

# THÈSE

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

**Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées**

(Diplôme National - Arrêté du 25 Avril 2002)

*Ecole Doctorale* : Sciences pour l'Ingénieur et Aéronautique

*Secteur de Recherche* : **Mathématiques et leurs interactions**

Présentée par :

**Djagwa DEHAINSA LA**

---

**Sur l'intégrabilité algébrique des réseaux de Toda :**  
**cas particuliers des réseaux  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  et  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$**

---

Directeur de thèse : **Pol VANHAECKE**

Soutenue le 28 Novembre 2008  
Devant la commission d'examen

## JURY

<b>Pantelis DAMIANOU</b>	Professeur, Université de Chypre	Rapporteur
<b>Armando TREIBICH</b>	Professeur, Université d'Artois, Lens	Rapporteur
<b>Victor GNEDBAYE</b>	Maître de Conférences, Université de N'Djamena	Examineur
<b>Camille LAURENT-GENGOUX</b>	Maître de Conférences, Université de Poitiers	Examineur
<b>Pol VANHAECKE</b>	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
<b>Jacques-Arthur WEIL</b>	Maître de Conférences, Université de Limoges	Examineur

# Remerciements

Il m'est particulièrement très agréable de pouvoir remercier, ici en premier, le Professeur Pol VANHAECKE, mon Directeur de thèse et aussi Directeur du Laboratoire de Mathématiques et Applications de Poitiers, pour avoir bien voulu m'accepter comme son étudiant, me proposer ce sujet de thèse et me guider dans sa réalisation durant toutes ces années. Je lui exprime ma profonde gratitude. Ses encouragements me furent d'un constant appui sans lequel la persévérance m'aurait manquée. Merci Pol! J'ai été très heureux de travailler avec toi.

Je remercie le Prof. Abderrazak BOUAZIZ, ancien directeur du laboratoire, sans lequel je n'aurais peut-être jamais rencontré Pol. Mes remerciements également à Edmond FEDIDA, Professeur émérite de l'Université d'Aix-Marseille et de l'Université de Cocody-Abidjan, pour m'avoir initié à la recherche en dirigeant mon mémoire de DEA.

Les Professeurs Pantelis DAMIANOU et Armando TREIBICH ont bien voulu rapporter ma thèse. Je tiens à les en remercier. Merci encore à Armando pour l'accueil et les discussions fructueuses que nous avons eu ensemble lors de mon séjour à l'Université de Lille 1.

Jacques-Arthur WEIL, Camille LAURENT-GENGOUX et Victor GNEDBAYE ont tous accepté d'être membres de mon jury. Je les remercie chaleureusement. En plus, je suis très reconnaissant à Camille, qui durant toutes ces années de thèse, était toujours disposé à m'ouvrir la porte de son bureau pour "parler mathématiques".

Je n'oublie pas mes "ainées" Anne PICHEREAU et Ariane LE BLANC, qui ont terminé leur thèse voilà deux ans, pour m'avoir initié à LaTeX et facilité mon intégration au sein du laboratoire. Je remercie tous les membres du laboratoire pour cette ambiance conviviale qui y règne; je remercie en particulier Brigitte BRAULT au secrétariat, Jocelyne ATTAB à la reprographie et Benoit METROT à l'informatique pour tous les services rendus. Pour terminer avec le laboratoire, je souhaite de fructueuses recherches à tous mes collègues thésards, particulièrement "mes deux petites soeurs" Khaoula Ben Abdeljelil et Hélène Arnaud, puis Coulibaly Abdoulaye, Armel Andami, Guilhem Coq, Paul Eyimi Minto'o, Gang Liu, Caroline Pintoux, Willy Nzobadilla.

Enfin l'occasion de remercier ma famille et mes amis. Je remercie toute la grande famille WALEYAM à laquelle j'appartiens, pour son soutien et l'espoir qu'elle porte en moi. Je remercie particulièrement mon frère Hondjack et mon père Dehainsala, qui a toujours voulu que je fasse une thèse et m'encourager dans ce sens. Mes remerciements vont aussi à mes trois compagnons Hemwüé TAOUKREO, Tchatchéong DAKREO et Patience DAÏKREO pour tous les services qu'ils m'ont rendus à mon absence de N'Djamena. Je ne saurai comment les remercier. Pour terminer, je remercie Gnomoga KALANDI à Paris, Mayem KOKOMADJIBE à Orléans et toute la communauté tchadienne à Poitiers, particulièrement la famille YANAMADJI et mes amis Nguéto YEDJIBAYE, Talla RAMASINGA et Tédédjim NGARMAIN pour l'intérêt fraternel et amical qu'ils m'ont témoigné et les bons moments vécus en leur compagnie. Merci Séverine, pour avoir supporté tous ces longs moments d'absence passés très loin de toi. C'est fini!

Cette thèse a été financée par la Coopération Française au Tchad. Je remercie le RAGAAD à travers le Prof. Marie-Françoise ROY, ainsi que l'ANR GIMP, qui ont contribué par un complément de bourse.

A  
mon défunt cousin Djonkamla GAÏSSALA,  
ma défunte cousine Wiwa DJAGDJING.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>La géométrie des variétés abéliennes</b>	<b>11</b>
2.1	Diviseurs, fibrés en droites et plongements dans l'espace projectif . . . . .	11
2.2	Aperçu sur les courbes algébriques et surfaces de Riemann . . . . .	13
2.3	Variétés abéliennes . . . . .	15
2.4	Variétés jacobienes . . . . .	16
2.5	Variété de Prym . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Systèmes (algébriquement) intégrables</b>	<b>21</b>
3.1	Variétés de Poisson et systèmes hamiltoniens . . . . .	21
3.2	Systèmes intégrables . . . . .	24
3.3	Systèmes algébriquement complètement intégrables . . . . .	26
3.3.1	Systèmes a.c.i homogènes à poids . . . . .	27
3.3.2	Système de Mumford . . . . .	29
3.4	Comment prouver l'intégrabilité algébrique ? . . . . .	31
3.4.1	Plongement de $\mathbf{T}_c^r$ dans un espace projectif . . . . .	32
3.4.2	Extension d'un des champs de vecteurs sur un voisinage de $\mathbf{P}^N$ . . . . .	34
3.4.3	Tout point de $\mathcal{D}_c$ est envoyé par $\bar{\mathcal{V}}_1$ dans la partie affine . . . . .	34
3.4.4	Formes différentielles holomorphes sur $\mathcal{D}_c$ . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Intégrabilité algébrique du réseau de Toda <math>\mathfrak{d}_3^{(2)}</math></b>	<b>39</b>
4.1	Position du problème et intégrabilité de Liouville . . . . .	39
4.2	Intégrabilité algébrique . . . . .	42
4.2.1	Solutions de Laurent . . . . .	42
4.2.2	Diviseurs de Painlevé . . . . .	46
4.2.3	Surface abélienne . . . . .	50
4.2.4	Différentielles holomorphes . . . . .	59
4.3	Morphisme vers le système de Mumford, Equation de Lax, Linéarisation . . . . .	61
4.3.1	Morphisme vers le système de Mumford, Equation de Lax . . . . .	61
4.3.2	Linéarisation et intégration . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Intégrabilité algébrique du réseau de Toda <math>\mathfrak{c}_2^{(1)}</math></b>	<b>69</b>
5.1	Position du problème et intégrabilité de Liouville . . . . .	69
5.2	Intégrabilité algébrique . . . . .	72
5.2.1	Solutions de Laurent . . . . .	73
5.2.2	Diviseurs de Painlevé . . . . .	75
5.3	Formes différentielles holomorphes . . . . .	89



# Chapitre 1

## Introduction

Les équations de mouvement d'un système mécanique classique sont données par les équations de Hamilton

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}, \quad (1.1)$$

où  $H = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  est l'énergie totale du système. Un tel système hamiltonien est complètement intégrable ou intégrable au sens de Liouville s'il admet  $n$  de constantes de mouvement indépendantes en involution relativement à la structure de Poisson classique donnée par

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \quad (1.2)$$

Ceci implique l'existence de plusieurs flots hamiltoniens commutant entre eux et avec le flot de (1.1). Ceci conduit à des tores réels dans le cas où ces flots sont complets et les équations du système sont intégrables par quadratures (théorème d'Arnold-Liouville). Après complexification cela conduit, dans certains cas, à des tores complexes sur lesquels les variables de phase sont des fonctions méromorphes.

Dans les années 1980, Adler et van Moerbeke ont introduit la notion d'intégrabilité algébrique et ont développé des techniques pour étudier la géométrie des systèmes algébriquement complètement intégrables (a.c.i.). Il faut comprendre par systèmes a.c.i. que les variétés invariantes complexes du système, dont l'espace de phase est en général une variété de Poisson, se complètent en des variétés abéliennes (tores complexes algébriques). Ces techniques utilisent les solutions de Laurent formelles des équations décrivant le mouvement de ces systèmes. En effet, Adler, van Moerbeke et Vanhaecke ont démontré que tout système a.c.i. admet des solutions de Laurent dépendant d'un nombre maximal de paramètres. Ils justifèrent ainsi le critère utilisé par S. Kowalevski dans son travail [22] portant sur l'étude de la toupie qui porte son nom. Ces solutions de Laurent permettent de définir un diviseur (de Painlevé) sur les variétés invariantes génériques (obtenues en fixant les constantes de mouvement) complétée "naturellement" dans un espace projectif  $\mathbf{P}^N$ , éventuellement à poids. La méthode d'Adler-van Moerbeke fournit un outil essentiel non seulement pour déceler parmi les familles de systèmes intégrables ceux qui sont a.c.i. mais aussi d'explorer leurs aspects géométriques. Elle permet de caractériser et décrire la nature algébrique des tores (polarisation, modules, automorphismes, etc.). Depuis lors beaucoup de systèmes intégrables ont été traités. Entre autres, les flots géodésiques intégrables sur  $SO(4)$ , le système de Hénon-Heiles, quatre toupies intégrables, dont la toupie célèbre de Kowalevski, etc.

Notre thèse porte sur l'étude de l'intégrabilité algébrique et de la géométrie de certains systèmes intégrables à savoir les réseaux de Toda. Le réseau de Toda classique est un système de  $n$  particules sur une ligne, caractérisé par une force d'interaction entre les particules voisines. L'hamiltonien du système est donnée par

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \exp(q_j - q_{j+1}),$$

et la structure symplectique est la structure canonique (1.2). Les équations différentielles du champ de vecteurs hamiltonien sont alors données par

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \mathcal{X}_H[q_j] = \{q_j, H\}, \\ \dot{p}_j &= \mathcal{X}_H[p_j] = \{p_j, H\}, \end{aligned} \quad 1 \leq j \leq n.$$

Pour l'historique sur les réseaux de Toda, on consultera [38]. Néanmoins il faut noter qu'en 1974 Hénon a trouvé les  $n$  intégrales premières indépendantes pour les réseaux de Toda à  $n$  particules. Dans la même année, Flaschka [13] et Manakov [28] montrèrent que ces intégrales étaient en involution prouvant ainsi la complète intégrabilité du réseau. On note aussi les résultats obtenus par Kostant [21] et Adler [1] en 1979 qui ont montré que l'espace de phase du réseau de Toda classique est isomorphe à l'orbite coadjointe du groupe des matrices triangulaires.

Une variante du réseau de Toda classique est le réseau de Toda classique périodique où cette fois les  $n$  particules sont sur un cercle et la dernière particule est en interaction avec la première contrairement au réseau de Toda classique (non périodique). Ce système est caractérisé par l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \sum_{j=1}^n \exp(q_j - q_{j+1}), \quad q_{n+1} = q_1.$$

Le système de coordonnées  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  est tel que le crochet de Poisson sur  $\mathbf{R}^{2n}$  est donné par (1.2). Les équations du mouvement sont alors définies par

$$\begin{aligned} \dot{q}_j &= \{q_j, H\}, \\ \dot{p}_j &= \{p_j, H\}, \end{aligned} \quad 1 \leq j \leq n.$$

La solution du réseau de Toda classique a été étudiée en premier par Flaschka [12]. Les équations du mouvement ont été résolues par quadratures par Kac et van Moerbeke [20] en 1975 et par la suite intégrées par Krichever [23] en 1978 en termes de fonctions thêta en utilisant des méthodes de la géométrie algébrique. En 1976 et 1980 en utilisant la théorie des groupes Olshanetsky-Perelomov [31,32] et Kostant [21] ont intégré explicitement l'équation de mouvement.

En 1976, Bogoyavlensky [9] a introduit une généralisation des réseaux de Toda aux algèbres de Lie. Soit le rang du système de racines d'une algèbre de Lie, la forme général de l'hamiltonien est donnée par

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k p_j^2 + V_{\bullet},$$



où  $n = l + 1$  pour les systèmes de racines  $\mathfrak{a}_l, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{g}_2$ , et  $n = l$  pour les autres systèmes de racines. Si on pose

$$V_k := \sum_{j=1}^n \exp(q_j - q_{j+1}),$$

le potentiel  $V_\bullet$  qui correspond à chacun des algèbres de Lie classiques est donné par

$$\begin{aligned} V_{\mathfrak{a}_l} &= V_l + \exp(q_{l+1} - q_1), & l \geq 2, \\ V_{\mathfrak{b}_l} &= V_{l-1} + \exp(q_l) + \exp(-q_1 - q_2), & l \geq 2, \\ V_{\mathfrak{c}_l} &= V_{l-1} + \exp(2q_l) + \exp(-2q_l), & l \geq 3, \\ V_{\mathfrak{d}_l} &= V_{l-1} + \exp(q_{l-1} + q_l) + \exp(-q_1 - q_2), & l \geq 4. \end{aligned}$$

Pour le potentiel des autres algèbres de Lie et l'intégrabilité de Liouville de ces réseaux, on pourra consulter [35]. Dans le but de décrire ces systèmes, on généralise les hamiltoniens ci-dessus, en considérant sur  $\mathbf{R}^{2n}$  les hamiltoniens de la forme

$$H := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_j^2 + \sum_{j=0}^l \exp \left( \sum_{j=1}^l N_{ij} q_j \right),$$

où  $N$  est une matrice de type  $(l+1, l)$ . Les coordonnées  $q_i, p_i$  sont les coordonnées canoniques définies plus haut et on désigne par  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire standard sur  $\mathbf{R}^l$  ou  $\mathbf{R}^{l+1}$ . On suppose que le vecteur  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l)^\top = \left( \frac{1}{\bar{\xi}} \right)$  est l'unique vecteur tel que  $N^\top \xi = 0$ .

Une condition qui implique que le bloc  $(l, l)$  inférieur de  $N$ , noté  $\bar{N}$ , est une matrice inversible. Si on désigne par  $\bar{R}$  la matrice carrée symétrique  $\bar{N} \bar{N}^\top$ , en faisant le changement de variables linéaires  $\bar{q} = \bar{N} q$  et  $\bar{p} = (\bar{N}^\top)^{-1} p$  l'hamiltonien  $H = H(\bar{q}, \bar{p})$  prend la forme

$$H = \frac{1}{2} \langle \bar{R} \bar{p} | \bar{p} \rangle + \sum_{i=1}^l \exp(\bar{q}_i) + \exp(-\langle \bar{\xi} | \bar{q} \rangle).$$

Par suite, si on pose

$$a_0 := \exp(-\langle \bar{\xi} | \bar{q} \rangle), \quad a_i := \exp(\bar{q}_i), \quad b_i := \bar{p}_i, \quad i = 1, \dots, l,$$

l'hamiltonien  $H = H(a, b)$  s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2} \langle \bar{R} \bar{p} | \bar{p} \rangle + \sum_{j=0}^l a_j, \tag{1.3}$$

tandis que la structure de Poisson devient linéaire et est donnée par

$$\begin{aligned} \{a_i, a_k\} &= 0, & \{b_i, b_j\} &= 0, \\ \{a_i, b_j\} &= a_i \delta_{ij}, & \{a_0, b_j\} &= -\xi_j a_0, \end{aligned}$$

où  $i, j = 1, \dots, l$  et  $k = 0, \dots, l$ . La matrice  $R := NN^\top$  peut se factoriser comme  $R = EE^\top$ , où  $E$  est une matrice carrée d'ordre  $l+1$  et de rang  $l$ . Les  $l+1$  colonnes de  $E$  sont linéairement indépendantes, et  $\xi$  est, à constante près, l'unique vecteur tel que  $E^\top \xi = 0$ . En faisant le changement de variables

$$u := E^\top \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad v := -a,$$

avec  $b := (b_1, \dots, b_l)$  et  $a := (a_0, \dots, a_l)$ , l'hamiltonien prend de nouveau la forme simple

$$H = \frac{1}{2} \langle u|u \rangle + \sum_{j=0}^l v_j, \quad (1.4)$$

tandis que le champ de vecteurs  $\mathcal{X}_H$  prend la forme symétrique

$$\dot{v}_i = v_i \sum_{j=0}^l e_{ij} u_j, \quad \dot{u}_i = \sum_{j=0}^l e_{ij} v_j.$$

Enfin on introduit les variables

$$x_i := \frac{1}{2} \langle e_i | e_i \rangle v_i, \quad y_i := \sum_{j=0}^l e_{ij} u_j,$$

pour  $i = 0, \dots, l$ , où  $e_i$  est la  $i$ -ème ligne de la matrice  $E$ . Les variables  $y_i$  sont linéairement dépendantes; plus précisément on a  $\sum_{j=0}^l \xi_j y_j = 0$  car  $\xi$  engendre l'espace nul de  $E$ . Si on pose  $x := (x_0, \dots, x_l)$  et  $y := (y_0, \dots, y_l)$  des éléments de  $\mathbf{R}^{l+1}$  et si  $x \cdot y$  est le vecteur de  $\mathbf{R}^{l+1}$  défini par  $(x \cdot y)_i := x_i y_i$ , alors en termes des variables  $x_i, y_i$  le champ de vecteurs  $\mathcal{X}_H$  prend sur l'hyperplan  $\sum_{j=0}^l \xi_j y_j = 0$  la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} &= x \cdot y, \\ \dot{y} &= Ax, \end{cases}$$

où  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq l}$  est la matrice carrée définie par

$$a_{ij} := \frac{2 \langle e_i | e_j \rangle}{\langle e_j | e_j \rangle}, \quad (0 \leq i, j \leq l).$$

Adler et van Moerbeke, en utilisant le critère de Kowalevski, ont démontré le résultat suivant.

**Théorème 1.1.** *Pour  $l \geq 1$ , soient  $e_0, \dots, e_l$  des vecteurs linéairement dépendants dans l'espace vectoriel euclidien  $(\mathbf{R}^{l+1}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ , tels que qu'ils soient  $l$  à  $l$  linéairement indépendants. On suppose que les réels non nuls  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_l$  satisfaisant  $\sum_{i=0}^l \xi_i e_i = 0$  sont de somme non nulle c'est-à-dire  $\sum_{i=0}^l \xi_i \neq 0$ . Soit  $A$  la matrice de type  $(l+1, l+1)$ , définie par*

$$a_{ij} := \frac{2 \langle e_i | e_j \rangle}{\langle e_j | e_j \rangle}, \quad (0 \leq i, j \leq l).$$

Considérons le champ de vecteurs  $\mathcal{V}$  sur  $\mathbf{C}^{2(l+1)}$  qui est donné par

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x \cdot y, \\ \dot{y} &= Ax, \end{aligned}$$

où  $x, y \in \mathbf{C}^{l+1}$  et  $x \cdot y$  est donnée par  $(x \cdot y)_i = x_i y_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ . Si le champ de vecteurs  $\mathcal{V}$  est un champ de vecteurs intégrable d'un système a.c.i. irréductible, alors  $A$  est la matrice de Cartan d'une algèbre de Lie affine (éventuellement twistée).

L'intégrabilité algébrique des réseaux de Toda périodiques n'a été établie que dans le cas le plus simple des réseaux de Toda associés aux algèbres de Lie. Une preuve de l'intégrabilité algébrique de tous les réseaux de Toda  $\mathfrak{a}_l^{(1)}$  est donnée par Mumford et van Moerbeke dans [41]. Plusieurs résultats géométriques ont été démontrés dans le cas général [5,6], mais toujours sous l'hypothèse que les réseaux en question sont a.c.i. ; en effet, Adler et van Moerbeke ont montré dans [2] la propriété plus faible que ces réseaux vérifient le critère de linéarisation [6, Theorem 6.41]. L'intégrabilité algébrique de tous les systèmes de Toda périodiques, conjecturés dans [6], n'a pas encore été établie dans le cas général.

Pour les réseaux de Toda périodiques à trois particules, il existe exactement six cas, qui correspondent aux systèmes de racines des algèbres de Lie affines  $\mathfrak{a}_2^{(1)}$ ,  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$ ,  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ ,  $\mathfrak{a}_4^{(2)}$ ,  $\mathfrak{g}_2^{(1)}$  et  $\mathfrak{d}_4^{(3)}$ . Les matrices de Cartan  $A$  correspondant à chacun sont données ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_2^{(1)} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; & \mathfrak{a}_4^{(2)} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{c}_2^{(1)} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}; & \mathfrak{d}_3^{(2)} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{g}_2^{(1)} : A &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}; & \mathfrak{d}_4^{(3)} : A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouvera une démonstration détaillée de l'intégrabilité algébrique du réseau de Toda  $\mathfrak{a}_2^{(1)}$  dans [6]. Cette thèse consiste à décider de l'intégrabilité algébrique de deux de ces réseaux, à savoir ceux associés aux algèbres de Lie affines (twistées)  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  et  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$  et d'étudier leur géométrie.

Les équations qui régissent le mouvement du réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  sont données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0 y_0, & \dot{y}_0 &= 2x_0 - x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_1 y_1, & \dot{y}_1 &= -2x_0 + 2x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 y_2, & \dot{y}_2 &= 2x_2 - x_1, \end{aligned} \tag{1.5}$$

sur l'hyperplan  $\mathcal{H} = \{(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{C}^6 \mid y_0 + y_1 + y_2 = 0\}$  de dimension 5 de  $\mathbf{C}^6$ . Il existe trois intégrales premières, à savoir

$$\begin{aligned} F_1 &= y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 2x_1 - 4x_2, \\ F_2 &= (y_0^2 - 4x_0)(y_2^2 - 4x_2) - x_1(2y_0 y_2 - 4x_0 - x_1 - 4x_2), \\ F_3 &= x_0 x_1 x_2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Les fonctions  $F_1, F_2$  et  $F_3$  sont en involution par rapport à une structure de Poisson, avec  $F_3$  comme fonction de Casimir et les différentielles  $dF_i$  sont indépendantes sur un ouvert dense de  $\mathcal{H}$ , conduisant ainsi à l'intégrabilité au sens de Liouville du réseau. Le champ (1.5), qui par la suite sera noté  $\mathcal{V}_1$ , est engendré par  $F_1$ . Un autre champ de vecteurs  $\mathcal{V}_2$ , qui commute avec  $\mathcal{V}_1$ , est engendré par  $F_2$ . Si on affecte à  $x_0, x_1$  et  $x_2$  le poids 2 et à  $y_0, y_1$  et  $y_2$  le poids 1, alors les constantes de mouvement sont toutes homogènes à poids avec pour poids 2, 4, 6

respectivement. Il est alors facile de voir que le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  est homogène à poids (de poids 1). Il existe sur  $\mathbf{C}^6$  une involution

$$(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \mapsto (x_2, x_1, x_0, y_2, y_1, y_0), \quad (1.7)$$

qui se restreint à  $\mathcal{H}$  et laisse invariant les constantes de mouvement (1.6). Cette involution sera très utile dans l'étude de ce réseau de Toda et elle aura de fortes implications sur la géométrie de ce système.

L'analyse de Painlevé du système montre que le champ de vecteurs (1.5) admet trois familles de solutions de Laurent homogènes à poids dépendant de 4 ( $= \dim \mathcal{H} - 1$ ) paramètres libres (balances principales) et trois autres familles de solutions de Laurent dépendant de 3 paramètres. Deux des balances principales sont données par

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{1}{t^2} + d + \frac{1}{10}(6d^2 - e)t^2 + \dots, & x_0(t) &= \beta t + \dots, \\ x_1(t) &= et^2 + \dots, & x_1(t) &= \frac{1}{t^2} + \gamma - \frac{1}{2}(\beta + \delta)t + \dots, \\ x_2(t) &= c + act + \frac{1}{2}c(2c + a^2)t^2 + \dots, & x_2(t) &= \delta t + \dots, \\ y_0(t) &= -\frac{2}{t} + 2dt - \frac{2}{5}(e - d^2)t^3 + \dots, & y_0(t) &= \frac{1}{t} + \alpha - \gamma t + \frac{1}{4}(5\beta + \delta)t^2 + \dots, \\ y_1(t) &= \frac{2}{t} - a - 2(c + d)t - act^2 + \star t^3 + \dots, & y_1(t) &= -\frac{2}{t} + 2\gamma t - \frac{3}{2}(\beta + \delta)t^2 + \dots, \\ y_2(t) &= a + 2ct + act^2 + \frac{1}{3}(2c^2 + a^2c - e)t^3 + \dots, & y_2(t) &= \frac{1}{t} - \alpha - \gamma t + \frac{1}{4}(5\delta + \beta)t^2 + \dots, \end{aligned} \quad (1.8)$$

où  $\star := (11e - 10c^2 - 6d^2 - 5a^2c)/15$ . La troisième balance principale se déduit de la première par l'involution (1.7). Une fois les balances principales déterminées, elle permettent de définir un plongement de la surface invariante affine

$$\mathbf{F}_{\mathbf{c}} = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathcal{H} : F_i(x) = c_i\}, \quad (1.9)$$

définie par les constantes de mouvement (1.6), dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^{15}$ ; ceci se fait à l'aide des fonctions polynomiales homogènes à poids ayant au pire un pôle simple quand on leur substitue n'importe laquelle des balances principales. Une base  $(1, z_1, \dots, z_{15})$  de ces fonctions est donnée en (4.33). En utilisant ce plongement et les trois balances principales nous démontrons que si  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  est un élément de l'ouvert de Zariski

$$\begin{aligned} \Omega := \{ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3 \mid c_3 \neq 0, c_1^2 - 4c_2 \neq 0 \text{ et} \\ 6912c_3^2 + 288c_1c_2c_3 + 4c_2^3 - c_1^2c_2^2 - 64c_1^3c_3 \neq 0 \}, \end{aligned}$$

alors la fermeture de l'image de la surface invariante affine est une surface abélienne. Ceci est fait en ajoutant à cette surface affine trois courbes de genre 2, 3 et 2 respectivement et notées  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ . Des équations pour ces courbes sont trouvées par substitution des balances principales dans les équations  $F_i = c_i$ , où  $F_1, F_2, F_3$  sont les invariants (1.6), donnant

$$a^4e^2 - (c_1e + 8c_3)a^2e - 4e^3 + c_2e^2 + 4c_1c_3e + 16c_3^2 = 0,$$

pour les deux courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  du fait de l'involution (1.7); et

$$32\alpha\beta^2 + (16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2)\beta - 32c_3\alpha = 0,$$

pour la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ . Toujours en utilisant le plongement, on donne une description géométrique des surfaces invariantes en déterminant les singularités du diviseur à l'infini constitué par ces courbes et les lieux de tangence du champ (1.5). Ainsi on montre que les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  s'intersectent transversalement en deux points, et que chacune de ces courbes intersecte la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  en un point.

On prouve alors en utilisant le théorème d'Arnold-Liouville Complexe (Théorème 3.15) que pour  $\mathbf{c} \in \Omega$  la variété invariante complexe (1.9) se complète en une surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  grâce au fait que les flots du champ de vecteurs (1.5) issus des points de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  pénètrent immédiatement dans la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ , plongée dans  $\mathbf{P}^{15}$  et que les prolongements  $\bar{\mathcal{V}}_1$  et  $\bar{\mathcal{V}}_2$  à  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  des champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont holomorphes, indépendants en chaque point et commutants. Ces résultats sont formulés dans le théorème suivant,

**Théorème 1.2.** *Soit le système de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  donné par le champ de vecteurs (1.5) et les constantes de mouvement définies en (1.6). On a*

(1) *Ce système est algébriquement complètement intégrable.*

(2) *Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface invariante  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}} = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathcal{H} : F_i(x) = c_i\}$  est isomorphe à  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2 \setminus \mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  où*

-  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  *est la jacobienne de la courbe hyperelliptique (de genre 2)  $\bar{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  d'équation affine*

$$a^4e^2 - (c_1e + 8c_3)a^2e - 4e^3 + c_2e^2 + 4c_1c_3e + 16c_3^2 = 0;$$

-  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  *est un diviseur sur  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ , composé de trois courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  où les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont lisses et isomorphes à  $\bar{\Gamma}_{\mathbf{c}}$ , tandis que  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est une courbe de genre 3, singulière en deux points et d'équation affine*

$$32\alpha\beta^2 + (16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2)\beta - 32c_3\alpha = 0.$$

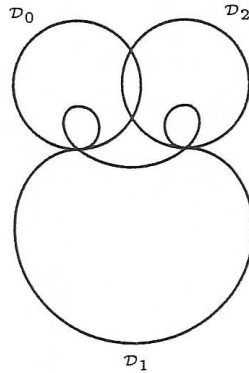


FIG. 1.1 – Courbes complétant les surfaces invariantes  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  du réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  en surfaces abéliennes. Dans le dessin,  $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)}$ .

(3) *Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  s'intersectent transversalement en deux points, et chacune d'elles intersecte la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  en l'un point singulier de cette dernière. La configuration de ces courbes à l'infini à rajouter à la surface invariante affine peut être représentée*

comme en Fig. 1.1.

(4) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est tangent doublement à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  (resp.  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ) en son point d'intersection avec  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ . De plus, le champ  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est tangent doublement à l'une des branches de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  en ses points singuliers et il est transversal à l'autre branche. En particulier la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  (resp.  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ) est tangente à la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  à l'une de ses branches en leur point d'intersection.

(5) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  admet dix demi-périodes à l'infini : les points de Weierstrass sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  (en particulier les quatre points singuliers du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ ) et six demi-périodes sur la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ .

Tous les résultats dans le théorème sont démontrés dans la Section 4.2. Enfin comme application, dans la Section 4.3., nous utilisons une technique développée par Vanhaecke [42] pour déterminer un morphisme vers le système de Mumford ; ceci nous conduit à une nouvelle structure de Poisson homogène à poids pour le système de Mumford, non compatible avec celles déjà connues et une nouvelle équation de Lax pour le réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ .

Les équations de mouvement du réseau de Toda  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$  sont données par

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0 y_0, & \dot{y}_0 &= 2x_0 - 2x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_1 y_1, & \dot{y}_1 &= -x_0 + 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 y_2, & \dot{y}_2 &= 2x_2 - 2x_1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Il est considéré sur l'hyperplan  $\mathcal{H} = \{(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) \in \mathbf{C}^6 \mid y_0 + 2y_1 + y_2 = 0\}$  de dimension 5. Le système admet également trois intégrales premières, indépendantes et en involution, données par

$$\begin{aligned} F_1 &= x_0 x_1^2 x_2, \\ F_2 &= y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 4x_1 - 8x_2, \\ F_3 &= (y_0^2 - 4x_0)(y_2^2 - 4x_2) - 8x_1(y_0 y_2 - 2x_1). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Ce système est également homogène à poids si on affecte le poids 2 à  $x_0, x_1, x_2$  et le poids 1 à  $y_0, y_1, y_2$ . On montre que le système admet trois balances principales dépendant de quatre paramètres libres. La surface invariante affine générique définie par les trois constantes de mouvement (1.11) est plongée dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^{17}$  à l'aide de 18 polynômes homogènes à poids  $z_0, z_1, \dots, z_{17}$  (5.22) ; ces dernières ont toutes au plus un pôle simple quand leur est substitué chacune de balances principales du système. En utilisant le plongement défini par les fonctions  $z_0, \dots, z_{17}$ , par une démarche analogue à celle du paragraphe précédent, nous démontrons que pour chaque valeur régulière  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  dans l'ouvert de Zariski

$$\begin{aligned} \Omega := \{ \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3 \mid c_1 \neq 0, c_3^2 - 1024c_1 \neq 0 \text{ et} \\ (c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1 \neq 0 \}, \end{aligned}$$

la surface invariante  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}} := \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathcal{H} : F_i(x) = c_i\}$  définie par (1.11) se complète en une surface abélienne par l'adjonction d'un diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  à l'infini. On aboutit au théorème suivant.

**Théorème 1.3.** *Soit le système de Toda  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$  donné par le champ de vecteurs (1.10) et les constantes de mouvement définies en (1.11). On a*

(1) Ce système est algébriquement complètement intégrable.

(2) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface invariante  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}} = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathcal{H} : F_i(x) = c_i\}$  au dessus du point  $\mathbf{c}$  se complète en une surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  par l'adjonction d'un diviseur singulier  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ .

(3) Le diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est composé de trois courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  où la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est lisse d'équation affine

$$64\beta^2 + (4c_3 - (4\alpha^2 - c_2)^2)\beta + 64c_1 = 0,$$

tandis que les courbes isomorphes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont singulières de genre 2 d'équation affine

$$e^4 a^4 - (2c_1 + c_2 e^2) e^2 a^2 + 32e^5 a + c_3 e^4 + c_1 c_2 e^2 + c_1^2 = 0.$$

(4) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  s'intersectent transversalement en quatre points, qui sont des points non-singuliers pour chacune des courbes. Chacune d'elles intersecte la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  en un point, le point singulier de chacune d'elles.

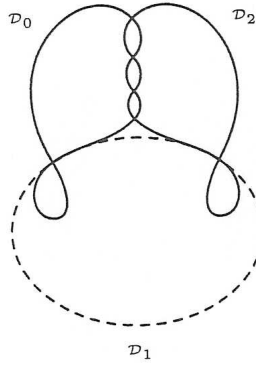


FIG. 1.2 – Courbes complétant les surfaces invariantes  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  du réseau de Toda  $\mathbf{c}_2^{(1)}$  en surfaces abéliennes. Dans le dessin,  $\mathcal{D}_i := \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)}$ .

(5) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , le champ de vecteurs  $\bar{\mathbf{v}}_1$  est transversal à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  (respectivement  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ) en leurs quatre points d'intersection. De plus, le champ  $\bar{\mathbf{v}}_1$  est tangent doublement à l'une des branches de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  (resp.  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ) en son point de singularité et il est transversal à l'autre branche. Enfin, le champ  $\bar{\mathbf{v}}_1$  est tangent doublement à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  en chacun des points singuliers des courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ . En particulier la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est tangente à la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  (resp.  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ) à l'une de ses branches en leur point d'intersection.

(6) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  admet huit demi-périodes sur la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  et huit demi-périodes à l'infini : les six points singuliers du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  et deux autres points sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ .

(7) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  est le dual de la surface de Prym  $\text{Prym}(\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}/\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)})$  où  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est une courbe elliptique d'équation affine  $\xi^2 = ((4\zeta - c_2)^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1$ .

Tous les résultats dans le théorème sont démontrés dans la Section 5.2 et la Section 5.3.

## Le plan

Les chapitres 2 et 3 servent comme une introduction aux systèmes a.c.i. Le chapitre 2 porte essentiellement sur la géométrie algébrique, plus précisément nous y énonçons les notions basiques de la théorie des variétés abéliennes qui nous serviront par la suite dans notre travail. La majeure partie des informations se retrouvent dans les livres spécialisés [14] et [18]. Le chapitre 3, lui, est consacré aux rappels sur les systèmes intégrables ; nous y rappelons dans un premier temps les notions de variétés de Poisson, de systèmes intégrables au sens de Liouville avant d'introduire l'intégrabilité algébrique d'un système intégrable complexe. Nous donnons la description de l'algorithme élaboré par Adler et van Moerbeke qui permet de démontrer qu'un système complètement intégrable l'est algébriquement. Nous en ferons usage dans les derniers chapitres de cette thèse. Pour de plus amples informations sur l'intégrabilité algébrique des systèmes intégrables et des exemples, on pourra consulter l'excellent livre [6].

Le chapitre 4 est consacré à l'étude du réseau de Toda associé à l'algèbre de Lie affine  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ . Dans la première section nous rappelons que ce système de dimension 2 est intégrable au sens de Liouville. Dans la seconde section, nous démontrons que ce réseau est algébriquement complètement intégrable et décrivons la géométrie des tores. Dans la dernière section nous montrons le lien entre le réseau de Toda et le système Mumford. Précisément, nous explicitons un morphisme de systèmes intégrables entre ces deux systèmes. Enfin, nous terminons ce chapitre en donnant une nouvelle équation de Lax et une linéarisation explicite du réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ .

Le chapitre 5 porte sur le réseau de Toda associé à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$ . Dans la première section, nous commençons à vérifier que ce réseau est un système intégrable au sens de Liouville. Dans la seconde section, nous démontrons l'intégrabilité algébrique du système, décrivons la géométrie du diviseur à l'infini et montrons que les surfaces invariantes compactifiées sont des variétés de Prym, associées à des surfaces de Riemann de genre 3, munies d'une involution.



## Chapitre 2

# La géométrie des variétés abéliennes

Dans ce chapitre nous nous proposons d'introduire les notions basiques de la théorie des variétés abéliennes, qui nous seront utiles dans la suite de notre travail. On pourra se référer aux livres de Griffiths et Harris [14] et celui de Mumford [30] pour d'amples informations sur ces notions et pour les démonstrations des théorèmes et propositions énoncés dans ce chapitre.

Soit  $X$  un espace topologique. Un *préfaisceau* sur  $X$  consiste en la donnée pour chaque ouvert  $U$  de  $X$  d'un ensemble  $\mathcal{F}(U)$  et, pour tout couple d'ouverts  $(U, V)$  de  $X$  avec  $V \subset U$ , d'applications dites de restriction  $r_{VU} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  telle que  $r_{UU} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$  et si  $W \subset V \subset U$ , on a  $r_{WU} = r_{WV} \circ r_{VU}$ . On note  $r_{VU}(f) = f|_V$ . On dira que  $\mathcal{F}$  est un *faisceau* si, de plus, pour tout recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  d'un ensemble  $U$  de  $X$ , si on se donne des  $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$  telles que  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  alors il existe un seul  $f \in \mathcal{F}(U)$  tel que  $f|_{U_i} = f_i$ .

### 2.1 Diviseurs, fibrés en droites et plongements dans l'espace projectif

Soit  $M$  une variété complexe de dimension  $n$ . Une sous-variété analytique  $V$  de  $M$  de dimension  $n - 1$  est appelée une *hypersurface*. Alors pour tout  $p$  élément de  $V$ ,  $V$  est localement donné au voisinage de  $p$  comme les zéros d'une fonction holomorphe  $f$ , appelée *fonction définissante locale* pour  $V$ .

Un diviseur  $\mathcal{D}$  sur  $M$  est une combinaison formelle localement finie  $\mathcal{D} = \sum a_i V_i$  d'hypersurfaces analytiques irréductibles  $V_i$  de  $M$  avec  $a_i \in \mathbf{Z}$ , 'localement finie' ici veut dire que  $\forall p \in M$  il existe un voisinage de  $p$  rencontrant un nombre fini des  $V_i$ . Si  $M$  est compact, la somme est évidemment finie. On note  $\text{Div}(M)$  l'ensemble des diviseurs sur  $M$ . Il est muni d'une addition évidente (on ajoute les  $a_i$ ) pour laquelle il est un groupe abélien. Un diviseur  $\mathcal{D} = \sum a_i V_i$  est dit *effectif* (ou *positif*), et on note  $\mathcal{D} \geq 0$  si on a  $a_i \geq 0$  pour tout  $i$ . Enfin, le *degré* du diviseur  $\mathcal{D}$  est l'entier  $\text{deg } \mathcal{D} = \sum a_i$ .

Soit  $V$  une hypersurface irréductible de  $M$ ,  $p \in V$ , et  $f$  une fonction définissante locale pour  $V$ . Pour une fonction holomorphe  $g$ , définie au voisinage de  $p$ , on définit l'*ordre* de  $g$  le long de  $V$  autour de  $p$ , noté  $\text{ord}_V g$ , comme étant le plus grand nombre entier  $\alpha$  pour lequel  $f^\alpha$  divise  $g$  dans voisinage de  $p$ . Cet entier ne dépend pas de  $p \in V$  et de la fonction définissante locale  $f$ . On dira que  $g$  admet, le long de  $V$ , un *zéro* d'ordre  $\alpha$  si  $\text{ord}_V g = \alpha > 0$ , et que  $g$  admet un *pôle* d'ordre  $\alpha$  si  $\text{ord}_V g = -\alpha < 0$ . On définit alors le diviseur  $(f)$  d'une fonction

holomorphe  $f$  par

$$(f) = \sum_V \text{ord}_V f \cdot V,$$

la somme parcourant toutes les surfaces analytiques irréductibles  $V$  pour lesquelles  $\text{ord}_V f \neq 0$ . Enfin un diviseur sur  $M$  est dit *diviseur principal* s'il est le diviseur d'une fonction méromorphe sur  $M$ .

