar{q}}{q})^{i+1}}{1-\frac{\bar{q}}{q}} + \frac{1-(\frac{\bar{q}}{q})^{j+1}}{1-\frac{\bar{q}}{q}}\right) q^{i+j} \\ &\leqslant \frac{M\bar{M}}{q-\bar{q}}\left(2 - (\frac{\bar{q}}{q})^{i+1} - (\frac{\bar{q}}{q})^{j+1}\right) q^{i+j} \\ &\leqslant \frac{M\bar{M}}{q-\bar{q}}\left(2q^{i+j} + (\frac{\bar{q}}{q})\bar{q}^i q^j + (\frac{\bar{q}}{q})q^{\bar{j}}q^i\right) \\ &\leqslant \frac{M\bar{M}}{q-\bar{q}}\left(2\hat{q}^{i+j} + 2(\frac{\bar{q}}{q})\hat{q}^{i+j}\right) \\ &\leqslant \underbrace{\frac{M\bar{M}}{q-\bar{q}}\left(2 + 2(\frac{\bar{q}}{q})\right)}_{:=\hat{M}} \hat{q}^{i+j}.\end{aligned}$$

Dans les deux cas, nous avons donc FM-ES2. □

Remarque 2.10. De nouveau, cette démonstration reste valable dans le cas non-linéaire (FM-D), car elle ne dépend pas de la structure du modèle, mais seulement des définitions de stabilité.

Proposition 2.16. Si le modèle de Fornasini-Marchesini linéaire (FM-DL) est FM-ES2, alors il est aussi FM-ES1.

Preuve 2.6. Supposons que (FM-DL) est FM-ES2.
Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, considérons les conditions initiales définies par :

$$\hat{\Psi}_i^{(2)} = 0 \ \forall i \in \mathbb{N} \text{ et } \hat{\Psi}_i^{(1)} = \begin{cases} e_k \text{ si } i = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} \tag{2.13}$$

Cela représente une famille de n couples de conditions initiales.
D'après la proposition 1.7, pour chaque couple de conditions initiales la solution associée est donnée par

$$x_{i+1,j+1} = U_{i,j} A e_k.$$

Par ailleurs, ces conditions initiales, définies par (2.13), sont toutes à décroissance exponentielle car leur support est fini. Autrement dit, elles vérifient (2.6). Par hypothèse, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $M_k > 0$, $q_k \in]0, 1[$, tels que pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i+1,j+1}\| = \|U_{i,j} A e_k\| \leqslant M_k q_k^{i+j} \leqslant M q^{i+j},$$

avec $M = \max(M_1, \ldots, M_n)$ et $q = \max(q_1, \ldots, q_n)$.
Ainsi chaque colonne de la matrice $U_{i,j}A$ est un vecteur dont la norme est à décroissance exponentielle. Le maximum des normes des colonnes d'une matrice étant une norme matricielle, par équivalence des normes en dimension finie, si $|||.|||$ est la norme subordonnée à $\|.\|$, alors il existe $M' > 0$ tel que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$:

$$|||U_{i,j} A||| \leqslant M' q^{i+j}.$$

Par symétrie de la formule (FM-Sol1), en échangeant les rôles de $\Psi^{(1)}$ et $\Psi^{(2)}$ et en effectuant exactement le même raisonnement, on obtient également la majoration :

$$|||U_{i,j} B||| \leqslant M' q^{i+j}.$$

Comme la suite $U_{i,j}$ ne dépend pas des conditions initiales (voir la proposition 1.7), nous allons pouvoir utiliser ces deux majorations pour la solution associée à des conditions initiales quelconques.
Considérons à présent, pour le même modèle, des conditions initiales quelconques : $\Psi_j^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$. D'après la formule (FM-Sol1), nous avons :

$$\begin{aligned}
\|x_{i,j}\| &\leqslant \sum_{k=0}^{j-1} |||U_{i-1,k} A||| \left\|\Psi_{j-k}^{(1)}\right\| + \sum_{k=0}^{i-1} |||U_{k,j-1} B||| \left\|\Psi_{i-k}^{(2)}\right\|, \\
&\leqslant M' \left(\sum_{k=0}^{j-1} q^{i+k-1} \left\|\Psi_{j-k}^{(1)}\right\| + \sum_{k=0}^{i-1} q^{j+k-1} \left\|\Psi_{i-k}^{(2)}\right\| \right), \\
&\leqslant M' \left(\sum_{k=1}^{j} \left\|\Psi_{k}^{(1)}\right\| q^{i+j-k-1} + \sum_{k=1}^{i} \left\|\Psi_{k}^{(2)}\right\| q^{i+j-k-1} \right), \\
&\leqslant M' \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_{k}^{(1)}\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\left\|\Psi_{k}^{(2)}\right\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j},
\end{aligned}$$

ce qui correspond à la définition de FM-ES1 et conclut la preuve. □

Remarque 2.11. Nous avons ici fait le choix d'écrire deux propositions 2.15 et 2.16 plutôt qu'une seule qui parle d'équivalence entre FM-ES1 et FM-ES2 car, comme souligné par la remarque 2.10, la proposition 2.15 reste valable dans le cas non-linéaire tandis que la proposition 2.15 n'est vraie que dans le cas linéaire.

Ainsi, dans le cas des modèles de Fornasini-Marchesini linéaires FM-DL, les notions de stabilité exponentielles FM-ES1 et FM-ES2 coïncident. Ce résultat est important car, en pratique, il permet d'utiliser la définition 2.6 qui est relativement plus facile à vérifier, tout en garantissant que cette propriété implique bien la stabilité asymptotique. En effet, à notre connaissance, il n'a jamais été démontré que cette propriété de stabilité exponentielle implique ni la stabilité, ni l'attractivité. Mais, dans le cadre des modèles linéaires, étant équivalente à FM-ES1 qui elle même implique FM-AS, c'est désormais le cas.

2.7 Nouvelles relations pour le modèle de Roesser

Nous voulons démontrer que les liens entre les différentes notions de stabilité sont les mêmes lorsque l'on travaille avec un modèle de Roesser. Le résultat principal de ce chapitre peut être résumé comme suit :

$$\text{R-AS} \not\Leftarrow \text{R-SS} \Leftrightarrow \text{R-ES1} \Leftrightarrow \text{R-ES2}.$$

Cette formulation concise se traduit de façon plus explicite par le théorème suivant :

Théorème 2.17. Pour un modèle de Roesser 2D linéaire (R-DL), R-SS, R-ES1, et R-ES2 sont équivalentes. Elles impliquent toutes R-AS mais R-AS n'implique pas R-ES1, R-ES2 ni R-SS.

Nous allons établir ce résultat en passant régulièrement du modèle de Roesser (R-DL) au modèle de Fornasini-Marchesini (FMA-DL) qui lui est associé et en utilisant les résultats précédemment démontrés.

Proposition 2.18. Si le modèle linéaire de Roesser (R-DL) est R-SS, alors il est aussi R-ES1.

Preuve 2.7. Nous allons montrer les implications suivantes :

$$\text{R-SS} \Rightarrow \text{FM-SS} \Rightarrow \text{FM-ES1} \Rightarrow \text{R-ES1}.$$

Supposons que (R-DL) est structurellement stable. D'après (2.8), cela signifie que pour $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\mu| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} &\det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \mu A_{21} & \mu A_{22} \end{pmatrix}\right) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \det\left(I_{n_1+n_2} - \lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right) \neq 0. \end{aligned}$$

Cela montre que le modèle de Fornasini-Marchesini associé (FMA-DL) est également structurellement stable et, par l'équivalence donnée dans la section 2.5.1, également FM-ES1. D'après (2.2), il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$ tels que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^{(1)}\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\left\|\Psi_k^{(2)}\right\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}. \tag{2.14}$$

Cette inégalité est vérifiée quelles que soient les conditions initiales. En particulier, elle est vérifiée avec $\Psi_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \Psi_j^h \\ 0_{n_2} \end{pmatrix}$ et $\Psi_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0_{n_1} \\ \Psi_i^v \end{pmatrix}$. Par équivalence des normes en dimension finie, il existe un couple $(\alpha, \alpha') \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$ tel que

$$\left\|\Psi_j^h, 0_{n_2}\right\| \leqslant \alpha \left\|\Psi_j^h, 0_{n_2}\right\|_2 \leqslant \alpha \left\|\Psi_j^h\right\|_2 \leqslant \alpha\alpha' \left\|x_{0,j}^h\right\|.$$

En écrivant le même type d'inégalité avec $\Psi_i^{(2)}$, d'après (2.14), il vient

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M\alpha\alpha' \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^h\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\|\Psi_k^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

ce qui montre que (R-DL) est R-ES1. □

Proposition 2.19. Si le modèle de Roesser linéaire (R-DL) est R-ES1, alors il est aussi R-ES2.

Preuve 2.8. La démonstration est similaire à celle de la proposition 2.15. □

Proposition 2.20. Si le modèle de Roesser linéaire (R-DL) est R-ES1, alors il est aussi R-SS.

Preuve 2.9. Nous allons montrer les implications suivantes :

$$\text{R-ES1} \Rightarrow \text{R-ES2} \Rightarrow \text{FM-ES2} \Rightarrow \text{FM-ES1} \Rightarrow \text{FM-SS} \Rightarrow \text{R-SS}.$$

Supposons que (R-DL) is R-ES1. D'après la proposition 2.19, il est aussi R-ES2. Cela signifie que pour toutes conditions initiales exponentiellement décroissantes, Ψ_j^h, Ψ_i^v, *i.e.*, telles qu'il existe $q \in]0,1[$ et $M > 0$ tels que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left\|\Psi_j^h\right\| \leqslant Mq^j, \quad \|\Psi_i^v\| \leqslant Mq^i,$$

alors il existe $\tilde{q} \in]0,1[$ et $\tilde{M} > 0$ tels que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|x_{i,j}\| \leqslant \tilde{M}\tilde{q}^{i+j}.$$

Rappelons que pour le modèle de Fornasini-Marchesini associé (FMA-DL), les conditions initiales sont données par $\Psi_j^{(1)} = \begin{pmatrix} \Psi_j^h \\ x_{0,j}^v \end{pmatrix}$ et $\Psi_i^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{i,0}^h \\ \Psi_i^v \end{pmatrix}$ et nous avons

$$\left\|\Psi_j^h\right\| \leqslant \alpha \left\|\Psi_j^{(1)}\right\| \text{ et } \|\Psi_i^v\| \leqslant \alpha' \left\|\Psi_i^{(2)}\right\|,$$

pour un certain couple (α, α') de $(\mathbb{R}_+^\star)^2$ (avec l'abus de notation de noter par le même symbole $\|.\|$ la norme d'éléments de $\mathbb{C}^{n_1}$, $\mathbb{C}^{n_2}$ et $\mathbb{C}^n$).

En effet, pour tous vecteurs $x \in \mathbb{C}^{n_1}$, $y \in \mathbb{C}^{n_2}$, et le vecteur concaténé $(x^T, y^T)^T$ de $\mathbb{C}^n$, nous avons : $\|x\|_\infty \leqslant \left\|(x^T, y^T)^T\right\|_\infty$ et $\|x\| \leqslant \alpha \left\|(x^T, y^T)^T\right\|$ toujours par équivalence des normes en dimension finie, et la deuxième inégalité par le même raisonnement.

Ceci implique que (FMA-DL) est FM-ES2 ce qui donne FM-ES1 d'après la proposition 2.16 et FM-SS d'après la section 2.5.1. Cela signifie que pour tous $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\mu| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} &\det\left(I_n - \lambda\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow\ &\det\left(I_{n_1+n_2} - \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} \\ \mu A_{21} & \mu A_{22} \end{pmatrix}\right) \neq 0, \end{aligned}$$

ce qui, d'après la proposition 2.9, est exactement la définition de R-SS. □

Proposition 2.21. Si le modèle de Roesser linéaire (R-DL) est R-ES2, alors il est aussi R-ES1.

Preuve 2.10. Ce résultat provient des implications précédemment démontrées : R-ES2 ⇒ FM-ES2 ⇒ FM-SS ⇒ R-SS ⇒ R-ES1. □

Proposition 2.22. Pour le modèle de Roesser linéaire (R-DL), R-AS n'implique pas R-SS.

Preuve 2.11. Il suffit de produire un contre-exemple. Considérons le modèle de Roesser :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{pmatrix}, \\ \\ (\Psi^h, \Psi^v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2. \end{cases} \tag{2.15}$$

Observons tout d'abord que ce modèle n'est pas R-SS car pour $\lambda = \mu = 1$,

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} = 0.$$

Pour ce modèle particulier (2.15), la solution est donnée par : pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$x^h_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{i+k-1}{k} \frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+k}} + \sum_{k=0}^{i-1} \binom{j+k}{k} \frac{\Psi^v_{i-1-k}}{2^{k+j+2}}, \tag{2.16}$$

$$x^v_{i,j} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{i+k}{k} \frac{\Psi^h_{j-k-1}}{2^{i+k}} + \sum_{k=0}^{i} \binom{j+k-1}{k} \frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{k+j}}. \tag{2.17}$$

Pour le voir, il suffit de montrer que les relations de récurrence données par (2.15) sont satisfaites par $x^h_{i,j}$ et $x^v_{i,j}$ donnés respectivement par les formules (2.16) et (2.17). Nous avons d'une part :

$$x^h_{i+1,j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{i+k}{k} \frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+1+k}} + \sum_{k=0}^{i} \binom{j+k}{k} \frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{j+2+k}}.$$

Et d'autre part, en utilisant la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x^h_{i,j} + \frac{1}{4}x^v_{i,j} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{j}\binom{i-1+k}{k}\frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+k}} + \sum_{k=0}^{i-1}\binom{j+k}{k}\frac{\Psi^v_{i-1-k}}{2^{j+2+k}}\right)\\
&\quad + \frac{1}{4}\left(\sum_{k=0}^{j-1}\binom{i+k}{k}\frac{\Psi^h_{j-k-1}}{2^{i+k}} + \sum_{k=0}^{i}\binom{j+k-1}{k}\frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{j+k}}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{j}\binom{i-1+k}{k}\frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+1+k}} + \sum_{k=0}^{j-1}\binom{i+k}{k}\frac{\Psi^h_{j-1-k}}{2^{i+2+k}}\\
&\quad + \sum_{k=0}^{i-1}\binom{j+k}{k}\frac{\Psi^v_{i-1-k}}{2^{j+3+k}} + \sum_{k=0}^{i}\binom{j-1+k}{k}\frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{j+2+k}}\\
&= \sum_{k=1}^{j}\binom{i-1+k}{k}\frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+1+k}} + \frac{\Psi^h_j}{2^{i+1}} + \sum_{k=1}^{j}\binom{i-1+k}{k-1}\frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+1+k}}\\
&\quad + \sum_{k=1}^{i}\binom{j-1+k}{k-1}\frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{j+2+k}} + \sum_{k=1}^{i}\binom{j-1+k}{k}\frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{j+2+k}} + \frac{\Psi^v_i}{2^{j+2}}\\
&= \sum_{k=1}^{j}\binom{i+k}{k}\frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+1+k}} + \frac{\Psi^h_j}{2^{i+1}} + \sum_{k=1}^{i}\binom{j+k}{k-1}\frac{\Psi^v_{i-k}}{2^{j+2+k}} + \frac{\Psi^v_i}{2^{j+2}}\\
&= x^h_{i+1,j}.
\end{aligned}$$

Le même type de calcul permet d'établir (2.17).

Nous allons à présent montrer que ce modèle est R-AS en montrant que le point d'équilibre zéro est attractif (voir la remarque 2.3).
Nous allons uniquement montrer que $\lim_{i+j\to+\infty}|x^h_{i,j}| = 0$, le même raisonnement peut être utilisé pour montrer que $\lim_{i+j\to+\infty}|x^v_{i,j}| = 0$.
Nous avons

$$|x^h_{i,j}| \leqslant |\underbrace{\sum_{k=0}^{j}\binom{i+k-1}{k}\frac{\Psi^h_{j-k}}{2^{i+k}}}_{:=S^1_{i,j}}| + |\underbrace{\sum_{k=0}^{i-1}\binom{j+k}{k}\frac{\Psi^v_{i-1-k}}{2^{k+j+2}}}_{:=S^2_{i,j}}|.$$

Nous allons montrer que $S^1_{i,j}$ converge vers 0 quand $i+j \to +\infty$, le même raisonnement peut être utilisé pour montrer que $S^2_{i,j}$ converge vers 0 quand $i+j \to +\infty$, et le résultat sera établi.
Par hypothèse, Ψ^h_j tend vers 0 quand $j \to +\infty$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant N_0$, on a $|\Psi^h_j| < \varepsilon$.

Supposons que $i \geqslant N_0$ et $j \geqslant N_0$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|S^1_{i,j}| &\leqslant \frac{1}{2^i}\sum_{k=0}^{j}\binom{i+k-1}{k}\frac{1}{2^k}|\Psi^h_{j-k}| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}\sum_{k=0}^{j-N_0}\binom{i+k-1}{k}\frac{1}{2^k} + \frac{\left\|\Psi^h\right\|_\infty}{2^i}\sum_{k=j-N_0+1}^{j}\binom{i+k-1}{k}\frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{i+k-1}{k}\frac{1}{2^k}}_{=\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^i}} + \frac{\left\|\Psi^h\right\|_\infty}{2^i}\sum_{k=j-N_0+1}^{j}\binom{i+k-1}{k}\frac{1}{2^k}, \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\left\|\Psi^h\right\|_\infty}{2^i}\sum_{k=j-N_0+1}^{j}\binom{i+k-1}{k}\frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Il reste à voir que le deuxième terme peut être aussi petit que l'on veut quand i et j tendent vers $+\infty$.
En utilisant les propriétés suivantes des coefficients binomiaux, pour tout $k \leqslant j$:

$$\binom{i+k-1}{k} \leqslant \binom{i+k}{k} \leqslant \binom{i+j}{i} \leqslant \binom{i+j}{\lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor},$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
|S^1_{i,j}| &\leqslant \varepsilon + \frac{\left\|\Psi^h\right\|_\infty}{2^i}\binom{i+j}{i}\sum_{k=j-N_0+1}^{j}\frac{1}{2^k} \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{\left\|\Psi^h\right\|_\infty}{2^i}\binom{i+j}{i}\frac{2^{N_0}}{2^j} \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{2^{N_0}\left\|\Psi^h\right\|_\infty}{2^{i+j}}\binom{i+j}{\lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor}.
\end{aligned}$$

Finalement, en appliquant la formule de Stirling, il vient, pour $n = i + j$:

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.$$

Ainsi, $S^1_{i,j}$ converge vers 0 quand i et j tendent vers $+\infty$ (le cas où seulement l'un des deux indices i ou j est plus grand que N_0 se traite d'un façon similaire).
Par conséquent le modèle (2.15) est attractif, donc R-AS mais il n'est pas R-SS. □

2.8 Simulations

Dans ce paragraphe, nous allons illustrer graphiquement la différence entre la stabilité structurelle et la stabilité asymptotique pour le modèle de Roesser 2D discret linéaire. Dans ce but, nous pouvons simuler le comportement des solutions du modèle (2.15). Nous choisissons tout d'abord des conditions initiales qui tendent asymptotiquement vers 0 : $\Psi_j^h = \Psi_j^v = \frac{1}{j+1}$.

Rappelons que ce modèle n'est pas structurellement stable (et ainsi non exponentiellement stable) mais il est asymptotiquement stable. Nous pouvons observer sur la figure 1 la convergence de $\|x_{i,j}\|_2$ vers l'origine. Cette convergence est très lente, à une vitesse de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{i}}$, comme illustré sur la figure 2 dans la direction particulière $i = j$.

Comme ce modèle n'est pas structurellement stable, nous pouvons voir que l'hypothèse de convergence vers zéro faite sur les conditions initiales est cruciale pour le comportement asymptotique de la trajectoire $x_{i,j}$ associée. Avec des conditions initiales constantes $x_{0,j}^h = x_{j,0}^v = 1$, nous pouvons voir sur la figure 3 que dans la direction $i = j$, $\|x_{i,i}\|$ ne tend pas vers 0.

Cette situation ne peut pas se produire lorque le modèle est stable structurellement. Considérons par exemple le modèle de Roesser linéaire défini par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

La stabilité structurelle est garantie car pour tout couple (λ, μ) de nombres complexes tel que $|\lambda| \geqslant 1$ et $|\mu| \geqslant 1$, on a :

$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} - A\right) = (\lambda - 1/3)(\mu - 1/2) \neq 0.$$

Pour ce modèle, même si l'on choisit des conditions initiales divergentes comme par exemple $\Psi_j^h = (1, 01)^j$ et $\Psi_i^v = (1, 03)^i$, $\|x_{i,j}\|$ décroît rapidement, lorsque l'on s'éloigne des conditions initiales, quand i et j sont suffisamment grands comme nous pouvons le voir sur la figure 4.

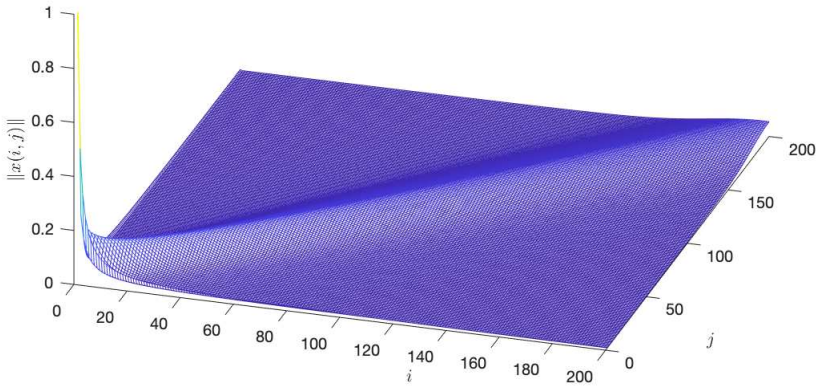


Figure 1: Convergence lente de $\|x_{i,j}\|_2$ pour le modèle de Roesser (2.15) sur 200×200 points avec des conditions initiales qui tendent vers 0.

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié quatre notions de stabilité qui sont fréquemment utilisées dans la littérature des modèles 2D discrets : stabilité asymptotique, deux définitions de stabilité exponentielle, et la stabilité structurelle. Le résultat principal réside ici dans le fait que la stabilité exponentielle et la stabilité structurelle sont des notions équivalentes, que ce soit pour les modèles de Roesser ou pour les modèles de Fornasini-Marchesini. De plus, elles impliquent toutes la stabilité asymptotique. La stabilité asymptotique, quant à elle, est une notion plus faible dans le sens où elle n'implique aucune des trois autres, même si l'on se restreint au cas linéaire. Le cas 2D est donc assez différent du cas 1D, où l'on trouve, dans le cas linéaire, l'équivalence entre la stabilité asymptotique et la stabilité exponentielle (voir la proposition 1.5).

Dans le prochain chapitre, nous allons étudier plus en détail la stabilité asymptotique dans le cas des modèles de Fornasini-Marchesini linéaires.

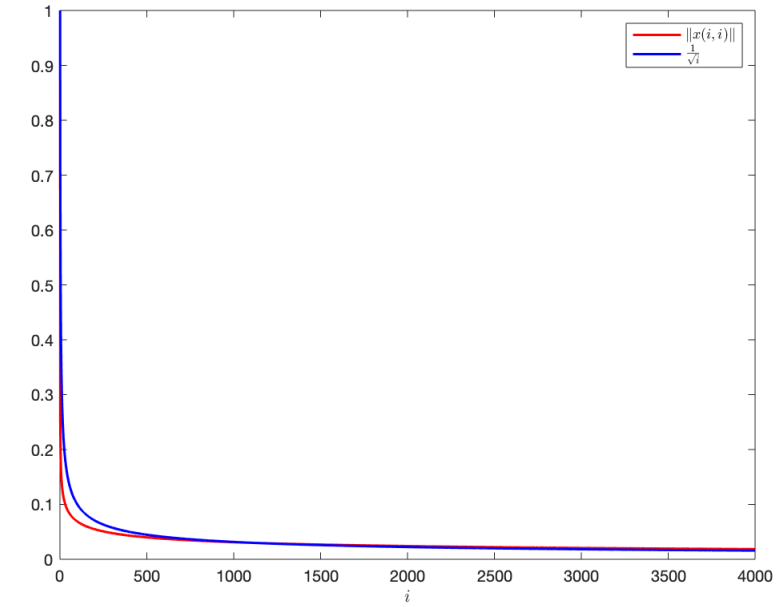


Figure 2: Comparaison, pour le modèle de Roesser (2.15), entre la vitesse de convergence de $\|x_{i,i}\|_2$ et $\frac{1}{\sqrt{i}}$ sur 4000 points avec des conditions initiales qui tendent vers 0.

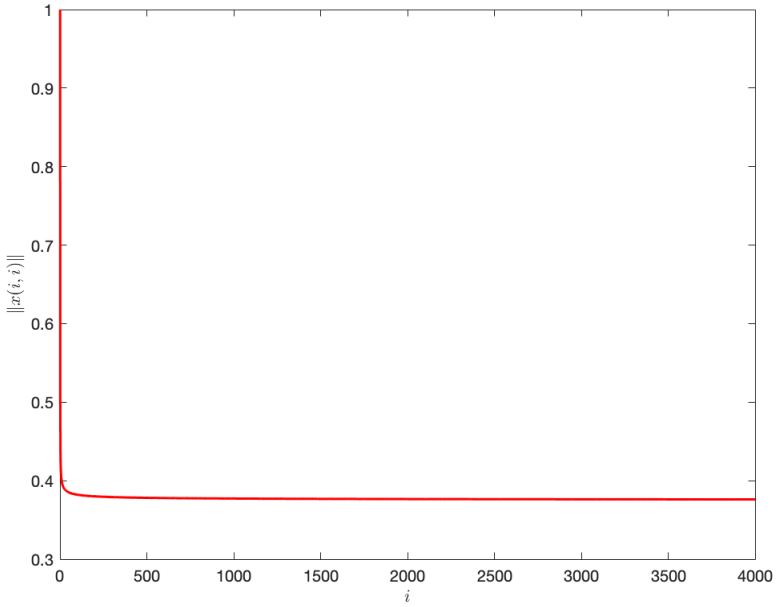


Figure 3: $\|x_{i,i}\|_2$ pour le modèle de Roesser (2.15) quand les conditions initiales ne tendent pas vers 0 sur 4000 points.

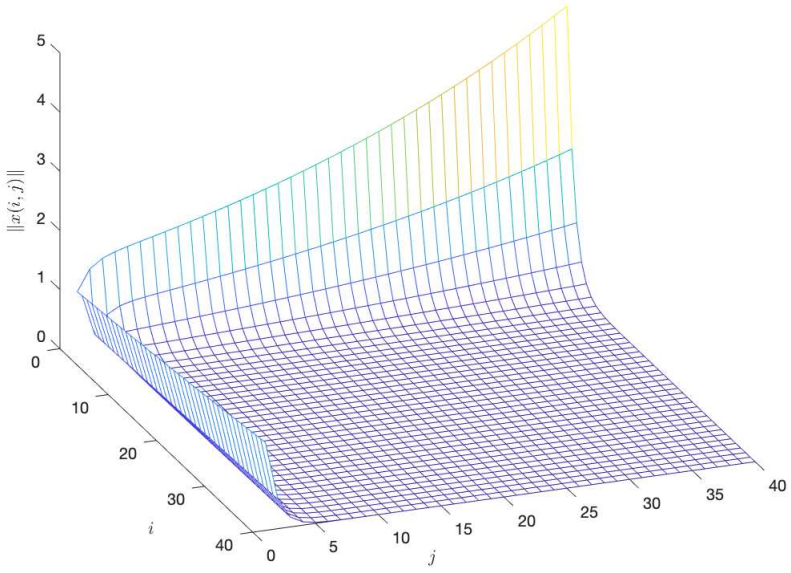


Figure 4: $\|x_{i,j}\|_2$ pour le modèle de Roesser structurellement stable (2.18) quand les conditions initiales ne tendent pas vers 0 sur 40×40 points.

3 Chapitre 3 : Condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour les modèles de Fornasini-Marchesini linéaires

3.1 Introduction

Habituellement, la stabilité d'un modèle 2D linéaire discret que l'on étudie est la stabilité que nous avons qualifiée de stabilité structurelle dans le chapitre précédent. Nous avons vu que la stabilité structurelle implique la stabilité asymptotique mais que, contrairement au cas 1D, la réciproque n'est pas vérifiée [29]. L'étude directe de la stabilité asymptotique est rarement proposée dans la littérature car on a l'habitude de tester la stabilité structurelle en premier lieu [43, 52]. Lorsque l'on aborde la question de la stabilité asymptotique, l'approche de Lyapunov est la méthode préférée [31, 53, 37]. Même si cette approche très puissante permet de traiter aussi le cas non-linéaire, son principal inconvénient est qu'elle donne seulement une condition suffisante de stabilité asymptotique.
Une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique a été établie dans le cas d'un modèle de Fornasini-Marchesini scalaire, puis étendue au cas matriciel dans [54]. Cependant, dans le cas matriciel, il y a une erreur dans la démonstration de la Proposition 4.1 de l'article [54]. La condition proposée est en réalité une condition suffisante, et nous proposerons un contre-exemple à cette proposition en annexe C.
C'est l'article [54] qui a inspiré ce chapitre. L'idée est donc de proposer, dans le cas des modèles 2D linéaires discrets de Fornasini-Marchesini matriciels, une condition qui soit bien équivalente à la stabilité asymptotique. En ayant la volonté, dans un premier temps, de proposer un simple correctif à la démonstration citée précédemment, l'exploration de ce cas matriciel s'est avérée plus complexe qu'attendu. En chemin, nous avons dû faire une concession, celle de se restreindre à une classe particulière de modèles de Fornasini-Marchesini.
Notre résultat se base sur le calcul des valeurs propres des deux matrices définissant le modèle. Cependant, nous devons faire une hypothèse très forte sur ces deux matrices, car elles doivent commuter et au moins l'une d'entre elles doit être supposée diagonalisable.

De façon intéressante, il y a une forte ressemblance entre ce résultat et le critère de stabilité au sens de Lyapunov dans le cas 1D linéaire que nous avons détaillé dans le premier chapitre. Il s'agit de la proposition 1.5. Cette notion de stabilité simple est, rappelons le, une notion plus faible que la stabilité asymptotique qui garantit en plus l'attractivité. Nous allons voir dans la section 3.3 que notre critère de stabilité asymptotique repose aussi sur la taille des blocs dans la réduction de Jordan des

matrices définissant le modèle. Cela souligne à nouveau que la notion de stabilité asymptotique des modèles 2D semble similaire, en termes de propriété du système, à la notion de stabilité simple dans le cas 1D [42].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : nous allons dans la section 3.2 rappeler des résultats qui ont été établis dans le cas d'un modèle de Fornasini-Marchesini discret linéaire 2D scalaire [54], et sur lesquels vont reposer l'étude du cas matriciel. Dans la partie 3.3, nous allons étudier le comportement asymptotique de la suite double $U_{i,j}$ de matrices qui apparaît dans l'expression explicite des solutions du modèle. En particulier, nous allons donner un résultat annexe qui nous sera utile pour la preuve du résultat principal de ce chapitre. Dans la partie 3.4 nous allons établir le résultat principal, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour les modèles de Fornasini-Marchesini linéaires que nous étudions dans ce document. Nous donnerons un exemple détaillé pour voir concrètement comment appliquer ce critère. Finalement, dans la partie 3.5 nous présenterons quelques simulations numériques pour illustrer le résultat.

3.2 Résultats préliminaires

Nous considérons dans ce chapitre le modèle 2D de Fornasini-Marchesini [15] linéaire discret (FM-DL) :

$$\begin{cases} x_{i+1,j+1} = A\,x_{i,j+1} + B\,x_{i+1,j}, \\ x_{0,j} = \Psi_j^{(1)}, \quad x_{i,0} = \Psi_i^{(2)}, \end{cases} \tag{FM-DL}$$

où $x_{i,j} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}^2}$, $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, et $\Psi_j^{(1)}$, $\Psi_i^{(2)} \in (\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}$ désignent les conditions initiales.

Rappelons à nouveau qu'il a été démontré dans [33] que le point d'équilibre d'un modèle linéaire 2D est asymptotiquement stable si et seulement s'il est attractif. Ainsi, afin de montrer la stabilité asymptotique dans ce contexte, nous pouvons nous contenter de montrer l'attractivité, voir la définition 2.2 pour ces notions.

Rappelons que dans le cas d'un modèle 2D linéaire discret de Fornasini-Marchesini scalaire, i.e, $n = 1$:

$$\begin{cases} x_{i+1,j+1} = a\,x_{i,j+1} + b\,x_{i+1,j}, \\ x_{0,j} = \Psi_j^{(1)}, \quad x_{i,0} = \Psi_i^{(2)}, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et les conditions initiales $\Psi_j^{(1)}$, $\Psi_i^{(2)} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, le résultat suivant a été établi dans [54] [Théorème 3.1 et remarque 4] :

Théorème 3.1. (3.1) est asymptotiquement stable si et seulement si :

1. $|a| + |b| \leqslant 1$ quand $a \neq 0$ et $b \neq 0$,
2. $|a| < 1$ quand $b = 0$,
3. $|b| < 1$ quand $a = 0$.

La démonstration de ce théorème utilise le résultat intermédiaire suivant :

Proposition 3.2. [[54], Proposition 3.2] La suite double scalaire définie par $u_{i,j} := \binom{i+j}{i} a^i b^j$ converge vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini si et seulement si (3.1) est asymptotiquement stable.

