THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers)
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Présentée par :
Paola Comparin

Symétrie miroir et fibrations elliptiques spéciales sur les surfaces K3

Directeur(s) de Thèse :
Alessandra Sarti

Soutenue le 26 septembre 2014 devant le jury

Jury :

Président	**Dimitri Markushevich**	Professeur des Universités, Université de Lille 1
Rapporteur	**Matthias Schütt**	Lehrer, Leibniz Universität Hannover, Deutschland
Rapporteur	**Alessandro Chiodo**	Professeur des Universités, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
Membre	**Alessandra Sarti**	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	**Samuel Boissière**	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	**Xavier Roulleau**	Maître de conférences, Université de Poitiers

Pour citer cette thèse :
Paola Comparin. *Symétrie miroir et fibrations elliptiques spéciales sur les surfaces K3* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THÈSE
pour l'obtention du Grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)

Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006

École Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

Secteur de Recherche : Mathématiques et leurs Interactions

Présentée par :

Paola Comparin

Symétrie miroir et fibrations elliptiques spéciales sur les surfaces K3

Directrice de thèse : **Alessandra Sarti**

Soutenue le 26 Septembre 2014
devant la Commission d'Examen

JURY

Alessandro Chiodo	Professeur, Institut de Mathématiques de Jussieu	Rapporteur
Matthias Schütt	Professeur, Leibniz Universität Hannover	Rapporteur
Samuel Boissière	Professeur, Université de Poitiers	Examinateur
Dimitri Markushevich	Professeur, Université de Lille	Examinateur
Xavier Roulleau	Maître de Conférences, Université de Poitiers	Examinateur
Alessandra Sarti	Professeur, Université de Poitiers	Directrice

Table des matières

Introduction **1**

1 Réseaux, surfaces et fibrations **7**
1.1 Les réseaux . . . 7
1.2 Surfaces et classification, les surfaces K3 . . . 10
1.3 Fibrations elliptiques . . . 12

2 Automorphismes **19**
2.1 Transformations de Cremona . . . 19
2.2 Automorphismes des surfaces K3 . . . 20
2.3 Involutions symplectiques . . . 20
2.3.1 Involutions symplectiques pour une K3 elliptique . . . 21
2.4 Automorphismes non–symplectiques . . . 22
2.4.1 Involutions non–symplectiques . . . 29

I Fibrations elliptiques et involutions de van Geemen-Sarti **31**

3 Les surfaces K3 de type $X_{(r,22-r,\delta)}$ **33**
3.1 Recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ . . . 33

4 Fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ **39**
4.1 Possibilités pour les fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ . . . 39
4.2 Action de l'involution de recouvrement . . . 44
4.3 Existence des fibrations, cas a) . . . 45
4.3.1 Le cas $r = 20$ . . . 45
4.3.2 Le cas $r = 19$ . . . 46
4.3.3 Le cas $r = 18$ . . . 47
4.3.4 Le cas $r = 17$ . . . 48
4.3.5 Le cas $r = 16$ . . . 49
4.3.6 Le cas $r = 15$ . . . 49
4.3.7 Le cas $r = 14$ . . . 49
4.3.8 Le cas $r = 13$ . . . 50
4.3.9 Le cas $r = 12$ . . . 50
4.3.10 Les quotients de $X_{(r,22-r,\delta)}$ par ι . . . 50
4.4 Existence des fibrations, cas b) . . . 51
4.4.1 Le cas $r = 12$ . . . 58
4.4.2 Le cas $r = 13$ . . . 59
4.4.3 Le cas $r = 14$ . . . 59
4.4.4 Le cas $r = 15$ . . . 59
4.4.5 Le cas $r = 16$ . . . 60

4.4.6 Le cas $r = 17$ . . . 61
4.4.7 Le cas $r = 18$ . . . 62
4.4.8 Le cas $r = 19$ . . . 62
4.4.9 Le cas $r = 20$ . . . 63

5 Les involutions de van Geemen-Sarti 65
5.1 Involutions de Morrison-Nikulin . . . 65
5.2 Involutions de van Geemen-Sarti, cas a) . . . 66
5.3 Involutions de van Geemen-Sarti, cas b) . . . 68

II Symétrie miroir pour surfaces K3 75

6 La construction miroir de Berglund-Hübsch 77
6.1 Hypersurfaces dans des espaces projectifs à poids . . . 77
6.2 Obtenir des surfaces K3 . . . 81
6.3 La classification des K3 admissibles . . . 83

7 La symétrie miroir 87
7.1 Symétrie miroir BHCR . . . 87
7.2 Symétrie miroir LPK3 . . . 89
7.3 Le Théorème principal . . . 90
7.4 Exemples . . . 93
7.4.1 Exemple 1 : cas 22a) dans le Tableau C.1 . . . 93
7.4.2 Exemple 2 : cas 13d) dans le Tableau C.1 . . . 95
7.4.3 Exemple 3 : cas 6c) dans le Tableau C.2 . . . 98
7.4.4 Exemple 4 : cas 3a) dans le Tableau C.1 . . . 101

8 La symétrie miroir de Batyrev 105
8.1 Quelques rappels . . . 105
8.1.1 L'anneau de Cox . . . 113
8.2 La symétrie de Batyrev . . . 114
8.3 Construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan . . . 116
8.3.1 La construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan . . . 116
8.3.2 Les polytopes . . . 121
8.3.3 Rélation avec la construction de Batyrev . . . 122

A Possibilités pour les fibrations du cas *b*) 125

B Quotients 135

C Les K3 obtenues avec la construction BHCR 141

Bibliographie 147

Introduction

Une surface K3 est une surface complexe compacte projective lisse X dont le fibré canonique K_X est trivial et d'irregularité nulle, c'est-à-dire dont la dimension de l'espace $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ vaut zero. Les intérêts d'étudier les surfaces K3 sont multiples, dans ce travail de thèse je me suis concentrée sur deux problèmes différents.

Dans un premier temps, j'ai étudié les automorphismes sur les surfaces K3. Un automorphisme symplectique sur une surface K3 est un automorphisme qui agit trivialement sur le deuxième groupe de cohomologie ; dans le cas contraire l'automorphisme est dit non–symplectique. Il y a nombreux travaux sur la classification des automorphismes symplectiques et non-symplectiques sur une surface X de type K3 : Nikulin dans [N1] classifie toute possibilité pour une involution non–symplectique i sur X grâce à l'étude de son lieu fixe et du réseau invariant $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota := \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) : i^*x = x\}$. Le même résultat est établi par Artebani, Sarti, Taki dans [AST] pour tout automorphisme d'ordre premier. De plus, si on considère le quotient de X par une involution symplectique on obtient le modèle singulier d'une surface K3 et donc une isogénie de degré 2 entre deux surfaces K3 (voir [vGT] pour une description précise de ces isogénies). Parmi les involutions symplectiques sur les surfaces K3 on trouve les involutions de van Geemen-Sarti. Dans la première partie de ma thèse j'ai abordé ce sujet pour donner une classification complète des involutions de van Geemen-Sarti sur une classe spéciale de surfaces K3.

Par ailleurs, les surfaces K3 sont toutes et seules les variété Calabi-Yau de dimension 2, où une variété Calabi-Yau est définie comme étant une variété compacte complexe de dimension n dont le fibré canonique K_X est trivial, qui ne contient que des singularités canoniques et telle que $\dim H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. L'étude des variétés de Calabi-Yau a pris d'importance pour le monde scientifique autour des années '90, quand des travaux des physiciens dans la théorie des cordes ont montré une symétrie qui se traduit, en mathématiques, par une symétrie entre familles de variétés de Calabi-Yau de dimension trois (threefold). Après cette première découverte, de nombreux travaux ont traité le sujet de la symétrie miroir et de nombreuses formulations et constructions de symétrie miroir ont été proposées. Dans la deuxième partie de ma thèse j'ai étudié certaines constructions miroir sur les surfaces K3, notamment la construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan (BHCR) et la construction de Batyrev. L'objectif de ce travail était de montrer l'équivalence de ces constructions avec la notion de symétrie miroir pour surfaces K3 polarisées (LPK3) introduite par Dolgachev et Nikulin dans [DN] et [Dol2].

J'ai commencé par étudier les involutions de van Geemen-Sarti sur une classe spéciale de surfaces K3 : les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$. Il s'agit des surfaces obtenues par la désingularisation d'un recouvrement double du plan projectif $\mathbb{P}^2$ ramifié sur une courbe sextique. Ces surfaces admettent naturellement une involution non-symplectique ι, l'involution de recouvrement. De manière équivalente, ces surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ sont obtenues comme recouvrement double de l'eclatement de $\mathbb{P}^2$ en les points singuliers de la sextique. De plus, d'après les résultats de [N1] déjà cités, connaître les invariants topologiques de la courbe sextique (notamment le nombre de ses composantes et leur genres, ainsi que le nombre de

ses points doubles et triples) permet de déduire des invariants du réseau invariant associé à l'involution non–symplectique ι et donc de la surface K3.

Sur ces surfaces on s'interesse aux involutions de van Geemen-Sarti, dont la définition est la suivante :

Définition 1 *Soient X une surface K3 et $\mathcal{E}$ une fibration elliptique sur X, c'est-à-dire un morphisme surjectif de la surface dans $\mathbb{P}^1$ tel que la fibre en un point générique de $\mathbb{P}^1$ est une courbe lisse de genre 1. On suppose qu'il existe une section s de la fibration, dite section zero. Si t est une section de 2-torsion de la fibration, une involution de van Geemen-Sarti sur X est la translation par t.*

Les involutions de van Geemen-Sarti sont des involutions symplectiques de la surface X et préservent la fibration elliptique $\mathcal{E}$ car toute fibre est envoyée sur elle-même. De plus, on a vu qu'en général le quotient d'une surface K3 par une involution symplectique est une surface singulière dont la désingularisation est une surface K3.

La définition d'involution de van Geemen-Sarti implique la présence d'une fibration elliptique sur la surface. Ainsi, pour étudier les involution de van Geemen-Sarti sur $X_{(r,22-r,\delta)}$, on doit d'abord classifier les fibrations elliptiques sur ces surfaces et leur groupe de Mordell-Weil, c'est-à-dire le groupe des sections de la fibration. On voudra surtout étudier la partie de torsion du groupe de Mordell-Weil. Pour classifier les fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ on suit les idées de Oguiso et Kloosterman : le premier a classifié dans [O] les fibrations elliptiques sur une surface de Kummer qui est produit de deux courbes elliptiques non-isogènes. Kloosterman dans [Kl] classifie les fibrations elliptiques sur la surface obtenue à partir du recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de l'union de six droites en position générale. Dans ces deux travaux les auteurs montrent comment classifier les fibrations elliptiques sur une surface K3 admettant une involution non–symplectique qui agit trivialement sur le groupe de Néron-Severi de X. Comme il est suggeré par l'auteur dans [Kl], on peut généraliser cette construction aux surfaces K3 ayant une involution non-symplectique et certaines autres propriétés.

Les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ rentrent dans cette description, c'est pourquoi on classifie les fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ en suivant [O] et [Kl]. Dans certains cas, on donne une description très explicite de comment obtenir ces fibrations : en fait, on peut associer à la sextique un faisceau de courbes rationnelles tel que l'élément général γ du faisceau rencontre la sextique en 4 points lisses (en plus des points de base du faisceau). Cette courbe γ, quand on éclate $\mathbb{P}^2$ et on prend le recouvrement double, donne une courbe elliptique sur la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$. C'est grâce à cette strategie qu'on décrit explicitement les fibrations elliptiques sur les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ et qu'on donne la méthode pour en trouver les équations. C'est un résultat nouveau car ni [O] ni [Kl] contenait les équations explicites des fibrations elliptiques, bien que ces équations aient été données dans un deuxième temps dans [KS] (pour les fibrations elliptiques de [O]) et dans [U] pour les fibrations elliptiques de [Kl].

Il est important remarquer que l'involution non–symplectique ι, qui est compatible avec la fibration elliptique, d'un point de vue géométrique peut agir sur X de deux façons différentes : la première possibilité est que ι soit induite par l'involution de $\mathbb{P}^1$ (la base de la fibration) qui échange τ et $-\tau$. Dans ce cas, ι échange les fibres deux à deux et il n'y a que deux fibres fixes, qui sont les fibres au-dessus des deux points fixes de l'involution sur $\mathbb{P}^1$. Sinon ι agit sur chaque fibre lisse de la fibration comme l'involution qui fixe les points d'ordre 2. Au niveau de la surface, il s'agit d'une involution qui préserve chaque fibre (lisse et singulière). Il faudra donc distinguer les deux comportements de ι dans la classification des fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$.

Les résultats de classification et existence sont les suivants :

Théorème 1 (Proposition 4.1.5 et Proposition 4.1.9) *Soit $X_{(r,22-r,\delta)}$ une surface K3 obtenue comme désingularisation d'un recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long d'une courbe*

sextique. Soit $\mathcal{E} : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$. Alors $\mathcal{E}$ est une des fibrations contenues dans les Tableaux 4.1.2, A.1-A.9.

Théorème 2 (Théorème 4.3.1 et Théorème 4.4.9) *Toute fibration elliptique énumérée dans le Tableau 4.1.2 existe comme fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ sauf trois cas. Le quotient $R_r := X_{(r,22-r,\delta)}/\iota$ est une surface elliptique rationnelle et admet les fibrations elliptiques du Tableau 4.3.1.*

Toutes les fibrations montrées dans les Tableaux A.1-A.9 existent comme fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ (dans le cas $m_2 = n_2 = 0$).

Après avoir classifié les fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$, on regarde les sections de 2-torsion et on obtient donc la classification des involutions de van Geemen-Sarti et des isogénies entre surfaces K3. Cela fait l'objet de la Proposition 5.2.1 et du Théorème 5.3.5. Grâce à la construction explicite décrite au-dessus, on obtient dans certains cas les équations de ces isogénies.

Étant donné que les surfaces K3 sont les seules variétés de dimension 2 qui soient de Calabi-Yau, on peut parler de symétrie miroir pour ces surfaces. C'est l'objet de la deuxième partie de cette thèse.