Soit  $M$  une variété complexe, un *fibré en droites holomorphe* sur  $M$  est une variété complexe  $\mathcal{L}$  qui est "localement un produit de  $M$  avec  $\mathbf{C}$ ", plus précisément,  $\mathcal{L}$  est munie d'une application holomorphe surjective  $\pi : \mathcal{L} \rightarrow M$  et on demande qu'il existe  $(U_\alpha)_{\alpha \in I}$  un recouvrement ouvert de  $M$  et des trivialisations locales  $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{C}$  dont la composée avec la première projection est  $\pi$  telles que pour tous  $\alpha$  et  $\beta$ , les applications  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{C} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbf{C}$  sont définies par  $(x, t) \rightarrow (x, g_{\alpha\beta}(x)t)$  où  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbf{C}^*$  sont des fonctions holomorphes appelées *fonctions de transitions* satisfaisant à  $g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1$  sur  $U_\alpha \cap U_\beta$  et  $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$  sur  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ . Une *section (holomorphe)* du fibré en droite  $\mathcal{L}$  est une application (holomorphe)  $s : M \rightarrow \mathcal{L}$  telle que  $\pi \circ s = \text{Id}_M$ . La composition  $\phi_\alpha \circ s|_{U_\alpha} : U_\alpha \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbf{C}$  définit une application (holomorphe)  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbf{C}$  pour chaque  $\alpha$ . Deux telles applications  $s_\alpha$  et  $s_\beta$ , avec  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ , sont reliées par  $s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$ . Réciproquement, une *section globale* de  $\mathcal{L}$  est donnée par un ensemble d'applications holomorphes  $\{s_\alpha\}$  définies sur chaque  $U_\alpha$  telle que  $s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$  sur  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ . On désigne par  $\mathcal{O}(\mathcal{L})$  le faisceau des sections holomorphes du fibré en droites  $\mathcal{L}$ . Pour un fibré en droites  $\mathcal{L}$  associé à un diviseur  $\mathcal{D}$  sur  $M$ , on a l'isomorphisme

$$\mathcal{O}(\mathcal{L}) \simeq \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f \text{ méromorphes sur } M, (f) \geq -\mathcal{D}\}.$$

Soit  $E \rightarrow M$  un fibré vectoriel complexe de rang  $k$ . Une *métrique hermitienne* sur  $E$  est un produit intérieur hermitien sur chaque fibre  $E_x$  de  $E$  tel que si pour  $x \in M$ ,  $(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x))$  est une base de  $E_x$  alors les fonctions  $h_{ij}(x) = (\xi_i(x), \xi_j(x))$  sont  $C^\infty$ . Un *fibré vectoriel hermitien* est un fibré vectoriel holomorphe muni d'une métrique hermitienne, et on désigne par  $\mathcal{A}^p(E)$  le faisceau des  $p$ -formes. Une *connexion*  $D$  sur un fibré vectoriel complexe  $E \rightarrow M$  est une application  $D : \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$  qui vérifie la règle de Leibniz, c'est-à-dire

$$D(f\xi) = df \otimes \xi + fD(\xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{A}^0(E)(U), f \in C^\infty(U), U \text{ ouvert de } M.$$

Pour un fibré vectoriel hermitien, il existe une unique connexion  $D$  sur  $E$  compatible avec la métrique (c'est-à-dire  $d(\xi, \eta) = (D\xi, \eta) + (\xi, D\eta)$ ) et avec la structure complexe [14].

On peut étendre la connexion  $D$  à un opérateur  $D : \mathcal{A}^p(E) \rightarrow \mathcal{A}^{p+1}(E)$  en forçant la règle de Leibniz, c'est-à-dire en l'appliquant aux  $p$ -formes  $\psi \in \mathcal{A}^p(U)$ ,

$$D(\psi \wedge \xi) = d\psi \otimes \xi + (-1)^p \psi \wedge D\xi, \quad \forall \xi \in \mathcal{A}^0(E)(U).$$

En particulier l'opérateur  $D^2 : \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^2(E)$  est linéaire ; en effet

$$D^2(f\sigma) = D(df \otimes \sigma + fD\sigma) = -df \wedge D\sigma + df \wedge D\sigma + fD^2\sigma = fD^2\sigma,$$

pour  $\sigma$  section de  $E$  et  $f$  une fonction  $C^\infty$ . On remarque que  $D^2 \neq 0$  en général. Si  $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_k)$  est une base de sections sur  $E$ , alors l'opérateur  $D^2$  peut s'écrire  $D^2 e_i = \sum \Theta_{ij} \otimes e_j$ , et  $\Theta = (\Theta_{ij})$  est appelée la *matrice de courbure* de  $D$  par rapport à la base  $\mathcal{E}$ . Dans le cas d'un fibré hermitien, on montre [14] que  $\Theta$  est une matrice hermitienne de  $(1, 1)$ -formes. Pour un fibré en droites, muni d'une métrique hermitienne, la matrice de courbure  $\Theta$  est une

matrice  $(1, 1)$ . On dira qu'un fibré en droites holomorphe  $\mathcal{L}$  est *positif* s'il existe une métrique sur  $\mathcal{L}$  de forme de courbure  $\Theta$  telle que  $(i/2\pi)\Theta$  est une  $(1, 1)$ -forme positive c'est-à-dire  $(i/2\pi)\Theta = \sum h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$  dans un système de coordonnées locales  $z$  sur  $M$ , avec  $(h_{ij})$  hermitienne définie positive.

Soient  $s_0, \dots, s_N$  une base de sections dans  $\mathcal{O}(\mathcal{L})$  et l'application

$$\iota : p \in M \rightarrow (s_0(p) : \dots : s_N(p)) \in \mathbf{P}^N.$$

Le théorème suivant nous donne une condition pour que  $\iota$  définisse un plongement. Pour la preuve voir [14].

**Théorème 2.1. (de Kodaira)** *Soit  $M$  une variété complexe compacte et  $\mathcal{L}$  un fibré en droites positif. Pour un certain entier  $k \geq 1$ , l'application  $\iota$  définie par le fibré  $\mathcal{L}^k$  plonge  $M$  dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^N$ . De plus,  $M$  possède un fibré positif si, et seulement si  $M$  admet une  $(1, 1)$ -forme  $\omega$  positive, fermée (appelée forme de Hodge) avec la classe de cohomologie  $[\omega] \in H^2(M, \mathbf{Z})$ .*

En d'autres termes, si le fibré en droites  $\mathcal{L} = [\mathcal{D}]$ , associé à un diviseur  $\mathcal{D}$ , est positif alors pour un certain entier  $k \in \mathbf{N}$ , les fonctions avec un pôle d'ordre au plus  $k$  le long de  $\mathcal{D}$  fournissent un plongement de  $M$  dans un espace projectif. Le fibré en droites est alors dit *ample*. Il est dit *très ample* si  $\mathcal{L}$  lui-même plonge  $M$  dans l'espace projectif.

## 2.2 Aperçu sur les courbes algébriques et surfaces de Riemann

Soit une famille  $(P_i)_{1 \leq i \leq s} \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  de polynômes, le sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de l'espace affine  $\mathbf{C}^n$  défini par les équations  $P_1 = \dots = P_s = 0$  est une *variété affine*. Une variété affine de dimension 1 est appelée une *courbe affine*. On définit de même une *variété projective* comme le lieu commun des zéros d'un ensemble de polynômes homogènes ; on peut le voir comme un sous-ensemble d'un espace projectif complexe. Soient  $P \in \mathbf{C}[u, v]$  et  $\mathcal{C} = \{(w, u) \in \mathbf{C}^2 : P(w, u) = 0\}$  la courbe affine associée. On a que  $\mathcal{C}$  est *lisse* si les dérivées partielles par rapport à  $w$  et  $u$  ne s'annulent pas en un même point  $(w, u) \in \mathcal{C}$ .

Une *surface de Riemann* est une variété complexe de dimension 1. C'est une surface topologique orientable. On a

**Proposition 2.2.** *Toute surface de Riemann compacte est homéomorphe à une sphère avec  $g$  trous. Le nombre de trous est appelé le genre de la surface.*

Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  deux surfaces de Riemann compactes, et  $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  une application holomorphe,  $p$  un point de  $\Gamma_1$  et  $u$  une coordonnée locale autour de  $p$ , avec  $u(p) = 0$  et soit  $w$  un paramètre local en  $\pi(p) \in \Gamma_2$  ; alors l'application  $\pi$  est représentée localement comme une fonction  $w = f(u)$  définie sur un voisinage de  $u = 0$  et un recouvrement d'un voisinage de  $w = 0$ . Donc elle est représentable comme

$$w = f(u) = u^{b+1}(C + O(u)), \quad C \neq 0, b \in \mathbf{N}.$$

L'entier  $b + 1 = b_\pi(p)$  est appelé l'*indice de ramification* et il ne dépend pas du choix des paramètres locaux. Les points  $p \in \Gamma_1$  pour lesquels  $b_\pi(p) > 1$  sont appelés les *points de ramification*, tandis que le point  $q$  de  $\Gamma_2$  tel qu'il existe au moins un point de ramification dans

$\pi^{-1}(q)$  sont appelés des *points de branchement*. On montre que le somme  $\sum_{p \in \pi^{-1}(q)} (b_\pi(p) + 1)$  est indépendant du point  $q$  dans  $\Gamma_2$  et est appelé le *degré* de  $\pi$ . La relation suivante dite *formule de Riemann-Hurwitz*, nous permet de calculer le genre topologique d'une surface de Riemann

$$2g(\Gamma_1) - 2 = n(2g(\Gamma_2) - 2) + N,$$

où on a posé  $n$  le degré de  $\pi$ ,  $N = \sum b_\pi(p)$  le nombre pondéré de points de branchement et  $g(\Gamma_i)$  le genre de la surface de Riemann  $\Gamma_i$ . En particulier si  $\pi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  est un revêtement double ( $n = 2$ ) alors

$$g(\Gamma_1) = 2g(\Gamma_2) - 1 + \frac{N}{2}.$$

Notons que le nombre de points de branchement d'un revêtement double est toujours pair. On montre que le genre topologique  $g$  d'une surface de Riemann  $\Gamma$  est égal au genre (géométrique) de  $\Gamma$  c'est-à-dire que la surface  $\Gamma$  admet exactement  $g$  différentielles holomorphes indépendantes c'est-à-dire  $g = \dim H^0(\Gamma, \Omega^1)$ .

En particulier, un diviseur sur une surface de Riemann  $\Gamma$  est une somme (formelle) finie  $\mathcal{D} = \sum a_i p_i$  de points  $p_i$  sur  $\Gamma$  (dans ce cas  $\text{Div}(\Gamma)$  est un groupe libre sur  $\Gamma$ ) et il existe un homomorphisme naturel  $\text{deg} : \text{Div}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{Z}$  défini par  $\text{deg}(\sum a_i p_i) = \sum a_i$ .

Beaucoup de surfaces de Riemann compactes de genre  $g \geq 2$  peuvent être plongées dans un espace projectif de façon canonique, en utilisant leur fibré canonique  $K_\Gamma$ . Supposons que  $\Gamma$  admette un genre supérieur à 2 et soit  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  une base de  $\Omega^1(\Gamma)$ ; dans un système de coordonnées locales  $z$ , on peut écrire  $\omega_i = f_i(z)dz$ , et l'application de Kodaira  $i_K$  est donnée par

$$\begin{aligned} i_K : \Gamma &\rightarrow \mathbf{P}^{g-1} \\ P &\mapsto (f_1(P), \dots, f_g(P)). \end{aligned}$$

Cette application est un plongement quand elle est injective et immersive. Une surface de Riemann compacte pour laquelle cette application n'est pas un plongement est appelée une *surface de Riemann hyperelliptique* (resp. *elliptique* si le genre est 1). Une *courbe hyperelliptique* est une courbe dont la surface de Riemann (compacte) associée est hyperelliptique (si le genre est 1 on dit *courbe elliptique*). Les surfaces de Riemann hyperelliptiques sont caractérisées comme suit

**Théorème 2.3.** *Soit  $\Gamma$  une surface de Riemann compacte de genre supérieur ou égal à 2.*

*i)  $\Gamma$  est hyperelliptique si et seulement si elle admet une fonction méromorphe non constante  $f$  pour laquelle  $(f) + P + Q \geq 0$ , pour certains points  $P, Q \in \Gamma$ ;*

*ii)  $\Gamma$  est hyperelliptique si et seulement si  $\Gamma$  est la surface de Riemann d'une courbe algébrique, donnée par une équation affine de la forme  $y^2 = f(x)$ , où  $f$  est un polynôme unitaire de degré  $2g + 1$  ou  $2g + 2$  sans racine multiple;*

*iii) Si  $g = 2$  alors  $\Gamma$  est hyperelliptique.*

Un point  $P$  sur une surface de Riemann compacte de genre  $g$  est appelé un *point de Weierstrass* s'il existe une fonction méromorphe qui admet un pôle d'ordre au plus  $g$  en  $P$  et qui est holomorphe partout ailleurs. Une surface de Riemann  $\Gamma$  de genre  $g$  admet  $2g + 2$  points de Weierstrass, les points pour lesquels il existe une fonction avec un pôle double en chacun des points uniquement. En effet, si  $\Gamma$  est donnée comme la complétion de la courbe affine  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbf{C}^2$  d'équation

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - x_i),$$

alors les points de Weierstrass sont les points  $P_i := (x_i, 0)$ , où  $i = 1, \dots, 2g + 2$  c'est-à-dire les points de ramification du revêtement double  $(x, y) \mapsto x$ . Dans le cas où le modèle affine de  $\Gamma$  est donné par l'équation  $y^2 = x^{2g+1} + \dots = f(x)$  (avec  $f$  polynôme de degré impair, sans racine multiple), les points  $(\alpha, 0)$  où  $\alpha$  décrit les  $2g + 1$  racines de  $f$  ainsi que le point à l'infini  $\infty$  sont les points de Weierstrass.

Remarquons aussi que pour une courbe hyperelliptique  $\Gamma$  donnée par une équation de la forme  $y^2 = f(x)$ , les  $g$  différentielles

$$\omega_i = \frac{x^{i-1} dx}{y}$$

sont holomorphes sur  $\Gamma$  et sont indépendantes; elles forment par conséquent une base pour l'espace vectoriel des différentielles holomorphes sur la surface de Riemann. Une courbe hyperelliptique admet une involution appelée *involution hyperelliptique*, qui est définie sur  $\Gamma$  par  $(x, y) \mapsto (x, -y)$ .

## 2.3 Variétés abéliennes

Soit  $\Lambda$  un sous-groupe discret de rang  $k$  de  $\mathbf{C}^n$ , alors le groupe quotient  $\mathbf{C}^n/\Lambda$  a une structure de variété complexe lisse induite par la projection  $\pi : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n/\Lambda$ . Cette variété complexe est compacte si et seulement si  $k = 2n$ . Dans ce cas  $\mathbf{T}^n := \mathbf{C}^n/\Lambda$  est un tore complexe. Si un tel tore complexe est à la fois une variété algébrique c'est-à-dire admet un plongement projectif, on dit alors que c'est une *variété abélienne*. Si  $k = 2n = 4$ , on dit *surface abélienne*. Le théorème suivant donne les conditions sur le réseau  $\Lambda$  pour que  $\mathbf{T}^n$  soit une variété algébrique (voir [14]).

**Théorème 2.4. (Conditions de Riemann)** *Un tore complexe  $\mathbf{T}^n = \mathbf{C}^n/\Lambda$  est une variété abélienne si et seulement s'il existe une base complexe  $\{e_1, \dots, e_n\}$  pour  $\mathbf{C}^n$  et une base entière  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}\}$  pour  $\Lambda$  telles que la dernière base peut s'exprimer en fonction de la première comme*

$$\Lambda = (\Delta_\delta, Z),$$

où  $\Delta_\delta = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_n)$  (c'est-à-dire  $\lambda_1 = \delta_1 e_1, \dots, \lambda_n = \delta_n e_n$ ) est une matrice diagonale où tous les  $\delta_i$  sont entiers positifs tels que  $\delta_i | \delta_{i+1}$  ( $1 \leq i < n$ ) et  $Z$  est une matrice symétrique dont la partie imaginaire est définie positive. En fonction des coordonnées  $(x_1, \dots, x_{2n})$  duales de  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}\}$ , la forme de Hodge  $\omega$  est donnée par

$$\omega = \sum_{i=1}^n \delta_i dx_i \wedge dx_{i+n}.$$

La classe de cohomologie  $[\omega]$  de la forme de Hodge est appelée une *polarisation* de la variété abélienne  $\mathbf{T}^n$ . Le couple  $(\mathbf{T}^n, [\omega])$  est appelé *variété abélienne polarisée*. Les entiers  $\delta_1, \dots, \delta_n$  sont appelés les *diviseurs élémentaires* de la polarisation et  $(\delta_1, \dots, \delta_n)$  est appelé le *type de polarisation* de  $\mathbf{T}^n$ . Une variété abélienne de type  $(1, \dots, 1)$  est dite *principalement polarisée*.

Une variété abélienne est dite *irréductible* lorsqu'elle ne contient aucune sous-variété abélienne propre, sinon elle est dite *réductible*. On a le théorème suivant

**Théorème 2.5. (Réductibilité de Poincaré)** Soit  $\mathbf{T}^n$  une variété abélienne contenant une sous-variété abélienne  $A_1$ . Alors il existe une sous-variété  $A_2$  de  $\mathbf{T}^n$  telle que  $A_1 \cap A_2$  est un sous-groupe fini de  $\mathbf{T}^n$  et il existe un homomorphisme surjectif  $h : A_1 \oplus A_2 \rightarrow \mathbf{T}^n$  avec pour noyau  $A_1 \cap A_2$ .

Le groupe de tous les fibrés en droites de degré zéro sur une variété abélienne polarisée  $\mathbf{T}^n$  est un tore complexe, appelée la *variété abélienne duale* de  $\mathbf{T}^n$ . Dans [14, P. 315], on trouve l'information suivante : si la matrice des périodes de  $\mathbf{T}^n$  est donnée sous la forme canonique  $(\Delta_\delta, Z)$  avec les matrices  $\Delta_\delta$  et  $Z$  définies comme dans le Théorème 2.4, alors la matrice des périodes de son dual est donnée par

$$(\delta_n \Delta_\delta^{-1}, \delta_n \Delta_\delta^{-1} Z \Delta_\delta^{-1}) \quad (2.1)$$

**Théorème 2.6. (de Lefschetz)** Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur une variété abélienne. Alors  $\mathcal{L}^k$  est très ample pour  $k \geq 3$ .

On peut associer à une variété abélienne  $\mathbf{T}^n = \mathbf{C}^n / \Lambda$  une variété singulière, appelée la *variété de Kummer* de  $\mathbf{T}^n$ . C'est une variété projective définie comme la surface quotient  $\mathbf{T}^n / \iota$  où  $\iota$  est l'involution  $(-1)_{\mathbf{T}^n}$  donnée par  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mapsto (-z_1, \dots, -z_n) \in \mathbf{C}^n$ . La variété de Kummer admet  $2^{2n}$  points singuliers qui sont l'ensemble des points fixes de  $(-1)_{\mathbf{T}^n}$  et sont appelés des *demi-périodes*. L'involution  $\iota$  est un automorphisme d'ordre 2 de la variété abélienne.

Un exemple important d'une variété abélienne dans la théorie des systèmes intégrables est la jacobienne d'une surface de Riemann. C'est l'objet de la section suivante.

## 2.4 Variétés jacobienes

Soit  $\Gamma$  une surface de Riemann (c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1) compacte de genre  $g \geq 1$ . On sait que l'ensemble  $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$  est un groupe abélien libre de rang  $2g$ . Soit  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g-1}, \gamma_{2g}$  est une base symplectique de  $H_1(\Gamma, \mathbf{Z})$  c'est-à-dire telle que  $\gamma_i \cdot \gamma_{g+i} = 1$  et les autres intersections égales à zéro. On suppose que  $(\omega_1, \dots, \omega_g)$  est une base de  $\Omega^1(\Gamma)$ . Pour chaque  $\gamma_j$  on définit les vecteurs

$$\pi_j = \begin{pmatrix} \int_{\gamma_j} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{\gamma_j} \omega_g \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^g, \quad j = 1, \dots, g.$$

Puisque  $d\omega_\alpha = 0$  ( $\alpha = 1, \dots, g$ ), on a d'après le théorème de Stokes que  $\int_{\gamma_i} \omega_\alpha$  dépend uniquement de la classe d'homologie de  $\gamma_i$ , de telle sorte que les vecteurs  $\pi_j$  sont bien définis ; de plus ils sont linéairement indépendants sur  $\mathbf{R}$  (voir [15]) et engendrent un réseau dans  $\mathbf{C}^g$

$$\Lambda = \left\{ \sum_{j=1}^{2g} m_j \pi_j \mid m_j \in \mathbf{Z} \right\} \subset \mathbf{C}^g$$

L'espace quotient  $\mathbf{C}^g / \Lambda$  est un tore complexe de dimension  $g$ , noté  $\text{Jac}(\Gamma)$ , appelé le *jacobien* ou la *variété jacobienne* de  $\Gamma$ . La matrice  $g \times 2g$

$$\Pi = (\pi_1, \dots, \pi_{2g}) = \begin{pmatrix} \oint_{\gamma_1} \omega_1 & \dots & \oint_{\gamma_g} \omega_1 & \oint_{\gamma_{g+1}} \omega_1 & \dots & \oint_{\gamma_{2g}} \omega_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \oint_{\gamma_1} \omega_g & \dots & \oint_{\gamma_g} \omega_g & \oint_{\gamma_{g+1}} \omega_g & \dots & \oint_{\gamma_{2g}} \omega_g \end{pmatrix},$$

est appelée *matrice des périodes* de  $\text{Jac}(\Gamma)$ . On montre que le premier bloc  $g \times g$  de  $\Pi$  est une matrice inversible, par conséquent on peut supposer qu'elle est égale à la matrice unité  $I_g$  dans une base convenablement choisie de  $\Omega^1(\Gamma)$ . La matrice  $\Pi$  peut alors s'écrire comme  $(I_g \ Z)$  où  $Z$  est une matrice symétrique dont la partie imaginaire est définie positive. On a alors

**Théorème 2.7.** *La jacobienne  $\text{Jac}(\Gamma)$  d'une surface de Riemann compacte de genre  $g$  est une variété abélienne principalement polarisée de dimension  $g$ .*

Il existe une façon algébrique de définir la jacobienne de la surface de Riemann  $\Gamma$  en utilisant les diviseurs. Deux diviseurs  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sur  $\Gamma$  sont *linéairement équivalents* s'il existe une fonction holomorphe  $f$  sur  $\Gamma$  telle que  $\mathcal{D} = \mathcal{D}' + (f)$ . On note  $\mathcal{D} \sim \mathcal{D}'$ . On définit le groupe  $\text{Pic}(\Gamma)$  comme étant l'ensemble des classes des diviseurs sur  $\Gamma$  modulo l'équivalence linéaire. L'application  $\text{deg}$  qui à un diviseur associe son degré passe au quotient car le diviseur d'une fonction méromorphe est de degré zéro. On obtient donc un homomorphisme

$$\begin{aligned} \text{deg}_{\sim} : \text{Div}(\Gamma)/\sim &\rightarrow \mathbf{Z} \\ [\sum_i a_i p_i] &\mapsto \sum_i a_i, \end{aligned}$$

On définit alors la jacobienne de  $\Gamma$  comme étant le noyau de cette application :  $\text{Jac}(\Gamma) = \text{Ker } \text{deg}_{\sim}$ . Ainsi  $\text{Jac}(\Gamma)$  est composée de tous les diviseurs de degré zéro, modulo l'équivalence linéaire.

Considérons l'application, dite d'Abel-Jacobi

$$Ab : \text{Div}^0(\Gamma) \rightarrow \mathbf{C}^g/\Lambda, \quad \sum_{i=1}^n (P_i - Q_i) \mapsto \sum_{i=1}^n \int_{P_i}^{Q_i} \vec{\omega} \pmod{\Lambda},$$

où  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ . Cette application  $Ab$  induit une application  $\text{Pic}^0(\Gamma) \rightarrow \text{Jac}(\Gamma)$ .

**Théorème 2.8. (d'Abel)** *Soit  $\mathcal{D}$  un diviseur de degré 0, alors  $\mathcal{D}$  est le diviseur d'une fonction méromorphe (i.e. il est principal) si et seulement si  $Ab(\mathcal{D}) = 0 \in \text{Jac}(\Gamma)$ .*

**Théorème 2.9. (d'inversion de Jacobi)** *Soient  $q_1, \dots, q_g$  des points d'une surface de Riemann compacte  $\Gamma$ . Pour chaque point  $m$  de  $\text{Jac}(\Gamma)$ , il existe des points  $p_1, \dots, p_g$  de  $\Gamma$  tels que*

$$Ab(p_1 + \dots + p_g - q_1 - \dots - q_g) = m.$$

Le théorème d'inversion de Jacobi montre que l'application  $Ab$  est surjective, et celle d'Abel que le noyau de cette application est précisément le groupe des diviseurs principaux sur  $\Gamma$ . Autrement dit,  $\text{Jac}(\Gamma)$  est isomorphe au groupe  $\text{Pic}^0(\Gamma)$  des fibrés en droites de degré zéro sur  $\Gamma$ .

## 2.5 Variété de Prym

Soit  $\Gamma$  une surface de Riemann compacte de genre  $g$  muni d'une involution  $\sigma$ . Soit  $\mathcal{E}$  la surface de Riemann compacte, de genre  $g_0$ , quotient de  $\Gamma$  par l'involution  $\sigma$  et désignons par  $\pi$  l'application quotient  $\Gamma \rightarrow \mathcal{E}$ ;  $\pi$  est un revêtement double ramifié en  $2n$  points de ramification qui sont les points fixes de l'involution  $\sigma$ . D'après la formule de Riemann-Hurwitz, on a

$$g = 2g_0 + n - 1.$$

L'involution  $\sigma$  induit une involution sur le groupe  $\text{Div}^0(\Gamma)$  des diviseurs de degré 0 sur  $\Gamma$ , et puisque d'une part  $\sigma$  conserve le degré des diviseurs et d'autre part, envoie un diviseur principal sur un diviseur principal, elle induit également une involution sur la jacobienne  $\text{Jac}(\Gamma)$  de  $\Gamma$ , qu'on note encore  $\sigma$ . Un élément  $\mathcal{D} \in \text{Div}^0(\Gamma)$  est un *diviseur impair* relativement à  $\sigma$ , si  $\mathcal{D} + \sigma(\mathcal{D}) \sim 0$ . L'image par l'application  $Ab$ , définie plus haut, de l'ensemble de ces diviseurs impairs est un sous-groupe de  $\text{Jac}(\Gamma)$  appelé la *variété de Prym* de  $(\Gamma, \sigma)$ , notée  $\text{Prym}(\Gamma/\mathcal{E})$ . Notons que, d'après le théorème de réductibilité de Poincaré, il existe un homomorphisme surjectif

$$\text{Prym}(\Gamma/\mathcal{E}) \oplus V \rightarrow \text{Jac}(\Gamma),$$

où  $V$  est une sous-variété abélienne de  $\text{Jac}(\Gamma)$ .

Il existe une autre façon de définir la variété de Prym d'une surface de Riemann. L'application  $\pi$  induit un homomorphisme surjectif  $N_\pi : \text{Jac}(\Gamma) \rightarrow \text{Jac}(\mathcal{E})$ , appelé l'*application norme* de  $\pi$ . La composante connexe neutre de  $\text{Ker } N_\pi$  est la variété de Prym  $\text{Prym}(\Gamma/\mathcal{E})$  associée au revêtement  $\pi$ ; en effet, celle-ci est composée des diviseurs impairs de  $\Gamma$ .

On se propose dans ce qui suit de donner la matrice des périodes de  $\text{Prym}(\Gamma/\mathcal{E})$ . Notons que chaque différentielle holomorphe sur  $\mathcal{E}$  peut-être relevée en une différentielle holomorphe  $\theta$  sur  $\Gamma$  qui est invariant pas  $\sigma$  (c'est-à-dire  $\sigma^*(\theta) = \theta$ , on dit que  $\theta$  est une *différentielle holomorphe paire*). Ainsi il est possible de trouver une base

$$\psi = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = (\theta_1, \dots, \theta_{g_0}, \omega_1, \dots, \omega_{g-g_0})^\top,$$

telle que  $\sigma^*(\theta_i) = \theta_i$  et  $\sigma^*(\omega_i) = -\omega_i$  (on dira que les différentielles  $\omega_i$  sont *impaires*). Considérons dès à présent une base canonique homologique de  $\Gamma$ ,

$$a_1, \dots, a_{g_0}, A_1, \dots, A_{n-1}, a'_1, \dots, a'_{g_0}, b_1, \dots, b_{g_0}, B_1, \dots, B_{n-1}, b'_1, \dots, b'_{g_0},$$

(c'est-à-dire une base de cycles de  $\Gamma$  où les seuls indices d'intersection non nuls sont donnés par  $a_j \cdot a'_j = b_j \cdot b'_j = A_j \cdot B_j = 1$ ) telle que  $\sigma(a_j) = a'_j$ ,  $\sigma(b_j) = b'_j$ ,  $\sigma(A_j) = -A_j$  et  $\sigma(B_j) = -B_j$ . Utilisons la notation  $\omega(A)$  etc... pour désigner la matrice de type  $(g - g_0, n - 1)$

$$\omega(A) = (\omega_i(A_k))_{i,k} \equiv \left( \int_{A_k} \omega_i \right)_{i,k}, \text{ etc...}$$

Observons que pour un cycle impair  $C$  c'est-à-dire  $\sigma(C) = -C$  sur  $\Gamma$  et une différentielle holomorphe paire, on a

$$\int_C \theta = - \int_{\sigma(C)} \theta = - \int_C \sigma^*(\theta) = - \int_C \theta = 0,$$

et donc la matrice des périodes peut être calculée en intégrant sur une base de cycles impairs sur  $\Gamma$ , une base de l'espace des différentielles impaires. Une telle base de cycles impairs est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j &= a_j - a'_j, \\ \tilde{A}_k &= A_k, & j &= 1, \dots, g_0, \\ \tilde{b}_j &= b_j - b'_j, & k &= 1, \dots, n - 1. \\ \tilde{B}_k &= B_k. \end{aligned}$$



La matrice des périodes de Prym  $(\Gamma/\mathcal{E})$  par rapport à cette base est alors la matrice de type  $(g - g_0) \times (2g - 2g_0)$

$$\Omega = (\omega(\tilde{a}), \omega(\tilde{A}), \omega(\tilde{b}), \omega(\tilde{B})),$$

mais, entre autres, on a

$$\int_{\tilde{a}_j} \omega_i = \int_{a_i} \omega_i - \int_{a'_i} \omega_i = \int_{a_i} \omega_i - \int_{\sigma(a_j)} \omega = \int_{a_i} \omega_i - \int_{a_j} \sigma^*(\omega_i) = 2 \int_{a_j} \omega_i,$$

en utilisant la parité des  $(g - g_0)$  différentielles  $\omega_i$  sur  $\Gamma$ . Par conséquent on a

**Théorème 2.10.** *La matrice des périodes  $\Omega$  de la variété de Prym  $\text{Prym}(\Gamma/\mathcal{E})$  est donnée par*

$$\Omega = (2\omega(a), \omega(A), 2\omega(b), \omega(B)).$$

Ecrivons  $\Omega = (E, F)$  où  $E, F$  sont des matrices de types  $(g - g_0, g - g_0)$ . D'après le Théorème 2.4, la matrice des périodes  $\Omega$  peut prendre la forme

$$\Omega = (\Delta, Z) \text{ avec } Z = \Delta E^{-1} F \text{ symétrique, } \text{Im} Z > 0$$

où  $\Delta = \text{diag}(2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ . Avec les notations du théorème précédent, la matrice des périodes  $\Omega^*$  de la variété abélienne duale de  $\text{Prym}(\Gamma/\mathcal{E})$  est

$$\Omega^* = (E^*, F^*) = (\omega(a), \omega(A), \omega(b), \omega(B)).$$

En effet, en raison de (2.1), il suffit de montrer que

$$\delta_n \Delta^{-1} \Delta E^{-1} F \Delta^{-1} = \delta_n \Delta^{-1} (E^*)^{-1} F^*,$$

ce qui se déduit immédiatement de  $E = E^* \Delta$  et  $F = F^* \Delta$ .

**Théorème 2.11. (Théorème de dualité)** [7] *Soit  $\mathbf{T}^2$  une surface abélienne qui contient une courbe lisse  $\mathcal{D}$  de genre 3, invariante par rapport à l'involution  $(-1)$  sur  $\mathbf{T}^2$ . Soit  $\sigma$  la restriction de cette involution à  $\mathcal{D}$ . Si le quotient de  $\mathcal{D}/\sigma$  est une courbe elliptique  $\mathcal{E}$ , alors la surface abélienne  $\mathbf{T}^2$  est duale à la surface  $\text{Prym}(\mathcal{D}/\mathcal{E})$ .*



# Chapitre 3

## Systemes (algébriquement) intégrables

L'objet de ce chapitre est l'introduction de la notion d'intégrabilité algébrique des systèmes intégrables. Nous nous limiterons à l'intégrabilité algébrique au sens d'Adler-van Moerbeke, où un système intégrable est dit algébriquement complètement intégrable si les fibres de l'application moment sont des parties affines de variétés abéliennes et les champs intégrables  $y$  sont linéaires. Dans un premier temps, nous rappelons les notions et propriétés basiques concernant les variétés de Poisson et les systèmes intégrables de Liouville. Enfin dans la dernière section nous présentons une méthode effective (due à Adler et van Moerbeke) pour prouver l'intégrabilité algébrique pour les systèmes intégrables de dimension deux. Une méthode dont nous ferons usage dans les deux derniers chapitres. Pour plus la justification concernant cette méthode, on pourra se référer à l'excellent livre [6] d'Adler, van Moerbeke et Vanhaecke.

### 3.1 Variétés de Poisson et systèmes hamiltoniens

Les variétés de Poisson ont été introduites par A. Lichnerowicz (en 1977, [27]) qui les définit à l'aide d'un tenseur. Dans cette optique, les variétés de Poisson ont été ensuite étudiées par R. Ouzilou [34] et C.M. Marle [29]. Une autre approche de cette structure est celle de A. Weinstein [45] qui envisage, entre autres, le cas des structures de rang constant. Dans toute la suite,  $\mathcal{F}(M)$  désignera l'algèbre des fonctions lisses sur une variété différentiable  $M$ .

**Définition 3.1.** La donnée d'une structure de Poisson sur une variété  $M$  est celle d'une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathcal{F}(M)$ , que l'on notera  $\{\cdot, \cdot\}$ , de telle sorte que  $\{\cdot, \cdot\}$  soit une dérivation par rapport à chacune des ses variables. En d'autres termes l'application  $\{\cdot, \cdot\} : \mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \mapsto \mathcal{F}(M)$  est une application bilinéaire vérifiant :

- (i)  $\{g, f\} = -\{f, g\}$ ,
- (ii)  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$  (identité de Jacobi),
- (iii)  $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$  (règle de Leibniz),

pour toutes fonctions  $f, g$  et  $h$  dans  $\mathcal{F}(M)$ . Le crochet  $\{\cdot, \cdot\}$  est appelé le *crochet de Poisson* et la paire  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  est alors appelée une *variété de Poisson*. Il faut noter que la notion de variété de Poisson reste valable aussi pour les (sous-)variétés complexes de  $\mathbf{C}^n$ , dans ce cas  $\mathcal{F}(M)$  sera l'algèbre des fonctions holomorphes sur  $M$ . On dira variété de Poisson *complexe* (resp. *réelle*) si  $M$  est une variété complexe (resp. variété différentielle).

Pour chaque fonction  $f \in \mathcal{F}(M)$ , il existe donc un champ de vecteurs, noté  $\mathcal{X}_f$ , tel que

$$\mathcal{X}_f[g] = \{g, f\} = dg[\mathcal{X}_f], \quad \forall g \in \mathcal{F}(M).$$

Le champ  $\mathcal{X}_f$  est appelé *champ de vecteurs hamiltonien* associé à  $f$  et définit un système d'équations différentielles appelé *système hamiltonien*. On note  $\text{Ham}(M, \{\cdot, \cdot\}) = \{\mathcal{X}_f \mid f \in \mathcal{F}(M)\}$  l'espace vectoriel des champs hamiltoniens. Par rapport à un tel système on a  $\dot{g} = \{g, f\}$  pour tout  $g \in \mathcal{F}(M)$ . Par conséquent les fonctions  $g$  qui vérifient  $\{g, f\} = 0$  sont des quantités conservées, c'est-à-dire qu'elles restent constantes le long des trajectoires de  $\mathcal{X}_f$ . Ces fonctions sont appelées *intégrales premières* ou *constantes de mouvement* du système. Une façon de le voir, c'est de dire que les solutions du système hamiltonien restent dans les surfaces de niveau des intégrales premières. Une fonction  $f$  sur  $M$  est appelée *fonction de Casimir* ou simplement *Casimir* si son champ hamiltonien pour la structure de Poisson est nul, c'est-à-dire  $\mathcal{X}_f = 0$ . Très souvent, on prendra  $M = \mathbf{C}^n$ ; dans ce cas le système de coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  sur  $M$  conduit à des fonctions de structure  $x_{ij}$  sur  $M$ , définies par  $x_{ij} = \{x_i, x_j\}$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ). Elles satisfont

$$\begin{aligned} x_{ij} &= -x_{ji}, \\ \{x_{ij}, x_k\} + \{x_{jk}, x_i\} + \{x_{ki}, x_j\} &= 0, \quad 1 \leq i < j < k \leq n, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$\{x_{ki}, x_j\} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial x_{ij}}{\partial x_l} \{x_l, x_k\},$$

grâce à la règle de Leibniz. Réciproquement, des fonctions  $x_{ij}$  vérifiant (3.1) définissent un crochet de Poisson sur  $M$  en posant

$$\{f, g\} = \sum_{i < j} x_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M),$$

ce qui est équivalent encore à

$$\{f, g\} = [df]^T X [dg],$$

où  $[df]$  est le vecteur colonne coordonnée de  $df$  dans la base  $(dx_1, \dots, dx_n)$  et  $X$  la matrice ayant pour composantes tous les crochets de Poisson des fonctions coordonnées,  $x_{ij} = \{x_i, x_j\}$ . Une telle matrice est par définition antisymétrique, et nous l'appellerons *matrice de Poisson* de la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$ . Une structure de Poisson est donc bien définie si on donne les valeurs du crochet sur les fonctions coordonnées. Puisque le crochet de Poisson est une bidérivation, on peut lui associer un tenseur  $\Lambda$  comme suit

$$\{f, g\}(m) = \Lambda(m)(df(m), dg(m)) \quad \forall m \in M, \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M). \tag{3.2}$$

Le tenseur ainsi défini est appelé le *tenseur de Poisson* associé à la structure  $\{\cdot, \cdot\}$ . Inversement, si on définit le crochet  $\{\cdot, \cdot\}$  sur  $\mathcal{F}(M)$  à l'aide de l'égalité (3.2), étant donné un tenseur  $\Lambda$ , l'identité de Jacobi pour ce crochet est équivalente à la nullité du crochet de Schouten  $[\Lambda, \Lambda]_{\mathcal{S}}$ . Une classe très importante de variétés de Poisson est donnée par les variétés symplectiques.

**Définition 3.2.** Une *variété symplectique*  $(M, \omega)$  est une variété  $M$  (réelle ou complexe) munie d'une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée.

La condition de non-dégénérescence implique que la variété  $M$  est de dimension paire. Cette même condition permet d'associer à toute fonction  $h$  sur  $M$  un champ de vecteurs  $\mathcal{X}_h$  définie par  $i_{\mathcal{X}_h}\omega = dh$ , i.e.

$$\omega(\mathcal{X}_h, \cdot) = dh(\cdot).$$

On définit alors le crochet de Poisson par

$$\{f, g\} = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g) = df(\mathcal{X}_g) = \mathcal{X}_g[f], \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M).$$

On vérifie d'une part, grâce à la non-dégénérescence de  $\omega$ , que ce crochet de Poisson est antisymétrique et satisfait à la règle de Leibniz et d'autre part, puisque que  $\omega$  est fermée ce crochet satisfait l'identité de Jacobi. Ainsi les variétés symplectiques sont des variétés de Poisson.

**Définition 3.3.** Le rang  $\text{Rg}_m \{\cdot, \cdot\}$  de la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  en un point  $m$  de  $M$  est le rang de l'application  $B_m$  allant de  $T_m^*M$  dans  $T_mM$  où

$$B : T^*M \rightarrow TM \quad \text{tel que} \quad \mathcal{X}_f = B \circ df, \quad \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

Le rang de  $\{\cdot, \cdot\}$  est  $\max\{\text{Rg}_m \{\cdot, \cdot\} \mid m \in M\}$ .

En coordonnées locales, c'est le rang de la matrice de Poisson  $X := (\{x_i, x_j\})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\{\cdot, \cdot\}$  relativement au système de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ . La structure est dite *régulière* lorsque son rang est constant. Notons que le rang d'une structure de Poisson en un point est pair puisqu'une telle structure est, par définition, antisymétrique.

**Proposition 3.4.** Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  une variété de Poisson complexe et soit  $s \in \mathbf{N}$ . Le sous-ensemble  $M_{(s)}$  de  $M$ , défini par

$$M_{(s)} = \{m \in M \mid \text{Rg}_m \{\cdot, \cdot\} \geq 2s\}$$

est un ouvert.