Notre but ici est de généraliser le théorème 3.1 au cas matriciel (FM-DL). Notre idée repose sur le fait que l'on peut donner une expression explicite des solutions de (FM-DL) comme somme de polynômes homogènes en A et B, comme décrit dans la section 1.3. Malheureusement, dans le cas général, la formule (FM-Sol2) semble inexploitable pour étudier la stabilité asymptotique. Cela dit, dans le cas particulier où A et B commutent, l'expression de la suite double $U_{i,j}$ définie par (1.2) devient beaucoup plus simple. En effet, dans ce cas, on a :

$$U_{i,j} := \binom{i+j}{i} A^i B^j, \tag{3.2}$$

qui est exactement la généralisation de la suite scalaire $u_{i,j}$ donnée dans la proposition 3.2. Ainsi, dans ce cas particulier, nous allons pouvoir exploiter la première expression (FM-Sol1) des solutions de (FM-DL) que nous réécrivons ici :

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2, \quad x_{i,j} = \sum_{s=0}^{j-1} U_{i-1,s}\, A\, \Psi^{(1)}_{j-s} + \sum_{s=0}^{i-1} U_{s,j-1}\, B\, \Psi^{(2)}_{i-s}. \tag{3.3}$$

Citons également deux résultats qui nous seront utiles dans la preuve du théorème 3.8.

Lemme 3.3. Soit $(w_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double telle que, pour tous i et j entiers naturels, $w_{i,j} = a_i b_j$ avec $a_i, b_j \geqslant 0$, $\quad a_i \underset{i\to+\infty}{\to} 0 \quad$ et $\quad b_j \underset{j\to+\infty}{\to} 0$, alors $w_{i,j} \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0$.

Preuve 3.1. Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un couple (N_1, N_2) d'entiers naturels tel que pour tout entier $i \geqslant N_1$, $a_i < \varepsilon$ et pour tout entier $j \geqslant N_2$, $b_j < \varepsilon$. Posons $N_0 := 2\max(N_1, N_2)$.
Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i+j \geqslant N_0$, on a : $i \geqslant \dfrac{N_0}{2}$ ou $j \geqslant \dfrac{N_0}{2}$.
Dans le premier cas, $i \geqslant N_1$ et donc $a_i < \varepsilon$. Par ailleurs b_j tend vers 0 quand j tend vers $+\infty$ et est donc bornée par un certain $M > 0$. Ainsi $w_{i,j} < M\varepsilon$ et le résultat est établi.
Le deuxième cas est symétrique. □

Lemme 3.4. [[48], p. 73] Pour toute suite double $(f_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ telle que $\lim\limits_{i+j\to+\infty} f_{i,j} = 0$, on a : $\quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum\limits_{s=j}^{j+N} f_{i,s} \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0.$

3.3 La suite double $U_{i,j}$

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement asymptotique de la suite $U_{i,j}$ définie par (3.2).

Remarquons que dans le cas scalaire, le critère de stabilité asymptotique concerne la somme des modules des coefficients a et b dans (3.1). Ceci va correspondre

aux modules des valeurs propres de A et B dans le cas matriciel (FM-DL). Nous allons voir que ce sont ces valeurs propres qui vont déterminer le comportement asymptotique de la quantité $U_{i,j}$, mais la difficulté principale est ici de trouver un moyen «d'ordonner» ces valeurs propres. Nous allons donc effectuer des réductions simultanées, c'est-à-dire dans une même base, des deux matrices A et B.
Nous effectuerons une diagonalisation simultanée dans le cas où les deux matrices sont diagonalisables ou une diagonalisation et une réduction de Jordan dans le cas où seulement l'une des deux matrices est diagonalisable. On peut sans perte de généralité supposer que c'est B car les matrices commutent. Rappelons que, par hypothèse, les matrices sont à coefficients dans le corps $\mathbb{C}$ algébriquement clos, et donc les polynômes caractéristiques étant scindés toute matrice admet une réduction de Jordan.
On pourrait avoir envie d'effectuer une réduction de Jordan simultanée des deux matrices dans le cas où aucune n'est diagonalisable. Malheureusement, ceci n'est en général pas possible, même dans le cas où les matrices commutent.
Ainsi, comme nous avons besoin d'effectuer une réduction simultanée de A et B d'une part, et comme, d'autre part, la formule (3.3) ne semble exploitable que dans le cas où A et B commutent, nous travaillerons dans la suite de ce chapitre sous hypothèse forte suivante :

Hypothèse 1. On considère un modèle de Fornasini-Marchesini (FM-DL) où les deux matrices A et B commutent et B est diagonalisable.

3.3.1 Cas où les deux matrices A et B commutent et sont toutes deux diagonalisables

Dans cette situation plus simple, comme A et B commutent, elles sont diagonalisables dans une même base. Plus précisément, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}\,A\,P = D_A$ et $P^{-1}\,B\,P = D_B$, avec $D_A := \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $D_B := \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivement $\mu_1, \ldots, \mu_n$, sont les valeurs propres respectives de A et B. Dans ce cas, pour tout i, $j \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$U_{i,j} = \binom{i+j}{i} P\,D_A^i\,D_B^j\,P^{-1}.$$

Par continuité des applications $M \mapsto P\,M\,P^{-1}$ et $M \mapsto P^{-1}\,M\,P$, il vient que $U_{i,j}$ tend vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini si et seulement si $\binom{i+j}{i} D_A^i\,D_B^j$ tend vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini. Ainsi, en utilisant la proposition 3.2, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.5. Si les deux matrices A et B commutent et sont diagonalisables, en utilisant les notations précédentes, la suite double $U_{i,j}$ définie par (3.2) tend vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

1. $|\lambda_k| + |\mu_k| \leqslant 1$ si $\lambda_k \neq 0$ et $\mu_k \neq 0$,
2. $|\lambda_k| < 1$ si $\mu_k = 0$,
3. $|\mu_k| < 1$ si $\lambda_k = 0$.

Remarque 3.1. Comme les matrices sont diagonalisables dans une même base, nous avons trouvé ici un moyen d'ordonner les (sommes de) valeurs propres ce qui est crucial pour énoncer le critère de stabilité asymptotique. Nous allons réutiliser cette stratégie de réduction simultanée dans le paragraphe suivant.

Remarque 3.2. Les conditions 2. and 3. garantissent que la suite $U_{i,j}$ converge sur les bords, *i.e.*, $i = 0$ et $j \to +\infty$ ou $j = 0$ et $i \to +\infty$.

3.3.2 Cas de l'hypothèse 1

3.3.3 Ordonner les valeurs propres de A et B

Comme discuté précédemment, cette étude est inspirée par la notion de stabilité simple dans le cas 1D. Pour un modèle linéaire 1D, c'est-à-dire $x_{i+1} = A\,x_i$, on effectue une réduction de Jordan de la matrice A afin d'obtenir une condition simple de stabilité, qui dépend du module des valeurs propres de A. Sous l'hypothèse 1, et dans le but d'avoir un critère similaire dans le cas 2D, nous allons donc effectuer une réduction de Jordan de la matrice A et une diagonalisation de la matrice B. Ceci va nous permettre de simplifier considérablement la forme des solutions données par la formule (3.3) qui dépend des valeurs de la double suite $U_{i,j}$ définie par (3.2). La difficulté repose sur le fait que les deux réductions, Jordanisation et diagonalisation doivent être effectuées dans la même base. Heureusement ceci est possible, comme établi dans la proposition suivante.

Proposition 3.6. Si deux matrices A et B satisfont l'hypothèse 1, alors il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = R\,J_A\,R^{-1}$ et $B = R\,D_B\,R^{-1}$, où J_A est une réduction de Jordan de la matrice A, et $D_B = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$, où les μ_k sont les valeurs propres de B.

Preuve 3.2. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres de B et $E_{\mu_1}, \ldots, E_{\mu_p}$ les sous-espaces propres associés de telle sorte que $\mathbb{C}^n = \oplus_{k=1}^{p} E_{\mu_k}$.
B étant supposée diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = P\,\mathrm{Diag}(B_1, \ldots, B_p)\,P^{-1}$ avec $B_k = \mu_k\,I_{n_k}$, où n_k désigne la multiplicité de la valeur propre μ_k.
Comme A et B commutent, les sous-espaces propres de B sont stables sous l'action de A ce qui implique $A = P\,\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_p)\,P^{-1}$ où chaque bloc A_k est de taille n_k.
Pour $k = 1, \ldots, p$, notons J_{A_k} la réduite de Jordan de A_k et $Q_k \in \mathrm{GL}_{n_k}(\mathbb{C})$ telle que $A_k = Q_k\,J_{A_k}\,Q_k^{-1}$.
Notons $J_A := \mathrm{Diag}(J_{A_1}, \ldots, J_{A_p})$ et $Q := \mathrm{Diag}(Q_1, \ldots, Q_p)$, ainsi nous avons $\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_p) = Q\,J_A\,Q^{-1}$ de telle sorte que $A = (P\,Q)\,J_A\,(P\,Q)^{-1}$. Par ailleurs, $B_k = \mu_k\,I_{n_k}$ implique $Q_k\,B_k\,Q_k^{-1} = B_k$ d'où $B = (P\,Q)\,\mathrm{Diag}(B_1, \ldots, B_p)\,(P\,Q)^{-1}$, ce qui donne le résultat, avec $R = P\,Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. □

Remarque 3.3. On pourrait se demander pourquoi avoir choisi de diagonaliser la matrice B puis d'effectuer une réduction de Jordan de la matrice A écrite dans la base qui diagonalise B plutôt que d'effectuer une réduction de Jordan de A et ensuite diagonaliser la matrice B écrite dans la base qui jordanise A puisque les sous-espaces caractéristiques de A sont eux aussi stables sous l'action de B. La

réduction simultanée ne fonctionne pas dans ce sens pour la raison suivante : si l'on écrit $A = PJ_AP^{-1}$ alors B' définie par $B = PB'P^{-1}$ est bien diagonale par blocs, et B' est bien diagonalisable, mais si Q est telle que $B' = QD_{B'}Q^{-1}$ alors QJ_AQ^{-1} n'a aucune raison d'être une matrice de Jordan.

Nous allons illustrer la proposition 3.6 et la remarque 3.3 par un exemple.

Exemple 3.1. Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord, nous pouvons vérifier que $AB = BA$, B est diagonalisable et A n'est pas diagonalisable.

◦ Dans un premier temps, nous allons effectuer la réduction simultanée dans le «bon» sens, c'est-à-dire que nous allons diagonaliser B et effectuer une réduction de Jordan de la matrice semblable à A dans la base qui diagonalise B.
On a :

$$B = PD_BP^{-1},$$

$$\text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_B = \mathrm{Diag}(-1, 1, 2, 2).$$

Puis :

$$A' := P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \\ & & & \end{pmatrix} = QJ_AQ^{-1},$$

$$\text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & & \\ & \boxed{1} & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & \\ & & & \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons alors vérifier, qu'en posant $R := PQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien :

$$B = RD_BR^{-1} \quad \text{et} \quad A = RJ_AR^{-1},$$

ce qui constitue la réduction simultanée donnée par la proposition 3.6.

◦ Dans un deuxième temps, et dans le but d'éclairer la remarque 3.3, nous allons tenter d'effectuer la réduction dans le «mauvais» sens, c'est-à-dire que nous allons effectuer une réduction de Jordan de A et diagonaliser la matrice semblable à B dans la base qui Jordanise A.
On a :

$$A = PJ_AP^{-1},$$

$$\text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \boxed{2} \end{pmatrix}.$$

Puis :

$$B' := P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \boxed{2} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \\ & & \boxed{-1} \end{pmatrix} = QD_BQ^{-1},$$

$$\text{avec} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Diag}(-1, 1, 2, 2).$$

Mais :

$$QJ_AQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas une matrice de Jordan.

3.3.4 Comportement asymptotique de la suite $U_{i,j}$

La proposition 3.6 nous permet donc d'ordonner les valeurs propres des deux matrices et de se reporter au cas scalaire pour determiner le comportement des solutions. Afin de clarifier l'énoncé du théorème suivant, nous réutilisons la notion de valeur propre semi-simple 1.4 que nous avons introduite au chapitre 1.

Théorème 3.7. Sous l'hypothèse 1 et en utilisant les notations de la preuve de la proposition 3.6, notons $\mu_1, \ldots, \mu_p$ les valeurs propres distinctes de B et, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,r_k}$ les valeurs propres de A_k. Alors $U_{i,j}$ converge vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

1. Si $\mu_k = 0$, alors $|\lambda_{k,l}| < 1$, pour tout $l \in [\![1, r_k]\!]$,
2. Si $\mu_k \neq 0$, alors :
   (a) si $\lambda_{k,l}$ est semi-simple, alors $|\mu_k| < 1$ dans le cas où $\lambda_{k,l} = 0$ et $|\lambda_{k,l}| + |\mu_k| \leqslant 1$ dans le cas où $\lambda_{k,l} \neq 0$,

(b) si $\lambda_{k,l}$ n'est pas semi-simple, alors $|\lambda_{k,l}| + |\mu_k| < 1$.

Avant de donner la preuve du théorème 3.7, illustrons les conditions 1 et 2 sur un exemple.

Exemple 3.2. Considérons le cas où

$$D_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mu_1 & & & & \\ & \mu_1 & & & \\ & & \mu_1 & & \\ & & & \mu_1 & \\ & & & & \mu_1 \end{matrix}} & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \mu_2 & & \\ & \mu_2 & \\ & & \mu_2 \end{matrix}} & \\ & & \end{pmatrix},$$

et

$$J_A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_{1,1} & 1 \\ & \lambda_{1,1} \end{matrix}} & & & & \\ & \boxed{\lambda_{1,2}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_{1,3} & 1 \\ & \lambda_{1,3} \end{matrix}} & & \\ & & & \boxed{\lambda_{2,1}} & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_{2,2} & 1 \\ & \lambda_{2,2} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Dans cette situation, nous avons $p = 2$, $n_1 = 5$, $n_2 = 3$, $r_1 = 3$, et $r_2 = 2$. Alors, la condition 1 du théorème 3.7 signifie que si $\mu_1 = 0$, alors on doit avoir $|\lambda_{1,1}| < 1$, $|\lambda_{1,2}| < 1$, et $|\lambda_{1,3}| < 1$.
Supposons maintenant que $\mu_1 \neq 0$ et remarquons que $\lambda_{1,2}$ est semi-simple contrairement à $\lambda_{1,1}$ et $\lambda_{1,3}$. La condition 2(a) implique donc que si $\lambda_{1,2} = 0$, alors on doit avoir $|\mu_1| < 1$ alors que si $\lambda_{1,2} \neq 0$, on doit avoir $|\lambda_{1,2}| + |\mu_1| \leqslant 1$.
D'autre part, la condition 2(b) impose $|\lambda_{1,1}| + |\mu_1| < 1$ et $|\lambda_{1,3}| + |\mu_1| < 1$. On peut procéder de la même façon avec μ_2, $\lambda_{2,1}$, et $\lambda_{2,2}$.

Preuve 3.3. Remarquons tout d'abord que, par continuité, $U_{i,j} \to 0$ quand $i+j \to +\infty$ si et seulement si $R^{-1}U_{i,j}R \to 0$ quand $i + j \to +\infty$. Par ailleurs, en utilisant la proposition 3.6, il vient :

$$R^{-1}\, U_{i,j}\, R = \binom{i+j}{i} J_A^i\, D_B^j = \binom{i+j}{i} \operatorname{Diag}(\mu_1^j\, J_{A_1}^i, \ldots, \mu_p^j\, J_{A_p}^i),$$

où $\mu_k^j\, J_{A_k}^i = \operatorname{Diag}(\mu_k^j\, J(\lambda_{k,1})^i, \ldots, \mu_k^j\, J(\lambda_{k,r_k})^i)$ et les $J(\lambda_{k,l})$ sont des blocs de Jordan. Par conséquent, $U_{i,j} \underset{i+j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $l \in [\![1, r_k]\!]$, $\binom{i+j}{i} \mu_k^j\, J(\lambda_{k,l})^i \underset{i+j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $\lambda_{k,l}$ n'est pas semi-simple, on a

$$\mu_k^j\, J(\lambda_{k,l})^i = \mu_k^j \begin{pmatrix} \lambda_{k,l} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_{k,l} & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \lambda_{k,l} & 1 \\ & & & & \lambda_{k,l} \end{pmatrix}^i,$$

$$= \mu_k^j \begin{pmatrix} \lambda_{k,l}^i & \binom{i}{1}\lambda_{k,l}^{i-1} & \binom{i}{2}\lambda_{k,l}^{i-2} & \dots & \binom{i}{t-1}\lambda_{k,l}^{i-t+1} \\ & \lambda_{k,l}^i & \binom{i}{1}\lambda_{k,l}^{i-1} & \dots & \binom{i}{t-2}\lambda_{k,l}^{i-t+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_{k,l}^i & \binom{i}{1}\lambda_{k,l}^{i-1} \\ & & & & \lambda_{k,l}^i \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

où $t > 1$ désigne la taille du bloc de Jordan et en utilisant la convention $\binom{n}{k} = 0$ quand $n < k$. Dans le cas où $\lambda_{k,l} = 0$, on a :

$$\mu_k^j\, J(0)^i = \begin{cases} \mu_k^j\, I_t, \text{ si } i = 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \overset{(i+1)-\text{ème}}{\overset{\downarrow}{\mu_k^j}} & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & \ddots & & 0 \\ & & & \ddots & & \ddots & \mu_k^j \\ & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow (t-i)\text{-ème}, \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant t-1, \\ 0, \text{ si } i \geqslant t. \end{cases} \tag{3.5}$$

Dans la suite, nous nous concentrons sur un bloc générique $\binom{i+j}{i}\mu_k^j\, J(\lambda_{k,l})^i$ et, pour simplifier les notations, on le notera simplement $\binom{i+j}{i}\mu^j\, J(\lambda)^i$.

La condition est suffisante :
Supposons tout d'abord que les conditions 1 and 2 sont vérifiées et montrons que $U_{i,j} \to 0$ quand $i + j \to +\infty$.
Si λ est semi-simple, alors $\binom{i+j}{i}\mu^j\, J(\lambda)^i$ est un bloc de taille 1 et le théorème 3.1 et la proposition 3.2 nous fournissent le résultat. Maintenant, si λ n'est pas semi-simple, alors $\binom{i+j}{i}\mu^j\, J(\lambda)^i$ est un bloc de taille $t > 1$ et nous devons discuter selon la valeur de λ.
Si $\lambda = 0$ et $i \geqslant t$, alors d'après (3.5), la matrice $J(0)^i = 0$ et $\binom{i+j}{i}\mu^j\, J(0)^i$ converge vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini. Considérons maintenant le cas où $i < t$ et $j \to +\infty$. En utilisant un équivalent classique du coefficient binomial, il vient :

$$\left|\binom{i+j}{i}\mu^j\right| \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{1}{i!}(i+j)^i\,|\mu|^j = O(j^i|\mu|^j) \underset{j\to+\infty}{\to} 0,$$

puisque les conditions 2(a) et 2(b) impliquent que nous avons toujours $|\mu| < 1$.
Si $\lambda \neq 0$, alors, en reprenant (3.4), le cas scalaire nous donne le résultat pour tous les termes diagonaux. Nous allons montrer que tous les termes strictement au dessus de la diagonale tendent aussi vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini. Plus précisément, nous allons montrer que pour tout $m \in [\![2, t]\!]$,

$$v_{i,j}(\lambda, \mu, m) := \binom{i+j}{i} \binom{i}{m-1} \lambda^{i-(m-1)} \mu^j \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0. \tag{3.6}$$

Soit $m \in [\![2, t]\!]$. Si $i < t$ et $m - 1 > i$ cette quantité est nulle ce qui nous donne le résultat. Sinon, si $\mu = 0$, alors

$$v_{i,j}(\lambda, 0, m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq 0, \\ \binom{i}{m-1} \lambda^{i-(m-1)} & \text{si} \quad j = 0, \end{cases}$$

et cette suite tend vers zéro puisque la condition 1 implique $|\lambda| < 1$.
Si $\mu \neq 0$, comme la condition 2(b) est satisfaite, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|\lambda| < a$, $|\mu| < b$, et $|a| + |b| < 1$. Dans ce cas, la suite $u_{i,j}$ introduite dans la proposition 3.2 converge vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini. Ceci nous permet de conclure car nous avons $|v_{i,j}(\lambda, \mu, m)| \underset{i+j\to+\infty}{=} o(|u_{i,j}|)$. En effet,

$$\frac{|v_{i,j}(\lambda, \mu, m)|}{|u_{i,j}|} = \binom{i}{m-1} \left(\frac{|\lambda|}{a}\right)^i \left(\frac{|\mu|}{b}\right)^j \frac{1}{|\lambda|^{m-1}},$$

et comme $\left(\frac{|\mu|}{b}\right)^j \frac{1}{|\lambda|^{m-1}} \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ et $\binom{i}{m-1} \left(\frac{|\lambda|}{a}\right)^i \underset{i\to+\infty}{\to} 0$, cette dernière quantité tend vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini en vertu du lemme 3.3.

<u>La condition est nécessaire :</u>
Nous devons maintenant prouver que si la condition 1 ou 2(a) ou 2(b) n'est pas satisfaite, alors $U_{i,j}$ ne tend pas vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini.

Premièrement, supposons que $\mu = 0$ est une valeur propre de B et $|\lambda| \geqslant 1$ est une valeur propre associée de A.
Si le bloc $\binom{i+j}{i} \mu^j J(\lambda)^i$ est scalaire, alors la proposition 3.2 implique que ce bloc, et donc $U_{i,j}$, divergent. En revanche, si ce bloc possède une taille $t > 1$, alors le m-ème terme de sa première ligne vaut $\binom{i}{m-1}\lambda^{i-(m-1)}$ et diverge quand $i \to +\infty$ car $|\lambda| \geqslant 1$.

Deuxièmement, supposons que $\mu \neq 0$ est une valeur propre de B et λ est une valeur propre semi-simple associée de A avec $(\lambda = 0 \quad \text{et} \quad |\mu| \geqslant 1)$ ou $(\lambda \neq 0 \quad \text{et} \quad |\lambda| + |\mu| > 1)$.
Dans le premier cas la matrice $R^{-1} U_{i,j} R$ possède un terme μ^j avec $|\mu| \geqslant 1$ et diverge. Dans le second cas, elle possède un terme $\binom{i+j}{i}\lambda^i\mu^j$ avec $|\lambda| + |\mu| > 1$ et la proposition 3.2 implique que ce terme diverge.

Finalement, supposons que $\mu \neq 0$ est une valeur propre de B et λ est une valeur propre non semi-simple associée de A avec $|\lambda| + |\mu| \geqslant 1$.

Si $|\lambda| + |\mu| > 1$, alors, en utilisant à nouveau la proposition 3.2, tous les termes diagonaux divergent et le résultat est établi.
Dans le cas où $|\lambda| + |\mu| = 1$ la situation est plus délicate.
• Si $\lambda \neq 0$, nous allons montrer que le module du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du bloc $\binom{i+j}{i} \mu^j J(\lambda)^i$ diverge dans la direction $(i, j) = (\lfloor q\,|\lambda|\rfloor, \lfloor q\,|\mu|\rfloor)$, avec q dans $\mathbb{N}$. Ce coefficient est égal à $\binom{i+j}{i}\binom{i}{1} \lambda^{i-1} \mu^j = v_{i,j}(\lambda, \mu, 2)$, où $v_{i,j}$ est la double suite définie par (3.6).
Notons $i_q := \lfloor q\,|\lambda|\rfloor$ et $j_q := \lfloor q\,|\mu|\rfloor$. On a alors

$$|v_{i_q,j_q}(\lambda, \mu, 2)| = \binom{i_q + j_q}{i_q} i_q |\lambda|^{i_q - 1} |\mu|^{j_q} = \frac{(i_q + j_q)!}{i_q! j_q!} i_q |\lambda|^{i_q - 1} |\mu|^{j_q},$$

et, en utilisant la formule de Stirling, il vient :

$$|v_{i_q,j_q}(\lambda, \mu, 2)| \underset{q \to +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{(i_q + j_q)^{i_q + j_q} \sqrt{i_q + j_q}\, i_q\, |\lambda|^{i_q - 1}\, |\mu|^{j_q}}{\sqrt{2\,\pi}\, i_q^{i_q} \sqrt{i_q}\, j_q^{j_q} \sqrt{j_q}}}_{=: E_q}.$$

Par ailleurs, nous avons $q\,|\lambda| - 1 < i_q \leqslant q\,|\lambda|$ et $q\,|\mu| - 1 < j_q \leqslant q\,|\mu|$ ce qui implique $q - 2 < i_q + j_q \leqslant q$, car $|\lambda| + |\mu| = 1$. Ainsi,

$$E_q \geqslant \frac{(q-2)^{i_q + j_q} \sqrt{q-2}\, q\, |\lambda|^{i_q}\, |\mu|^{j_q}}{\sqrt{2\,\pi}\, (q\,|\lambda|)^{i_q} \sqrt{q} \sqrt{|\lambda|}\, (q\,|\mu|)^{j_q} \sqrt{q} \sqrt{|\mu|}} \underset{q \to +\infty}{\sim} \underbrace{\left(\frac{q-2}{q}\right)^{i_q + j_q} \frac{\sqrt{q-2}}{\sqrt{2\,\pi\,|\lambda\,\mu|}}}_{=: E'_q}.$$

Et

$$\left(\frac{q-2}{q}\right)^{i_q + j_q} \geqslant \left(\frac{q-2}{q}\right)^{q} \underset{q \to +\infty}{\to} e^{-2}.$$

Ainsi, pour q assez grand, nous avons $\left(\frac{q-2}{q}\right)^{i_q + j_q} \geqslant K$, pour un certain $K > 0$, et donc

$$E'_q \geqslant \frac{K \sqrt{q-2}}{\sqrt{2\,\pi |\lambda\,\mu|}} \underset{q \to +\infty}{\to} +\infty,$$

ce qui implique que $v_{i_q,j_q}(\lambda, \mu, 2)$ diverge, ce qui fournit le résultat pour $\lambda \neq 0$.

• Si $\lambda = 0$, considérons $m \in [\![2, t]\!]$. Alors le coefficient de la première ligne et de la m-ième colonne du bloc $\binom{i+j}{i} \mu^j J(0)^i$ diverge en module dans la direction $i = m - 1$ et $j \to +\infty$.
En effet, le module de ce coefficient est égal à $|v_{m-1,j}(0, \mu, m-1)| = \binom{j+m-1}{m-1} |\mu|^j$ qui tend vers $+\infty$ quand $j \to +\infty$ car $|\mu| = 1$. □

3.4 Condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique

Dans ce paragraphe, nous allons donner le résultat principal de ce chapitre : une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour un modèle de Fornasini-Marchesini (FM-DL). Par la suite, nous illustrerons ce théorème par un exemple détaillé, afin de montrer la simplicité de l'approche qui se cache derrière l'aspect technique de la preuve.

Théorème 3.8. Sous l'hypothèse 1, le point d'équilibre zéro du modèle de Fornasini-Marchesini (FM-DL) est stable asymptotiquement si et seulement si la double suite $U_{i,j}$ donnée par (3.2) converge vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini.

Preuve 3.4. La preuve repose sur la forme explicite des solutions donnée par la formule (3.3). Comme il y a beaucoup de cas et de sous-cas à considérer, afin de faciliter la lecture de cette preuve nous la séparons en deux parties.

3.4.1 La condition est suffisante

On suppose que $\lim_{i+j\to+\infty} U_{i,j} = 0$. Montrons que pour toutes conditions initiales $\Psi_j^{(1)}$ et $\Psi_i^{(2)}$ dans $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}^n)$, nous avons $\lim\limits_{i+j\to+\infty} x_{i,j} = 0$.

Soient $\Psi_j^{(1)}$, $\Psi_i^{(2)} \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}^n)$ et $(i,j) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.
En utilisant la formule (3.2) et la proposition 3.6, la formule (3.3) donne :

$$x_{i,j} = \sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} R\, J_A^i\, D_B^s \underbrace{R^{-1}\,\Psi_{j-s}^{(1)}}_{\Phi_{j-s}^{(1)}} + \sum_{s=0}^{i-1} \binom{s+j-1}{s} R\, J_A^s\, D_B^j \underbrace{R^{-1}\,\Psi_{i-s}^{(2)}}_{\Phi_{i-s}^{(2)}}, \tag{3.7}$$

avec $\Phi_j^{(1)}, \Phi_i^{(2)} \in c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}^n)$.
Pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, et $s \in \mathbb{N}$, notons :

$$\begin{cases} \Theta_{i,s}(\mu_k) := \operatorname{Diag}\left(\mu_k^s\, J(\lambda_{k,1})^i, \ldots, \mu_k^s\, J(\lambda_{k,r_k})^i\right), \\ \Theta_{s,j}(\mu_k) := \operatorname{Diag}\left(\mu_k^j\, J(\lambda_{k,1})^s, \ldots, \mu_k^j\, J(\lambda_{k,r_k})^s\right). \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$x_{i,j} = \underbrace{R\,\operatorname{Diag}\left(\sum_{s=0}^{j-1}\binom{i-1+s}{i-1}\Theta_{i,s}(\mu_1), \ldots, \sum_{s=0}^{j-1}\binom{i-1+s}{i-1}\Theta_{i,s}(\mu_p)\right)}_{:=M_1} \Phi_{j-s}^{(1)}$$
$$+ \underbrace{R\,\operatorname{Diag}\left(\sum_{s=0}^{i-1}\binom{s+j-1}{s}\Theta_{s,j}(\mu_1), \ldots, \sum_{s=0}^{i-1}\binom{s+j-1}{s}\Theta_{s,j}(\mu_p)\right)}_{:=M_2} \Phi_{i-s}^{(2)}.$$

Nous allons maintenant montrer que les vecteurs $M_1\,\Phi_{j-s}^{(1)}$ et $M_2\,\Phi_{i-s}^{(2)}$ tendent vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini.
Comme les matrices M_1 et M_2 sont diagonales par bloc et que les blocs $\Theta_{i,s}(\mu_k)$ et $\Theta_{s,j}(\mu_k)$

sont eux-même diagonaux, nous allons à nouveau considérer pour chaque matrice M_1 et M_2, un bloc générique de taille t, respectivement $\mu_k^s\, J(\lambda_{k,l})^i$ et $\mu_k^j\, J(\lambda_{k,l})^s$ ayant une expression similaire à (3.4) (où $k \in [\![1,p]\!]$ et $l \in [\![1,r_k]\!]$) que nous noterons respectivement $\mu^s\, J(\lambda)^i$ et $\mu^j\, J(\lambda)^s$ afin de simplifier les notations.
Les vecteurs $\Phi_{j-s}^{(1)}$ et $\Phi_{i-s}^{(2)}$ tendant vers zéro, leurs composantes appartiennent à $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$. Notons $([\Phi_{j-s}^{(1)}]_1,\dots,[\Phi_{j-s}^{(1)}]_t)^T$ et $([\Phi_{i-s}^{(2)}]_1,\dots,[\Phi_{i-s}^{(2)}]_t)^T$ les coefficients de $\Phi_{j-s}^{(1)}$ et $\Phi_{i-s}^{(2)}$ correspondant respectivement aux blocs $\mu^s\, J(\lambda)^i$ et $\mu^j\, J(\lambda)^s$.
Nous devons alors montrer que

$$\lim_{i+j\to+\infty} \underbrace{\left(\sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} \mu^s\, J(\lambda)^i \begin{pmatrix} [\Phi_{j-s}^{(1)}]_1 \\ \vdots \\ [\Phi_{j-s}^{(1)}]_t \end{pmatrix} + \sum_{s=0}^{i-1} \binom{s+j-1}{s} \mu^j\, J(\lambda)^s \begin{pmatrix} [\Phi_{i-s}^{(2)}]_1 \\ \vdots \\ [\Phi_{i-s}^{(2)}]_t \end{pmatrix} \right)}_{:=\Omega_{i,j}(\lambda,\mu)} = 0. \tag{3.8}$$

Nous devons distinguer deux cas selon la valeur de λ.

3.4.2 Le cas où $\lambda = 0$

En utilisant (3.5), il vient :

$$\Omega_{i,j}(0,\mu) = \mathbb{1}_{\{i<t\}} \sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu^s & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & \ddots & \mu^s \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\Phi_{j-s}^{(1)}]_1 \\ [\Phi_{j-s}^{(1)}]_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ [\Phi_{j-s}^{(1)}]_t \end{pmatrix}$$

$$+ \mu^j I_t \left([\Phi_i^{(2)}]_1,\dots,[\Phi_i^{(2)}]_t \right)^T$$

$$+ \sum_{s=1}^{i-1} \mathbb{1}_{\{s<t\}} \binom{s+j-1}{s} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mu^j & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & \ddots & \mu^j \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\Phi_{i-s}^{(2)}]_1 \\ [\Phi_{i-s}^{(2)}]_2 \\ \\ \\ \\ \\ \\ [\Phi_{i-s}^{(2)}]_t \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\mathbb{1}_{\{i<t\}} \sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} \left(\mu^s [\Phi^{(1)}_{j-s}]_{i+1}, \dots, \mu^s [\Phi^{(1)}_{j-s}]_{t-i}, 0, \dots, 0\right)^T}_{:=\alpha_{i,j}}$$
$$+ \underbrace{\left(\mu^j [\Phi^{(2)}_i]_1, \dots, \mu^j [\Phi^{(2)}_i]_t\right)^T}_{:=\beta_{i,j}}$$
$$+ \underbrace{\sum_{s=1}^{t-1} \binom{s+j-1}{s} \left(\mu^j [\Phi^{(2)}_{i-s}]_{s+1}, \dots, \mu^j [\Phi^{(2)}_{i-s}]_{t-s}, 0, \dots, 0\right)^T}_{:=\gamma_{i,j}}.$$

Remarquons que par hypothèse $U_{i,j} \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0$ de telle sorte que le théorème 3.7 implique $|\mu| < 1$. Montrons que :

$$\lim_{i+j\to+\infty} \alpha_{i,j} = \lim_{i+j\to+\infty} \beta_{i,j} = \lim_{i+j\to+\infty} \gamma_{i,j} = 0.$$

- Pour $\beta_{i,j}$, nous avons directement le résultat.
- Pour $\gamma_{i,j}$, soit $k \in [\![s+1, t-s]\!]$, il vient :

$$\sum_{s=0}^{t-1} \binom{s+j-1}{s} |\mu|^j \left|[\Phi^{(2)}_{i-s}]_k\right| \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0.$$

  Cette somme est finie et chaque terme tend vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini. En effet, $\binom{s+j-1}{s}|\mu|^j \underset{j\to+\infty}{=} O(j^s|\mu|^j) \underset{j\to+\infty}{\to} 0$ et $\left|[\Phi^{(2)}_{i-s}]_k\right| \underset{i\to+\infty}{\to} 0$, ce qui nous donne le résultat d'après le lemme 3.3.