La formulation de la symétrie miroir a été d'abord introduite pour les variétés de Calabi-Yau de dimension 3, en raison de la découverte par des physiciens de certaines familles de threefold de Calabi-Yau qui possèdent des propriétés de symétrie. Ensuite, plusieurs définitions de symétrie miroir du point de vue des mathématiques ont été données et de nombreuses constructions miroir ont été proposées. Berglund et Hübsch dans les années '90 ont proposé une construction qui permet d'obtenir, grâce à la transposition, deux variétés de Calabi-Yau qui sont hypersurfaces dans des espaces projectifs à poids et qui sont miroir l'une de l'autre. Cette construction a été ameliorée avec l'introduction, par Krawitz (voir [Kra]) et indépendamment par Berglund et Henningson (voir [BHe]), d'un groupe d'automorphismes diagonaux de la variété.

La construction est valable pour des variétés de toute dimension mais on se concentre ici sur les surfaces K3 : soit W un polynôme quasi-homogène dans un espace à poids normalisé $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. On demande que W soit de type Delsarte, c'est-à-dire de la forme

$$W = \sum_{i=1}^{4} \prod_{j=1}^{4} x_j^{a_{i,j}},$$

que l'hypersurface $\{W = 0\}$ soit quasi-smooth et que la matrice des exposants $A_W = (a_{i,j})$ soit inversible sur $\mathbb{Q}$. Une condition supplémentaire est nécessaire pour que la variété obtenue à partir de W soit de Calabi-Yau (et donc une surface K3 dans notre cas) : il faut choisir un polynôme de degré total égal à la somme des poids de $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. On choisit les (w_1, w_2, w_3, w_4) dans la liste des poids classifiés par Reid et indépendamment par Yonemura [Y] et on introduit également un groupe G d'automorphismes diagonaux. La désingularisation de $\{W = 0\}/G$ est donc une surfaces K3 qu'on note $X_{W,G}$.

La matrice transposée A_W^T et le groupe transposé G^T, dont la définition est donnée par Krawitz [Kra], permettent d'obtenir la surface miroir au sens de BHCR qui est la désingularisation de $\{W^T = 0\}/G^T$. Le théorème de Chiodo et Ruan 7.1.3, valable en dimension quelconque, assure que la paire $([\{W = 0\}/G], [\{W^T = 0\}/G^T])$ est une paire d'orbifolds de Calabi-Yau qui sont miroirs en sens classique.

Pour les surfaces K3 un autre type de symétrie est décrite par Dolgachev et Nikulin dans [Dol2] et [DN] : il s'agit de la symétrie miroir pour surfaces K3 polarisées (LPK3). On part d'une famille de surfaces de type K3 polarisées par un réseau L (avec certaines conditions)

et on obtient une famille miroir de dimension $20 - \text{rang}(L)$ de surfaces K3 polarisées. Cela permet donc d'établir une symétrie miroir entre les deux familles de surfaces polarisées.

Une troisième construction miroir est la construction proposée par Batyrev dans le cadre de la géométrie torique (voir [Ba]). Il s'agit de considérer les variétés Calabi-Yau (de dimension quelconque) qui sont hypersurfaces de variétés toriques qui sont Fano. Ces variétés de Fano s'obtiennent à partir des polytopes reflexifs : soit Δ un polytope reflexif de dimension n et $\mathbb{P}_\Delta$ la variété torique obtenue à partir de Δ. On sait que $\mathbb{P}_\Delta$ est une variété de Fano si et seulement si le polytope Δ est reflexif. Batyrev prouve de plus que l'hypersurface anticanonique générique $V \in |-K_{\mathbb{P}_\Delta}|$ est une variété de Calabi-Yau de dimension $n-1$. Donc il propose de prendre en considération la variété torique obtenue du polytope polaire Δ° et, comme le polytope polaire d'un polytope reflexif est reflexif (voir [Ba]), cela donne à nouveau une famille de variétés de Calabi-Yau. Ainsi on obtient deux familles de variétés de Calabi-Yau dans $|-K_{\mathbb{P}_\Delta}|$ et $|-K_{\mathbb{P}_{\Delta^\circ}}|$. Batyrev a conjecturé que cette construction donne des familles miroirs de variétés de Calabi-Yau et des preuves de ça sont données par le fait que les nombres de Hodge de deux familles s'interchangent bien (voir [Ba] et [CK]) :

Théorème 3 *Soit Δ un polytope reflexif de dimension n et soit Δ° le polytope polaire. Soit Σ (resp. Σ°) est une subdivision projective maximale de l'éventail normal de Δ (resp. Δ°). Alors si V (resp. V°) est une hypersurface anticanonique générique dans $\mathbb{P}_\Sigma$ (resp. $\mathbb{P}_{\Sigma^\circ}$), on a*

$$h^{1,1}(V) = h^{n-2,1}(V^\circ) \text{ et } h^{n-2,1}(V) = h^{1,1}(V^\circ).$$

En revanche, on observe que pour les surfaces K3 l'échange des nombres de Hodge ne veut rien dire, car le diamant de Hodge d'une surface K3 est fixé.

Un aspect intéressant de la symétrie miroir est voir quand et sur quelles surfaces les différentes définitons coïncident. Dans cette thèse je me suis intéressée aux surfaces K3 qui sont obtenues avec la construction BHCR (et sont donc hypersurfaces dans un des 95 espaces projectifs à poids classifiés par Reid et Yonemura) qui presentent, en plus, un automorphisme non-symplectique σ_p d'ordre p premier. Cela est une généralisation du cas traité dans [ABS] où les auteurs prennent en consideration les surfaces K3 avec une involution non–symplectique, c'est-à-dire $p = 2$. La forme du polynôme W pour ces surfaces est la suivante :

$$W = x_1^p + f(x_2, x_3, x_4) \tag{0.0.1}$$

où p est premier et la forme de f est établie par un résultat de Kreuzer et Skarke (voir 6.1.10). D'abord on classifie toute possibilité pour W et le groupe d'automorphismes diagonaux G. Vu qu'on desire que la surface obtenue $X_{W,G}$ soit de type K3 on aura forcement que $p \leq 19$ et au final on ne trouve des polynômes de la forme (0.0.1) que pour $p = 3, 5, 7, 13$. Ensuite on considère une polarisation pour ces surfaces. Une première idée pourrait être de polariser les surfaces avec l'entier groupe de Néron-Severi mais cette méthode, investiguée par Belcastro dans [Be], ne donne pas des résultats. Donc on choisit de polariser les surface par un réseau plus petit : le réseau invariant associé à l'automorphime σ_p. Cela permet d'établir le résultat suivant (voir Chapitre 5 et 6 pour les notations) :

Théorème 4 (Théorème 7.3.4) *Soit $X_{W,G}$ la surface K3 obtenue avec la construction de BHCR à partir d'un polynôme W de la forme* (0.0.1). *Soit σ_p l'automorphisme non-symplectique d'ordre premier $p \geq 3$. Soient X_{W^T,G^T} la variété miroir BHCR et σ_p^T son automorphisme non-symplectique. Alors les deux surfaces $X_{W,G}$ polarisée par le réseau invariant $H^2(X,\mathbb{Z})^{\sigma_p}$ et X_{W^T,G^T} polarisée par le réseau invariant $H^2(X,\mathbb{Z})^{\sigma_p^T}$ sont miroir l'une de l'autre au sens LPK3.*

La preuve de ce théorème est faite en calculant, pour tout polynôme W de la forme (0.0.1) et pour toute possibilité pour le groupe G, les invariants associés au lieu fixe de σ_p et au réseau invariant $S(\sigma_p)$. Ensuite on peut prouver le théorème grâce aux résultats de [AST], [AS1], [T] pour les surfaces K3 avec automorphismes non–symplectiques d'ordre premier et leur réseaux invariants. Pour $p = 2$, ceci est démontré dans [ABS]. Pour $p \geq 3$ il y a plus de cas à prendre en compte, car on a plus de possibilités pour la structure du lieu fixe et des singularités.

On veut ensuite vérifier s'il existe une équivalence pour la symétrie de Batyrev et la symétrie BHCR, au moins sur une classe de surfaces. Certains résultats sur ce sujet on été établi dans la Thèse de M. Pumperla [Pu]. En particulier, un aspect intéressant est que la construction BHCR include des surfaces Gorenstein et non–Gorenstein, mais la construction originale de Batyrev s'applique juste au cas Gorenstein. Donc il faut alléger les hypothèses sur le polytope Δ pour avoir une construction qui comprend aussi le cas non–Gorenstien. Notamment on demandera que Δ soit quasi-reflexive et non pas reflexive. On observe que la variété obtenue doit quand même être $\mathbb{Q}$-Gorenstein, car sinon l'hypersurface anticanonique générique n'est plus de Calabi-Yau. On illustrera ces thèmes et les motivations pour poursuivre ce travail sur la description torique de la symétrie BHCR. Ils restent dans ce sujet beaucoup de thèmes ouverts.

Les résultats de cette thèse font l'objet de deux articles : le premier est une collaboration avec A. Garbagnati de l'Université de Milan et a paru dans *Journal of Mathematical Society of Japan* en 2014. Les résultats de la deuxième partie de la thèse sur la symétrie miroir ont été atteints indépendamment par moi et par C. Lyons, N. Priddis (University of Michigan) et R. Suggs (Brigham Young University). Etant donné que le théorème principal et les techniques pour le prouver étaient les mêmes, nous avons decidé d'écrire ensemble un article. Cet article paraitra dans *Advances in Theoretical and Mathematical Physics* en 2014.

La structure de cette thèse est la suivante : dans le Chapitre 1 on introduit des résultats généraux sur les réseaux et les fibrations elliptiques et les propriétés fondamentales des surfaces K3. Le Chapitre 2 sera dedié aux automorphismes sur ces surfaces. On montrera des propriétés des automorphismes symplectiques et non–symplectiques d'ordre premier p. C'est dans ce Chapitre qu'on montrera la classification des réseaux p-élémentaires (p premier), qui a été decrite par Nikulin pour $p = 2$ (voir [N1]) et qui est résultat du travail [AST] pour $p \geq 3$.

La Partie I sera dedié au problème de classification des involutions de van Geemen-Sarti sur les surfaces K3 de type $X_{(r,22-r,\delta)}$. Dans le Chapitre 3 on va d'abord définir ces surfaces comme recouvrement double du plan projectif ramifié sur une courbe sextique. On observera comment les invariants topologiques de la sextique de ramification jouent un rôle important dans la definiton des invariants du réseau invariant $H^2(X,\mathbb{Z})^\iota$ où ι est l'involution de recouvrement. Ensuite on décrira dans le Chapitre 4 comment classifier toute fibration elliptique sur une surface de type $X_{(r,22-r,\delta)}$. La classification complète est dans le Chapitre 4 et dans l'Annexe A. On remarque que, si on veut classifier les involutions de van Geemen-Sarti ce n'est pas suffisant de donner les fibres singulières pour classifier les fibrations elliptiques : en fait il se peut que deux différentes sections de 2-torsion de fibrations avec les mêmes fibres singulières aient intersections différentes avec les fibres singulières et donnent donc deux involutions de van Geemen-Sarti différentes (voir Remarque 5.3.1).

Dans le Chapitre 5 on decrira les involutions de van Geemen-Sarti sur les surfaces de type $X_{(r,22-r,\delta)}$ et on étudiera les surfaces K3 qui s'obtiennent par le quotients. La description des quotients se trouve dans l'Annexe B. En plus, on s'interessera à trouver celles qui, parmi les involutions de van Geemen-Sarti classifiées, sont aussi des involutions

de type Morrison-Nikulin, où une involution symplectique σ sur une surface X de type K3 est dite de type Morrison-Nikulin si σ agit sur le groupe de Néron-Severi de X en échangeant deux copies de $E_8(-1)$.

La Partie II de la thèse est dediée au problème de la symétrie miroir pour les surfaces K3 qui sont obtenue à partir d'un polynôme quasi-homogène W dans un espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ et qui possédent un automorphisme non–symplectique d'ordre premier. D'abord on decrira en général la construction proposée par Berglund, Hübsch et Krawitz. Cela permet d'obtenir la variété Calabi-Yau $X_{W,G}$. Le choix de poids parmi les 95 indiqués par Reid et Yonemura assure qu'on obtient une surface K3. On montre dans le Chapitre 6 cette construction en général pour variétés de dimension quelconque et en particulier pour les surfaces K3. De plus, on classifie tout polynôme W de la forme (0.0.1) donnant une surface K3 avec automorphisme non–symplectique d'ordre premier p.

Dans le Chapitre 7 on s'occupe de la symétrie miroir. D'abord on définit la construction miroir de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan qui se sert de la transposition du polynôme W et du groupe G pour obtenir une surface miroir X_{W^T,G^T}. Ensuite on introduira la définition de symétrie miroir pour surfaces K3 polarisées LPK3 pour montrer l'équivalence de ces deux définition de symétrie miroir pour la classe de surfaces K3 avec automorphisme non–symplectique d'ordre premier. Cela fait l'objet du Théorème 7.3.4 et on donnera des exemples qui montrent comment on prouve ce résultat. Les tableaux qui preuvent le théorème sont dans l'Annexe C.

Enfin, le Chapitre 8 sera dedié à décrire la construction miroir de Batyrev dans le cadre de la géométrie torique. On détaillera comment on peut obtenir une famille de surfaces K3 à partir d'un polytope reflexive 3-dimensionnel et comment obtenir la famille des surfaces miroir. On montrera dans ce Chapitre les résultats obtenues et les problèmes ouverts sur ce thème.

Chapitre 1

Réseaux, surfaces et fibrations elliptiques

Dans ce Chapitre on rappelle certaines Définitions et Théorèmes sur la théorie des réseaux et on présente les surfaces qui seront l'objet de nos études : les surfaces K3. Ensuite, on rappelle des fait connus à propos des fibrations elliptiques.

1.1 Les réseaux

Un **réseau** (L, b) est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini avec une forme bilinéaire symétrique à valeur dans $\mathbb{Z}$:

$$b : L \times L \to \mathbb{Z}.$$

On dit que L est un réseau **pair** si la forme quadratique associée à b est à valeurs dans $2\mathbb{Z}$. Sinon on dit que L est **impair**. Une fois qu'on prend une base de L, on peut écrire la matrice de la forme b dans cette base. On appelle **discriminant** $d(L)$ de L le déterminant de cette matrice. Le réseau L est dit réseau **non-dégénéré** si $d(L) \neq 0$ et **unimodulaire** si $d(L) = \pm 1$.