En particulier si la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  est de rang  $2r$ , alors  $M_{(r)}$  est un sous-ensemble ouvert non vide de  $M$  et la restriction de  $\{\cdot, \cdot\}$  à  $M_{(r)}$  est régulière de rang  $2r$ .

**Définition 3.5.** Soient  $(M, \{\cdot, \cdot\}_M)$  et  $(N, \{\cdot, \cdot\}_N)$  deux variétés de Poisson. Une application lisse  $\varphi : M \rightarrow N$  est appelée *morphisme de Poisson* si pour tout couple de fonctions  $f, g$  dans  $\mathcal{F}(N)$ , on a

$$\{\varphi^*f, \varphi^*g\}_M = \varphi^* \{f, g\}_N.$$

On a noté  $\varphi^*f = f \circ \varphi$  pour tout  $f \in \mathcal{F}(N)$ .

**Définition 3.6.** Soient  $\{\cdot, \cdot\}_1$  et  $\{\cdot, \cdot\}_2$  deux structures de Poisson sur une variété  $M$ . Ces deux structures sont dites *compatibles* si toute combinaison linéaire  $\{\cdot, \cdot\} = \lambda \{\cdot, \cdot\}_1 + \mu \{\cdot, \cdot\}_2$  est aussi une structure de Poisson sur  $M$ .

On fera attention au fait que cette relation n'est, en général, pas transitive.

### 3.2 Systèmes intégrables

Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  une variété de Poisson réelle ou complexe. Deux fonctions sur  $M$  sont dites en *involution*, si leur crochet de Poisson est nul. On dira qu'une famille  $\mathbf{F}$  de fonctions sur  $M$  est *involutive* si toute paire de fonctions de  $\mathbf{F}$  sont en involution. Si  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  est un  $s$ -uplet, où  $F_i \in \mathcal{F}(M)$  pour  $1 \leq i \leq s$ , alors  $\mathbf{F}$  définit une application  $\mathbf{F}$  de  $M$  dans  $\mathbf{R}^s$  ou  $\mathbf{C}^s$ . On appelle *fibre* de  $\mathbf{F}$  tout ensemble de niveau commun des fonctions  $F_i$ . La fibre passant par un point  $m \in M$  est noté  $\mathbf{F}_m$ ,

$$\mathbf{F}_m = \{p \in M \mid F_i(p) = F_i(m), \forall i \in \{1, \dots, s\}\}.$$

Pour  $c \in \mathbf{R}^s$  (resp.  $\mathbf{C}^s$ ), on notera la fibre  $\mathbf{F}^{-1}(c)$  au-dessus de  $c$  par  $\mathbf{F}_c$ ; on a donc  $\mathbf{F}_m = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}(m)) = \mathbf{F}_{\mathbf{F}(m)}$  pour tout point  $m \in M$ . D'après le théorème de Sard, l'ensemble des valeurs régulières de  $\mathbf{F}$  est un sous-ensemble dense de  $\mathbf{R}^s$  (resp.  $\mathbf{C}^s$ ) et la fibre  $\mathbf{F}_c$ , au-dessus de chaque valeur régulière  $c$  dans l'image de  $\mathbf{F}$ , est non singulière par le théorème des fonctions inverses.

Lorsque  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  est involutive, les champs de vecteurs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_i}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) commutent et pour tout point  $m$  ils sont tangents à la partie affine non singulière de  $\mathbf{F}_m$ . On dira que  $\mathbf{F}$  est *indépendante*, si et seulement si, l'ensemble

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F}} := \{m \in M \mid dF_1(m) \wedge \dots \wedge dF_s(m) \neq 0\}$$

est un ouvert dense de  $M$ . En prenant les coordonnées locales  $x_1, \dots, x_n$  sur un voisinage de  $m$ , on a que  $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}}$  si et seulement si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(m) \end{pmatrix}_{\substack{1 \leq i \leq s \\ 1 \leq j \leq n}} = s.$$

**Proposition 3.7.** *Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  une variété de Poisson complexe de dimension  $n$  et de rang  $2r$ . Soit  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  une famille de fonctions indépendantes sur  $M$ . On a alors les inégalités et égalités suivantes :*

1. *Si les fonctions  $F_1, \dots, F_s$  sont des fonctions de Casimir alors  $s \leq n - 2r$  ;*
2. *Si  $\mathbf{F}$  est involutive, alors  $s \leq n - r$  et  $\dim \operatorname{Vect}\{\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}\} \leq r$  ;*
3. *Si  $\mathbf{F}$  est involutive et  $s = n - r$ , alors pour tout point  $m$  dans  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ , on a*

$$\dim \operatorname{Vect}\{\mathcal{X}_{F_1}(m), \dots, \mathcal{X}_{F_s}(m)\} = r.$$

*Démonstration.* Soit  $m$  un point de l'ouvert dense  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ . Considérons l'application linéaire suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_m &: T_m^*M &\rightarrow & T_m M \\ & dF(m) &\mapsto & \mathcal{X}_{\mathbf{F}}(m). \end{aligned}$$

D'après le théorème du rang on a

$$\dim \operatorname{Ker} \tilde{P}_m + \operatorname{rg} \tilde{P}_m = \dim T_m^*M.$$

Si  $\mathbf{F}$  est une famille de  $s$  fonctions de Casimir (1),  $s \leq \dim \operatorname{Ker} \tilde{P}_m$ . D'autre part, par définition de  $M_{(r)}$ , on a  $\operatorname{rg} \tilde{P}_m = 2r$ . Enfin,  $\dim T_m^*M$  est la dimension de la variété  $M$ . D'où  $s \leq n - 2r$ .

Supposons maintenant que  $\mathbf{F}$  soit une famille involutive (2) et réécrivons le théorème du rang de l'application  $\tilde{P}_m$  restreinte à  $\mathbf{F}$  :

$$\dim \text{Vect}\{dF_1(m), \dots, dF_s(m)\} \leq \dim \tilde{P}_m(\mathbf{F}) + \dim \text{Ker } \tilde{P}_m. \quad (3.3)$$

Comme les fonctions sont en involution, les champs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_i}$  sont tous tangents à la fibre  $\mathbf{F}_m$ , d'où  $\dim \tilde{P}_m(\mathbf{F}) \leq \dim T_m \mathbf{F}_m = n - s$ . On en déduit, en utilisant le calcul précédent

$$s \leq (n - s) + (n - 2r)$$

puis  $s \leq n - r$ . Notons  $d_m$  la dimension de l'espace vectoriel engendré par les champs hamiltoniens de  $\mathbf{F}$  :  $d_m = \dim \text{Vect}\{\mathcal{X}_{F_1}(m), \dots, \mathcal{X}_{F_s}(m)\}$ . On peut donc trouver dans  $\mathbf{F}$  une sous-famille involutive contenant  $d_m$  fonctions indépendantes sur  $M$  qui ne sont pas des fonctions de Casimir. En y ajoutant le nombre  $t$  de fonctions de Casimir indépendantes sur  $M$ , on obtient une famille involutive de  $d_m + t$  fonctions indépendantes sur  $M$ . D'après ce qui précède, nécessairement  $d_m + t \leq n - r = r + t$ . D'où  $d_m \leq r$ .

Enfin, supposons que  $\mathbf{F}$  soit involutive et constituée de  $s = n - r$  fonctions (3). Alors, en reprenant l'inégalité (3.3), on obtient :  $n - r \leq d_m + n - 2r$ . D'où  $r \leq d_m$ .  $\square$

**Définition 3.8.** Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\})$  une variété de Poisson de dimension  $n$  et de rang  $2r$ . Soit  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  une famille involutive et indépendante de fonctions sur  $M$ , telle que  $s = n - r$ . Alors on dit que  $(M, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est un *système intégrable (de Liouville)* de rang  $2r$  ; l'application  $\mathbf{F}$  est alors appelée l'*application moment* et les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{F_i}$  des *champs de vecteurs intégrables*.

**Proposition 3.9.** Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  un système intégrable de rang  $2r$ ,  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ , l'ouvert  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$  est conservé par les flots de tous les champs  $\mathcal{X}_{F_i}$ . En plus les champs  $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$  définissent sur cet ouvert une distribution de rang  $r$  intégrable au sens de Frobenius.

*Démonstration.* Comme  $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_s$  et  $\{\cdot, \cdot\}$  sont conservés par les flots de tous les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{F_i}$ , les ouverts  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}$  et  $M_{(r)}$  sont aussi conservés par ces flots, et par suite leur intersection également. Mais alors  $\dim(\text{Vect}\{\mathcal{X}_{F_1}(m), \dots, \mathcal{X}_{F_s}(m)\}) = r$  pour tout  $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ , d'après la Proposition 3.7 et on conclut que les champs  $\mathcal{X}_{F_i}$  définissent sur  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$  une distribution  $D$  de rang  $r$ . Puisque les champs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_i}$  ( $1 \leq i \leq s$ ) commutent, car  $[\mathcal{X}_{F_i}, \mathcal{X}_{F_j}] = -\mathcal{X}_{\{F_i, F_j\}}$ , alors cette distribution est involutive, par conséquent d'après le théorème de Frobenius cette distribution  $D$  est intégrable.  $\square$

Pour un point  $m$  dans l'ouvert  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ , on note  $\mathbf{F}'_m$  la feuille de  $D$  passant par  $m$ , et on l'appelle la *variété invariante* de  $\mathbf{F}$  passant par  $m$ . Elle est la composante connexe de  $\mathbf{F}_m \cap \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$  qui contient  $m$ .

Dans le cas réel, le théorème de Liouville ci-dessous donne une description précise des variétés invariantes de  $\mathbf{F}$  sous certaines conditions.

**Théorème 3.10. (de Liouville)** Soit  $(M, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  un système intégrable réel de rang  $2r$  où  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  et soit  $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$ .

(i) Si  $\mathbf{F}'_m$  est compacte alors il existe un difféomorphisme de  $\mathbf{F}'_m$  sur le tore  $\mathbf{T}^r = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^r$  et ce difféomorphisme envoie les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$  sur des champs de vecteurs constants (c'est-à-dire invariants par translation) de  $\mathbf{T}^r$ .

(ii) Si  $\mathbf{F}'_m$  n'est pas compacte, et si le flot de chacun des champs de vecteurs intégrables  $\mathcal{X}_{F_i}$  (où  $i = 1, \dots, s$ ) est complet sur  $\mathbf{F}'_m$  alors il existe un difféomorphisme de  $\mathbf{F}'_m$  sur le cylindre  $\mathbf{R}^{r-q} \times \mathbf{T}^q$  ( $0 \leq q < r$ ) tels que les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{F_i}$ , envoyés sur ce cylindre par ce difféomorphisme, soient constants.

### 3.3 Systèmes algébriquement complètement intégrables

Soit un champ de vecteurs polynomial  $\mathcal{V}$  sur  $\mathbf{C}^n$ , de coordonnées linéaires  $x_1, \dots, x_n$ , décrit par le système d'équations différentielles du premier ordre

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

où les fonctions  $f_i$  sont des polynômes. On utilisera souvent la notation  $\dot{x} = f(x)$ . Soit  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  une famille d'entiers positifs sans diviseur commun, on dira qu'un polynôme  $f \in \mathcal{F}(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n]$  est *homogène à poids, de poids  $k$*  (relativement à  $\nu$ ) si  $f(t^{\nu_1}x_1, \dots, t^{\nu_n}x_n) = t^k f(x_1, \dots, x_n)$  pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$  et  $t \in \mathbf{C}$ . Le poids  $k$  d'une telle fonction  $f$  sera noté  $\varpi(f)$ . Le champ de vecteurs  $\mathcal{V}$  sera dit *homogène à poids de poids  $k$*  si chaque fonction  $f_i$  est homogène à poids (relativement au même  $\nu$ ) et si  $\varpi(f_i) = \nu_i + k = \varpi(x_i) + k$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Si  $k = 1$ , on dira simplement que  $\mathcal{V}$  est *homogène à poids*.

**Définition 3.11.** Un  $n$ -tuple de séries de Laurent

$$x_i(t) = \frac{1}{t^{r_i}} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} t^k, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.5)$$

avec  $r_i \in \mathbf{Z}$  est appelé une *solution de Laurent formelle* de  $\dot{x} = f(x)$ , ou du champ de vecteurs  $\mathcal{V}$ , si une substitution formelle de (3.5) dans le système d'équations différentielles (3.4) donne une égalité de séries formelles. Si de plus, il existe  $\epsilon$  tel que  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  converge pour  $0 < |t| < \epsilon$ , on appellera cette solution une *solution de Laurent*. Si  $x_i^{(0)} \neq 0$ , on dira que  $x_i(t)$  admet un *pôle* (resp. un *zéro*) d'ordre  $|r_i|$  si  $r_i > 0$  (resp.  $r_i < 0$ ).

Si  $\mathcal{V}$  est un champ de vecteurs homogène relativement à  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ , une solution de Laurent du champ  $\mathcal{V}$  de la forme

$$x_i(t) = \frac{1}{t^{\nu_i}} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} t^k, \quad (i = 1, \dots, n),$$

avec  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \neq 0$ , est appelée *solution de Laurent homogène à poids*. On dira qu'une solution de Laurent formelle est une *balance principale* si elle dépend de  $n - 1$  paramètres libres ; dans le cas contraire elle sera appelée une *balance inférieure*.

**Théorème 3.12.** Soit  $\mathcal{V}$  un champ de vecteurs polynomial homogène à poids sur  $\mathbf{C}^n$ . Si  $x(t)$  est une solution de Laurent formelle homogène à poids du champ  $\mathcal{V}$ , alors  $x(t)$  est convergent (pour  $|t|$  petit et non nul).

**Définition 3.13.** Soit  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  un système intégrable complexe où  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  est une famille de polynômes. On dit que  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est un *système algébriquement complètement intégrable* ou un *système a.c.i.* si pour toute valeur générique  $c \in \mathbf{C}^s$ , la fibre  $\mathbf{F}_c$  est la partie affine d'une variété abélienne et si les champs de vecteurs hamiltoniens  $\mathcal{X}_{F_i}$ , sur chacune de ces fibres, engendrent l'espace des champs invariants par translation. En particulier lorsque la fibre générique  $\mathbf{F}_c$  est irréductible (au sens du Théorème 2.5), on dit qu'on a un *système a.c.i. irréductible*.



Le théorème suivant donne une condition nécessaire pour l'intégrabilité algébrique d'un système intégrable. Il est inspiré des travaux de Kowalevski [22], et est basé sur le fait que l'espace de phase d'un système a.c.i. admet une compactification partielle sur laquelle les champs de vecteurs intégrables se prolongent en des champs de vecteurs complets. On trouvera une preuve détaillée, due à Adler-van Moerbeke-Vanhaecke, dans [6].

**Théorème 3.14. (Critère de Kowalevski) :** Soit  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  un système a.c.i. irréductible où  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  et soit  $(x_1, \dots, x_n)$  est un système de coordonnées linéaires sur  $\mathbf{C}^n$ . Soit  $\mathcal{V}$  l'un des champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$ . Pour chaque  $1 \leq i \leq n$  tel que  $\dot{x}_i = \mathcal{V}[x_i] \neq 0$ , il existe une balance principale  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  pour laquelle  $x_i(t)$  admet un pôle.

Enfin, nous donnons ci-dessous un théorème important pour la suite de notre travail. Celui-ci nous donne les conditions suffisantes à satisfaire par les fibres de l'application moment d'un système intégrable afin que ce dernier soit a.c.i. On trouvera également une preuve de ce théorème dans [6].

**Théorème 3.15. (Théorème de Liouville Complexe).** Soit  $\mathcal{A} \subset \mathbf{C}^s$  une variété affine non singulière de dimension  $r$  admettant  $r$  champs de vecteurs holomorphes  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$  et soit  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{C}^N \subset \mathbf{P}^N$  un plongement. On définit  $\Delta := \overline{\varphi(\mathcal{A})} \setminus \varphi(\mathcal{A})$  et on désigne par  $\mathcal{D}$  l'union des composantes irréductibles de  $\Delta$  de dimension  $r - 1$ . On suppose vérifiées les conditions suivantes :

- (1) Les champs de vecteurs commutent deux à deux,  $[\mathcal{V}_i, \mathcal{V}_j] = 0$  pour  $1 \leq i, j \leq r$  ;
- (2) En chaque point  $m \in \mathcal{A}$  les champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$  sont indépendants ;
- (3) Le champ de vecteurs  $\varphi_* \mathcal{V}_1$  se prolonge en un champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  qui est holomorphe sur un voisinage de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbf{P}^N$  ;
- (4) Les courbes intégrales de  $\overline{\mathcal{V}}_1$  qui commencent aux points  $m \in \mathcal{D}$  sont immédiatement envoyées dans la partie affine  $\varphi(\mathcal{A})$ .

Alors  $\overline{\varphi(\mathcal{A})}$  est une variété abélienne  $\mathbf{T}^r$  de dimension  $r$  et les champs de vecteurs  $\varphi_* \mathcal{V}_1, \dots, \varphi_* \mathcal{V}_r$  se prolongent en des champs de vecteurs holomorphes (donc linéaires) sur  $\overline{\varphi(\mathcal{A})}$ . De plus  $\overline{\varphi(\mathcal{A})} = \varphi(\mathcal{A}) \cup \mathcal{D}$  c'est-à-dire  $\mathcal{D} = \Delta$ .

### 3.3.1 Systèmes a.c.i homogènes à poids

Dans ce paragraphe, nous introduisons une classe de systèmes a.c.i., à savoir les systèmes a.c.i. homogènes à poids, pour laquelle chaque chose peut être calculée explicitement. L'espace de phase sera toujours  $\mathbf{C}^n$ . Les solutions de Laurent formelles de tels systèmes sont calculées de façon explicite : après l'étape zéro les coefficients dans la solution de Laurent sont déterminés comme solutions d'un problème d'algèbre linéaire.

Soit  $\mathcal{V}$  un champ de vecteurs homogène à poids sur  $\mathbf{C}^n$ , donné par les équations

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

et supposons que

$$x_i(t) = \frac{1}{t^{\nu_i}} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} t^k, \quad x_i^{(0)} \neq 0$$

est une solution de Laurent à poids du champ  $\mathcal{V}$ . Les entiers positifs  $\nu_i$  étant les poids des variables de phase. Alors les premiers coefficients  $x_i^{(0)}$  satisfont les équations algébriques non linéaires

$$\nu_i x_i^{(0)} + f_i(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.6)$$

tandis que les autres coefficients  $x_i^{(k)}$  ( $k \geq 1$ ) vérifient

$$\left(k Id_n - \mathcal{K}(x^{(0)})\right) x^{(k)} = P^{(k)}$$

où  $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)^\top$ , et  $P^{(k)} = \left(P_1^{(k)}, \dots, P_n^{(k)}\right)^\top$ ; où chaque  $P_i^{(k)}$  est un polynôme qui dépend uniquement des variables  $x_1^{(l)}, \dots, x_n^{(l)}$  avec  $0 \leq l < k$ . La matrice  $\mathcal{K}$  d'ordre  $n$  est définie par  $\mathcal{K}_{ij} := \frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \nu_i \delta_{ij}$  et est appelée la *matrice de Kowalevski*. L'ensemble des équations (3.6) est appelé l'*équation indiciale* de  $\mathcal{V}$  et l'ensemble  $\mathcal{I}$  des solutions est appelé le *lieu indicial*. Le nombre de valeurs propres entières non négatives de la matrice  $\mathcal{K}$  est précisément le nombre de paramètres libres de la famille de solution de Laurent dont le premier terme est donné par  $(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  (voir [4]). Pour un élément  $m$  de  $\mathcal{I}$ , la matrice de Kowalevski  $\mathcal{K}(m)$  admet toujours  $-1$  comme une valeur propre.

**Proposition 3.16.** *Soit  $\mathcal{V} : \dot{x} = f(x)$  un champ de vecteurs homogène à poids et  $\mathcal{I}$  son lieu indicial. Si pour une composante irréductible  $\mathcal{I}'$  de  $\mathcal{I}$  le polynôme caractéristique  $\chi(k; m) = |k Id_n - \mathcal{K}(m)|$  est indépendant de  $m \in \mathcal{I}'$ , alors l'ensemble de toutes les solutions de Laurent de  $\mathcal{V}$  est paramétré par un nombre fini de variétés affines  $\Gamma^{(i)}$ . Pour chacune de ces variétés les coefficients qui apparaissent dans la solution de Laurent correspondante sont des fonctions régulières sur  $\Gamma^{(i)}$ .*

En particulier, si  $\mathcal{V}$  est l'un des champs de vecteurs intégrables d'un système a.c.i. alors pour tout point  $m \in \mathcal{I}$ , la matrice  $\mathcal{K}(m)$  est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont des entiers.

**Définition 3.17.** Soit  $\{\cdot, \cdot\}$  une structure de Poisson polynômiale sur  $\mathbf{C}^n$ . On dit que  $\{\cdot, \cdot\}$  est une *structure de Poisson homogène à poids, de poids  $p$*  si

$$\varpi(\{x_i, x_j\}) = \varpi(x_i) + \varpi(x_j) - 2 + p \quad \forall 1 \leq i, j \leq n.$$

Dans ce cas, si  $f$  et  $g$  sont deux polynômes homogènes à poids alors leur crochet  $\{f, g\}$  est encore un polynôme homogène à poids et son poids est donné par

$$\varpi(\{f, g\}) = \varpi(f) + \varpi(g) - 2 + p.$$

D'après la définition, si  $\{\cdot, \cdot\}$  une structure de Poisson homogène à poids sur  $\mathbf{C}^n$  et  $F$  un polynôme homogène à poids. Alors le champ de vecteurs hamiltonien  $\mathcal{X}_F$  est homogène à poids si et seulement si  $\varpi(\{\cdot, \cdot\}) + \varpi(F) = 3$ .

**Définition 3.18.** Un système a.c.i.  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est appelé un *système a.c.i. homogène à poids* si la structure  $\{\cdot, \cdot\}$  et tous les polynômes  $F_i$  sont homogènes à poids tels que pour au moins un  $F$  parmi les polynômes  $F_i$  le champ hamiltonien  $\mathcal{X}_F$  associé est homogène à poids (de poids 1) et toutes les balances principales de  $\mathcal{X}_F$  sont homogènes à poids.

Soit  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  un système a.c.i. homogène à poids où  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$ ; on suppose que  $\mathcal{V}$  est l'un des champs de vecteurs intégrables du système et  $x(t; \mathcal{V})$  une balance principale du champ  $\mathcal{V}$ . Soit  $\lambda := \max\{\varpi(F_i) \mid i = 1, \dots, s\}$  et supposons connus les  $\lambda + 1$  termes de la balance  $x(t; \mathcal{V})$ . Par homogénéité, pour toute constante de mouvement  $F$ , on a

$$\begin{aligned} F(x(t; \mathcal{V})) &= F \left( \dots, t^{-\nu_j} \sum_{i=0}^{\lambda} x_k^{(i)} t^i + O(t^{\lambda+1}), \dots \right) \\ &= t^{-\nu_j} F \left( \dots, \sum_{i=0}^{\lambda} x_k^{(i)} t^i, \dots \right) + O(t), \end{aligned}$$

de telle sorte le coefficient de  $t^0$  est calculé en substituant seulement les  $\lambda + 1$  termes dans  $F$ ; de plus comme  $F$  est une constante de mouvement tous les coefficients en  $t$  de  $F(x(t; \mathcal{V}))$  s'annulent, excepté le coefficient de  $t^0$ . Ainsi une substitution de  $x(t; \mathcal{V})$  à chacune des constantes de mouvement  $F_1, \dots, F_s$  conduit à  $s$  relations algébriques  $F_i(x(t; \mathcal{V})) = c_i$  entre les  $n - 1$  paramètres libres et les  $s$  valeurs  $c_i$  des constantes de mouvement. Pour  $c = (c_1, \dots, c_s)$  choisi génériquement dans  $\mathbf{C}^s$  leur solution commune donne une variété affine  $\Gamma_c$ , qui dans le cas où les fibres  $\mathbf{F}_c$  de  $\mathbf{F}$  sont de dimension 2, sera une courbe algébrique. Dans la suite, la restriction de la balance principale  $x(t; \mathcal{V})$  à la variété affine  $\Gamma_c$ , qui est obtenue des relations algébriques en les paramètres libres, sera noté  $x(t; \Gamma_c)$ .

### 3.3.2 Système de Mumford

Dans ce paragraphe, nous introduisons un système intégrable, à savoir le système de Mumford (impair) en genre 2. Pour plus de détails sur la construction de ce système, on pourra se référer à [30] dans le cas général, et à [37] pour le cas en genre 2 pour lequel nous donnons ici les formules explicites. Considérons une courbe hyperelliptique  $\mathcal{C}$  de genre 2, donnée par l'équation

$$y^2 = f(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (3.7)$$

et on suppose  $\mathcal{C}$  lisse. Par conséquent cette dernière peut être complétée en une surface de Riemann compacte  $\Gamma$  par l'adjonction d'un point à l'infini, noté  $\infty$ . Désignons par  $\text{Jac}(\Gamma)$  la jacobienne de  $\Gamma$ , qui n'est autre que le groupe des diviseurs sur  $\Gamma$  de degré zéro modulo l'équivalence linéaire, équivalent au groupe des fibrés en droites de degré zéro sur  $\Gamma$ . On rappelle que  $\text{Jac}(\Gamma)$  est une variété abélienne. L'application  $P \in \Gamma \rightarrow [P - \infty]$  est un plongement de  $\Gamma$  dans sa jacobienne  $\text{Jac}(\Gamma)$  de telle façon que  $\text{Jac}(\Gamma) \setminus \mathcal{C}$  est isomorphe à l'espace de paires de polynômes  $(u(x), v(x))$  telles que  $u(x)$  est un polynôme unitaire de degré 2,  $v(x)$  un polynôme de degré inférieur à 2, et l'expression  $f(x) - v^2(x)$  est divisible par  $u(x)$ . Ainsi à un point de  $\text{Jac}(\Gamma) \setminus \mathcal{C}$  on peut associer de manière unique une matrice  $A(x)$  de polynômes (en  $x$ )

$$A(x) = \begin{pmatrix} v(x) & u(x) \\ w(x) & -v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1x + v_0 & x^2 + u_1x + u_0 \\ x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 & -v_1x - v_0 \end{pmatrix}$$

où  $w(x)$  est le polynôme cubique  $(f(x) - v^2(x))/u(x)$ . Il faut noter que le polynôme caractéristique de  $A(x)$  est égal à  $y^2 - f(x)$ .

Considérons le système de Mumford constitué d'une paire de champs de vecteurs sur l'espace affine  $M$  de matrices  $A(x)$ , de dimension 7. Les coordonnées sur  $M$  sont données par  $u_1, u_0, v_1, v_0, w_2, w_1$  et  $w_0$ . Deux champs de vecteurs indépendants et commutants sur  $M$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 2v_1, & u'_1 &= 2v_0, \\ \dot{u}_0 &= 2v_0, & u'_2 &= 2u_1v_0 - 2u_0v_1, \\ \dot{v}_1 &= -w_1 + u_0 + u_1w_2 - u_1^2, & v'_1 &= -w_0 + w_2u_0 - u_0u_1, \\ \dot{v}_0 &= -w_0 + w_2u_0 - u_0u_1, & v'_0 &= u_0w_1 - u_0^2 - u_1w_0, \\ \dot{w}_2 &= -2v_1, & w'_2 &= -2v_0, \\ \dot{w}_1 &= 2u_1v_1 - 2v_1w_2 - 2v_0, & w'_1 &= u_0v_1 - 2v_0w_2, \\ \dot{w}_0 &= 2v_0(u_1 - w_2), & w'_0 &= 2u_0v_0 + 2v_1w_0 - 2v_0w_1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ces deux champs de vecteurs (intégrables) admettent, tous deux, les constantes de mouvement suivantes, qui sont précisément les coefficients du polynôme  $v^2(x) + u(x)w(x)$  (déterminant de  $A(x)$ ).

$$\begin{aligned}
H_0 &= u_0 w_0 + v_0^2, \\
H_1 &= u_1 w_0 + u_0 w_1 + 2v_1 v_0, \\
H_2 &= u_0 w_2 + u_1 w_1 + w_0 + v_1^2, \\
H_3 &= u_0 + w_1 + u_1 w_2, \\
H_4 &= u_1 + w_2.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Il existe pour ce système trois structures de Poisson linéaires  $\{\cdot, \cdot\}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), toutes compatibles et pour lesquelles les polynômes  $H_i$  sont en involution. En fonction du système de générateurs  $u_1, u_0, v_1, v_0, w_2, w_1, w_0$  (pris dans cet ordre), leurs matrices de Poisson sont données comme suit. La structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_1$  est donnée par

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & u_1 & 0 & 0 & -2v_1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & w_2 - u_1 \\
-1 & -u_1 & 0 & 0 & 1 & w_2 & w_1 - u_0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & -w_2 & 0 & 0 & 2v_1 \\
0 & 2v_1 & u_1 - w_2 & u_0 - w_1 & 0 & -2v_1 & 0
\end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que  $H_2, H_3$  et  $H_4$  sont des Casimirs pour cette structure et que  $H_0$  (resp.  $H_1$ ) engendre le premier (resp. le second) champ de vecteurs. La matrice de Poisson de la seconde structure  $\{\cdot, \cdot\}_2$  est donnée par

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -u_0 & 0 & 0 & 2v_0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & w_2 - u_1 & 0 \\
0 & u_0 & 0 & 0 & 0 & -u_0 & -w_0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & u_1 - w_2 & u_0 & 0 & 0 & -2v_0 \\
0 & -2v_0 & 0 & w_0 & 0 & 2v_0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Cette fois-ci  $H_0, H_3$  et  $H_4$  sont des Casimirs pour cette structure et les fonctions  $H_1$  et  $H_2$  engendrent les deux champs de vecteurs. Enfin la dernière structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_3$  est donnée par

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & -u_1 & -u_0 & 0 & 2v_1 & 2v_0 \\
0 & 0 & -u_0 & 0 & 0 & 2v_0 & 0 \\
u_1 & u_0 & 0 & 0 & -u_1 & -w_1 & -w_0 \\
u_0 & 0 & 0 & 0 & -u_0 & -w_0 & 0 \\
0 & 0 & u_1 & u_0 & 0 & -2v_1 & -2v_0 \\
-2v_1 & -2v_0 & w_1 & w_0 & 2v_1 & 0 & 0 \\
-2v_0 & 0 & w_0 & 0 & 2v_0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Dans ce cas  $H_0, H_1$  et  $H_4$  sont des Casimirs et  $H_2$  et  $H_3$  donnent les deux champs de vecteurs. Une quatrième structure, cette fois-ci quadratique, dont les Casimirs sont les fonctions  $H_0, H_1$

et  $H_2$ , est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_0 + u_1^2 & u_0 u_1 & 2v_1 & 2v_0 - 2u_1 v_1 & -2u_1 v_0 \\ 0 & 0 & u_0 u_1 & u_0^2 & 2v_0 & -2u_0 v_1 & -2u_0 v_0 \\ u_0 - u_1^2 & -u_0 u_1 & 0 & 0 & -w_1 + u_1 w_2 & -w_0 + u_1 w_1 & u_1 w_0 \\ -u_0 u_1 & -u_0^2 & 0 & 0 & -w_0 + u_0 w_2 & u_0 w_1 & u_0 w_0 \\ -2(v_0 - u_1 v_1) & 2u_0 v_1 & w_0 - u_1 w_1 & -u_0 w_1 & -2v_1 w_2 & 0 & 2(v_0 w_1 - v_1 w_0) \\ 2u_1 v_0 & 2u_0 v_0 & -u_1 w_0 & -u_0 w_0 & -2v_0 w_2 & -2v_0 w_1 + 2v_1 w_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Les fonctions  $H_3$  et  $H_4$  engendrent les deux champs de vecteurs commutants.

On montre dans [30] que les variétés invariantes du système de Mumford impair sont des parties affines de la jacobienne de la courbe hyperelliptique (3.7) correspondante (moins le diviseur thêta) et que les flots des champs de vecteurs intégrables sont linéaires là-dessus ; par conséquent le système est algébriquement complètement intégrable. Les solutions explicites du système peuvent être écrites en termes de fonctions thêta. Dans [30], on a les informations suivantes : si  $D(t) = \text{Ab}(\mathcal{D}(t))$  (où  $\text{Ab}$  est l'application d'Abel-Jacobi) est une courbe intégrale commençant en  $D = D(0)$  c-à-d  $D(t) = At + D$ , où  $A$  est un vecteur fixe qui dépend du champ de vecteurs (allant avec  $t$ ), alors le polynôme  $u(x)$  est calculé à partir de ses valeurs prises aux points de Weierstrass  $a_k$  de la courbe (3.7) en utilisant

$$u(a_k) = c_k \left( \frac{\vartheta[\delta + \eta_k](At + D)}{\vartheta[\delta](At + D)} \right)^2 ; \quad (3.11)$$

les vecteurs  $\eta_k$  et  $\delta$  sont des thêta caractéristiques et sont décrits explicitement dans [30]. D'après [44, IV.4.9], les coefficients de  $u(t)$  ainsi déterminés sont des fonctions méromorphes sur la jacobienne.

### 3.4 Comment prouver l'intégrabilité algébrique ?

Dans cette section, nous présentons une méthode effective [6] pour prouver l'intégrabilité algébrique des systèmes intégrables homogènes à poids. Ces algorithmes sont efficaces dans le cas des systèmes intégrables de dimension 2.

Dans toute la suite,  $\{\cdot, \cdot\}$  est une structure de Poisson homogène à poids sur  $\mathbf{C}^n$ , de rang  $2r$  et  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  est une famille de  $s = n - r$  polynômes homogènes indépendants, qui sont en involution relativement à  $\{\cdot, \cdot\}$ . Le triplet  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est donc un système intégrable au sens de Liouville. Les  $r$  champs de vecteurs intégrables seront notés  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$  où on suppose que  $\mathcal{V}_1$  est homogène à poids de poids 1. Pour  $c$  générique dans  $\mathbf{C}^s$ , il est question de montrer que la fibre  $\mathbf{F}_c$  de l'application moment est, à un isomorphisme près, une partie affine d'une variété abélienne  $\mathbf{T}_c^r$  et que les champs de vecteurs hamiltoniens  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$  sont linéaires sur  $\mathbf{T}_c^r$ . La méthode consiste à utiliser les balances principales du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  pour montrer que les conditions du Théorème 3.15 de Liouville Complexe sont satisfaites. Il est à noter que certaines conditions de ce théorème sont automatiquement satisfaites. En effet, par l'intégrabilité de Liouville les champs  $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r$  commutent deux à deux. Aussi, on a la

**Proposition 3.19.** *Soit  $(\mathbf{C}^n, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  un système intégrable de Liouville de rang  $2r$ , avec  $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_s)$  où les fonctions  $F_i$  sont des polynômes. Pour  $c \in \mathbf{C}^s$  tel que  $\mathbf{F}_c \subset \mathcal{U}_{\mathbf{F}} \cap M_{(r)}$  la fibre  $\mathbf{F}_c$  est lisse et les champs de vecteurs  $\mathcal{X}_{F_1}, \dots, \mathcal{X}_{F_s}$  sont indépendants en chaque point de la fibre  $\mathbf{F}_c$ .*

Cette proposition est une conséquence de la Proposition 3.7. Ainsi, les conditions (1) et (2) du théorème de Liouville complexe sont satisfaites. Pour vérifier si les conditions (3) et (4) sont satisfaites ou non, comme nous le verrons dans les paragraphes suivants, il est nécessaire de construire, pour  $c$  générique, un certain plongement  $\varphi_c : \mathbf{F}_c \rightarrow \mathbf{P}^N$ .

### 3.4.1 Plongement de $\mathbf{T}_c^r$ dans un espace projectif

On désire construire, pour  $c$  générique, une application  $\varphi_c$  de  $\mathbf{F}_c$  dans un espace projectif  $\mathbf{P}^N$  telle que, dans le cas des systèmes qui s'avèrent a.c.i., la fermeture projective  $\overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)}$  de l'image de  $\varphi_c$  est une variété abélienne. Dans le but de construire une telle application  $\varphi_c$ , on construit une application polynômiale  $\mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^N$  dont la restriction à la fibre générique  $\mathbf{F}_c$  admet les propriétés de l'application de Kodaira associée à un fibré en droites très ample sur une variété abélienne. Soient  $x(t; m_1), \dots, x(t; m_d)$  les  $d$  balances principales du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  associées à des solutions  $m_i$  de l'équation indiciale. Si  $f$  est une fonction polynôme sur  $\mathbf{C}^n$ , on note  $f(x(t; m_i))$  la série obtenue en y substituant la balance principale  $x(t; m_i)$ .

Pour toute fonction polynôme homogène de poids  $k$ , on peut déterminer la structure du pôle de sa restriction à la fibre générique de l'application moment, en utilisant les  $k + 1$  premiers termes des balances principales  $x(t; m_1), \dots, x(t; m_d)$ . Soit le vecteur  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$  où  $\rho_i \in \mathbf{N}$ . L'idée est de rechercher pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ , une base pour l'espace vectoriel des polynômes homogènes  $z_0, \dots, z_N$  de poids  $k$  tels que la série  $z_j(x(t; m_i))$  admette un pôle d'ordre au plus  $\rho_i$  pour  $i = 1, \dots, d$  et  $j = 0, \dots, N$ . Etant donné que pour un entier positif  $k$  l'espace vectoriel  $\mathcal{F}^{(k)}$  des polynômes homogènes de poids  $k$  est de dimension finie, le processus est fini pour tout  $k$ . En effet, la dimension de  $\mathcal{F}^{(k)}$  est donnée par

$$\prod_{i=1}^n \frac{1}{1 - t^{\varpi(x_i)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\dim \mathcal{F}^{(k)}) t^k.$$

Pour  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ , soit

$$\mathcal{Z}_\rho = \{f \in \mathbf{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \text{ord}_{t=0} f(x(t; m_i)) \geq -\rho_i \text{ pour } 1 \leq i \leq d\}$$

l'ensemble des polynômes en  $x_1, \dots, x_n$  sans pôle plus grand que  $t^{-\rho_i}$  lorsque évalués sur  $x(t; m_i)$  où  $i = 1, \dots, d$ . Notons que  $\mathcal{Z}_\rho$  est un  $\mathcal{H}$ -module où  $\mathcal{H}$  est l'algèbre engendrée par les constantes de mouvement  $F_1, \dots, F_s$ . De plus si  $S \subset \mathcal{Z}_\rho$  et si  $\mathcal{H}(S)$  est le  $\mathcal{H}$ -module engendré par  $S$ , alors

$$\text{Vect}\{z|_{\mathbf{F}_c} \mid z \in S\} = \text{Vect}\{z|_{\mathbf{F}_c} \mid z \in \mathcal{H}(S)\}.$$

Etant donné que nous recherchons les éléments  $z \in \mathcal{Z}_\rho$  dont les restrictions à  $\mathbf{F}_c$  sont indépendantes, il s'agira de trouver les éléments de  $\mathcal{Z}_\rho$  qui sont non seulement indépendants sur  $\mathbf{C}$  mais aussi sur  $\mathcal{H}$ . Soit  $\mathcal{Z}_\rho^{(k)} = \mathcal{Z}_\rho \cap \mathcal{F}^{(k)}$  et  $\zeta_k$  le nombre d'éléments de  $\mathcal{Z}_\rho^{(k)}$  qui sont linéairement indépendants (sur  $\mathcal{H}$ ). Si les nombres  $\zeta_k$  sont connus pour  $k = 0, \dots, l-1$ , alors le nombre des polynômes homogènes indépendants de poids  $l$  est donné par

$$\zeta_l = \dim \mathcal{Z}_\rho^{(l)} - \sum_{k=0}^{l-1} \zeta_k \dim \mathcal{H}^{(l-k)},$$

où la dimension de  $\mathcal{H}^{(k)} = \{F \in \mathcal{H} \mid \varpi(F) = k\}$  est donnée par

$$\prod_{i=1}^s \frac{1}{1 - t^{\varpi(F_i)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (\dim \mathcal{H}^{(k)}) t^k.$$

Considérons, pour  $c$  générique, la complétion  $\mathbf{T}_c^r$  de  $\mathbf{F}_c$  en une variété abélienne irréductible,  $\mathbf{T}_c^r = \mathbf{F}_c \cup \mathcal{D}_c$  où  $\mathcal{D}_c$  est une surface hypersurface analytique de  $\mathbf{T}_c$ , appelé *diviseur de Painlevé*. Désignons par  $\mathcal{D}_c^{(i)}$   $i = 1, \dots, d$  les composantes irréductibles du diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_c$ . D'après [6, Prop. 6.14], les polynômes trouvés, restreints à  $\mathbf{F}_c$ , correspondent aux sections du fibré en droites

$$\left[ \rho_1 \mathcal{D}_c^{(1)} \right] \otimes \cdots \otimes \left[ \rho_d \mathcal{D}_c^{(d)} \right] \quad (3.12)$$

sur la complétion de  $\mathbf{F}_c$ .  $\mathcal{D}_c^{(1)} \cup \cdots \cup \mathcal{D}_c^{(d)}$  est le diviseur à rajouter à  $\mathbf{F}_c$  pour la compléter en une variété abélienne, de sorte que le fibré en droites sera très ample dès qu'il est la puissance 3 d'un fibré en droites d'un diviseur effectif (Théorème 2.6). Comme pour une variété abélienne irréductible tout diviseur effectif est ample, il suffira de prendre  $\rho$  tel que  $\sum_i \rho_i \geq 3$  pour que (3.12) soit très ample. Il est à noter que le nombre de fonctions indépendantes (indépendantes quand elles sont restreintes à la complétion de  $\mathbf{F}_c$ ) est égal à  $\prod_{i=1}^r \delta_i$  lorsque le type de polarisation  $(\delta_1, \dots, \delta_r)$  qu'induit chaque  $\mathcal{D}_c^{(i)}$  sur le tore est connu.