- Finalement, pour $\alpha_{i,j}$, soit $k \in [\![i+1, t-i]\!]$. De par la présence du terme $\mathbb{1}_{i<t}$, pour montrer que $\alpha_{i,j} \to 0$ quand $i+j \to +\infty$, nous devons seulement montrer que :

$$\sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} |\mu|^s \left|[\Phi^{(1)}_{j-s}]_k\right| \underset{j\to+\infty}{\to} 0. \tag{3.9}$$

  Par hypothèse, $[\Phi^{(1)}_j]_k \underset{j\to+\infty}{\to} 0$, ainsi : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$; $\forall j \geqslant N_1$, $\left|[\Phi^{(1)}_j]_k\right| \leqslant \varepsilon$.
  Comme $j - s \geqslant N_1$ est équivalent à $s \leqslant j - N_1$, nous avons :

$$\left|\sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} \mu^s [\Phi^{(1)}_{j-s}]_k\right| \leqslant \sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} |\mu|^s |[\Phi^{(1)}_{j-s}]_k|$$
$$\leqslant \underbrace{\varepsilon \sum_{s=0}^{j-N_1} \binom{i-1+s}{i-1} |\mu|^s}_{\text{borné}} + \|[\Phi^{(1)}]_k\|_\infty \underbrace{\sum_{s=j-N_1+1}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1} |\mu|^s}_{\underset{i+j\to+\infty}{\to} 0}.$$

  En effet, la première somme est bornée par rapport à i et j puisque

$$\sum_{s=0}^{j-N_1} \binom{i-1+s}{i-1} |\mu|^s \leqslant \sum_{s=0}^{+\infty} \binom{i-1+s}{i-1} |\mu|^s = \frac{1}{(1-|\mu|)^i} < +\infty.$$

Par ailleurs, nous pouvons montrer que la seconde somme tend vers zéro en étudiant le comportement, lorsque $i+s \to +\infty$, de la suite définie par :

$$h_{i,s} := \begin{cases} \binom{i-1+s}{i-1}|\mu|^s & \text{si} \quad i < t, \\ 0 & \text{si} \quad i \geqslant t. \end{cases}$$

Comme cette suite est nulle quand $i \geqslant t$, il suffit de considérer le cas où i est fixé et $s \to +\infty$. Nous avons l'inégalité suivante :

$$\forall (i,s) \in (\mathbb{N}^\star)^2, \quad |h_{i,s}| = \frac{i}{i+s}\binom{i+s}{i}|\mu|^s \leqslant \binom{i+s}{i}|\mu|^s.$$

Comme $|\mu| < 1$, $\lim\limits_{i+s\to+\infty} |h_{i,s}| = 0$. En utilisant le lemme 3.4, il vient :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{s=j}^{j+N} \binom{i-1+s}{i-1}|\mu|^s \underset{i+j\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

En particulier, la suite définie par $y_{i,j} := \sum\limits_{s=j}^{j+(N_1-1)} \binom{i-1+s}{i-1}|\mu|^s$ tend vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini, et par suite

$$\sum_{s=j-N_1+1}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1}|\mu|^s \leqslant \sum_{s=j-N_1+1}^{j} \binom{i-1+s}{i-1}|\mu|^s = y_{i,j-(N_1-1)} \underset{\substack{i+j\to+\infty \\ j\geqslant N_1-1}}{\longrightarrow} 0,$$

et (3.9) est établie ce qui conclut l'étude du cas $\lambda = 0$.

3.4.3 Le cas où $\lambda \neq 0$

Reprenons l'expression du vecteur $\Omega_{i,j}(\lambda,\mu)$ définie par (3.8), *i.e.*, :

$$\Omega_{i,j}(\lambda,\mu) = \underbrace{\sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1}\mu^s\, J(\lambda)^i \begin{pmatrix} [\Phi^{(1)}_{j-s}]_1 \\ \vdots \\ [\Phi^{(1)}_{j-s}]_t \end{pmatrix}}_{:=S_1} + \underbrace{\sum_{s=0}^{i-1} \binom{s+j-1}{s}\mu^j\, J(\lambda)^s \begin{pmatrix} [\Phi^{(2)}_{i-s}]_1 \\ \vdots \\ [\Phi^{(2)}_{i-s}]_t \end{pmatrix}}_{:=S_2}.$$

Considérons la première somme S_1 et notons $L^{(1)}_{i,j}, \cdots L^{(t)}_{i,j}$ les composantes de ce vecteur. Nous avons l'inégalité suivante :

$$|L^{(1)}_{i,j}| \leqslant \sum_{s=0}^{j-1}\sum_{m=1}^{t} \binom{i-1+s}{i-1}\binom{i}{m-1}|\lambda|^{i-m+1}|\mu|^s \left|[\Phi^{(1)}_{j-s}]_m\right|.$$

Comme ces sommes sont finies, nous pouvons changer l'ordre de sommation et pour montrer que $L^{(1)}_{i,j} \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0$, nous allons montrer que, pour tout $m \in [\![1,t]\!]$:

$$\sum_{s=0}^{j-1} \binom{i-1+s}{i-1}\binom{i}{m-1}|\lambda|^{i-m+1}|\mu|^s \left|[\Phi^{(1)}_{j-s}]_m\right| \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0. \tag{3.10}$$

Pour chaque composante $L_{i,j}^{(2)}, \cdots, L_{i,j}^{(t)}$, on peut utiliser exactement le même raisonnement. Nous pouvons également traiter S_2 exactement de la même façon que S_1, en montrant que :

$$\sum_{s=0}^{i-1} \binom{s+j-1}{s} \binom{s}{m-1} |\lambda|^{s-m+1} |\mu|^j \left|[\Phi_{i-s}^{(2)}]_m\right| \underset{i+j\to+\infty}{\to} 0. \tag{3.11}$$

Nous supposons ici que les blocs considérés sont de taille $t > 1$ puisque pour les blocs de taille 1, le résultat est une conséquence des théorèmes 3.1 et 3.5.
Nous allons ici uniquement montrer l'assertion (3.11). L'assertion (3.10) est plus simple à montrer et peut être établie en utilisant la même stratégie, à savoir en découpant la somme et en appliquant le lemme 3.4 à la suite $\binom{s+i-1}{i-1}\binom{i}{m-1}|\lambda|^{i-m+1}|\mu|^s$.

Soit $m \in [\![1, t]\!]$.
Par hypothèse, $U_{i,j}\to 0$ quand $i+j\to+\infty$ de telle sorte que le théorème 3.7 implique $|\lambda|+|\mu|<1$. Ainsi, il existe $0<a<1$ tel que $0<|\lambda|<a<1$ et $0<a+|\mu|<1$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i \geqslant N_2$, $\|\Phi_i^{(2)}\| \leqslant \varepsilon$, (par hypothèse $\Phi_i^{(2)} \underset{i\to+\infty}{\to} 0$).
Soit $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $s \geqslant N_3$, $\binom{s}{m-1}|\lambda|^s \leqslant a^s$.
Soit $N_4 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $i+j \geqslant N_4$, on a :

$$\sum_{s=i-N_2+1}^{i-1} \binom{s+j-1}{s} \binom{s}{m-1} |\lambda|^{s-(m-1)} |\mu|^j \leqslant \varepsilon,$$

(un tel N_4 existe en utilisant[1] le lemme 3.4).
Soit $N_5 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \geqslant N_5$ et $s \in \mathbb{N}$:

$$\binom{s+j-1}{s} \binom{s}{m-1} |\lambda|^{s-m+1} |\mu|^j \leqslant \varepsilon.$$

Soit $N_6 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \geqslant N_6$:

$$\sum_{s=0}^{N_3} \binom{s+j-1}{s} \binom{s}{m-1} |\lambda|^{s-m+1} |\mu|^j \leqslant \varepsilon,$$

et soit $N_7 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \geqslant N_7$: $|\lambda|^{-m+1}\left(\frac{|\mu|}{1-a}\right)^j \leqslant \varepsilon$.
Notons $N := \max(N_2, N_5, N_6, N_7)$.
Soit (i,j) tel que $i+j \geqslant \max(2N, N_4)$. Alors soit $i \geqslant N$ soit $i < N$ et alors $j > N$.

- si $i \geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s=0}^{i-1} \binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}\lambda^{s-m+1}\mu^j[\Phi_{i-s}^{(2)}]_m\right| &\leqslant \varepsilon \sum_{s=0}^{i-N_2} \binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-(m-1)}|\mu|^j \\ &\quad + \|[\Phi^{(2)}]_m\|_\infty \sum_{s=i-N_2+1}^{i-1} \binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-(m-1)}|\mu|^j \\ &\leqslant \varepsilon \underbrace{\sum_{s\geqslant 0} \binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-(m-1)}|\mu|^j}_{\leqslant K} + \|[\Phi^{(2)}]_m\|_\infty \varepsilon,\end{aligned}$$

[1] $\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-(m-1)}|\mu|^j \leqslant \underbrace{\frac{j}{s+j}}_{\leqslant 1}|v_{s,j}(\lambda,\mu,m)|$, où $v_{s,j}$ est la double suite définie par (3.6).

pour un certain $K > 0$. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_{s\geqslant 0}\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-(m-1)}|\mu|^j &\leqslant \underbrace{\sum_{s=0}^{N_3}\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-(m-1)}|\mu|^j}_{\leqslant K_1,\text{bornée car tend vers 0 quand } j\to+\infty}\\ &\quad+\sum_{s\geqslant N_3+1}\binom{s+j-1}{s}a^s|\lambda|^{-(m-1)}|\mu|^j\\ &\leqslant K_1+\sum_{s\geqslant 0}\binom{s+j-1}{s}a^s|\lambda|^{-(m-1)}||\mu|^j\\ &\leqslant K_1+|\lambda|^{-(m-1)}\left(\frac{|\mu|}{1-a}\right)^j\\ &\leqslant K_1+|\lambda|^{-(m-1)},\end{aligned}$$

pour un certain $K_1 > 0$.

- si $i < N$, alors $j > N$ et on a :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{s=0}^{i-1}\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-m+1}|\mu|^j[\Phi^{(2)}_{i-s}]_m\right| &\leqslant \|[\Phi^{(2)}]_m\|_\infty\sum_{s\geqslant 0}\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-m+1}|\mu|^j\\ &\leqslant \|[\Phi^{(2)}]_m\|_\infty\left(\sum_{s=0}^{N_3}\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-m+1}|\mu|^j\right.\\ &\quad\left.+\sum_{s\geqslant N_3+1}\binom{s+j-1}{s}\binom{s}{m-1}|\lambda|^{s-m+1}|\mu|^j\right)\\ &\leqslant \|[\Phi^{(2)}]_m\|_\infty\left(\varepsilon+|\lambda|^{-m+1}\left(\frac{|\mu|}{1-a}\right)^j\right)\\ &\leqslant 2\|[\Phi^{(2)}]_m\|_\infty\varepsilon.\end{aligned}$$

3.4.4 La condition est nécessaire

Nous allons ici montrer que si $U_{i,j}$ ne tend pas vers zéro quand $i+j$ tend vers plus l'infini, alors il existe une paire de conditions initiales $\Psi^{(1)}$ et $\Psi^{(2)}$ dans $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C}^n)$ telle que la solution $x_{i,j}$ ne tend pas vers zéro.

Soit μ une valeur propre de B. Le théorème 3.7 implique alors que nous avons :

- soit $\mu = 0$ et il existe une valeur propre asociée λ de A telle que $|\lambda| \geqslant 1$,
- soit $\mu \neq 0$ et il existe un bloc de Jordan associé $J(\lambda)$ de A de taille 1 avec ($\lambda = 0$ et $|\mu| \geqslant 1$) ou ($\lambda \neq 0$ et $|\lambda| + |\mu| > 1$),
- soit $\mu \neq 0$ et il existe un bloc associé $\mu^j J(\lambda)^i$ de taille $t \geqslant 1$ avec $|\lambda| + |\mu| \geqslant 1$.

Rappelons la formule (3.7) :

$$x_{i,j} = \sum_{s=0}^{j-1}\binom{i-1+s}{i-1}R\,J_A^i\,D_B^s\,R^{-1}\,\Psi^{(1)}_{j-s} + \sum_{s=0}^{i-1}\binom{s+j-1}{s}R\,J_A^s\,D_B^j\,R^{-1}\,\Psi^{(2)}_{i-s}.$$

L'idée ici consiste à choisir une condition initiale $\Psi^{(2)}_i$ identiquement nulle pour faire disparaître la deuxième somme et une condition initiale $\Psi^{(1)}_j$ nulle sauf pour $j = 1$ afin de

conserver uniquement le terme pour $s = j - 1$ dans la première somme.
Nous allons aussi choisir $\Psi_j^{(1)}$ de telle sorte que le produit de R^{-1} par $\Psi_1^{(1)}$ donne un vecteur colonne qui contienne au moins un terme qui diverge quand nous le multiplions par $\binom{i+j-2}{i-1} R\, J_A^i\, D_B^{j-1}$.
Une fois encore nous pouvons considérer un seul bloc, sans perte de généralité, car nous cherchons à exhiber une seule composante de $x_{i,j}$ qui diverge.
Nous choisissons donc $\Psi_i^{(2)} = 0$ et $\Psi_j^{(1)} = 0$ si $j \neq 1$ et telle que

$$R^{-1}\,\Psi_1^{(1)} = \Big(0, \ldots, 0, [\Phi_1^{(1)}]_1, \ldots, [\Phi_1^{(1)}]_t, 0, \ldots, 0\Big)^T,$$

où les t composantes non nulles correspondent au bloc $\mu^{j-1}\, J(\lambda)^i$. Nous pouvons choisir $\Psi_1^{(1)}$ de la sorte par surjectivité de l'application : $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, X \mapsto R^{-1}X$.
Par ailleurs, nous allons choisir les composantes de ce vecteur afin d'obtenir une composante de $x_{i,j}$ qui diverge.
Nous considérons seulement les deux cas suivants :

(a) $\mu = 0$ et il existe une valeur propre associée λ de A telle que $|\lambda| \geqslant 1$ et $J(\lambda)$ est de taille 1,

(b) $\mu \neq 0$ et il existe un bloc associé $\mu^j\, J(\lambda)^i$ de taille $t \geqslant 1$ avec $|\lambda| + |\mu| \geqslant 1$ et $\lambda \neq 0$.

Les autres cas peuvent être traités de façon similaire.

- (a) Nous choisissons $[\Phi^{(1)}]_1 = 1$. Ainsi, comme $x_{i,j} = R\,\binom{i+j-2}{i-1}\, J_A^i\, D_B^{j-1}\, \Phi_1^{(1)}$, la composante correspondante de $R^{-1}\, x_{i,j}$ vaut $\binom{i+j-2}{i-1}\, \lambda^i\, 0^{j-1}$ et cette quantité diverge dans la direction $j = 1$, $i \to +\infty$ car $|\lambda| \geqslant 1$. Comme R est inversible, $x_{i,j}$ diverge également.

- (b) En écrivant seulement les composantes non-nulles, il vient :

$$\begin{aligned}
[x_{i,j}]_t &= [R]_t\,\tbinom{i+j-2}{i-1}\,\mu^{j-1}\, J(\lambda)^i \begin{pmatrix} [\Phi_1^{(1)}]_1 \\ \vdots \\ [\Phi_1^{(1)}]_t \end{pmatrix} \\
&= [R]_t\,\tbinom{i+j-2}{i-1}\,\mu^{j-1} \begin{pmatrix} \lambda^i & \binom{i}{1}\lambda^{i-1} & \binom{i}{2}\lambda_{k,l}^{i-2} & \cdots & \binom{i}{t-1}\lambda^{i-t+1} \\ & \lambda^i & \binom{i}{1}\lambda^{i-1} & \cdots & \binom{i}{t-2}\lambda^{i-t+2} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda^i & \binom{i}{1}\lambda^{i-1} \\ & & & & \lambda^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\Phi_1^{(1)}]_1 \\ [\Phi_1^{(1)}]_2 \\ \vdots \\ [\Phi_1^{(1)}]_t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où $[x_{i,j}]_t$ désigne les composantes non-nulles de $x_{i,j}$ et $[R]_t$ désigne les matrices carrées adéquates extraites de R.
Le produit du dernier coefficient sur la diagonale de $\binom{i+j-2}{i-1}\,\mu^{j-1}\, J(\lambda)^i$ par la dernière composante du vecteur colonne donne :

$$\binom{i+j-2}{i-1}\lambda^i\mu^{j-1}\,[\Phi_1^{(1)}]_t.$$

Ainsi, si on a $|\lambda| + |\mu| > 1$ et que nous choisissons $[\Phi_1^{(1)}]_t = 1$, ce terme diverge et le résultat est établi car R est inversible.
Par ailleurs, si $|\lambda| + |\mu| = 1$, nous devons prendre l'avant-dernière composante du vecteur produit qui vaut

$$\begin{aligned}&\binom{i+j-2}{i-1}\lambda^i\mu^{j-1}[\Phi_1^{(1)}]_{t-1} + \binom{i+j-2}{i-1}\binom{i}{1}\lambda^{i-1}\mu^{j-1}[\Phi_1^{(1)}]_t\\ &= \lambda u_{i-1,j-1}[\Phi_1^{(1)}]_{t-1} + (\lambda v_{i-1,j-1}(\lambda,\mu,2) + u_{i-1,j-1})\,[\Phi_1^{(1)}]_t,\end{aligned}$$

où $u_{i,j}$ et $v_{i,j}$ sont les doubles suites définies respectivement dans la proposition 3.2 et dans (3.6), et si nous prenons $[\Phi_1^{(1)}]_{t-1} = [\Phi_1^{(1)}]_t = 1$, ce terme diverge comme la somme de deux termes qui convergent et d'un terme qui diverge.
En effet, $u_{i-1,j-1}$ converge car $|\lambda|+|\mu| = 1$ et $v_{i-1,j-1}(\lambda,\mu,2)$ diverge car $|\lambda|+|\mu| = 1$.
Ainsi $x_{i,j}$ diverge ce qui conclut la preuve du théorème 3.8. □

Exemple 3.3. Illustrons le théorème 3.8 à l'aide d'un exemple. Considérons un modèle de Fornasini-Marchesini (FM-DL) avec les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}0.3 & 0 & -0.1\\ 1 & 0.3 & -1.1\\ 0 & 0 & 0.2\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}0.7 & 0 & 0.1\\ 0 & 0.7 & 0.1\\ 0 & 0 & 0.8\end{pmatrix}.$$

Observons tout d'abord que l'hypothèse 1 est vérifiée car A et B commutent et B est diagonalisable. Les valeurs propres de B sont 0.7 et 0.8 et si l'on note

$$P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

on a alors

$$P^{-1}\,B\,P = D_B = \mathrm{Diag}(0.7, 0.7, 0.8), \quad P^{-1}\,A\,P = \begin{pmatrix}0.3 & 0 & 0\\ 1 & 0.3 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{pmatrix}.$$

En effectuant une réduction de Jordan des deux blocs diagonaux A_1 et A_2 de la matrice $P^{-1}\,A\,P$, on obtient $J_{A_1} = \begin{pmatrix}0.3 & 1\\ 0 & 0.3\end{pmatrix}$ et $J_{A_2} = 0.2$. Ainsi, on a :

$$J_A = \mathrm{Diag}(J_{A_1}, J_{A_2}) = \begin{pmatrix}0.3 & 1 & 0\\ 0 & 0.3 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{pmatrix}.$$

En utilisant les notations précédentes, on a $\mu_1 = 0.7$, $\mu_2 = 0.8$, $\lambda_{1,1} = 0.3$, et $\lambda_{2,1} = 0.2$. Nous pouvons observer que la condition 2(b) du théorème 3.7 n'est pas vérifiée pour $\mu_1 = 0.7 \neq 0$ et $\lambda_{1,1} = 0.3$ car $\lambda_{1,1}$ n'est pas une valeur propre semi-simple et on a $|\mu_1| + |\lambda_{1,1}| = 1 \geqslant 1$. Par conséquent, la suite $U_{i,j}$ ne tend pas vers 0 quand $i + j$ tend vers plus l'infini et le théorème 3.8 implique alors que le point d'équilibre du modèle considéré n'est pas asymptotiquement stable.
Ceci est illustré par la figure 5, où l'on a choisit comme conditions initiales $\Psi_j^{(1)} = (0.5^j, 0.5^j, 0.5^j)^T$ et $\Psi_i^{(2)} = (0.5^i, 0.5^i, 0.5^i)^T$.

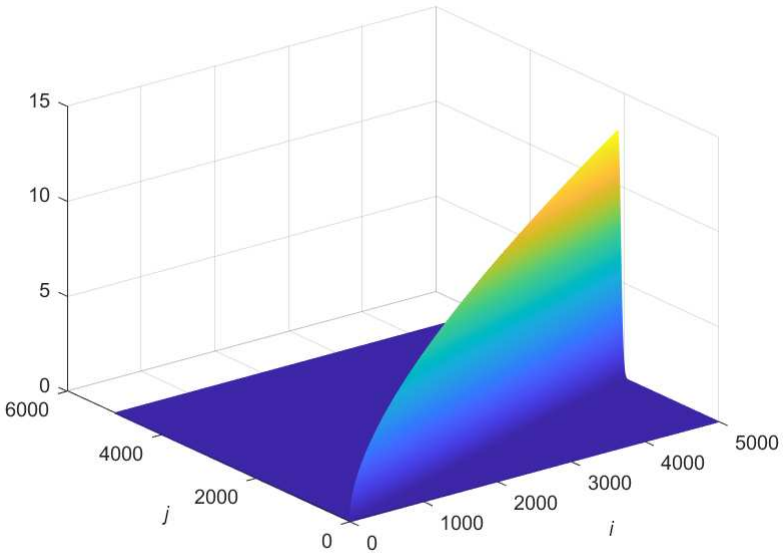


Figure 5: Comportement instable de $\|x_{i,j}\|_2$, 5000x5000 points.

3.5 Simulations

Afin d'illustrer le résultat principal de ce chapitre, le théorème 3.8, nous allons ici considérer différents modèles de Fornasini-Marchesini (FM-DL) verifiant l'hypothèse 1. Nous allons également donner, pour chaque modèle, la matrice de Jordan J_A associée à la matrice A, et la matrice diagonale D_B associée à la matrice B, afin de pouvoir «lire» directement le comportement asymptotique du modèle. Remarquez que toutes ces simulations ont été faites avec des conditions initiales qui tendent vers 0, de façon à correspondre à la définition 2.2.

- **Modèle 1** :

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.4 & 4/15 \\ 0 & -0.2 & 1/3 \\ 0 & -0.6 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.4 & -4/15 \\ 0 & 1.2 & -1/3 \\ 0 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix},$$

$$J_A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad D_B = \mathrm{Diag}(0.7, 0.7, 0.8),$$

les conditions initiales sont données par : $\Psi_j^{(1)} = \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+1}\right)^T$, $\Psi_i^{(2)} = \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}\right)^T$.

Le **Modèle 1** illustre le cas critique où la somme des modules des valeurs propres est égale à 1 (avec des blocs de Jordan de taille 1). Nous nous attendons à observer une convergence vers zéro, mais à une vitesse lente. Un modèle similaire a été utilisé dans [29] pour souligner la différence entre la stabilité structurelle et la stabilité asymptotique. Si nous voulions faire l'analogie avec le cas 1D, ce cas serait

comparable avec un cas illustrant la différence entre la stabilité (valeurs propres de module inférieur ou égal à 1) et la stabilité asymptotique (valeurs propres de module strictement inférieur à 1). Ce comportement peut être observé sur la figure 6.

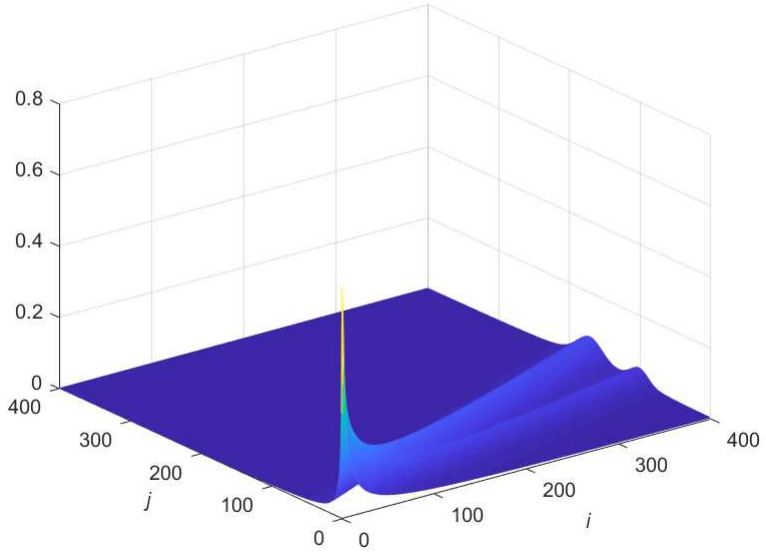


Figure 6: **Modèle 1**, comportement asymptotique de $\|x_{i,j}\|_2$, 400x400 points.

- **Modèle 2** :

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & -1/5 & 3/5 \\ 0 & -3/50 & 9/50 \\ 0 & -3/25 & 9/25 \end{pmatrix}, \quad B = \mathrm{Diag}(-0.71, -0.71, -0.71),$$

$$J_A = \begin{pmatrix} 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_B = B,$$

les conditions initiales sont données par $\Psi_j^{(1)} = \left(\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+1}, \frac{1}{j+1}\right)^T$, $\Psi_i^{(2)} = \left(\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}, \frac{1}{i+1}\right)^T$.

Le **Modèle 2** illustre le cas où une des sommes des modules des valeurs propres est légèrement plus grande que 1. Nous nous attendons à voir un comportement instable dans cette situation comme illustré par la figure 7.

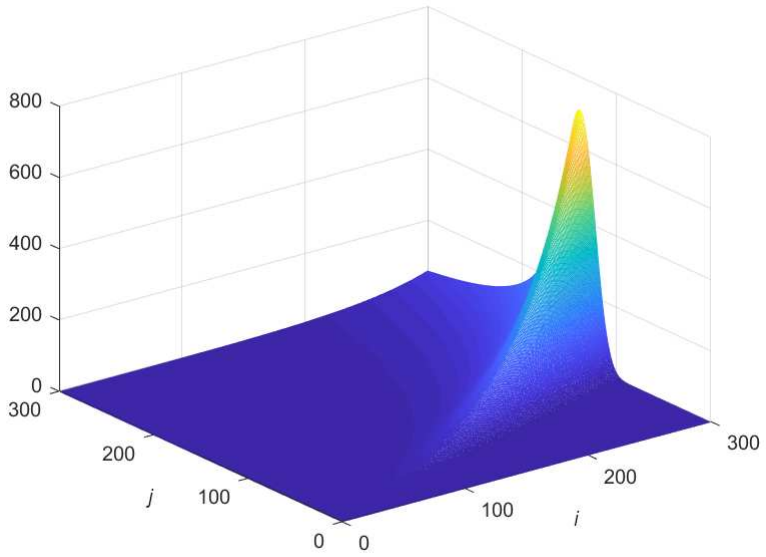


Figure 7: **Modèle 2**, comportement instable de $\|x_{i,j}\|_2$, 300x300 points.

- **Modèle 3** :

$$A = \begin{pmatrix} -0.7 & 4 & -13/6 \\ -4/3 & 49/30 & -2/9 \\ -2 & 2 & -1/30 \end{pmatrix}, \quad B = \text{Diag}(0.699, 0.699, 0.699),$$

$J_A = \begin{pmatrix} 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$, $D_B = B$, les conditions initiales sont données par : $\Psi_j^{(1)} = (0.5^j, 0.5^j, 0.5^j)^T$ et $\Psi_i^{(2)} = (0.5^i, 0.5^i, 0.5^i)^T$.

Avec le **Modèle 3**, nous avons essayé d'être très proches du cas critique où la somme des modules des valeurs propres est égale à 1 mais le bloc de Jordan associé est de taille strictement plus grande que 1. Comme on peut le voir sur la figure 8, ce modèle semble tout d'abord diverger, mais est en fait asymptotiquement stable comme la condition 2(b) du théorème 3.7 est satisfaite.

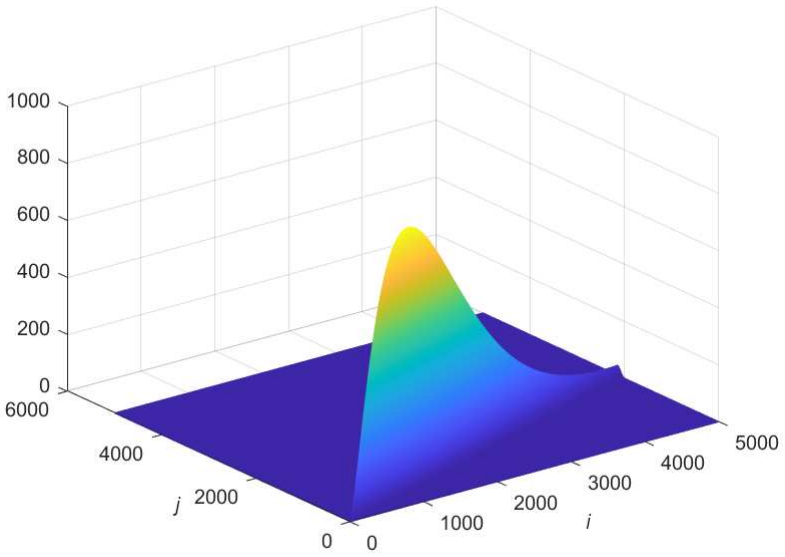


Figure 8: **Modèle 3**, comportement asymptotique de $\|x_{i,j}\|_2$, 5000x5000 points.

- **Modèle 4** :

$$A = \begin{pmatrix} 23/30 & -5/6 & -1 & 33/40 & -91/240 & 0 \\ 11/6 & -77/30 & -2 & 81/40 & -33/240 & 0 \\ 53/15 & -43/15 & -18/5 & 14/5 & 11/30 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 17/5 & 13/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 21/20 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 59/100 & 0 & 0 & -49/200 & 107/400 & 0 \\ 0 & 59/100 & 0 & -49/100 & 49/200 & 0 \\ 49/50 & -49/50 & -0.39 & 49/200 & 147/400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -39/100 & 69/200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9/10 & 0.9 \end{pmatrix},$$

$$J_A = \begin{pmatrix} -0.4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_B = \mathrm{Diag}(0.59, 0.59, 0.3, -0.39, -0.39, 0.9),$$

les conditions initiales sont données par : $\Psi_j^{(1)} = (0.9^j, 0.9^j, 0.9^j, 0.9^j, 0.9^j, 0.9^j)^T$ et $\Psi_i^{(2)} = (0.9^i, 0.9^i, 0.9^i, 0.9^i, 0.9^i, 0.9^i)^T$.

Avec ce dernier modèle, nous avons voulu illustrer l'efficacité de notre approche avec un vecteur d'état de dimension plus grande. Nous pouvons à nouveau directement «lire» le comportement asymptotique du modèle en examinant les valeurs propres de A et B, et nous nous attendons à un comportement asymptotiquement stable, ce qui est confirmé par la figure 9.

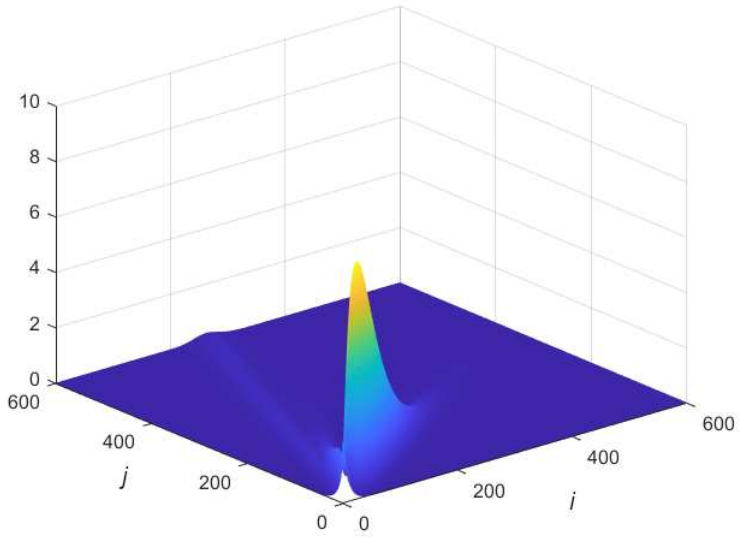


Figure 9: **Modèle 4**, comportement asymptotique de $\|x_{i,j}\|_2$, 600x600 points.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé la première condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour un modèle 2D de Fornasini-Marchesini discret linéaire. Cette condition est principalement basée sur les valeurs propres des matrices définissant le modèle. La difficulté calculatoire est somme toute minimale car elle consiste simplement en une réduction simultanée (réduction de Jordan et diagonalisation) des deux matrices. Cela dit, l'hypothèse 1 imposée au modèle est très restrictive. En effet, les deux matrices définissant le modèle doivent commuter et (au moins) une des deux doit être diagonalisable. L'aspect technique de la preuve de notre résultat principal, le théorème 3.8, montre que ce cas particulier n'est pas trivial et vaut la peine d'être considéré, comme un possible premier pas vers une classe de modèles plus générale. En outre, une hypothèse comparable fut proposée dans [51] afin d'étudier des questions d'observabilité et d'atteignabilité des modèles de Fornasini-Marchesini.
Dans le prochain chapitre, nous étudierons les propriétés de stabilité asymptotique et stabilité exponentielle d'un modèle non-linéaire tout à fait particulier. La démarche sera très différente puisque nous n'aurons plus à notre disposition les outils d'algèbre linéaire que nous avons utilisés ici.