Si L est non-dégénéré, on appelle **signature de** L $\mathrm{sign}(L)$ la signature de la forme quadratique $b_{\mathbb{R}}$ qui est l'extension $\mathbb{R}$-linéaire de b à $L \otimes \mathbb{R}$. Le réseau est dit **hyperbolique** si sa signature est $(1, \mathrm{rang}(L) - 1)$.

Quand on a un réseau, on peut en considerer le réseau dual $L^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ et donc $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z}) \cong \{v \in L \otimes \mathbb{Q} : b(v, x) \in \mathbb{Z}\ \forall x \in L\}$. On voit que le réseau L se plonge dans $L^\vee$ grâce à l'inclusion

$$\begin{aligned} L &\hookrightarrow L^\vee \\ c &\mapsto b(c, -) \end{aligned}$$

et donc on peut définir le **groupe discriminant** $A_L := L^\vee / L$ qui est un groupe abélien fini. Le nombre de générateurs de A_L est dit **longueur** de L et on a $|A_L| = d(L)$. La forme b induit une forme bilinéaire $b_L^\vee : L^\vee \times L^\vee \to \mathbb{Q}$ et grâce à ça on peut définir une forme bilinéaire $b_{A_L} : A_L \times A_L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. La forme quadratique q_{A_L} associée à b_{A_L} est dite **forme discriminante** de L

$$\begin{aligned} q_{A_L} : \ A_L &\to \frac{\mathbb{Q}}{2\mathbb{Z}} \\ x &\mapsto b_{A_L}(x, x). \end{aligned}$$

On presente certains réseaux bien connus. Le réseau U est le réseau hyperbolique donné par

$$\left(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Il s'agit du seul réseau hyperbolique unimodulaire de rang 2, à isométrie près.

Les réseaux A_n, D_k, E_i pour $n \geq 1, k \geq 4, i = 6, 7, 8$ sont les réseaux paires definis negatifs associés aux diagrammes de Dynkin correspondents. Le Tableau 1.1 résume la forme des diagrammes de Dynkin et le rang et le déterminant de chaque réseau.

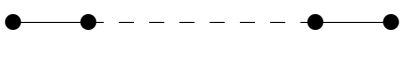
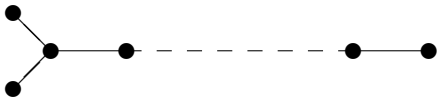
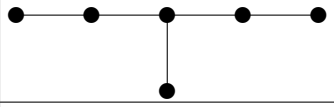
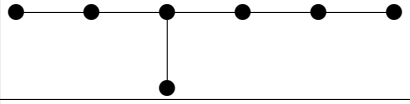
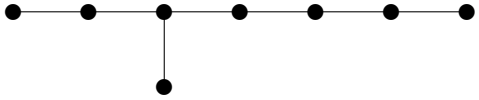
nom	rang	det	diagramme de Dynkin associé
A_n	n	$n+1$	
D_k	k	4	
E_6	6	3	
E_7	7	2	
E_8	8	1	

Tableau 1.1 – Diagrammes de Dynkin

Les matrices qui representent la forme b de ces réseaux sont les suivantes :

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; D_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & 1 & -2 & & \\ & & 1 & & & -2 & \end{pmatrix}, \; E_7 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & & \\ & & 1 & & & & -2 & \end{pmatrix}$$

$$E_8 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & \\ & & 1 & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

En général, si on a un réseau (L, b), on indique $L(n)$ le réseau avec la forme bilinéaire qui est la multiplication de b par l'entier n et $L^{\oplus k}$ est le réseau dont le forme est la somme orthogonale de k copies de b.

Définition 1.1.1 *Soit p un nombre premier ; on dit que L est un réseau* **p-élémentaire** *si $A_L \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

On observe que l'entier a est égal à la longueur de L et $|\det(L)| = p^a$.

Soit dorénavant p un nombre premier. On veut maintenant voir parmi les réseaux du Tableau 1.1 quels sont les réseaux p-élémentaires. En général, si p premier, le réseau A_{p-1} est p-élémentaire avec $a = 1$. Pour $p = 2$, les réseaux 2-élémentaires sont A_1, D_{2k}, E_7, E_8 et a vaut respectivement 1, 2, 1, 0.

Exemple 1.1.2 *Le réseau $A_1 \oplus D_4 \oplus E_7^{\oplus 2}$ est 2-élémentaire avec $a = 1 + 2 + 2 = 5$.*

Les réseaux 3-élémentaire du Tableau 1.1 sont A_2 et E_6.

On suit [AST] et on introduit d'autres réseaux : quand $p \equiv 3 \pmod 4$ le réseau K_p est défini par la matrice

$$K_p = \begin{pmatrix} \frac{-(p+1)}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit d'un réseau défini negatif, p-élémentaire avec $a = 1$.

Pour $p \equiv 1 \pmod 4$ on définit H_p par la matrice

$$H_p = \begin{pmatrix} \frac{(p-1)}{2} & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

et il s'agit d'un réseau hyperbolique, p-élémentaire avec $a = 1$.

Pour voir d'autres réseaux p-élémentaires voir [AST, Section 1].

Pour un réseau p-élémentaire avec $p > 2$, le rang r et la longueur a suffisent pour identifier uniquement le réseau, à isométrie près. Cela est dû au Théorème suivant de Rudakov-Shafarevich, qui dit en plus les conditions pour l'existence de tels réseaux.

Théorème 1.1.3 (voir [RS, Section 1]) *Soit L un réseau paire, indefini et p-élémentaire, avec $p \neq 2$ premier. Soit $r = \text{rang}(L)$, avec $r \geq 2$.*

Alors le réseau L est déterminé par sa longueur a.

Un réseau p-élémentaire avec invariants (r, a) existe si et seulement si

- *$a \leq r$;*
- *$r \equiv 0$ (mod 2)*
- *si a est pair, $r \equiv 2$ (mod 4) ;*
- *si a est impair, $p \equiv (-1)^{r/2-1}$ (mod 4).*

De plus si $r \not\equiv 2$ (mod 8), $0 < a < r$.

Pour $p = 2$ il faut un troisième invariant δ défini de la façon suivante (voir par exemple [N1]) : soit (L, b) un réseau 2-élémentaire ; si pour tout $x \in A_L$ la forme discriminante $q_{A_L}(x)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ alors $\delta = 0$, sinon $\delta = 1$.

Du coup un réseau 2-élémentaire sera identifié par les invariants (r, a, δ). On appelle $N_{(r,a,\delta)}$ le seul (à isométrie près) réseau 2-élémentaire pair et hyperbolique d'invariants (r, a, δ).

1.2 Surfaces et classification, les surfaces K3

On rappelle rapidement les idées de la classification birationnelle des surfaces selon Enriques et Castelnuovo. Les détails de ce qui est traité en cette section peuvent être trouvés par exemple dans [BHPvdV] et [Ha].

On rappelle que pour **surface** on entend une variété algébrique complexe X 2-dimensionnelle lisse et projective. Parmi les invariants birationnels de la surface X on définit les plurigenera et la dimension de Kodaira :

Définition 1.2.1 *Soit X une surface. Pour tout $n \geq 1$ on définit* **les plurigenera**

$$P_n(X) = h^0(X, \mathcal{O}(nK_X)) = h^0(X, \Omega_x^{2\otimes n})$$

où K_X est le fibré canonique de la surface et $h^0(X, \mathcal{O}(nK_X))$ indique la dimension de l'espace $H^0(X, \mathcal{O}(nK_X))$.

Soit ϕ_V l'application rationnelle

$$\phi_V : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

associée au système linéaire V.

Définition 1.2.2 *La* **dimension de Kodaira** *de la surface X est*

$$\kappa(X) = \begin{cases} -\infty & \text{si } P_m(X) = 0 \ \forall m \geq 1, \\ \max_m\{\dim(\overline{\phi_{mK_X}(X)})\} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Vu que quand m varie, la dimension de $\overline{\phi_{mK_X}(X)}$ reste toujours plus petite que 2, alors quand X est une surface on a $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$. On se sert de $\kappa(X)$ pour établir la classification de surfaces. Le théorème suivant résume la classification.

Théorème 1.2.3 *Soit X une surface lisse projective minimale. Soient $p_g = \dim H^{0,2}(X)$ et $q = \dim H^{0,1}(X)$, resp. le genre géométrique de la surface et l'irregolarité.*

Alors :

- *si $\kappa(X) = -\infty$, alors la surface X est une* **surface rationnelle ou reglée** *;*
- *si $\kappa(X) = 2$, alors la surface X est une* **surface de type général** *;*
- *si $\kappa(X) = 1$, alors la surface X est une* **surface elliptique propre** *;*
- *si $\kappa(X) = 0$, alors il faut distinguer 4 cas :*

  1. *X est une* **surface d'Enriques** *si $p_g = 0$ et $q = 0$;*
  2. *X est une* **surface hyperelliptique** *si $p_g = 0$ et $q = 1$;*
  3. *X est une* **surface K3** *si $p_g = 1$ et $q = 0$;*
  4. *X est une* **surface abélienne** *si $p_g = 1$ et $q = 2$.*

On s'interesse aux surfaces K3 et donc on va regarder dans les détails les propriétés de ces surfaces. Soit X une surface K3. Le fait que $p_g(X) = 1$ et $q(X) = 0$ détermine que le fibré canonique de X est trivial et aussi $P_m(X) = 1$ pour tout m. Donc on a aussi $K_X^2 = 0$ et $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q(X) + p_g(X) = 2$ (voir par exemple [BHPvdV, Section VI.6]).

Une définition equivalente de surface K3 est donc la suivante :

Définition 1.2.4 *Une* **surface K3** *est une surface complexe compacte lisse telle que le fibré canonique est trivial et* $h^{0,1}(X) = 0$.

La formule de Noether

$$12\chi(\mathcal{O}_X) = K_X^2 + e(X) \tag{1.2.2}$$

pour les surfaces K3 donne $e(X) = 12 \cdot 2 - 0 = 24$. De plus, la caractéristique d'Euler-Poincaré de X est la somme alternée des nombres de Betti b_i de la surface où

$$b_i := h^i(X, \mathbb{Z}) = \sum_{j,k:j+k=i} h^{j,k}(X).$$

Donc on trouve $e(X) = 2 - 4q + b_2$, d'où $b_2 = 22$. Grâce à ça et aux dualités de Hodge et de Serre, on peut completer le diamant de Hodge de X :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Remarque 1.2.5 *Ce diamant de Hodge est commun à toute surface K3.*

Remarque 1.2.6 *On observe que l'espace* $H^{2,0}(X)$ *est 1-dimensionnel et on choisit un générateur* ω_X*, que l'on appelle* **période** *de* X*. Donc* $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X$.

On rappelle aussi la formule du genre pour une courbe irréductible lisse sur une surface.

Lemme 1.2.7 *Soit* C *une courbe lisse irréductible sur la surface* X*. Alors le genre de* C *est donné par*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_X).$$

Pour une surface K3, vu que le fibré canonique est trivial, cela devient

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}C^2.$$

Encore, soient C et C' deux courbes et $f\colon C \to C'$ un morphisme fini et separable de degré n. La formule de Riemann-Hurwitz décrit les relations entre les caractéristiques d'Euler de deux courbes et donc entre leur genres.

Lemme 1.2.8 (voir [Ha, Corollary 2.4]) *Dans les hypothèses précédentes on a*

$$2 - 2g(C) = n(2 - 2g(C')) - \sum_{P \in C} (e_P - 1) \tag{1.2.3}$$

où e_p *est l'ordre de ramification de* f *dans le point* P *(et* $e_P = 1$ *quand* P *n'est pas un point de ramification pour* f*).*

De plus, on rappelle un résultat sur le réseau $H^2(X,\mathbb{Z})$ d'une surface K3. Pour une surface X de type K3, $H^2(X,\mathbb{Z})$ n'a pas de torsion (voir [BHPvdV, Chap. VIII, Prop.3.3]) et donc il s'agit d'un réseau. Soit Λ_{K3} la matrice définie par blocs

$$\Lambda_{K3} = \begin{pmatrix} U & & & & \\ & U & & & \\ & & U & & \\ & & & E_8 & \\ & & & & E_8 \end{pmatrix}$$

où U et E_8 sont les matrices définies dans la Section 1.1. Un théorème par Milnor démontre le résultat suivant (voir [Mo, Théor. 1.3]) :

Théorème 1.2.9 *Pour toute surface X de type K3 il existe une base de $H^2(X,\mathbb{Z})$ telle que la matrice d'intersection selon cette base est donnée par la matrice Λ_{K3}, c'est-à-dire le réseau $H^2(X,\mathbb{Z})$ est isomorphe à $U^{\oplus 3} \oplus E_8^{\oplus 2}$.*

Le **groupe de Néron-Severi** de la surface X de type K3 est

$$\mathrm{NS}(X) = \{x \in H^2(X,\mathbb{Z}) : (x, \omega_X) = 0\}$$

et le **réseau trascendent** est son orthogonale

$$T_X := \mathrm{NS}(X)^{\perp_{H^2(X,\mathbb{Z})}}.$$

Il s'agit de deux sous-réseaux primitifs de $H^2(X,\mathbb{Z})$.

1.3 Fibrations elliptiques

Les résultats de cette Section se trouvent, par exemple, dans [SS] et [Mi].

Définition 1.3.1 *Soit X une surface lisse projective et D une courbe lisse ; une* **fibration elliptique** *est un morphisme surjectif $\mathcal{E} : X \to D$ tel que la fibre générique $F_x := \mathcal{E}^{-1}(x), x \in D$ soit une courbe lisse de genre 1. La surface X est dite* **surface elliptique**. *Une* **section** *de la fibration est un morphisme $s : D \to X$ tel que $\mathcal{E} \circ s = id_{|D}$*

Remarque 1.3.2 *On considérera toujours des fibration elliptiques qui admettent une section s, qu'on appelle la section zero. Ces fibrations sont dites* **fibrations jacobiennes**.

Remarque 1.3.3 *Souvent on appelera section l'image de l'application s, c'est-à-dire la courbe $s(D) \subset X$; on remarque que $s(D) \cong D$.*

Quand on a une courbe C sur X, on l'appelle courbe **verticale** si elle est contenue dans une fibre de la fibration $\mathcal{E} : X \to D$; sinon C est dite **horizontale**.