Supposons qu'on a  $N + 1$  éléments  $z_0 = 0, z_1, \dots, z_N$  de  $\mathcal{Z}_\rho$  qui sont indépendants sur  $\mathcal{H}$  et que le  $\mathcal{H}$ -module engendré par celles-ci contient tous les éléments de  $\mathcal{Z}_\rho$  de poids au plus  $l$ . Pour  $c$  générique, soit l'application régulière

$$\begin{aligned} \varphi_c &: \mathbf{F}_c \rightarrow \mathbf{P}^N \\ m &\mapsto (1 : z_1(m) : \cdots : z_N(m)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

On doit incrémenter  $l$  jusqu'à ce que l'application  $\varphi_c$  soit un plongement de  $\mathbf{F}_c$  dans  $\mathbf{P}^N$  de telle sorte que, dans le cas d'un système a.c.i., la fermeture projective de  $\varphi_c(\mathbf{F}_c)$  soit une variété abélienne. En substituant la restriction à  $\mathbf{F}_c$  de chacune des séries  $x(t; \Gamma_c^{(1)}), \dots, x(t; \Gamma_c^{(d)})$  dans ce plongement et en faisant  $t \rightarrow 0$ , cela induit, pour chaque  $\Gamma_c^{(i)}$ , une application injective  $\varphi_c^{(i)} : \Gamma_c^{(i)} \rightarrow \mathbf{P}^N$  définie par

$$\begin{aligned} \varphi_c^{(i)}(m) &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( z_0(t; \Gamma_c^{(i)}) : z_1(t; \Gamma_c^{(i)}) : \cdots : z_N(t; \Gamma_c^{(i)}) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} t^{\rho_i} \left( z_0(t; \Gamma_c^{(i)}) : z_1(t; \Gamma_c^{(i)}) : \cdots : z_N(t; \Gamma_c^{(i)}) \right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Notons que le prolongement de  $\varphi_c^{(i)}$  à la compactification lisse  $\overline{\Gamma_c^{(i)}}$  de  $\Gamma_c^{(i)}$  n'est pas nécessairement un plongement car elle n'est pas toujours injective. Désignons par  $\mathcal{D}_c^{(i)}$  la fermeture de l'image  $\varphi_c^{(i)}(\Gamma_c^{(i)})$  de l'application  $\varphi_c^{(i)}$ . Pour être sûr d'avoir toutes les fonctions indépendantes homogènes à poids, on incrémente  $l$  jusqu'à ce que la dimension de l'image de chacun des ces diviseurs soit  $r - 1$  et la relation suivante, dite *formule d'adjonction*, doit être vérifiée

$$g_a \left( \sum_{i=1}^d \rho_i \mathcal{D}_c^{(i)} \right) = N + r.$$

**Remarque 3.20.** Les courbes  $\Gamma_c^{(i)}$  sont non singulières, par conséquent elles admettent une compactification lisse. Toutefois, les diviseurs  $\mathcal{D}_c^{(i)} = \overline{\varphi_c^{(i)}(\Gamma_c^{(i)})}$  peuvent être singuliers car les applications  $\varphi_c^{(i)}$  ne sont pas en général injectives sur  $\Gamma_c^{(i)}$ .

### 3.4.2 Extension d'un des champs de vecteurs sur un voisinage de $\mathbf{P}^N$

Dans le but d'appliquer le Théorème 3.15, il est nécessaire de montrer que l'un des champs de vecteurs intégrables  $\mathcal{X}_{F_i}$  se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur  $\mathbf{P}^N$ . La construction de ce prolongement est basée sur le théorème suivant, qui stipule qu'en termes de toute carte affine de  $\mathbf{P}^N$ , un champ de vecteurs holomorphe sur une variété abélienne est un champ de vecteurs quadratique, par conséquent il est globalement défini et holomorphe sur tout  $\mathbf{P}^N$ .

**Proposition 3.21.** *Soit  $\mathcal{L}$  un fibré en droites ample sur une variété abélienne irréductible  $\mathbf{T}^r$  et soit  $\mathcal{V}$  un champ de vecteurs holomorphe sur  $\mathbf{T}^r$ . Désignons par  $\varphi : \mathbf{T}^r \rightarrow \mathbf{P}^N$  l'application de Kodaira associée à  $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ , alors il existe un champ de vecteurs quadratique  $\overline{\mathcal{V}}$  sur  $\mathbf{P}^N$ , tel que  $\varphi_*\mathcal{V} = \overline{\mathcal{V}}$ .*

On désignera par  $\mathcal{V}_1$  ce champ de vecteurs. Soit  $U_j = (z_j \neq 0)$  une carte de  $\mathbf{P}^N$ , les fonctions  $z_0/z_j, \dots, z_N/z_j$  définissent un système de coordonnées locales sur cette carte. Pour montrer que le champ  $\mathcal{V}_1$  s'étend sur un voisinage de  $\mathcal{D}_c$  dans  $\mathbf{P}^N$  (c'est-à-dire sur toute carte  $U_i$ ), il suffit d'exhiber les équations différentielles quadratiques de  $\mathcal{V}_1$  en fonction des coordonnées  $z_i/z_j$  comme suit

$$\left( \frac{z_i}{z_j} \right)' = \frac{W(z_i, z_j)}{z_j^2} = \sum_{k,l} \alpha_{ij}^{kl} \frac{z_k}{z_j} \frac{z_l}{z_j},$$

où  $W(z_i, z_j) = \dot{z}_i z_j - z_i \dot{z}_j$  et les coefficients  $\alpha_{ij}^{kl}$  sont fonctions des valeurs régulières  $c = (c_1, \dots, c_s)$  des constantes de mouvement  $F_1, \dots, F_s$ . Toutefois, d'après le lemme suivant, il nous suffira de faire cela sur deux cartes différentes ( $z_i \neq 0$ ) et ( $z_j \neq 0$ ).

**Lemme 3.22.** *Soit  $\mathcal{X}$  un champ de vecteurs sur  $\mathbf{P}^N$  holomorphe dans deux cartes différentes ( $z_i \neq 0$ ) et ( $z_j \neq 0$ ). Alors  $\mathcal{X}$  est holomorphe sur  $\mathbf{P}^N$  c'est-à-dire holomorphe sur toute carte ( $z_k \neq 0$ ).*

### 3.4.3 Tout point de $\mathcal{D}_c$ est envoyé par $\overline{\mathcal{V}}_1$ dans la partie affine

Dans ce paragraphe, on montre comment vérifier la condition (4) du théorème de Liouville complexe. On suppose vérifiées les conditions (1), (2) et (3) du dit théorème. Pour  $c$  générique dans  $\mathbf{C}^s$ , soit l'application  $\varphi_c$  (3.13) dont la restriction à la fibre  $\mathbf{F}_c$  est un plongement. On suppose de plus que  $\mathbf{F}_c$  est connexe. Pour chacune des  $d$  balances homogènes à poids  $x(t; \Gamma_c^{(i)})$ , l'application  $\varphi_c$  induit une application holomorphe  $\varphi_c^{(i)} : \Gamma_c^{(i)} \rightarrow \mathbf{P}^N$ , dont l'image est de dimension  $r - 1$ . Posons  $\mathcal{D}_c^{(i)} =: \overline{\varphi_c(\Gamma_c^{(i)})}$  pour  $i = 1, \dots, d$  où la fermeture est prise relativement à la topologie de Zariski (ce qui revient au même relativement à la topologie complexe). Soit  $\Delta_c := \overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)} \setminus \varphi_c(\mathbf{F}_c)$ . On montre dans [18, Cor. III.7.9] que si  $r \geq 2$  alors  $\Delta_c$  est connexe. De plus comme  $\varphi_c$  est un plongement de  $\mathbf{F}_c$ , on a

$$\Delta_c = \overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)} \setminus \varphi_c(\mathbf{F}_c) = \overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)} \cap (z_0 = 0),$$

en particulier  $\Delta_c$  est contenu dans le sous-espace ( $z_0 = 0$ ). Par conséquent, si  $z_j(m)$ ,  $1 \leq j \leq N$  sont finis,  $m$  appartient dans la partie affine  $\varphi_c(\mathbf{F}_c)$ . Il nous faut montrer que les courbes intégrales du champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$  qui partent des points  $m \in \Delta_c$  sont immédiatement envoyées dans  $\varphi_c(\mathbf{F}_c)$  c'est-à-dire

$$\{\Phi_t(m) \mid 0 < |t| < \epsilon\} \subset \varphi_c(\mathbf{F}_c),$$



où  $\Phi_t$  est le flot du champ  $\overline{\mathcal{V}}$  sur  $\mathbf{P}^N$ . D'après ce qu'on a supposé, le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$  existe et est holomorphe. Il y a trois types de points dans  $\Delta_c$ .

1. les points dans l'image  $\varphi_c^{(i)}(\Gamma_c^{(i)})$ , pour au moins un  $i$ ,  $i = 1, \dots, d$ ;
2. les points dans  $K^{(i)} = \mathcal{D}_c^{(i)} \setminus \varphi_c^{(i)}(\Gamma_c^{(i)})$ , pour au moins un  $i$ ,  $i = 1, \dots, d$ ;
3. les points dans  $\Delta_c \setminus \cup_{i=1}^d \mathcal{D}_c^{(i)}$ .

Pour les points de (1.) : soit  $P \in \varphi_c^{(i)}(\Gamma_c^{(i)})$  et  $p \in \Gamma_c^{(i)}$  tels que  $\varphi_c^{(i)}(p) = P$ . Puisque les fonctions  $z_j$  sont des polynômes en les variables de phase  $x_1, \dots, x_n$  et que les séries de Laurent  $x_j(t; \Gamma_c^{(i)})$  sont homogènes à poids (par conséquent convergentes), on peut trouver  $\epsilon > 0$  tel que  $z_j(t; \Gamma_c^{(i)})$  soit fini pour  $j = 1, \dots, N$  et pour  $t$  tel que  $0 < |t| < \epsilon$ ; par conséquent  $\Phi_t(P)$  n'appartient pas à l'hyperplan ( $z_0 = 0$ ) c'est-à-dire  $\Phi_t(P) \in \varphi_c(\mathbf{F}_c)$ .

Pour les points de (2.) : Pour utilisation future, il suffit que nous expliquons comment faire pour les systèmes intégrables de dimension 2 ( $r = 2$ ). Pour  $r > 2$ , voir [6]. Soit donc  $K = \cup_{i=1}^d K^{(i)}$ ; il est clair que  $K$  est composé d'un nombre fini de points. Soit  $P$  un point de  $K$ , il existe  $1 \leq i \leq d$  tel que  $P \in K^{(i)}$ , et soit  $p \in \overline{\Gamma_c^{(i)}}$  tel que

$$\lim_{m \rightarrow p} \varphi_c^{(i)}(m) = P;$$

il est clair que le point  $p$  n'est pas nécessairement unique puisque l'application  $\varphi_c^{(i)}$  n'est pas toujours injective sur  $\overline{\Gamma_c^{(i)}}$ . De plus,  $i$  n'est pas unique! Soit  $z_j(t; \Gamma_c^{(i)})$  la série de Laurent obtenue en substituant en  $z_j$  la balance principale  $x(t; \Gamma_c^{(i)})$ , restreinte à  $\mathbf{F}_c$ . Pour  $j = 1, \dots, N$ , on écrit

$$z_j(t; \Gamma_c^{(i)}) = \frac{1}{t^l} \sum_{k=0}^{\infty} z_j^{(k)} t^k,$$

où  $l$  tel que  $z_j^{(0)} \neq 0$  pour au moins un  $j$ . Parmi les indices  $j$  pour lesquels  $z_j^{(0)} \neq 0$ , on choisit l'indice  $\alpha$  pour lequel la série  $z_\alpha(t; \Gamma_c^{(i)})$  admet le plus grand pôle quand  $m \rightarrow p$  dans  $\overline{\Gamma_c^{(i)}}$ . Dans ce cas, pour tout indice  $j$  la limite suivante

$$\lim_{m \rightarrow p} \frac{z_j(t; \Gamma_c^{(i)})}{z_\alpha(t; \Gamma_c^{(i)})}$$

est finie, et donc la carte  $z_\alpha \neq 0$  de  $\mathbf{P}^N$  contient le point  $P$ . Comme le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$  est holomorphe sur  $\mathbf{P}^N$ , alors il est holomorphe en les coordonnées  $y_j = z_j/z_\alpha$ ,  $0 \leq j \leq N$ . Explicitement, la série  $y_j(t; m)$  est égale à la série  $y_j(t; \varphi_c(m))$  lorsque  $m \in \Gamma_c^{(i)}$  tend vers  $p \in \overline{\Gamma_c^{(i)}}$ , où  $y_j(t; \varphi_c(m))$  est la série de Taylor de  $y_j$  relativement au champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$ , partant de  $\varphi_c(m)$ . Puisque cette dernière admet une limite, à savoir  $y_j(t; P)$ , alors la série  $y_j(t; m)$  admet aussi une limite quand  $m \rightarrow p$ , qu'on notera  $y_j(t; p)$ . Alors si l'on montre que  $y_0(t; p) \neq 0$  (comme une série holomorphe non nulle en  $t$ ), il s'ensuit que toutes les séries  $z_j(t; p)$  sont finies (pour  $0 < |t| < \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ ) puisque  $z_j = y_j/y_0$ ; et c'est terminé! Par conséquent, pour montrer que la courbe intégrale du champ vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$  passant par  $P \in K^{(i)}$  est envoyée dans la partie affine, on vérifie que pour la balance principale  $x(t; \Gamma_c^{(i)})$ , la série

$$y_0(t; \Gamma_c^{(i)}) = \frac{1}{z_\alpha(t; \Gamma_c^{(i)})} = \sum_{k \geq 0} a_k(m) t^k$$

admet une limite non nulle quand  $m \in \Gamma_c^{(i)}$  tend vers  $p$ , avec  $\alpha$  l'indice défini plus haut ; et ceci pour tous les points de  $K$ .

Soit  $\Delta_c = \mathcal{D}_c \cup \Delta'$  où  $\Delta'$  est l'union des composantes irréductibles de  $\Delta_c$  différentes des composantes  $\mathcal{D}_c^{(1)}, \dots, \mathcal{D}_c^{(d)}$ . Les points de (3.) s'ils existent sont les points de  $\Delta'$ . Pour terminer la démonstration, il nous suffit de montrer que  $\Delta' = \emptyset$ . Puisque  $\Delta_c$  est connexe, l'une au moins des composantes de  $\Delta'$  intersecte l'un des  $\mathcal{D}_c^{(i)}$  c'est-à-dire il existe au moins un point  $P \in \mathcal{D}_c$  qui appartienne à  $\Delta'$ . Soit  $P \in \mathcal{D}_c^{(i)}$  pour un certain  $i = 1, \dots, d$ . On montre (voir [6], P.256) qu'il existe un voisinage  $U$  de  $P$  dans  $\overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)}$  et un réel  $\epsilon > 0$  tels que

$$U \subseteq \{\Phi_t(\mathcal{D}_c^{(i)}) \mid 0 \leq |t| < \epsilon\}.$$

Soit  $U$  un tel voisinage de  $P$  dans  $\varphi_c(\mathbf{F}_c)$  et supposons que le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$  est transversal à l'une des branches de  $\mathcal{D}_c^{(i)}$  passant par  $P$  où  $1 \leq i \leq d$ . Alors d'après le théorème des fonctions implicites, il existe  $(t, s)$  un système de coordonnées holomorphes sur un voisinage de  $P$  dans  $\overline{\varphi_c(\mathbf{F}_c)}$ , où la coordonnée  $s$  est une coordonnée sur la branche choisie de  $\mathcal{D}_c^{(i)}$  en  $P$  et la solution du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  commençant sur la branche de  $\mathcal{D}_c^{(i)}$  est composée des fonctions holomorphes  $y_i(t; s)$  de leurs arguments. Puisque  $z_j = y_j/y_0$  ( $i = 0, \dots, N$ ) alors  $z_j$  est fini toutes les fois que  $y_0$  est fini et par conséquent nous sommes dans la partie affine. Ecrivons la série  $y_0$  comme

$$y_0(t, s) = a_\mu(t, s) + a_{\mu+1}(t, s) + \dots,$$

où  $a_l$  est la somme de tous les monômes de degré  $l$  dans la série, et  $a_\mu(t, s) \neq 0$ . Alors  $\mu = \mu(y_0; P)$  est la multiplicité de  $\mathcal{D}_c$  au point  $P$ , puisque  $y_0$  est une fonction définissante locale sur  $\mathcal{D}_c$ . Le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}$  étant transversal à  $\Delta_c$  en tous les points génériques de chaque composante irréductible de  $\Delta_c$  qui passe par  $P$ , on peut déterminer la multiplicité de  $y_0$  sur chacune de ses composantes, laquelle est le pôle générique de  $z_\alpha$  sur chacune de ces composantes. Considérons les composantes irréductibles  $\mathcal{D}_c^{(1)}, \dots, \mathcal{D}_c^{(d)}$  de  $\mathcal{D}_c$ , et désignons par  $\mu(\mathcal{D}_c^{(i)}; P)$  la multiplicité de  $P$  sur  $\mathcal{D}_c^{(i)}$ , si on vérifie que

$$\mu(y_0; P) = \sum_{1 \leq i \leq d} \mu(\mathcal{D}_c^{(i)}; P) \left( \text{ordre du pôle de } z_\alpha(t; \Gamma_c^{(i)}) \right), \quad (3.15)$$

alors il n'existe pas d'autres composantes irréductibles de  $\Delta_c$  de codimension 1 qui contiennent le point  $P$  et différentes de celles déjà trouvées correspondantes aux  $d$  balances principales c'est-à-dire  $\Delta' = \emptyset$  et par suite  $\Delta_c = \mathcal{D}_c$ .

#### 3.4.4 Formes différentielles holomorphes sur $\mathcal{D}_c$

Dans ce paragraphe, nous montrons comment calculer les 1-formes différentielles holomorphes sur une hypersurface analytique irréductible (singulière ou non) dans une surface abélienne  $\mathbf{T}^2$  en utilisant un système a.c.i.. Elles sont d'autant plus utiles car elles permettent d'explorer la géométrie à l'infini des systèmes a.c.i. Pour des détails, voir [6]. Pour la suite on suppose qu'on a un système a.c.i. de dimension 2 avec deux champs de vecteurs intégrables  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  définis par la donnée explicite de leurs systèmes d'équations différentielles respectifs. Soit  $\mathcal{D}$  le diviseur à rajouter à une fibre générique de l'application moment du système pour sa complétion en une variété abélienne. On suppose de plus que  $\mathcal{D}$  est un diviseur très ample, et que chacune de ses composantes est de multiplicité 1 (c'est-à-dire  $\mathcal{D}$  est une hypersurface). Soit  $(y_0 = 1, y_1, \dots, y_N)$  une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ . Désignons par  $y_0$  l'élément ayant

le plus grand pôle le long de  $\mathcal{D}$  parmi toutes les fonctions de cette base. Plus précisément, si  $y_j(t; \mathcal{D}) = \frac{1}{t} \sum_{k \geq 0} y_j^{(k)} t^k$ , où chaque  $y_j^{(k)}$  est une fonction régulière sur  $\mathcal{D}$ , alors la restriction de  $y_0^{(0)}$  à chacune des composantes irréductibles de  $\mathcal{D}$  est non nulle ; ce qui ne doit pas être nécessairement le cas des autres  $y_i^{(0)}$ . Calculons les 1-formes holomorphes  $\omega_1 = dt_2|_{\mathcal{D}}$  et  $\omega_2 = dt_1|_{\mathcal{D}}$ . Soit  $y$  une autre fonction de la base telle que  $1/y_0$  et  $y/y_0$  définissent une carte holomorphe autour d'un point générique de  $\mathcal{D}$ .

On a

$$\begin{pmatrix} d\left(\frac{1}{y_0}\right) \\ d\left(\frac{y}{y_0}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1\left[\frac{1}{y_0}\right] & \mathcal{V}_2\left[\frac{1}{y_0}\right] \\ \mathcal{V}_1\left[\frac{y}{y_0}\right] & \mathcal{V}_2\left[\frac{y}{y_0}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt_1 \\ dt_2 \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

qui se résoud pour  $dt_1$  et  $dt_2$ . En se restreignant à  $\mathcal{D}$ , on trouve

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_2[y/y_0]_{|\mathcal{D}} & -\mathcal{V}_2[1/y_0]_{|\mathcal{D}} \\ -\mathcal{V}_1[y/y_0]_{|\mathcal{D}} & 1/y_0^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d\left(y^{(0)}/y_0^{(0)}\right) \end{pmatrix},$$

où  $\delta$  est le déterminant de la matrice carrée dans (3.16), restreinte à  $\mathcal{D}$ ,

$$\delta = \frac{1}{(y_0^{(0)})^2} \begin{vmatrix} y_0^{(0)} & \mathcal{V}_2[1/y_0]_{|\mathcal{D}} \\ y_0^{(0)}y^{(1)} - y^{(0)}y_0^{(1)} & \mathcal{V}_2[y/y_0]_{|\mathcal{D}} \end{vmatrix},$$

qui est non nul du fait des hypothèses sur  $y^{(0)}$  et  $y$ . Les différentielles holomorphes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont alors données par

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\delta y_0^{(0)}} d\left(\frac{y^{(0)}}{y_0^{(0)}}\right), \\ \omega_2 &= -\frac{1}{\delta} \mathcal{V}_2\left[\frac{1}{y_0}\right]_{|\mathcal{D}} d\left(\frac{y^{(0)}}{y_0^{(0)}}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les zéros des différentielles  $\omega_1$  et  $\omega_2$  fournissent les points de tangence des champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  respectivement.



## Chapitre 4

# Intégrabilité algébrique du réseau de Toda $\mathfrak{d}_3^{(2)}$

Ce chapitre est consacré à l'étude du réseau de Toda périodique à trois particules associé à l'algèbre de Lie affine twistée  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ . Nous montrons d'abord que ce système intégrable homogène à poids est algébriquement complètement intégrable au sens d'Adler-van Moerbeke ; en d'autres termes que chacune des variétés invariantes complexes génériques de ce système se complète en une surface abélienne et que les flots des champs intégrables y sont linéaires. Ensuite, nous montrons le lien entre ce système et le système de Mumford en donnant explicitement un morphisme liant ces deux systèmes. Comme corollaire, nous trouvons une nouvelle équation de Lax pour ce système. Enfin, nous terminons en donnant une linéarisation explicite du système sur une famille de surfaces abéliennes.

### 4.1 Position du problème et intégrabilité de Liouville

Les équations de mouvement du réseau de Toda périodique  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  sont données par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cdot y, \\ \dot{y} &= Ax,\end{aligned}\tag{4.1}$$

sur l'hyperplan de dimension cinq  $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbf{C}^6 \mid y_0 + y_1 + y_2 = 0\}$  où  $x, y \in \mathbf{C}^3$ ,  $x = (x_0, x_1, x_2)^\top$ ,  $y = (y_0, y_1, y_2)^\top$ ,  $x \cdot y = (x_0y_0, x_1y_1, x_2y_2)$  et où la matrice de Cartan  $A$  de  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors le champ de vecteurs (4.1), qu'on désignera par  $\mathcal{V}_1$ , est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= x_0y_0, & \dot{y}_0 &= 2x_0 - x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_1y_1, & \dot{y}_1 &= -2x_0 + 2x_1 - 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2y_2, & \dot{y}_2 &= 2x_2 - x_1.\end{aligned}\tag{4.2}$$

ou simplement (du fait de  $y_0 + y_1 + y_2 = 0$ ) par

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= x_0 y_0, \\ \dot{x}_1 &= -x_1(y_0 + y_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2 y_2, \\ \dot{y}_0 &= 2x_0 - x_1, \\ \dot{y}_2 &= 2x_2 - x_1. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  est un champ de vecteurs hamiltonien, avec pour hamiltonien la fonction

$$F_1 = y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 2x_1 - 4x_2, \tag{4.4}$$

relativement à la structure de Poisson linéaire  $\{\cdot, \cdot\}$  qui est définie par la matrice antisymétrique suivante, écrite en fonction du système de générateurs  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$  (pris dans cet ordre).

$$M := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0 & -x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & 2x_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & x_2 \\ -x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & -2x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

La structure de Poisson est donnée sur  $\mathbf{C}^6$ ; la fonction  $y_0 + y_1 + y_2$  est un Casimir pour celle-ci donc  $\mathcal{H}$  est une sous-variété de Poisson. Le rang de la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  est égal à 4. En effet le rang est 0 sur le sous-espace  $\{x_0 = x_1 = x_2 = 0\}$  de dimension 3; le rang est 2 sur les trois sous-espaces de dimension 4 :  $\{x_0 = x_1 = 0\}$ ,  $\{x_0 = x_2 = 0\}$  et  $\{x_1 = x_2 = 0\}$ . On en déduit qu'en tout point de  $\mathcal{H}$  sauf sur les quatre sous-espaces ci-dessus le rang est 4.

Le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  admet deux autres constantes de mouvement qui sont les suivantes,

$$\begin{aligned} F_2 &= (y_0^2 - 4x_0)(y_2^2 - 4x_2) - x_1(2y_0y_2 - 4x_0 - x_1 - 4x_2), \\ F_3 &= x_0x_1x_2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Il est facile de voir que  $F_3$  est un Casimir pour la structure de Poisson; la fonction  $F_2$  engendre un second champ de vecteurs hamiltonien, noté  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{X}_{F_2}$ , donné par les équations différentielles

$$\begin{aligned} x'_0 &= x_0y_2(y_0y_2 - x_1) - 4x_0x_2y_0, \\ x'_1 &= x_1(y_0 + y_2)(x_1 - y_0y_2) + 4x_1(x_2y_0 + x_0y_2), \\ x'_2 &= x_2y_0(y_0y_2 - x_1) - 4x_0x_2y_2, \\ y'_0 &= 2(x_1x_2 + x_0y_2^2) - 8x_0x_2 + x_1(x_1 - y_0y_2), \\ y'_1 &= 2x_1(y_0y_2 - x_0 - x_2) - 2(x_0y_2^2 + x_2y_0^2) - 2(x_1^2 - 8x_0x_2), \\ y'_2 &= 2(x_1x_0 + x_2y_0^2) - 8x_0x_2 + x_1(x_1 - y_0y_2), \end{aligned} \tag{4.7}$$

avec les mêmes constantes de mouvement ci-dessus. Comme  $\{F_1, F_2\} = 0$ , on a

$$[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] = [\mathcal{X}_{F_1}, \mathcal{X}_{F_2}] = -\mathcal{X}_{\{F_1, F_2\}} = 0,$$

on en déduit que les deux champs de vecteurs hamiltoniens  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  commutent. Posons  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}^3$  l'application moment. Il est clair que  $\mathbf{F}$  est involutive d'après ce qui précède. Soit

$$\mathcal{U}_{\mathbf{F}} = \{m \in \mathcal{H} : \mathbf{d}F_1(m) \wedge \mathbf{d}F_2(m) \wedge \mathbf{d}F_3(m) \neq 0\}.$$

$\mathbf{F}$  est indépendante si et seulement si  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}$  est un ouvert dense de  $\mathcal{H}$ . On a  $m \in \mathcal{U}_{\mathbf{F}}$  si et seulement si le rang de la matrice jacobienne de l'application  $\mathbf{F}$  au point  $m$ , donnée ci-dessous, est égale à 3.

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2y_0 & 2y_2 \\ 4(4x_2 + x_1 - y_2^2) & \star & 4(4x_0 + x_1 - y_0^2) & 2y_0(y_2^2 - 4x_2) - 2x_1y_2 & \star' \\ x_1x_2 & x_0x_2 & x_0x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

avec  $\star := 2(2x_0 + x_1 + 2x_2 - y_0y_2)$  et  $\star' := 2y_2(y_0^2 - 4x_0) - 2x_1y_0$ .

Soit  $p_0 = (1, 1, 0, 1, -2, 1)$  un point de  $\mathcal{H}$ . La matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$  au point  $p_0$  est donnée par

$$M(p_0) := \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 16 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On voit que le rang de la matrice  $M(p_0)$  est 3, donc les différentielles  $\mathbf{d}F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont indépendantes au point  $p_0$ , et puisque les fonctions  $F_i$  sont polynômiales on déduit que  $\mathbf{F}$  est indépendante sur un ouvert dense de  $\mathcal{H}$ . On en déduit que  $(\mathcal{H}, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est un système intégrable de Liouville.

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points de  $\mathcal{H}$  où les déterminants de matrices  $3 \times 3$  extraites de la matrice (4.8) sont tous nuls. Par un calcul direct avec Maple, on vérifie que  $\mathcal{S}$  est la réunion des sous-variétés suivantes

$$\begin{aligned} & \{x_0 = x_1 = 0\}, \{x_0 = x_2 = 0\}, \{x_1 = x_2 = 0\}, \{x_1 = 0, x_0 = x_2 + \frac{1}{4}(y_0^2 - y_2^2)\} \\ & \{x_0 = x_2, y_0 = y_2\}, \{y_0 = y_2 = 0, 4x_0x_2 = x_1(x_0 + x_2)\} \\ & \{4x_2y_0 = -4x_0y_2 = (y_2 - y_0)(y_0y_2 - x_1)\}. \end{aligned}$$

Les images, par l'application moment  $\mathbf{F}$ , des quatre premières sous-variétés sont contenues dans le sous-ensemble  $\{\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3 \mid c_3 = 0\}$ .

En substituant  $x_2 = x_0$  et  $y_2 = y_0$  dans les trois constantes de mouvement  $F_i = c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), on obtient l'égalité

$$c_1^2 - 4c_2 = 0.$$

Une substitution de

$$y_0 = y_2 = 0, \quad x_1 = \frac{4x_0x_1}{x_0 + x_2}$$

dans les constantes de mouvement  $F_i = c_i$  donne, après un calcul direct avec Maple, la relation

$$6912c_3^2 + 288c_1c_2c_3 + 4c_2^3 - c_1^2c_2^2 - 64c_1^3c_3 = 0. \quad (4.9)$$

De même, on vérifie en substituant

$$x_0 = -\frac{1}{4y_2}(y_2 - y_0)(y_0y_2 - x_1), \quad x_2 = \frac{1}{4y_0}(y_2 - y_0)(y_0y_2 - x_1)$$

dans les constantes de mouvement, qu'on a la même relation (4.9).

**Proposition 4.1.** *Soit l'ouvert de Zariski  $\Omega$  défini par*

$$\Omega = \{\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3 \mid c_3 \neq 0, c_1^2 - 4c_2 \neq 0 \text{ et} \\ 6912c_3^2 + 288c_1c_2c_3 + 4c_2^3 - c_1^2c_2^2 - 64c_1^3c_3 \neq 0\}. \quad (4.10)$$

Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la fibre

$$\mathbf{F}_{\mathbf{c}} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c}) = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathcal{H} : F_i(x) = c_i\}$$

au-dessus de  $\mathbf{c}$  de l'application moment  $\mathbf{F}$  est une variété affine lisse de dimension 2 et la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  est de rang maximal en chaque point de  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ ; de plus les champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont indépendants en chaque point de  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ .

## 4.2 Intégrabilité algébrique

Pour démontrer que le réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  est algébriquement complètement intégrable (a.c.i.), on montre que pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la fibre  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  forme la partie affine d'une surface abélienne et qu'en outre les flots définis par les champs de vecteurs hamiltoniens (engendrés par les constantes de mouvement  $F_1$  et  $F_2$ ) sont des mouvements rectilignes sur cette surface abélienne. Pour cela, il suffit de vérifier que  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  satisfait les conditions du Théorème de Liouville Complexe.

Il existe sur  $\mathbf{C}^6$  deux involutions  $\pi$  et  $\tau$  qui laissent invariant les constantes de mouvement  $F_i$ , et qui sont définies par

$$\begin{aligned} \pi(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) &= (x_2, x_1, x_0, y_2, y_1, y_0), \\ \tau(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) &= (x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Ces involutions  $\pi$  et  $\tau$  se restreignent donc aux fibres de l'application moment  $\mathbf{F}$  et à l'hyperplan  $\mathcal{H}$ . L'involution  $\pi$  préserve les deux champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  (et commute donc avec leurs flots respectifs) tandis que  $\tau$  change le signe de ces derniers.

Observons que le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  est homogène à poids quand on affecte les poids suivants aux variables :

$$\varpi(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) := (2, 2, 2, 1, 1, 1).$$

Alors, en tenant compte de ces poids, les constantes de mouvement  $F_i$  sont aussi homogènes à poids, avec pour poids :

$$\varpi(F_1, F_2, F_3) := (2, 4, 6).$$

### 4.2.1 Solutions de Laurent

**Proposition 4.2.** [6] *Le système d'équations différentielles (4.1), associé au champ vecteurs  $\mathcal{V}_1$ , possède des solutions de Laurent, et elles sont toutes de la forme*

$$x(t) = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)} t^k, \quad y(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)} t^k;$$

*c'est-à-dire homogènes à poids : les variables  $x = (x_0, x_1, x_2)$  ont au pire un pôle double et les variables  $y = (y_0, y_1, y_2)$  au pire un pôle simple.*



*Démonstration.* Soient  $\xi = (1, 2, 1)^\top$  et  $\delta = (1, 1, 1)^\top$ . On a  $A\xi = 0$  et  $\delta$  n'appartient pas à l'image de  $A$ . D'après les équations différentielles (4.2), si l'une des variables  $x_0, x_1$  et  $x_2$  admet un pôle alors il en est aussi pour l'une des variables  $y_0, y_1$  et  $y_2$ ; et inversement. Supposons donc que les solutions de Laurent (strictes) formelles sont de la forme

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{t^m} \left( x^{(m)} + O(t) \right), \\ y(t) &= \frac{1}{t^k} \left( y^{(k)} + O(t) \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec  $m, k > 0$  et  $x^{(m)} \neq 0$  et  $y^{(k)} \neq 0$ . En substituant (4.12) dans (4.1), on a

$$-m \frac{x^{(m)}}{t^{m+1}} + \dots = \frac{x^{(m)} \cdot y^{(k)}}{t^{m+k}} + \dots, \quad (4.13)$$

$$-k \frac{y^{(k)}}{t^{k+1}} + \dots = \frac{Ax^{(m)}}{t^m} + \dots, \quad (4.14)$$

Supposons  $m > k + 1$ , alors (4.14) implique que  $Ax^{(m)} = 0$  et par suite  $x^{(m)}$  est un multiple non nul de  $\xi$  mais comme toutes les composantes de  $\xi$  sont non nulles, on a  $x_i^{(m)} \neq 0$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Puisque  $y^{(k)} \neq 0$ , on a que  $x^{(m)} \cdot y^{(k)} \neq 0$  alors (4.13) implique que  $k = 1$  et par suite  $y^{(k)} = -m\delta$ . D'après (4.14),  $y^{(k)}$  doit être dans l'image de  $A$ , ce qui est impossible puisque  $\delta$  n'y est pas. De même,  $m < k + 1$  est impossible du fait de l'égalité (4.14). Donc  $m = k + 1$ .

Supposons que  $m = k + 1$  et  $k > 1$ . Alors (4.13) et (4.14) impliquent que

$$x^{(k+1)} \cdot y^{(k)} = 0, \quad (4.15)$$

$$-ky^{(k)} = Ax^{(k+1)}. \quad (4.16)$$

Notons que  $x^{(k+1)} \cdot y^{(k)} = 0$  implique que pour  $i = 0, 1, 2$  on a  $x_i^{(k+1)} = 0$  ou  $y_i^{(k)} = 0$ . Posons, par exemple

$$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^{(k+1)} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } y^{(k)} = \begin{pmatrix} y_0^{(k)} \\ 0 \\ y_2^{(k)} \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1^{(k+1)} \neq 0 \text{ et } y_0^{(k)} = -y_2^{(k)} \neq 0.$$

On a bien  $x^{(k+1)} \cdot y^{(k)} = 0$  avec  $x^{(k+1)} \neq 0$  et  $y^{(k)} \neq 0$ . De l'égalité (4.16) on a que

$$y^{(k)} = -\frac{1}{k} Ax^{(k+1)} = -\frac{1}{k} \begin{pmatrix} -x_1^{(k+1)} \\ 2x_1^{(k+1)} \\ -x_1^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Ceci implique que  $x_1^{(k+1)} = 0$  et par suite  $y_0^{(k)} = 0$ ; donc  $y^{(k)} = 0$ . Contradiction. D'où  $k = 1$  et  $m = 2$ .  $\square$

Dans tout ce qui suit, nous nous restreignons à l'hyperplan  $\mathcal{H}$  de dimension 5 en ne considérant que les variables  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_2$  comme système de coordonnées après substitution de la variable  $y_1$  par  $-y_0 - y_2$  dans toutes les expressions.

Recherchons maintenant les solutions de Laurent strictes du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$ . En substituant les séries

$$x_i(t) = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k)} t^k, \quad (i = 0, 1, 2) \quad \text{et,} \quad y_i(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} y_i^{(k)} t^k, \quad (i = 0, 2)$$

dans (4.3) on trouve que les premiers coefficients des séries satisfont l'équation indiciale donnée par

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^{(0)}(2 + y_0^{(0)}), \\ 0 &= x_1^{(0)}(2 - y_0^{(0)} - y_2^{(0)}), \\ 0 &= x_2^{(0)}(2 + y_2^{(0)}), \\ 0 &= y_0^{(0)} + 2x_0^{(0)} - x_1^{(0)}, \\ 0 &= y_2^{(0)} + 2x_2^{(0)} - x_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Déterminons les solutions  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_0^{(0)}, y_2^{(0)})$  du système composé de ces équations. Si  $x_0^{(0)} = x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$ , cela conduit à une solution nulle  $(x_0^{(0)}, y^{(0)}) = 0$ . Si les composantes  $x_0^{(0)}$ ,  $x_1^{(0)}$  et  $x_2^{(0)}$  sont toutes trois non nulles, les trois premières équations conduisent à  $y_0^{(0)} = y_2^{(0)} = -2$  et  $y_0^{(0)} + y_2^{(0)} = 2$ ; ce qui est absurde. Si précisément l'un ou deux des  $x_i^{(0)}$ ,  $i = 0, 1, 2$  est/sont nul(s), le système se résout aisément, conduisant aux six solutions (non nulles), à savoir les points suivants

$$\begin{aligned} m_0 &:= (0, 0, 1, 0, -2), & m_3 &:= (3, 4, 0, -2, 4), \\ m_1 &:= (0, 1, 0, 1, 1), & m_4 &:= (0, 4, 3, 4, -2), \\ m_2 &:= (1, 0, 0, -2, 0), & m_5 &:= (1, 0, 1, -2, -2). \end{aligned}$$

On remarquera que les points  $m_2$  et  $m_4$  correspondent aux points  $m_0$  et  $m_3$  respectivement par l'involution  $\pi$ ; tandis que les points  $m_1$  et  $m_5$  sont des points fixes.