4 Chapitre 4 : Etude d'un modèle polaire

4.1 Introduction

Les notions de stabilité simple et d'attractivité sont des notions très proches, que ce soit dans le cas 1D, ou dans le cas 2D. Nous avons vu précédemment que dans le cas particulier d'un modèle linéaire, l'attractivité implique toujours la stabilité. Cependant, il n'est pas aisé de produire, dans le cas non-linéaire donc, un modèle qui soit attractif mais instable. Dans le cas 1D, ce type de modèle est très rare, et à notre connaissance, nous avons deux exemples de tels modèles.
Le premier exemple d'un modèle 1D attractif instable fut proposé dans [55], puis détaillé dans [56]. Il s'agit d'un modèle 1D continu, c'est-à-dire une équation différentielle ordinaire. Les arguments fournis dans [56] sont de nature plutôt géométrique. En effet, pour ce modèle, il n'est pas possible de trouver d'expression explicite des solutions. Cependant, il est possible de tracer en tout point les courbes isoclines, et ainsi d'avoir une idée de l'allure d'une solution pour une condition initiale donnée.
Le deuxième exemple d'un modèle 1D attractif instable fut proposé par [17]. Il s'agit cette fois d'un modèle discret. La clé de cet exemple réside dans le fait que le point d'équilibre du modèle est un point de discontinuité de la fonction définissant modèle, comme nous allons le détailler dans la première partie de ce chapitre.
L'idée derrière ce chapitre est d'étudier ce modèle 1D tout à fait particulier et d'en proposer une extension 2D afin de voir si ses propriétés se conservent, *i.e.*, attractivité et instabilité.
Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il existe deux définitions principales de stabilité exponentielle dans la littérature des systèmes nD. Nous disposons d'une démonstration, qui reste valable dans le cadre non-linéaire, du fait que la stabilité exponentielle ES1 implique à la fois la stabilité et l'attractivité, que ce soit pour les modèles de Roesser ou pour les modèles de Fornasini-Marchesini. En revanche, il n'a jamais été proposé de telle démonstration pour la deuxième définition de stabilité exponentielle ES2. A priori on ne sait pas si cette définition, qui semble une extension naturelle de la définition de stabilité exponentielle dans le cas 1D, implique la stabilité ou l'attractivité dans le cas général. Nous avons vu, toujours dans le chapitre 2, que ces deux définitions, à priori bien différentes, sont, de façon surprenante, équivalentes dans le cas linéaire. Nous cherchons ici, dans le cadre plus étendu des systèmes non-linéaires, à éventuellement mettre en défaut la définition de stabilité exponentielle ES2 (définitions D.1 et D.2), en essayant de produire un modèle qui soit ES2 mais instable, ou alors ES2 mais non attractif, ce qui nous mettrait dans une position inconfortable.

4.2 Définitions de stabilité

Nous considérons à nouveau les définitions de stabilité, attractivité, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle données dans le chapitre 1 (voir la définition 1.2) pour le cas 1D, ainsi que les définitions de stabilité, attractivité, stabilité asymptotique et stabilité exponentielle (R-ES2) données à la fin de ce manuscrit pour un modèle 2D de Roesser non-linéaire, et dans le cas d'un point d'équilibre x_e quelconque (voir la définition D.1).

4.3 Etude du modèle 1D

Nous allons ici étudier en détail le modèle proposé dans [17]. Ce modèle a été introduit en coordonnées polaires, comme nous le présentons dans la section 4.3.1, mais le point d'équilibre fut donné en coordonnées cartésiennes, ce qui produit une certaine ambiguïté. Par ailleurs, les arguments proposés pour conclure à l'instabilité sont de nature géométrique. Nous voulons ici détailler la démonstration de manière analytique dans le but de pouvoir étendre ce modèle 1D au cas 2D.

4.3.1 Présentation «en polaire» - Modèle P1D

Considérons le modèle suivant :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} r_{i+1} = \sqrt{r_i}, \\ \theta_{i+1} = \sqrt{2\pi\theta_i}. \end{cases} \tag{P1D}$$

avec $r_i \in \mathbb{R}_+^\star$, $\theta_i \in [0; 2\pi]$ et soumis à des conditions initiales $r_0 > 0$ et $\theta_0 \in]0, 2\pi]$.
Nous verrons ci-après pourquoi nous avons choisi d'exclure la valeur 0 pour θ_0.
La solution se calcule par récurrence et est donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} r_i = r_0^{\frac{1}{2^i}}, \\ \theta_i = 2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}. \end{cases}$$

Cherchons un point d'équilibre :

$$r = \sqrt{r} \Leftrightarrow (r = 0 \text{ ou } r = 1),$$

$$\theta = \sqrt{2\pi\theta} \Leftrightarrow (\theta = 0 \text{ ou } \theta = 2\pi).$$

La valeur 0 étant exclue pour r, si l'on choisit θ_0 dans $[0, 2\pi]$, nous avons donc à priori deux points d'équilibres : $X_e = (r_e, \theta_e) = (1, 2\pi)$ et $X'_e = (r'_e, \theta'_e) = (1, 0)$.
Mais si l'on autorise θ_0 à prendre la valeur 0, alors la suite $(\theta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0, et si $\theta_0 \neq 0$ alors $\lim\limits_{i\to\infty} \theta_i = 2\pi$ tandis que $\lim\limits_{i\to\infty} r_i = 1$ pour tout $r_0 > 0$.
Ainsi le point d'équilibre $X'_e = (1, 0)$ n'est pas attractif.
En effet, formellement :

$$\forall \delta > 0 \ ; \ \exists \theta_0 \ ; \ |\theta_0| < \delta \text{ et } \lim_{i\to\infty} \theta_i = 2\pi \neq 0$$

C'est pour cette raison que dans le modèle (P1D), nous excluons le cas critique $\theta_0 = 0$, et nous faisons le choix $\theta_0 \in]0, 2\pi]$. Ainsi, nous étudierons le point d'équilibre $X_e = (1, 2\pi)$ uniquement.

4.3.2 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (r_e, \theta_e) = (1, 2\pi)$ pour le Modèle P1D

Tout d'abord, X_e est globalement attractif.
En effet $\forall r_0 > 0$ et $\forall \theta_0 \in]0, 2\pi]$, on a :

$$\lim_{i\to\infty} r_i = 1 \text{ et } \lim_{i\to\infty} \theta_i = 2\pi.$$

Ensuite, X_e est exponentiellement stable.
Pour voir ce point, nous allons appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ quand $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.
En effet, la majoration $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ nous permet d'écrire :

$$|\sqrt{x} - 1| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}|x - 1|, \qquad \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}.$$

D'autre part, l'intervalle $[1/2, 3/2]$ est stable par $x \mapsto \sqrt{x}$, et ainsi nous pouvons réitérer l'inégalité pour $x = \sqrt{x}$ et de proche en proche, il vient :

$$|x^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i |x - 1|, \qquad \text{si } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}.$$

En appliquant cette inégalité pour $x = r_0$ d'une part, et pour $x = \dfrac{\theta_0}{2\pi}$ d'autre part, on a, $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} |r_0^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i |r_0 - 1| & \text{pour } \frac{1}{2} \leqslant r_0 \leqslant \frac{3}{2}, \\ |2\pi(\frac{\theta_0}{2\pi})^{\frac{1}{2^i}} - 2\pi| \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^i |\theta_0 - 2\pi| & \text{pour } \pi \leqslant \theta_0 \leqslant 2\pi. \end{cases} \tag{4.1}$$

Nous avons ainsi la stabilité exponentielle et, celle-ci impliquant la stabilité, la stabilité de X_e pour (P1D).

En revanche X_e n'est pas globalement exponentiellement stable. En effet, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ se comporte «mal» au voisinage de 0. Supposons, par exemple, qu'il existe $M > 0$ et $q \in]0, 1[$ tels que pour tout $r_0 > 0$, on ait

$$|r_0^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant M|r_0 - 1|q^i$$

En raisonnant à i fixé et en faisant tendre r_0 vers 0, on obtient $1 \leqslant Mq^i$ et cette inégalité devient absurde quand i tend vers l'infini.

En résumé, X_e est globalement asymptotiquement stable et exponentiellement stable pour (P1D). Il ne s'agit donc manifestement pas du modèle présenté dans [17] comme étant attractif instable. Ce modèle fut présenté dans [17] en coordonnées polaires dans le but, probablement, d'obtenir une relation de récurrence plus simple. Cependant, l'explication géométrique à partir d'un dessin, qui est tout à fait intuitive, correspond en fait à une représentation en coordonnées cartésiennes. Nous allons donc réécrire ce modèle en coordonnées cartésiennes et voir ce qu'il advient des propriétés de stabilité. Cela dit, ce modèle (P1D) est intéressant en soit puisqu'il nous donne un exemple d'un modèle découplé qui est exponentiellement stable. Nous essaierons d'étendre ce modèle en modèle de Roesser 2D.

4.3.3 Présentation en cartésien-Modèle C1D

Nous allons dans cette section réécrire le modèle en coordonnées cartésiennes, via un changement de coordonnées bijectif et voir si les propriétés de stabilité précédentes se conservent. Considérons les fonctions suivantes :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star \times]0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (r, \theta) \longmapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta), \end{cases}$$

et

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^\star \times]0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (\sqrt{r}\cos(\sqrt{2\pi\theta}), \sqrt{r}\sin(\sqrt{2\pi\theta})). \end{cases} \tag{4.2}$$

La fonction Φ est bijective, et on a

$$\Phi^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \times]0, 2\pi] \\ (x, y) \longmapsto (r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta). \end{cases} \tag{4.3}$$

Avec

$$\theta = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & \text{si } x < 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi & \text{si } x > 0 \text{ et } y \leqslant 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

Remarquons que la fonction Φ^{-1} n'est pas continue en $(1, 0)$.
Si l'on pose

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ X = (x, y) \longmapsto (g \circ \Phi^{-1})(X), \end{cases}$$

(P1D) peut se réecrire :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} X_{i+1} = f(X_i) = (\sqrt{r_i}\cos(\sqrt{2\pi\theta_i}), \sqrt{r_i}\sin(\sqrt{2\pi\theta_i})), \\ X_0 = (r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0). \end{cases} \tag{C1D}$$

Remarque 4.1. Habituellement, lorsque l'on effectue un changement de coordonnées bijectif des coordonnées cartésiennes vers les coordonnées polaires, on définit Φ sur $\mathbb{R}_+^\star \times [0, 2\pi[$ ou sur $\mathbb{R}_+^\star \times]-\pi, \pi]$. Ici nous avons fait le choix de définir Φ sur $\mathbb{R}_+^\star \times]0, 2\pi]$ pour à nouveau évacuer le cas $\theta_0 = 0$.

Cherchons un point d'équilibre, *i.e.*, un point fixe pour f :

$$\begin{cases} \sqrt{r_e}\cos(\sqrt{2\pi\theta_e}) = r_e\cos\theta_e \\ \sqrt{r_e}\sin(\sqrt{2\pi\theta_e}) = r_e\sin\theta_e \end{cases} \iff \begin{cases} r_e = 1 \\ \theta_e = 2\pi \end{cases}$$

L'équivalence vient du fait que $\theta_e \in]0, 2\pi]$.
On a donc $X_e = (1, 0)$ en coordonnées cartésiennes.
La solution est donnée ici par , $\forall i \in \mathbb{N}$:

$$X_i = \left(r_0^{\frac{1}{2^i}} \cos\left(2\pi (\frac{\theta_0}{2\pi})^{\frac{1}{2^i}} \right), r_0^{\frac{1}{2^i}} \sin\left(2\pi (\frac{\theta_0}{2\pi})^{\frac{1}{2^i}} \right) \right). \tag{4.4}$$

4.3.4 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (1, 0)$ pour le modèle C1D

Nous pouvons voir facilement que X_e est à nouveau globalement attractif.
En effet,

$$\lim_{i \to \infty} X_i = (1, 0)$$

En revanche, nous allons voir que, de façon surprenante, X_e n'est plus stable.
En effet même si l'on part d'une condition initiale $X_0 = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$ proche du point d'équilibre X_e, la dynamique du modèle fait que l'on s'éloigne de X_e à un certain instant i_0 comme illustré par la figure 10.
Mathématiquement, il s'agit de montrer que :

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0; \quad \forall \delta > 0, \quad \exists X_0 \in \mathbb{R}^2; \quad \|X_0 - X_e\|_2 < \delta \\ &\exists i_0 \in \mathbb{N}; \quad \|X_{i_0} - X_e\|_2 > \varepsilon. \end{aligned}$$

Posons $\varepsilon := \sqrt{2}$ et soit $\delta > 0$.
1er cas : $\delta \leqslant 2$.
On a alors $-1 \leqslant \frac{2-\delta^2}{2} < 1$, et on choisit comme condition initiale particulière :

$$r_0 = 1 \text{ et } \theta_0 \in \left] 0 \ , \ \arccos(\frac{2-\delta^2}{2}) \right[.$$

Comme le cosinus est décroissant sur $[0, \pi]$, il vient :

$$\cos\theta_0 > \frac{2-\delta^2}{2} \text{ et } 2 - 2\cos\theta_0 < \delta^2.$$

Ainsi

$$\|X_0 - X_e\|_2 = \|(\cos\theta_0 - 1 \ , \ \sin\theta_0)\|_2 = \sqrt{2 - 2\cos\theta_0} < \delta.$$

2ème cas : $\delta > 2$.
Ici, on choisit simplement $r_0 = 1$ et $\theta_0 \in]0, \pi]$. On a alors : $\sqrt{2 - 2\cos\theta_0} \leqslant 2 < \delta$ et, à nouveau $\|X_0 - X_e\|_2 < \delta$.

Considérons la suite $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} = 2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}$. Cette suite est strictement croissante pour tout θ_0 dans $]0, 2\pi[$ et est à valeurs dans $]0, 2\pi[$. De plus, u_i tend vers 2π quand i tend vers l'infini.
Ainsi, il existe un indice $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\frac{\pi}{2} \leqslant 2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^{i_0}}} \leqslant \frac{3\pi}{2}, \tag{4.5}$$

et donc

$$\cos\left(2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^{i_0}}} \right) - 1 \leqslant -1.$$

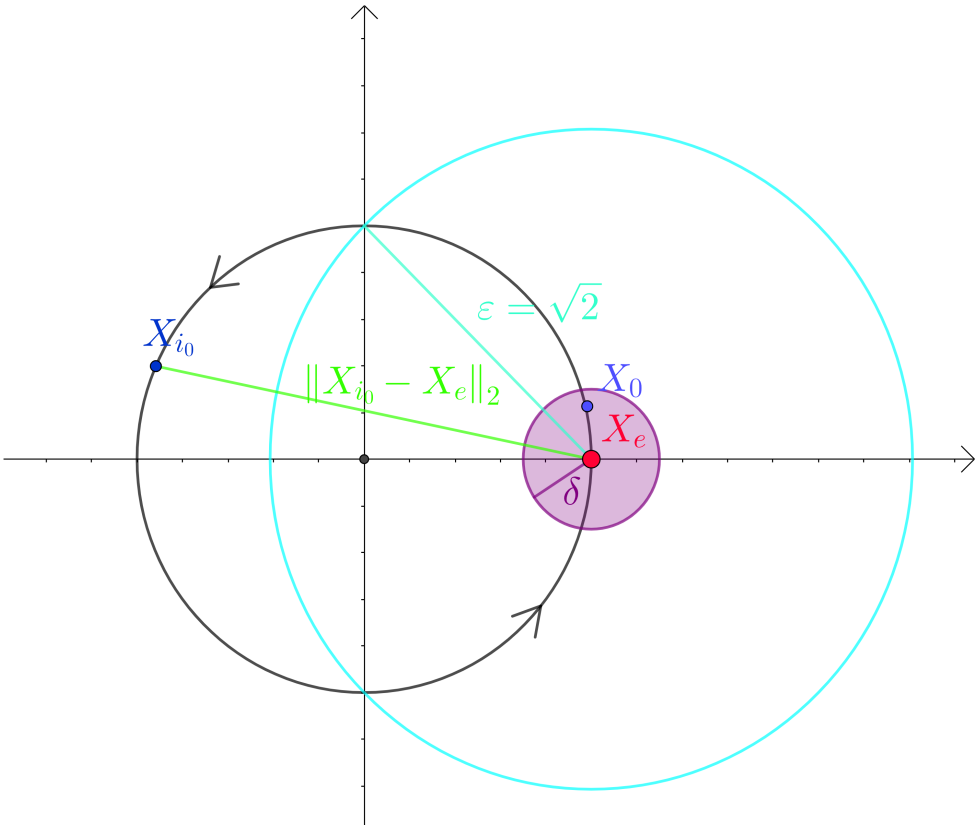


Figure 10: $X_e = (1, 0)$ est instable.

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|X_{i_0} - X_e\|_2 &= \left\| \left(\cos\left(2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^{i_0}}}\right) - 1, \sin\left(2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^{i_0}}}\right)\right)\right\|_2 \\ &\geqslant \sqrt{2 - 2\cos\left(2\pi \left(\frac{\theta_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^{i_0}}}\right)} \geqslant \sqrt{2}.\end{aligned}$$

En résumé, le point d'équilibre X_e est donc bien attractif et instable pour le modèle C1D. Voilà le modèle attractif instable présenté dans [17].
Comment expliquer le fait que les deux modèles (P1D) et (C1D) aient des propriétés différentes ? Il semble à priori que nous ayons simplement effectué un changement de coordonnées tout à fait usuel et qui plus est bijectif. Le point clé est que le point d'équilibre est justement un point de discontinuité de la fonction Φ^{-1} qui définit le changement de coordonnées. Il est donc important de bien distinguer le système défini en coordonnées polaires et le système défini en coordonnées cartésiennes. Ces deux modèles font intervenir des fonctions différentes et sont tout à fait différents.

4.4 Etude des modèles 2D

Nous allons étendre les deux modèles précédents (P1D) et (C1D) en modèles de Roesser 2D, et voir quelles propriétés de stabilité, attractivité, stabilité exponentielle sont conservées ou non.

4.4.1 Présentation en «polaire» en 2D - Modèle P2D

Considérons un couple de coordonnées polaires $(r^h_{i,j},\ \theta^h_{i,j})$ et $(r^v_{i,j},\ \theta^v_{i,j})$ régi par la dynamique :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} r^h_{i+1,j} = \sqrt{r^h_{i,j}} \\ \theta^h_{i+1,j} = \sqrt{2\pi\theta^h_{i,j}} \\ r^v_{i,j+1} = 0 \\ \theta^v_{i,j+1} = 0 \end{cases} \tag{P2D}$$

où pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ r^h_{i,j} > 0$ et $\theta^h_{i,j} \in]0, 2\pi]$.

Les conditions initiales sont maintenant des suites $(r^h_{0,j})_{j\in\mathbb{N}}$, $(\theta^h_{0,j})_{j\in\mathbb{N}}$, $(r^v_{i,0})_{i\in\mathbb{N}}$ et $(\theta^v_{i,0})_{i\in\mathbb{N}}$.
Remarquons que $r^v_{i,0}$ et $\theta^v_{i,0}$ n'ont aucune influence sur les trajectoires qui sont données par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \left(r^h_{i,j}, \theta^h_{i,j}, r^v_{i,j}, \theta^v_{i,j}\right) = \left(r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}}, 2\pi(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi})^{\frac{1}{2^i}}, 0, 0\right), \tag{4.6}$$

et le point d'équilibre est $(r^h_e, \theta^h_e, r^v_e, \theta^v_e) = (1, 2\pi, 0, 0)$.

Remarque 4.2. Nous avons décidé d'abandonner les composantes verticales $r^v_{i,j}, \theta^v_{i,j}$ afin de rester aussi proche que possible du modèle P1D. Comme ces composantes verticales ne joueront plus aucun rôle dans la suite de l'étude, nous noterons $r^h = r,\ \theta^h = \theta$, $(r_e, \theta_e) = (r^h_e, \theta^h_e) = (1, 2\pi)$ dans la suite pour alléger les notations.

4.4.2 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (r_e, \theta_e) = (1, 2\pi)$ pour le modèle P2D

4.4.2.1 Attractivité

Ce point d'équilibre est attractif. Pour le montrer, nous avons besoin d'un lemme :

Lemme 4.1. Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $x_j > 0,\ \forall j \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = 1$.
Soit $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $0 < y_i \leqslant 1,\ \forall i \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{i\to\infty} y_i = 0$.
Alors $\lim\limits_{i+j\to+\infty} x_j^{y_i} = 1$.

Preuve 4.1. Comme $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite positive qui converge vers 1, il existe un indice j_0 tel que pour $j \geqslant j_0$, $\frac{1}{2} \leqslant x_j \leqslant \frac{3}{2}$.
Si on pose $0 < a := \min(\frac{1}{2}, x_0, x_1, ..., x_{j_0-1}) < 1$ et $b := \max(\frac{3}{2}, x_0, ..., x_{j_0-1}) > 1$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $0 < a \leqslant x_j \leqslant b$.
Soit $0 < \varepsilon < 1$.

Soit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall j \geqslant N_1, \quad 0 < 1-\varepsilon \leqslant x_j \leqslant 1+\varepsilon$.
Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \geqslant N_2, \quad b^{y_i} \leqslant 1+\varepsilon \ (\lim_{i\to+\infty} b^{y_i} = 1)$.
Soit $N_3 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall i \geqslant N_3, \quad 1-\varepsilon \leqslant a^{y_i} \ (\lim_{i\to+\infty} a^{y_i} = 1)$.
Posons $N := 2\max(N_1, N_2, N_3)$.
Soient $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ tels que $i+j \geqslant N$.
Nous avons soit $i \geqslant N/2$ soit $j \geqslant N/2$.
Si $i \geqslant N/2$, alors, en particulier, $i \geqslant N_2$ et $i \geqslant N_3$ ce qui donne

$$1-\varepsilon \leqslant a^{y_i} \leqslant x_j^{y_i} \leqslant b^{y_i} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Si $j \geqslant N/2$, alors $j \geqslant N_1$. et $1-\varepsilon \leqslant x_j \leqslant 1+\varepsilon$ ainsi

$$1-\varepsilon \leqslant (1-\varepsilon)^{y_i} \leqslant x_j^{y_i} \leqslant (1+\varepsilon)^{y_i} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Ainsi, $\lim_{i+j\to+\infty} x_j^{y_i} = 1$. □

Montrons à présent l'attractivité.
Soient des conditions initiales $(r_{0,j})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_{0,j})_{j\in\mathbb{N}}$ telles que $\lim_{j\to\infty} r_{0,j} = 1$ et $\lim_{j\to\infty} \theta_{0,j} = 2\pi$, nous devons montrer que : $\lim_{i+j\to\infty} r_{i,j} = 1$ et $\lim_{i+j\to\infty} \theta_{i,j} = 2\pi$.
Dans les deux cas, le lemme 4.1 va nous donner le résultat. Pour la suite des rayons $r_{i,j}$ on prend $x_j = r_{0,j}$, $y_i = \frac{1}{2^i}$ et pour la suite des angles $\theta_{i,j}$ on applique le lemme avec $x_j = \frac{\theta_{0,j}}{2\pi}$ et la même suite y_i ce qui donne $\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} \to 1$ quand $i+j$ tend vers l'infini, et donc $\lim_{i+j\to\infty} \theta_{i,j} = 2\pi$.

4.4.2.2 R-ES2

Nous allons voir que X_e est R-ES2 pour le modèle (P2D).
On suppose ici que les conditions initiales sont exponentiellement décroissantes vers le point d'équilibre X_e. Nous allons montrer que d'une part la suite $(r_{i,j})_{i,j}$ tend exponentiellement vite vers 1, et d'autre part la suite $(\theta_{i,j})_{i,j}$ tend exponentiellement vite vers 2π, lorsque $i+j$ tend vers plus l'infini.
Etudions dans un premier temps $r_{i,j}$.
Par hypothèse, il existe $M > 0$ et $q \in]0,1[$ tels que :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad |r_{0,j} - 1| \leqslant Mq^j.$$

On cherche l'existence de $\hat{M} > 0$ et $\hat{q} \in]0,1[$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$,

$$\left| r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1 \right| \leqslant \hat{M}\hat{q}^{i+j}. \tag{4.7}$$

On peut supposer, sans perte de généralité, que $q > \frac{1}{2}$.
En effet, si $q \leqslant \frac{1}{2}$ alors on a : $|r_{0,j} - 1| \leqslant Mq^j \leqslant Mq'^j$ pour tout $q' > 1/2$.
Nous allons de nouveau appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x}. \end{cases}$

On a, pour tout $x \geqslant \frac{1}{4q^2}$, $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant q$.
L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur l'intervalle $I = \left[\frac{1}{4q^2}, +\infty\right[$ donne ($1 \in I$ car $1 < 2q$) :

$$\forall x \in I, \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{1}\right| \leqslant q|x-1|. \tag{4.8}$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{j\to+\infty} r_{0,j} = 1$ et $\frac{1}{4q^2} < 1$. Il existe donc $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geqslant j_0$, $r_{0,j} \geqslant \frac{1}{4q^2}$. Ainsi :

$$\forall j \geqslant j_0, \quad \left|\sqrt{r_{0,j}} - 1\right| \leqslant q|r_{0,j} - 1| \leqslant Mq^{j+1}$$

Fixons, dans un premier temps, $j \geqslant j_0$ et montrons par récurrence sur i que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \left|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1\right| \leqslant Mq^{i+j}.$$

Cette inégalité est vérifiée pour $i = 0$ par hypothèse. Supposons qu'elle le soit pour un certain $i \in \mathbb{N}$.
On a $r_{0,j} \geqslant \frac{1}{4q^2}$ et donc :

- si $r_{0,j} \geqslant 1$, alors $r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{4q^2}$.
- si $r_{0,j} \leqslant 1$, alors $r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \geqslant r_{0,j} \geqslant \frac{1}{4q^2}$.

On peut donc appliquer l'inégalité (4.8) pour $x = r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \in I$:

$$\left|r_{0,j}^{\frac{1}{2^{i+1}}} - 1\right| = \left|\sqrt{r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}}} - 1\right| \leqslant q\left|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1\right| \leqslant qMq^{i+j} \underset{\text{H.R.}}{\leqslant} Mq^{i+j+1}.$$

Ainsi on a, pour tout $j \geqslant j_0$, et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\left|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1\right| \leq Mq^{i+j}.$$

Fixons maintenant $j \leqslant j_0 - 1$.
En effectuant un développement limité, on a, lorsque i est au voisinage de $+\infty$,

$$r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} = \exp\left(\frac{1}{2^i}\ln r_{0,j}\right) = 1 + \frac{1}{2^i}\ln r_{0,j} + \underset{i\to\infty}{o}\left(\frac{\ln r_{0,j}}{2^i}\right)$$

ce qui nous donne l'équivalent : $\dfrac{r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1}{q^{i+j}} \underset{i\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln r_{0,j}}{q^j}\dfrac{1}{(2q)^i}$, et cette quantité tend vers 0 lorsque $i \to +\infty$ car $2q > 1$.

Par conséquent, la suite $\left(\frac{r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}}-1}{q^{i+j}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, et est donc bornée. Il existe donc M_j (qui dépend de j) tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}}-1}{q^{i+j}}\right| \leqslant M_j.$$

Notons $M' := \max_{0\leqslant j\leqslant j_0} M_j$ et $\hat{M} := \max\{M, M'\}$.
On a facilement pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \hat{M} q^{i+j},$$

ce qui est exactement l'inégalité (4.7) que nous cherchions à obtenir.
La démonstration est similaire pour $\theta_{i,j}$.

4.4.2.3 Stabilité

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < \frac{3}{4}$.
Posons $\delta = \varepsilon$. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.
Nous allons à nouveau utiliser l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.
En effet, sur cet intervalle, nous avons la majoration :

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon}}.$$

Par conséquent, l'inégalité des accroissements finis donne :

$$|\sqrt{x} - 1| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon}}|x-1|.$$

L'intervalle $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ étant stable par $x \mapsto \sqrt{x}$, de proche en proche, on obtient :

$$|x^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon}}\right)^i |x-1|. \tag{4.9}$$

Si l'on suppose que $|r_{0,j} - 1| \leqslant \delta = \varepsilon$, nous pouvons appliquer l'inégalité (4.9) à $r_{0,j}$, et l'on obtient :

$$|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \underbrace{\left(\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon}}\right)^i}_{\leqslant 1} |r_{0,j} - 1| \leqslant \varepsilon.$$

En procédant de façon similaire pour $\theta_{i,j}$, nous obtenons que X_e est stable pour (P2D).
Le modèle (P2D) possède donc les mêmes propriétés de stabilité asymptotique et de stabilité exponentielle que le modèle (P1D) dont il est une extension «naturelle».
Nous allons voir s'il en est de même pour le passage du modèle (C1D) au modèle (C2D).

4.4.3 Présentation en cartésien en 2D- Modèle C2D

On écrit ici :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad X^h_{i,j} = \begin{pmatrix} r^h_{i,j}\cos(\theta^h_{i,j}) \\ r^h_{i,j}\sin(\theta^h_{i,j}) \end{pmatrix} \quad ; \quad X^v_{i,j} = 0.$$

et on effectue le même changement de coordonnées que dans le paragraphe 4.3.3, *i.e.*, on considère $f^h = g \circ \Phi^{-1}$, où les fonctions g et Φ^{-1} sont définies respectivement par (4.2) et(4.3). Ainsi, (P2D) se réécrit :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} X^h_{i+1,j} = f^h(X^h_{i,j}) = \begin{pmatrix} \sqrt{r^h_{i,j}}\cos(\sqrt{2\pi\theta^h_{i,j}}) \\ \sqrt{r^h_{i,j}}\sin(\sqrt{2\pi\theta^h_{i,j}}) \end{pmatrix}, \\ X^v_{i,j+1} = 0. \end{cases} \tag{C2D}$$

avec, pour tout (i,j) dans $\mathbb{N}^2$, $r^h_{i,j} > 0$ et $\theta^h_{i,j}$ dans $]0, 2\pi]$ par définition de Φ et g. Les conditions initiales sont de la forme : $\Psi^h_j = (r^h_{0,j}\cos(\theta^h_{0,j}), r^h_{0,j}\sin(\theta^h_{0,j}))$ et Ψ^v_i quelconque, et les trajectoires :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} X^h_{i,j} = \left(\left(r^h_{0,j}\right)^{\frac{1}{2^i}} \cos\left(2\pi\left(\frac{\theta^h_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right), \left(r^h_{0,j}\right)^{\frac{1}{2^i}} \sin\left(2\pi\left(\frac{\theta^h_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right)\right), \\ X^v_{i,j} = 0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Le point d'équilibre de (C2D) est $X_e = (X^h_e, X^v_e) = ((1,0),(0,0))$.

Remarque 4.3. Ici encore, pas de composantes verticales $X^v_{i,j}$. On notera, pour simplifier à nouveau : $X^h_{i,j} = X_{i,j}$, $r^h_{i,j} = r_{i,j}$, $\theta^h_{i,j} = \theta_{i,j}$ et $X_e = X^h_e = (1,0)$.

4.4.4 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (1,0)$ pour le modèle C2D

4.4.4.1 Stabilité

$(1,0)$ est instable pour (C2D). Ce fait provient de l'étude du modèle (C1D). En effet, on peut choisir ici les conditions initiales particulières qui nous ramènent dans le cas 1D et la preuve est établie. On choisit $(\Psi^v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ quelconque et $\Psi^h_j = (r_0\cos\theta_0, r_0\sin\theta_0)$, autrement dit $r^h_{0,j} = r_0$ et $\theta^h_{0,j} = \theta_0$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

4.4.4.2 Attractivité

Concernant l'attractivité, nous devons montrer que pour toutes conditions initiales $(r_{0,j}\cos\theta_{0,j}, r_{0,j}\sin\theta_{0,j})$ qui tendent vers $(1,0)$ quand j tend vers plus l'infini, les trajectoires correspondantes $x_{i,j}$ tendent également vers $(1,0)$ quand $i+j$ tend vers plus l'infini. Mais ceci est faux. Voici un contre exemple :
En effet, considérons la condition initiale :

$$\begin{cases} r_{0,j} = 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ \theta_{0,j} = 2\pi e^{-2^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{4.11}$$

D'une part, $r_{0,j} > 0$ et $\theta_{0,j} \in]0, 2\pi]$, pour tout $j \in \mathbb{N}$. Et d'autre part, on a bien

$$\Psi_j^h = (r_{0,j}\cos(\theta_{0,j}), r_{0,j}\sin(\theta_{0,j})) = (\cos(2\pi e^{-2^j}), \sin(2\pi e^{-2^j})) \underset{j\to+\infty}{\to} (1,0).$$

Mais, dans la direction particulière $i = j$,

$$X_{i,i} = \left(\cos\left(2\pi\left(\frac{2\pi e^{-2^i}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right),\ \sin\left(2\pi\left(\frac{2\pi e^{-2^i}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right)\right) = \left(\cos(\frac{2\pi}{e}), \sin(\frac{2\pi}{e})\right).$$

Autrement dit, le passage du 1D au 2D tel que nous l'avons défini nous fait perdre la propriété d'attractivité que nous avions pour le modèle (C1D).

4.4.4.3 R-ES2

X_e n'est pas R-ES2 pour (C2D). Nous pouvons utiliser le même contre-exemple. En effet, il est facile de vérifier que la condition initiale (4.11) tend vers X_e à vitesse exponentielle. Mais la solution issue de cette condition initiale ne tend pas vers X_e.

En résumé, nous n'avons pas pu conserver les propriétés remarquables de (C1D), à savoir attractif instable, en passant à un modèle 2D. Nous avons perdu l'attractivité. Cette notion semble, en définitive, plus exigeante dans le cas 2D que dans le cas 1D.

4.4.5 Présentation en cartésien 2D-Modèle C'2D

Pour finir cette partie, nous allons proposer une dernière version de ce modèle en 2D, en faisant en sorte que le point d'équilibre redevienne un point où la fonction définissant le modèle est continue, afin d'étudier à nouveau la stabilité, l'attractivité, et la stabilité exponentielle R-ES2.
L'idée est de considérer le modèle (C2D) mais en prenant cette fois $\theta_{i,j}$ dans $]\pi, 3\pi]$, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.
Réecrivons ce modèle :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad X_{i+1,j} = f(X_{i,j}) = \begin{pmatrix} \sqrt{r_{i,j}}\cos(\sqrt{2\pi\theta_{i,j}}) \\ \sqrt{r_{i,j}}\sin(\sqrt{2\pi\theta_{i,j}}) \end{pmatrix} \tag{C'2D}$$

avec, pour tout (i,j) dans $\mathbb{N}^2$, $r_{i,j}^h > 0$ et $\theta_{i,j}^h$ dans $]\pi, 3\pi]$
Les conditions initiales sont toujours de la forme : $\Psi_j^h = (r_{0,j}\cos(\theta_{0,j}), r_{0,j}\sin(\theta_{0,j}))$, Ψ_i^v quelconque, et les trajectoires :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad X_{i,j} = \left((r_{0,j})^{\frac{1}{2^i}}\cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right), (r_{0,j})^{\frac{1}{2^i}}\sin\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right)\right). \tag{4.12}$$

Le point d'équilibre reste le même $X_e = (1,0)$.