Remarque 1.3.4 *Dans la suite on regardera la théorie de fibrations elliptiques sur surfaces K3. Pour les surfaces K3 elliptiques la courbe D est isomorphe à $\mathbb{P}^1$ (il s'agit d'une conséquence de [SS, Theorem 6.12]). On va donc se mettre dans le cas $D \simeq \mathbb{P}^1$ avec coordonnées homogènes $(\tau : \sigma)$.*

L'existence d'une section nous permet de fixer un point «origine» sur chaque fibre générique et donc de la voir comme une courbe elliptique. Grâce à la presence de la section, on peut aussi écrire la **forme de Weierstrass** de la fibration :

$$y^2 = x^3 + A(\tau,\sigma)x + B(\tau,\sigma) \tag{1.3.1}$$

où A et B sont deux polynômes homogènes de $\mathbb{C}[\tau,\sigma]$, avec $\deg A(\tau,\sigma)=4m$, $\deg B(\tau,\sigma)=6m$ pour un certain nombre naturel $m>0$ qui dépend de la surface et tels qu'il n'existe pas un polynôme homogène $C(\tau,\sigma)\in\mathbb{C}[\tau,\sigma]$ tel que $C^4|A$ et $C^6|B$. Cette dernière condition assure par exemple que X admet seulement points doubles rationnels comme singularités (voir [Mi, Prop. III.3.2]).

Réciproquement, quand une fibration elliptique admet équation de Weierstrass comme (1.3.1), cela assure la presence d'une section : il s'agit de la section à l'infini qui correspond au point $(0:1:0)$ sur chaque fibre.

On a dit qu'on s'interesse au cas où X est une surface K3 et dans ce cas $m=2$ (voir [Mi, Lemma III.4.6]) donc A est un polynôme de degré 8 et B est un polynôme de degré 12.

Exemple 1.3.5 Un exemple standard est donné par le pinceau de cubiques. Soient g,h deux polynômes homogènes de degré 3 en 3 variables, tel que g et h n'ont pas des facteurs communs. Donc les courbes définies par g et h dans $\mathbb{P}^2$, qu'on appelle G et H, ont 9 points communs (qui peuvent eventuellement coïncider). On considère la surface

$$X=\{\lambda g+\mu h=0:(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1\}$$

La surface est contenue dans $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1$ et on peut définir une fibration elliptique $\mathcal{E}:X\to\mathbb{P}^1$ en projectant X sur $\mathbb{P}^1$. La fibre sur $(\lambda:\mu)$ en général est donnée par un polynôme homogène de degré 3 en $\mathbb{P}^2$ et donc il définit une courbe de genre 1.

Cette surface est isomorphe à la surface obtenue en éclatant les 9 points base (comptés avec leur multiplicité) du pinceau, c'est-à-dire les 9 points de $\mathbb{P}^2$ qui sont intersection des G et H. Soit E un diviseur exceptionnel de l'éclatement. Alors E n'est pas dans la fibre de la fibration elliptique, car il n'est pas de la forme $\lambda g(x_0:x_1:x_2)+\mu h(x_0:x_1:x_2)$ pour $(x_0:x_1:x_2)$ fixé. Les diviseurs exceptionnels donnent en effet des sections de la fibration et il s'agit de courbes horizontales.

La fibre générique d'une fibration elliptique est une courbe elliptique mais en général on pourra avoir d'autres fibres singulières et réductibles. Kodaira dans [Kod] a montré que le nombre de courbes singulières d'une fibration elliptiques est fini et que les composantes de chaque courbe singulière sont des courbes rationnelles. De plus, les composantes se coupent avec la configuration d'un diagramme de Dynkin généralisé. Ces résultats on les trouve dans [BHPvdV, V.7 et suivants].

Les composantes des fibres singulières qui ont multiplicité 1 sont dites **simples**.

On résume dans le Tableau suivant les possibles types de fibres singulières.

II		une courbe rationnelle Θ_0 avec une cusp
III	$\tilde{A}_1$	deux courbes rationnelles tangentes $\Theta_0,\ \Theta_1$
IV	$\tilde{A}_2$	trois droites $\Theta_0,\ \Theta_1,\ \Theta_2$ qui se coupent en un point
I_1		une courbe rationnelle nodale Θ_0
I_2	$\tilde{A}_1$	$\Theta_0 = \Theta_1$
I_n	$\tilde{A}_{n-1}$	$\Theta_0 - \Theta_1 - \dots - \Theta_i$; $\Theta_i - \Theta_{i+1}$; $\Theta_{n-1} - \Theta_{n-2} - \dots - \Theta_{i+1}$
I_k^*	$\tilde{D}_{k+4}$	Θ_0, Θ_1, $\Theta_2 \dots \Theta_i - \Theta_{i+1} \dots \Theta_{k+2}$, Θ_{k+3}, Θ_{k+4}
IV^*	$\tilde{E}_6$	$\Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3 - \Theta_4$; $\Theta_2 - \Theta_5$; $\Theta_5 - \Theta_6$
III^*	$\tilde{E}_7$	$\Theta_0 - \Theta_2 - \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7$; $\Theta_4 - \Theta_1$
II^*	$\tilde{E}_8$	$\Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3 - \Theta_4 - \Theta_5 - \Theta_6 - \Theta_7$; $\Theta_2 - \Theta_8$

(1.3.2)

La première colonne du Tableau (1.3.2) contient le nom de la fibre selon la classification de Kodaira et la deuxième le diagramme de Dynkin associé, dont on montre les intersections dans la troisième colonne. De plus, on nomme les composantes de la fibre (avec la convention que Θ_0 soit la composante qui rencontre la section zero).

Dans le Tableau 1.2 on indique quelles composantes sont simples et les les molteplicités de toute composante pour chaque type de fibre. Pour les fibres de type II, III, IV toute composante est simple.

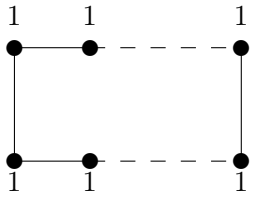
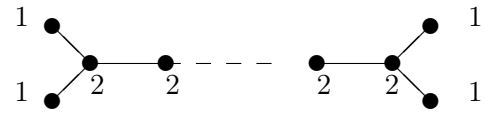
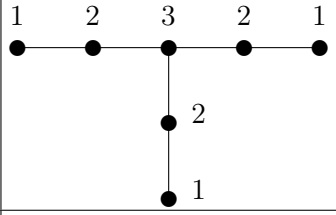
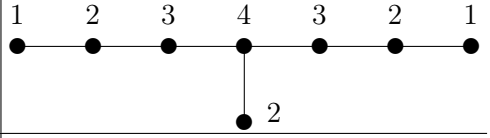
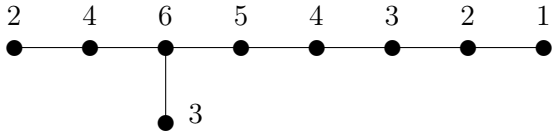
nom	comp. simples	diagramme de Dynkin associé
$\tilde{A}_n$	$\Theta_i, i = 0, \ldots, n-1$	
$\tilde{D}_{k+4}$	$\Theta_i, i = 0, 1, k+3, k+4$	
$\tilde{E}_6$	$\Theta_i, i = 0, 4, 6$	
$\tilde{E}_7$	$\Theta_i, i = 0, 7$	
$\tilde{E}_8$	Θ_7	

TABLEAU 1.2 – Diagrammes de Dynkin generalisés et multiplicités des composantes

Pour chaque fibre F on dénote $r(F)$ le nombre de composantes de la fibre ; $d(F)$ sera le discriminant du réseau associé au diagramme de Dynkin correspondant (voir Tableau 1.1).

Exemple 1.3.6 On continue dans le cadre de l'Exemple 1.3.5 pour voir que quand deux ou plus de 9 points de base coïncident, cela engendre des différentes fibres réductibles. Par exemple, on prend G et H qui se coupent de manière transverse avec 9 points d'intersection distincts. Alors la fibre au-dessus de $(\lambda : \mu) = (0 : 1)$ correspond à la courbe H, c'est-à-dire à la transformé propre de H par l'éclatement de 9 points de base. Donc selon les différentes formes de H, on aura des fibres différentes. Si H est une courbe nodale (resp. cuspidale), la fibre sera de type I_1 (resp. II). Si H est l'union d'une conique et une droite qui ne sont pas tangentes, la fibre sera de type I_2, alors que si le deux sont tangentes on aura une fibre III. Si H est l'union de 3 droites qui passent pour un même point, elle donnera une fibre

de type IV, tandis que si les droites n'ont pas un point commun, on aura une fibre de type I_3.

Soit $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique ; on appelle $\mathrm{MW}(\mathcal{E})$ l'ensemble de sections de $\mathcal{E}$. On définit sur $\mathrm{MW}(\mathcal{E})$ une structure de groupe grâce à la loi de composition induite par l'operation sur les fibres irréductibles : si $F_p \subset X$ est une fibre irréductible (c'est-à-dire une courbe elliptique) et s_1, s_2 sont deux sections, sur F_p c'est bien définie la somme $s_1(p) + s_2(p)$ grâce à la loi de composition de la courbe elliptique. On définit la section somme

$$s_1 + s_2(p) := s_1(p) + s_2(p)$$

pour tout p tel que F_p est une fibre irréductible et on étend ça à tout $p \in \mathbb{P}^1$, c'est-à-dire à toute fibre de $\mathcal{E}$ (voir [Mi, VII.2]). Le groupe $\mathrm{MW}(\mathcal{E})$ est dit **groupe de Mordell-Weil**.

Lemme 1.3.7 (voir [Mi, Cor. VII.2.2]) *Soit $\mathcal{E}$ une fibration elliptique jacobienne. Alors $\mathrm{MW}(\mathcal{E})$ est un groupe abélien finiement engendré.*

Remarque 1.3.8 Si on prend une fibration elliptique $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ dont S est une section, pour toute fibre F on a $F \cdot S = 1$ et donc S coupe juste une composante en chaque fibre (y compris les fibres réductibles) et il s'agit d'une composante simple, c'est-à-dire de multiplicité 1. Donc par exemple dans une fibre de type I_n une section peut couper n'importe quelle composante ; par contre pour une fibre I_k^* les seules composantes qui peuvent rencontrer une section sont les composantes Θ_i avec $i = 0, 1, k+3, k+4$ (voir Tableau 1.2).

La formule de Shioda-Tate permet d'analyser les possibles fibrations elliptiques sur une surface X.

Lemme 1.3.9 (voir [S2, Cor. 1.5], [Mi, Cor. VII.2.4]) *Soit $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur une surface lisse X. Alors*

$$\rho(X) = 2 + \sum_{F_i} (r(F_i) - 1) + \mathrm{rang}(MW(\mathcal{E})) \tag{1.3.3}$$

où $\rho(X)$ est le nombre de Picard de la surface X, la somme est faite pour toute fibre F_i de $\mathcal{E}$ et $r(F_i)$ est le nombre de composantes de la fibre F_i.

On observe que si F_i est une fibre irréductible, sa contribution à la somme sera 0 vu qu'elle a une seule composante. De plus, le facteur 2 est lié à la contribution de la fibre et de la section zero.

Un autre Lemme important est le suivant :

Lemme 1.3.10 *Soit $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur une surface lisse X. Alors*

$$|\mathrm{MW}|^2 d(\mathrm{NS}(X)) = \prod_{F_i} d(F_i) \tag{1.3.4}$$

où F_i sont les fibres de la fibration et $d(F_i)$ est le discriminant de la fibre F_i.

Ce Lemme est conséquence de [S2, Cor. 1.7], voir par exemple [Be, Sec. 1.7.3].

Définition 1.3.11 *Soit $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique. Alors le* **réseau trivial** *Tr_X est le réseau engendré par : la classe de la fibre, la classe de la section zero, les classes des composantes des fibres irréductibles qui ne coupent pas la section zero.*

D'après la formule de Shioda-Tate (1.3.3) on a

$$\operatorname{rang}(Tr_X) = \rho(X) - \operatorname{rang}(MW(\mathcal{E})). \tag{1.3.5}$$

Soit Red := $\{v \in \mathbb{P}^1 |\ \mathcal{F}_v$ reductible$\}$. Pour deux section $P, Q \in \mathrm{MW}(\mathcal{E})$, on peut définir un accouplement, dit accouplement hauteur (ou height formula), à valeurs dans $\mathbb{Q}$ (voir [SS, Section 11]) :

Définition 1.3.12 *Soient P, Q deux sections de $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ et soit S la section zero. Alors l'***accouplement hauteur** *(ou* **height formula***) entre P et Q est défini comme étant*

$$< P, Q >:= \chi(X) + (PS) + (QS) - (PQ) - \sum_{v \in \mathrm{Red}} contr_v(P, Q)$$

*où $\chi(X)$ est la caracteristique d'Euler de la surface X, (PS), (QS) et (PQ) sont les intersections entre sections et $contr_v(P, Q)$ est une contribution qui depend de la composante de la fibre réductible qui coupe la section. De plus, on définit l'***hauteur d'une section** *P :*

$$h(P) :=< P, P >= 2\chi(X) + 2(PS) - \sum_{v \in \mathrm{Red}} contr_v(P). \tag{1.3.6}$$

On suppose que la section P coupe la fibre réductible F_v en la composante Θ_i (où les composantes des fibres réductibles sont nommées comme dans le Tableau 1.3.2). Si $i = 0$ alors la contribution est 0, sinon les valeurs de $contr_v(P)$ sont contenues dans le Tableau 1.3.7.

fibre	diagramme de Dynkin associé	$contr_v(P)$
$I_n, n \geq 2$	A_{n-1}	$i(n-i)/n$
I_n^*	D_{n+4}	$\begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 1 + n/4 & \text{si } i = n+3, n+4 \end{cases}$
IV^*	E_6	$4/3$
III^*	E_7	$3/2$

(1.3.7)

Remarque 1.3.13 *Le groupe de Mordell-Weil muni de cette forme bilinéaire est dit* **réseau de Mordell-Weil** *et noté* $\mathrm{MWL}(\mathcal{E})$.