La matrice de Kowalevski en un point arbitraire  $(x^{(0)}, y^{(0)})$  solution de l'équation indiciale est donnée par :

$$\mathcal{K}(x^{(0)}, y^{(0)}) := \begin{pmatrix} 2 + y_0^{(0)} & 0 & 0 & x_0^{(0)} & 0 \\ 0 & 2 + y_0^{(0)} - y_2^{(0)} & 0 & -x_1^{(0)} & -x_1^{(0)} \\ 0 & 0 & 2 + y_2^{(0)} & 0 & x_2^{(0)} \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice de Kowalevski

$$\mathcal{K}(m_0) := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

au point  $m_0$  est donné par

$$\chi(\mu; m_0) = (\mu + 1)(\mu - 1)(\mu - 2)^2(\mu - 4),$$

il a donc quatre valeurs propres entières non négatives, ce qui conduit à une balance principale. On donne les cinq premiers termes de cette balance  $x(t; m_0)$

$$\begin{aligned}
x_0(t; m_0) &= c + act + \frac{1}{2}c(2c + a^2)t^2 + O(t^3), \\
x_1(t; m_0) &= et^2 + O(t^3), \\
x_2(t; m_0) &= \frac{1}{t^2} + d + \frac{1}{10}(6d^2 - e)t^2 + O(t^3), \\
y_0(t; m_0) &= a + 2ct + act^2 + \frac{1}{3}(2c^2 + a^2c - e)t^3 + O(t^4), \\
y_2(t; m_0) &= -\frac{2}{t} + 2dt - \frac{2}{5}(e - d^2)t^3 + O(t^4).
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Les quatre paramètres libres apparaissent aux étapes 1, 2, 2, 4 respectivement, et sont notés  $a, c, d, e$ . L'involution  $\tau$  agit sur ces paramètres de la balance comme suit

$$\tau : (t, a, c, d, e) \mapsto (-t, -a, c, d, e).$$

Puisque  $m_2 := \pi(m_0)$ , la balance principale  $x(t; m_2)$  correspondant au point  $m_2$  est obtenue des formules de  $x(t; m_0)$  en appliquant l'automorphisme  $\pi$ . Ce qui donne

$$\begin{aligned}
x_0(t; m_2) &= \frac{1}{t^2} + d + \frac{1}{10}(6d^2 - e)t^2 + O(t^3), \\
x_1(t; m_2) &= et^2 + O(t^3), \\
x_2(t; m_2) &= c + act + \frac{1}{2}c(2c + a^2)t^2 + O(t^3), \\
y_0(t; m_2) &= -\frac{2}{t} + 2dt - \frac{2}{5}(e - d^2)t^3 + O(t^4), \\
y_2(t; m_2) &= a + 2ct + act^2 + \frac{1}{3}(2c^2 + a^2c - e)t^3 + O(t^4).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

De même le point  $m_1$  conduit à une balance principale  $x(t; m_1)$  car la matrice de Kowalevski associée

$$\mathcal{K}(m_1) := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admet quatre valeurs propres entières non négatives ; en effet le polynôme caractéristique est donné par

$$\chi(\mu; m_1) = (\mu + 1)(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)^2.$$

On donne les quatre premiers termes de cette balance (les quatre paramètres libres sont notés  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ).

$$\begin{aligned}
x_0(t; m_1) &= \beta t + O(t^2), \\
x_1(t; m_1) &= \frac{1}{t^2} + \gamma - \frac{1}{2}(\beta + \delta)t + O(t^2), \\
x_2(t; m_1) &= \delta t + O(t^2), \\
y_0(t; m_1) &= \frac{1}{t} + \alpha - \gamma t + \frac{1}{4}(5\beta + \delta)t^2 + O(t^3), \\
y_2(t; m_1) &= \frac{1}{t} - \alpha - \gamma t + \frac{1}{4}(5\delta + \beta)t^2 + O(t^3).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

On voit que l'involution  $\tau$  agit sur les paramètres de cette dernière comme suit

$$\tau : (t, \alpha, \beta, \gamma, \delta) \mapsto (-t, -\alpha, -\beta, \gamma, -\delta).$$

En utilisant la méthode de majoration, on montre comme dans [6] que les différentes balances sont convergentes car homogènes à poids. Les points  $m_3, m_4$  et  $m_5$  conduisent eux à des solutions de Laurent qui dépendent seulement de trois paramètres libres, ce sont donc des balances inférieures. Nous ne les utiliserons pas par la suite. On a

**Lemme 4.3.** *Le système d'équations différentielles du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  possède trois familles distinctes de solutions de Laurent homogènes à poids dépendant de quatre ( $\dim \mathcal{H} - 1$ ) paramètres.*

#### 4.2.2 Diviseurs de Painlevé

On cherche maintenant les diviseurs de Painlevé formels, c'est-à-dire les courbes algébriques définies par les balances principales  $x(t) = (x_0(t), \dots, y_2(t))$  telles que  $F_i(x(t)) = c_i$ , où les  $c_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) sont des valeurs régulières complexes des constantes de mouvement.

**Proposition 4.4.** *La solution de Laurent (4.17) du système différentiel (4.2), restreinte à la surface  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  est, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , une courbe affine lisse  $\Gamma_{\mathbf{c}}$ . Elle peut être complétée en une surface de Riemann  $\bar{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  de genre 2 en lui rajoutant 3 points à l'infini. La surface  $\bar{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  est un revêtement double de  $\mathbf{P}^1$  ramifiée en 6 points.*

*Démonstration.* En substituant la balance principale  $x(t; m_0)$  dans les équations  $F_i = c_i$ ,  $i = 1, \dots, 3$ , où  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \Omega$ , on obtient trois équations algébriques en les quatre paramètres libres  $a, c, d, e$ , définissant une courbe affine dans  $\mathbf{C}^4$ , à savoir

$$\begin{aligned} c_1 &= a^2 - 4c - 12d, \\ c_2 &= -12a^2d + 48cd + 4e, \\ c_3 &= ce. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{c} \in \Omega$ , les paramètres  $c, e$  sont non nuls car  $c_3 \neq 0$ . La première et la dernière équation étant linéaires en les paramètres  $c$  et  $d$ , on exprime ces dernières en fonction des valeurs des constantes de mouvement, donnant ainsi

$$c = \frac{c_3}{e}, \quad d = \frac{1}{12} \left( a^2 - \frac{4c_3}{e} - c_1 \right). \quad (4.20)$$

La deuxième équation se réduit alors à l'équation suivante d'une courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  dans  $\mathbf{C}^2$ , à savoir

$$\Gamma_{\mathbf{c}} : a^4e^2 - (c_1e + 8c_3)a^2e - 4e^3 + c_2e^2 + 4c_1c_3e + 16c_3^2 = 0. \quad (4.21)$$

La courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  est lisse pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ . En effet, soit

$$F(a, e) = a^4e^2 - (c_1e + 8c_3)a^2e - 4e^3 + c_2e^2 + 4c_1c_3e + 16c_3^2,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a}(a, e) &= 2ae(2ea^2 - c_1e - 8c_3), \\ \frac{\partial F}{\partial e}(a, e) &= 2a^4e - 2(c_1e + 4c_3)a^2 - 12e^2 + 2c_2e + 4c_1c_3. \end{aligned}$$

Un point  $(a, e)$  est singulier pour la courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  si

$$F(a, e) = \frac{\partial F}{\partial a}(a, e) = \frac{\partial F}{\partial e}(a, e) = 0,$$

ce qui, puisque  $e \neq 0$ , conduit soit

$$a = 0, \quad \text{ou} \quad a^2 = \frac{8c_3 + c_1e}{2e}.$$

Si  $a^2 = \frac{8c_3 + c_1e}{2e}$ , après substitution dans les équations

$$F(a, e) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial e}(a, e) = 0,$$

cela conduit respectivement à

$$\frac{1}{4}e^2(c_1^2 - 4c_2 + 16e) = 0, \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}e(c_1^2 - 4c_2 + 24e) = 0.$$

Comme  $e \neq 0$ , on a  $c_1^2 - 4c_2 = -16e = -24e$ , ce qui implique que  $e = 0$ ; contradiction !

Si  $a = 0$ , cela conduit au système suivant

$$\begin{cases} -12e^2 + 2c_2e + 4c_1c_3 = 0 \\ -4e^3 + c_2e^2 + 4c_1c_3e + 16c_3^2 = 0. \end{cases}$$

La résultante de ces deux polynômes en  $e$  composant le système est donnée par le polynôme suivant en termes de  $c_1, c_2$  et  $c_3$

$$-64c_3(6912c_3^2 + 288c_1c_2c_3 + 4c_2^3 - c_1^2c_2^2 - 64c_1^3c_3).$$

Cette expression est non nulle pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ . On en déduit que  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  est une courbe affine lisse pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ .

La courbe peut être complétée en une surface de Riemann compacte, notée  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$ , en lui ajoutant trois points à l'infini  $\infty_{\epsilon}$ ,  $\infty$  où  $\epsilon = \pm 1$ . Des voisinages de ces points sont décrits en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  par :

$$\infty_{\epsilon} : \quad a = \varsigma^{-1}, \quad e = 4c_3\varsigma^2 + 2(c_1 + \epsilon\eta)c_3\varsigma^4 + O(\varsigma^6), \quad (4.22)$$

$$\infty : \quad a = \varsigma^{-1}, \quad e = \frac{1}{4}(\varsigma^{-4} - c_1\varsigma^{-2} + c_2 - 32c_3\varsigma^2 - 16c_1c_3\varsigma^4 + O(\varsigma^6)), \quad (4.23)$$

où  $\eta$  est une racine carrée fixée de  $c_1^2 - 4c_2$ , non nulle car  $\mathbf{c} \in \Omega$ .

En réécrivant l'équation (4.21) de la courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  sous la forme

$$\left(a^2 - \frac{4c_3}{e}\right) \left(a^2 - \frac{4c_3}{e} - c_1\right) = 4e - c_2,$$

on voit que  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  est un revêtement double de la courbe affine rationnelle

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}} : u(u - c_1) - 4e + c_2 = 0.$$

L'application qui lie les deux courbes est donnée par

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma_{\mathbf{c}} &\rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{c}} \\ (a, e) &\mapsto (u, e) = \left( a^2 - \frac{4c_3}{e}, e \right). \end{aligned}$$

Une paramétrisation de  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}$  est donnée par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}} = \left\{ (u, e) = \left( -t, \frac{t^2 + c_1 t + c_2}{4} \right), t \in \mathbf{C} \right\}.$$

Si  $\psi(a, e) = (u, e)$ , on a

$$a = \pm \sqrt{-\frac{t^3 + c_1 t^2 + c_2 t - 16c_3}{t^2 + c_1 t + c_2}}, \quad e = \frac{1}{4}(t^2 + c_1 t + c_2). \quad (4.24)$$

L'application  $\psi : \Gamma_{\mathbf{c}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{c}}$  admet trois points de branchement : les points  $(u, d)$  de la courbe  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}$  pour lesquels  $a = 0$  c'est-à-dire où  $u$  est une racine du polynôme  $P(t) = t^3 + c_1 t^2 + c_2 t - 16c_3$ . Ce qui conduit à 3 points de ramification sur  $\Gamma_{\mathbf{c}}$ . Cette application est également ramifiée à l'infini. En effet, si on écrit  $t$  en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$ , on trouve

$$(a, e) = \left( \varsigma^{-1} + 8c_3 \varsigma^5 + O(\varsigma^7), \frac{\varsigma^{-4}}{4}(1 - c_1 \varsigma^2 + c_2 \varsigma^4) \right),$$

où  $t = -1/\varsigma^2$ ; ce qui montre que l'application est ramifiée en ce point. Soit  $t_{\pm} = -\frac{1}{2}(c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2})$  les deux racines de  $t^2 + c_1 t + c_2$ . En posant  $t = t_+ + \varsigma^2$  une paramétrisation locale au voisinage de  $t_+$ , on trouve

$$a = \frac{1}{\varsigma} \left( \sqrt{\frac{16c_3}{\eta}} + O(\varsigma^2) \right), \quad e = \varsigma^2 \left( \frac{1}{4}\eta + O(\varsigma^2) \right),$$

où  $\eta$  est une racine fixée de  $c_1^2 - 4c_2$ ; on trouve donc un point  $(a, e)$  sur  $\Gamma_{\mathbf{c}}$ , qui est un point de ramification. De même, si on écrit  $t = t_- + \varsigma^2$ , on a

$$a = \frac{1}{\varsigma} \left( \sqrt{\frac{16c_3}{\eta}} + O(\varsigma^2) \right), \quad e = -\varsigma^2 \left( \frac{1}{4}\eta + O(\varsigma^2) \right);$$

ce qui conduit à un autre point de ramification. On conclut que la surface de Riemann  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  est un revêtement double d'une courbe rationnelle  $\overline{\mathcal{E}}_{\mathbf{c}}$  complétion de  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}$ , et admettant 6 points de ramification donc son genre est 2 par la formule de Riemann-Hurwitz. Ces six points sont les points de Weierstrass de  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$ .  $\square$

Si on considère la balance principale  $x(t; m_2)$ , on retrouve une courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}''$  de même équation que la courbe  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  ci-dessus, car l'automorphisme  $\pi$  préserve les constantes de mouvement  $F_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Considérons enfin la solution de Laurent  $x(t; m_1)$ . Lorsqu'on la substitue dans les équations  $F_i = c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  où  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \Omega$ , les expressions résultantes sont indépendantes de  $t$ . Cela conduit à trois équations algébriques en les quatre paramètres libres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  à savoir

$$\begin{aligned} c_1 &= 2\alpha^2 - 6\gamma, \\ c_2 &= \alpha^4 + 6\alpha^2\gamma + 8\alpha(\beta - \delta) + 9\gamma^2, \\ c_3 &= \beta\delta. \end{aligned}$$

Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , les paramètres  $\beta$  et  $\delta$  sont non nuls (car  $c_3 \neq 0$ ). Si on élimine les deux paramètres  $\gamma, \delta$  alors on obtient une relation algébrique entre  $\alpha$  et  $\beta$ , qui est l'équation d'une courbe affine dans  $\mathbf{C}^2$  définie par

$$\Gamma'_c : 32\alpha\beta^2 + (16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2)\beta - 32c_3\alpha = 0. \quad (4.25)$$

Posons

$$G(\alpha, \beta) := 32\alpha\beta^2 + (16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2)\beta - 32c_3\alpha. \quad (4.26)$$

On a

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = 32\beta^2 + (64\alpha^3 - 16c_1\alpha)\beta - 32c_3, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 64\alpha\beta + 16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2. \quad (4.28)$$

Supposons

$$G(\alpha, \beta) = \frac{\partial G}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{\partial G}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 0.$$

Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont non nuls, (4.28) implique

$$\beta = -\frac{16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2}{64\alpha}.$$

Une substitution de  $\beta$  en termes de  $\alpha$  dans les équations

$$(4.26) - \alpha(4.27) = 0 \quad \text{et} \quad (4.26) + \alpha(4.27) = 0,$$

conduisent respectivement à

$$H_1(\alpha)H_2(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{4}\alpha H_3(\alpha) = 0,$$

où

$$H_1(\alpha) = 16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2,$$

$$H_2(\alpha) = 48\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 - c_1^2 + 4c_2,$$

$$H_3(\alpha) = 64\alpha^6 - 48c_1\alpha^4 + 4(3c_1^2 - 4c_2)\alpha^2 - c_1^3 + 4c_1c_2 + 256c_3.$$

Le résultant de  $H_1$  et  $H_3$  donne le carré de  $2^{28}c_3^2$  et celui de  $H_2$  et  $H_3$  le carré de

$$2^{20}(6912c_3^2 + 288c_1c_2c_3 + 4c_2^3 - c_1^2c_2^2 - 64c_1^3c_3).$$

On en déduit que pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la courbe  $\Gamma'_c$  n'a aucun point singulier, par conséquent elle est lisse. Elle est complétée en une surface de Riemann  $\overline{\Gamma}'_c$  en lui ajoutant quatre points à l'infini correspondant à  $\alpha = \infty$  et  $\alpha = 0$ , notés  $\infty_1, \dots, \infty_4$ . Un voisinage de ces points est décrit en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  par :

$$\infty_1 : \quad \beta = \varsigma, \quad \alpha = \frac{1}{32c_3}(c_1^2 - 4c_2)\varsigma + O(\varsigma^3), \quad (4.29)$$

$$\infty_2 : \quad \alpha = \varsigma^{-1}, \quad \beta = 2c_3\varsigma^3 + c_1c_3\varsigma^5 + \left(\frac{3}{8}c_3c_1^2 + \frac{1}{2}c_2c_3\right)\varsigma^7 + O(\varsigma^9), \quad (4.30)$$

$$\infty_3 : \quad \alpha = \varsigma^{-1}, \quad \beta = \frac{1}{32}(-16\varsigma^{-3} + 8c_1\varsigma^{-1} + (4c_2 - c_1^2)\varsigma - 64c_1\varsigma^3 + O(\varsigma^5)), \quad (4.31)$$

$$\infty_4 : \quad \beta = \varsigma^{-1}, \quad \alpha = -\frac{1}{32}(c_1^2 - 4c_2)\varsigma + O(\varsigma^3). \quad (4.32)$$

Par le changement de variable  $\xi = 64\alpha\beta + 16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2$ , la courbe  $\Gamma'_c$  est birationnelle à la courbe hyperelliptique

$$\mathcal{E}'_c : \xi^2 = (16\alpha^4 - 8c_1\alpha^2 + c_1^2 - 4c_2)^2 + 4096c_3\alpha^2.$$

La courbe  $\Gamma'_c$  est donc une courbe de genre 3. Par conséquent on a

**Proposition 4.5.** *La solution de Laurent (4.19) restreinte à la surface invariante  $\mathbf{F}_c$ , pour  $c \in \Omega$ , conduit à une surface de Riemann lisse hyperelliptique de genre 3. Elle admet quatre points à l'infini.*

### 4.2.3 Surface abélienne

On va procéder maintenant à la compactification de la fibre  $\mathbf{F}_c$ ,  $c \in \Omega$ , en une surface abélienne ; méthode consistant à plonger  $\mathbf{F}_c$  dans un espace projectif  $\mathbf{P}^N$ . Cherchons d'abord les fonctions polynômes indépendantes (non seulement sur  $\mathbf{C}$  mais aussi sur l'algèbre des fonctions engendrée par les constantes de mouvement) homogènes à poids qui ont un pôle simple au plus, quand on leur substitue n'importe laquelle des trois solutions de Laurent  $x(t; m_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Une base pour ses fonctions est donnée dans la Table 4.1, où les seize fonctions  $y$  figurant sont définies par

$k$	$\dim \mathcal{F}^k$	$\dim \mathcal{H}^k$	$\dim \mathcal{Z}_\rho^k$	# dep	$\zeta_k$	fonctions indep.
0	1	1	1	0	1	$z_0$
1	2	0	2	0	2	$z_1, z_2$
2	6	1	3	1	2	$z_3, z_4$
3	10	0	4	2	2	$z_5, z_6$
4	20	2	7	4	3	$z_7, z_8, z_9$
5	30	0	8	6	2	$z_{10}, z_{11}$
6	50	3	12	10	2	$z_{12}, z_{13}$
7	70	0	14	12	2	$z_{14}, z_{15}$
8	105	4	18	18	0	-

TAB. 4.1 – Les polynômes (de degré au plus 8) qui ont au pire un pôle simple quand chacune des balances principales  $y$  est substituée.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1, & z_7 &= x_1x_0, \\
z_1 &= y_0, & z_8 &= x_1x_2, \\
z_2 &= y_0 + y_2, & z_9 &= y_0y_2z_4 + x_1(y_0 - y_2)z_2, \\
z_3 &= x_1 - y_0y_2, & z_{10} &= x_1x_0(y_0 - y_2), \\
z_4 &= 4(x_0 - x_2) - (y_0 - y_2)z_2, & z_{11} &= x_1x_2(y_2 - y_0), \\
z_5 &= x_1y_0 + y_2(4x_0 - y_0^2), & z_{12} &= x_1x_0z_3, \\
z_6 &= x_1y_2 + y_0(4x_2 - y_2^2), & z_{13} &= x_1x_2z_3, \\
z_{14} &= x_1x_0((y_2 - y_0)z_3 - 4x_0y_2), \\
z_{15} &= x_1x_2((y_0 - y_2)z_3 - 4x_2y_0).
\end{aligned} \tag{4.33}$$



Notons, pour une utilisation future, que l'involution  $\pi$  sur l'hyperplan  $\mathcal{H}$  agit sur les fonctions  $z_i$  de la manière suivante

$$\pi(z_0, z_1, \dots, z_{15}) = (z_0, z_2 - z_1, z_2, z_3, -z_4, z_6, z_5, z_8, z_7, -z_9, z_{11}, z_{10}, z_{13}, z_{12}, z_{15}, z_{14}). \quad (4.34)$$

Nous verrons par la suite qu'il n'existe pas d'autres telles fonctions indépendantes que ces seize trouvées ci-haut. En utilisant les trois solutions de Laurent  $x(t; m_i)$ , on montre que les fonctions  $z_0, z_1, \dots, z_{15}$  définies en (4.33) ont effectivement au pire un pôle simple, avec les premiers termes suivants

★ pour la solution  $x(t; m_0)$

$$(z_0, z_1, \dots, z_{15}) = \left( 1, a, -\frac{2}{t}, \frac{2a}{t}, 4c - 12d - a^2, \frac{2a^2 - 8c}{t}, 12ad, ect^2, e, \frac{2a(a^2 - 4c + 12d)}{t}, \right. \\ \left. 2cet, -\frac{2e}{t}, 2eact, \frac{2ae}{t}, -4aec, \frac{2a^2e}{t} \right) + \text{termes de plus haut degré}; \quad (4.35)$$

★ pour la solution  $x(t; m_1)$

$$(z_0, z_1, \dots, z_{15}) = \left( 1, \frac{1}{t}, \frac{2}{t}, \alpha^2 + 3\gamma, -\frac{4\alpha}{t}, \frac{\alpha^2 + 3\gamma}{t}, \frac{\alpha^2 + 3\gamma}{t}, \frac{\beta}{t}, \frac{\delta}{t}, \frac{4(\alpha^3 + 3\alpha\gamma + \beta - \delta)}{t}, \right. \\ \left. \frac{2\alpha\beta}{t}, -\frac{2\alpha\delta}{t}, \frac{\beta(\alpha^2 + 3\gamma)}{t}, \frac{\delta(\alpha^2 + 3\gamma)}{t}, -\frac{2\beta(\alpha^3 + 3\alpha\gamma + 2\beta)}{t}, \right. \\ \left. \frac{2\delta(\alpha^3 + 3\alpha\gamma - 2\delta)}{t} \right) + \text{termes de plus haut degré}; \quad (4.36)$$

★ pour la solution  $x(t; m_2)$  (en utilisant l'involution  $\pi$  définie en (4.34))

$$(z_0, z_1, \dots, z_{15}) = \left( 1, -\frac{2}{t}, -\frac{2}{t}, \frac{2a}{t}, a^2 - 4c + 12d, 12ad, \frac{2a^2 - 8c}{t}, e, cet^2, -\frac{2a(a^2 - 4c + 12d)}{t}, \right. \\ \left. -\frac{2e}{t}, 2ect, \frac{2ae}{t}, 2acet, \frac{2a^2e}{t}, -4ace \right) + \text{termes de plus haut degré}. \quad (4.37)$$

Pour  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \Omega$ , on considère l'application régulière suivante,

$$\varphi_{\mathbf{c}} : \quad \mathbf{F}_{\mathbf{c}} \subset \mathcal{H} \quad \rightarrow \quad \mathbf{P}^{15} \\ (x_0, x_1, x_2, y_0, y_2) \mapsto (1 : z_1 : \dots : z_{15}), \quad (4.38)$$

où les fonctions  $z_i$  sont données en (4.33); cette application est un plongement de la variété affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  dans l'espace projectif. En effet, on vérifie que le déterminant de la matrice  $5 \times 5$

$$\frac{\partial(z_1, z_2, z_3, z_4, z_8)}{\partial(x_0, x_1, x_2, y_0, y_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -y_2 & -y_0 \\ 4 & 0 & -4 & -2y_0 & 2y_2 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal à  $-4x_1$  ; ce qui est non nul puisque pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , on a  $c_3 = x_0x_1x_2 \neq 0$ . Ce plongement conduit à trois applications allant des diviseurs de Painlevé dans  $\mathbf{P}^{15}$ . En effet, en utilisant (4.35), on voit que les coefficients en  $t^{-1}$  des séries  $z_i(t; m_0)$  définissent une application  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)} : \Gamma_{\mathbf{c}} \rightarrow \mathbf{P}^{15}$  donnée par,

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)} : (a, e) \mapsto (0 : 0 : -2 : 2a : 0 : 2a^2 - 8c : 0 : 0 : 0 : 2a(a^2 - 4c + 12d) : \\ 0 : -2e : 0 : 2ae : 0 : 2a^2e), \end{aligned} \quad (4.39)$$

laquelle est, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , un plongement de la courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}$ . De même, les séries  $z_i(t; m_1)$  et  $z_i(t; m_2)$  définissent deux plongements  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}$  des courbes affines  $\Gamma'_{\mathbf{c}}$  et  $\Gamma''_{\mathbf{c}}$  respectivement dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^{15}$ , à savoir

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(1)} : (\alpha, \beta) \mapsto (0 : 1 : 2 : 0 : -4\alpha : \alpha^2 + 3\gamma : \alpha^2 + 3\gamma : \beta : \delta : 4(\alpha^3 + 3\alpha\gamma + \beta - \delta) : 2\alpha\beta : \\ -2\alpha\delta : \beta(\alpha^2 + 3\gamma) : \delta(\alpha^2 + 3\gamma) : -2\beta(\alpha^3 + 3\alpha\gamma + 2\beta) : 2\delta(\alpha^3 + 3\alpha\gamma - 2\delta)), \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)} : (a, e) \mapsto (0 : -2 : -2 : 2a : 0 : 0 : 2a^2 - 8c : 0 : 0 : -2a(a^2 - 4c + 12d) : \\ -2e : 0 : 2ae : 0 : 2a^2e : 0). \end{aligned} \quad (4.41)$$

On rappelle que dans (4.39) et (4.41)  $c = c_3/e$  et  $d = (a^2e - 4c_3 - c_1e)/12e$ , tandis que dans (4.40)  $\gamma = (2\alpha^2 - c_1)/6$  et  $\delta = c_3/\beta$ . On voit clairement, en regardant les trois premières coordonnées, que toutes les courbes images, par les plongements  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(i)}$ , sont distinctes. Désignons par  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  les fermetures de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\Gamma_{\mathbf{c}})$  et  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\Gamma''_{\mathbf{c}})$ , et par  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  celle de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\Gamma'_{\mathbf{c}})$  relativement à la topologie complexe ; posons  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}} := \cup_{i=0}^2 \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)}$ . Utilisons un paramètre local autour des points à l'infini de  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  et de  $\Gamma'_{\mathbf{c}}$  pour déterminer les singularités de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ . Pour chaque point à l'infini, substituons la paramétrisation locale autour de ce point dans l'application  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(i)}$  correspondante et faisons tendre  $\varsigma \rightarrow 0$ .

En substituant (4.22) (respectivement (4.23)) dans (4.39), puis en considérant que les deux (respectivement les trois) premiers termes, on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty_{\epsilon}) &\sim (0 : 0 : \varsigma : 1 : 0 : \frac{1}{2}(c_1 + \epsilon\eta)\varsigma : 0 : 0 : 0 : \epsilon\eta : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 4c_3\varsigma), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty) &\sim (0 : \dots : 0 : -\varsigma^2 : 0 : \varsigma : 0 : 1 - c_1\varsigma^2), \end{aligned}$$

En faisant  $\varsigma \rightarrow 0$ , on trouve les trois points images suivants dans  $\mathbf{P}^{15}$  :

$$\begin{aligned} P_{\epsilon} &:= (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \epsilon\eta : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), \\ S' &:= (0 : \dots : 0 : 0 : 1). \end{aligned}$$

Ces points sont différents, donc le prolongement  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}$  à  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  est injective, et puisque les termes linéaires en  $\varsigma$  sont non nuls, on en déduit que l'image de cette dernière est non singulière et isomorphe à  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$ .

En appliquant l'involution  $\pi$ , qui agit sur les fonctions  $z_i$  comme indiqué en (4.34), on trouve :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty_{\epsilon}) &\sim (0 : -\varsigma : \varsigma : 1 : 0 : 0 : \frac{1}{2}(c_1 + \epsilon\eta)\varsigma : 0 : 0 : -\epsilon\eta : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 4c_3\varsigma : 0), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty) &\sim (0 : \dots : -\varsigma^2 : 0 : \varsigma : 0 : 1 - c_1\varsigma^2 : 0), \end{aligned}$$

En faisant  $\varsigma \rightarrow 0$ , on trouve les trois points images suivants dans  $\mathbf{P}^{15}$  :

$$\begin{aligned} P'_\epsilon &:= (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\epsilon\eta : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), \\ S'' &:= (0 : \cdots : 0 : 1 : 0). \end{aligned}$$

On vérifie comme ci-haut que  $\mathcal{D}_c^{(2)}$  est une courbe non singulière. On a  $P_\epsilon = P'_{-\epsilon}$ , donc les courbes  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(2)}$  s'intersectent en ces deux points. En comparant les termes en  $\varsigma$  de  $\varphi_c^{(0)}(\infty_\epsilon)$  avec celui de  $\varphi_c^{(2)}(\infty_{-\epsilon})$ , on conclut que les courbes  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(2)}$  s'intersectent transversalement en les deux points  $P_\epsilon$ .

Enfin, en substituant (4.29) à (4.32) dans (4.40), on a les premiers termes suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_c^{(1)}(\infty_1) &\sim (0 : \cdots : -2\varsigma : 8\varsigma : 0 : 0 : 0 : c_1\varsigma : 0 : 8c_3), \\ \varphi_c^{(1)}(\infty_2) &\sim (0 : \cdots : 0 : -\varsigma^2 : 0 : \varsigma : 0 : 1 - c_1\varsigma^2), \\ \varphi_c^{(1)}(\infty_3) &\sim (0 : \cdots : -\varsigma^2 : 0 : -\varsigma : 0 : 1 - c_1\varsigma^2 : 0), \\ \varphi_c^{(1)}(\infty_4) &\sim (0 : \cdots : -2\varsigma : 0 : -8\varsigma : 0 : 0 : c_1\varsigma : 0 : 8 : 0) \end{aligned}$$

On trouve les points suivant dans  $\mathbf{P}^{15}$  :

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \varphi_c^{(1)}(\infty_1) = \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \varphi_c^{(1)}(\infty_2) = (0 : \cdots : 0 : 0 : 1) = S',$$

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \varphi_c^{(1)}(\infty_3) = \lim_{\varsigma \rightarrow 0} \varphi_c^{(1)}(\infty_4) = (0 : \cdots : 0 : 1 : 0) = S''.$$

On voit que la courbe  $\mathcal{D}_c^{(1)}$  est singulière ; les points  $S'$  et  $S''$  sont deux points doubles (ordinaires) pour cette dernière c'est-à-dire que les branches de  $\mathcal{D}_c^{(1)}$  se rencontrent transversalement en ces points. Elle intersecte la courbe  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  (respectivement  $\mathcal{D}_c^{(2)}$ ) au point  $S'$  (respectivement  $S''$ ). Par comparaison des termes en  $\varsigma^2$  de  $\varphi_c^{(0)}(\infty)$  et de  $\varphi_c^{(1)}(\infty_3)$ , on en déduit que  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(1)}$  sont tangents doublement au point  $S'$ . De même,  $\mathcal{D}_c^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(2)}$  sont tangents doublement au point  $S''$ .

La correspondance précise entre les sept points à l'infini  $\infty_+$ ,  $\infty_-$ ,  $\infty$  et  $\infty_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) et les quatre points  $P_\epsilon$ ,  $S'$  et  $S''$  par les différents plongements est donnée dans la table 4.2.

	$\infty_-$	$\infty_+$	$\infty$
$\mathcal{D}_c^{(0)}$	$P_+$	$P_-$	$S'$
$\mathcal{D}_c^{(2)}$	$P_-$	$P_+$	$S''$

	$\infty_1$	$\infty_2$	$\infty_3$	$\infty_4$
$\mathcal{D}_c^{(1)}$	$S'$	$S'$	$S''$	$S''$

TAB. 4.2 – Correspondance entre les points singuliers

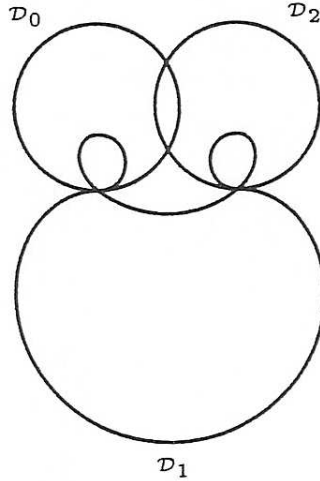


FIG. 4.1 – Courbes complétant les surfaces invariantes  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  du réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  en surfaces abéliennes où  $\mathcal{D}_i$  est la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)}$ .

En conclusion pour tout  $\mathbf{c} \in \Omega$  le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est composé de trois courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  de genres respectifs 2, 3 et 2. Les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont non singulières et s'intersectent transversalement en les deux points  $P_{\mathbf{c}}$ . La courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est singulière, admettant deux points doubles  $S'$  et  $S''$ , ses intersections avec  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  respectivement.

**Proposition 4.6.** *Le champ de vecteurs  $(\varphi_{\mathbf{c}})_*\mathcal{V}_1$  se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur  $\mathbf{P}^{15}$ .*

*Démonstration.* D'après le lemme 3.22 qui est basé sur le théorème de Hartog, il suffit de montrer que le champ de vecteurs  $(\varphi_{\mathbf{c}})_*\mathcal{V}_1$  est holomorphe sur deux cartes de  $\mathbf{P}^{15}$ . Pour cela établissons que ce champ de vecteurs peut être écrit comme un champ de vecteurs quadratique dans les cartes  $Z_0 \neq 0$  et  $Z_1 \neq 0$ . Dans la carte  $Z_0 \neq 0$ , on arrive au résultat suivant

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -\frac{1}{4}(c_1 + 6z_3 - z_4 - 2z_1(-4z_1 + 3z_2)), \\ \dot{z}_2 &= -\frac{1}{2}(c_1 + 6z_3 - z_2^2) + 4z_1(z_1 - z_2), \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{2}(z_2z_3 - z_5 - z_6), \\ \dot{z}_4 &= -z_1(c_1 + z_4) - 2z_6, \\ \dot{z}_5 &= -4(z_7 - z_8) + \frac{1}{4}(2c_2 + 3z_3(c_1 + z_4) - 2(z_2 - z_1)(3z_6 - z_5)), \\ \dot{z}_6 &= 4(z_7 - z_8) + \frac{1}{4}(2c_2 + 3z_3(c_1 + z_4) - 2z_1(3z_5 - z_6)), \\ \dot{z}_7 &= z_7(z_1 - z_2), \\ \dot{z}_8 &= -z_1z_8, \\ \dot{z}_9 &= 12z_{10} - 8z_1(z_7 - z_8) - z_3(z_5 + z_6) + z_1(z_9 - 2c_2) + \frac{1}{2}(z_4(z_5 + 3z_6) - c_1z_2z_3), \\ \dot{z}_{10} &= \frac{1}{2}(z_4z_7 + z_{10}(-z_2 + 2z_1)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_{11} &= -\frac{1}{2}(z_4 z_8 + z_{11}(-z_2 + 2z_1)), \\
\dot{z}_{12} &= -\frac{1}{2}(-z_3 z_{10} + z_7(z_5 + z_6)), \\
\dot{z}_{13} &= -\frac{1}{2}(-z_3 z_{11} + z_8(z_5 + z_6)), \\
\dot{z}_{14} &= c_3(4z_3 - z_4 + c_1) + \frac{1}{2}(z_{14}(3z_1 - 2z_2) + z_5 z_{10} + 4z_7^2), \\
\dot{z}_{15} &= c_3(4z_3 + z_4 + c_1) + \frac{1}{2}(z_{15}(z_2 - 3z_1) + z_6 z_{11} + 4z_8^2),
\end{aligned}$$

Pour montrer que  $(\varphi_{\mathbf{c}})_* \mathcal{V}_1$  se prolonge aussi en un champ de vecteurs quadratique dans la seconde carte  $Z_1 \neq 0$ , on définit  $s_i := z_i/z_1$ . Alors, en fonction des  $s_i$ , les équations différentielles prennent la forme

$$\begin{aligned}
\dot{s}_0 &= \frac{1}{4}(s_0(c_1 s_0 + 6s_3 - s_4) - 6s_2) - 2, \\
\dot{s}_1 &= 0, \\
\dot{s}_2 &= \frac{1}{2}(s_0(c_1 + 3s_6 - s_5) + s_4 - s_2 s_3) + s_3, \\
\dot{s}_3 &= \frac{1}{4}(3s_5 + s_6(3s_2 - 5) - s_3(2s_3 + 3c_1 s_0)) - s_0(5s_7 + 3s_8), \\
\dot{s}_4 &= 6s_0(s_7 - s_8) + c_2 s_0^2 + \frac{1}{4}(2(s_5 + s_6 + s_2 s_2 s_6 + c_1 s_2) - c_1 s_0(c_1 s_0 - s_4)), \\
\dot{s}_5 &= 2s_8(s_2 - 4) + 4s_7(2s_2 - 3) + \frac{1}{2}(s_3(s_6 - s_5) - s_9 - s_4 s_5 + c_2 s_0(s_2 - 2)), \\
\dot{s}_6 &= s_0(s_{10} - c_2) - 2(s_7 - s_8) - \frac{1}{2}s_6(c_1 s_0 + s_4), \\
\dot{s}_7 &= s_3 s_7 - 2c_3 s_0^2 - \frac{1}{2}(s_2 s_{10} + s_4 s_7), \\
\dot{s}_8 &= s_3 s_8 + s_{11} - 2c_3 s_0^2, \\
\dot{s}_9 &= 4s_{11} - c_1 s_6 + \frac{1}{2}(s_6(s_5 - 3s_6) - c_2 s_2 - s_3 s_9), \\
\dot{s}_{10} &= -2c_3 s_0 + \frac{1}{2}(s_3 s_{10} - s_0 s_{14}), \\
\dot{s}_{11} &= c_1 s_8 + 2c_3 s_0(4 - s_2) + \frac{1}{2}(s_0 s_{15} + 3s_6 s_8 + s_{13}), \\
\dot{s}_{12} &= s_3 s_{12} - 2s_7^2 - 2c_3, \\
\dot{s}_{13} &= -2c_3 s_2^2 - 4s_2 s_6 - 2s_8^2 + \frac{1}{2}(s_6 s_{11} - s_{15} - c_1 s_3 s_8), \\
\dot{s}_{14} &= 2s_{10}(3s_7 - s_8) + \frac{1}{2}(s_{12}(3s_6 - s_5) + c_1(s_0 s_{14} + s_3 s_{10}) - c_2 s_2 s_7), \\
\dot{s}_{15} &= 2c_3(s_3(s_2 - 4) + s_0(s_5 - s_6 + 3c_1(s_2 - 1))) + 2s_{11}(3s_7 - s_8) - s_3 s_{15} - c_1 s_5 s_8 \\
&\quad - \frac{1}{2}(s_{13}(s_5 + 5s_6) - c_2 s_2 s_8),
\end{aligned}$$

ce qui montre que le champ de vecteurs  $(\varphi_{\mathbf{c}})_* \mathcal{V}_1$  se prolonge en un champ de vecteurs linéaire  $\overline{\mathcal{V}}_1$  sur  $\mathbf{P}^{15}$ . Ainsi la condition (3) du théorème de Liouville Complexe est donc satisfaite.  $\square$

Pour terminer la preuve de la complète intégrabilité algébrique de notre système, il nous faut dès à présent montrer que le flot  $\Phi_t$  du champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  dans  $\mathbf{P}^{15}$ , issu des points

de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est envoyé dans la partie affine  $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$ . Comme il a été mentionné dans le Paragraphe 3.4.3, cela est automatiquement vérifié pour les points de  $\varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma_{\mathbf{c}})$ ,  $\varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma'_{\mathbf{c}})$  et  $\varphi_{\mathbf{c}}(\Gamma''_{\mathbf{c}})$ ; donc il suffit de le vérifier pour les quatre points singuliers  $P_{\epsilon}$ ,  $S'$  et  $S''$  dans  $\mathbf{P}^{15}$ .

Considérons les deux points  $P_{\epsilon}$  intersections de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ . On remarque de (4.22) et (4.39) que le premier terme de la série  $z_3(t; \Gamma_{\mathbf{c}})$  admet un pôle pour  $\varsigma = 0$ , il est maximal avec celui de la série  $z_9(t; \Gamma_{\mathbf{c}})$ , et ainsi la fonction  $z_3$  définit une carte en ces points. On voudrait montrer que

$$\lim_{p \rightarrow \infty_{\epsilon}} \frac{1}{z_3}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}) \neq 0.$$

En utilisant (4.17), on a

$$z_3(t; m_0) = \frac{2a}{t} + 4c + 2a(c-d)t + \frac{1}{3}(2a^2c + e + 4c(c-3d))t^2 + O(t^3)$$

Les premiers termes de l'inverse de cette série sont donnés alors par

$$\frac{1}{z_3(t; m_0)} = \frac{t}{2a} - \frac{c}{a^2}t^2 + O(t^3), \quad (4.42)$$

en substituant (4.20) dans le second terme et en réécrivant les coefficients en fonction du paramètre local  $\varsigma$  autour de  $\infty_{\epsilon}$  en utilisant (4.22), on trouve :

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \frac{1}{z_3}(t; \varsigma) = -\frac{1}{4}t^2 + O(t^3) \neq 0.$$

Ce qui montre que les courbes intégrales de  $\overline{\mathcal{V}}_1$  qui partent des points  $P_{\epsilon}$  vont immédiatement dans la partie affine.

Pour le point  $S'$ , le calcul nécessite six termes supplémentaires dans la solution de Laurent  $x(t; m_1)$  en (4.19). La seule coordonnée non nulle du point  $S'$  est celle qui correspond à la fonction  $z_{15}$ . On doit donc montrer que la série  $1/z_{15}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}})$  admet une limite non nulle en ce point. En effet, en réécrivant les coefficients de la série  $1/z_{15}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}})$  en fonction du paramètre local  $\varsigma$  autour de  $S'$  (en utilisant (4.29)), et en faisant  $\varsigma \rightarrow 0$  on trouve

$$\lim_{p \rightarrow \infty_1} \frac{1}{z_{15}}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}}) = \frac{1}{288}t^7 + O(t^8).$$

De même en considérant la série  $x(t; m_0)$  (avec six autres termes supplémentaires) et utilisant (4.23), on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{z_{15}}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}) = \frac{1}{288}t^7 + O(t^8).$$

On en déduit donc que la courbe intégrale de  $\overline{\mathcal{V}}_1$  partant du point  $S'$  va dans  $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$ .