4.4.6 Propriétés du point d'équilibre $X_e = (1, 0)$ pour le modèle C'2D

4.4.6.1 Stabilité

Avec cette définition du modèle, nous récupérons la propriété de stabilité : X_e est stable.
Nous allons ici travailler avec la norme euclidienne. Pour tout $\varepsilon > 0$, on cherche l'existence de $\delta > 0$ tel que si :

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \|(r_{0,j}\cos\theta_{0,j} - 1, r_{0,j}\sin\theta_{0,j})\|_2 \leqslant \delta,$$

alors

$$\sup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \left\| \left(r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \cos 2\pi \left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} - 1, r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \sin 2\pi \left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} \right) \right\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $0 < \delta < \frac{1}{2}$.
Nous avons, par hypothèse : $\forall j \in \mathbb{N}, \quad |r_{0,j} - 1| \leqslant \delta$ (il suffit d'écrire la norme euclidienne pour s'en convaincre).
D'autre part, en utilisant l'inégalité des accroissements finis et le fait que l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ est stable par la fonction racine carrée, il vient :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad |r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |r_{0,j} - 1| \leqslant \delta. \tag{4.13}$$

Ensuite, en utilisant le fait que pour tous réels x, y et z,

$$\|(x,y)\|_2 \leqslant z \Rightarrow (|x| \leqslant z \text{ et } |y| \leqslant z),$$

nous avons

$$|r_{0,j}\cos\theta_{0,j} - 1| \leqslant \delta \quad \text{et} \quad |r_{0,j}\sin\theta_{0,j}| \leqslant \delta. \tag{4.14}$$

En utilisant (4.14) et en écrivant :

$$\begin{aligned} |\cos\theta_{0,j} - 1| &= |r_{0,j}\cos\theta_{0,j} - r_{0,j}\cos\theta_{0,j} + \cos\theta_{0,j} - 1| \\ &\leqslant |r_{0,j}\cos\theta_{0,j} - 1| + |\cos\theta_{0,j}||1 - r_{0,j}| \\ &\leqslant 2\delta. \end{aligned}$$

et

$$|\sin\theta_{0,j}| = \frac{|r_{0,j}\sin\theta_{0,j}|}{|r_{0,j}|} \leqslant 2\delta \qquad (\text{car } r_{0,j} > \frac{1}{2}),$$

nous avons

$$|\cos\theta_{0,j} - 1| \leqslant 2\delta \quad \text{et} \quad |\sin\theta_{0,j}| \leqslant 2\delta. \tag{4.15}$$

D'autre part, nous allons établir la majoration suivante, quand x est proche de 1 :

$$\left|\cos(2\pi\sqrt{x}) - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\cos(2\pi x) - 1\right|. \tag{4.16}$$

En effectuant un développement limité,

$$\begin{aligned}\frac{|\cos(2\pi\sqrt{x})-1|}{|\cos(2\pi x)-1|} &= \frac{\cos(2\pi\sqrt{x})-1}{\cos(2\pi x)-1} = \frac{\cos(2\pi\sqrt{x}-2\pi)-1}{\cos(2\pi x-2\pi)-1} \\ &= \frac{\cos(2\pi(\sqrt{x}-1))-1}{\cos(2\pi(x-1))-1} = \frac{-2\pi^2(\sqrt{x}-1)^2+o((\sqrt{x}-1)^2)}{-2\pi^2(x-1)^2+o((x-1)^2)} \\ &\underset{x\to 1}{\sim} (\frac{\sqrt{x}-1}{x-1})^2 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Ceci nous donne l'existence de $0<\eta<1$ tel que pour tout x dans $]1-\eta\ ;1+\eta[$, l'inégalité (4.16) est vérifiée.
Par ailleurs, si $x\in]1-\eta,1+\eta[$, alors $\sqrt{x}\in]1-\eta,1+\eta[$. Ainsi, s'il l'on écrit (4.16) en remplaçant x par $\sqrt{x}$, il vient :

$$\left|\cos(2\pi x^{\frac{1}{4}})-1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|\cos(2\pi\sqrt{x})-1\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 |\cos(2\pi x-1)|.$$

En réitérant, de proche en proche, il existe $0<\eta<1$ tel que $\forall x\in]1-\eta,1+\eta[$ et $\forall i\in\mathbb{N}$,

$$|\cos\left(2\pi x^{\frac{1}{2^i}}\right)-1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |\cos(2\pi x)-1|. \tag{4.17}$$

En remarquant que

$$\left|\frac{\sin(2\pi\sqrt{x})}{\sin(2\pi x)}\right| \underset{x\to 1}{\to} \frac{1}{2},$$

et en effectuant le même raisonnement, il existe $0<\gamma<1$ tel que $\forall x\in]1-\gamma,1+\gamma[$ et $\forall i\in\mathbb{N}$,

$$|\sin\left(2\pi x^{\frac{1}{2^i}}\right)| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |\sin(2\pi x)|. \tag{4.18}$$

Nous voulons appliquer les inégalités (4.17) et (4.18) pour $x=\dfrac{\theta_{0,j}}{2\pi}$.
Pour cela, il faut que $\cos\theta_{0,j}$ soit suffisament proche de 1 pour que

$$1-\eta<\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}<1+\eta,$$

et que $\sin\theta_{0,j}$ soit suffisament proche de 0 pour que

$$1-\gamma<\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}<1+\gamma.$$

Ces deux conditions vont être garanties par la continuité des deux fonctions suivantes :

$$f_1 : \left\{\begin{array}{l}[-1,1]\to]\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}[\\ x\mapsto \arccos(-x)+\frac{3\pi}{2},\end{array}\right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{\begin{array}{l}[-1,1]\to]\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}[\\ x\mapsto \arcsin x+2\pi.\end{array}\right.$$

Ces deux fonctions sont continues et nous avons, $\forall x\in]\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}[$,

$$f_1(\cos x)=x \text{ et } f_2(\sin x)=x.$$

La continuité de ces deux fonctions en 1, respectivement en 0, s'écrit :

$$\forall \eta > 0\ \exists \alpha > 0; |\cos \theta_{0,j} - 1| < \alpha \Rightarrow |\theta_{0,j} - 2\pi| < 2\pi\eta \left(\Rightarrow 1 - \eta < \frac{\theta_{0,j}}{2\pi} < 1 + \eta \right),$$

$$\forall \gamma > 0\ \exists \beta > 0; |\sin \theta_{0,j}| < \beta \Rightarrow |\theta_{0,j} - 2\pi| < 2\pi\gamma \left(\Rightarrow 1 - \gamma < \frac{\theta_{0,j}}{2\pi} < 1 + \gamma \right).$$

Ceci étant établi, posons : $\delta = \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}}\right)$.

D'après la majoration (4.15), nous pouvons ainsi appliquer (4.17) pour $x = \frac{\theta_{0,j}}{2\pi}$, et nous avons :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \left|\cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right) - 1\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |\cos\theta_{0,j} - 1| \leqslant 2\delta \leqslant \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{2}}. \quad (4.19)$$

De même, en utilisant (4.15), nous pouvons appliquer (4.18) pour $x = \frac{\theta_{0,j}}{2\pi}$, et nous avons :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \left|\sin\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |\sin\theta_{0,j}| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{2}}. \quad (4.20)$$

En utilisant (4.13), nous avons donc

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad |r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} - 1| \leqslant \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}}.$$

Notons $a := r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}}$, $b := \cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right)$ et $c := \sin\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right)$.

Il vient

$$\begin{aligned} |ab - 1| = |(a-1)b + b - 1| &\leqslant |a-1||b| + |b-1| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3\sqrt{2}} + \frac{2\varepsilon}{3\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

et

$$|ac| = |(a-1)c + c| \leqslant |a-1||c| + |c| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Ainsi, pour tout (i,j) dans $\mathbb{N}^2$:

$$\left|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \cos 2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \left|r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \sin 2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

Finalement,

$$\left\| \left(r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \cos 2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} - 1, r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \sin 2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} \right) \right\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2,$$

et la stabilité est établie.

4.4.6.2 Attractivité

X_e est attractif.
Nous allons à nouveau travailler avec la norme euclidienne, il s'agit donc de montrer que : $\lim_{j\to\infty} \|\Psi_j^h - X_e\|_2 = 0 \Rightarrow \lim_{i+j\to\infty} \|X_{i,j} - X_e\|_2 = 0$.
Soit Ψ_j^h une condition initiale telle que $\|\Psi_j^h - X_e\|_2 \to 0$, c'est-à-dire :

$$\|(r_{0,j}\cos\theta_{0,j}, r_{0,j}\sin\theta_j) - (1,0)\|_2 \to 0.$$

Ceci implique $r_{0,j} \to 1$ et $\theta_{0,j} \to 2\pi$ (c'est ici que le choix de considérer θ dans $]\pi, 3\pi]$ est important). Nous allons ici réutiliser le lemme 4.1.
En utilisant le lemme une première fois avec $x_j = r_{0,j}$ et $y_i = \dfrac{1}{2^i}$, il vient

$$\lim_{i+j\to+\infty} r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} = 1.$$

En utilisant le lemme une deuxième fois avec $x_j = \dfrac{\theta_{0,j}}{2\pi}$ et $y_i = \frac{1}{2^i}$, on a

$$\lim_{i+j\to+\infty} \left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}} = 1.$$

Finalement, avec la continuité du cosinus et la composition des limites, on a

$$\lim_{i+j\to+\infty} r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \cos\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right) = 1.$$

En appliquant le même raisonnement sur la deuxième composante, on a de même

$$\lim_{i+j\to+\infty} r_{0,j}^{\frac{1}{2^i}} \sin\left(2\pi\left(\frac{\theta_{0,j}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2^i}}\right) = 0,$$

ce qui permet de conclure que X_e est attractif pour (C'2D) .

4.4.6.3 R-ES2

Nous travaillons à nouveau avec la norme euclidienne. Nous allons ici montrer que X_e est R-ES2 pour (C'2D), dans la cas particulier où $r_{i,j} = 1$, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$.
Pour alléger les notations, nous allons ici noter $\alpha_j := \dfrac{\theta_{0,j}}{2\pi}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.
Supposons que nous avons une condition initiale Ψ_j^h qui décroît exponentiellement vers X_e. Autrement dit,

$$\exists (M,q) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0,1[; \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad \|(\cos\theta_{0,j} - 1, \sin\theta_{0,j})\|_2 \leqslant Mq^j. \tag{4.21}$$

Nous allons montrer qu'il existe un couple $(\hat{M}, \hat{q}) \in \mathbb{R}_+^\star \times]0,1[$ tel que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\|X_{i,j} - X_e\|_2 \leqslant \hat{M}\hat{q}^{i+j},$$

c'est-à-dire tel que

$$\|(\cos\left(2\pi(\alpha_j)^{\frac{1}{2^i}}\right)-1,\sin\left(2\pi(\alpha_j)^{\frac{1}{2^i}}\right))\|_2 \leqslant \hat{M}\hat{q}^{i+j}. \tag{4.22}$$

Supposons que (4.21) est vérifiée, cela implique en particulier, puisque l'on travaille avec la norme euclidienne : $|\cos\theta_{0,j}-1| \leqslant Mq^j$, pour tout entier naturel j.

On peut supposer sans perte de généralité que $q > \dfrac{1}{2}$.

En utilisant le lemme 4.1 , il vient $\lim\limits_{i+j\to+\infty} \alpha_j^{\frac{1}{2^i}} = 1$.

Ainsi :

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}; \quad i+j\geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}-1|<\varepsilon. \tag{4.23}$$

D'autre part, rappelons qu'il existe $0<\eta<1$ tel que $\forall x\in]1-\eta,1+\eta[$, l'inégalité (4.17) soit vérifiée.

Prenons $\varepsilon=\eta$ dans (4.23).

Cela donne l'existence de N_0 (qui dépend de η) tel que $|\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}-1|<\eta$ pour $i+j\geqslant N_0$.

Supposons, dans un premier temps, que $j\geqslant N_0$.

Ainsi on a, pour tout $i\in\mathbb{N}$, $|\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}-1|<\eta$ et on peut appliquer (4.17) avec $x=\alpha_j$ ce qui donne : $\forall i\in\mathbb{N}$,

$$|\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}})-1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^i |\cos(2\pi\alpha_j)-1| = \left(\frac{1}{2}\right)^i |\cos(\theta_{0,j})-1| \leqslant Mq^{i+j}.$$

Fixons maintenant $j<N_0$.

Nous allons étudier la suite

$$(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} = \left(\frac{\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}})-1}{q^{i+j}}\right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Nous avons :

$$\alpha_j^{\frac{1}{2^i}} = e^{\frac{1}{2^i}\ln(\alpha_j)} = 1+\frac{1}{2^i}\ln(\alpha_j)+\underset{i\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(\alpha_j)}{2^i}\right) = 1+\frac{1}{2^i}\ln(\alpha_j)+\underset{i\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^i}\right).$$

D'autre part,

$$\cos(2\pi x) = 1-2\pi^2(x-1)^2+\underset{x\to1}{o}\left((x-1)^2\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}) &= 1-2\pi^2(\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}-1)^2+\underset{i\to+\infty}{o}\left((\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}-1)^2\right)\\
&= 1-2\pi^2\left(\frac{1}{2^i}\ln(\alpha_j)+\underset{i\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{2^i}\right)\right)^2+\underset{i\to+\infty}{o}\left((\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}-1)^2\right)\\
&= 1-2\pi^2\left(\frac{1}{2^{2i}}(\ln\alpha_j)^2+\underset{i\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{4^i}\right)\right)+\underset{i\to+\infty}{o}\left(\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}\right).
\end{aligned}$$

Et on obtient les équivalents :

$$\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}) - 1 \underset{i\to+\infty}{\sim} -2\pi^2(\ln\alpha_j)^2)(\frac{1}{4^i}),$$

et

$$\frac{\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}) - 1}{q^{i+j}} \underset{i\to+\infty}{\sim} -2\pi^2(\ln\alpha_j)^2\left(\frac{1}{(4q)^i}\right)q^{-j}.$$

Mais $q > \frac{1}{2}$ d'où β_i tend vers 0 quand i tend vers plus l'infini, et donc cette suite est bornée.
Il existe M_j (qui dépend de j) tel que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \left|\frac{\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}) - 1}{q^{i+j}}\right| \leqslant M_j.$$

Notons $M' = \max_{0\leqslant j\leqslant N_0-1} M_j$ et $\tilde{M} = \max\{M, M'\}$. On peut facilement vérifier que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $i \in \mathbb{N}$,

$$|\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}) - 1| \leqslant \tilde{M}q^{i+j}.$$

Pour la deuxième composante $\sin(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}})$ de $X_{i,j} - X_e$, nous pouvons reprendre le même raisonnement, en remarquant de nouveau que

$$\left|\frac{\sin(2\pi\sqrt{x})}{\sin(2\pi x)}\right| \underset{x\to1}{\to} \frac{1}{2}.$$

On aura donc l'existence de $\bar{M} > 0$ tel que pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\left|\sin(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}})\right| \leqslant \bar{M}q^{i+j}.$$

Et finalement,

$$\begin{aligned}\|(\cos(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}) - 1, \sin(2\pi\alpha_j^{\frac{1}{2^i}}))\|_2^2 &\leqslant \tilde{M}^2q^{2i+2j} + \bar{M}^2q^{2i+2j}\\ &\leqslant (\max(\tilde{M},\bar{M}))^2(q^{i+j})^2\\ &\leqslant \hat{M}^2(\hat{q}^{i+j})^2,\end{aligned}$$

et (4.22) est vérifiée.

4.5 Résumé des propriétés des différents modèles

Nous allons ici résumer les propriétés que nous avons pu démontrer pour les différents modèles que nous avons présentés dans ce chapitre sous la forme d'un tableau.

Modèle	(P1D)	(C1D)	(P2D)	(C2D)	(C'2D)
stabilité	✓	×	✓	×	✓
attractivité	✓	✓	✓	×	✓
ES(1D),R-ES2(2D)	locale	×	✓	×	✓ pour $r_{i,j} = 1$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons analysé en détail un modèle 1D particulier qui est à la fois attractif et instable. Il fut démontré dans [17] que ce phénomène ne peut se produire que si la fonction définissant le modèle est discontinue. En essayant de généraliser ce modèle, nous n'avons pas pu conserver ce comportement attractif instable même en choisissant la même fonction pour définir le modèle 2D. En effet, soit en essayant de rendre le modèle (C2D) instable en le définissant comme (C1D), nous perdons l'attractivité, soit en essayant de retrouver l'attractivité en choisissant $\theta_{i,j}^h$ dans $]\pi, 3\pi]$ avec (C'2D) nous récupérons la stabilité, ainsi que la stabilité exponentielle R-ES2. La situation semble donc plus complexe dans le cas des modèles 2D. La notion d'attractivité pourrait impliquer la stabilité même dans le cas non linéaire. La recherche d'un contre-exemple est un problème ouvert que nous n'avons pas résolu.

Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous avons proposé un travail autour des notions de stabilité des systèmes dynamiques 2D discrets de Roesser et de Fornasini-Marchesini. Ces notions de stabilité ont été construites en s'appuyant sur la théorie très vaste des systèmes dynamiques en une dimension. L'objet du premier chapitre fut d'introduire ces notions dans le cas 1D, ainsi que les liens entre ces différentes notions dans les cas respectivement linéaire ou non linéaire. La hiérarchie entre ces notions de stabilité ayant été établie pour ce cas unidimensionnel, il convenait de prendre connaissance des deux modèles les plus couramment utilisés dans la communauté des systèmes 2D.

Si les définitions de stabilité pour les systèmes 2D sont une généralisation parfois naturelle de celles employées dans l'univers des systèmes 1D, le principal objectif du deuxième chapitre était de partir d'une base cohérente de définitions de stabilité et de confirmer, au moins dans le cadre des systèmes linéaires, que les liens entre ces définitions sont bien conformes à la hiérarchie qui a été dressée pour les systèmes 1D. Que ce soit pour les modèles de Roesser ou les modèles de Fornasini-Marchesini linéaires, la notion très pure de stabilité structurelle, qui ne dépend pas des conditions initiales du modèle, est équivalente aux deux notions de stabilité exponentielle qui pourtant semblent assez dissemblables l'une de l'autre et ces trois notions impliquent toutes l'attractivité qui elle même implique la stabilité.

Cependant, si l'on bascule dans l'univers des systèmes non linéaires, la situation est moins confortable. En effet, dans ce cadre, de nombreuses questions demeurent sans réponse. Rien ne garantit que les deux définitions de stabilité exponentielle ES1 et ES2 restent équivalentes, ni que l'attractivité implique la stabilité, puisque ce n'est pas le cas pour les modèles 1D non-linéaires. De surcroît, il serait intéressant d'analyser le cas continu, ou le cas hybride, et éventuellement de faire le lien entre les différentes notions de stabilité étudiées ici et d'autres notions de stabilité utilisées dans l'étude des systèmes dynamiques multidimensionnels. Nous pouvons citer, par exemple, la notion de stabilité EBSB (entrée bornée - sortie bornée) qui fut étudiée dans le contexte de l'approche comportementale dans [57].

Dans le troisième chapitre, nous avons énoncé une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique pour les modèles linéaires de Fornasini-Marchesini, par une approche, encore une fois, qui s'appuie sur le cas 1D et qui utilise des outils d'algèbre linéaire. Cependant, nous avons dû faire la concession de ne prendre en compte que les modèles définis par des matrices qui commutent et dont au moins l'une est diagonalisable. Pour aller plus loin dans ce travail, comment pourrions nous étendre ce résultat lorsque cette hypothèse n'est plus vérifiée ? Une idée intéressante serait d'utiliser les résultats proposés dans [51] afin de caractériser la stabilité asymptotique quand les matrices A et B sont simultanément trigonalisables, ce qui

représente une classe bien plus large de matrices. Dans ce contexte, nous devons tout d'abord adapter les résultats de [51] du cas où les indices i et j vivent dans l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ au cas où ils sont dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, une différence qui est connue pour changer le comportement attractif des solutions (voir par exemple [29]). Alors, nous aurions la possibilité d'ordonner les valeurs propres des deux matrices, ce qui fut le point crucial de notre approche.

Dans le quatrième et dernier chapitre, nous avons essayé d'étendre en 2D un modèle 1D connu pour avoir la particularité rare d'être à la fois attractif et instable, et ce dans le but d'observer si ces propriétés se conservaient ou non. L'objectif de ce travail était double. D'une part, nous voulions éventuellement construire un modèle 2D qui soit attractif et instable, ce qui n'a jamais été proposé, et d'autre part, nous voulions mettre à l'épreuve sur ce modèle non linéaire très particulier la définition de stabilité exponentielle R-ES2 pour laquelle il n'a jamais été démontré qu'elle implique ni la stabilité, ni l'attractivité.

A l'issue de cette étude, ces deux questions demeurent sans réponses. Premièrement, il semble que la notion d'attractivité pour les systèmes 2D soit plus forte que pour les modèles 1D. En effet, le fait que les conditions initiales soient supposées converger asymptotiquement vers le point d'équilibre, et la notion très forte de limite, lorsque $i + j$ tend vers plus l'infini, qui impose la convergence des trajectoires vers le point d'équilibre quel que soit le chemin asymptotique parcouru pour (i, j) se déplaçant sur le réseau $\mathbb{N}^2$, pourrait imposer de la stabilité, même dans le cas non-linéaire. Deuxièmement, la définition de stabilité exponentielle R-ES2 étant fondamentalement différente de la définition R-ES1 dans la mesure où elle ne prend en compte qu'une certaine classe de conditions initiales (celles qui sont à décroissance exponentielle), nous pouvons raisonnablement continuer de nous demander si ces deux définitions sont équivalentes ou non dans le cas non linéaire.

A Annexe A : Définition de la stabilité exponentielle R-ES1 pour les modèles de Roesser continus et hybrides

Nous allons ici étudier le modèle de Roesser triangulaire qui a inspiré la définition de stabilité exponentielle R-ES1 dans le cas discret. Ensuite, afin d'étendre cette définition, nous allons construire des modèles de Roesser triangulaires dans les cas continus et hybrides.
Dans chacun des cas, nous allons commencer par étudier la solution, pour des conditions initiales données, de chacun des modèles. En majorant cette solution de façon similaire au cas discret, nous serons amenés à proposer une définition de stabilité exponentielle dans les cas continus et hybrides.
Pour finir, nous montrerons, dans chaque cas, que cette définition implique bien la stabilité asymptotique, ce qui constitue la propriété que nous cherchons à obtenir.

A.1 Solutions d'un Roesser triangulaire

A.1.1 Cas discret

On considère le modèle de Roesser suivant :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h_{i,j} \\ x^v_{i,j} \end{pmatrix}, \\ x^h_{0,j} = \Psi^h_j, \qquad x^v_{i,0} = \Psi^v_i. \end{cases} \tag{A.1}$$

Ici $q \in]0,1[$ et $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $x^h_{i,j}$ et $x^v_{i,j}$ sont des nombres réels.
Nous allons dans un premier temps calculer la solution de (A.1).

La deuxième ligne nous donne : $x^v_{i,j+1}{=}qx^v_{i,j}$ et, de proche en proche,

$$x^v_{i,j} = q^j \Psi^v_i, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

En remplaçant $x^v_{i,j}$ par cette expression dans la première ligne, il vient :

$$x^h_{i+1,j} = qx^h_{i,j} + x^v_{i,j} = qx^h_{i,j} + q^j \Psi^v_i, \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

En utilisant cette expression :

$$
\begin{aligned}
x^h_{1,j} &= q\Psi^h_j + q^j\Psi^v_0,\\[2ex]
x^h_{2,j} &= qx^h_{1,j} + q^j\Psi^v_1\\
&= q(q\Psi^h_j + q^j\Psi^v_0) + q^j\Psi^v_1\\
&= q^2\Psi^h_j + q^{j+1}\Psi^v_0 + q^j\Psi^v_1,\\[2ex]
x^h_{3,j} &= qx^h_{2,j} + q^j\Psi^v_2\\
&= q^3\Psi^h_j + q^{j+2}\Psi^v_0 + q^{j+1}\Psi^v_1 + q^j\Psi^v_2,\\[2ex]
&\vdots\\[2ex]
x^h_{i,j} &= q^i\Psi^h_j + q^{j+(i-1)}\Psi^v_0 + q^{j+(i-2)}\Psi^v_1 + \cdots + q^j\Psi^v_{i-1}\\
&= q^i\Psi^h_j + q^{i+j}\left(\frac{1}{q}\Psi^v_0 + \frac{1}{q^2}\Psi^v_1 + \cdots + \frac{1}{q^i}\Psi^v_{i-1}\right)\\
&= q^i\Psi^h_j + q^{i+j}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\Psi^v_k}{q^{k+1}}.
\end{aligned}
$$

Les trajectoires de (A.1) sont ainsi données par :

$$
\forall (i,j)\in\mathbb{N}^2,\quad \begin{cases} x^v_{i,j} = q^j\Psi^v_i,\\ x^h_{i,j} = q^i\Psi^h_j + q^{i+j}\sum_{k=0}^{i-1}\dfrac{\Psi^v_k}{q^{k+1}}. \end{cases} \tag{A.2}
$$

A.1.2 Cas continu

On considère le modèle de Roesser suivant :

$$
\forall (t,s)\in(\mathbb{R}_+)^2,\quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t}x^h(t,s)\\ \\ \frac{\partial}{\partial s}x^v(t,s)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1\\ \\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^h(t,s)\\ \\ x^v(t,s)\end{pmatrix},\\ \\ x^h(0,s) = \Psi^h(s)\quad x^v(t,0) = \Psi^v(t). \end{cases} \tag{A.3}
$$

Ici $\lambda\in\mathbb{C}$ et $\forall (t,s)\in(\mathbb{R}_+)^2$, $x^h(t,s)$ et $x^v(t,s)$ sont des réels.

Fixons $t>0$ et posons $f(s) := x^v(t,s),\quad \forall s\geqslant 0$.
La deuxième ligne de (A.3) se réécrit :

$$
f'(s) = \lambda f(s).
$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire linéaire homogène du premier ordre, soumise à la condition initiale $f(0) = \Psi^v(t)$.

On obtient, par un calcul classique, $x^v(t,s) = e^{\lambda s}\Psi^v(t)$.
La première ligne de (A.3) nous donne ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial t}x^h(t,s) = \lambda x^h(t,s) + e^{\lambda s}\Psi^v(t). \tag{A.4}$$

Fixons à présent $s > 0$ et posons $g(t) := x^h(t,s), \quad \forall t \geqslant 0$.
(A.4) se réécrit :

$$g'(t) = \lambda g(t) + e^{\lambda s}\Psi^v(t). \tag{A.5}$$

Il s'agit d'une EDO du premier ordre, et nous avons la condition initiale : $g(0) = \Psi^h(s)$.
En résolvant l'équation homogène associée à (A.5), l'ensemble des solutions de celle-ci est donné par : $\{t \mapsto g_h(t) = C_s e^{\lambda t}\}$.
Cherchons l'ensemble des solutions de (A.5) par la méthode la la variation de la constante : $g(t) = C_s(t)e^{\lambda t}$.
En utilisant (A.5), il vient

$$C_s'(t) = e^{\lambda s}e^{-\lambda t}\Psi^v(t).$$

En intégrant entre 0 et t :

$$\int_0^t C_s'(x)dx = e^{\lambda s}\int_0^t e^{-\lambda x}\Psi^v(x)dx,$$

soit

$$C_s(t) = e^{\lambda s}\int_0^t e^{-\lambda x}\Psi^v(x)dx + C_s(0),$$

d'où

$$g(t) = \left(e^{\lambda s}\int_0^t e^{-\lambda x}\Psi^v(x)dx + C_s(0)\right)e^{\lambda t}.$$

En utilisant la condition initiale, il vient $C_s(0) = g(0) = \Psi^h(s)$, et finalement :

$$g(t) = \left(e^{\lambda s}\int_0^t e^{-\lambda x}\Psi^v(x)dx + \Psi^h(s)\right)e^{\lambda t}.$$

Les trajectoires de (A.3) sont donc données par :

$$\forall (t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad \begin{cases} x^h(t,s) = e^{\lambda t}\left(e^{\lambda s}\displaystyle\int_0^t e^{-\lambda x}\Psi^v(x)dx + \Psi^h(s)\right), \\ \\ x^v(t,s) = e^{\lambda s}\Psi^v(t). \end{cases} \tag{A.6}$$

A.1.3 Cas hybride

- **Premier cas**

  On considère le modèle de Roesser suivant :

$$\forall (t,i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} x^h(t,i) \\ x^v(t,i+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(t,i) \\ x^v(t,i) \end{pmatrix}, \\ x^h(0,i) = \Psi_i^h, \quad x^v(t,0) = \Psi^v(t). \end{cases} \tag{A.7}$$

  Ici $\lambda \in \mathbb{C}, q \in]0,1[$ et $\forall (t,i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, \quad x^h(t,i)$ et $x^v(t,i)$ sont des réels.
  La 2ème ligne de (A.7) donne $x^v(t,i) = q^i \Psi^v(t)$.
  La 1ère ligne donne :

$$\frac{\partial x^h}{\partial t}(t,i) = \lambda x^h(t,i) + q^i \Psi^v(t). \tag{A.8}$$

  Fixons $i \in \mathbb{N}$ et posons $f(t) := x^h(t,i)$.
  (A.8) se réécrit :

$$f'(t) = \lambda f(t) + q^i \Psi^v(t). \tag{A.9}$$

  Comme précédemment, on considère l'équation homogène associée, qui a pour ensemble de solutions : $\{t \mapsto f_h(t) = K_i e^{\lambda t}\}$.
  On détermine ensuite, via la méthode de la variation de la constante, l'ensemble des solutions de (A.8) : $f(t) = K_i(t) e^{\lambda t}$. En utilisant (A.9) et en intégrant, il vient :

$$K_i(t) = q^i \int_0^t e^{-\lambda u} \Psi^v(u) du + K_i(0),$$

  et

$$f(t) = e^{\lambda t} \left(q^i \int_0^t e^{-\lambda u} \Psi^v(u) du + K_i(0) \right).$$

  En utilisant la condition initiale, on trouve $K_i(0) = \Psi_i^h$, et finalement :

$$\forall (t,i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x^h(t,i) = e^{\lambda t} \left(q^i \int_0^t e^{-\lambda u} \Psi^v(u) du + \Psi_i^h \right), \\ x^v(t,i) = q^i \Psi^v(t). \end{cases} \tag{A.10}$$

- **Deuxième cas**

  On considère le modèle de Roesser suivant :

$$\forall (i,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x^h(i+1,t) \\ \frac{\partial}{\partial t} x^v(i,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^h(i,t) \\ x^v(i,t) \end{pmatrix}, \\ x^h(0,t) = \Psi^h(t), \quad x^v(i,0) = \Psi_i^v. \end{cases} \tag{A.11}$$

Ici $\lambda \in \mathbb{C}$, $q \in]0,1[$ et $\forall (i,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$, $x^h(i,t)$ et $x^v(i,t)$ sont des réels.
On effectue le calcul de $x^v(i,t)$ comme dans le cas continu, ce qui donne $x^v(i,t) = e^{\lambda t}\Psi_i^v$.
La 1ère ligne de (A.11) donne ainsi :

$$x^h(i+1,t) = qx^h(i,t) + e^{\lambda t}\Psi_i^v.$$

En écrivant cette relation pour les différentes valeurs de $i = 0, 1, 2, \ldots$, on trouve de la même façon que dans le cas discret, de proche en proche :

$$x^h(i,t) = q^i \left(\Psi^h(t) + e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{i-1} \frac{1}{q^{k+1}} \Psi^v(k) \right).$$

Finalement, les trajectoires de (A.11) sont données par :

$$\begin{cases} x^h(i,t) = q^i \left(\Psi^h(t) + e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{i-1} \dfrac{1}{q^{k+1}} \Psi_k^v \right), \\ \\ x^v(i,t) = e^{\lambda t}\Psi_i^v. \end{cases} \tag{A.12}$$

A.2 Définition de la stabilité exponentielle et preuve qu'elle implique la stabilité asymptotique dans chacun des cas.

A.2.1 Cas discret

Nous allons ici redonner la définition 2.3 que nous avons proposé dans le chapitre 2, afin de comprendre comment le modèle (A.1) a inspiré cette définition.

Définition A.1 (R-ES1)**.** Le point d'équilibre zéro du modèle (R-DL) est dit *exponentiellement stable* (ou simplement R-ES1) si il existe $M > 0$ et $q \in]0,1[$ tels que, pour toutes conditions initiales $(\Psi_j^h,\ \Psi_i^v) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2}$, et pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$:

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{\left\|\Psi_k^h\right\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{i} \frac{\|\Psi_k^v\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}. \tag{A.13}$$

D'où vient cette définition?
En dimension 2 , comme c'est le cas dans le modèle triangulaire (A.1), on a :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \|x_{i,j}\|_1 = \left\|(x_{i,j}^h, x_{i,j}^v)\right\|_1 = |x_{i,j}^h| + |x_{i,j}^v|.$$

Si $\|\ .\ \|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{C}^2$, celle-ci est équivalente à $\|\ .\ \|_1$, ce qui nous donne l'existence d'un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \|x_{i,j}\| \leqslant M(|x_{i,j}^h| + |x_{i,j}^v|).$$

En reprenant l'expression des trajectoires du modèle (A.1) donnée par (A.2), nous obtenons :

$$\|x_{i,j}\| \leqslant M \left(q^i |\Psi_j^h| + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{|\Psi_k^v|}{q^{k+1}} q^{i+j} + q^j |\Psi_i^v| \right).$$

En remarquant que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad q^j |\Psi_i^v| = q^{i+j} \frac{|\Psi_i^v|}{q^i} \leqslant q^{i+j} \frac{|\Psi_i^v|}{q^{i+1}},$$

car $q \in]0,1[$, nous pouvons rajouter ce terme dans la somme. De la même façon,

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad q^i |\Psi_j^h| = q^{i+j} \frac{|\Psi_j^h|}{q^j} \leqslant q^{i+j} \frac{|\Psi_j^h|}{q^{j+1}} \leqslant \sum_{k=0}^{j} \frac{|\Psi_k^h|}{q^{k+1}} q^{i+j}.$$

Finalement, nous obtenons la majoration (A.13).
Nous avons établi dans le chapitre 2 que la définition A.1 implique bien la stabilité asymptotique.