On définit **section de n-torsion** une section $P \in \mathrm{MW}(\mathcal{E})$ tel que n est le plus petit entier tel que $P^n = S$, où S est la section zero. Comme conséquence de [SS, Theorem 11.5] on a la Proposition suivante :

Proposition 1.3.14 *Soit $P \in \mathrm{MW}(\mathcal{E})$ une section de la fibration elliptique $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$. Alors P est une section de torsion si et seulement si $h(P) = 0$.*

On montre un exemple de fibration où la height formula permet de montrer que la fibration ne peut pas avoir des sections d'ordre 2. Cet exemple sera utile pour la Proposition 4.1.9.

Exemple 1.3.15 *On prend la fibration elliptique $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ avec X une surface K3 avec $\rho(X) = 19$ et fibres réductibles de types*

$$II^* + I_2^* + I_3 + I_2.$$

Cette fibration apparait dans [Sh] (c'est le cas 2385) et on y trouve aussi que le groupe de Mordell-Weil de $\mathcal{E}$ est trivial. On veut montrer pourquoi il ne peut pas y avoir une section de 2-torsion.

Si P est une section de 2-torsion, on sait par la Proposition 1.3.14 que on aura $h(P) = 0$. L'equation (1.3.6) *dit qu'on doit avoir*

$$< P, P >= 2\chi(X) + 2(PS) - \sum_{v \in \mathrm{Red}} contr_v(P) = 0$$

donc, vu que $\chi(X) = 2$ pour une surface K3 et la section P ne coupe pas la section zero,

$$4 = \sum_{v \in \mathrm{Red}} contr_v(P).$$

Comme d'habitude, on appelle Θ_0 la composante des fibres réductibles coupée par la section zero et on regarde où pourrait-t-elle passer la section de 2-torsion P.

Pour la fibre II^*, vu qu'une section coupe toujours une composante simple et que la seule composante simple de II^* est Θ_0, forcement la section P passe par Θ_0 aussi et la contribution est zero.

Pour la fibre I_2^* il y a trois possibilités : soit P coupe Θ_0 et la contribution est 0, soit P coupe Θ_1 et la contribution est 1, soit P coupe une des deux composantes Θ_5, Θ_6 et la contribution et $1 + n/4 = 3/2$. En conclusion, au maximum la contribution pour la fibre I_2^* est $3/2$.

Pour la fibre de type I_3, la section P peut donner une contribution égale à 0, si elle coupe Θ_0, ou égale à $i(n-i)/n = \frac{2}{3}$ si elle coupe une des autres composantes. Donc le contribution maximale est $\frac{2}{3}$.

Pour la fibre de type I_2, la contribution est 0 si P coupe Θ_0 et $i(n-i)/n = 1/2$ si P coupe Θ_1.

On montre une possibilité pour la section de 2-torsion P dans la Figure 1.3.15 (s est la section zero). Ce choix pour P est le choix qui donne le maximum pour l'hauteur de P (et ce n'est pas unique).

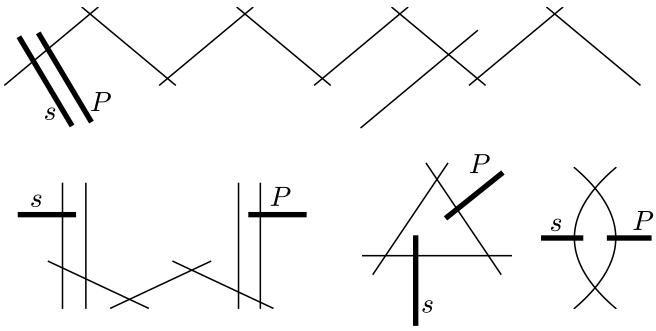


FIGURE 1.1 – Une possibilité pour la section P de 2-torsion

Au final le minimum qu'on peut obtenir pour l'hauteur de P est

$$h(P) = 4 - \left(0 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

et $h(P) \neq 0$. Donc P n'est pas une section de 2-torsion. Il n'existent pas des sections de 2-torsion pour une fibration ayante fibres singulières $II^* + I_2^* + I_3 + I_2$. □

On reprend la forme de Weierstrass (1.3.1) de la fibration. Grâce à cette forme de l'équation, on peut trouver facilement quelles sont les fibres réductibles de la fibration. En

fait, les fibres réductibles sont telles que Δ s'annulle, où Δ est le discriminant de l'equation, c'est-à-dire $\Delta = 4A^3 + 27B^2$. Soient a, b, δ respectivement les ordres d'annullation de A, B, Δ. On reporte ici, d'après le Tableau IV.3.1 de [Mi], les fibres singulières selon les valeurs de a, b, δ.

Fibre	a	b	δ
II	$a \geq 1$	1	2
III	1	$b \geq 2$	3
IV	$a \geq 2$	2	4
I_1	0	0	1
I_n	0	0	n
I_0^*	$\begin{cases} 2 \\ a \geq 2 \end{cases}$	$\begin{cases} b \geq 3 \\ 3 \end{cases}$	6
I_k^*	2	3	$k+6$
IV^*	$a \geq 3$	4	8
III^*	3	$b \geq 5$	9
II^*	$a \geq 4$	5	10

(1.3.8)

Exemple 1.3.16 *Supposons que*

$$y^2 = x^3 + [3\tau^3\sigma^4(\tau - \sigma)]x + [4\tau^5\sigma^5(\tau - \sigma)^2] \tag{1.3.9}$$

soit l'équation de Weierstrass d'une fibration elliptique. On cherche les fibres singulières à partir des valeurs $(\tau : \sigma) \in \mathbb{P}^1$ qui annullent A, B, Δ. Le polynôme Δ est

$$\Delta = 4A^3 + 27B^2 = 108\tau^9\sigma^{10}(\tau - \sigma)^3(2\tau - \sigma)^2 \in \mathbb{C}[\tau, \sigma]$$

d'où on se rend compte que les $(\tau : \sigma)$ qui annullent Δ sont $(1:0), (0:1), (1:1), (1/2:1)$. Les valeurs de a, b, δ sont montrés dans le Tableau 1.3.10 et grâce au Tableau 1.3.8 on peut déduire le type de la fibre correspondante.

$(\tau : \sigma)$	a	b	δ	*fibre*
$(1:0)$	4	5	10	II^*
$(0:1)$	3	5	9	III^*
$(1:1)$	1	2	3	III
$(\frac{1}{2}:1)$	0	0	2	I_2

(1.3.10)

Donc on peut conclure que la fibration elliptique donnée par (1.3.9) *a fibres singulières $II^* + III^* + I_2 + III$.*

Chapitre 2

Automorphismes

Dans ce chapitre on va étudier les automorphismes symplectiques et non–symplectiques sur les surfaces K3 et les possibilités pour leur lieux fixe. On montre aussi la classification de réseaux invariants associés à ces automorphismes, d'après les résultats de [N1] et [AST].

2.1 Transformations de Cremona

On commence par un rappel à propos des transformations birationnelles du plan projectif $\mathbb{P}^2$ dites de Cremona. Une référence pour ce sujet peut être trouvée dans [Dol, Chap. 7].

Définition 2.1.1 *Une* **transformation de Cremona** *est une application birationnelle* $\phi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$.

Exemple 2.1.2 *La transformation donnée par* $(a_0 : a_1 : a_2) \to (a_1a_2 : a_0a_2 : a_0a_1)$ *est appellée* **trasformation de Cremona standard**.

Donc ϕ *n'est pas définie en* $P_0 = (0 : 0 : 1), P_1 = (0 : 1 : 0)$ *et* $P_2 = (1 : 0 : 0)$ *et on appelle* $l_i, i = 0, 1, 2$ *la droite qui passe par* P_j *et* $P_k, j, k \neq i$. *Les* P_i *sont dits* **points de base** *de la transformation.*

Cette application peut aussi être vue de la façon suivante : on éclate $\mathbb{P}^2$ *dans les* $P_i, i = 0, 1, 2$ *et on appelle* $\tilde{l}_i, i = 0, 1, 2$ *les 3 diviseurs exceptionnels au-dessus des* P_i. *On va maintenant contracter les transformées des droites* l_i *et on obtient ce qui est montré dans la Figure 2.1.*

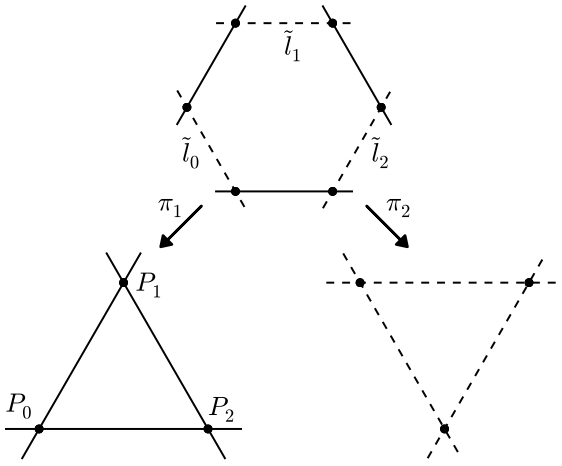


FIGURE 2.1 – Transformation de Cremona standard

Si on appelle π_1 et π_2 les deux éclatements, la transformation de Cremona ϕ donnée dans la Définition 2.1.1 est l'application $\pi_2 \circ \pi_1^{-1}$.

2.2 Automorphismes des surfaces K3

Soit X une surface K3. On s'interesse aux automorphismes symplectiques et non–symplectiques sur X, avec un régard spécial pour les involutions et surtout celles qui preservent une fibration elliptique sur X.

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$ un automorphisme de la surface X. On rappelle que, d'après la Remarque 1.2.6, on a $H^{2,0}(X) = \mathbb{C}\omega_X$. La structure de Hodge de la surface est preservée par σ^* et donc on aura $\sigma^*(\omega_X) = \lambda_\sigma \omega_X$ pour un certain $\lambda_\sigma \in \mathbb{C}^*$. De plus, si σ a ordre fini n, alors $\lambda_\sigma^n = 1$.

Définition 2.2.1 *On dit que σ est un* **automorphisme symplectique** *de X si $\lambda_\sigma = 1$; sinon on appelle σ* **automorphisme non–symplectique**.

Cela permet de definir le **réseau invariant**

$$S(\sigma) := H^2(X,\mathbb{Z})^\sigma = \{x \in H^2(X,\mathbb{Z}) : \sigma^* x = x\}.$$

Son orthogonal dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ est le réseau $T(\sigma) := (H^2(X,\mathbb{Z})^\sigma)^{\perp_{H^2(X,\mathbb{Z})}}$.

2.3 Involutions symplectiques

Soit X une surface K3 projective qui admet une involution symplectique ι. Le lieu fixe de cette involution $\mathrm{Fix}(\iota) = \{x \in X : \iota(x) = x\}$ se compose de 8 points singuliers. Cela est dû à la Proposition suivante, qu'on trouve dans [N2, Sect.5].

Proposition 2.3.1 *Si G est un groupe abelien fini qui agit de manière symplectique sur une surface X de type K3, alors G est soit le groupe trivial soit un des groupes du Tableau 2.1, où on note t_n le nombre des points fixés par G qui ont stabilisateur isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

Donc le quotient X/ι est une surface singulière avec 8 singularités de type A_1. On appelle $Y := \widetilde{X/\iota}$ la désingularisation de X/ι. De plus, les 8 courbes rationnelles qui sont introduites par l'éclatement sont contenues dans $\mathrm{NS}(Y)$. Le sous-réseau primitif minimal de $\mathrm{NS}(Y)$ qui contient ces 8 courbes est appellé **réseau de Nikulin** et il s'agit du seul réseau paire 2-élémentaire de signature $(0,8)$. Son determinant est 2^6 (voir [Mo, Lemme 5.4]).

Si X est la surface K3 avec involution symplectique ι, alors on sait que le réseau anti-invariant $T(\sigma) = (H^2(X,\mathbb{Z})^\sigma)^\perp$ est isométrique à $E_8(2)$ et il est plongé de manière primitive dans $\mathrm{NS}(X)$. En effet le fait que l'action de ι soit triviale sur la période ω_X implique que le réseau trascendent T_X soit contenu dans $H^2(X,\mathbb{Z})^\sigma$ de manière primitive et donc $\mathrm{NS}(X) \supset (H^2(X,\mathbb{Z})^\sigma)^\perp$ de manière primitive.

Le Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ est un réseau hyperbolique (pour le Théorème de l'index de Hodge, voir [Ha, Théorème V.1.9]) et a donc signature $(1, \mathrm{rang}(\mathrm{NS}(X)) - 1)$; $E_8(2)$ est un réseau défini negatif, d'où on conclut que l'orthogonal de $E_8(2)$ dans $\mathrm{NS}(X)$ doit avoir rang au moins 1. Cela implique le résultat suivant :

Proposition 2.3.2 *Si X est une surface K3 qui admet une involution symplectique, alors $\rho(X) \geq 9$.*

G	rang(G)	
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	2	$t_2 = 8$
$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	3	$t_3 = 6$
$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	4	$t_2 = 4$ $t_4 = 4$
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	5	$t_5 = 4$
$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	6	$t_2 = 6$ $t_3 = 4$ $t_6 = 2$
$\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$	7	$t_7 = 3$
$\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$	8	$t_2 = 4$ $t_4 = 2$ $t_8 = 2$
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	4	$t_2 = 24$
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$	8	$t_2 = 56$
$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	16	$t_2 = 120$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	8	$t_2 = 16$ $t_4 = 8$
$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$	12	$t_2 = 18$ $t_3 = 0$ $t_6 = 6$
$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$	9	$t_3 = 24$
$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	16	$t_4 = 24$

TABLEAU 2.1 – Les groupes symplectiques qui peuvent agir sur une surface K3

2.3.1 Involutions symplectiques pour une K3 elliptique

Soit X une surface K3 elliptique. Parmi les involutions symplectiques, on définit en particulier une classe d'involutions qui préservent la fibration elliptique sur X. La définition suit [CD, Déf. 1.1].

Définition 2.3.3 *On appelle* **involution de van Geemen–Sarti** *une involution sur la surface X qui est translation par rapport à une section d'ordre 2 de la fibration.*

Ce type d'involutions sont présentées en [vGS] ; une notion similaire pour sections d'ordre $n > 2$ est introduite et étudiée dans [GS1] et [GS2].