Pour le point  $S''$ , la seule coordonnée non nulle correspond à la fonction  $z_{14}$ ; cette dernière définit donc une carte en ce point. Considérons la série  $x(t; m_1)$ . En utilisant la paramétrisation locale (4.31) autour du point  $S''$  on a

$$\lim_{p \rightarrow \infty_3} \frac{1}{z_{14}}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}}) = \frac{1}{288}t^7 + O(t^8).$$

De même, en considérant la solution de Laurent  $x(t; m_0)$  et la paramétrisation locale (4.23), on arrive aussi à

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{z_{14}}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}) = \frac{1}{288}t^7 + O(t^8),$$

comme on le voit, les différentes limites trouvées sont différentes de zéro, ce qui montre également que la courbe intégrale de  $\overline{\mathcal{V}}_1$  partant du point  $S''$  est dans la partie affine  $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$ .

Ainsi les courbes intégrales du champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  issues des points de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  sont immédiatement envoyées dans  $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$ . Il reste donc à vérifier que  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})} \setminus \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$  ne contient pas d'autres diviseurs que les composantes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ .

Pour les deux points  $P_{\epsilon}$ , intersections de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ , en réécrivant les coefficients du second membre de (4.42) en fonction du paramètre local  $\varsigma$  dans un voisinage des points  $\infty_{\epsilon} \in \overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  on trouve que

$$\frac{1}{z_3(t; \Gamma_{\mathbf{c}})} = \frac{1}{4}(2\varsigma t - t^2) + O(t^3, \varsigma t^2),$$

il s'en suit que la multiplicité de  $1/z_3$  en chacun des ces points est égale à 2, ce qui coïncide avec la somme des ordres de zéro de  $1/z_3$  sur chacun des deux diviseurs; il n'y a donc pas d'autres diviseurs passant par les points  $P_{\epsilon}$ . Notons que le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  est transversal à chacun des diviseurs en  $P_{\epsilon}$ .

Pour les deux autres points  $S'$  et  $S''$  du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ , obtenus des points à l'infini  $\infty_1$  et  $\infty_3$ , vérifions que le degré de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ , qui est 3, est bien égal au degré de  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})} \setminus \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$  en ces points. Comme le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  est seulement tangent à l'une des branches (transversal à l'autre) de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  passant par ces deux points, nous ferons le développement le long de la branche non-tangente. Ainsi, puisque la fonction  $z_{15}$  définit une carte au point  $S'$ , il nous suffit de substituer (4.29) dans sa série inverse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_{15}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}})} &= \frac{t}{2(\alpha^3 + 3\alpha\gamma - 2\delta)\delta} + O(t^2) \\ &= \frac{\beta^2}{c_3(4\alpha^3 - c_1\alpha\beta - 4c_3)} t + O(t^2), \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$\frac{1}{z_{15}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}})} = -\frac{1}{4c_3^2}\varsigma^2 t + O(t^3)$$

montrant ainsi qu'il n'y a pas d'autres diviseurs passant par le point  $S'$ .

Pour le point  $S''$ , on le fait en calculant les premiers termes de la série  $1/z_{14}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}})$  et en y substituant (4.32), on a

$$\frac{1}{z_{14}(t; \Gamma'_{\mathbf{c}})} = -\frac{1}{4}\varsigma^2 t + O(t^3),$$

ce qui montre de même que par  $S''$  ne passe aucun autre diviseur que ceux déjà trouvés.

Les conditions du théorème de Liouville Complexe étant satisfaites, il s'ensuit que, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la variété projective  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})} = \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}}) \cup \mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est une surface abélienne et la restriction des champs de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  et  $\overline{\mathcal{V}}_2$  à ces surfaces sont linéaires. En fait,  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})}$  est une surface de Jacobi puisqu'elle contient une courbe lisse de genre 2; c'est donc la jacobienne de cette courbe. Nous résumons cela dans le

**Théorème 4.7.** *Soit  $(\mathcal{H}, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  le système intégrable décrivant le réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  où  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  et  $\{\cdot, \cdot\}$  sont données respectivement par (4.4), (4.6) et (4.5), avec les champs de vecteurs commutants (4.2) et (4.7).*

(i)  $(\mathcal{H}, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est un système algébriquement complètement intégrable homogène à poids;

(ii) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$  la fibre  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  de son application moment se complète en une surface de Jacobi  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2 = \text{Jac}(\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}})$ , par l'adjonction d'un diviseur singulier  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  composé des trois composantes irréductibles :  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont non singulières de genre 2, isomorphes à  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  singulière de genre 3. Elles s'intersectent selon le dessin en FIG. 4.1

**Proposition 4.8.** Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  admet dix demi-périodes à l'infini : les points de Weierstrass sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  (en particulier les quatre points singuliers du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ ) et six demi-périodes sur la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ .

*Démonstration.* Rappelons que  $\tau$  change le signe des champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$ , donc c'est l'involution  $(-1)$  sur la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ . Les demi-périodes sur  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  sont données par les points fixes de cette dernière. Elle agit sur les paramètres  $a, b$  et  $t$  de la balance principale  $x(t; m_0)$  (resp.  $x(t; m_2)$ ) comme suit

$$\tau(t, a, e) = (-t, -a, e),$$

donc les demi-périodes de  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  qui se trouvent sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont données par les 10 points correspondant à  $a = 0$  et  $a = \infty$ , 6 points sur chaque courbe avec 2 points en commun : les points  $P_+$  et  $P_-$ . En divisant les vecteurs (4.35) et (4.37) par  $z_2$ , et en prenant la limite  $t, a \rightarrow 0$ , les coordonnées des autres points sont données par

$$(0, 0, -e, 0, 0, 4c_3, 0, 0, 0, 0, 0, e^2, 0, 0, 0, 0) \in \mathbf{P}^{15} \quad \text{pour } \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)},$$

$$(0, e, e, 0, 0, 0, 4c_3, 0, 0, 0, e^2, 0, 0, 0, 0, 0) \in \mathbf{P}^{15} \quad \text{pour } \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)},$$

avec

$$e = \frac{1}{4}(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2) \quad \text{et} \quad P(\lambda) = \lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda - 16c_3 = 0.$$

L'involution  $\tau$  fixant 16 points sur la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ , il en reste 6 autres. Substituons  $y_0 = y_1 = y_2 = 0$  dans les equations

$$F_i = c_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

où les  $F_i$  sont les constantes de mouvement, on obtient

$$\begin{cases} x_0x_1x_2 = c_3, \\ -4(x_0 + x_2) - 2x_1 = c_1, \\ 16x_0x_2 + x_1(4x_0 + x_1 + 4x_2) = c_2. \end{cases} \quad (4.43)$$

Résolvons la deuxième équation en  $x_1$  et substituons dans les autres équations. Cela nous conduit au système

$$\begin{cases} (x_0 - x_2)^2 = \frac{c_1^2 - 4c_2}{16}, \\ x_0x_2(4x_0 + 4x_2 + c_1) + c_3 = 0. \end{cases} \quad (4.44)$$

Posons  $\Delta^2 = c_1^2 - 4c_2$ ; dans ce cas, on a  $x_2 = x_0 \pm \frac{\Delta}{4}$ . Alors, le système (4.44) conduit aux deux équations

$$x_0(4x_0 \pm \Delta)(8x_0 \pm \Delta + c_1) + 8c_3 = 0. \quad (4.45)$$



Dans les deux cas, le discriminant du membre de gauche est égal à

$$6912c_3^2 + 288c_1c_2c_3 + 4c_2^3 - c_1^2c_2^2 - 64c_1^3c_3 = 0,$$

on en déduit que pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , il n'y a pas de racines doubles. S'il existe, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , une racine commune  $x_0$  à chacune des deux équations (4.45), les valeurs correspondantes de  $x_2$  seraient différentes puisque  $c_1^2 - 4c_2 \neq 0$ . Par conséquent nous avons vérifié par un calcul direct que pour tout  $\mathbf{c} \in \Omega$ , l'involution  $\tau$  admet précisément 6 points fixes sur la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  de la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ .  $\square$

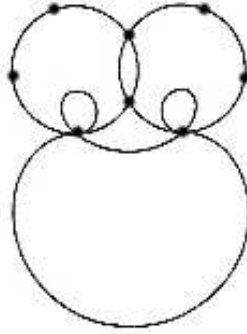


FIG. 4.2 – • demi-périodes à l'infini sur  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}$ .

#### 4.2.4 Différentielles holomorphes

En utilisant la méthode expliquée au Paragraphe 3.4.4, calculons les formes différentielles holomorphes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur le diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  qui proviennent des différentielles  $dt_1$  et  $dt_2$  sur la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ . Soient les fonctions  $y_0 := z_2$  et  $y := z_4$ ; restreintes à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ , les premiers coefficients de leurs séries de Laurent sont donnés par

$$\begin{aligned} y_0^{(0)} &= 2, & y_0^{(1)} &= 0, \\ y^{(0)} &= -4\alpha, & y^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

et, en utilisant (4.7) et (4.19), on a

$$\mathcal{V}_2 \left[ \frac{1}{z_2} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}} = -\frac{\alpha^2 + 3\gamma}{2}, \quad \mathcal{V}_2 \left[ \frac{z_4}{z_2} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}} = 4\alpha(\beta + \delta) = 4\alpha\left(\beta + \frac{c_3}{\beta}\right).$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \delta' &= \frac{1}{(y_0^{(0)})^2} \begin{vmatrix} y_0^{(0)} & \mathcal{V}_2 [1/z_2]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}} \\ y_0^{(0)}y^{(1)} - y^{(0)}y_0^{(1)} & \mathcal{V}_2 [z_4/z_2]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{\alpha^2 + 3\gamma}{2} \\ 0 & 4\alpha\left(\beta + \frac{c_3}{\beta}\right) \end{vmatrix} \\ &= 2\alpha\left(\beta + \frac{c_3}{\beta}\right). \end{aligned}$$

Les différentielles holomorphes  $dt_1$  et  $dt_2$ , restreintes à  $\mathcal{D}_c^{(1)}$ , sont donc données par

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{1}{\delta' y_0^{(0)}} d\left(\frac{y^{(0)}}{y_0^{(0)}}\right) = -\frac{d\alpha}{\delta'} = -\frac{\beta d\alpha}{2\alpha(\beta^2 + c_3)}, \\ \omega_2 &= -\frac{1}{\delta'} \mathcal{V}_2 \left[ \frac{1}{y_0} \right]_{|\mathcal{D}_c^{(1)}} d\left(\frac{y^{(0)}}{y_0^{(0)}}\right) = -\frac{\beta(4\alpha^2 + c_1)}{4\alpha(\beta^2 + c_3)} d\alpha.\end{aligned}\quad (4.46)$$

Pour le calcul des formes différentielles sur les diviseurs  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(2)}$ , considérons les fonctions  $y_0 = z_2$  et  $y = z_3$ ; ces fonctions restreintes à  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  conduisent à :

$$\begin{aligned}y_0^{(0)} &= -2, & y_0^{(1)} &= a, \\ y^{(0)} &= 2a, & y^{(1)} &= 4c,\end{aligned}$$

et, en utilisant (4.7) et (4.17), on a

$$\mathcal{V}_2 \left[ \frac{1}{z_2} \right]_{|\mathcal{D}_c^{(0)}} = -\frac{a^2 - 4c}{2}, \quad \mathcal{V}_2 \left[ \frac{z_3}{z_2} \right]_{|\mathcal{D}_c^{(0)}} = -\frac{a^4}{2} - 2(e - 2a^2c - 12cd).$$

On trouve que

$$\begin{aligned}\delta' &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & \frac{a^2 - 4c}{2} \\ 2a^2 + 8c & \frac{a^4}{2} + 2(e - 2a^2c - 12cd) \end{vmatrix} \\ &= e - c(a^2 - 4c + 12d).\end{aligned}$$

Les différentielles holomorphes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur le diviseur  $\mathcal{D}_c^{(0)}$ , sont donc données par

$$\omega_1 = \frac{2da}{\delta'}, \quad \omega_2 = -\frac{a^2 + 3c}{2\delta'} da$$

.

**Proposition 4.9.** *Le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est :*

- (i) *tangent (doublement) à l'une des branches de  $\mathcal{D}_c^{(1)}$  passant par  $S'$  (respectivement  $S''$ ) et transversal à l'autre ;*
- (ii) *transversal à  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(2)}$  en les deux points  $P_\epsilon$  ;*
- (iii) *tangent (doublement) à  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  (respectivement à  $\mathcal{D}_c^{(2)}$ ) au point  $S'$  (respectivement  $S''$ ).*

*Démonstration.* (i) : Si on écrit  $\omega_1$  (4.46) en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  sur un voisinage du point  $\infty_2$  en utilisant (4.30) alors on trouve

$$\omega_1 = (-\varsigma^2 + O(\varsigma^3))d\varsigma,$$

ce qui montre que  $\omega_1$  admet a zéro double au point  $S'$ . De même, en écrivant  $\omega_1$  en fonction du paramètre local  $\varsigma$  sur un voisinage du point  $\infty_1$  en utilisant (4.29) on a  $\omega_1 = (-1/(2c_3))d\varsigma$  non nul. On en déduit que le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est doublement tangent à l'une des branches de  $\mathcal{D}_c^{(1)}$  et transversal à l'autre qui se croisent au point  $S'$ . Il en est de même au point  $S''$  du fait de l'involution  $\pi$ .

(ii) et (iii) : Si on réécrit la différentielle  $\omega_1$ , restreinte à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ , en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  dans un voisinage des deux points  $\infty_{\epsilon}$  en utilisant (4.20) et (4.22) on trouve alors

$$\omega_1 = -\frac{2\epsilon}{\eta}d\varsigma,$$

où  $\epsilon = \pm 1$  et  $\eta$  est une racine fixée de  $c_1^2 - 4c_2$ . Ce qui montre que le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  est transversal à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  en les deux points  $P_{\epsilon}$ . On en déduit, grâce à l'involution  $\pi$ , que le champ  $\overline{\mathcal{V}}_1$  est également transversal à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  en ces points. De même dans un voisinage du point  $\infty$  en utilisant (4.23) on obtient

$$\omega_1 = -4\varsigma^2 d\varsigma,$$

par conséquent le champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  est tangent (doublement) à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  au point  $S'$  ; du fait de l'involution  $\pi$ , il est aussi tangent (doublement) au diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  au point  $S''$ .  $\square$

### 4.3 Morphisme vers le système de Mumford, Equation de Lax, Linéarisation

Dans cette section, nous montrons, grâce à une méthode due à Vanhaecke [42], le lien entre le réseau de Toda et le système de Mumford. Nous explicitons un morphisme de systèmes intégrables entre les deux systèmes. Nous terminons la section en donnant une nouvelle équation de Lax et une linéarisation explicite de notre système intégrable.

#### 4.3.1 Morphisme vers le système de Mumford, Equation de Lax

L'involution  $(-1)$  sur une surface abélienne conduit à une surface singulière, sa surface de Kummer. Dans ce paragraphe, nous donnons une équation de la surface de Kummer associée à la surface de Jacobi  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2 = \text{Jac}(\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}})$  où  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$  est la surface de Riemann hyperelliptique de genre 2 définie plus haut. La surface  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  est une surface abélienne principalement polarisée et les sections du fibré en droites  $[2\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}]$  plongent sa surface de Kummer dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^3$ .

Considérons les fonctions qui ont au pire un pôle double sur l'une des composantes du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ , à savoir  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ , et pas de pôle sur les autres. Il s'agit de rechercher une base de fonctions sur  $\mathcal{H}$  qui ont au plus un pôle double en  $t$  lorsqu'on leur substitue la balance principale  $x(t; m_0)$ , et aucun pôle quand les deux autres balances principales leur sont substituées. En utilisant (4.17), (4.18) et (4.19), on trouve qu'une base de telles fonctions polynômes est composée par les quatre fonctions  $\theta_i$  données par la dernière colonne de la table ci-dessous

$$\begin{aligned} \theta_1 &:= x_2, \\ \theta_2 &:= x_2(x_3^2 - x_1 - 4x_0), \\ \theta_3 &:= x_2^2 x_1. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Les quatre fonctions  $\theta_i$  sont les sections du fibré en droites  $[2\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}]$ . Considérons l'application de Kodaira, correspondant à ces fonctions,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{c}} : \quad & \text{Jac}(\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}) && \rightarrow && \mathbf{P}^3 \\ & m = (x_0, x_1, x_2, y_0, y_2) && \mapsto && (\theta_0(m) : \theta_1(m) : \theta_2(m) : \theta_3(m)). \end{aligned}$$

$k$	$\dim \mathcal{F}^k$	$\dim \mathcal{H}^k$	$\dim \mathcal{Z}_\rho^k$	$\# \text{ dep}$	$\zeta_k$	fonctions indep.
0	1	1	1	0	1	$\theta_0 = 1$
1	2	0	0	0	0	-
2	6	1	2	1	1	$\theta_1$
3	10	0	0	0	0	-
4	20	2	4	3	1	$\theta_2$
5	30	0	0	0	0	-
6	50	3	7	6	1	$\theta_3$
7	70	0	0	0	0	-
8	105	4	10	10	0	-

Cette dernière applique la surface  $\text{Jac}(\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}})$  sur sa surface de Kummer, qui est une quartique singulière dans  $\mathbf{P}^3$ . L'application  $\psi_{\mathbf{c}}$  induit sur  $\Gamma_{\mathbf{c}}$  l'application  $\psi_{\mathbf{c}}^{(0)} : (a, e) \mapsto (0 : 1 : (a^2e - 4c_3)/e : e)$  en prenant les coefficients de  $t^{-2}$  des séries de Laurent  $\theta_i(t; m_0)$  obtenues par substitution de la balance  $x(t; m_0)$  dans les fonctions  $\theta_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . Soit  $\infty$  (4.23) le point de Weierstrass sur  $\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}}$ , on a

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty) &= \lim_{\varsigma \rightarrow 0} (0 : 4\varsigma^4 : 4\varsigma^2 + O(\varsigma^6) : 1 - c_1\varsigma^2 + O(\varsigma^4)) \\ &= (0 : 0 : 0 : 1), \end{aligned}$$

ainsi la base  $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$  est convenablement choisie (voir [42, Th.9]). Déterminons à présent une équation de la quartique. Rappelons que les constantes de mouvement sont données par

$$\begin{aligned} F_3 &= x_0x_1x_2 = c_3, \\ F_1 &= y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 2x_1 - 4x_2 = c_1, \\ F_2 &= (y_0^2 - 4x_0)(y_2^2 - 4x_2) - x_1(2y_0y_2 - 4x_0 - x_1 - 4x_2) = c_2. \end{aligned} \quad (4.48)$$

On trouve l'équation de la surface quartique en éliminant les variables  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_2$  des équations (4.47) et (4.48). On vérifie aisément qu'on a

$$x_0 = \frac{c_3\theta_1}{\theta_3}, \quad x_1 = \frac{\theta_3}{\theta_1^2}, \quad x_2 = \theta_1. \quad (4.49)$$

Ensuite de la deuxième équation de (4.47) puis de la deuxième équation de (4.48) on tire respectivement

$$y_0^2 = \frac{1}{\theta_1^2\theta_3}(\theta_1\theta_2\theta_3 + \theta_3^2 + 4c_3\theta_1^3) \quad \text{et} \quad y_2^2 = \frac{1}{\theta_1^2}(\theta_3 + c_1\theta_1^2 - \theta_1\theta_2 + \theta_1^3). \quad (4.50)$$

Réécrivons la dernière équation de (4.48) sous la forme

$$2x_1y_0y_2 = ((y_0^2 - 4x_0)(y_2^2 - 4x_2) - c_2) + x_1(4x_0 + x_1 + 4x_2).$$

En élevant au carré chaque membre, et en y substituant (4.49) et (4.50), on obtient l'équation de la surface de Kummer de  $\text{Jac}(\overline{\Gamma}_{\mathbf{c}})$ ; celle-ci peut se mettre sous la forme

$$((4\theta_1 + c_1)^2 - 4(4\theta_2 + c_2))\theta_3^2 + 2f_3(\theta_1, \theta_2)\theta_3 + f_4(\theta_1, \theta_2) = 0, \quad (4.51)$$

où  $f_3$  (respectivement  $f_4$ ) est un pôleynome de degré trois (respectivement quatre) en  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , donné ci-dessous

$$\begin{aligned} f_3(\theta_1, \theta_2) &= (4\theta_1 + c_1)(\theta_2(c_1\theta_1 - \theta_2) - \theta_1(c_2\theta_1 + 4c_3)) + 8c_3\theta_2, \\ f_4(\theta_1, \theta_2) &= (c_2\theta_1^2 + \theta_2^2 - 4c_3\theta_1 - c_1\theta_1\theta_2)^2. \end{aligned}$$

Considérons le coefficient de  $\theta_3^2$  dans l'équation (4.51) avec les variables initiales  $x_i$  et  $y_i$ , soit

$$\Delta = (4x_2 + c_2)^2 - 4(4x_2(y_0^2 - 4x_0 - x_1y_0) + c_3).$$

Soit  $u(\lambda)$  un pôleynôme unitaire en  $\lambda$  dont le discriminant est  $\Delta$ , on a

$$\begin{aligned} u(\lambda) &= \lambda^2 + (4x_2 + c_1)\lambda + 4x_2(y_0^2 - 4x_0 - x_1) + c_2 \\ &= \lambda^2 + (y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 2x_1)\lambda + (x_1 - y_0y_2)^2 - 4x_0(y_2^2 - x_1). \end{aligned}$$

Soient  $s_1$  et  $s_2$  les racines du pôleynome  $u(\lambda)$ , on a

$$s_1 + s_2 = -4x_2 - c_1, \quad s_1s_2 = 4x_2(y_0^2 - 4x_0 - x_1) + c_2. \quad (4.52)$$

ce qui implique, par dérivation par rapport au champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$

$$\dot{s}_1 + \dot{s}_2 = -4x_2y_2, \quad s_2\dot{s}_1 + s_1\dot{s}_2 = 4x_2(y_2(y_0^2 - 4x_0) - x_1y_0). \quad (4.53)$$

Soit le pôleynôme  $v(\lambda)$  défini (à une constante multiplicative près) comme étant la dérivée du pôleynôme  $u(\lambda)$  par rapport au champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  c'est-à-dire

$$v(\lambda) = i[4x_2y_2\lambda + 4x_2(y_2(y_0^2 - 4x_0) - x_1y_0)],$$

On vérifie, par un calcul direct, que l'expression  $f(\lambda) - v^2(\lambda)$  est divisible par  $u(\lambda)$  où

$$f(\lambda) = (\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda - 16c_3)(\lambda^2 + c_1\lambda + c_2).$$

Notons que la courbe affine  $y^2 = f(\lambda)$  est (birationnelle à) la courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}$ , en ajoutant les trois points de Weierstrass à l'infini (voir (4.24)).

On définit un morphisme  $\phi : \mathcal{H} \subset \mathbf{C}^6 \rightarrow \mathbf{C}^7$ , du réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  dans le système de Mumford impair de genre 2, où  $\mathbf{C}^7$  est l'espace de phase du système de Mumford. L'homomorphisme  $\phi$  est donné par

$$(x_0, x_1, x_2, y_0, y_2) \mapsto \begin{cases} u(\lambda) = \lambda^2 + u_1\lambda + u_0, \\ v(\lambda) = v_1\lambda + v_0, \\ w(\lambda) = \lambda^3 + w_2\lambda^2 + w_1\lambda + w_0, \end{cases} \quad (4.54)$$

avec

$$\begin{aligned} u_1 &= y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 2x_1, & v_1 &= 4ix_2y_2, \\ u_0 &= (x_1 - y_0y_2)^2 - 4x_0(y_2^2 - x_1), & v_0 &= 4ix_2(y_2(y_0^2 - 4x_0) - x_1y_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_2 &= y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 8x_2 - 2x_1 = u_1 - 8x_2, \\ w_1 &= (x_1 - y_0y_2)^2 + 8(4x_0 + x_1 + 2x_2 - y_0^2)x_2 - 4x_0(y_2^2 - x_1), \\ w_0 &= -16x_2(x_0x_1 - x_2(y_0^2 - 4x_0)). \end{aligned}$$

Le polynôme  $w(\lambda)$  est le polynôme de degré trois défini par  $w(\lambda) = (f(\lambda) - v^2(\lambda))/u(\lambda)$ . L'application  $\phi$  est régulière ; de plus elle est birationnelle sur son image, en effet on vérifie aisément qu'on a

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{8}(u_1 - w_2), \\ y_2 &= \frac{-2iv_1}{u_1 - w_2}, \\ x_1 &= -\frac{(3u_1 + w_2)(u_1 - w_2)^2 - 4(u_0 - w_1)(u_1 - w_2) + 16v_1^2}{4(u_1 - w_2)^2}, \\ y_0 &= -4i\frac{(u_1 - w_2)[(v_1(u_1^2 - w_2^2 + 4w_1 - 4u_0) + 2v_0(u_1 - w_2))] + 8v_1^2}{(u_1 - w_2)[(3u_1 + w_2)(u_1 - w_2) - 4(u_0 - w_1) - u_1 - w_2] + 16v_1^2}, \\ x_0 &= \frac{1}{4}y_0^2 + \frac{(u_1 - w_2)(u_1^2 - w_2^2 + 4w_1 - 4u_0) + 8v_1^2}{8(u_1 - w_2)^2} \end{aligned}$$

Il est clair que l'application  $\phi$  n'est pas surjective ; elle est non plus injective, en effet l'ensemble des points

$$\{(x_0, x_1, x_2, y_0, y_2) \in \mathcal{H} \mid x_2 = y_2 = 0, 4x_0x_1 + y_0^2 = 0, 2x_0 + x_1 + 2x_0x_1 = 0\}$$

s'envoie par  $\phi$  sur la même image. On vérifie aisément qu'on a

$$\begin{aligned} \phi^*(H_0) &= \phi^*(u_0w_0 + v_0^2) = -16F_2F_3, \\ \phi^*(H_1) &= \phi^*(u_1w_0 + u_0w_1 + 2v_1v_0) = -16F_1F_3 + F_2^2, \\ \phi^*(H_2) &= \phi^*(u_0w_2 + u_1w_1 + w_0 + v_1^2) = 2F_1F_2 - 16F_3, \\ \phi^*(H_3) &= \phi^*(u_0 + w_1 + u_1w_2) = 2F_2 + F_1^2, \\ \phi^*(H_4) &= \phi^*(u_1 + w_2) = 2F_1, \end{aligned}$$

où  $H_0, \dots, H_4$  sont les constantes de mouvement du système de Mumford. On se propose de déterminer une structure de Poisson pour le système de Mumford considéré ici. Par un calcul direct des crochets de Poisson des variables de phase  $u_1, u_0, v_1, v_0, w_2, w_1, w_0$  du système de Mumford, on arrive à une structure de Poisson sur l'image de  $\phi$  dans  $\mathbf{C}^7$  donnée par

$$\begin{aligned} \{u_1, v_1\} &= \frac{i}{8}((u_1 + w_2)^2 - 4(u_1^2 - u_0 + w_1)), & \{u_1, w_0\} &= i(u_1 - w_2)v_0, \\ \{u_1, v_0\} &= -\frac{i}{16}[(u_1 - w_2)(u_1^2 - w_2^2 + 4u_0 + 4w_1) + 8(v_1^2 + w_0)], & \{u_0, v_1\} &= \{u_1, v_0\}, \\ \{u_1, w_2\} &= -2iv_1, & \{u_0, v_0\} &= \star, \\ \{u_1, w_1\} &= i(u_1 - w_2)v_1 - 2iv_0, & \{u_0, w_2\} &= -2iv_0, \\ \{u_0, w_1\} &= -i(u_1 + w_2)v_0 - 2iu_0v_1, \\ \{u_0, w_0\} &= \frac{i}{8}[(u_1 - w_2)^2(v_1(u_1 + w_2) + 2v_0) + 4(u_0 - w_1)(v_1(w_2 - u_1) + 2v_0) \\ &\quad + 8v_1(v_1^2 + w_0)], \\ \{v_1, w_2\} &= \frac{i}{8}((3u_1 - w_2)^2 - 4(u_1^2 + u_0 - w_1)), \\ \{v_1, w_1\} &= -\frac{i}{16}[(u_1 - w_2)(3u_1^2 + w_2^2 + 4u_1w_2 + 4w_1 - 12u_0) + 8(v_1^2 - w_0)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{v_1, w_0\} &= \frac{i}{16}(u_1 - w_2) [(u_1 + w_2)(u_1^2 - w_2^2 - 4(u_0 - w_1)) + 8v_1^2], \\
\{v_0, w_2\} &= -\frac{i}{16}[(u_1 - w_2)(u_1^2 - w_2^2 + 4w_1 - 12u_0) + 8(v_1^2 - w_0)], \\
\{v_0, w_1\} &= *, \\
\{v_0, w_0\} &= \frac{i}{16}((u_1 - w_2)^2(u_1 + w_2)(u_0 - w_1) - 2w_0(u_1^2 + w_2^2) - 4(u_1 - w_2)(u_0 - w_1)^2 \\
&\quad + 8v_1^2(u_0 - w_1) + 4u_1w_0w_2), \\
\{w_2, w_1\} &= i(u_1 - w_2)v_1, \\
\{w_2, w_0\} &= i(u_1 - w_2)v_0, \\
\{w_1, w_0\} &= -\frac{i}{8}[(u_1 - w_2)^2(v_1(u_1 + w_2) + 2v_0) - 4(u_0 - w_1)(v_1(u_1 - w_2) + 2v_0) \\
&\quad - 8v_1(w_0 - v_1^2)].
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\star &= \frac{i}{32}[(u_1 - w_2) ((5w_2^2 + 4w_2u_1 + 3u_1^2)(u_1 - w_2) + 4(6w_2w_1 - 5u_0u_1 - w_2u_0)) \\
&\quad + 16(v_1^2u_1 + 2v_1^2w_2 - w_1u_0 + w_1^2 - 8v_1v_0 - 3w_0u_1 + 2w_0w_2)], \\
* &= \frac{i}{32}[(u_1 - w_2) ((5u_1^2 + 4w_2u_1 + 3w_2^2)(u_1 - w_2) + 8(u_1w_1 - 4u_0u_1 + 2w_2w_1 + 4w_2u_0)) \\
&\quad + 16(2v_1^2u_1 + v_1^2w_2 - 3w_1u_0 + w_1^2 - 8v_1v_0 - w_0u_1 + 2w_0w_2 + 2u_0^2)].
\end{aligned}$$

L'identité de Jacobi n'est pas vérifiée pour tous les triplets de variables  $u_i, v_i$  et  $w_i$  sur  $\mathbf{C}^7$ . Considérons les polynômes homogènes à poids, en les variables  $u_i, v_i$  et  $w_i$ , qui s'annulent lorsqu'on substitue ces variables par leur expression en termes des variables  $x_i$  et  $y_i$ . On obtient deux polynômes homogènes  $P_1$  et  $P_2$  de poids respectifs 8 et 10. Nous donnons ici uniquement l'expression de  $P_1$  (nécessaire pour un calcul par la suite).

$$\begin{aligned}
P_1 &= (u_1 - w_2)((5u_1^2 + 6u_1w_2 + 5w_2^2)(u_1 - w_2) - 8u_0(3u_1 + w_2) + 8w_1(u_1 + 3w_2)) \\
&\quad + 32(w_0w_2 - w_0u_1 - w_1u_0 - 4v_1v_0 + v_1^2u_1 + v_1^2w_2) + 16(w_1^2 + u_0^2) = 0.
\end{aligned}$$

Les crochets  $\{u_0, v_0\}$  et  $\{v_0, w_1\}$  sont des polynômes homogènes à poids de poids 8. Posons

$$\{u_0, v_0\} = \star + \alpha P_1, \quad \{v_0, w_1\} = * + \beta P_1.$$

On vérifie alors, qu'avec ces nouvelles expressions de ces deux crochets, que l'identité de Jacobi est satisfaite pour tout triplet de variables  $u_1, u_0, v_1, v_0, w_2, w_1, w_0$  si

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{32}i,$$

conduisant à

$$\begin{aligned}
\{u_0, v_0\} &= -\frac{i}{16}[(u_1 - w_2)((u_1 + w_2)(u_1(u_1 - w_2) - 2u_0) + 4u_1w_1) \\
&\quad + 8(u_0(u_0 - w_1) + u_1(w_0 + v_1^2))], \\
\{v_0, w_1\} &= -\frac{i}{16}[(u_1 - w_2)(w_2(u_1^2 - w_2^2) - 2u_0(3w_2 - u_1) + 4w_1w_2) \\
&\quad + 8(w_2v_1^2 - w_0u_1 - u_0(u_0 + w_1))].
\end{aligned}$$

On obtient ainsi une nouvelle structure de Poisson sur tout  $\mathbf{C}^7$  pour le système de Mumford, donnée par la matrice antisymétrique  $X = M - M^\top$  où

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \{u_1, v_1\} & \{u_1, v_0\} & \{u_1, w_2\} & \{u_1, w_1\} & \{u_1, w_0\} \\ 0 & 0 & \{u_0, v_1\} & \{u_0, v_0\} & \{u_0, w_2\} & \{u_0, w_1\} & \{u_0, w_0\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{v_1, w_2\} & \{v_1, w_1\} & \{v_1, w_0\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \{v_0, w_2\} & \{v_0, w_1\} & \{v_0, w_0\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{w_2, w_1\} & \{w_2, w_0\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \{w_1, w_0\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les fonctions  $H_0, \dots, H_4$  sont en involution pour cette structure et que les fonctions  $H_4$  et  $H_5 = 4H_3 - H_4^2$  engendrent les deux champs vecteurs commutants du système de Mumford impair. Il est facile de voir, du fait du poids des crochets de Poisson, que cette nouvelle structure n'est pas une combinaison linéaire des trois structures de Poisson linéaires connues, définies au chapitre 3. De plus elle n'est pas compatible avec ces dernières ni avec la structure quadratique (3.10). Une nouvelle équation de Lax avec paramètre dans  $sl_2$  est donnée dans le

**Théorème 4.10.** *Une représentation de Lax du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{X}_{F_1}$  (4.2) est donnée par*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v(\lambda) & u(\lambda) \\ w(\lambda) & -v(\lambda) \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{-1}}{2} \left[ \begin{pmatrix} v(\lambda) & u(\lambda) \\ w(\lambda) & -v(\lambda) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(\lambda) & 0 \end{pmatrix} \right]$$

où  $u(\lambda)$ ,  $v(\lambda)$  et  $w(\lambda)$  sont donnés par (4.54), et  $b(\lambda) = \lambda - 8x_2$  est la partie polynômiale de la fonction rationnelle  $w(\lambda)/u(\lambda)$ .

### 4.3.2 Linéarisation et intégration

Nous procédons dans ce paragraphe à la linéarisation notre système intégrable, toujours par la méthode de Vanhaecke. Cette méthode consiste à utiliser  $s_1$  et  $s_2$  définis en (4.52) comme variables linéarisables. Comme d'une part on a

$$f(x) - v^2(x) = u(x)w(x),$$

et d'autre part les variables  $s_1$  et  $s_2$  sont les racines du polynôme  $u(x)$ , on a en utilisant (4.52)

$$\begin{aligned} \sqrt{f(s_k)} &= v(s_k) \\ &= 4ix_2y_2s_k + 4ix_2(y_2(y_0^2 - 4x_0) - x_1y_0) & k = 1, 2 \\ &= -i(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)s_k + i(s_2\dot{s}_1 + s_1\dot{s}_2). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sqrt{f(s_1)} = -i(s_1 - s_2)\dot{s}_1, \quad \text{et} \quad \sqrt{f(s_2)} = i(s_1 - s_2)\dot{s}_2,$$

et par suite, en fonction des variables  $s_1$  et  $s_2$  les équations différentielles (4.2) du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  peuvent s'écrire sous la forme dite de Jacobi

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{\sqrt{f(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{f(s_2)}} = 0, \\ \frac{s_1 ds_1}{\sqrt{f(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{f(s_2)}} = idt, \end{cases} \quad (4.55)$$



où  $f(x) = (x^3 + c_1x^2 + c_2x - 16c_3)(x^2 + c_1x + c_2)$ . La forme (4.55) est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^2 \int_{0_k}^{Q_k} \vec{\omega} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix},$$

où  $\vec{\omega} = \left( \frac{dx}{\sqrt{f(x)}}, \frac{x dx}{\sqrt{f(x)}} \right)^\top$  est une base de différentielles holomorphes sur  $\bar{\Gamma}_c$  et  $Q_1 := (s_1, \sqrt{f(s_1)})$ ,  $Q_2 := (s_2, \sqrt{f(s_2)})$  deux points de  $\Gamma_c$  et  $Q_1 + Q_2 = (s_1, \sqrt{f(s_1)}) + (s_2, \sqrt{f(s_2)})$  vu comme un diviseur sur la courbe  $\Gamma_c$ . Ainsi, en intégrant (4.55), on voit que le flot du champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  se linéarise sur la jacobienne de la courbe hyperelliptique  $\bar{\Gamma}_c$ . En utilisant [30, Theorem 5.3], on montre que les fonctions  $s_1$  et  $s_2$ , et par suite les solutions des équations différentielles (4.2), peuvent être écrites en termes des fonctions thêta.



## Chapitre 5

# Intégrabilité algébrique du réseau de Toda $\mathfrak{c}_2^{(1)}$

Ce dernier chapitre porte sur l'étude du réseau de Toda périodique associé à l'algèbre de Lie affine  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$ . Nous démontrons l'intégrabilité algébrique de ce système, toujours au sens d'Adler-van Moerbeke et montrons que les surfaces abéliennes  $\mathbf{T}_c^2$  (complétées des variétés invariantes génériques complexes  $\mathbf{F}_c$ ) peuvent être identifiées aux duaux de variétés de Prym  $\text{Prym}(\Gamma_c/\mathcal{E}_c)$  où  $\Gamma_c$  est une surface de Riemann lisse de genre 3, laquelle est un revêtement double ramifié d'une courbe elliptique  $\mathcal{E}_c$ . Nous terminons par l'étude de certains aspects géométriques du système intégrable.

### 5.1 Position du problème et intégrabilité de Liouville

Considérons les équations de mouvement données par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \cdot y, \\ \dot{y} &= Ax,\end{aligned}\tag{5.1}$$

sur l'hyperplan  $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbf{C}^6 \mid y_0 + 2y_1 + y_2 = 0\}$  où  $x, y \in \mathbf{C}^3$ ,  $x = (x_0, x_1, x_2)^\top$ ,  $y = (y_0, y_1, y_2)^\top$ ,  $x \cdot y = (x_0y_0, x_1y_1, x_2y_2)$  et  $A$  est la matrice de Cartan d'ordre 3 associée à l'algèbre de Lie affine  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$  donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Le champ de vecteurs (5.1) décrivant le mouvement, qu'on notera  $\mathcal{V}_1$ , est alors donné par les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= x_0y_0, & \dot{y}_0 &= 2x_0 - 2x_1, \\ \dot{x}_1 &= x_1y_1, & \dot{y}_1 &= -x_0 + 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2y_2, & \dot{y}_2 &= 2x_2 - 2x_1.\end{aligned}\tag{5.2}$$

où  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2$  sont des coordonnées sur  $\mathbf{C}^6$ . Il admet les trois constantes de mouvement

suivantes :

$$\begin{aligned} F_1 &= x_0 x_1^2 x_2, \\ F_2 &= y_0^2 + y_2^2 - 4x_0 - 8x_1 - 4x_2, \\ F_3 &= (y_0^2 - 4x_0)(y_2^2 - 4x_2) - 8x_1(y_0 y_2 - 2x_1). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  est un champ de vecteurs hamiltonien, d'hamiltonien  $F_2$ , pour la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  définie par la matrice anti-symétrique suivante :

$$M := \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x_0 & -x_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & x_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2 & 2x_2 \\ -2x_0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_0 & -x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & -2x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

On a  $\mathcal{V}_1 = \mathcal{X}_{F_2}$ . La fonction  $F_1$  est une fonction Casimir pour la structure de Poisson définie ci-haut, et la fonction  $F_3$  génère un second champ de vecteurs hamiltonien, qu'on désignera par  $\mathcal{V}_2 = \mathcal{X}_{F_3}$ , donné par les équations différentielles

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 y_2 (y_0 y_2 - 4x_1) - 4x_0 x_2 y_0, \\ x_1' &= x_1 y_0 y_1 y_2 - 4x_1^2 y_1 + 2x_1 (x_2 y_0 + x_0 y_2), \\ x_2' &= x_2 y_0 (y_0 y_2 - 4x_1) - 4x_0 x_2 y_2, \\ y_0' &= 2y_2 (x_0 y_2 - x_1 y_0) + 8(x_1^2 - x_0 x_2), \\ y_1' &= 2x_1 y_0 y_2 - (x_0 y_2^2 + x_2 y_0^2) - 8(x_1^2 - x_0 x_2), \\ y_2' &= 2y_0 (x_2 y_0 - x_1 y_2) + 8(x_1^2 - x_0 x_2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

Le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_2$  admet aussi pour constantes de mouvement les fonctions définies en (5.3). On a

$$[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2] = [\mathcal{X}_{F_2}, \mathcal{X}_{F_3}] = -\mathcal{X}_{\{F_2, F_3\}} = 0,$$

on en déduit que les deux champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  commutent.