A.2.2 Cas continu

Nous allons reprendre la même démarche simple, à savoir reprendre l'expression des trajectoires pour obtenir une majoration qui «ressemble» à celle établie dans le cas discret, de façon à proposer une définition de stabilité exponentielle qui garantisse la stabilité asymptotique.
En observant l'expression des trajectoires donnée par (A.6), nous allons majorer chacune des composantes $x^h(t,s)$ et $x^v(t,s)$ afin d'obtenir une expression symétrique.

Rappelons que $\lambda \in \mathbb{C}$, et si on note $\alpha := \Re(\lambda)$, on a $|e^{\lambda t}| = e^{\alpha t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Comme précédemment, si $\| \ . \ \|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{C}^2$, l'équivalence des normes en dimension finie nous donne l'existence de $M > 0$ tel que :

$$\forall t, s \geqslant 0, \quad \|x(t,s)\| \leqslant M(|x^h(t,s)| + |x^v(t,s)|).$$

On a, d'une part :

$$\begin{aligned} \forall t, s \geqslant 0, \quad |x^h(t,s)| &\leqslant |\Psi^h(s)| e^{\alpha t} + e^{\alpha(t+s)} \int_0^t e^{-\alpha x} |\Psi^v(x)| dx \\ &\leqslant e^{\alpha(t+s)} \left(e^{-\alpha s} |\Psi^h(s)| + \int_0^t e^{-\alpha x} |\Psi^v(x)| dx \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\forall t, s \geqslant 0, \quad |x^v(t,s)| \leqslant e^{\alpha s} |\Psi^v(t)| \leqslant e^{\alpha(t+s)} \left(e^{-\alpha t} |\Psi^v(t)| + \int_0^s e^{-\alpha x} |\Psi^h(x)| dx \right),$$

car l'intégrale est positive ou nulle.
Finalement : $\forall t, s \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} \|x(t,s)\| \leqslant M e^{\alpha(t+s)} \Bigg(& e^{-\alpha s} |\Psi^h(s)| + \int_0^t e^{-\alpha x} |\Psi^v(x)| dx \\ & + e^{-\alpha t} |\Psi^v(t)| + \int_0^s e^{-\alpha x} |\Psi^h(x)| dx \Bigg). \end{aligned}$$

Ceci nous amène à donner la définition suivante :

Définition A.2. Un modèle de Roesser 2D continu défini par (R-C) est dit exponentiellement stable à l'origine si il existe $M > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\alpha = \Re(\lambda) < 0$ tels que $\forall (t,s) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\|x(t,s)\| \leqslant M e^{\alpha(t+s)} \left(e^{-\alpha s}\|\Psi^h(s)\| + \int_0^t e^{-\alpha x}\|\Psi^v(x)\|dx + e^{-\alpha t}\|\Psi^v(t)\| + \int_0^s e^{-\alpha x}\|\Psi^h(x)\|dx \right).$$

Nous allons à présent montrer que cette définition implique bien la stabilité asymptotique.

Stabilité :
Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que : $\|\Psi^h(s)\| \leqslant \delta$ et $\|\Psi^v(t)\| \leqslant \delta, \quad \forall (t,s) \in \mathbb{R}_+^2$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\|x(t,s)\| &\leqslant M e^{\alpha(t+s)} \left(e^{-\alpha s}\|\Psi^h(s)\| + \int_0^t e^{-\alpha x}\|\Psi^v(x)\|dx + e^{-\alpha t}\|\Psi^v(t)\| + \int_0^s e^{-\alpha x}\|\Psi^h(x)\|dx \right) \\
&\leqslant M\delta e^{\alpha(t+s)} \left(e^{-\alpha s} + \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^t + e^{-\alpha t} + \left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^s \right) \\
&\leqslant M\delta e^{\alpha(t+s)} \left(e^{-\alpha s} + e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha}(2 - e^{-\alpha s} - e^{-\alpha t}) \right) \\
&\leqslant M\delta \left(e^{\alpha t} + e^{\alpha s} + \underbrace{\frac{2}{\alpha}e^{\alpha(t+s)} - \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t} + e^{\alpha s})}_{\leqslant \frac{-2}{\alpha} \text{ car } \alpha<0} \right) \\
&\leqslant 2M\delta \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent, en posant $\delta := \dfrac{\varepsilon}{2M\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}$, on obtient que l'origine est stable.

Attractivité :
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $C_\varepsilon > 0$ tel que $u \geqslant C_\varepsilon \quad \Rightarrow \left(\|\Psi^h(u)\| \leqslant \varepsilon \text{ et } \|\Psi^v(u)\| \leqslant \varepsilon\right)$.
Soit $C'_\varepsilon > 0$ tel que $u \geqslant C'_\varepsilon \quad \Rightarrow e^{\alpha u} \leqslant \varepsilon$.

Montrons que si $t + s \geqslant 2(C_\varepsilon + C'_\varepsilon)$ alors $\|x(t,s)\| \leqslant \varepsilon$.

Soient $t, s \geqslant 0$ tels que $t + s \geqslant 2(C_\varepsilon + C'_\varepsilon)$.
On a alors $s \geqslant C_\varepsilon + C'_\varepsilon$ ou bien $t \geqslant C_\varepsilon + C'_\varepsilon$.

On peut supposer qu'on est dans le premier cas, le second cas étant symétrique.

$$\begin{aligned}
\|x(t,s)\| &\leqslant Me^{\alpha(t+s)}\left(e^{-\alpha s}\|\Psi^h(s)\| + \int_0^t e^{-\alpha x}\|\Psi^v(x)\|dx + e^{-\alpha t}\|\Psi^v(t)\|\right.\\
&\quad \left. + \int_0^s e^{-\alpha x}\|\Psi^h(x)\|dx\right)\\
&\leqslant Me^{\alpha(t+s)}\left(\|\Psi^h(s)\| + \|\Psi^v(t)\| + \int_0^t e^{-\alpha x}\left\|\Psi^v(x)\right\|dx\right.\\
&\quad \left. + \int_0^{C_\varepsilon} e^{-\alpha x}\|\Psi^h(x)\|dx + \int_{C_\varepsilon}^s e^{-\alpha x}\|\Psi^v(x)\|dx\right)\\
&\leqslant Me^{\alpha(t+s)}\left(\varepsilon + \|\Psi\|_\infty + \|\Psi\|_\infty\left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^{C_\varepsilon} + \varepsilon\left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_{C_\varepsilon}^{s} + \|\Psi\|_\infty\left[\frac{e^{-\alpha x}}{-\alpha}\right]_0^{t}\right)\\
&\leqslant Me^{\alpha(t+s)}\left(\varepsilon + \|\Psi\|_\infty - \frac{\|\Psi\|_\infty}{\alpha}(e^{-\alpha C_\varepsilon}-1) - \frac{\varepsilon}{\alpha}(e^{-\alpha s} - e^{-\alpha C_\varepsilon})\right.\\
&\quad \left. - \frac{\|\Psi\|_\infty}{\alpha}(e^{-\alpha t}-1)\right)\\
&\leqslant Me^{\alpha(t+s)}(\varepsilon + \|\Psi\|_\infty) + \underbrace{\frac{-M}{\alpha}}_{\geqslant 0}\left(\|\Psi\|_\infty\left(\underbrace{e^{\alpha(t+s-C_\varepsilon)} + e^{\alpha s} - 2e^{\alpha(t+s)}}_{\leqslant e^{\alpha(t+s-C_\varepsilon)} + e^{\alpha s}}\right)\right.\\
&\quad \left. + \varepsilon\Big(\underbrace{e^{\alpha t} - e^{\alpha(t+s-C_\varepsilon)}}_{\leqslant 1}\Big)\right).
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, $t+s-C_\varepsilon \geqslant C_\varepsilon + 2C'_\varepsilon \geqslant C'_\varepsilon$ d'où $e^{\alpha(t+s-C_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon$.
De même, $s \geqslant C_\varepsilon + C'_\varepsilon \geqslant C'_\varepsilon$ d'où $e^{\alpha s} \leqslant \varepsilon$.
Enfin $t+s \geqslant 2(C_\varepsilon + C'_\varepsilon) \geqslant C'_\varepsilon$ d'où $e^{\alpha(t+s)} \leqslant \varepsilon$.
Finalement,

$$\|x(t,s)\| \leqslant \varepsilon\left(M\varepsilon + M\|\Psi\|_\infty - \frac{M(2\|\Psi\|_\infty + 1)}{\alpha}\right).$$

A.2.3 Cas hybride

- **1er cas**
  Comme précédemment, si $\|\ .\ \|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{C}^2$, l'équivalence des normes en dimension finie nous donne l'existence d'un $M > 0$ tel que :

  $$\|x(t,i)\| \leqslant M(|x^h(t,i)| + |x^v(t,i)|).$$

  D'après l'expression des trajectoires donnée par (A.10), $\forall (t,i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, nous avons d'une part

  $$|x^v(t,i)| = q^i|\Psi^v(t)| \leqslant q^i e^{\alpha t}|\Psi^v(t)|,$$

et d'autre part

$$|x^h(t,i)| = |e^{\lambda t}\left(q^i\int_0^t e^{-\lambda u}\Psi^v(u)du + \Psi_i^h\right)| \\ \leqslant e^{\alpha t}q^i\left(\int_0^t e^{-\alpha u}|\Psi^v(u)|du + \sum_{k=0}^{i}\frac{|\Psi_k^h|}{q^{k+1}}\right).$$

Ainsi :

$$\|x(t,i)\| \leqslant Mq^ie^{\alpha t}\left(\sum_{k=0}^{i}\frac{|\Psi_k^h|}{q^{k+1}} + \int_0^t e^{-\alpha u}|\Psi^v(u)|du + |\Psi^v(t)|\right). \tag{A.14}$$

- **2ème cas**

Par équivalence des normes, il existe $M > 0$ tel que $\|x(i,t)\| \leqslant M(|x^h(i,t)| + |x^v(i,t)|)$. En utilisant l'expression des trajectoires (A.12), il vient d'une part

$$|x^v(i,t)| = |e^{\lambda t}||\Psi_i^v| \leqslant q^ie^{\alpha t}\frac{|\Psi_i^v|}{q^{i+1}} + \int_0^t e^{\alpha u}|\Psi^h(u)|du$$

(car $q \in]0,1[$ et l'intégrale est positive ou nulle), et d'autre part

$$|x^h(i,t)| = |q^i\left(\Psi^h(t) + e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{\Psi_k^v}{q^{k+1}}\right) \\ \leqslant e^{\alpha t}q^i\left(\sum_{k=0}^{i-1}\frac{|\Psi_k^v|}{q^{k+1}} + |\Psi^h(t)|\right).$$

Ainsi, $\forall (i,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$,

$$\|x(i,t)\| \leqslant Mq^ie^{\alpha t}\left(\sum_{k=0}^{i}\frac{|\Psi_k^v|}{q^{k+1}} + \int_0^t e^{-\alpha u}|\Psi^h(u)|du + |\Psi^h(t)|\right). \tag{A.15}$$

Afin d'unifier les majorations (A.14) et (A.15) de façon à proposer une définition générale pour le cas hybride, il suffit de remarquer que ces expressions sont tout à fait semblables. En effet, en facteur du terme $Mq^ie^{\alpha t}$ la somme fait intervenir la condition initiale discrète, l'intégrale fait intervenir la condition initiale continue et l'on rajoute le module de la condition initiale continue.
Ceci nous donne la définition suivante de stabilité exponentielle suivante :

Définition A.3. Un modèle de Roesser 2D hybride défini par (R-H) est dit exponentiellement stable à l'origine, si il existe $M > 0$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\alpha = \Re(\lambda) < 0$ tels que $\forall (t,i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$,

$$\|x(t,i)\| \leqslant Mq^ie^{\alpha t}\left(\sum_{k=0}^{i}\frac{\left\|\Psi_k^h\right\|}{q^{k+1}} + \int_0^t e^{-\alpha u}\left\|\Psi^v(u)\right\|du + \left\|\Psi^v(t)\right\|\right). \tag{A.16}$$

Pour finir, afin de se satisfaire de cette définition de stabilité exponentielle, il reste à voir que cette définition implique bien la stabilité asymptotique. Nous nous contenterons de donner la preuve que celle-ci implique la stabilité, l'attractivité utilisant les mêmes arguments que dans les cas discrets et continus.
Comme pour le cas continu, nous allons procéder par analyse-synthèse.
Soit $\varepsilon > 0$.
Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(t, i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$,
$\left\|\Psi_i^h\right\| \leqslant \delta$ et $\|\Psi^v(t)\| \leqslant \delta$.
La majoration (A.16) donne dans ce cas, $\forall (t, i) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\|x(t,i)\| &\leqslant M\delta q^i e^{\alpha t}\left(\int_0^t e^{-\alpha u}du + \sum_{k=0}^{i}\frac{1}{q^{k+1}} + 1\right) \\
&\leqslant M\delta q^i e^{\alpha t}\left(\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) + \frac{(\frac{1}{q})^{i+1}-1}{1-q} + 1\right) \\
&\leqslant M\delta\left(\underbrace{\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{q(1-q)} + 1}_{:=K}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on pose $\delta := \dfrac{\varepsilon}{MK}$, on obtient la définition de stabilité à l'origine.

B Annexe B : Sur la stabilité exponentielle d'une classe de modèles linéaires de Roesser 2D continus implicites

B.1 Introduction

Une des particularités les plus intéressantes des systèmes nD est le lien avec les équations aux dérivées partielles (EDP), comme souligné par exemple dans [58, 59, 60]. Une possibilité offerte par les systèmes nD est de fournir une approximation de certaines EDP en les échantillonnant le long d'une dimension (souvent la dimension spatiale) tout en préservant l'autre dimension (souvent la dimension temporelle), ce qui amène à certains modèles nD hybrides discrets-continus. C'est ce qui fût proposé dans, e.g., [12, 60, 61], où l'EDP approximée prend la forme de sous modèles inter-connectés, ce qui donne lieu à de nombreuses analyses, et une approche qui utilise les outils et les techniques originellement développées pour les modèles nD hybrides, ou, de façon plus spécifique, les processus répétitifs où les schémas de Contrôle d'Apprentissage Itératif (CAI) [61]. La même stratégie fut utilisée dans [62]. Dans ce paragraphe, nous proposons l'homologue de ce précédent travail où aucun échantillonage n'est effectué.
Notre but est ici d'analyser la stabilité d'une classe de modèles implicites 2D de Roesser continus. Les modèles de Roesser ont été à l'origine introduits dans un contexte discret et explicite [16]. Ici, nous étendons simplement ce modèle de façon classique. Nous présentons certaines EDP pour motiver l'étude de tels modèles. Cependant, alors que de nombreuses contributions préfèrent utiliser une discrétisation pour analyser la stabilité du modèle approximé, nous préférons ici conserver les deux dimensions continues et proposer une stratégie qui analyse la stabilité du modèle d'origine. Toujours motivés par des considérations pratiques, nous ne considérons pas les deux dimensions de la même façon. En effet, dans de nombreux phénomènes physiques, le temps joue un rôle particulier et la stabilité est souvent attendue le long de la dimension temporelle tandis que le caractère borné peut être garanti de façon naturelle le long des autres dimensions (souvent spatiales). Pour cette raison, nous demanderons aux modèles étudiés ici d'être stables le long d'une dimension privilégiée, qui correspond à l'axe t, bien qu'il s'agisse clairement de modèles 2D. Nous étudierons ainsi la *stabilité exponentielle en t* des modèles considérés. Dans cette démarche, nous apportons un nouveau point de vue à l'analyse de la stabilité d'une classe d'EDP. Nous proposons une condition suffisante pour la stabilité exponentielle en t en termes de propriétés de matrice paramétrée. Une fois que cette condition est obtenue, nous exploitons la ressemblance entre cette condition et la stabilité structurelle des modèles de Roesser. Ceci nous permet d'adapter les

résultats de, e.g., [52] pour relaxer efficacement et tester la propriété de stabilité en résolvant un système de LMI.
Cette annexe est organisée de la façon suivante : la partie B.2 établit et reformule le problème. Nous présenterons dans un premier temps les modèles 2D étudiés basés sur des exemples d'EDP, puis nous donnerons une condition de bien-posé pour un tel modèle avant de proposer une définition de stabilité exponentielle en t. Une condition suffisante pour que cette propriété soit vérifiée est exprimée en termes matriciels et, finalement, la ressemblance avec la stabilité structurelle soulignée. A partir de cette ressemblance, la partie B.3 propose la relaxation LMI de cette propriété. Des applications numériques illustrent quelques exemples. Enfin, la partie B.5 conclut cette annexe et propose quelques perspectives.
Nous avons fait le choix d'introduire ici les notations qui seront valables pour cette annexe uniquement.

La transposée (resp. transconjuguée) d'une matrice M est notée M^T (resp. M') et M^H désigne la quantité hermitienne $M + M'$. Nous notons $\mathrm{vec}(M)$ le vecteur obtenu en concaténant les colonnes de la matrice M. Toutes les inégalités matricielles doivent être comprises au sens de Löwner, *i.e.*, au sens d'être définie positive (ou négative). Le symbole $\otimes$ désigne le produit de Kronecker de deux matrices. L'ensemble $\mathcal{H}_n(\mathbb{C})$, resp. $\mathcal{H}_n^+(\mathbb{C})$, désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices hermitiennes, resp. matrices hermitiennes définies positives. La matrice nulle de taille $n \times m$ est notée $0_{n,m}$, I (resp. 0) est la matrice identité (resp. nulle) de dimension adéquate , et $J_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne $\begin{bmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{bmatrix}$. En outre, $[\,]_{n,0}$ (resp. $[\,]_{0,n}$) désigne la matrice nulle à n lignes et 0 colonnes (resp. n colonnes et 0 lignes) : Par la suite, cette notation sera utile pour la cohérence des dimensions de certaines matrices. Pour toute matrice M de taille $n \times m$, on applique les règles $[\,]_{0,n}M = [\,]_{0,m}$ et $M[\,]_{m,0} = [\,]_{n,0}$. Une matrice est dite de *Hurwitz* si toutes ses valeurs propres ont une partie réelle strictement négative (*i.e.*, si son polynôme caractéristique est *Hurwitz*). L'ensemble $\overline{\mathbb{C}}$ désigne $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\overline{\mathbb{C}}_+$ désigne le demi-plan droit fermé étendu. $\mathrm{Re}(z)$ (ou $\mathrm{Im}(z)$) désigne la partie réelle (resp. la partie imaginaire) d'un nombre complexe $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Dans le plan complexe étendu, $\mathcal{I} := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \mathrm{Re}(z) = 0\}$ désigne l'axe imaginaire étendu. L'ensemble $\mathcal{I}_a$ désigne l'axe imaginaire borné défini par $\mathcal{I}_a := \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \mathrm{Re}(z) = 0, |\mathrm{Im(z)}| \leqslant a\}$. Pour un ensemble $\mathcal{S}$, le sous-ensemble $\mathcal{S}^*$ désigne $\mathcal{S} \setminus \{0\}$. Pour deux signaux continus $x(\theta)$, $y(\theta) \in \mathbb{C}^n$ qui dépendent de $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ et la norme L^2 associée $\| \cdot \|_{L^2}$ par :

$$\langle x, y \rangle_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} x'(\theta) y(\theta) \mathrm{d}\theta, \quad \|x\|_{L^2} := \sqrt{\langle x, x \rangle_{L^2}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x'(\theta) x(\theta) \mathrm{d}\theta}.$$

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions (signaux) x de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telles que $\|x\|_{L^2}$ est finie. On dira également que de telles fonctions sont bornées au sens L^2. Si un signal $x(t, \theta)$ dépend aussi de $t \in \mathbb{R}_+$, alors on associe à $t \in \mathbb{R}_+$ la fonction x_t qui elle même à $\theta \in \mathbb{R}$ associe $x_t(\theta) := x(t, \theta) \in \mathbb{C}^n$. Nous nous intéresserons également à la norme L^2 de x_t pour $t \in \mathbb{R}_+$, *i.e.*,

$$\|x_t\|_{L^2} = \sqrt{\langle x_t, x_t \rangle_{L^2}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x_t'(\theta) x_t(\theta) \mathrm{d}\theta}.$$

La *transformation de Fourier* $\mathscr{F}$ d'un vecteur signal x_t associe à x_t sa *transformée de Fourier*, la fonction X_t de la variable réelle ω définie par :

$$X_t(\omega) = \mathscr{F}(x_t)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} x_t(\theta)\, \exp(-\mathbf{i}\,\omega\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Dans la suite de ce chapitre, nou fixons $\bar{\omega} \in \mathbb{R}_+$ et considérons le sous-espace de Hilbert $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ des éléments x_t de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifient :

$$\forall \omega \notin [-\bar{\omega}; \bar{\omega}], \quad \mathscr{F}(x_t)(\omega) = 0.$$

Cela signifie que les images des éléments de $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$ par $\mathscr{F}$ ont un support borné contenu dans $[-\bar{\omega}; \bar{\omega}]$.

Remarque B.1. Le spectre d'un signal $x_t \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$ est défini sur un intervalle de fréquences $[-\bar{\omega}; \bar{\omega}]$ et est nul en dehors de cet intervalle. Le scalaire $\bar{\omega}$ est la plus grande fréquence qui contribue au signal. Celle-ci peut être aussi grande que l'on souhaite, mais pas infinie. En pratique, cela signifie que $x_t \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$ est suffisamment régulière pour ne pas posséder de *dynamiques infiniment rapides*. Cette hypothèse semble relativement raisonnable dans des contextes où θ correspondrait à une dimension spatiale et x à un vecteur de quantités physiques qui ne changeraient pas brutalement (ni leur dérivées).

Une propriété bien connue de la transformée de Fourier donne :

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta}\right)(\omega) = \mathbf{i}\omega X_t(\omega). \tag{B.1}$$

Soit $\omega \in [-\bar{\omega}; \bar{\omega}]$, posons $s := \mathbf{i}\,\omega \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, et notons

$$\hat{x}_t(s) := \int_{-\infty}^{\infty} x_t(\theta) \exp(-s\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Nous avons ainsi $\hat{x}_t(s)|_{s=\mathbf{i}\omega} = X_t(\omega)$, et $\hat{x}_t(s)$ correspond à l'expression de la transformée de Laplace bilatérale de x_t selon la dimension θ, mais la variable s est restreinte à l'axe imaginaire borné $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. Nous notons ici cette transformation par $\mathscr{F}_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}}$. Comme montré par la relation (B.1), l'opérateur induit par "s" correspond à la dérivation par rapport à θ. Autrement dit, nous avons :

$$\forall x_t \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R}), \quad \mathscr{F}_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}}\left(\frac{\partial x_t}{\partial \theta}\right)(s) = s\hat{x}_t(s).$$

Pour deux signaux $\hat{x}_t(s)$, $\hat{y}_t(s)$ qui dépendent de $s \in \mathcal{I}$, on définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\hat{L}^2}$ et la norme $\hat{L}^2$ associée $\| \cdot \|_{\hat{L}^2}$ de la façon suivante :

$$\langle \hat{x}_t, \hat{y}_t \rangle_{\hat{L}^2} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}'_t(\mathbf{i}\omega)\hat{y}_t(\mathbf{i}\omega)\mathrm{d}\omega,$$

$$\|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2} := \sqrt{\langle \hat{x}_t, \hat{x}_t \rangle_{\hat{L}^2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}'_t(\mathbf{i}\omega)\hat{x}_t(\mathbf{i}\omega)\mathrm{d}\omega}.$$

L'espace $\hat{L}^2(\mathcal{I})$ est l'espace des fonctions $\hat{x}_t$ de $\mathcal{I}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ pour lesquelles $\|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2}$ est finie. L'identité de Parseval nous fournit l'égalité $\|x_t\|_{L^2} = \|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2}$ de telle sorte qu'un signal x_t borné dans le sens L^2 par rapport à θ est aussi borné dans le sens $\hat{L}^2$ une fois qu'il est exprimé par rapport à s.

Si les signaux x_t et y_t sont éléments de $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$, alors le produit scalaire et la norme précédents peuvent être exprimés de façon équivalente par :

$$\langle \hat{x}_t, \hat{y}_t \rangle_{\hat{L}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \hat{x}_t'(\mathbf{i}\omega) \hat{y}_t(\mathbf{i}\omega) \mathrm{d}\omega, \ \|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \hat{x}_t'(\mathbf{i}\omega) \hat{x}_t(\mathbf{i}\omega) \mathrm{d}\omega}.$$

Pour de tels signaux, l'espace $\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$ peut être introduit comme l'ensemble des fonctions $\hat{x}_t$ de $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ pour lesquelles $\|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2}$ est finie.

Nous nous intéresserons plus en détail sur la façon dont la norme $\hat{L}^2$ de certains signaux évolue.

Finalement, un opérateur $\mathcal{R}$ sur $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$ (resp. $\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$) est dit *borné* si sa norme d'opérateur L^2 (resp. $\hat{L}^2$) est bornée, *i.e.*, si

$$\|\mathcal{R}\|_{L^2} := \sup_{x \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R}), x \neq 0} \frac{\|\mathcal{R}x\|_{L^2}}{\|x\|_{L^2}} < \infty, \text{ (resp. } \|\mathcal{R}\|_{\hat{L}^2} := \sup_{x \in \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}), x \neq 0} \frac{\|\mathcal{R}x\|_{\hat{L}^2}}{\|x\|_{\hat{L}^2}} < \infty),$$

et l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$ vers $\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$ est noté $\mathcal{L}(\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}))$.

B.2 Position du problème et reformulation des modèles

B.2.1 Exemples introductifs

Avant de présenter le modèle général que nous allons étudier, afin de motiver notre choix, et considérant le sens physique du modèle choisi, nous considérons l'EDP suivante, tirée de [60] :

$$-c\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + (d-b)\frac{\partial p}{\partial t} - b\frac{\partial p}{\partial \theta} - ap = u,$$

où p est la quantité physique qui nous intéresse. Celle-ci varie au cours du temps t et l'endroit θ et on suppose qu'elle vérifie $p(0,\theta) = \varphi(\theta)$, $\dfrac{\partial p}{\partial t}(0,\theta) = \zeta(\theta)$. Les paramètres a, b, c, d sont constants et $u(t,\theta) \in \mathbb{R}$ est le signal de contrôle que l'on pourrait exploiter en boucle fermée pour stabiliser le processus. Nous considérons le pseudo-vecteur d'état global suivant :

$$\xi(t,\theta) = \begin{bmatrix} x \\ \hline q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} \\ \hline p \\ \dfrac{\partial p}{\partial \theta} \end{bmatrix}.$$

Ce vecteur est constitué de deux sous-vecteurs qui contiennent ici une information en commun, *i.e.*, p. Les contraintes imposées par notre choix et le modèle peuvent être résumées par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial t} &= x_2, \\ c\left(\dfrac{\partial x_2}{\partial t} + \dfrac{\partial q_2}{\partial \theta}\right) &= -ax_1 + (d-b)x_2 - bq_2 - u, \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial \theta} &= q_2, \\ q_1 &= x_1. \end{cases}$$

Ces contraintes peuvent également être présentées sous forme matricielle :

$$E \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \theta} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + Bu, \tag{B.2}$$

où les matrices E, A et B sont données par :

$$E = \left[\begin{array}{c|c} E_{11} & E_{12} \\ \hline 0 & E_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & c \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & (d-b) & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right].$$

Nous venons ainsi de proposer une expression de type modèle de Roesser de l'EDP considérée avec comme conditions initiales $x(0,\theta) = [\varphi(\theta)\ \ \zeta(\theta)]'$.

De façon similaire, considérons la célèbre équation de la chaleur le long d'une barre en métal (l'axe θ) :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + u.$$

Ici, T est la température à l'instant $t \geqslant 0$ et à l'endroit $\theta \in \mathbb{R}$, u est la chaleur apportée au processus au même instant et au même endroit, et $\kappa > 0$ est une constante (voir [60] pour plus de détails). La température est supposée contrainte par une condition initiale $T(0,\theta) = \varphi(\theta)$. Nous considérons le vecteur d'état global suivant :

$$\xi = \left[\begin{array}{c} x \\ \hline q \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \hline q_1 \\ q_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} T \\ \hline \dfrac{T}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \theta} \end{array}\right].$$

Les contraintes imposées par notre choix et le modèle peuvent être résumées par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t} - \kappa \dfrac{\partial q_2}{\partial \theta}\right) &= u, \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial \theta} &= q_2, \\ q_1 &= x_1. \end{cases}$$

Ces contraintes peuvent être présentées sous forme matricielle et nous retrouvons le modèle (B.2) avec :

$$E = \left[\begin{array}{c|cc} E_{11} & E_{12} \\ \hline 0 & E_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & -\kappa \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ \hline B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}\right],$$

et avec la condition initiale $x(0, \theta) = \varphi(\theta)$.

B.2.2 Modèles étudiés

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un modèle de Roesser 2D continu implicite défini par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ 0_{n_q, n_x} & E_{22} \end{bmatrix}}_{E} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t, \theta) \\ \dfrac{\partial q}{\partial \theta}(t, \theta) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x(t, \theta) \\ q(t, \theta) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}}_{B} u(t, \theta), \quad \text{(B.3)}$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ sont des sous-vecteurs d'état qui se propagent dans deux directions indépendantes, *i.e.*, l'axe t et l'axe θ, avec $t \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et où, $u(t, \theta) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est un signal de contrôle. Les matrices A_{ij}, E_{ij}, B_i, $i, j = 1, 2$, sont à coefficients réels et $\text{rang}(E_{11}) = n_x$. Le vecteur d'état global est obtenu en concaténant x et q de la façon suivante :

$$\xi(t, \theta) = \begin{bmatrix} x(t, \theta) \\ q(t, \theta) \end{bmatrix}.$$

Au système ci dessus, nous associons le modèle sans entrée en enlevant le vecteur de contrôle des équations, laissant le système libre le long des deux dimensions :

$$E \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t, \theta) \\ \dfrac{\partial q}{\partial \theta}(t, \theta) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t, \theta) \\ q(t, \theta) \end{bmatrix}. \quad \text{(B.4)}$$

Les systèmes (B.3) et (B.4) sont accompagnés des conditions initiales $x_0(\theta)$ définies sur l'axe θ. Remarquez qu'aucune condition initiale n'est imposée au

vecteur q (voir, aussi, les exemples introductifs de la sous-section précédente).

Dans la suite, nous considérerons deux hypothèses. Comme nous travaillerons avec des signaux dans $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$, nous devons considérer des conditions initiales et des signaux de contrôle qui sont cohérents avec ce cadre, ce qui nous amène à formuler la première hypothèse.

Hypothèse 2. Nous supposons que $x_0 \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$.

D'autre part, nous allons privilégier une des deux dimensions. En effet, nous nous intéresserons à la stabilité du système (B.3) le long de l'axe t. Toujours puisque nous travaillerons avec des signaux dans $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$, les solutions du système (B.3) ne devraient donc pas tendre vers plus l'infini quand $|\theta| \to \infty$. L'hypothèse suivante est primordiale pour assurer ceci comme nous allons le voir par la suite.

Hypothèse 3. Nous supposons que

$$\forall \lambda \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad \det(E_{22}\lambda - A_{22}) \neq 0. \tag{B.5}$$

Remarque B.2. La condition (B.5) signifie que les valeurs propres finies de $E_{22}\lambda - A_{22}$ ne peuvent pas être sur l'axe imaginaire. Ceci implique également que le polynôme $\det(E_{22}\lambda - A_{22})$ n'est pas identiquement nul ce qui est nécessaire et suffisant pour que le modèle 1D implicite associé à $E_{22}\lambda - A_{22}$ soit bien posé (physiquement réalisable) [63].

Dans la suite, nous préférerons utiliser la notation $f_t(\theta)$ pour une fonction f qui dépend à la fois de t et θ et on note $\dot{f}_t(\theta) := \frac{\partial f}{\partial t}(t,\theta)$ la dérivée partielle de f par rapport à t. Reformulons le modèle (B.3). En appliquant la transformation $\mathscr{F}_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}}$ au système (B.3), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcccccccc} E_{11}\dot{\hat{x}}_t(s) & + & E_{12}s\hat{q}_t(s) & = & A_{11}\hat{x}_t(s) & + & A_{12}\hat{q}_t(s) & + & B_1\hat{u}_t(s), \\ & & E_{22}s\hat{q}_t(s) & = & A_{21}\hat{x}_t(s) & + & A_{22}\hat{q}_t(s) & + & B_2\hat{u}_t(s), \end{array} \right. \tag{B.6}$$

La deuxième équation du système ci-dessus donne :

$$\hat{q}_t(s) = (E_{22}s - A_{22})^{-1}A_{21}\hat{x}_t(s) + (E_{22}s - A_{22})^{-1}B_2\hat{u}_t(s),$$

à condition que la quantité $(E_{22}s - A_{22})^{-1}$ existe pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ ce qui est assuré par l'hypothèse 3. Ainsi, en injectant cette dernière équation dans la première équation de (B.6), il vient :

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} \dot{\hat{x}}_t(s) & = & \mathbf{A}(s)\hat{x}(t,s) & + & \mathbf{B}(s)\hat{u}(t,s), \\ \hat{q}(t,s) & = & \mathbf{C}(s)\hat{x}(t,s) & + & \mathbf{D}(s)\hat{u}(t,s), \end{array} \right. \tag{B.7}$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{A}(s) & = & E_{11}^{-1}A_{11} + E_{11}^{-1}(A_{12} - E_{12}s)(E_{22}s - A_{22})^{-1}A_{21}, \\ \mathbf{B}(s) & = & E_{11}^{-1}B_1 + E_{11}^{-1}(A_{12} - E_{12}s)(E_{22}s - A_{22})^{-1}B_2, \\ \mathbf{C}(s) & = & (E_{22}s - A_{22})^{-1}A_{21}, \\ \mathbf{D}(s) & = & (E_{22}s - A_{22})^{-1}B_2. \end{array} \right.$$

Effectuons deux remarques importantes sur le système (B.7) :

- La réalisation $(\mathbf{A}(\mathbf{s}), \mathbf{B}(\mathbf{s}), \mathbf{C}(\mathbf{s}), \mathbf{D}(\mathbf{s}))$ dépend de $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$.
- Il s'agit bien d'un système 2D puisque les signaux $\hat{x}$ et $\hat{q}$ dépendent à la fois de t et s.