Si on appelle $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ la fibration elliptique sur X, on remarque que l'involution de van Geemen-Sarti σ_t donnée par la translation par la section t d'ordre 2 est telle que elle n'agit pas sur la base de la fibration et toute fibre est préservée. Du coup toute la fibration elliptique $\mathcal{E}$ est préservée par σ_t et si on considère la désingularisation du quotient X/σ_t, on aura une fibration elliptique induite par $\mathcal{E}$ qu'on denote $\mathcal{E}/\sigma_t$.

On peut voir l'action de l'involution de van Geemen-Sarti grâce à l'équation de Weierstrass de $\mathcal{E}$. Quand une courbe elliptique possède un point de 2 torsion rationnel, son équation de Weierstrass est de la forme (voir [ST, p.76])

$$y^2 = x(x^2 + ax + b)$$

et son quotient par la translation par ce point d'ordre 2 est la courbe elliptique avec équation de Weierstrass

$$y^2 = x(x^2 - 2ax + a^2 - 4b).$$

Les détails se trouvent par exemple dans [ST, p.79].

Donc si on a une section de 2-torsion sur la surface elliptique X, l'équation de Weierstrass de X sera de la forme

$$y^2 = x(x^2 + A(\tau)x + B(\tau)) \tag{2.3.1}$$

avec $A(\tau, \sigma)$ et $B(\tau, \sigma)$ deux polynômes de degrés respectifs 4 et 8 et $A(\tau) := A(\tau, 1)$, $B(\tau) := B(\tau, 1)$. Le quotient sera la surface rationnelle d'équation

$$y^2 = x(x^2 - 2A(\tau)x + A(\tau)^2 - 4B(\tau))$$

Réciproquement, quand une surface elliptique a équation de Weierstrass de la forme (2.3.1), on sait que la surface admet une section de 2-torsion. En effet la section

$$\tau \mapsto (x(\tau), y(\tau)) = (0, 0)$$

est une section de la fibration et a ordre 2.

On utilisera cette dernière remarque dans le Chapitre 4 quand on montrera beaucoup d'équations de surfaces elliptiques.

2.4 Automorphismes non–symplectiques

Soit X une surface K3. Maintenant on considère un automorphisme non–symplectique $\sigma_p \in \mathrm{Aut}(X)$ d'ordre premier p et on va s'interesser au lieu fixe de σ_p. On prend toujours des automorphismes d'ordres premiers.

Remarque 2.4.1 *On observe que dans la Section 2.3 on demande que X soit une surface K3 projective. Maintenant, on n'a pas besoin de demander que X soit projective car une surface K3 qui admet un automorphisme non-symplectique est projective (voir [N2, Theorem 3.1]).*

Le théorème suivant permet de voir les relations entre les réseaux $S(\sigma_p), T(\sigma_p)$ et le Néron-Severi et le réseau trascendent :

Théorème 2.4.2 (voir [N2, Sect.3]) *Soit X une surface K3 et σ_p un automorphisme non–symplectique d'ordre premier p. Alors*

$$S(\sigma_p) \subset \mathrm{NS}(X) \quad et \quad T(\sigma_p) \supset T_X.$$

Grâce à la Définition d'automorphisme non–symplectique, on peut supposer que l'action de σ_p^* sur $H^{2,0}(X)$ soit donnée par

$$\sigma_p^*(\omega_X) = \zeta_p \omega_X$$

où ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité. Alors l'action de σ_p au voisinage d'un point fixe $x \in X$ peut être linéarisée et diagonalisée et donc est donnée par une matrice de la forme

$$A_{p,t} := \begin{pmatrix} \zeta_p^{t+1} & 0 \\ 0 & \zeta_p^{p-t} \end{pmatrix}$$

pour $t = 0, \ldots, p-2$.

On distingue deux cas : quand $t = 0$ la matrice $A_{p,0}$ est

$$\begin{pmatrix} \zeta_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc le point fixe x fait partie d'une courbe fixe (il s'agit de la courbe dans la direction correspondante au valeur propre 1). Autrement, si $t \neq 0$, il s'agit d'un point fixe isolé et on l'appellera **point fixe de type** t. Le nombre de points fixes de type t sera noté n_t et $n := \sum_{t=1}^{p-2} n_t$ sera le nombre total de points fixes.

Remarque 2.4.3 *On constate que pour $p = 2$ il n'y pas de points fixes isolés pour l'involution.*

On va se servir aussi d'un résultat qui explique comment connaître les types des points fixés dans un arbre de courbe rationnelles. Ce résultat, qui generalise le Lemme 8.1 de [Di], se trouve dans [AS2, Lemma 4]. Les résultat est valable pour un automorphisme non–symplectique σ_n d'ordre quelconque n, mais il faut supposer que σ_n soit purement non–symplectique, c'est-à-dire que l'action de σ_n^* sur $H^{2,0}(X)$ soit donnée par $\sigma_n^*(\omega_X) = \zeta_n \omega_X$ et que ζ_n soit une racine primitive de l'unité d'ordre n.

Lemme 2.4.4 *Soit A un arbre de courbe rationnelles lisses sur une surface K3 telles que chacune est préservée par l'automorphisme σ_n purement non–symplectique d'ordre n. Alors les points d'intersection des courbes rationnelles de A sont fixés par σ_n et il suffit de connaître l'action de σ_n à un de ces points pour déterminer son action sur l'entier arbre.*

Le corollaire suivant permet de déterminer les types des points singuliers. On l'enonce juste pour les automorphismes d'ordres premiers plus grands que 2, qui est le cas qui nous intéresse.

Corollaire 2.4.5 *Soit A un arbre de courbes rationnelles préservées par l'automorphisme non-symplectique σ_p d'ordre premier p. Alors les types des points fixés font partie de la séquence suivante :*

$$\ldots t = 0,\ t = 1,\ t = 2, \ldots, t = \frac{p-1}{2},\ t = \frac{p-1}{2} - 1, \ldots, t = 1,\ t = 0,\ t = 0,\ t = 1 \ldots$$

On voit en pratique ce que le Lemme 2.4.4 et le Corollaire 2.4.5 donnent. Pour $p = 2$ on a vu qu'il n'y a pas des points fixes isolés et donc quand on a un arbre de courbes preservées par une involution non-symplectique, une courbe sur deux est fixée point par point, alors que les autres possèdent deux points fixes echangés par l'involution. La Figure 2.2 montre cette situation pour un exemple d'arbre A de 7 courbes rationnelles. Les courbes plus épaisses sont les courbes fixées point par point, alors que les autres sont globalement preservées mais pas point par point.

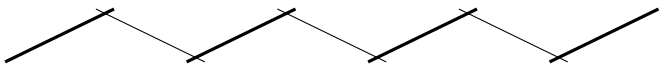


FIGURE 2.2 – L'action d'une involution non–symplectique

Pour $p = 3$ la séquence du Corollaire 2.4.5 est

$$\ldots t = 0, t = 0, t = 1, t = 0, t = 0, t = 1, \ldots$$

Donc par exemple on montre dans la Figure 2.3 l'action de l'automorphisme σ_3 sur un arbre de 7 courbes rationnelles dont on sait que la première courbe à gauche est fixée point par point. Cela permet aussi de voir où se trouvent les points fixes isolés.

Pour $p = 5$ le Corollaire 2.4.5 donne la séquence

$$\ldots t = 0,\ t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 1,\ t = 0,\ t = 0,\ t = 1,\ t = 2 \ldots$$

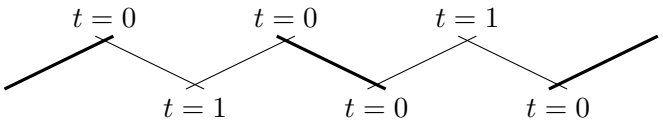


FIGURE 2.3 – L'action de σ_3 sur un arbre de courbes rationnelles

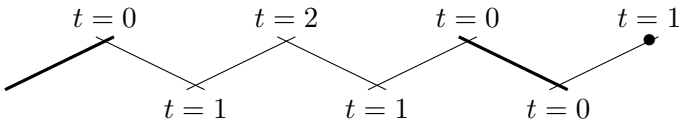


FIGURE 2.4 – L'action de σ_5 sur un arbre de courbes rationnelles

et par exemple sur un arbre de 7 courbes preservées, si on sait que la première courbe à gauche est fixée point par point, on aura un comportement du type montré dans la Figure 2.4.

Pareillement on peut voir les possibilités pour les autres ordres de l'autormorphisme σ_p.

Lemme 2.4.6 *Soit X une surface K3 et σ_p un automorphisme non–symplectique de X d'ordre p premier. Alors $p \leq 19$.*

Preuve. D'après [N1, Téor. 3.1], σ_p agit avec des racines primitives de l'unité sur $T_X \otimes \mathbb{C}$. Or, comme T_X est un $\mathbb{Z}$-module, chaque racine primitive a la même multiplicité : si on appelle n_i les multiplicités des racines et $Tr(T_X)$ est la trace de T_X, on a

$$0 = Tr(T_X) = \sum_{i=0}^{n-1} n_i \xi_p^i.$$

Vu que $1 + \xi_p + \xi_p^2 + \ldots + \xi_p^{n-1} = 0$, cela implique $n_i = 1$ pour tout i.

Or, grâce à [N1, Téor. 3.1], $\phi(p) = p - 1$ divise le rang de T_X qui est plus petit ou égal à 21. Donc $p \leq 19$. □

Grâce au Lemme 2.4.6, il n'y a qu'un nombre fini de cas possibles à analyser. On va distinguer le cas $p = 2$ et $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Pour $p = 2$, Nikulin dans [N1] a classifié les involutions non–symplectiques sur une surface K3 et leur lieux fixes. On rappelle que $N_{(r,a,\delta)}$ est le seul (à isométrie près) réseau 2-élémentaire d'invariants (r, a, δ) (voir Section 1.1).

Quand on a une involution non–symplectique ι sur une surface K3, le réseau invariant $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$ est un réseau hyperbolique et 2-élémentaire et donc est associé aux invariants (r, a, δ) (voir [N1]).

Proposition 2.4.7 (voir [N1]) *Soit X une surface K3 et ι une involution non–symplectique sur X. Alors le lieu fixe* $\mathrm{Fix}(\iota) := \{x \in X : \iota(x) = x\}$ *est lisse et il peut être :*

1. $\mathrm{Fix}(\iota) = \varnothing$;
2. $\mathrm{Fix}(\iota) = E_1 \cup E_2$, *avec E_1, E_2 deux courbes elliptiques lisses disjointes ;*
3. $\mathrm{Fix}(\iota) = C \cup R_1 \cup \ldots \cup R_k$ *avec C une courbe lisse de genre $g \geq 0$ et $R_j, j = 1, \ldots, k$ des courbes lisses rationnelles.*

De plus, le réseau invariant $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$ détermine uniquement le lieu $\mathrm{Fix}(\iota)$ *; au contraire,* $\mathrm{Fix}(\iota)$ *permet de déterminer les invariants (r, a) de $H^2(X, \mathbb{Z})^\iota$ mais pas δ. Donc ils peuvent exister deux involutions ι, ι' telles que les invariants (g, k) de* $\mathrm{Fix}(\iota)$ *et (g', k') de* $\mathrm{Fix}(\iota')$ *coïncident mais $\delta(H^2(X, \mathbb{Z})^\iota) \neq \delta(H^2(X, \mathbb{Z})^{\iota'})$.*

Plus précisement :

1. *si* $\mathrm{Fix}(\iota) = \varnothing$, *alors* $H^2(X,\mathbb{Z})^\iota \simeq N_{(10,10,0)}$;
2. *si* $\mathrm{Fix}(\iota) = E_1 \cup E_2$, *alors* $H^2(X,\mathbb{Z})^\iota \simeq N_{(10,8,0)}$;
3. *si* $\mathrm{Fix}(\iota) = C \cup R_1 \cup \ldots \cup R_k$, *alors* $H^2(X,\mathbb{Z})^\iota \simeq N_{(r,a,\delta)}$ *avec*

$$g = \frac{22-r-a}{2}, \quad k = \frac{r-a}{2}. \tag{2.4.1}$$

Quand X admet une involution non–symplectique, alors le réseau $H^2(X,\mathbb{Z})^\iota$ admet un plongement primitif dans $\mathrm{NS}(X)$. Si on fixe un lieu fixe, il y a une famille de surfaces K3 qui admettent une involution non–symplectique avec ce lieu fixe : il s'agit des surfaces K3 qui sont $N_{(r,a,\delta)}$-polarisées. On rappelle la définition :

Définition 2.4.8 *Soit L un réseau. On dit que la surface X de type K3 est* **L-polarisée** *si L admet un plongement primitif dans* $\mathrm{NS}(X)$ *:*

$$L \hookrightarrow \mathrm{NS}(X).$$

On trouve des exemples de polarisation par exemple dans [Dol2, Example 1.2].

Dans la suite on appellera $X_{(r,a,\delta)}$ le membre général de la famille des surfaces K3 qui sont $N_{(r,a,\delta)}$-polarisées ; cette surface a donc groupe de Néron-Severi isométrique à $N_{(r,a,\delta)}$. D'après les résultats de Nikulin [N1], il y a 75 possibilités pour (r,a,δ) et elles sont montrées dans la Figure 2.5.

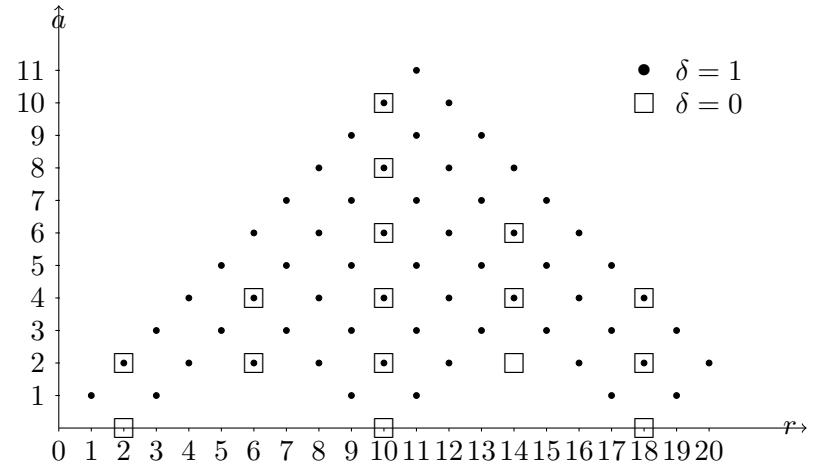


FIGURE 2.5 – Ordre 2, possibilités pour (r,a,δ)

On passe maintenant au cas $3 \leq p \leq 19$: on a une surface X de type K3 avec un automorphisme non–symplectique σ_p d'ordre p. Cela est l'objet du travail de Artebani, Sarti et Taki in [AS1] et [AST]. Dans ces travaux, ils analysent les possibilités pour le lieu fixe de σ_p ainsi que pour le réseau invariant $S(\sigma_p)$, en soulignant le lien entre les invariants du réseau $S(\sigma_p)$ et la structure topologique de $\mathrm{Fix}(\sigma_p)$.