Le rang de la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  est égal à 4. En effet, la structure est de rang 0 sur le sous-espace  $\{x_0 = x_1 = x_2 = 0\}$  de dimension 3 et de rang 2 sur les trois sous-espaces de dimension 4 :  $\{x_0 = x_1 = 0\}$ ,  $\{x_0 = x_2 = 0\}$  et  $\{x_1 = x_2 = 0\}$ . On en déduit qu'en tout point de  $\mathcal{H}$  sauf sur les quatre sous-espaces ci-dessus le rang de la structure de Poisson est 4.

Désignons par  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}^3$  l'application moment ; les fonctions  $F_i$  étant deux à deux en involution ( $\{F_1, F_2\} = \{F_1, F_3\} = \{F_2, F_3\} = 0$ ) alors  $\mathbf{F}$  est involutive. La matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & 2x_0 x_1 x_2 & x_0^2 x_1 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -4 & 2y_0 & 2y_2 \\ 4(4x_2 - y_2^2) & 8(4x_1 - y_0 y_2) & 4(4x_0 - y_0^2) & 2y_0(y_2^2 - 4x_2) - 8x_1 y_2 & 2y_2(y_0^2 - 4x_0) - 8x_1 y_0 \end{pmatrix}$$

Soit  $p_0 := (1, 1, 1, 1, -3/2, 2)$  un point de  $\mathcal{H}$ . La matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$  au point  $p_0$  est donnée par

$$M(p_0) := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 16 & 12 & -16 & -20 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que le rang de la matrice  $M(p_0)$  est 3, donc les différentielles  $dF_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) sont indépendantes au point  $p_0$ , et puisque les fonctions  $F_i$  sont polynômiales, par conséquent  $\mathbf{F}$  est indépendante sur un ouvert dense  $\mathcal{U}_{\mathbf{F}}$  de  $\mathcal{H}$ . On en déduit alors que  $(\mathcal{H}, \{., \cdot\}, \mathbf{F})$  est un système intégrable au sens de Liouville.

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des points de  $\mathcal{H}$  où les mineurs  $\mathfrak{3}$ , de la matrice jacobienne de  $\mathbf{F}$ , sont tous nuls. On vérifie, avec le logiciel de calcul Maple, que  $\mathcal{S}$  la réunion des sous-variétés suivantes

$$S_1 = \{x_1 = 0\}, S_2 = \{x_0 = x_2 = 0\}, S_3 = \{x_0 = x_2, y_0 = y_2\},$$

$$S_4 = \{y_0 = y_2 = 0, x_0x_2 = x_1^2\}, S_5 = \{x_2y_0^2 = x_0y_2^2, 4x_1y_2 = y_0(y_2^2 - 4x_0)\}.$$

Les images de  $S_1$  et  $S_2$  par l'application moment  $\mathbf{F}$  sont contenues respectivement dans le sous-ensemble fermé de Zariski  $\{c_1 = 0\}$ . Pour l'image de  $S_3 = \{x_0 = x_2, y_0 = y_2\}$ , substituons  $x_2$  et  $y_2$  respectivement par  $x_0$  et  $y_0$  dans le système

$$\{F_i = c_i\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

On obtient

$$\begin{cases} c_1 = x_0^2x_1^2, \\ c_2 = 2y_0^2 - 8(x_0 + x_1), \\ c_3 = (y_0^2 - 4x_0)^2 - 8x_1(y_0^2 - 2x_1). \end{cases}$$

Par un calcul direct on vérifie aisément qu'on a  $c_2^2 - 4c_3 = 128x_0x_1$ , soit

$$(c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1 = 0.$$

Pour trouver l'image de  $S_4 = \{y_0 = y_2 = 0, x_0x_2 = x_1^2\}$ , on substitue  $y_0 = y_2 = 0$  et  $x_0x_2$  par  $x_1^2$  dans le système (5.6), on obtient

$$\begin{cases} c_1 = x_1^4, \\ c_2 = -4x_0 - 8x_1 - 4x_2, \\ c_3 = 32x_1^2, \end{cases}$$

ce qui permet d'en déduire que l'image est contenue dans le sous-ensemble  $\{c_3^2 - 1024c_1 = 0\}$  de  $\mathbf{C}^3$ .

De même en substituant

$$x_1 = \frac{1}{4y_0^2}y_2(y_0^2 - 4x_0) \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{y_0^2}x_0y_2^2$$

dans (5.6) on vérifie, avec Maple, que

$$c_3^2 - 1024c_1 = 0,$$

par conséquent l'image de la sous-variété  $S_5$  est également contenue dans le sous-ensemble  $\{c_3^2 - 1024c_1 = 0\}$ .

Soit  $\Omega$  l'ouvert de Zariski dans  $\mathbf{C}^3$  donné par

$$\Omega = \{\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3 \mid c_1 \neq 0, c_3^2 - 1024c_1 \neq 0 \text{ et } (c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1 \neq 0\}. \quad (5.7)$$

Dans toute la suite du chapitre, un point générique  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  dans  $\mathbf{C}^3$  sera un élément de l'ensemble  $\Omega$ . Pour  $\mathbf{c} \in \mathbf{C}^3$ , soit

$$\mathbf{F}_{\mathbf{c}} := \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{c}) = \bigcap_{i=1}^3 \{x \in \mathcal{H} : F_i(x) = c_i\}$$

la fibre au-dessus de  $\mathbf{c}$  de l'application moment  $\mathbf{F}$ .

Il est clair que pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , on a  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}} \subset M_{(2)} = \{m = (x_0, \dots, y_2) \in \mathcal{H} \mid \text{Rg}_m \{\cdot, \cdot\} \geq 4\}$ ; par conséquent le rang de la structure de Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  est maximal en tout point de  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ .

## 5.2 Intégrabilité algébrique

Pour montrer que le réseau de Toda  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$  est algébriquement complètement intégrable (a.c.i.), on montre que, pour  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3$  appartenant à l'ensemble  $\Omega$ , la fibre  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  est la partie affine d'une surface abélienne sur laquelle les deux champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont linéaires. Pour cela, on doit vérifier que  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  satisfait les conditions du théorème de Liouville Complexe (Théorème 3.15).

Il est clair que la condition (1) du dit théorème est vérifiée du fait de l'intégrabilité de Liouville du système. Pour la condition (2), on a la

**Proposition 5.1.** *Soit  $\mathbf{c} \in \Omega$ , alors la fibre  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  au-dessus de  $\mathbf{c}$  est variété affine lisse de dimension 2 et les champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  sont indépendants en chaque point de la fibre  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ .*

Sur  $\mathbf{C}^6$ , il existe deux involutions  $\pi$  et  $\sigma$  qui préservent les constantes de mouvement, et par conséquent laissent invariant les fibres de l'application moment. Elles sont données par

$$\begin{aligned} \pi(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) &= (x_2, x_1, x_0, y_2, y_1, y_0), \\ \sigma(x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2) &= (x_0, x_1, x_2, -y_0, -y_1, -y_2). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Ces deux involutions se restreignent aux fibres de  $\mathbf{F}$  et à l'hyperplan  $\mathcal{H}$ . L'involution  $\pi$  est un automorphisme de Poisson, elle préserve les deux champs de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  et  $\mathcal{V}_2$  (par conséquent commute avec leurs différents flots), tandis que l'involution  $\sigma$  change le signe de  $\mathcal{V}_1$  et de  $\mathcal{V}_2$ ,

$$\pi^* \mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i \quad \text{et} \quad \sigma^* \mathcal{V}_i = -\mathcal{V}_i, \quad i = 1, 2.$$

Pour vérifier les conditions (3) et (4) du théorème de Liouville Complexe, il nous faut construire un plongement  $\varphi_{\mathbf{c}} : \mathbf{F}_{\mathbf{c}} \rightarrow \mathbf{C}^N \subset \mathbf{P}^N$ . Pour cela, on recherche les séries de Laurent du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$ .

Affectons le poids 2 aux coordonnées  $x_0, x_1$  et  $x_2$  et le poids 1 à  $y_0, y_1$  et  $y_2$ ; alors  $\mathcal{V}_1$  devient un champ de vecteurs homogène à poids 1, et  $\mathcal{V}_2$  un champ de vecteurs homogène à poids 3. En tenant compte des poids des  $x_i, y_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ), les constantes de mouvement  $F_i$  sont aussi homogènes à poids, avec pour poids :

$$\varpi(F_1, F_2, F_3) = (8, 2, 4).$$

### 5.2.1 Solutions de Laurent

Recherchons les solutions de Laurent homogènes à poids associées au champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$ . Comme dans le cas du réseau de Toda  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ , les seules solutions formelles du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  sont de la forme

$$x(t) = \frac{1}{t^2} \sum_{k=0}^{\infty} x^{(k)} t^k, \quad y(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} y^{(k)} t^k;$$

c'est-à-dire  $\varpi(x_i) = 2\varpi(y_i) = 2$  pour  $i = 0, 1, 2$ . En substituant ces solutions dans les équations différentielles (5.2) associées au champ  $\mathcal{V}_1$ , le lieu indicial  $\mathcal{I}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{H}$ , donné par :

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^{(0)}(2 + y_0^{(0)}), \\ 0 &= x_1^{(0)}(2 + y_1^{(0)}), \\ 0 &= x_2^{(0)}(2 + y_2^{(0)}), \\ 0 &= y_0^{(0)} + 2x_0^{(0)} - 2x_1^{(0)}, \\ 0 &= y_1^{(0)} - x_0^{(0)} + 2x_1^{(0)} - x_2^{(0)}, \\ 0 &= y_2^{(0)} + 2x_2^{(0)} - 2x_1^{(0)}. \end{aligned}$$

Soit  $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, y_0^{(0)}, y_1^{(0)}, y_2^{(0)})$  une solution de ce système. Si  $x_0^{(0)} = x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$ , cela conduit à une solution nulle  $x^{(0)} = 0$ . Si les composantes  $x_0^{(0)}$ ,  $x_1^{(0)}$  et  $x_2^{(0)}$  sont toutes trois non nulles, les trois premières équations conduisent à  $y_0^{(0)} = y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = -2$ ; ce qui est impossible car on aurait  $(x^{(0)}, y^{(0)}) \notin \mathcal{H}$  puisque  $y_0^{(0)} + 2y_1^{(0)} + y_2^{(0)} = -8 \neq 0$ . Si précisément l'un ou deux des  $x_i^{(0)}$ ,  $i = 0, 1, 2$  est/sont nul(s), on résoud aisément le système composé par ces équations et on trouve que  $\mathcal{I}$  est composé de six solutions non nulles, à savoir les points suivants :

$$\begin{aligned} m_0 &:= (1, 0, 0, -2, 1, 0), & m_1 &:= (0, 1, 0, 2, -2, 2), \\ m_2 &:= (0, 0, 1, 0, 1, -2), & m_3 &:= (0, 3, 4, 6, -2, -2), \\ m_4 &:= (1, 0, 1, -2, 2, -2), & m_5 &:= (4, 3, 0, -2, -2, 6). \end{aligned}$$

On remarquera que les points  $m_2$  et  $m_5$  sont obtenus des points  $m_0$  et  $m_3$  respectivement par l'automorphisme  $\pi$  tandis que les points  $m_1$  et  $m_4$  sont des points fixes. Dans toute la suite, afin de simplifier les formules, on considérera que les variables de phase  $x_0, x_1, x_2, y_0, y_2$  comme coordonnées sur  $\mathcal{H}$ , c'est-à-dire qu'on substituera à chaque fois la variable  $y_1$  par  $-(y_0 + y_2)/2$ .

Au point  $m_0$  la matrice de Kowalevski est donnée par :

$$\mathcal{K}(m_0) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$|\mu \text{Id}_5 - \mathcal{K}(m_0)| = (\mu + 1)(\mu - 1)(\mu - 2)^2(\mu - 3),$$

il a quatre valeurs propres entières non négatives, ce qui conduit à une balance principale. On donne les quatre premiers termes de cette balance qu'on notera  $x(t; m_0)$  :

$$\begin{aligned} x_0(t; m_0) &= \frac{1}{t^2} + d + et + O(t^2), \\ x_1(t; m_0) &= -2et + O(t^2), \\ x_2(t; m_0) &= c + act + O(t^2), \\ y_0(t; m_0) &= -\frac{2}{t} + 2dt + 3et^2 + O(t^3), \\ y_2(t; m_0) &= a + 2ct + (2e + ac)t^2 + O(t^3). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Les quatre paramètres libres apparaissent aux étapes 1, 2, 2, 3 respectivement, et sont notés  $a, c, d, e$ . La balance principale correspondant au point  $m_2$ , désignée par  $x(t; m_2)$ , est obtenue des formules de  $x(t; m_0)$  en appliquant l'automorphisme  $\pi$  puisque  $m_2 = \pi(m_0)$ . On obtient

$$\begin{aligned} x_0(t; m_2) &= c + act + O(t^2), \\ x_1(t; m_2) &= -2et + O(t^2), \\ x_2(t; m_2) &= \frac{1}{t^2} + d + et + O(t^2), \\ y_0(t; m_2) &= a + 2ct + (2e + ac)t^2 + O(t^3), \\ y_2(t; m_2) &= -\frac{2}{t} + 2dt + 3et^2 + O(t^3). \end{aligned} \tag{5.10}$$

De même, le point  $m_1$  dont la matrice de Kowalevski est donnée par :

$$\mathcal{K}(m_1) := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

conduit à une balance principale car la matrice  $\mathcal{K}(m_1)$  admet quatre valeurs propres entières non négatives ; en effet le polynôme caractéristique est :

$$|\mu \text{Id}_5 - \mathcal{K}(m_1)| = (\mu + 1)(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 4)^2.$$

On montre que le point  $m_1$  conduit en effet à une balance principale, notée  $x(t; m_1)$ , en exhibant les cinq premiers termes (les quatre paramètres libres apparaissent aux étapes 1, 2, 4, 4 respectivement et sont notés  $\alpha, \gamma, \beta, \delta$ ).

$$\begin{aligned} x_0(t; m_1) &= \beta t^2 + O(t^3), \\ x_1(t; m_1) &= \frac{1}{t^2} + \gamma + \frac{6\gamma^2 - \beta - \delta}{10} t^2 + O(t^3), \\ x_2(t; m_1) &= \delta t^2 + O(t^3) \\ y_0(t; m_1) &= \frac{2}{t} + \alpha - 2\gamma t - \frac{6\gamma^2 - 11\beta - \delta}{15} t^3 + O(t^4), \\ y_2(t; m_1) &= \frac{2}{t} - \alpha - 2\gamma t - \frac{6\gamma^2 - \beta - 11\delta}{15} t^3 + O(t^4). \end{aligned} \tag{5.11}$$

En utilisant la méthode de majoration, on montre que les différentes solutions de Laurent sont convergentes. Les points  $m_3, m_4, m_5$  conduisent eux à des balances inférieures. Nous ne les utiliserons pas dans toute la suite. Par conséquent, on a



**Lemme 5.2.** *Le système d'équations différentielles (5.2) du champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  possède trois familles distinctes de solutions de Laurent homogènes à poids dépendant de quatre ( $= \dim \mathcal{H} - 1$ ) paramètres libres.*

### 5.2.2 Diviseurs de Painlevé

Pour un point  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbf{C}^3$ , en substituant la solution de Laurent  $x(t; m_0)$  dans les équations  $F_i = c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , on trouve des expressions algébriques indépendantes de  $t$ , à savoir les trois relations algébriques entre les paramètres  $a, c, d$  et  $e$  ci-dessous.

$$\begin{aligned} c_1 &= 4ce^2, \\ c_2 &= a^2 - 4c - 12d, \\ c_3 &= 48cd - 12a^2d - 32ae. \end{aligned}$$

Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , les paramètres  $c$  et  $e$  sont non nuls puisque  $c_1 \neq 0$ . Les deux premières équations sont linéaires en les paramètres  $c$  et  $d$ , et peuvent être résolues linéairement en ces paramètres en fonction des valeurs des constantes de mouvement, donnant ainsi

$$c = \frac{c_1}{4e^2}, \quad d = \frac{1}{12} \left( a^2 - c_2 - \frac{c_1}{e^2} \right). \quad (5.12)$$

La troisième équation se réduit alors à l'équation suivante d'une courbe affine dans  $\mathbf{C}^2$ ,

$$\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)} : e^4 a^4 - (2c_1 + c_2 e^2) e^2 a^2 + 32e^5 a + c_3 e^4 + c_1 c_2 e^2 + c_1^2 = 0. \quad (5.13)$$

Dans (5.13), faisons le changement de variable  $u = ae$ , on obtient la courbe affine  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  d'équation,

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)} : u^4 - (2c_1 + c_2 e^2) u^2 + 32e^4 u + c_3 e^4 + c_1 c_2 e^2 + c_1^2 = 0,$$

isomorphe à  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ; cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)} : \frac{u^2 - c_1}{e^2} \left( \frac{u^2 - c_1}{e^2} - c_2 \right) = -32u - c_3,$$

ce qui permet d'en déduire que  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  est le revêtement double de la courbe affine rationnelle  $C_{\mathbf{c}}^{(0)}$ , définie par

$$C_{\mathbf{c}}^{(0)} : v(v - c_2) + 32u + c_3 = 0,$$

l'application, liant les deux courbes, étant donnée par

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)} &\rightarrow C_{\mathbf{c}}^{(0)} \\ (e, u) &\mapsto (v, u) = \left( u^2 - \frac{c_1}{e^2}, u \right). \end{aligned}$$

Il est clair que  $C_{\mathbf{c}}^{(0)}$  est lisse et une paramétrisation de cette dernière est donnée par

$$C_{\mathbf{c}}^{(0)} = \left\{ (v, u) = \left( t, -\frac{t^2 - c_2 t + c_3}{32} \right), t \in \mathbf{C} \right\}.$$

$$\psi(e, u) = (v, u) \Rightarrow \begin{cases} u^2 - \frac{c_1}{e^2} = t, \\ u = -\frac{t^2 - c_2 t + c_3}{32}. \end{cases}$$

On écrit aisément les paramètres  $e$  et  $u$  en fonction de  $t$  comme suit

$$e = \pm \sqrt{\frac{t^4 - 2c_2t^3 + (2c_3 + c_2^2)t^2 - 2c_2c_3t + c_3^2 - 1024c_1}{t}}, \quad u = -\frac{1}{32}(t^2 - c_2t + c_3).$$

On en déduit que l'application  $\psi : \mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)} \rightarrow C_{\mathbf{c}}^{(0)}$  admet quatre points de ramification : les points  $(0, u_i)$  de la courbe  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  où

$$u_i = -\frac{\lambda_i^2 - c_2\lambda_i + c_3}{32}, \quad P(\lambda_i) = 0,$$

avec

$$P(t) = t^4 - 2c_2t^3 + (2c_3 + c_2^2)t^2 - 2c_2c_3t + c_3^2 - 1024c_1.$$

On vérifie que le discriminant de  $P(t)$  est donné, à une constante près, par

$$c_1^2((c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1),$$

lequel, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , est non nul ; par conséquent ces quatre points de ramification sont distincts.

L'application  $\psi$  est également ramifiée à l'infini. En effet, si on écrit  $t$  en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$ , on trouve

$$(e, u) = \left( \varsigma^{-3} - c_2\varsigma^{-1} + c_3\varsigma + O(\varsigma^3), -\frac{1}{32}\varsigma^{-4} + O(\varsigma^{-2}) \right),$$

où  $t = 1/\varsigma^2$  ; ce qui montre bien que l'application est ramifiée en ce point. De même si on pose  $t = \varsigma^2$ , cela conduit

$$e = \eta\varsigma^{-1} + O(\varsigma), \quad u = -\frac{1}{32}c_3 + O(\varsigma^2),$$

où  $\eta$  est une racine fixée de  $c_3^2 - 1024c_1$  ; ce qui conduit à un autre point de ramification, donnant au total 6 points de ramification. On en déduit que le genre de  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  est

$$g(\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)}) = 2g(C_{\mathbf{c}}^{(0)}) - 1 + \frac{1}{2} \times 6 = 2.$$

Ainsi pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ ,  $\overline{\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(0)}}$  est un revêtement double de la courbe rationnelle  $\overline{C_{\mathbf{c}}^{(0)}}$  lisse, admettant six points de ramification distincts ; on déduit qu'elle est lisse et par isomorphisme que la courbe  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}$  également lisse.

La courbe  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}$  est complétée en une surface de Riemann compacte, notée  $\overline{\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}}$ , en lui ajoutant les six points à l'infini notés  $\infty_{\epsilon_1}$ ,  $\infty_{\epsilon_2}$ ,  $\infty^1$  et  $\infty^2$  qui sont donnés en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  par :

$$\infty_{\epsilon_1} : \quad e = \varsigma, \quad a = \frac{\sqrt{c_1}}{\varsigma} \left( 1 + \frac{1}{4c_1}(c_2 + \epsilon_1\delta_1)\varsigma^2 + O(\varsigma^4) \right), \quad (5.14)$$

$$\infty_{\epsilon_2} : \quad e = \varsigma, \quad a = -\frac{\sqrt{c_1}}{\varsigma} \left( 1 + \frac{1}{4c_1}(c_2 + \epsilon_2\delta_2)\varsigma^2 + O(\varsigma^4) \right), \quad (5.15)$$

$$\infty^1 : \quad e = \varsigma^{-1}, \quad a = -\frac{1}{32} \left( c_3\varsigma + c_2(c_1 - \frac{1}{1024}c_3^2)\varsigma^3 + O(\varsigma^6) \right), \quad (5.16)$$

$$\infty^2 : \quad e = -\frac{1}{32}\varsigma^{-3}, \quad a = \frac{1}{\varsigma} \left( 1 + \frac{1}{3}c_2\varsigma^2 - \frac{1}{3}c_3\varsigma^4 + O(\varsigma^6) \right); \quad (5.17)$$

où  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = 1$ ,  $\delta_1 = \sqrt{c_2^2 - 4c_3 - 128\sqrt{c_1}}$  et  $\delta_2 = \sqrt{c_2^2 - 4c_3 + 128\sqrt{c_1}}$ .

Ainsi, nous avons prouvé

**Proposition 5.3.** *Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}$  est lisse et peut être complétée en une surface de Riemann compacte  $\overline{\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}}$  de genre 2 en lui rajoutant six points à l'infini.*

Si on considère la solution de Laurent  $x(t; m_2)$ , on retrouve la même courbe affine ci-dessus, car l'automorphisme  $\pi$  préserve les constantes de mouvement  $F_i, i = 1, 2, 3$ .

Considérons la solution de Laurent  $x(t; m_1)$  en (5.11). Lorsqu'on la substitue dans les équations  $F_i = c_i$  où  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \Omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} c_1 &= \beta\delta, \\ c_2 &= 2\alpha^2 - 24\gamma, \\ c_3 &= \alpha^4 + 24\alpha^2\gamma + 144\gamma^2 - 16\beta - 16\delta. \end{aligned}$$

On a  $\beta \neq 0$  et  $\delta \neq 0$  du fait que  $c_1 \neq 0$ . Les deux premières équations se résolvent linéairement en les paramètres  $\gamma$  et  $\delta$ , donnant

$$\delta = \frac{c_1}{\beta}, \quad \gamma = \frac{1}{24}(2\alpha^2 - c_2). \quad (5.18)$$

En substituant dans la troisième équation, cette dernière se réduit à une relation algébrique entre  $\alpha$  et  $\beta$ , qui est l'équation d'une courbe affine isomorphe à

$$\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)} : 64\beta^2 + (4c_3 - (4\alpha^2 - c_2)^2)\beta + 64c_1 = 0. \quad (5.19)$$

La courbe affine  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est lisse pour  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \Omega$ . En effet, soit

$$F(\alpha, \beta) = 64\beta^2 + (4c_3 - (4\alpha^2 - c_2)^2)\beta + 64c_1,$$

on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) &= 16(c_2 - 4\alpha^2)\alpha\beta, \\ \frac{\partial F}{\partial \beta}(\alpha, \beta) &= 128\beta + 4c_3 - (4\alpha^2 - c_2)^2. \end{aligned}$$

Si  $F, \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \frac{\partial F}{\partial \beta}$  sont nulles en un point  $(\alpha_0, \beta_0)$  alors soit  $\alpha_0 = 0$  ou soit  $\alpha_0^2 = c_2/4$  (puisque  $\beta_0 \neq 0$ ).

★ Si  $\alpha_0 = 0$  obtient le système suivant

$$\begin{cases} 64\beta_0^2 + (4c_3 - c_2^2)\beta_0 + 64c_1 = 0, \\ 128\beta_0 + 4c_3 - c_2^2 = 0. \end{cases}$$

En éliminant  $\beta_0$  de ces équations, on trouve

$$(c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1 = 0,$$

ce qui est impossible pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ .

★ Si  $\alpha_0^2 = c_2/4$ , on a le système

$$\begin{cases} 16\beta_0^2 + c_3\beta_0 + 16c_1 = 0, \\ 32\beta_0 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Après élimination de  $\beta_0$ , on trouve  $c_3^2 - 1024c_1 = 0$ ; impossible pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ . On en déduit que  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est lisse pour  $\mathbf{c}$  générique au sens (5.7). La courbe  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est complétée en une surface de Riemann en lui rajoutant deux points à l'infini, notés respectivement  $\infty'$  et  $\infty''$ . Un voisinage de chacun de ces points est décrit en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  par :

$$\begin{aligned} \infty' : \quad & \alpha = \frac{1}{\varsigma}, & \beta &= \frac{1}{8\varsigma^4} \left( 2 - c_2\varsigma^2 + \frac{1}{8}(c_2^2 - 4c_3)\varsigma^4 + O(\varsigma^6) \right), \\ \infty'' : \quad & \alpha = \frac{1}{\varsigma}, & \beta &= 4c_1\varsigma^4 + 2c_1c_2\varsigma^6 + O(\varsigma^6). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Par le changement de variable  $\xi = 128\beta + (4c_3 - (4\alpha^2 - c_2)^2)$ , on voit que, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ ,  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est isomorphe à la courbe hyperelliptique lisse, qu'on notera encore  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$ , d'équation

$$\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)} : \xi^2 = f(\alpha) = ((4\alpha^2 - c_2)^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1;$$

en effet,  $f(\alpha)$  n'a que des racines simples pour  $\mathbf{c} \in \Omega$  car son discriminant, à une constante près, est égal à

$$c_1^4(c_3^2 - 1024c_1)^2((c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1).$$

La courbe  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est donc une courbe hyperelliptique de genre 3. De plus, l'application

$$\sigma_1 : \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)} \rightarrow \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}, \quad (\alpha, \xi) \mapsto (-\alpha, \xi),$$

est une involution sur  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et la courbe quotient  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)} = \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}/\sigma_1$  une courbe elliptique définie par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)} : \xi^2 = ((4\zeta - c_2)^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1, \quad (5.21)$$

La surface de Riemann  $\overline{\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}}$  est un revêtement double de  $\overline{\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)}}$ ,

$$\chi : \overline{\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}} \rightarrow \overline{\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)}}, \quad (\alpha, \xi) \mapsto (\zeta, \xi) = (\alpha^2, \xi)$$

ramifié en quatre points : les deux points au-dessus de  $(0, \xi)$  et les deux points à l'infini. Par conséquent, on a la

**Proposition 5.4.** *Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la courbe  $\overline{\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}}$  est une surface de Riemann lisse hyperelliptique de genre 3; c'est un revêtement double ramifié en quatre points d'une courbe elliptique  $\overline{\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)}}$  (5.21).*

### Plongement de $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$ dans l'espace projectif

Procédons maintenant à la construction d'un plongement de la variété  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^N$ . Il nous faut rechercher les fonctions polynômes indépendantes sur l'algèbre des fonctions engendrée par les trois constantes de mouvement  $F_i$ , homogènes à poids qui ont un pôle simple au plus, quand on leur substitue n'importe laquelle des trois balances principales  $x(t; m_i)$ ,  $i = 0, 1, 2$ . Le résultat est donné par la Table 5.1. Ces dix-huit fonctions forment une base pour  $\mathcal{Z}_{\rho}$  où  $\rho = (1, 1, 1)$ . Elles sont définies comme suit

$k$	$\dim \mathcal{F}^k$	$\dim \mathcal{H}^k$	$\dim \mathcal{Z}_\rho^k$	$\# \text{ dep}$	$\zeta_k$	fonctions indep.
0	1	1	1	0	1	$z_0$
1	2	0	2	0	2	$z_1, z_2$
2	6	1	3	1	2	$z_3, z_4$
3	10	0	4	2	2	$z_5, z_6$
4	20	2	7	4	3	$z_7, z_8, z_9$
5	30	0	8	6	2	$z_{10}, z_{11}$
6	50	2	12	9	3	$z_{12}, z_{13}, z_{14}$
7	70	0	12	10	2	$z_{15}, z_{16}$
8	105	4	18	17	1	$z_{17}$
9	140	0	18	18	0	-

TAB. 5.1 – Les polynômes de degré au plus 8 qui ont un pôle simple au pôle quand chacune des balances principales leur est substituée.

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1, & z_7 &= x_1 x_0, \\
z_1 &= y_0, & z_8 &= x_1 x_2, \\
z_2 &= y_0 + y_2, & z_9 &= y_0 y_2 z_4 + 4x_1 (y_0^2 - y_2^2), \\
z_3 &= 4x_1 - y_0 y_2, & z_{10} &= x_1 x_2 y_0, \\
z_4 &= 4(x_0 - x_2) + y_2^2 - y_0^2, & z_{11} &= x_1 x_0 y_2, \\
z_5 &= y_0 z_3 + 4x_0 y_2, & z_{12} &= x_0 x_1 x_2, \\
z_6 &= y_2 z_3 + 4x_2 y_0, & z_{13} &= x_1 x_0 (y_2^2 - 4x_1),
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
z_{14} &= x_1 x_2 (y_0^2 - 4x_1), \\
z_{15} &= x_1 x_0 (4x_1 (y_0 - 2y_2) + y_2 (y_2^2 - 4x_2)), \\
z_{16} &= x_1 x_2 (4x_1 (y_2 - 2y_0) + y_0 (y_0^2 - 4x_0)), \\
z_{17} &= x_0 x_1 x_2 (y_0^2 + y_2^2 - 4(x_0 + x_2)).
\end{aligned}$$

L'involution  $\pi$  agit sur ces fonctions  $z_i$  de la manière suivante

$$\pi(z_0, z_1, \dots, z_{17}) = (z_0, z_2 - z_1, z_3, -z_4, z_6, z_5, z_8, z_7, -z_9, z_{11}, z_{10}, z_{12}, z_{14}, z_{13}, z_{16}, z_{15}, z_{17}).$$

En substituant la balance principale  $x(t; m_0)$  dans les fonctions  $z_0, z_1, \dots, z_{17}$  définies en (5.22), des premiers termes de ces dernières sont donnés par

$$\begin{aligned}
(z_0, z_1, \dots, z_{17}) &= \left( 1, -\frac{2}{t}, -\frac{2}{t}, \frac{2a}{t}, a^2 - 4c + 12d, 4(3ad + 4e), \frac{2a^2 - 8c}{2t}, -\frac{2e}{t}, -2ect, \right. \\
&\quad \left. -\frac{2a(a^2 - 4c + 12d + 16e)}{t}, -\frac{2ae}{t}, 4ce, -\frac{2ec}{t}, -\frac{2a^2 e}{t}, -\frac{8ce}{t}, \right. \\
&\quad \left. -\frac{2e(16e - 4ac + a^3)}{t}, -48cde, \frac{2ce(4c - a^2 + 12d)}{t} \right) \\
&\quad + \text{des termes de plus haut degré (le long de } D_{\mathbf{c}}^{(0)}).
\end{aligned}$$

De même, en y substituant les deux autres balances principales  $x(t; m_1)$  et  $x(t; m_2)$  on a respectivement

$$(z_0, z_1, \dots, z_{17}) = \left( 1, \frac{2}{t}, \frac{4}{t}, \alpha^2 + 12\gamma, -\frac{8\alpha}{t}, \frac{2\alpha^2 + 24\gamma}{t}, \frac{2\alpha^2 + 24\gamma}{t}, \beta, \delta, \frac{8\alpha(\alpha^2 + \gamma)}{t}, \frac{2\beta}{t}, \frac{2\delta}{t}, \right. \\ \left. \beta\delta t^2, -\frac{4\alpha\beta}{t}, \frac{4\alpha\delta}{t}, \frac{6\beta(\alpha^2 - 4\gamma)}{t}, \frac{6\beta(\alpha^2 - 4\gamma)}{t}, 8\beta\delta \right) \\ + \text{des termes de plus haut degré (le long de } D_{\mathfrak{c}}^{(1)});$$

$$(z_0, z_1, \dots, z_{17}) = \left( 1, a, -\frac{2}{t}, \frac{2a}{t}, -a^2 + 4c - 12d, \frac{2a^2 - 8c}{2t}, 4(3ad + 4e), -2ect, -\frac{2e}{t}, \right. \\ \left. 2\frac{a(a^2 - 4c + 12d + 16e)}{t}, 4ce, -\frac{2ae}{t}, -\frac{2ec}{t}, -\frac{8ce}{t}, -\frac{2a^2e}{t}, -48cde, \right. \\ \left. -\frac{2e(16e - 4ac + a^3)}{t}, \frac{2ce(4c - a^2 + 12d)}{t} \right) \\ + \text{des termes de plus haut degré (le long de } D_{\mathfrak{c}}^{(2)}).$$

Les fonctions  $z_i$  définissent une application régulière  $\varphi_{\mathfrak{c}} : \mathbf{F}_{\mathfrak{c}} \rightarrow \mathbf{P}^{17}$  définie par  $(x_0, \dots, y_2) \mapsto (z_0, z_1, \dots, z_{17})$ . On a

$$\left| \frac{\partial(z_1, z_2, z_3, z_4, z_8)}{\partial(x_0, x_1, x_2, y_0, y_2)} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -y_2 & -y_0 \\ 4 & 0 & -4 & -2y_0 & 2y_2 \\ 0 & x_2 & x_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -16x_1;$$

on en déduit que pour  $\mathfrak{c} \in \Omega$ , cette application est un plongement puisque  $c_1 = x_0 x_1^2 x_2 \neq 0$ . Cette application  $\varphi_{\mathfrak{c}}$  fournit les trois plongements  $\varphi_{\mathfrak{c}}^{(j)}$  du diviseur de Painlevé  $\Gamma_{\mathfrak{c}}^{(j)}$  dans  $\mathbf{P}^{17}$ , en prenant les coefficients en  $t^{-1}$  des séries  $z_i(x(t; m_j))$ , où  $j = 0, 1, 2$  et  $i = 0, \dots, 17$ . Explicitement, les plongements  $\varphi_{\mathfrak{c}}^{(0)}$  et  $\varphi_{\mathfrak{c}}^{(2)}$  sont donnés, pour  $(a, e) \in \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)}$ , par :

$$\varphi_{\mathfrak{c}}^{(0)}(a, e) = (0 : -2 : -2 : 2a : 0 : 0 : 2a^2 - 8c : -2e : 0 : -2a(a^2 - 4c + 12d + 16e) : -2ea : 0 : \\ -2ec : -2a^2e : -8ce : 2e(4ac - 16e - a^3) : 0 : 2ce(4c - a^2 + 12d)), \quad (5.23)$$

$$\varphi_{\mathfrak{c}}^{(2)}(a, e) = (0 : 0 : -2 : 2a : 0 : 2a^2 - 8c : 0 : 0 : -2e : 2a(a^2 - 4c + 12d + 16e) : 0 : -2ae : \\ -2ce : -8ce : -2a^2e : 0 : 2e(4ac - 16e - a^3) : 2ce(4c - a^2 + 12d)), \quad (5.24)$$

où les valeurs des paramètres  $c$  et  $d$  en fonction de  $a$  et  $e$  sont données par (5.12). Notons que  $\varphi_{\mathfrak{c}}^{(0)}$  et  $\varphi_{\mathfrak{c}}^{(2)}$  sont en effet des plongements des courbes affines  $\Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)}$  et  $\Gamma_{\mathfrak{c}}^{(2)}$  puisque les paramètres  $a$  et  $e$  apparaissent linéairement dans les expressions ci-dessus. De même, le plongement  $\varphi_{\mathfrak{c}}^{(1)}$  est donné, pour  $(a, d) \in \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(1)}$ , par :

$$\varphi_{\mathfrak{c}}^{(1)}(\alpha, \beta) = (0 : 2 : 4 : 0 : -8\alpha : 2\alpha^2 + 24\gamma : 2\alpha^2 + 24\gamma : 0 : 0 : 8\alpha(\alpha^2 + 12\gamma) : 2\beta : 2\delta : 0 : \\ -4\alpha\beta : 4\alpha\delta : 6\beta(\alpha^2 - 4\gamma) : 6\delta(\alpha^2 - 4\gamma) : 0), \quad (5.25)$$

où les valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\delta$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$  sont données par (5.18). On voit, en regardant les trois premières coordonnées des seconds membres, que les images de ces applications sont disjointes.

### Singularités du diviseur à l'infini

Désignons par  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  les fermetures de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)})$  et  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\Gamma_{\mathbf{c}}^{(2)})$ , et par  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  celle de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)})$  et posons  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}} := \cup_{i=0}^2 \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)}$ . Déterminons à présent les singularités du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$ . Pour le faire, substituons la paramétrisation locale autour de chaque point à l'infini dans le plongement  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(i)}$  correspondant et faisons tendre  $\varsigma \rightarrow 0$ . Considérons le plongement  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}$ . Substituons (5.14), (5.15) et (5.16) (resp. (5.17)) dans (5.23), puis en ne considérant que les deux (resp. les trois) premiers termes on trouve

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty_{\epsilon_1}) &\sim \left( 0 : 4\varsigma : 4\varsigma : -4\sqrt{c_1} : 0 : 0 : -2(c_2 + \epsilon_1\delta_1)\varsigma : 0 : 0 : 4\sqrt{c_1}\epsilon_1\delta_1 : 4\sqrt{c_1}\varsigma : 0 : c_1 : \right. \\ &\quad \left. 4c_1 : 4c_1 : 2\sqrt{c_1}(c_2 + \epsilon_1\delta_1)\varsigma : 0 : c_1c_2 \right), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty_{\epsilon_2}) &\sim \left( 0 : 4\varsigma : 4\varsigma : 4\sqrt{c_1} : 0 : 0 : -2(c_2 + \epsilon_2\delta_1)\varsigma : 0 : 0 : -4\sqrt{c_1}\epsilon_2\delta_1 : -4\sqrt{c_1}\varsigma : 0 : c_1 : \right. \\ &\quad \left. 4c_1 : 4c_1 : -2\sqrt{c_1}(c_2 + \epsilon_2\delta_1)\varsigma : 0 : c_1c_2 \right), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty^1) &\sim (0 : \dots : 0 : \varsigma : 0 : 16\varsigma : 0 : 0 : 0 : 2\varsigma : 0 : 16 : 0 : 0), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty^2) &\sim (0 : \dots : 0 : 2\varsigma^2 : 0 : 0 : 2\varsigma : 0 : 1 + 2c_2\varsigma^2 : 0 : 0). \end{aligned} \tag{5.26}$$

En faisant tendre  $\varsigma \rightarrow 0$ , on obtient les points suivants dans l'espace projectif  $\mathbf{P}^{17}$

$$\begin{aligned} P^{\epsilon_1} &:= \lim_{p \rightarrow \infty_{\epsilon_1}} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(p) = (0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \epsilon_1\delta_1 : 0 : \\ &\quad 0 : \frac{\sqrt{c_1}}{4} : \sqrt{c_1} : \sqrt{c_1} : 0 : 0 : \frac{c_2\sqrt{c_1}}{4}), \\ Q^{\epsilon_2} &:= \lim_{p \rightarrow \infty_{\epsilon_2}} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(p) = (0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\epsilon_2\delta_2 : 0 : \\ &\quad 0 : \frac{\sqrt{c_1}}{4} : \sqrt{c_1} : \sqrt{c_1} : 0 : 0 : \frac{c_2\sqrt{c_1}}{4}), \\ S_1 &:= \lim_{p \rightarrow \infty^1} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty^2} \varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(p) = (0 : \dots : 0 : 1 : 0 : 0). \end{aligned}$$

Les quatre points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$  sont distincts, tandis que le point  $S_1$  est l'image des deux points à l'infini  $\infty^1$  et  $\infty^2$ . On en déduit que  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}$  ne se prolonge pas en un plongement de  $\Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)}$ . La courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  est donc singulière au point  $S_1$ .