La ressemblance de (B.6) avec les systèmes linéaires usuels vont permettre son étude par des outils utilisés pour les systèmes 1D linéaires classiques. Quelques problèmes seront reliés à la question de savoir si les matrices $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$, $\mathbf{C}(s)$, et $\mathbf{D}(s)$ sont bornées ou non pour $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, ou, autrement dit, si ces matrices peuvent être associées à des opérateurs bornés agissant sur les signaux x_t et u_t, *i.e.*, sur $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$ [12, 64]. Si c'est le cas, le modèle (B.7) peut être vu comme un modèle 1D comme dans l'analyse ci-dessous.
En outre, puisque nous allons étudier de système comme un modèle 1D, nous considérerons également le modèle associé sans entrée donné par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_t(s) &= \mathbf{A}(s)\hat{x}_t(s), \\ \hat{q}_t(s) &= \mathbf{C}(s)\hat{x}_t(s). \end{cases} \tag{B.8}$$

Comme dans le cas 1D, la stabilité du modèle (B.7) est celle du modèle (B.8).

B.2.3 Modèle bien posé

Remarquons que les matrices $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$, $\mathbf{C}(s)$ et $\mathbf{D}(s)$ de la réalisation obtenue dans (B.7) mettent en jeu des inverses de matrices. Ceci soulève la question d'existence pour de nombreuses expressions dans le modèle, et cette question est en lien avec le caractère borné des opérateurs associés.

Définition B.1. Un modèle mathématique est dit *bien posé* s'il possède un sens physique (ou est réalisable), *i.e.*, s'il existe une unique solution à ce modèle dès lors que l'on se donne une condition initiale et des signaux d'entrée.

Nous nous intéressons à présent au fait que le modèle (B.3) soit bien posé, *i.e.*, à l'existence d'une unique solution ξ de (B.3) pour une entrée u donnée et pour une condition initiale x_0 donnée. Ceci est en relation avec le caractère bien posé du modèle (B.7), *i.e.*, à l'existence d'une solution unique unique $\hat{\xi}$ de (B.7) pour une entrée $\hat{u}$ donnée et une condition initiale $\hat{x}_0$ donnée.

Cette question a été soulevée pour une file de systèmes inter-connectés [62], en reprenant des arguments tirés de [12]. La problématique étudiée ici est légèrement différente.
Remarquez qu'un modèle conventionnel (explicite) autonome linéaire est toujours bien posé. Ici, les matrices ne sont pas constantes mais dépendent de $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ et une description implicite est en jeu. Ainsi, cela requiert plus d'attention.

Proposition B.2. Supposons que les hypothèses 2 et 3 sont vérifiées. De plus, supposons que $u_t \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$, pour tout $t > 0$, et

$$\forall T > 0, \quad \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} |u_t(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t < \infty. \tag{B.9}$$

Alors le système (B.3) est bien posé dans $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$.

Preuve. Remarquons que l'hypothèse 3 peut être reformulée de la façon suivante :

$$\forall s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad \operatorname{rang}(E_{22}s - A_{22}) = n_q. \tag{B.10}$$

Dans cette démonstration, nous allons prouver successivement les faits suivants :

1. La condition (B.10) implique que pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ la solution $\hat{x}_t(s)$ du système (B.7) existe et est unique.

2. Les conditions (B.10) et (B.9) impliquent que $\hat{x}_t(\cdot)$ appartient à $\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$.

3. Le système (B.7) est bien posé dans $\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$ si et seulement si le système (B.3) est bien posé dans $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$.

1. Soit $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. D'après la condition (B.10), nous avons $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{B}(s)$ et $\mathbf{C}(s)$ bien définies. Ainsi, la solution du système (B.7) peut être classiquement exprimée comme la solution d'un système 1D linéaire :

$$\hat{x}_t(s) = e^{t\mathbf{A}(s)}\hat{x}_0(s) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(s)(t-\tau)}\mathbf{B}(s)\hat{u}_\tau(s)\mathrm{d}\tau. \tag{B.11}$$

   Puisque $\hat{x}_t(s)$ est unique, d'après la deuxième équation de (B.7) nous en déduisons que $\hat{q}_t(s)$ est aussi unique.

2. D'après l'hypothèse 2 et $u_t(\cdot) \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$, nous avons, pour tout $s \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, $\hat{x}_0(s) = 0$ et $\hat{u}_t(s) = 0$. Cette équation peut être utilisée dans (B.11) et (B.7) pour en déduire que pour tout $s \in \mathcal{I}\backslash\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, $\hat{x}_t(s) = 0$ et $\hat{q}_t(s) = 0$. Par conséquent, pour tout $s \notin [-\bar{\omega};\bar{\omega}]$, $\hat{\xi}_t(s) = 0$, ce qui signifie que le support de $\hat{\xi}_t$ est borné comme demandé.

   D'autre part, la condition (B.10) implique que $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont continues et ainsi bornées sur $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. Ainsi, d'après (B.9), l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'identité de Parseval, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \left| \int_0^t e^{\mathbf{A}(s)(t-\tau)}\mathbf{B}(s)\hat{u}_\tau(\mathbf{i}\omega)\mathrm{d}\tau \right|^2 \mathrm{d}\omega &\leqslant C\int_0^t \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} |\hat{u}_\tau(\mathbf{i}\omega)|^2 \mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \\ &= C\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |u_\tau(\theta)|^2 \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau < \infty.\end{aligned}$$

   Comme $e^{t\mathbf{A}(\cdot)}\hat{x}_0(\cdot) \in \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$, l'inégalité précédente et l'identité (B.11) nous donne que $\hat{x}_t \in \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}})$.

3. En notant x_t la transformée de Fourier inverse de $\hat{x}_t$, en utilisant l'injectivité de la transformation de Fourier, et en appliquant la transformation de Fourier inverse de chaque côté du système (B.7), nous en déduisons que x_t est l'unique solution de (B.3) dans $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$. □

Remarque B.3. Remarquons que tester le rang de $E_{22}s - A_{22}$ pour $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ revient à vérifier qu'aucune des racines du polynôme $\det(E_{22}s - A_{22})$ n'appartient à $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ ce qui correspond à l'hypothèse 3. Si l'on autorise s à appartenir à tout l'axe imaginaire $\mathcal{I}$, la matrice $E_{22}s - A_{22}$ pourrait avoir des valeurs propres infinies ce qui pourrait nous empêcher de vérifier la propriété, d'où la restriction à $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$.

Remarque B.4. L'hypothèse 3 n'est pas seulement utile à s'assurer que le modèle est bien posé, elle joue également un rôle important dans l'analyse de la stabilité qui va suivre.

B.2.4 Stabilité en t

Dans cette partie, nous nous posons la question de la stabilité du système (B.3). Nous nous concentrons uniquement sur la stabilité le long de l'axe t. Autrement dit, nous nous intéressons à la façon dont le vecteur $\xi_t(\theta)$ varie le long de l'axe t, *i.e.*, nous considérons la stabilité appelée stabilité *temporelle* [65]. En pratique, cela a du sens, par exemple, si t désigne le temps alors que θ désigne une dimension spatiale. Dans ce qui suit, nous essaierons de trouver des conditions pour que la norme $\|\xi_t\|_{L^2}$ soit exponentiellement décroissante lorsque t augmente. D'après [62], nous définissons la notion de stabilité suivante :

Définition B.3. Supposons que le système (B.3) avec comme condition initiale x_0 vérifie les hypothèses 2 et 3. Le système (B.3) est dit *exponentiellement stable en t* si le modèle sans entrée qui lui est associé (B.4) est exponentiellement stable en t, *i.e.*, si

$$\exists a > 0,\, b > 0, \quad \forall x_0 \in L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\xi_t\|_{L^2} \leqslant a \exp(-bt)\|\xi_0\|_{L^2},$$

où $\xi_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ q_0 \end{bmatrix}$ et où q_0 est défini comme la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{C}\hat{x}_0$.

Cette définition signifie que, en l'absence de commande mais soumis à une condition initiale x_0 élément de $L^2_{\bar{\omega}}(\mathbb{R})$, le système doit se comporter de telle sorte que $\|\xi_t\|_{L^2}$ soit au moins à décroissance exponentielle. Il s'agit d'une extension "naturelle" de la définition de stabilité exponentielle des systèmes 1D linéaires. Remarquons que la forme de q_0 dans la définition B.3 est imposée par l'équation (B.8).

Remarque B.5. D'après l'identité de Parseval, la condition dans la définition B.3 peut être remplacée de façon équivalente par :

$$\exists a > 0,\, b > 0, \quad \forall \hat{x}_0 \in \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\hat{\xi}_t\|_{\hat{L}^2} \leqslant a \exp(-bt)\|\hat{\xi}_0\|_{\hat{L}^2}.$$

Nous allons nous intéresser dans un premier temps à la façon dont l'information $x(t, \theta)$ se propage. La matrice $\mathbf{A}(s) \in \mathcal{M}_{n_x}(\mathbb{C})$, qui dépend de $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, agit sur la dynamique de $\hat{x}_t(s)$ et jouera un rôle essentiel dans le raisonnement qui va suivre.

Nous pouvons à présent établir un résultat clé pour la suite, qui fournit une condition suffisante de stabilité exponentielle.

Théorème B.4. Supposons que le système (B.3) avec une condition initiale donnée x_0 vérifie les hypothèses 2 et 3. Alors, avec les notations précédentes, les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, la matrice $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz.

ii) Pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, il existe $P(s) \in \mathcal{H}_{n_x}^+(\mathbb{C})$ telle que :

$$\mathbf{A}'(s)P(s) + P(s)\mathbf{A}(s) < 0.$$

iii) Pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, il existe $X(s) \in \mathcal{H}_{n_x}^+(\mathbb{C})$ telle que :

$$\mathbf{A}(s)X(s) + X(s)\mathbf{A}'(s) < 0.$$

En outre, si l'une de ces conditions équivalentes est vérifiée, alors le système (B.3) est exponentiellement stable en t.

Preuve. Bien que la preuve emprunte des arguments à la preuve de [62, Théorème 1], nous détaillons certaines parties car les différences sont suffisamment grandes pour être soulignées.
Remarquons tout d'abord que les équivalences **i)** $\Leftrightarrow$ **ii)** et **i)** $\Leftrightarrow$ **iii)** sont classiques (voir la preuve de [62, Théorème 1] pour plus de détails et références).
Supposons à présent que **i)** soit vérifiée, *i.e.*, que $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. D'après [62, Théorème 1], il existe une unique fonction continue $\hat{P} : \mathcal{I}_{\bar{\omega}} \to \mathcal{H}_{n_x}^+(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, $\hat{P}(s)$ est solution de l'équation de Lyapunov $\mathbf{A}'(s)\hat{P}(s) + \hat{P}(s)\mathbf{A}(s) = -I_{n_x}$. Nous considérons les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\hat{\mathcal{P}}$ respectivement définis par :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{A}: & \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}) & \to & \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}) \\ & \hat{x} & \mapsto & (\mathcal{A}\hat{x})(s) = \mathbf{A}(s)\hat{x}(s), \quad \forall s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \hat{\mathcal{P}}: & \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}) & \to & \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}) \\ & \hat{x} & \mapsto & (\hat{\mathcal{P}}\hat{x})(s) = \hat{P}(s)\hat{x}(s), \quad \forall s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}. \end{array}$$

L'axe imaginaire borné $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ est compact, ainsi, l'opérateur linéaire $\hat{\mathcal{P}}$ est borné de sorte que $\hat{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}(\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}))$. Nous avons :

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}\hat{x}_t, \hat{\mathcal{P}}\hat{x}_t \rangle_{\hat{L}^2} + \langle \hat{\mathcal{P}}\hat{x}_t, \mathcal{A}\hat{x}_t \rangle_{\hat{L}^2} \\ = \; & \frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \left(\hat{x}_t'(\mathbf{i}\omega)\mathbf{A}'(\mathbf{i}\omega)\hat{P}(\mathbf{i}\omega)\hat{x}_t(\mathbf{i}\omega) + \hat{x}_t'(\mathbf{i}\omega)\hat{P}(\mathbf{i}\omega)\mathbf{A}(\mathbf{i}\omega)\hat{x}_t(\mathbf{i}\omega) \right) \mathrm{d}\omega, \\ = \; & \frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} \hat{x}_t'(\mathbf{i}\omega) \left(\mathbf{A}'(\mathbf{i}\omega)\hat{P}(\mathbf{i}\omega) + \hat{P}(\mathbf{i}\omega)\mathbf{A}(\mathbf{i}\omega) \right) \hat{x}_t(\mathbf{i}\omega) \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

L'égalité de Lyapunov $\mathbf{A}'(s)\hat{P}(s) + \hat{P}(s)\mathbf{A}(s) = -I_{n_x}$ implique alors :

$$\langle \mathcal{A}\hat{x}_t, \hat{\mathcal{P}}\hat{x}_t \rangle_{\hat{L}^2} + \langle \hat{\mathcal{P}}\hat{x}_t, \mathcal{A}\hat{x}_t \rangle_{\hat{L}^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\bar{\omega}}^{\bar{\omega}} (-\hat{x}_t'(\mathbf{i}\omega)\hat{x}_t(\mathbf{i}\omega)) \mathrm{d}\omega = -\langle \hat{x}_t, \hat{x}_t \rangle_{\hat{L}^2}.$$

Comme $\hat{\mathcal{P}} \in \mathcal{L}(\hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}))$, nous pouvons appliquer [64, Théorème 5.1.3] ce qui prouve que l'opérateur $\exp(\mathcal{A}t)$ est exponentiellement stable, où $\exp(\mathcal{A}t)$ doit être vu comme le semi-groupe continu $\exp(\mathcal{A}t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{A}t)^n}{n!}$. Finalement, d'après [62, Remarque 4, Proposition 2], on peut en déduire que :

$$\exists a > 0,\, b > 0, \quad \forall \hat{x}_0 \in \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2} \leqslant a \exp(-bt) \|\hat{x}_0\|_{\hat{L}^2}.$$

La relation précédente correspond à la définition de la stabilité en t restreinte au sous-vecteur d'état x. Il nous reste à montrer le même résultat pour le vecteur d'état entier ξ. Nous avons :

$$\|\hat{\xi}_t\|_{\hat{L}^2} = \left\| \begin{bmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{q}_t \end{bmatrix} \right\|_{\hat{L}^2} \leqslant \|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2} + \|\hat{q}_t\|_{\hat{L}^2}.$$

Sans entrée de commande, le vecteur signal est donné par $\hat{q}_t(s) = \mathbf{C}(s)\hat{x}_t(s)$. Définissons l'opérateur $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{C}: & \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}) & \to & \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}) \\ & \hat{x} & \mapsto & (\mathcal{C}\hat{x})(s) = \mathbf{C}(s)\hat{x}(s), \quad \forall s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}. \end{array}$$

D'après l'hypothèse 3, $\mathbf{C}$ est borné sur $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. Ainsi, le gain $\hat{L}^2$ de l'opérateur $\mathcal{C}$ est borné : $\|\mathcal{C}\|_{\hat{L}^2} < \gamma < \infty$, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl} \|\hat{\xi}_t\|_{\hat{L}^2} & \leqslant & a \exp(-bt)\|\hat{x}_0\|_{\hat{L}^2} + \gamma \|\hat{x}_t\|_{\hat{L}^2} \\ & \leqslant & a \exp(-bt)\|\hat{x}_0\|_{\hat{L}^2} + \gamma a \exp(-bt)\|\hat{x}_0\|_{\hat{L}^2}. \end{array}$$

En posant $\overline{a} = a(1+\gamma) > 0$ et en utilisant que $\|\hat{x}_0\|_{\hat{L}^2} \leqslant \|\hat{\xi}_0\|_{\hat{L}^2}$, il vient :

$$\exists \overline{a} > 0,\, b > 0, \quad \forall \hat{x}_0 \in \hat{L}^2(\mathcal{I}_{\bar{\omega}}), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \|\hat{\xi}_t\|_{\hat{L}^2} \leqslant \overline{a} \exp(-bt) \|\hat{\xi}_0\|_{\hat{L}^2}.$$

D'après la remarque B.5 et la définition B.3, le système (B.3) est exponentiellement stable en t. □

Remarque B.6. A première vue, le fait que le système (B.3) soit exponentiellement stable en t implique seulement que la matrice $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz pour *presque* tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ (mais pas nécessairement pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$), ce qui signifie que la dernière assertion du théorème B.4 fournit seulement une condition suffisante qui pourrait ne pas être nécessaire.

Dans la suite, nous allons relaxer **iii**) de façon à simplifier les tests numériques. Mentionnons également qu'en se concentrant sur la définition B.3, nous privilégions l'approche matricielle plutôt que l'approche par des opérateurs. Ce point de vue se rapproche d'avantage de celui adopté dans [10, 62] que de de celui de [12].

Remarque B.7. Un problème crucial dans notre étude repose sur le fait que la définition B.3 établit que q_0 est défini comme la transformée de Fourier inverse de $\mathbf{C}\hat{x}_0$. Ainsi, puisque $x_0 \in L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbb{R})$, alors $q_0 \in L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbb{R})$ par définition. Cela signifie que q_0 n'est pas choisi mais imposé par le modèle et la définition B.3. Plus précisément, si q est vraiment lié à x par le modèle, comme c'est le cas dans les exemples introductifs, alors le caractère borné de $\mathbf{C}$ impose que $q_t \in L^2_{\tilde{\omega}}(\mathbb{R})$. Si, pour d'autres modèles, certaines composantes de q sont indépendantes de x, alors, les lignes correspondantes de $\mathbf{C}(s)$ sont évidemment nulles et cela impose aux composantes correspondantes de q_0 d'être nulles par la définition B.3. D'un point de vue pratique, c'est une façon d'ignorer les parties du modèles qui seraient découplées des dynamiques de x. En réalité, de tels modèles découplés correspondent à (B.4) mais ne seraient probablement pas pertinents pour décrire des problèmes tels que ceux qui ont motivé la présente étude. Cela dit, ils peuvent être englobés dans notre étude de la stabilité.

B.2.5 Lien avec la stabilité structurelle

Considérons le modèle de Roesser classique (explicite) continu défini par (B.3) avec $E = I_{n_x+n_q}$. Pour un tel modèle, de nombreux concepts de stabilité ont été introduits. Par exemple, la notion que nous avons appelée *stabilité structurelle*, également appelée ainsi dans [66] et aussi dénommée *stabilité spectrale* dans [41], consiste en une condition sur les racines d'un polynôme caractéristique en deux indeterminées associé au modèle (Définition 2.7).

Définition B.5. [67, 68] Le modèle de Roesser (B.3) avec $E = I_{n_x+n_q}$ est *structurallement stable* si l'une des assertions équivalentes suivantes est vérifiée :

a) Pour tout $(s_1, s_2) \in \overline{\mathbb{C}}^2_+$,

$$p(s_1, s_2) = \det\left(\begin{bmatrix} s_1 I_{n_x} & 0 \\ 0 & s_2 I_{n_q} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

b) La matrice A_{22} est de Hurwitz et la matrice $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz pour tout $s \in \mathcal{I}$.

Remarque B.8. Nous avons utilisé la caractérisation **a)** de la stabilité structurelle dans le chapitre 2 de ce manuscrit, mais **b)** est une condition équivalente.

Remarquons que cette propriété correspond au qualificatif *strictement Hurwitz* pour un polynôme en deux indeterminées $p(s_1, s_2)$ [69, 67]. Rappelons également que ce concept est indépendant des conditions initiales.
La ressemblance entre la propriété d'un polynôme dit «de Hurwitz» et la propriété étudiée ici est rendue évidente par l'assertion **b)** dans la définition B.5. En effet, la principale difficulté dans l'analyse de la stabilité structurelle est de vérifier si $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz ou non. Il s'agit aussi de la principal difficulté lorsque l'on analyse la stabilité exponentielle en t de (B.3) sous les hypothèses 2 et 3. Il y a cependant des différences dues au contexte particulier considéré ici. La différence principale repose sur la description implicite qui mène en particulier à formuler $\mathbf{A}(s)$ comme une possible matrice de transfert rationnelle *impropre*.

Le théorème suivant fait le lien entre la stabilité exponentielle en t comme introduite dans la définition B.3 et la stablité structurelle définie ci-dessus.

Théorème B.6. Considérons le système (B.3) soumis à la condition initiale $x_0(\theta) \in \mathbb{C}^{n_x}$ vérifiant l'hypothèse 2 et avec $E = I_{n_x+n_q}$. Si le système (B.3) est structurellement stable, alors il est bien posé dans $L^2_{\bar{\omega}}$ et exponentiellement stable en t.

Preuve. Supposons que (B.3) avec $E = I_{n_x+n_q}$ est structurellement stable. D'après l'assertion **b)** dans la définition B.5, la matrice A_{22} est de Hurwitz, *i.e.*, $\det(sI_{n_q} - A_{22}) \neq 0$, pour tout $s \in \overline{\mathbb{C}}_+$. Ainsi, l'hypothèse 3 est satisfaite et (B.3) est bien posé dans $L^2_{\bar{\omega}}$ (voir la remarque B.4). De plus, la matrice $\mathbf{A}(s) = A_{11} + A_{12}(sI_{n_q} - A_{22})^{-1}A_{21}$ est de Hurwitz pour tout $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, et par conséquent, d'après le théorème B.4, le système (B.3) est exponentiellement stable en t. □

Remarquons qu'un système peut être exponentiellement stable en t mais non structurellement stable même dans le cas explicite car la définition B.3 n'impose pas à A_{22} d'être de Hurwitz tandis que la stabilité structurelle l'impose.

Notre étude repose sur ce lien entre la stabilité exponentielle en t et la stabilité structurelle. En effet, cette étude exploite et adapte les résultats obtenus dans [68, 70, 52] en relation avec la stabilité structurelle afin d'effectuer, dans la prochaine sous-section, des tests sur la stabilité exponentielle en t. La nouveauté réside principalement dans le fait de prendre en compte le cas implicite, qui pourrait être le seul qui fait sens ici.

B.3 Relaxation LMI du caractère bien posé et conditions de stabilité

Le théorème B.4 peut être vu comme un premier pas vers l'obtention d'un test efficace pour la stabilité exponentielle en t. Dans ce paragraphe, nous faisons le deuxième pas. Nous proposons une condition nécessaire et suffisante, qui repose sur des LMI, pour le critère de stabilité fourni par l'assertion **iii)** du théorème B.4.

B.3.1 Contexte

Avant d'établir le résultat principal, nous rappelons quelques notions sur la S-procédure généralisée, plus précisément sur le lemme généralisé de Kalman-Yakubovich-Popov comme formulé dans [71]. Nous définissons, dans un premier temps, l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned}\mathbb{X}_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} \;=\; \Big\{\; & X_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} = X'_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} \in \mathcal{H}_{2d}(\mathbb{C}) : X_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} = R \otimes P + T \otimes Y, \\ & R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^2 \end{bmatrix}, \quad P \in \mathcal{H}_d^*(\mathbb{C}), \quad Y \in \mathcal{H}_d^+(\mathbb{C}) \;\Big\}. \end{aligned} \tag{B.12}$$

D'autre part, étant données des matrices $\mathcal{A}, \ldots, \mathcal{F}$ avec les dimensions appropriées, nous introduisons la Représentation Linéaire Implicite Fractionnaire suivante (RLIF) [72, 73] :

$$\forall \delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad \mathcal{M}(\delta) = \delta I \star \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \\ \mathcal{E} & \mathcal{F} \end{bmatrix} := \mathcal{D} + \mathcal{C}(\mathcal{E} - \delta\mathcal{A})^{-1}(\delta\mathcal{B} - \mathcal{F}),$$

avec la condition :

$$\forall \delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad \det(\mathcal{E} - \delta\mathcal{A}) \neq 0,$$

qui correspond au caractère bien posé de la RLIF définie par $\mathcal{M}(\delta)$.
Nous pouvons à présent établir le prochain lemme, qui est une reformulation de la version descriptive du lemme de Kalman-Yakubovich-Popov sur les fréquences finies [71].

Lemme B.7. [71] Avec les notations précédentes, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout $\delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, nous avons $\mathcal{M}(\delta)'\Psi\mathcal{M}(\delta) < 0$.

b) Il existe $X_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} \in \mathbb{X}_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}}$ tel que :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix}' X_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} \begin{bmatrix} \mathcal{E} & \mathcal{F} \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} < 0.$$

L'objectif du prochain paragraphe est de considérer l'infinité d'inégalité données par la condition de stabilité **iii**) du théorème B.4, afin de les exprimer sous la forme de la condition **a)** du lemme B.7, et afin de les relaxer, en utilisant le lemme B.7, en un nombre fini d'inégalités qui correspondent à la condition **b)** du lemme B.7. En effet, cette dernière condition sera un système LMI que l'on pourra résoudre en utilisant les outiils classiques.

B.3.2 Résultat principal

Dans [74, 70, 52] la stabilité structurelle des modèles de Roesser 2D fut analysée via des conditions LMI obtenues par l'intermédiaire du lemme B.7. Comme la sous-section B.2.5 a souligné le lien entre la stabilité structurelle et la stabilité exponentielle en t, nous exploitons ici la même idée que celle développée dans [74, 70, 52] afin de fournir une condition LMI pour la stabilité exponentielle en t.

Nous devons d'abord reformuler le problème afin qu'il puisse être résolu en utilisant le lemme B.7. La matrice $\mathbf{A}(s)$ en jeu dans la condition **iii**) du théorème B.4 peut être réecrite de la façon suivante :

$$\mathbf{A}(s) = E_{11}^{-1}A_{11} + (E_{11}^{-1}A_{12} - E_{11}^{-1}E_{12}s)(E_{22}s - A_{22})^{-1}A_{21},$$

et sa matrice transconjugée $\mathbf{A}'(s)$ peut être écrite de la façon suivante :

$$\mathbf{A}'(s) = \underbrace{(E_{11}^{-1}A_{11})'}_{D_G} + \underbrace{A_{21}'}_{C_G}(\underbrace{A_{22}'}_{E_G} - s'\underbrace{E_{22}'}_{A_G})^{-1}(s'\underbrace{(E_{11}^{-1}E_{12})'}_{B_G} - \underbrace{(E_{11}^{-1}A_{12})'}_{F_G}). \tag{B.13}$$

En posant $\delta := s'$ et $\Delta := \delta I$, nous avons $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ si et seulement si $\delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ et il vient :

$$G(\delta) := \mathbf{A}'(s) = \Delta \star \left[\begin{array}{cc} A_G & B_G \\ C_G & D_G \\ E_G & F_G \end{array}\right].$$

La matrice $G(\delta)$ est donc une RLIF bien posée à condition que $\det(E_G - \Delta A_G) \neq 0$, *i.e.*, à condition que $\det(E_{22}s - A_{22}) \neq 0$. Autrement dit, d'après la proposition B.2, le caractère bien posé de la RLIF définie par $G(\delta)$ est équivalent à celui du système (B.3). Toujours en utilisant $G(\delta)$, la condition **iii**) du théorème B.4 peut être réécrite de la façon suivante :

$$\forall \delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad \exists \tilde{X}(\delta) \in \mathcal{H}^+_{n_x}(\mathbb{C}), \quad G'(\delta)\tilde{X}(\delta) + \tilde{X}(\delta)G(\delta) < 0, \tag{B.14}$$

où $\tilde{X}(\delta) := X(s)|_{s=\delta'}$. Cependant, remarquons que la matrice $\tilde{X}(\delta)$ peut seulement être définie en substituant $s = \delta'$ dans $X(s)$ s'il existe une expression explicite de $X(s)$ qui dépend de s. C'est la question soulevée dans la proposition suivante qui repose sur une idée originale de [75], adaptée au cas qui nous intéresse ici dans [70, 52].

Proposition B.8. Si pour tout $\delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$, il existe une matrice $\tilde{X}(\delta) \in \mathcal{H}^+_{n_x}(\mathbb{C})$ solution de l'inégalité dans (B.14), alors il existe une fonction

$$\begin{array}{rccl} H: & \mathcal{I} & \to & \mathcal{H}^+_{n_x}(\mathbb{C}) \\ & \delta & \mapsto & H(\delta) := \left(\displaystyle\sum_{h=0}^{\alpha} Q_h \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^h\right)^H = \Upsilon'(\delta)\mathbf{Q}\Upsilon(\delta), \end{array} \tag{B.15}$$

où α est un entier naturel tel que $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$, où $\overline{\alpha} := \dfrac{n_q}{2}(n_x^2 + n_x - 2)$,

$$\mathbf{Q} = \left[\begin{array}{c|c} Q_0 + Q_0' & Q_1 \dots Q_\alpha \\ \hline Q_1' & \\ \vdots & 0_{\alpha n_x, \alpha n_x} \\ Q_\alpha' & \end{array}\right], \quad Q_h \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}, \quad h = 0, \dots, \alpha, \tag{B.16}$$

et

$$\Upsilon(\delta) = \left[\begin{array}{c} I_{n_x} \\ \left(\dfrac{\delta}{1+\delta}\right) I_{n_x} \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\delta}{1+r\delta}\right)^{\alpha} I_{n_x} \end{array}\right], \quad h = 0, \dots, \alpha, \tag{B.17}$$

tel que

$$\forall \delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad G'(\delta)H(\delta) + H(\delta)G(\delta) < 0. \tag{B.18}$$

Preuve. Voir, par exemple, [70, 62] où la proposition est démontrée pour $\delta \in \mathcal{I}$. Si l'expression (B.15) est valide pour $\delta \in \mathcal{I}$, elle est à fortiori valide pour $\delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. □

Remarque B.9. La structure particulière de la matrice $\mathbf{Q}$ dans (B.16) n'est pas restrictive et peut être en réalité ignorée. Cela dit, si $\mathbf{Q}$ est une matrice pleine, alors la classe des expressions possibles de $H(\delta)$ est plus grande (voir [76]) de telle sorte que, ici, nous travaillons avec la structure (B.16) de façon à limiter le nombre de variables de décision dans le système LMI présenté ci-après.

En utilisant la proposition B.8 et le lemme B.7, nous pouvons à présent établir le résultat principal de cette partie :

Théorème B.9. Supposons que le système (B.3), soumis à la condition initiale x_0, vérifie l'hypothèse 2. Alors il est bien posé et exponentiellement stable en t si il existe un entier naturel $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$, avec $\overline{\alpha} := \frac{n_q}{2}(n_x^2 + n_x - 2)$, des matrices Q_h, pour $h = 0, \ldots, \alpha$, $P_\delta = P_\delta'$, $P_+ = P_+'$, $Y_\delta > 0$, et $Y_+ > 0$ tels que

$$\begin{bmatrix} E_M & F_M \\ A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R \otimes P_\delta + T \otimes Y_\delta & 0 \\ 0 & J_2 \otimes \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_M & F_M \\ A_M & B_M \\ C_M & D_M \end{bmatrix} < 0, \tag{B.19}$$

et

$$\begin{bmatrix} I_{\alpha n_x} & 0_{\alpha n_x, n_x} \\ A_\Upsilon & B_\Upsilon \\ C_\Upsilon & D_\Upsilon \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} R \otimes P_+ + T \otimes Y_+ & 0 \\ 0 & -\mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\alpha n_x} & 0_{\alpha n_x, n_x} \\ A_\Upsilon & B_\Upsilon \\ C_\Upsilon & D_\Upsilon \end{bmatrix} < 0, \tag{B.20}$$

où les matrices R, T et $\mathbf{Q}$ sont données respectivement par (B.12) et (B.16), les matrices A_M, B_M, C_M, D_M, E_M, F_M sont données par

$$\left[\begin{array}{c|c} A_M & B_M \\ \hline C_M & D_M \\ \hline E_M & F_M \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A_\Upsilon & 0 & B_\Upsilon C_G & B_\Upsilon D_G \\ 0 & A_\Upsilon & 0 & B_\Upsilon \\ 0 & 0 & A_G & B_G \\ \hline C_\Upsilon & 0 & D_\Upsilon C_G & D_\Upsilon D_G \\ 0 & C_\Upsilon & 0 & D_\Upsilon \\ \hline I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_G & F_G \end{array}\right],$$

les matrices A_G, B_G, C_G, D_G, E_G, F_G sont définies par (B.13), et les matrices A_Υ, B_Υ, C_Υ, et D_Υ dépendent de α de la façon suivante : pour $\alpha = 0$, on a :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_\Upsilon & B_\Upsilon \\ \hline C_\Upsilon & D_\Upsilon \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} [\,]_{0,0} & [\,]_{0,n_x} \\ \hline [\,]_{n_x,0} & I_{n_x} \end{array}\right],$$

et pour $\alpha \neq 0$, on a :

$$A_\Upsilon = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{bmatrix} \otimes I_{n_x}, \quad B_\Upsilon = \begin{bmatrix} 0_{(\alpha-1)n_x, n_x} \\ I_{n_x} \end{bmatrix},$$

$$C_\Upsilon = \begin{bmatrix} 0_{n_x, \alpha n_x} \\ J_\alpha \otimes I_{n_x} \end{bmatrix}, \quad D_\Upsilon = \begin{bmatrix} I_{n_x} \\ 0_{\alpha n_x, n_x} \end{bmatrix}.$$

Preuve. La condition (B.19) peut être écrite de façon équivalente :

$$\begin{bmatrix} E_M & F_M \\ A_M & B_M \end{bmatrix}' X_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} \begin{bmatrix} E_M & F_M \\ A_M & B_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_M & D_M \end{bmatrix}' \Psi \begin{bmatrix} C_M & D_M \end{bmatrix} < 0,$$

où $\Psi = J_2 \otimes \mathbf{Q}$ et $X_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}} \in \mathbb{X}_{\mathcal{I}_{\bar{\omega}}}$ l'ensemble des multiplicateurs définis par (B.12) avec $d = 2\alpha n_x + n_q$. D'après le lemme B.7, la condition (B.19) est ainsi équivalente à :

$$\forall \delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}, \quad \mathcal{M}_M(\delta)' \Psi \mathcal{M}_M(\delta) < 0, \quad \mathcal{M}_M(\delta) := \delta I_d \star \begin{bmatrix} A_M & B_M \\ C_M & D_M \\ E_M & F_M \end{bmatrix}. \tag{B.21}$$

La RLIF définie par $\mathcal{M}_M(\delta)$ est bien posée si $\det(E_M - \delta A_M) \neq 0$, pour tout $\delta \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. La structure particulière de E_M et A_M montre que le caractère bien posé de $\det(E_{22}s - A_{22}) \neq 0$, *i.e.*, en vertue de la proposition B.2, le caractère bien posé supposé du système (B.3). En utilisant des propriétés classiques des RLIF, nous obtenons l'expression suivante :

$$\mathcal{M}_M(\Delta) = \begin{bmatrix} G'(\delta)\Upsilon'(\delta) & \Upsilon'(\delta) \end{bmatrix}',$$

où $\Upsilon(\delta)$ est défini par (B.17). Ainsi, la condition (B.21) est équivalente à (B.18) où $H(\delta)$ est défini par (B.15) et (B.16-B.17). Le système (B.3) est exponentiellement stable en t si la condition **iii**) du théorème B.4 est vérifiée ce qui est en réalité équivalent à (B.14). Ainsi, d'après la proposition B.8, ceci est également équivalent à (B.18) avec (B.15) et (B.16) à condition que $H(\delta)$ soit définie positive. Autrement dit, la LMI (B.19) est équivalente à (B.18) avec (B.15) et (B.16) mais pour correspondre exactement à la condition **iii**) du théorème B.4, il reste à montrer que $H(\delta)$ est définie positive. En appliquant à la condition (B.20) les mêmes arguments que ceux invoqués précédemment pour la condition (B.19), nous pouvons prouver que la condition (B.20) est équivalente à $H(\delta) > 0$, ce qui complète la preuve. □

Remarque B.10. Le théorème B.9 établit que les inégalités (B.19) et (B.20) considérées ensemble fournissent une condition suffisante de stabilité exponentielle en t du système (B.3) sous l'hypothèse 2. Malheureusement, cette condition LMI n'est à priori pas nécessaire. En effet, comme montré dans la preuve du théorème B.9, les inégalités (B.19) et (B.20) sont équivalentes à l'existence d'une matrice $\tilde{X}(\delta) = H(\delta) > 0$ solution de (B.14) à condition que $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$ soit suffisamment grand. Ainsi, pour α suffisamment grand, (B.19) et (B.20) sont équivalentes à l'existence d'une matrice $X(s)$ solution de $\mathbf{A}(s)X(s) + X(s)\mathbf{A}'(s) < 0$, *i.e.*, au fait que la matrice $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz (voir théorème B.4).