Lemme 2.4.9 (voir [AST, Théorème 2.1]) *Soit X une surface K3 et $\sigma_p \in \mathrm{Aut}(X)$ un automorphisme non–symplectique d'ordre premier p. Alors les réseaux $S(\sigma_p)$ et $T(\sigma_p)$ sont p-élémentaires et de même longuer a, c'est-à-dire*

$$A_{S(\sigma_p)} \simeq A_{T(\sigma_p)} \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$$

et $a \leq \frac{\mathrm{rang}T(\sigma_p)}{p-1}$.

On appelera toujours r le rang de $S(\sigma_p)$ et donc au réseau $S(\sigma_p)$ on a vu qu'on peut associer les deux invariants (r, a). On definit aussi

$$m := \frac{22 - r}{p - 1}$$

car parfois on utilisera m plutôt que r, où $(p-1)m = \text{rang}(T(\sigma_p))$.

On résume les résultats de [AST] dans la Proposition suivante.

Proposition 2.4.10 (voir [AST]) *Soit X une surface K3 et $\sigma_p \in \text{Aut}(X)$ un automorphisme non–symplectique d'ordre premier $p > 2$. Alors le lieu fixe $\text{Fix}(\sigma_p)$ n'est pas vide et il est de la forme suivante : soit $\text{Fix}(\sigma_p)$ consiste des points fixes isolés soit il est l'union disjointe de courbes lisses et points fixes isolés de la forme*

$$\text{Fix}(\sigma_p) = C \cup R_1 \cup \ldots \cup R_k \cup \{p_1, \ldots, p_n\} \tag{2.4.2}$$

où C est une courbe lisse de genre $g \geq 0$, $R_j, j = 1, \ldots, k$ sont des courbes lisses rationnelles et les $p_i, i = 1, \ldots n$ sont des points fixes isolés. Pour $p = 17, 19$, le lieu fixe est l'union des points fixes isolés.

De plus, soient (r, a) les invariants de $S(\sigma_p)$ et on suppose que $\text{Fix}(\sigma_p)$ contient au moins une courbe. Alors on a les égalités suivantes :

- *$m = 2g + a$;*
- *si $p = 3$, alors $1 - g + k = (r - 8)/2$ et $n = 10 - m$;*
- *si $p = 5$, alors $1 - g + k = (r - 6)/4$ et $n = 16 - 3m$;*
- *si $p = 7$, alors $1 - g + k = (r - 4)/6$ et $n = 18 - 5m$;*
- *si $p = 11$, alors $1 - g + k = (r - 2)/10$ et $n = 20 - 9m$;*
- *si $p = 13$, alors $(g, n, k) = (0, 9, 0)$ et $S(\sigma_p) = H_{13} \oplus E_8$.*

Remarque 2.4.11 *On note que, si on regarde [AS1, Theorem 2.2], pour $p = 3$ la Proposition 2.4.10 a une formulation légèrement différente. Cela est du au fait que dans [AS1] le nombre k répresente le nombre total de courbes fixées et il inclut la courbe C, alors que dans [AST] et ici k ne compte pas la courbe C. Il peut être nécessaire faire de distinction alors que la courbe C a genre 0 et on remarque que ce cas est possible et atteint (on verra un exemple dans la Section 7.4.3).*

Dans [AST] on trouve aussi toutes les possibilités pour les réseaux $S(\sigma_p)$ et $T(\sigma_p)$. On reporte ici les tableaux correspondants de [AST] (Tableaux 2.8-2.2).

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
4	1	-	5	-	$K_{19} \oplus E_8 \oplus E_8$	$U \oplus K_{19}$

Tableau 2.2 – Ordre 19

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
6	1	-	4	-	$U \oplus U \oplus E_8 \oplus L_{17}$	$U \oplus L_{17}$

Tableau 2.3 – Ordre 17

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
10	1	0	9	0	$U \oplus E_8 \oplus H_{13}$	$E_8 \oplus H_{13}$

Tableau 2.4 – Ordre 13

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
2	0	1	2	0	$U \oplus U \oplus E_8 \oplus E_8$	U
2	2	-	2	-	$U \oplus U(11) \oplus E_8 \oplus E_8$	$U(11)$
12	1	0	11	0	$U \oplus U(11) \oplus E_8 \oplus E_8$	$U(11)$

Tableau 2.5 – Ordre 11

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
4	1	1	3	0	$U \oplus U \oplus A_6 \oplus E_8$	$U \oplus K_7$
4	3	-	3	-	$U \oplus U(7) \oplus A_6 \oplus E_8$	$U(7) \oplus K_7$
10	0	1	8	1	$U \oplus U \oplus E_8$	$U \oplus E_8$
10	2	0	8	0	$U \oplus U(7) \oplus E_8$	$U(7) \oplus E_8$
16	1	0	13	1	$U \oplus U \oplus K_7$	$U \oplus A_6 \oplus E_8$

Tableau 2.6 – Ordre 7

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
2	1	2	1	0	$U \oplus H_5 \oplus E_8^2$	H_5
6	2	1	4	0	$U \oplus H_5 \oplus A_4 \oplus E_8$	$H_5 \oplus A_4$
6	4	-	4	-	$U(5) \oplus H_5 \oplus A_4 \oplus E_8$	$H_5 \oplus A_4^*(5)$
10	1	1	7	1	$U \oplus H_5 \oplus E_8$	$H_5 \oplus E_8$
10	3	0	7	0	$U \oplus H_5 \oplus A_4^2$	$H_5 \oplus A_4^2$
14	2	0	10	1	$U \oplus H_5 \oplus A_4$	$H_5 \oplus A_4 \oplus E_8$
18	1	0	13	2	$U \oplus H_5$	$H_5 \oplus E_8^2$

Tableau 2.7 – Ordre 5

r	a	g	n	k	$T(\sigma)$	$S(\sigma)$
2	2	4	0	0	$U \oplus U \oplus A_2 \oplus E_6 \oplus E_8$	$U(3)$
2	0	5	0	1	$U \oplus U \oplus E_8^2$	U
4	3	3	1	0	$U \oplus U \oplus A_2 \oplus E_6^2$	$U(3) \oplus A_2$
4	1	4	1	1	$U \oplus U \oplus E_6 \oplus E_8$	$U \oplus A_2$
6	4	2	2	0	$U \oplus U \oplus A_2^3 \oplus E_6$	$U(3) \oplus A_2^2$
6	2	3	2	1	$U \oplus U \oplus E_6^2$	$U \oplus A_2^2$
8	7	-	3	-	$U \oplus U(3) \oplus A_2^5$	$U(3) \oplus E_6^*(3)$
8	5	1	3	0	$U \oplus U \oplus A_2^5$	$U(3) \oplus A_2^3$
8	3	2	3	1	$U \oplus U \oplus A_2^2 \oplus E_6$	$U \oplus A_2^3$
8	1	3	3	2	$U \oplus U \oplus A_2 \oplus E_8$	$U \oplus E_6$
10	6	0	4	0	$U \oplus U(3) \oplus A_2^4$	$U(3) \oplus A_2^4$
10	4	1	4	1	$U \oplus U \oplus A_2^4$	$U \oplus A_2^4$
10	2	2	4	2	$U \oplus U \oplus A_2 \oplus E_6$	$U \oplus A_2 \oplus E_6$
10	0	3	4	3	$U \oplus U \oplus E_8$	$U \oplus E_8$
12	5	0	5	1	$U \oplus U(3) \oplus A_2^3$	$U \oplus A_2^5$
12	3	1	5	2	$U \oplus U \oplus A_2^3$	$U \oplus A_2^2 \oplus E_6$
12	1	2	5	3	$U \oplus U \oplus E_6$	$U \oplus A_2 \oplus E_8$
14	4	0	6	2	$U \oplus U(3) \oplus A_2^2$	$U \oplus A_2^3 \oplus E_6$
14	2	1	6	3	$U \oplus U \oplus A_2^2$	$U \oplus E_6^2$
16	3	0	7	3	$U \oplus U(3) \oplus A_2$	$U \oplus A_2 \oplus E_6^2$
16	1	1	7	4	$U \oplus U \oplus A_2$	$U \oplus E_6 \oplus E_8$
18	2	0	8	4	$U \oplus U(3)$	$U \oplus A_2 \oplus E_6 \oplus E_8$
18	0	1	8	5	$U \oplus U$	$U \oplus E_8^2$
20	1	0	9	5	$A_2(-1)$	$U \oplus E_8^2 \oplus A_2$

Tableau 2.8 – Ordre 3

Au final les invariants (r, a) déterminent, à isométrie près, le réseau $S(\sigma_p)$ (voir [AST, Theorem 3.0.1]). Vu que $m = \frac{22-r}{p-1}$, la paire (m, a) determine $S(\sigma_p)$ aussi. On prend $p = 3, 5, 7$. Si on dessine dans le plan à cordonnées (m, a) toutes les possibilités pour (m, a) qui sont données dans [AST] on trouve les diagrammes montrés dans les Figures 2.6–2.8.

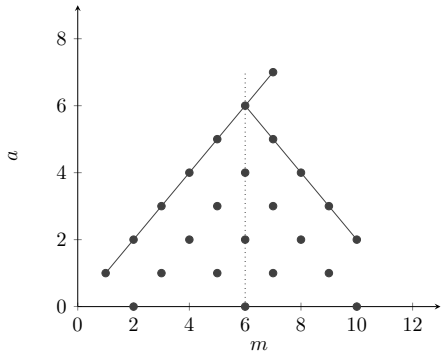


FIGURE 2.6 – Valeurs de (m, a) possibles pour $p = 3$

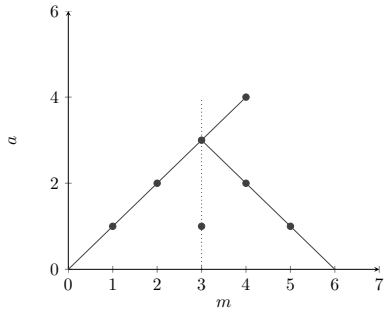


FIGURE 2.7 – Valeurs de (m, a) possibles pour $p = 5$

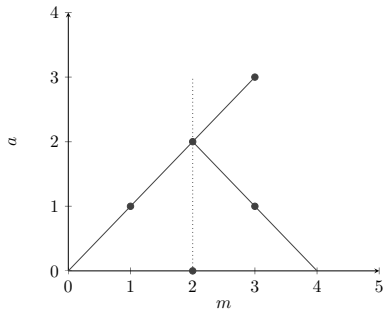


FIGURE 2.8 – Valeurs de (m, a) possibles pour $p = 7$

On peut observer que les points qui correspondent aux valeurs de (m, a) possibles sont à peu près symétriques par rapport à la droite $m = \frac{\alpha}{2}$ où

$$\alpha = \frac{24}{p-1} = \begin{cases} 12 & \text{si } p = 3 \\ 6 & \text{si } p = 5 \\ 4 & \text{si } p = 7. \end{cases}$$

Cette symétrie correspond à la réflexion $(m, a) \mapsto (\alpha - m, a)$ où, équivalentement, $(r, a) \mapsto (20 - r, a)$. Les points qui ne possèdent pas un symétrique, c'est-à-dire les points tels que

(m, a) est dans le diagramme mais $(\alpha - m, a)$ il n'y est pas, sont :

$$(r, a) = \begin{cases} (20, 1), (8, 7) & \text{si } p = 3 \\ (6, 4) & \text{si } p = 5 \\ (4, 3) & \text{si } p = 7. \end{cases}$$

On verra dans le Chapitre 7 comment utiliser ces diagrammes et comment controler les cas qui échappent à la symétrie.

2.4.1 Involutions non–symplectiques

Les trois Exemples qui suivent vont montrer trois constructions d'involutions non–symplectiques qui préservent une fibration elliptique. Ils seront des exemples fondamentaux dans les Chapitres 4 et 5.

Exemple 2.4.12 Soit $\pi : S \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique avec S une surface rationnelle et avec equation de Weierstrass $y^2 = x^3 + A(\tau)x + B(\tau)$, où on note $A(\tau) := A(\tau, 1)$, $B(\tau) := B(\tau, 1)$. On a déjà observé dans la Section 1.3 que les degrés de A et B sont $\deg A = 4m, \deg B = 6m$. On remarque que pour une surface rationnelle $m = 1$ et donc $\deg A = 4, \deg B = 6$.

On considère le recouvrement double de $\mathbb{P}^1$ donné par $\alpha : \tau \mapsto \tau^2$ (à projectivité près tout recouvrement est de cette forme). On suppose que les fibres au-dessus de $\tau = 0, \infty$ (les deux points fixes de α) soient réductibles. Maintenant on prend le pull–back de π par α, donc on obtient une fibration elliptique $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ avec X une surface K3 et équation de Weierstrass $y^2 = x^3 + A(\tau^2)x + B(\tau^2)$. On voit qu'il y a une involution ι donnée par

$$\iota : (x, y, \tau) \mapsto (x, y, -\tau).$$

Cette involution n'agit que sur la base de la fibration et elle envoie une fibre sur une fibre, donc elle préserve la classe de la fibre. Il y a deux fibres fixées : les fibres au-dessus de $\tau = 0, \infty$; les autres fibres sont échangés deux à deux. Toute section est préservée et l'involution est non–symplectique. On appellera ι fibration de type a). Par construction on se rend compte que $S = X/\iota$.