De manière analogue, en substituant (5.14) à (5.17) dans le plongement  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)} : \Gamma_{\mathbf{c}}^{(2)} \rightarrow \mathbf{P}^{17}$  on a les premiers termes suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty_{\epsilon_1}) &\sim \left( 0 : 0 : 4\varsigma : -4\sqrt{c_1} : 0 : -2(c_2 + \epsilon_1\delta_1)\varsigma : 0 : 0 : 0 : -4\sqrt{c_1}\epsilon_1\delta_1 : 0 : 4\sqrt{c_1}\varsigma : c_1 : \right. \\ &\quad \left. 4c_1 : 4c_1 : 0 : 2\sqrt{c_1}(c_2 + \epsilon_1\delta_1)\varsigma : c_1c_2 \right), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty_{\epsilon_2}) &\sim \left( 0 : 0 : 4\varsigma : 4\sqrt{c_1} : 0 : -2(c_2 + \epsilon_2\delta_2)\varsigma : 0 : 0 : 0 : 4\sqrt{c_1}\epsilon_2\delta_2 : 0 : -4\sqrt{c_1}\varsigma : c_1 : \right. \\ &\quad \left. 4c_1 : 4c_1 : 0 : -2\sqrt{c_1}(c_2 + \epsilon_2\delta_2)\varsigma : c_1c_2 \right), \end{aligned}$$

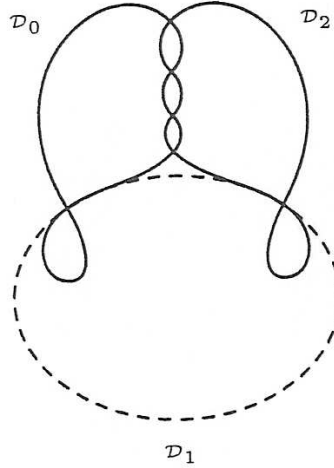


FIG. 5.1 – Courbes complétant les surfaces invariantes  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  du réseau de Toda  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$  en surfaces abéliennes où  $\mathcal{D}_i$  est la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)}$ .

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty^1) &\sim (0 : \cdots : 0 : -\varsigma : 16\varsigma : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -16 : 0), \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty^2) &\sim (0 : \cdots : 0 : 2\varsigma^2 : 0 : 0 : 2\varsigma : 0 : 1 + 2c_2\varsigma^2 : 0 : 0).\end{aligned}\quad (5.27)$$

Puis en faisant tendre  $\varsigma$  vers 0 on trouve les images de ces six points par l'application  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)} : \Gamma_{\mathbf{c}}^{(2)} \rightarrow \mathbf{P}^{17}$ , à savoir

$$\begin{aligned}P^{\epsilon_1} &:= \lim_{p \rightarrow \infty_{\epsilon_1}} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(p) = \left( 0 : 0 : 0 : -1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : -\epsilon_1 \delta_1 : 0 : 0 : \frac{\sqrt{c_1}}{4} : \right. \\ &\quad \left. \sqrt{c_1} : \sqrt{c_1} : 0 : 0 : \frac{c_2 \sqrt{c_1}}{4} \right), \\ Q^{\epsilon_2} &:= \lim_{p \rightarrow \infty_{\epsilon_2}} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(p) = \left( 0 : 0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0 : \epsilon_2 \delta_2 : 0 : 0 : \frac{\sqrt{c_1}}{4} : \right. \\ &\quad \left. \sqrt{c_1} : \sqrt{c_1} : 0 : 0 : \frac{c_2 \sqrt{c_1}}{4} \right), \\ S_2 &:= \lim_{p \rightarrow \infty^1} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(p) = \lim_{p \rightarrow \infty^2} \varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(p) = (0 : \cdots : 0 : 0 : 0 : 1 : 0).\end{aligned}$$

On obtient un nouveau point  $S_2$  image des points à l'infini  $\infty^1$  et  $\infty^2$  par  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ; et par suite la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  est aussi singulière. Remarquons que  $P^{\epsilon_1} = P'^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2} = Q'^{\epsilon_2}$ , donc les quatre points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$  sont les points d'intersection des courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ . De plus par comparaison des termes en  $\varsigma$  de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\infty_{\epsilon_1})$  et de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty_{-\epsilon_1})$  (resp. de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\infty_{\epsilon_2})$  et de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty_{-\epsilon_2})$ ), on en déduit que les tangentes en les points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$  sont différentes, par conséquent les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  s'intersectent transversalement en ces quatre points.

Enfin, substituons respectivement les paramétrisations locales autour des points  $\infty'$  et  $\infty''$  en (5.20) dans (5.25), on trouve à l'ordre 2 près

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\infty') &\sim (0 : \cdots : 0 : -2\varsigma^2 : 0 : 0 : -4\varsigma : 0 : 4 - c_2\varsigma^2 : 0 : 0) \\ \varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\infty'') &\sim (0 : \cdots : 0 : -2\varsigma^2 : 0 : 4\varsigma : 0 : 4 - c_2\varsigma^2 : 0).\end{aligned}$$



En faisant  $\varsigma \rightarrow 0$ , on trouve respectivement les deux points images suivants dans  $\mathbf{P}^{17}$  :

$$S_1 := (0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : 0), \quad S_2 := (0 : \cdots : 0 : 1 : 0).$$

Ce qui permet d'en déduire que la courbe  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  non singulière, intersecte  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  en  $S_1$  et  $S_2$  respectivement. En comparant les termes en  $\varsigma$  et  $\varsigma^2$  de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(0)}(\infty^2)$  et  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\infty')$ , on conclut que  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  sont tangents doublement au point  $S_1$ . De même, les termes en  $\varsigma$  et  $\varsigma^2$  de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(2)}(\infty^2)$  et  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(1)}(\infty')$  nous permettent de conclure que  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  sont tangents doublement au point  $S_2$ .

	$\infty_{\epsilon_1}$	$\infty_{\epsilon_2}$	$\infty^1$	$\infty^2$
$\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$	$P^{\epsilon_1}$	$Q^{\epsilon_2}$	$S_1$	$S_1$
$\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$	$P^{\epsilon_1}$	$Q^{\epsilon_2}$	$S_2$	$S_2$

	$\infty'$	$\infty''$
$\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$	$S_1$	$S_2$

TAB. 5.2 – Correspondance entre les points singuliers de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$

Le diviseur de Painlevé  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est composé de trois courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  de genres respectifs 2, 3 et 2 où  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(i)} := \varphi_{\mathbf{c}}^{(i)}(\Gamma_{\mathbf{c}}^{(i)})$ . Les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont singulières, admettent les points  $S_1$  et  $S_2$  comme points doubles (ordinaires) respectivement. Elles s'intersectent transversalement en les quatre points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$ .

### Equations différentielles quadratiques

On montre maintenant que le champ de vecteurs  $(\varphi_{\mathbf{c}})_* \mathcal{V}_1$  se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur  $\mathbf{P}^{17}$ . Pour cela, montrons qu'il peut s'écrire comme un champ de vecteurs quadratique dans les deux cartes  $Z_0 \neq 0$  et  $Z_1 \neq 0$  de  $\mathbf{P}^{17}$ . Dans la carte  $Z_0 \neq 0$ ,  $(\varphi_{\mathbf{c}})_* \mathcal{V}_1$  peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \frac{1}{4}(2z_1(3z_1 - 2z_2) + z_4 - c_2) - z_3, \\ \dot{z}_2 &= 3z_1(z_1 - z_2) - 2z_3 + \frac{1}{2}(z_2^2 - c_2), \\ \dot{z}_3 &= \frac{1}{2}(z_2z_3 - z_5 - z_6), \\ \dot{z}_4 &= -z_6 - \frac{1}{2}z_1(z_4 + c_2), \\ \dot{z}_5 &= 8(z_7 + z_8) + \frac{1}{2}(c_3 + c_2z_3 + z_9 - z_5(3z_1 - z_2)), \\ \dot{z}_6 &= 8(z_7 + z_8) + \frac{1}{2}(c_3 + c_2z_3 + z_9 - z_1(2z_5 - z_6)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{z}_7 &= \frac{1}{2}(z_1 z_7 - z_{10}), \\
\dot{z}_8 &= \frac{1}{2}z_2 z_8 - z_{11}, \\
\dot{z}_9 &= c_3(2z_1 - z_2) + 8(3z_1 z_7 - 2z_{10} - z_{11}) + \frac{3}{2}z_1(c_2 z_3 - z_9) \\
&\quad + \frac{1}{2}(z_2 z_9 + 6z_3 z_6) + \frac{1}{2}c_2(z_6 - z_5), \\
\dot{z}_{10} &= 2z_{12} + \frac{1}{2}(z_{10}(z_1 - z_2) - z_3 z_7), \\
\dot{z}_{11} &= 2z_{12} - \frac{1}{2}(z_3 z_8 + z_1 z_{11}), \\
\dot{z}_{12} &= \frac{1}{2}z_2 z_{12}, \\
\dot{z}_{13} &= 2z_{12}(z_1 + z_2) - z_6 z_7 - \frac{1}{2}(z_1 z_{13} - z_{15}), \\
\dot{z}_{14} &= 2z_{12}(z_1 + z_2) - \frac{1}{2}(z_5 z_8 + z_1 z_{14}), \\
\dot{z}_{15} &= z_5 z_{10} + 2z_{17} + \frac{1}{2}(z_1 z_{15} + c_3 z_7 - z_4 z_{13}), \\
\dot{z}_{16} &= z_{12}(2z_3 - z_4) + z_{17} + 8z_8(z_8 - 2z_7) - \frac{1}{2}(z_1 z_{16} + z_3 z_{14}), \\
\dot{z}_{17} &= \frac{1}{2}c_2 z_2 z_{12}.
\end{aligned}$$

Pour la seconde carte  $Z_1 \neq 0$ , on pose  $s_i = z_i/z_1$  pour  $i = 0, \dots, 17$ . Alors les équations différentielles quadratiques prennent la forme suivante

$$\begin{aligned}
\dot{s}_0 &= s_2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}s_0(4s_3 - s_4 + s_0), \\
\dot{s}_1 &= 0, \\
\dot{s}_2 &= -\frac{1}{4}(s_0(2s_5 - c_2 - 4s_6) - s_4) + \frac{1}{2}s_3(2 - s_2), \\
\dot{s}_3 &= s_5 - 8s_0(2s_7 + s_8) - \frac{1}{2}(s_0(c_2 s_3 + s_9) + s_6 + s_3^2), \\
\dot{s}_4 &= s_6 + s_0(c_3 s_0 + 32s_7) + \frac{1}{4}c_2(2 - s_0(c_2 s_0 - s_4)), \\
\dot{s}_5 &= 16s_0(s_{10} + s_{11}) - \frac{1}{2}(s_5(s_3 + s_4) + s_9 - c_3 s_0(2 - s_2) - s_3 s_6), \\
\dot{s}_6 &= 16s_0 s_{11} + \frac{1}{4}(2c_3 s_0(s_2 - 1) + s_5(s_4 + c_2 s_0)), \\
\dot{s}_7 &= s_3 s_7 + s_0 s_{12} + \frac{1}{2}(s_{10} + s_0(c_2 s_7 - s_{13})), \\
\dot{s}_8 &= -2s_0 s_{12} - \frac{1}{2}(s_0 s_{14} + s_{11}(1 - s_2)), \\
\dot{s}_9 &= 8(s_{10} - s_{11}) - s_6^2 + 8(s_0 s_{13} + s_3 s_7) - \frac{1}{2}(s_3 s_9 + c_2 s_6), \\
\dot{s}_{10} &= s_6 s_7 - \frac{1}{2}(s_4 s_{10} + s_2(4s_{12} - s_{13})), \\
\dot{s}_{11} &= -\frac{1}{2}(s_{14} + s_3 s_{11}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{12} &= 6c_1s_0^2 - \frac{1}{2}s_{12}(2s_3 + s_4 - c_2s_0), \\
\dot{s}_{13} &= 16c_1s_0^2 - 4s_3s_{12} + 8s_7^2 + \frac{1}{2}(s_3s_{13} + s_5s_{10}), \\
\dot{s}_{14} &= 8c_1s_0^2 - (2s_3 + s_4 + c_2s_0)s_{12} - s_{16} - \frac{1}{2}(c_3s_8 - (c_2 - s_5)s_{11}), \\
\dot{s}_{15} &= 2s_{12}(s_5 - s_6) + 8((s_2 - 3)c_1s_0 + s_7s_{10}) + \frac{1}{2}(s_3s_{15} - s_5s_{13}), \\
\dot{s}_{16} &= 8s_8(s_{11} - 2s_{10} + c_1s_0) - \frac{1}{2}s_{14}(s_5 + s_6 + c_2), \\
\dot{s}_{17} &= 4c_1(s_0s_3 + s_2 - 1) - 16s_7s_{12} - \frac{1}{4}c_2(s_{12}(s_4 + 2s_3 - c_2s_0) - 24c_1s_0^2).
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.22, on conclut donc que le champ de vecteurs  $(\varphi_{\mathbf{c}})_*\mathcal{V}_1$  se prolonge en un champ de vecteurs holomorphe sur tout  $\mathbf{P}^{17}$ , que nous noterons  $\overline{\mathcal{V}}_1$ . Ainsi, on a montré que la condition (3) du Théorème de Liouville complexe est satisfaite.

### Flot de $\overline{\mathcal{V}}_1$ dans la partie affine

Nous allons montrer à présent que le flot du champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  partant des points de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est immédiatement envoyé dans la partie affine  $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$ . Cela est vérifié pour tous les points de  $\varphi_{\mathbf{c}}^{(i)}(\Gamma_{\mathbf{c}}^{(i)})$  ( $i = 0, 1, 2$ ) du fait de la convergence des trois balances principales. Il nous suffira de le faire pour les six points  $P^{\epsilon_1}$ ,  $Q^{\epsilon_2}$ ,  $S_1$  et  $S_2$ .

Pour les quatre points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$  d'intersection des courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ , le premier terme de la série  $z_3(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)})$  admet un pôle pour  $\varsigma = 0$ , il est maximal parmi les premiers coefficients des séries  $z_i(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)})$ ,  $i = 9, 12, 13, 14, 17$  et ainsi la fonction  $z_3$  définit une carte en ces points. Montrons que, dans un voisinage des points  $\infty_{\epsilon_1}$  et  $\infty_{\epsilon_2}$ , la série  $1/z_3(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)})$  admet une limite non nulle. En utilisant (5.9), les quatre premiers termes de  $z_3$  sont donnés par

$$z_3(t; m_0) = \frac{2a}{t} + 4c - (2e + ad - ac)t - \frac{1}{3}(ae + 12cd - 2c(a^2 + 2c))t^2 + O(t^3),$$

les premiers termes de sa série inverse sont alors donnés par

$$\frac{1}{z_3(t; m_0)} = \frac{t}{2a} - \frac{c}{a^2}t^2 + O(t^3).$$

En substituant (5.12) et en écrivant les coefficients en fonction du paramètre local  $\varsigma$  autour des points  $\infty_{\epsilon_1}$  et  $\infty_{\epsilon_2}$  respectivement en utilisant (5.14) et (5.15), on a

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \frac{1}{z_3}(t; \varsigma) = -\frac{1}{4}t^2 + O(t^3) \neq 0,$$

ce qui montre que les courbes intégrales du champ  $\overline{\mathcal{V}}_1$  qui partent des points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$  vont dans la partie affine  $\varphi(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$ .

Au point  $S_1$ , intersection des courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ , le seul résidu qui a le plus grand pôle parmi les résidus des séries  $z_0(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}), \dots, z_{17}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)})$  est celui de  $z_{15}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)})$ , la fonction  $z_{15}$  définit donc une carte autour de ce point. Considérons la balance principale  $x(t; m_1)$  (5.11) où le calcul nécessite six termes supplémentaires. En écrivant les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  de  $1/z_{15}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)})$  en fonction du paramètre local  $\varsigma$  autour de  $\infty^1$  en utilisant (5.18) et (5.20), on trouve

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \frac{1}{z_{15}}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}) = \frac{1}{576}t^7 + O(t^8).$$

En considérant la balance  $x(t; m_0)$  avec également six termes supplémentaires, la paramétrisation locale (5.17) autour du point  $\infty^2$ , on obtient

$$\lim_{\varsigma \rightarrow 0} \frac{1}{z_{15}}(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)}) = \frac{1}{576} t^7 + O(t^8).$$

Les deux limites sont non nulles, on en déduit que la courbe intégrale du champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  issue du point  $S_1$  est envoyé dans la partie affine.

De même, pour le point  $S_2$ , en utilisant la fonction  $z_{16}$  puisque celle-ci correspond à la seule coordonnée non nulle du point, on arrive à la même conclusion en vérifiant que les limites suivantes sont non nulles

$$\lim_{p \rightarrow \infty''} \frac{1}{z_{16}(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(1)})} = \lim_{p \rightarrow \infty^2} \frac{1}{z_{16}(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)})} = \frac{1}{576} t^7 + O(t^8) \neq 0.$$

Ainsi le flot du champ de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  partant de chacun des points de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(0)} \cup \mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(1)} \cup \mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(2)}$  va dans la partie affine.

Pour terminer la preuve de l'intégrabilité algébrique, il est nécessaire de montrer qu'il n'existe pas d'autres diviseurs passant par les points  $P^{\epsilon_1}$ ,  $Q^{\epsilon_2}$ ,  $S_1$  et  $S_2$  c'est-à-dire la condition (3.15) est remplie en chacun de ces points.

En ce qui concerne, les deux points  $P^{\epsilon_1}$ , on a, en fonction du paramètre local  $\varsigma$  dans un voisinage de  $\infty_{\epsilon_1} \in \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)}$  que

$$\frac{1}{z_3(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)})} = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{c_1}} \varsigma t - t^2 \right) + O(t^3, \varsigma^2 t),$$

de sorte que  $\mathcal{D}_{\mathfrak{c}}$  est de multiplicité 2 en chacun de ces points. Et puisque la fonction  $z_3$  admet un pôle simple sur chacun des diviseurs, on en déduit qu'il n'existe pas de diviseurs passant par les deux points  $P^{\epsilon_1}$ . Pour les deux autres points  $Q^{\epsilon_2}$  d'intersection des courbes  $\mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(2)}$ , où on considère toujours la fonction  $z_3$ , au voisinage du point  $\infty_{\epsilon_1}$  en utilisant (5.15), on a de même

$$\frac{1}{z_3(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)})} = -\frac{1}{4} \left( \frac{2}{\sqrt{c_1}} \varsigma t + t^2 \right) + O(t^3, \varsigma^2 t),$$

ce qui montre aussi qu'il n'y a pas d'autres diviseurs passant par ces deux points.

Pour le point  $S_1$ , on le fait en calculant les premiers termes de la série  $1/z_{15}(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)})$  en utilisant la solution de Laurent  $x(t; m_0)$  et on exprime ensuite les paramètres libres en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  dans un voisinage de  $\infty^1$  en utilisant (5.16). La série résultante en  $\varsigma$  et  $t$  devrait commencer avec des monômes de degré 3 car le point  $S_1$  est de multiplicité 2 et 1 sur les diviseurs  $\mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathfrak{c}}^{(1)}$  respectivement et la fonction  $z_{15}$  a un pôle simple sur chacun de ces deux diviseurs. En effet, on a

$$\frac{1}{z_{15}(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)})} = -\frac{1}{2} \frac{t}{e(a^3 - 4ac + 16e)} - \frac{1}{4} \frac{(a^2 - 4c)^2}{e(a^3 - 4ac + 16e)} t^2 + O(t^3),$$

et, par suite on trouve

$$\frac{1}{z_{15}(t; \Gamma_{\mathfrak{c}}^{(0)})} = -\frac{1}{32} \varsigma^2 t + O(\varsigma^3, \varsigma t^2),$$

de telle sorte que  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})} \setminus \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$  admet 3 pour degré au point  $S_1$  (ce qui montre aussi que  $S_1$  est un point double ordinaire pour le diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ). Il n'existe donc pas d'autres diviseurs passant par le point  $S_1$ . De même, du fait de l'involution  $\sigma$ , pour le point  $S_2$  on a, dans un voisinage de  $\infty^1$ , en utilisant la fonction  $z_{16}$

$$\frac{1}{z_{16}(t; \Gamma_{\mathbf{c}}^{(0)})} = -\frac{1}{32} \varsigma^2 t + O(\varsigma^3, \varsigma t^2),$$

ce qui prouve également que par le point  $S_2$  il ne passe aucun autre diviseur. Remarquons que comme le champ de vecteurs  $\mathcal{V}_1$  est seulement tangent à l'une des branches de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  passant par  $S_1$  (voir ci-bas), on a fait le développement suivant la branche non-tangente. De même pour le diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  avec le point  $S_2$ . Ainsi, il n'existe pas d'autres diviseurs dans  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})} \setminus \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$  outre les trois diviseurs  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  déjà trouvés.

Les conditions du théorème de Liouville Complexe étant satisfaites, il s'ensuit que, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la variété projective  $\overline{\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})} = \varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}}) \cup \mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  est une surface abélienne et les restrictions des champs de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  et  $\overline{\mathcal{V}}_2$  à cette surface sont linéaires. On résume cela dans le théorème suivant

**Théorème 5.5.** *Soit  $(\mathcal{H}, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  le système intégrable décrivant le réseau de Toda  $\mathbf{c}_2^{(1)}$  où  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  et  $\{\cdot, \cdot\}$  sont données respectivement par (5.3) et (5.4), avec les champs de vecteurs commutants (5.2).*

(i)  $(\mathcal{H}, \{\cdot, \cdot\}, \mathbf{F})$  est un système algébriquement complètement intégrable homogène à poids ;  
(ii) Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la fibre  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  de son application moment se complète en une surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ , par l'adjonction d'un diviseur singulier  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  composé des trois composantes irréductibles :  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont deux courbes singulières de genre 2 et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  une courbe lisse de genre 3 et isomorphe à  $\overline{\Gamma_{\mathbf{c}}^{(1)}}$ . Les courbes s'intersectent comme indiqué dans la figure FIG. 5.1.

**Proposition 5.6.** *Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  admet huit demi-périodes sur la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  et huit demi-périodes à l'infini : les six points singuliers du diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  et deux autres points sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ .*

*Démonstration.* Soit l'involution  $\sigma$  (5.8). A partir de la solution de Laurent  $x(t; m_1)$  (5.11), on peut voir facilement que les fonctions  $x_0, x_1, x_2$  restent invariantes par la transformation

$$(t, \alpha, \gamma, \beta, \delta) \mapsto (-t, -\alpha, \gamma, \beta, \delta), \quad (5.28)$$

tandis que  $y_0, y_1, y_2$  changent en  $-y_0, -y_1, -y_2$ . Donc l'involution  $\sigma$  est transformée à l'infini en l'involution

$$\sigma_1 : \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}, \quad (\alpha, \xi) \mapsto (-\alpha, \xi). \quad (5.29)$$

Les points fixes de  $\sigma_1$  étant donnés par les points de ramification de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  sur la courbe elliptique  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  (5.21), on en déduit que l'involution  $\sigma$  admet 4 points fixes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  en particulier les 2 points singuliers  $S_1$  et  $S_2$  de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ . L'involution  $\sigma$  sur  $\varphi_{\mathbf{c}}(\mathbf{F}_{\mathbf{c}})$  s'étend sur l'espace projectif  $\mathbf{P}^{17}$  comme suit

$$\sigma(z_0, z_1, \dots, z_{17}) = (z_0, -z_1, -z_2, z_3, z_4, -z_5, -z_6, z_7, z_8, \\ z_9, -z_{10}, -z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}, -z_{15}, -z_{16}, z_{17}).$$

On vérifie aisément que les quatre points  $P^\pm$  et  $Q^\pm$ , intersections des courbes  $\mathcal{D}_c^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_c^{(2)}$ , sont des points fixes pour l'involution  $\sigma$ . Ce qui fait un total de 8 points fixes à l'infini y compris les quatre autres sur la courbe  $\mathcal{D}_c^{(1)}$ . L'involution  $\sigma$  admet également 8 points fixes

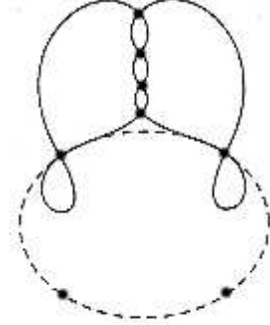


FIG. 5.2 – • demi-périodes à l'infini sur  $\mathbf{T}_c$ .

sur la variété affine  $\varphi_c(\mathbf{F}_c)$ , en effet si on substitue  $y_0 = y_1 = y_2 = 0$  dans le système formé par les équations  $F_i = c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), on obtient le système

$$\begin{cases} x_0 x_1^2 x_2 = c_1, \\ -4(x_0 + x_2) - 8x_1 = c_2, \\ 16(x_0 x_2 + x_1^2) = c_3. \end{cases} \quad (5.30)$$

Résolvons la dernière équation du système (5.30) en  $x_0 x_2$  et substituons l'expression trouvée dans la deuxième équation ; alors on arrive à l'équation bicarrée

$$16x_1^4 - c_3 x_1^2 + 16c_1 = 0, \quad (5.31)$$

dont le discriminant donne

$$4096c_1(c_3^2 - 1024c_1)^2.$$

Pour  $c \in \Omega$ , on en déduit que l'équation (5.31) n'admet que des racines simples.

Résolvons la deuxième équation de (5.30) en  $x_2$  et substituons dans la troisième ; cela conduit à l'équation de degré 2

$$16x_0^2 + 4(c_2 + 8x_1)x_0 + c_3 - 16x_1^2 = 0. \quad (5.32)$$

Le discriminant de l'équation (5.32) par rapport à  $x_0$  est égal à

$$16(128x_1^2 + 16c_2x_1 + c_2^2 - 4c_3).$$

Pour chaque  $x_1$ , l'équation (5.32) admet des solutions distinctes  $x_0$  si le système suivant

$$\begin{cases} 16x_1^4 - c_3 x_1^2 + 16c_1 = 0, \\ 128x_1^2 + 16c_2x_1 + c_2^2 - 4c_3 = 0 \end{cases} \quad (5.33)$$

n'admet pas de solutions. Par un calcul direct avec Maple, le résultant en  $x_1$  du système conduit, à une constante près, au carré de

$$(c_2^2 - 4c_3)^2 - 16384c_1.$$

Par conséquent si  $\mathbf{c} \in \Omega$ , le système (5.33) n'admet pas de solution c'est-à-dire pour chaque  $x_1$  l'équation (5.32) n'a pas une racine double. En conclusion, pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , l'involution  $\sigma$  admet 8 points fixes dans la partie affine de  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ .  $\square$

**Théorème 5.7.** *Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$ , la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  est le dual de la surface de Prym  $\text{Prym}(\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}/\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)})$ , où  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est la courbe elliptique donnée par (5.21).*

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  l'involution définie en (5.8). Pour  $\mathbf{c} \in \Omega$  sa restriction à  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  s'étend en une involution  $\iota$  sur la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  qui laisse invariant les deux champs de vecteurs  $\overline{\mathcal{V}}_1$  et  $\overline{\mathcal{V}}_2$ , donc  $\iota$  est l'involution (-1) sur  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ . Puisque  $\iota$  laisse invariant la partie affine  $\mathbf{F}_{\mathbf{c}}$  de  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$ , elle laisse aussi invariant le diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}$  donc permute ses composantes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ ,  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ . Comme les courbes  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  sont isomorphes et  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  est non isomorphes à ces dernières alors  $\iota(\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}) = \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ . Par conséquent  $\iota$  se restreint en une involution sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ ; d'après (5.28) et (5.29) on en déduit que  $\sigma_1 = \iota|_{\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}}$ . La courbe lisse  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  étant un revêtement double la courbe elliptique  $\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)} = \mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}/\sigma_1$  on en déduit grâce au Théorème 2.11 que la surface abélienne  $\mathbf{T}_{\mathbf{c}}^2$  est le dual de  $\text{Prym}(\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}/\mathcal{E}_{\mathbf{c}}^{(1)})$ .  $\square$

### 5.3 Formes différentielles holomorphes

Calculons les formes différentielles holomorphes sur le diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ . Avec les notations du Paragraphe 3.4.4, choisissons les fonctions  $y_0 := z_2$  et  $y := z_3$ ; à partir de la solution de Laurent  $x(t; m_0)$  (5.9), on a

$$\begin{aligned} y_0^{(0)} &= -2, & y_0^{(1)} &= a, \\ y^{(0)} &= 2a, & y^{(1)} &= 4c, \end{aligned}$$

et, en utilisant (5.5) et (5.9), on a

$$\mathcal{V}_2 \left[ \frac{1}{y_0} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} = -2a^2 + 8c, \quad \mathcal{V}_2 \left[ \frac{y}{y_0} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} = -2a^2(a^2 - 4c) - 32(ae + 3cd).$$

Il suit que

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{(y_0^{(0)})^2} \begin{vmatrix} y_0^{(0)} & \mathcal{V}_2 [1/y_0]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} \\ y_0^{(0)} y^{(1)} - y^{(0)} y_0^{(1)} & \mathcal{V}_2 [z_3/y_0]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -2 & \mathcal{V}_2 [1/y]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} \\ -2a^2 - 8c & \mathcal{V}_2 [z_3/y_0]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} \end{vmatrix} \\ \delta &= -4c(a^2 - 4c) - 16(ae + 3cd). \end{aligned}$$

Les formes différentielles holomorphes  $dt_1$  et  $dt_2$ , restreintes à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$ , sont donc données par

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{\delta y_0^{(0)}} d \left( \frac{y^{(0)}}{y_0^{(0)}} \right) = \frac{da}{2\delta}, \\ \omega_2 &= -\frac{1}{\delta} \mathcal{V}_2 \left[ \frac{1}{y_0} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}} d \left( \frac{y^{(0)}}{y_0^{(0)}} \right) = -\frac{a^2 - 4c}{2\delta} = -\frac{a^2 e^2 - c_1}{2e^2 \delta} da. \end{aligned}$$

Avec les choix des fonctions  $y_0 = z_2$  et  $y = z_4$ , restreintes à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ , on a

$$\begin{aligned} y_0^{(0)} &= 4, & y_0^{(1)} &= 0, \\ y^{(0)} &= -8\alpha, & y^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

et, en utilisant (5.5) et (5.11), on a

$$\mathcal{V}_2 \left[ \frac{1}{y_0} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}} = -\frac{\alpha^2}{4} - 3\gamma, \quad \mathcal{V}_2 \left[ \frac{z_4}{y_0} \right]_{|\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}} = 8(\delta - \beta).$$

On trouve que

$$\Delta = \frac{1}{16} \begin{vmatrix} 4 & -\frac{\alpha^2}{4} - 3\gamma \\ 0 & 8(\delta - \beta) \end{vmatrix} = 2(\delta - \beta).$$

Les formes différentielles holomorphes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$ , sont donc données par

$$\omega_1 = \frac{d\alpha}{2(\beta - \delta)} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\frac{1}{\Delta} \left( \frac{\alpha^2}{2} + 6\gamma \right) d\alpha. \quad (5.34)$$

**Proposition 5.8.** *Le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est transversal au diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  (respectivement  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$ ) en les 4 points  $P^{\epsilon_1}$ ,  $Q^{\epsilon_2}$  et tangent (doublement) à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  au point  $S_1$  (respectivement  $S_2$ ).*

*Démonstration.* Si on écrit  $\omega_1$  en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  sur un voisinage du point  $\infty^2$  en utilisant (5.17), on trouve  $\omega_1 = -\varsigma^2 d\varsigma$ . De même, si on écrit  $\omega_1$  en fonction d'un paramètre local  $\varsigma$  sur un voisinage du point  $\infty^1$  en utilisant (5.16), on trouve  $\omega_1 = -\frac{1}{32} d\varsigma$ . Ce qui montre d'une part que  $\omega_1$  admet un zéro double au point  $S_1$  et d'autre part est non nulle en ce point, de telle sorte que le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est seulement tangent à l'une des branches de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  passant par  $S_1$  et transversal à l'autre. Le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est transversal au diviseur  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(0)}$  en les points  $P^{\epsilon_1}$ , en effet dans un voisinage des deux points  $\infty_{\epsilon_1}$  en utilisant (5.14) la forme  $\omega_1$  s'écrit

$$\omega_1 = \frac{\epsilon_1}{2\sqrt{c_1}\delta_1} d\varsigma.$$

Pour les deux autres points  $Q^{\epsilon_2}$  on arrive à la même conclusion. En utilisant l'involution  $\pi$ , qui préserve le champ  $\bar{\mathcal{V}}_1$ , il s'en suit également que  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est seulement tangent à l'une des branches de  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  passant par  $S_2$  et qu'il est transversal à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(2)}$  en les quatre points  $P^{\epsilon_1}$  et  $Q^{\epsilon_2}$ . On montre que dans un voisinage du point  $\infty'$  en (5.20) la forme  $\omega_1$  s'écrit

$$\omega_1 = (-\varsigma^2 + O(\varsigma^3)) d\varsigma,$$

on en déduit que le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est tangent doublement à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  au point  $S_1$ . Du fait de l'involution  $\pi$ , le champ de vecteurs  $\bar{\mathcal{V}}_1$  est également tangent doublement à  $\mathcal{D}_{\mathbf{c}}^{(1)}$  au point  $S_2$ .  $\square$



# Bibliographie

- [1] M. Adler. On a trace functional for formal pseudo differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations. *Invent. Math.*, 50(3) :219–248, 1978/79.
- [2] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties and representation theory. *Adv. in Math.*, 38(3) :318–379, 1980.
- [3] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. The algebraic integrability of geodesic flow on  $SO(4)$ . *Invent. Math.*, 67(2) :297–331, 1982.
- [4] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. The complex geometry of the Kowalewski-Painlevé analysis. *Invent. Math.*, 97(1) :3–51, 1989.
- [5] Mark Adler and Pierre van Moerbeke. The Toda lattice, Dynkin diagrams, singularities and abelian varieties. *Invent. Math.*, 103(2) :223–278, 1991.
- [6] Mark Adler, Pierre van Moerbeke, and Pol Vanhaecke. *Algebraic integrability, Painlevé geometry and Lie algebras*, volume 47 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] Wolf Barth. Abelian surfaces with  $(1, 2)$ -polarization. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 41–84. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [8] C. Bechlivanidis and P. van Moerbeke. The Goryachev-Chaplygin top and the Toda lattice. *Comm. Math. Phys.*, 110(2) :317–324, 1987.
- [9] O. I. Bogoyavlensky. On perturbations of the periodic Toda lattice. *Comm. Math. Phys.*, 51(3) :201–209, 1976.
- [10] Pantelis A. Damianou. Multiple Hamiltonian structures for Toda-type systems. *J. Math. Phys.*, 35(10) :5511–5541, 1994. Topology and physics.
- [11] Rui Loja Fernandes and Pol Vanhaecke. Hyperelliptic Prym varieties and integrable systems. *Comm. Math. Phys.*, 221(1) :169–196, 2001.
- [12] H. Flaschka. On the Toda lattice. II. Inverse-scattering solution. *Progr. Theoret. Phys.*, 51 :703–716, 1974.
- [13] H. Flaschka. The Toda lattice. I. Existence of integrals. *Phys. Rev. B (3)*, 9 :1924–1925, 1974.
- [14] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [15] Phillip A. Griffiths. *Introduction to algebraic curves*, volume 76 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.
- [16] L. Haine. Geodesic flow on  $SO(4)$  and abelian surfaces. *Math. Ann.*, 263(4) :435–472, 1983.
- [17] Luc Haine. The algebraic complete integrability of geodesic flow on  $SO(N)$ . *Comm. Math. Phys.*, 94(2) :271–287, 1984.
- [18] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [19] M. Hénon. Integrals of the Toda lattice. *Phys. Rev. B (3)*, 9 :1921–1923, 1974.
- [20] M. Kac and Pierre van Moerbeke. A complete solution of the periodic Toda problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 72(8) :2879–2880, 1975.
- [21] Bertram Kostant. The solution to a generalized Toda lattice and representation theory. *Adv. in Math.*, 34(3) :195–338, 1979.
- [22] Sophie Kowalevski. Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.*, 12(1) :177–232, 1889.

- [23] I. M. Krichever. Algebraic curves and nonlinear difference equations. *Uspekhi Mat. Nauk*, 33(4(202)) :215–216, 1978.
- [24] A. Lesfari. Abelian surfaces and Kowalewski's top. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 21(2) :193–223, 1988.
- [25] A. Lesfari. The generalized Hénon-Heiles system, abelian surfaces and algebraic complete integrability. *Rep. Math. Phys.*, 47(1) :9–20, 2001.
- [26] Ahmed Lesfari. The complex geometry of an integrable system. *Arch. Math. (Brno)*, 39(4) :257–270, 2003.
- [27] André Lichnerowicz. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées. *J. Differential Geometry*, 12(2) :253–300, 1977.
- [28] S. V. Manakov. Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Ž. Èksper. Teoret. Fiz.*, 67(2) :543–555, 1974.
- [29] C.-M. Marle. Lie group actions on a canonical manifold. In *Symplectic geometry (Toulouse, 1981)*, volume 80 of *Res. Notes in Math.*, pages 144–166. Pitman, Boston, Mass., 1983.
- [30] David Mumford. *Tata lectures on theta. II*, volume 43 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1984. Jacobian theta functions and differential equations, With the collaboration of C. Musili, M. Nori, E. Previato, M. Stillman and H. Umemura.
- [31] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. Explicit solutions of classical generalized Toda models. *Invent. Math.*, 54(3) :261–269, 1979.
- [32] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. The Toda chain as a reduced system. *Teoret. Mat. Fiz.*, 45(1) :3–18, 1980.
- [33] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. Integrable systems and Lie algebras. In *Mathematical physics reviews, Vol. 3*, volume 3 of *Soviet Sci. Rev. Sect. C : Math. Phys. Rev.*, pages 151–220. Harwood Academic, Chur, 1982.
- [34] R. Ouzilou. Hamiltonian actions on Poisson manifolds. In *Symplectic geometry (Toulouse, 1981)*, volume 80 of *Res. Notes in Math.*, pages 172–183. Pitman, Boston, Mass., 1983.
- [35] A. M. Perelomov. *Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Vol. I*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990. Translated from the Russian by A. G. Reyman [A. G. Reĭman].
- [36] Luis A. Piovan. Algebraically completely integrable systems and Kummer varieties. *Math. Ann.*, 290(2) :349–403, 1991.
- [37] Luis A. Piovan and Pol Vanhaecke. Integrable systems and projective images of Kummer surfaces. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(2) :351–392, 2000.
- [38] Morikazu Toda. *Theory of nonlinear lattices*, volume 20 of *Springer Series in Solid-State Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1989.
- [39] A. Treibich and J.-L. Verdier. Solitons elliptiques. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, volume 88 of *Progr. Math.*, pages 437–480. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [40] Armando Treibich. Tangential polynomials and elliptic solitons. *Duke Math. J.*, 59(3) :611–627, 1989.
- [41] Pierre van Moerbeke and David Mumford. The spectrum of difference operators and algebraic curves. *Acta Math.*, 143(1-2) :93–154, 1979.
- [42] Pol Vanhaecke. Linearising two-dimensional integrable systems and the construction of action-angle variables. *Math. Z.*, 211(2) :265–313, 1992.
- [43] Pol Vanhaecke. A special case of the Garnier system, (1,4)-polarized abelian surfaces and their moduli. *Compositio Math.*, 92(2) :157–203, 1994.
- [44] Pol Vanhaecke. *Integrable systems in the realm of algebraic geometry*, volume 1638 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2001.
- [45] Alan Weinstein. The local structure of Poisson manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(3) :523–557, 1983.

# Sur l'intégrabilité algébrique des réseaux de Toda : cas particuliers des réseaux $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ et $\mathfrak{c}_2^{(1)}$

## Résumé

Cette thèse a pour but l'étude de deux réseaux de Toda périodiques d'aux avec deux degrés de liberté, ceux qui sont associés aux algèbres de Lie affine  $\mathfrak{d}_3^{(2)}$  et  $\mathfrak{c}_2^{(1)}$ . Pour chacun de ces systèmes, nous démontrons d'abord son intégrabilité algébrique. Ceci permet ensuite d'utiliser de la géométrie algébrique pour décrire les surfaces invariantes génériques, leur compactification en tant que variétés abéliennes, la configuration des courbes à l'infini. Comme application, nous démontrons dans le premier cas une caractérisation des surfaces invariantes génériques comme jacobiniennes de surfaces de Riemann de genre 2, un morphisme vers le système de Mumford et une nouvelle équation de Lax, qui permet d'écrire la solution explicite en termes de fonctions thêta. Pour le deuxième cas, nous démontrons que les surfaces invariantes génériques sont des variétés abéliennes polarisées de type (1,2), que nous caractérisons comme des variétés de Prym, associées à des surfaces de Riemann de genre 3, munies d'une involution.

**Mots clés** : systèmes intégrables, variétés abélienne, intégrabilité algébrique

---

## On algebraic integrability of Toda lattices : particular cases of $\mathfrak{d}_3^{(2)}$ and $\mathfrak{c}_2^{(1)}$

### Abstract

This thesis deals with the study of two periodic Toda lattices with two degrees of freedom, namely those which are associated to affine Lie algebras. For each of these systems, we first show its algebraic integrability. This allows us to use methods of algebraic geometry to describe its generic invariant surfaces, their compactification as Abelian varieties, the configuration and the singularities of the curves at infinity. As an application, we obtain in the first case a characterisation of the generic invariant surfaces as jacobians of Riemann surfaces of genus two, a morphism to Mumford system and a new Lax equation, which allows us to give the explicit solution in terms of theta functions. For the second case, we show that the invariant surfaces are (1,2) polarized Abelian varieties, that we characterize as Prym varieties associated to Riemann surfaces of genus three, admitting an involution.

**Keywords** : integrable systems, Abelian variety, algebraic integrability