Cependant, comme expliqué dans la remarque B.6, la stabilité exponentielle en t du système (B.3) implique que $\mathbf{A}(s)$ est de Hurwitz *pour presque tout* $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ mais peut être pas *pour tout* $s \in \mathcal{I}_{\bar{\omega}}$. Ceci nous empêche d'affirmer que les conditions LMI (B.19-B.20) sont une relaxation exacte de la stabilité exponentielle en t du système (B.3).

Remarquons que dans le cas explicite $E = I_{n_x+n_q}$, et si, de plus, A_{22} est de Hurwitz, les inegalités (B.19) et (B.20) considérées ensemble (avec $T = 0$)

fournissent une condition nécessaire et suffisante de stabilité structurelle du système (B.3) quelque soit la condition initiale pour α suffisamment grand. D'après le théorème B.6, cela signifie que le système (B.3), soumis à une condition initiale x_0 vérifiant l'hypothèse 2,est exponentiellement stable en t au sens de la définition B.3.

Bien que dédiés au cas explicite $E = I_{n_x+n_q}$, les résultats de [26, 47] pourraient être adaptés au cas continu implicite étudié ici pour fournir une alternative intéressante au théorème B.9 avec une possible réduction de la complexité calculatoire.

Faisons quelques commentaires supplémentaires sur les différences entre la version continue de [52, Théorème 3] et le théorème B.9 ci-dessus. D'une part, [52, Théorème 3] fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité structurelle pour un modèle conventionnel (*i.e.*, explicite) de Roesser continu et, d'autre part, le théorème B.9 fournit seulement une condition suffisante pour la stabilité exponentielle en t mais s'applique à des modèles différents. D'un point de vue plus technique, le théorème B.9 prend en compte un cas implicite dû à l'utilisation d'une LFR implicite, ce qui n'est pas traité dans [52, Théorème 3]. De plus, si le cas explicite est seulement considérés via les inégalités (B.19) et (B.20), contrairement à [52, Théorème 3], le fait que les matrices P_δ et P_+ ne soient pas contraintes à être définies positives et que les matrices Y_δ et Y_+ entrent en compte signifie que la stabilité de Hurwitz de $\mathbf{A}(s)$ doit être testée seulement sur $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ et non pas sur $\overline{\mathbb{C}}_+$. On peut démontrer que cette différence n'oblige pas A_{22} à être de Hurwitz contrairement à [52, Théorème 3]. Toujours dans le cas usuel explicite, nous avons $E_{22} = I_{n_q}$ de telle sorte que la famille de matrices $E_{22}s - A_{22} = I_{n_q}s - A_{22}$ ne peut pas avoir un déterminant nul à l'infini. Ainsi, il est inutile de borner $\mathcal{I}$ (*i.e.*, de le réduire à $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$). Par conséquent, les matrices Y_δ et Y_+ peuvent être fixées nulles dans les conditions LMI (B.19-B.20) (une telle simplification ne peut pas être faite dans le cas implicite). Remarquons que la possibilité de considérer des modèles implicites a du sens en pratique (voir l'EDP dans la sous-section B.2.1) même si cela nous a amené à devoir faire l'hypothèse 2 ainsi qu'à considérer $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ à la place de $\mathcal{I}$. En effet, la motivation sous-jacente est d'essayer de considérer des processus où t désigne le temps et où θ désigne la localisation dans une dimension spatiale. La causalité par rapport à cette dimension spatiale fait moins sens, c'est pourquoi nous avons voulu introduire les matrices E_{ij}. Cette description non causale pourrait être la seule qui aurait du sens ici. Le cas conventionnel explicite nous contraindrait à considérer une causalité non réaliste sur la dimension spatiale.

B.4 Exemples

B.4.1 Premier exemple

Revenons à l'équation de la chaleur proposée dans la sous-section B.2.1, avec, par exemple $\kappa = 9.465\,10^{-5}$ (voir [60]). Il est facile de vérifier que, dans ce cas, $\mathbf{A}(0) = 0$ de sorte que $\mathbf{A}(s)$ ne peut pas être Hurwitz sur $\mathcal{I}_{\bar{\omega}}$ quelle que soit la valeur finie choisie de $\bar{\omega} > 0$. D'autre part, le système LMI (B.19-B.20) est irréalisable quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$. La raison étant que le processus sous-jacent peut être vu physiquement comme un système adiabatique qui ne peut pas évacuer son énergie. On peut appliquer la loi de commande par retour proportionnel $u(t,\theta) = -0.1\,T(t,\theta)$, ce qui signifie qu'à chaque instant t et à chaque endroit θ, nous retirons

du processus une quantité de chaleur qui est proportionnelle à la température (e.g., cela pourrait correspondre à un échange de chaleur avec un environnement plus froid). Dans le modèle, cette rétroaction peut être prise en compte en changeant $A_{11} = 0$ en $A_{11} = -0.1$. Intuitivement, on pourrait s'attendre alors à ce que le système soit "stable». En effet, si on utilise une boîte à outils de résolution de LMI, on peut vérifier que le système LMI (B.19-B.20) est réalisable pour $\alpha = 0$, ce qui signifie que le système en boucle fermée devient exponentiellement stable en temps. Remarquons que, ici, $\bar{\omega} > 0$ peut être choisi arbitrairement grand.

B.4.2 Deuxième exemple

Revenons à la première EDP présentée dans la sous-section B.2.1 et considérons les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$a = 1,\ b = 3,\ c = 1,\ d = 2.$$

Ce système est sans commande, donc on fixe $u(t, \theta) = 0$. Pour un tel choix de paramètres, le système LMI (B.19-B.20) ne peut jamais être réalisable quelles que soient les valeurs testées pour α et $\bar{\omega}$. En effet, les matrices du modèle de Roesser implicite sont données par :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

et cela mène à

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s^2 - 3s - 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Puisque le spectre de $\mathbf{A}(0)$ est $\left\{ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} \right\}$, il est en effet impossible de vérifier le système LMI.

Si nous considérons à présent la loi de commande

$$u(t, \theta) = \frac{\partial p}{\partial t}(t, \theta) - 3\frac{\partial p}{\partial \theta}(t, \theta) - \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}(t, \theta),$$

alors le système LMI (B.19-B.20) est réalisable pour $\alpha = 0$ et pour tout $\bar{\omega} < 10^9$. En effet, les matrices du modèle en boucle fermée sont maintenant

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ce qui donne

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est constante et admet -1 comme valeur propre double. Elle est donc de Hurwitz. Cela pourrait paraître surprenant qu'elle ne dépende pas de s mais en réalité la loi de commande réduit l'EDP à

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(t,\theta) + \frac{\partial p}{\partial t}(t,\theta) + p(t,\theta) = 0,$$

qui, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}$, caractérise une EDO du second ordre, et, plus précisément autonome linéaire et sans entrée. De plus, ce système est asymptotiquement stable. Ainsi, il est, par équivalence, exponentiellement stable pour tout θ, il est donc à fortiori exponentiellement stable en t.

B.4.3 Troisième exemple

Considérons le modèle (B.3) avec

$$E = \left[\begin{array}{c|c} E_{11} & E_{12} \\ \hline E_{21} & E_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|ccc} -5+\gamma & -1+\gamma & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -4 & 2 & 1 \\ -1+\gamma & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1+\gamma & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

A l'aide d'un solveur LMI, nous trouvons que les conditions LMI (B.19-B.20) sont réalisables pour $\gamma = 0$, $\alpha = 0$, $\bar{\omega} = 10^8$ de sorte que le système est exponentiellement stable en t sous l'hypothèse 2 avec $\bar{\omega} = 10^8$. Ces conditions restent vérifiées jusq'à $\gamma = 0.4912$ avec $\alpha = 1$ mais pour des valeurs plus grandes de γ, il devient impossible de trouver α qui rende le système LMI réalisable. En effet, si les valeurs propres de $\mathbf{A}(s)$ sont tracées pour $\gamma = 0.4912$, en zoomant sur les emplacements de certaines de ces valeurs propres, on obtient la figure 11 sur laquelle nous pouvons observer que celles-ci se localisent presque sur l'axe imaginaire. Ceci illustre l'aspect non conservatif de notre relaxation LMI.

B.5 Conclusion

Nous avons proposé une relaxation LMI peu conservative de la stabilité exponentielle en t pour une classe de modèles de Rosser implicites qui peut servir, par exemple, comme une reformulation d'une classe d'EDP. Ceci apporte un nouveau point de vue à l'analyse de la stabilité de ces EDP. Les simulations numériques s'avèrent être efficaces.

Comme possibles extensions de cette investigation, nous pourrions exploiter ce travail de façon à proposer une stratégie de commande de stabilisation même si l'implémentation pratique d'une telle stratégie pourrait rencontrer une difficulté due

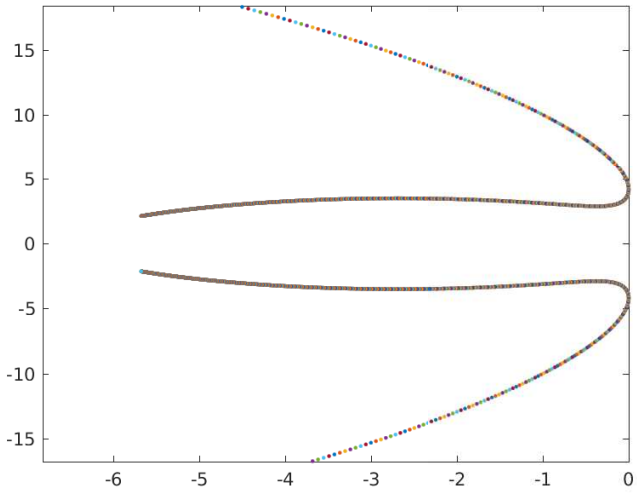


Figure 11: Les valeurs propres de $\mathbf{A}(s)$ touchent presque l'axe imaginaire pour $\gamma = 0.4912$.

au caractère distribué du modèle. Il serait aussi intéressant d'étendre l'ensemble des modèles considérés où la matrice E n'aurait aucune structure particulière (ceci élargirait aussi la classe sous-jacente d'EDP).

C Annexe C : Un contre-exemple

Le but de cette une annexe est de proposer un correctif à l'article [[54], proposition 4.1]. C'est cet article qui a motivé le chapitre 3 du présent manuscrit. Nous allons proposer ici un contre-exemple à la proposition 4.1. La condition proposée dans cette proposition est en réalité suffisante mais non nécessaire.

Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

$\|.\|$ désigne une norme vectorielle quelconque et $|||.|||$ la norme matricielle qui lui est subordonnée.
Nous avons par définition :

$$|||A||| \geqslant \frac{\|Ae_1\|}{\|e_1\|} = \frac{\frac{1}{2}\|e_1\|}{\|e_1\|} = \frac{1}{2} \quad \text{pour } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$|||B||| \geqslant \frac{\|Be_2\|}{\|e_2\|} = \frac{\frac{2}{3}\|e_2\|}{\|e_2\|} = \frac{2}{3} \quad \text{pour } e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$|||A||| + |||B||| > 1.$$

Nous pouvons vérifier que ni A, ni B, ni AB ne sont nilpotentes.
Cependant, nous allons voir que la suite $U_{i,j} = \binom{i}{i+j} A^i B^j$ tend vers zéro lorsque $i + j$ tend vers plus l'infini.

$$U_{i,j} = \begin{pmatrix} i \\ i+j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{10}\right)^j & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^j \end{pmatrix}$$

En utilisant le cas scalaire, i.e, la proposition 3.2 du même article, les deux coefficients diagonaux tendent vers zéro quand $i + j$ tend vers plus l'infini car $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} \leqslant 1$ et $\frac{1}{10} + \frac{2}{3} \leqslant 1$.

En reprenant la preuve de cette proposition, et les notations ($\|.\|$ désigne la norme matricielle), signalons que l'erreur réside dans la phrase : "If none of the three other conditions are satisfied , $\| A \|$ or $\| B \|$ are necessarily greater or equal to 1."
Ceci n'est pas toujours vrai comme nous pouvons le voir sur le contre-exemple.

D Annexe D : Définitions de stabilité d'un point d'équilibre x_e pour les modèles non-linéaires

D.1 Modèle de Roesser

Considérons le modèle de Roesser 2D discret non-linéaire (R-D) :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} x^h_{i+1,j} \\ x^v_{i,j+1} \end{pmatrix} = f(x^h_{i,j}, x^v_{i,j}), \\ \\ \Psi^h_j = x^h_{0,j}, \quad \Psi^v_i = x^v_{i,0}, \end{cases}$$

avec $x^h_{i,j}$ et $x^v_{i,j}$ respectivement dans $\mathbb{C}^{n_1}$ et $\mathbb{C}^{n_2}$, où $n_1 + n_2 = n$, ayant pour solution $x = (x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} = (x^h_{i,j}, x^v_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et un point d'équilibre $x_e = (x^h_e, x^v_e) \in \mathbb{C}^n$.

Définition D.1. Le point d'équilibre $x_e = (x^h_e, x^v_e)$ du modèle (R-D) est dit :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon \; ; \; \forall (\Psi^h, \Psi^v) \in (\mathbb{C}^{n_1})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{C}^{n_2})^{\mathbb{N}},$$
$$\max(\left\|\Psi^h - x^h_e\right\|_\infty, \|\Psi^v - x^v_e\|_\infty) \leqslant \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x - x_e\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *attractif* si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \|\Psi^h_j - x^h_e\| = 0 \\ \lim\limits_{i\to\infty} \|\Psi^v_i - x^v_e\| = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{i+j\to\infty} \|x_{i,j} - x_e\| = 0.$$

(iii) *asymptotiquement stable (R-AS)* s'il est stable et attractif.

(iv) *exponentiellement stable (R-ES1)* si :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$, tels que pour toutes conditions initiales $(\Psi^h, \Psi^v) \in (\mathbb{C}^{n_1})^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{C}^{n_2})^{\mathbb{N}}$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|x_{i,j} - x_e\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{i} \frac{\|\Psi^h_k - x^h_e\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{j} \frac{\|\Psi^v_k - x^v_e\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

(v) *exponentiellemnt stable (R-ES2)* si :
pour toutes conditions initiales (Ψ^h, Ψ^v) telles qu'il existe $M >$ et $0 < q < 1$ tels que

$$\|\Psi^h_i - x^h_e\| \leqslant Mq^i \text{ et } \|\Psi^v_i - x^v_e\| \leqslant Mq^i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

alors il existe $\tilde{M} >$ et $0 < \tilde{q} < 1$ tels que

$$\|x_{i,j} - x_e\| \leqslant \tilde{M}\tilde{q}^{i+j} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

D.2 Modèle de Fornasini-Marchesini

Considérons le modèle de Fornasini-Marchesini 2D discret non-linéaire (FM-D) :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \begin{cases} x_{i+1,j+1} = f(x_{i,j+1}, x_{i+1,j}), \\ \\ \Psi_j^{(1)} = x_{0,j}, \quad \Psi_i^{(2)} = x_{i,0}. \end{cases}$$

avec $x_{i,j}$ dans $\mathbb{C}^n$,
ayant pour solution $x = (x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$
et un point d'équilibre $x_e \in \mathbb{C}^n$.

Définition D.2. Le point d'équilibre x_e du modèle (FM-D) est dit :

(i) *stable* (au sens de Lyapunov) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta_\varepsilon \; ; \; \forall (\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) \in \left((\mathbb{C}^n)^{\mathbb{N}}\right)^2,$$

$$\max(\left\|\Psi^{(1)} - x_e\right\|_\infty, \left\|\Psi^{(2)} - x_e\right\|_\infty) \leqslant \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad \|x - x_e\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *attractif* si :

$$\begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} \|\Psi_j^{(1)} - x_e^h\| = 0 \\ \lim\limits_{i\to\infty} \|\Psi_i^{(2)} - x_e^v\| = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{i+j\to\infty} \|x_{i,j} - x_e\| = 0.$$

(iii) *asymptotiquement stable (FM-AS)* s'il est stable et attractif.

(iv) *exponentiellement stable (FM-ES1)* si :
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, il existe $M > 0$ et $0 < q < 1$, tels que pour toutes conditions initiales $(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}) \in \left((\mathbb{C}^n)\right)^{\mathbb{N}})^2$ l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|x_{i,j} - x_e\| \leqslant M \left(\sum_{k=0}^{i} \frac{\|\Psi_k^{(1)} - x_e\|}{q^{k+1}} + \sum_{k=0}^{j} \frac{\|\Psi_k^{(2)} - x_e\|}{q^{k+1}} \right) q^{i+j}.$$

(v) *exponentiellemnt stable (FM-ES2)* si :
pour toutes conditions initiales $(\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)})$ telles qu'il existe $M >$ et $0 < q < 1$ tels que

$$\|\Psi_i^{(1)} - x_e^h\| \leqslant Mq^i \text{ et } \|\Psi_i^{(2)} - x_e^v\| \leqslant Mq^i, \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

alors il existe $\tilde{M} >$ et $0 < \tilde{q} < 1$ tels que

$$\|x_{i,j} - x_e\| \leqslant \tilde{M}\tilde{q}^{i+j} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$

Liste des Acronymes

(1D-D)	**Modèle 1D discret**
(1D-DL)	**Modèle 1D discret linéaire**
(1D-C)	**Modèle 1D continu**
(R-DL)	**Modèle de Roesser 2D discret linéaire**
(R-D)	**Modèle de Roesser 2D discret**
(R-C)	**Modèle de Roesser 2D continu**
(R-H)	**Modèle de Roesser 2D hybride**
(FM-DL)	**Modèle de Fornasini-Marchesini 2D discret linéaire**
(FM-D)	**Modèle de Fornasini-Marchesini 2D discret**
(FM-CL)	**Modèle de Fornasini-Marchesini 2D continu linéaire**
(FM-Sol1)	**Solutions d'un modèle de Fornasini-Marchesini 2D discret linéaire - 1ère expression**
(FM-Sol2)	**Solutions d'un modèle de Fornasini-Marchesini 2D discret linéaire - 2ème expression**
(FMA-DL)	**Modèle de Fornasini-Marchesini discret linéaire associé au modèle de Roesser discret linéaire** (R-DL)
(P1D)	**Modèle polaire 1D présenté en coordonnées polaires**
(C1D)	**Modèle polaire 1D présenté en coordonnées cartésiennes**
(P2D)	**Modèle polaire 2D présenté en coordonnées polaires**
(C2D)	**Modèle polaire 2D présenté en coordonnées cartésiennes - 1ère version**
(C'2D)	**Modèle polaire 2D présenté en coordonnées cartésiennes - 2ème version**

Bibliographie

[1] T. Kaczorek. *Two-Dimensional Linear Systems*, volume 68 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] E. Zerz. *Topics in Multidimensional Linear Systems Theory*, volume 256. Lecture Notes in Control and Information Science, London, England: Springer-Verlag, 1998.

[3] K. Gałkowski. *State-Space Realizations of Linear 2D Systems with extensions to the General nD Case*, volume 263 of *Lecture Notes in Control and Information Science*. Springer-Verlag, London, England, 2001.

[4] N.K. Bose. *Multidimensional systems theory and applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2010.

[5] N.K. Bose. *Applied Multidimensional System Theory*. Van Nostrand Reinhold Comp., New-York, 1982.

[6] K. Gałkowski and J. Wood. *Multidimensional Signals, Circuits and Systems*. Taylor and Francis, London, 2001.

[7] K.L. Moore. *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*. Avances in Industrial Control, Springer, London, 1993.

[8] D.H. Owens, N. Amann, E. Rogers, and M. French. Analysis of Linear Iterative Learning Control Schemes -a 2D Systems/Repetitive Processes Approach. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 11(1–2):125–177, 2000.

[9] E. Rogers, K. Gałkowski, and D. H. Owens. *Control systems theory and applications for linear repetitive processes*, volume 349 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 2007.

[10] S.M. Melzer and B.C. Kuo. Optimal regulation of systems described by a countably infinite number of objects. *Automatica*, 7:359–366, 1971.

[11] B. Bamieh, F. Paganini, and M.A. Dalheh. Distributed Control of Spatially Invariant Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(7):1091–1107, 2002.

[12] R. D'Andrea and G.E. Dullerud. Distributed Control Design for Spatially Interconnected Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9):1478–1495, 2003.

[13] D. Gorinevsky and G. Stein. Structured Uncertainty Analysis of Robust Stability for Multidimensional Array Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9):1557–1568, 2003.

[14] B. Sulikowski and K. Gałkowski. Distributed control design for spatially interconnected Markovian jump systems with time varying delays. *International Journal of Control*, 20(3):1125–1134, 2018.

[15] E. Fornasini and G. Marchesini. Doubly-indexed dynamical systems: State-space models and structural properties. *Mathematical Systems Theory*, 12:59–72, 1978.

[16] R.P. Roesser. Discrete state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20(1):1–10, 1975.

[17] S Elaydi. An introduction to difference equations. In *An Introduction to Difference Equations, Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, 2005.

[18] S. Francinou, H. Gianella, and S. Nicolas. *Exercices de Mathématiques, Oraux X-ENS, algèbre 2*. Cassini, 2009.

[19] D. Givone and P. Roesser. Multidimensional linear iteratives circuits-general properties. *IEEE Transactions on Computers*, C21(10):1067–1073, 1972.

[20] R. Yang, L. Xie, and C. Zhang. Generalized two-dimensional kalman–yakubovich–popov lemma for discrete Roesser model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 55(10):3223–3233, 2008.

[21] R. Yang, W.X. Zheng, and Y. Yu. Event-triggered sliding mode control of discrete-time two-dimensional systems in Roesser model. *Automatica*, 114(5):108813, 2020.

[22] C.K. Ahn, P. Shi, and M.V. Basin. Two-dimensional dissipative control and filtering for Roesser model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 60(7):1745–1759, 2015.

[23] K. Gałkowski, W. Paszke, B. Sulikowski, E. Rogers, and D. H. Owens. LMI based stability analysis and controller design for a class of 2D continous-discrete linear systems. In *Proc.American Control Conference (ACC), Anchorage, USA, 8-10 May*, volume 1, pages 29–34, 2002.

[24] J. Bochniak and K. Gałkowski. LMI-based analysis for continuous-discrete linear shift invariant nD-systems. *Journal of Circuits, Systems and Computers*, 14(2):307–332, 2005.

[25] S. Knorn and R.H. Middleton. Stability of two-dimensional linear systems with singularities on the stability boundary using LMIs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(10):2579–2590, 2013.

[26] G. Chesi and R. H. Middleton. Necessary and sufficient LMI conditions for stability and performance analysis of 2D mixed continuous-discrete-time systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 59(4):997–1007, 2014.

[27] S. Knorn. *A two-dimensional systems stability analysis of vehicle platoons*. PhD thesis, Hamilton Institute, National University of Ireland Maynooth, 2012.

[28] E. Fornasini and G. Marchesini. State-space realization theory of two-dimensional filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(4):484–492, 1976.

[29] O. Bachelier, T. Cluzeau, R. David, F. Silva, Na. Yeganefar, and Ni. Yeganefar. Structural stability, asymptotic stability, and exponential stability for linear multidimensional systems: the good, the bad, and the ugly. *International Journal of Control*, 91(12):2714–2725, 2018.

[30] D. Liu and A. N. Michel. Stability analysis of state-space realizations for two-dimensional filters with overflow nonlinearities. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 41:127–137, 1994.

[31] Ni. Yeganefar, Na. Yeganefar, M. Ghamgui, and E. Moulay. Lyapunov theory for 2D nonlinear Roesser models: application to asymptotic and exponential stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(5):1299–1304, 2013.

[32] R. David, O. Bachelier, N. Yeganefar, and T. Cluzeau. Asymptotic and structural stability for a linear 2D discrete Roesser model. In *2017 10th International Workshop on Multidimensional (nD) Systems (nDS)*, pages 1–6, 2017.

[33] O. Bachelier, R. David, Na. Yeganefar, and Ni. Yeganefar. Asymptotic stability and attractivity for 2D linear systems. In *European Control Conference (ECC18), Limassol, Cyprus*, 2018.

[34] L. Pandolfi. Exponential stability of 2-D systems. *Systems and Control Letters*, 4:381–385, 1984.

[35] K. Gałkowski P. Pakshin, J. Emelianova and E. Rogers. Stabilization of nonlinear 2D Fornasini-Marchesini and Roesser systems. *Avtomat. i Telemekh., 2014, no. 5, 50–66; Autom. Remote Control, 75:5 (2014), 845–858*, 2014.

[36] L.V. Hien and H. Trinh. A novel approach to exponential stability of continuous-time Roesser systems with directional time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*, 354(2):1023–1041, 2017.

[37] S. Knorn and R. H. Middleton. Asymptotic and exponential stability of nonlinear two-dimensional continuous–discrete Roesser models. *Systems & Control Letters*, 93:35–42, 2016.

[38] K. Gałkowski P. Pakshin, J. Emelianova and E. Rogers. Stabilization of two-dimensional nonlinear systems described by Fornasini–Marchesini and Roesser models. *SIAM Journal of Control and Optimization*, (5):3848–3866, 2018.

[39] L.V. Hien and H. Trinh. Exponential stability of two-dimensional homogeneous monotone systems with bounded directional delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(8):2694–2700, 2018.

[40] L. Li, L. Xu, and Z. Lin. Stability and stabilization of linear multidimensional discrete systems in the frequency domain. *International Journal of Control*, 86(11):1969–1989, 2013.

[41] U. Oberst and M. Scheicher. The asymptotic stability of stable and time-autonomous discrete multidimensional behaviors. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 26(2):215–258, 2014.

[42] O. Bachelier, T. Cluzeau, R. David, and N. Yeganefar. Structural stabilization of linear 2D discrete systems using equivalence transformations. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 28(4):1629–1652, 2017.

[43] G. Chesi and R. H. Middleton. Robust stability and performance analysis of 2D mixed continuous–discrete-time systems with uncertainty. *Automatica*, 67:233–243, 2016.

[44] A. Kanellakis, A. Tawfik, and P. Agathoklis. Stability analysis of 2-D discrete and continuous state-space systems. *IET Control Theory & Applications*, 16(3):273–282, 2022.

[45] R. Mohsenipour and P. Agathoklis. Algebraic necessary and sufficient conditions for testing stability of 2-D linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(4):1825–1831, 2021.

[46] O. Bachelier, T. Cluzeau, D. Mehdi, and N. Yeganefar. New tests for the stability of 2D Roesser models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 66(1):406–412, 2021.

[47] G. Chesi. Exact LMI conditions for stability and $\mathcal{L}_2$ gain analysis of 2-D mixed continuous–discrete time systems via quadratically frequency-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 67(3):1147–1162, 2022.

[48] R. David. *Étude de la stabilité de deux systèmes multidimensionnels*. PhD thesis, LIAS-ENSIP, University of Poitiers, 2018.

[49] W. Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Masson, 1996.

[50] X. Gourdon. *Les maths en tête, analyse*. Ellipses, 2008.

[51] E. Fornasini and M. E. Valcher. Matrix pairs in two-dimensional systems: an approach based on trace series and Hankel matrices. *Siam J. Control and Optimization*, 33(4):1127–1150, 1995.

[52] O. Bachelier, W. Paszke, N. Yeganefar, and D. Mehdi. Comments on "on stabilization of 2D Roesser models". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 63(8):2745–2749, 2018.

[53] J.P. Emelianova, P.V. Pakshin, K. Gałkowski, and E. Rogers. Stability of nonlinear 2D systems described by the continuous-time Roesser model. *Automation and Remote Control*, 75(5):845–858, 2014.

[54] O. Bachelier, R. David, and N. Yeganefar. A simple necessary and sufficient condition of asymptotic stability for scalar Fornasini-Marchesini models. In *European Control Conference (ECC19), Naples, Italy*, pages 3772–3777, 2019.

[55] R.E. Vinograd. The inadequacy of the method of characteristic exponents when applied to non-linear equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 114(2):239–240, 1957.

[56] W. Hahn. *Stability of motion*. Springer Verlag, Berlin - New York, 1967.

[57] U. Oberst and M. Scheicher. *A survey of (BIBO) stability and (proper) stabilization of multidimensional input/output systems*, pages 151–190. De Gruyter, 2011.

[58] A. Mosfegh. Discrete State-Space Modeling for Linear nth-Order Constant Coefficient Distributed-Parameter Systems. *Dynamics and Control*, 3:71–90, 1993.

[59] B. Cichy, Augusta, Rogers P., E., K. Gałkowski, and Z. Hurak. Robust control of distributed parameter mechanical systems using a multidimensional systems approach. *Bulletin of The Polish Academy of Sciences - Technical Sciences*, 58(1):67–75, 2010.

[60] P. Augusta and Z. Hurak. Distributed stabilisation of spatially invariant systems: positive polynomial approach. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 24:3–21, 2013.

[61] S. Mandra, K. Gałkowski, A. Rauh, A. Ascheman, and E. Rogers. Iterative learning control for a class of multivariable distributed systems with experimental validation. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 29(3):949–960, 2021.

[62] O. Bachelier, T. Cluzeau, F.J. Silva Alvarez, and N. Yeganefar. Stability of one-dimensioned spatially interconnected systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 31:1005–1028, 2020.

[63] L. Dai. *Singular Control Systems*. Springer Verlag, 1989.

[64] R. Curtain and H.J. Zwart. *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*. Springer Verlag, New York, 1995.

[65] D. Napp, P. Rapisarda, and P. Rocha. Time relevant stability of 2D systems. *Automatical*, 47(11):2373–2382, 2011.

[66] L. Li, L. Xu, and Z. Lin. Stability and stabilization of linear multidimensional discrete systems in the frequency domain. *International Journal of Control*, 86(11):1969–1989, 2013.

[67] P. Agathoklis, E.I. Jury, and M. Mansour. Algebraic Necessary and Sufficient Conditions for the Very Strict Hurwitz Property of a 2-D polynomial. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 2:45–53, 1991.

[68] O. Bachelier, W. Paszke, N. Yeganefar, D. Mehdi, and A. Cherifi. Towards LMI necessary and sufficient stability conditions for 2D Roesser models. Research Report, available upon request at http://www.lias-lab.fr/perso/olivierbachelier/.

[69] K.P. Rajan and H.C. Reddy. Modified Ansell's method and testing of very strict Hurwitz polynomials. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34:559–561, 1987.

[70] O. Bachelier, Yeganefar, N., D. Mehdi, and W. Paszke. On Stabilization of 2D Roesser Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 62(5):2505–2511, 2017.

[71] T. Iwasaki and S. Hara. Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1):41–59, 2005.

[72] S. Hecker and A. Varga. Generalized LFT-based representation of parametric models. *European Journal of Control*, 10(4):326–337, 2004.

[73] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion, and F. Gouaisbault. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. *Automatica*, 43:796–804, 2007.

[74] O. Bachelier, W. Paszke, N. Yeganefar, D. Mehdi, and A. Cherifi. LMI Stability Conditions for 2D Roesser Models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 61(3):766–770, 2016.

[75] P.A. Bliman. An existence result for polynomial solutions of parameter dependent LMI. *Systems and Control Letters*, 52(3–4):165–169, 2004.

[76] C.W. Scherer. Lossless H_∞-synthesis for 2D systems. *Systems and Control Letters*, 95:35–45, 2016.