Exemple 2.4.13 Soit $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur une surface K3 avec équation de Weierstrass donnée par $y^2 = x^3 + A(\tau)x + B(\tau)$. On va construire une involution non–symplectique sur X qui n'agit que sur les fibres de la fibration. On rappelle que chaque courbe elliptique peut être vue comme recouvrement 2 :1 de $\mathbb{P}^1$ ramifié en 4 points, les quatre points d'ordre 2 de la courbe elliptique. On a donc une involution ι, l'involution de recouvrement, qui fixe les 4 points d'ordre 2. Cette remarque nous permet d'étendre l'involution à la surface elliptique, c'est-à-dire on définit sur X l'involution donnée par

$$\iota : (x, y, \tau) \mapsto (x, -y, \tau).$$

On appellera ι involution de type b).

On s'aperçoit que ι fixe la base de la fibration et préserve toute fibre. Par rapport aux sections, la section zero est fixée. De plus, tout point d'ordre 2 sur chaque fibre est fixé et en général ces points sont sur une courbe irréductible (qui est une courbe horizontale) qui est donc une trisection de la fibration. Il se peut aussi que cette trisection devient réductible et soit donc l'union de trois différentes sections ou d'une section et une bisection. On verra des situations de ce type dans les exemples des fibrations des prochains chapitres.

Exemple 2.4.14 Une autre involution non–symplectique qui préserve la fibration elliptique $\mathcal{E} : X \to \mathbb{P}^1$ (avec X une surface K3) est définie de la façon suivante. Chaque fois qu'on prends un point rationnel P d'une courbe elliptique E on peut définir l'involution

$$\begin{aligned} \iota_P : E &\longrightarrow E \\ Q &\mapsto P - Q. \end{aligned}$$

Donc si on prend P une section de $\mathcal{E}$, on peut étendre ι_P à une involution de X et il s'agit d'une involution non–symplectique car c'est la composition d'une translation avec l'involution de type b), c'est-à-dire une application symplectique et une non–symplectique. Une fibre est envoyée en soi même par ι_P et donc la fibration elliptique est préservée.

Remarque 2.4.15 *Quand on prend la section zero s, l'involution ι_s de l'Exemple 2.4.14 ι_s est exactement l'involution définie dans l'Exemple 2.4.13.*

Première partie

Fibrations elliptiques et involutions de van Geemen-Sarti

Chapitre 3

Les surfaces K3 de type $X_{(r,22-r,\delta)}$

Dans ce chapitre, on décrit les surfaces qui sont objet de nos études, c'est-à-dire les surfaces de type K3 qui sont obtenues comme recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long d'une courbe de degré 6. On les appelle $X_{(r,a,\delta)}$ et on va voir leur propriétés dans les prochaines sections.

3.1 Recouvrement double de $\mathbb{P}^2$

On va construire dans cette Section les surfaces $X_{(r,a,\delta)}$ de type K3 à partir d'un recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long d'une courbe sextique $\mathcal{C}_6$. Cette construction donne en général un modèle singulier de surface K3 et, en éclatant le lieu singulier, on obtient une surface lisse.

De plus, la construction donne une involution non–symplectique ι, l'involution de recouvrement, telle que son lieu fixe est le lieu de ramification.

Soit $\mathcal{C}_6$ une courbe sextique dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$; en général $\mathcal{C}_6$ pourra être singulière et réductible. La Proposition suivante regroupe des faits connus à propos des surfaces obtenues comme recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de $\mathcal{C}_6$.

Proposition 3.1.1 *Soit $\mathcal{C}_6$ une courbe sextique avec points singuliers qui sont soit points doubles ordinaires, soit points triples ordinaires. On appelle*

- *$b_1, \dots, b_\alpha$ les α composantes irréductibles de $\mathcal{C}_6$;*
- *$P_1, \dots, P_\gamma$ les points doubles de $\mathcal{C}_6$;*
- *$Q_1, \dots, Q_\nu$ les points triples de $\mathcal{C}_6$.*

Soit X la surface K3 obtenue comme désingularisation du recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de $\mathcal{C}_6$ et soit ι l'involution induite sur X par l'involution de recouvrement.

Alors le nombre de Picard de X est $\rho(X) \geq 1+\gamma+4\nu$ et ι fixe s courbes avec $s = \alpha+\nu$. L'involution ι agit comme l'identité sur $\mathrm{NS}(X)$ si et seulement si $\rho(X) = 1+\gamma+4\nu$.

Preuve. On commence par le cas $\nu = 0$. Dans ce cas, le recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de $\mathcal{C}_6$ est singulier dans les points singuliers de $\mathcal{C}_6$ qui ne sont que des points doubles. On peut les éclater pour résoudre les singularités. Autrement, on peut éclater $\mathbb{P}^2$ dans les points singuliers de $\mathcal{C}_6$ et ensuite considerer le recouvrement double. Donc le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & S & \longleftarrow & X \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle 2:1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi}\ {\scriptstyle 2:1} \\ \mathcal{C}_6 = \bigcup_i b_i & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 & \underset{\beta}{\longleftarrow} & \widetilde{\mathbb{P}^2} & \hookleftarrow & \bigcup_i \widetilde{b_i} \end{array}$$

On appelle $\beta : \widetilde{\mathbb{P}^2} \to \mathbb{P}^2$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ dans les $P_i, i = 1, \ldots, \gamma$ et les $\tilde{b}_i$ sont les transformés strictes des b_i. Soit h la classe d'une droite en $\mathbb{P}^2$ et soient e_i les diviseurs exceptionnels au-dessus des P_i. Alors on trouve que

$$\beta^*(\mathcal{C}_6) = \sum_{i=1}^{\alpha} \widetilde{b}_i + 2\sum_{j=1}^{\gamma} e_j$$

et les diviseurs e_i apparaissent avec multiplicité 2 car les P_i sont des points doubles. Donc le lieu de ramification du recouvrement double $\pi : X \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$ consiste en l'union disjointe des $\tilde{b}_i, i = 1, \ldots, \alpha$ (voir [BHPvdV, Sec. I.17]). Les classes h et $e_i, i = 1, \ldots, \gamma$ sont générateurs de $\mathrm{NS}(\widetilde{\mathbb{P}^2}) \otimes \mathbb{Q}$.

Puisque $(\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q})^\iota = \pi^*(\mathrm{NS}(\widetilde{\mathbb{P}^2}) \otimes \mathbb{Q})$ on obtient

$$\mathrm{rang}((\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q})^\iota) = \rho(\widetilde{\mathbb{P}^2}) = 1 + \gamma.$$

De plus, $(\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q})^\iota$ est plongé dans $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$ donc $\rho(X) \geq 1 + \gamma$. L'involution ι agit comme l'identité sur $\mathrm{NS}(X)$ si et seulement si $(\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q})^\iota = \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q}$ et donc si et seulement si $\rho(X) = 1 + \gamma$.

Maintenant on passe au cas $\nu > 0$. Soit Q_j un des points triples de $\mathcal{C}_6$. Quand on éclate Q_j, on introduit un diviseur exceptionnel f_j qui a multiplicité 3 et, vu que sa multiplicité est impaire, f_j est une classe dans le lieu de ramification de $\pi : X \to \widetilde{\mathbb{P}^2}$. La courbe f_j rencontre la transformé stricte de $\mathcal{C}_6$ en 3 points, car Q_j était un point triple, et donc il faudra éclater ces 3 points pour obtenir un lieu de ramification lisse. L'éclatement introduit les classes $f_{j,1}, f_{j,2}, f_{j,3}$ et chacune a multiplicité égale à 4 et donc n'est pas contenue dans le lieu de ramification. Ainsi au dessus du point triple Q_j on a trouvé 4 courbes avec les intersections suivantes :

$$f_j^2 = -4, \quad f_{j,i}^2 = -1, \quad f_j f_{j,i} = 1, \quad f_{j,i} f_{j,h} = 0, \quad i, h = 1, 2, 3, \ i \neq h$$

Donc un point triple donne 4 diviseur dans $\mathrm{NS}(\widetilde{\mathbb{P}^2})$, c'est-à-dire les courbes $f_j, f_{j,1}, f_{j,2}, f_{j,3}$, et une courbe dans le lieu fixe, c'est-à-dire f_j (voir Figure 3.1). On peut conclure la preuve comme dans le cas $\nu = 0$. □

Définition 3.1.2 *On dira que les composantes $b_i, i = 1, \ldots \alpha$, sont* **en position très générale** *si $\rho(X) = 1 + \gamma + 4\nu$.*

Quand les composantes de $\mathcal{C}_6$ sont en position très générale, on a $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbb{Q} = \pi^*(\mathrm{NS}(\widetilde{\mathbb{P}^2})) \otimes \mathbb{Q}$ et donc une $\mathbb{Q}-$base de $\mathrm{NS}(X)$ est donnée par

$$\{\pi^*(h), \pi^*(e_i), \pi^*(f_j), \pi^*(f_{j,h}) : i = 1, \ldots, \gamma, \ j = 1, \ldots, \nu \text{ et } h = 1, 2, 3\}.$$

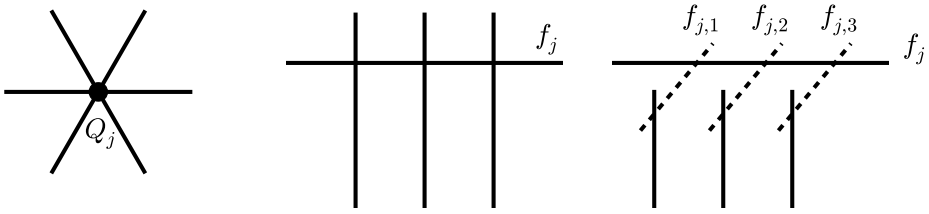


FIGURE 3.1 – Les 2 éclatements successifs d'un point triple

Grâce à la Proposition précédente et à la classification des involutions non–symplectiques sur les surfaces K3 vue dans la Proposition 2.4.7, on a le Corollaire 3.1.3, qui explique le lien entre les genres des composantes de la courbe de ramification et le nombre de points doubles et triples.

Corollaire 3.1.3 *Soient $\mathcal{C}_6$ et b_i comme dans la Proposition 3.1.1, avec les composantes b_i en position très générale et ι l'involution non–symplectique. Soit $g_i = g(b_i)$ le genre de chaque composante, avec $g_i \geq g_{i+1}$. Alors*

— *si $g_2 \neq 0$, alors $\alpha = 2$, la courbe $\mathcal{C}_6$ a deux composantes et il s'agit de deux courbes elliptiques. Les invariants sont donc*

$$g_1 = g_2 = 1, \quad \alpha = 2, \quad \gamma = 9, \quad \nu = 0;$$

— *si $g_2 = 0$, alors on est dans le cas 3. de la Proposition 2.4.7, la composante b_1 a genre $g = g_1 \geq 0$ et les autres invariants sont*

$$k = \alpha + \nu - 1, \quad r = 1 + \gamma + 4\nu, \quad a = 21 - \gamma - 4\nu - 2g_1$$

et donc $\gamma = \alpha - 3\nu + 9 - g_1$

Remarque 3.1.4 *Dorénavant on suppose que les composantes b_i soient*

— *toutes rationnelles, c'est-à-dire $g_i = 0$ $\forall i$;*

— *en position très générale, c'est-à-dire l'involution ι agit comme l'identité sur* $\mathrm{NS}(X)$.

Remarque 3.1.5 *La raison pour supposer que $\mathcal{C}_6$ ait des composantes en position très générale est montrée dans [Kl, Remark 5.9].*

Notation On numérote les composantes de la courbe de ramification $\mathcal{C}_6$; si un point double est l'intersection de la composante i-ème et de la composante j-ème on l'appelle $P_{i,j}$ (où $P^k_{i,j}, k = 1, \ldots, m$ si l'intersection consiste de m points, $m > 1$). La courbe exceptionnelle dans $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ au-dessus du point $P_{i,j}$ (resp. $P^k_{i,j}$) sera appelée $e_{P_{i,j}}$ (resp. $e_{P^k_{i,j}}$) et son pull-back sur la surface X sera noté $E_{P_{i,j}}$ (resp. $E_{P^k_{i,j}}$).

Dans le cas d'un point triple A, s'il est intersection des composantes i-ème, j-ème et k-ième, les courbes exceptionnelles au-dessus de A sont appelées $e_A, e_{A,i}, e_{A,j}, e_{A,k}$. On appelle $E_{A,i} := \pi^*(e_{A,i}), E_{A,j} := \pi^*(e_{A,j}), E_{A,k} := \pi^*(e_{A,k})$.

Le pull-back sur la surface $X_{(r,a,\delta)}$ des composantes b_i et le pull-back de e_A sont courbes de multiplicité 2, car $\beta^*(b_i)$ et e_A sont dans le lieu de ramification de π. Donc on appelle $\mathcal{B}_i$ et E_A les courbes de X telles que $\pi^*(\beta^*(b_i)) = 2\mathcal{B}_i$ et $\pi^*(\beta^*(e_A)) = 2E_A$.

En particulier, quand la composante b_i est une droite (resp. une conique) on l'appelle l_i (resp. c_i). Alors $\mathcal{L}_i$ sera la courbe de X telle que $\pi^*(\beta^*(l_i)) = 2\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{C}_i$ sera la courbe de X telle que $\pi^*(\beta^*(c_i)) = 2\mathcal{C}_i$.

Corollaire 3.1.6 *Avec l'hypothèse de la Remarque 3.1.4, le recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de $\mathcal{C}_6$ est $X_{(r,a,\delta)}$ avec*

$$r = 1 + \gamma + 4\nu, \ a = 22 - r.$$

L'involution est ι (induite par l'involution de recouvrement) et le lieu fixe de ι en $X_{(r,a,\delta)}$ consiste de $k + 1 = \alpha + \nu$ courbes rationnelles (et ça implique $\gamma = \alpha - 3\nu + 9$).

De plus, si $\delta = 0$, alors $(r, a) = (18, 4)$ et $X_{(r,a,\delta)}$ est la surface de Kummer $Km(E \times E')$ avec E et E' deux courbes elliptiques non isogènes.

On considère le recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié sur six droites avec deux points triples A et B ; alors il s'agit soit de $X_{(18,4,1)}$ soit de $X_{(18,4,0)}$. Dans le premier cas, la droite qui passe par A et B est dans le lieu de ramification, tandis que dans le deuxième cas elle n'y est pas.

Preuve. Les conditions sur α, k, r et a ne dependent que de la Proposition 2.4.7 et du Corollaire 3.1.3.

Grâce à la classification des lieux fixes pour les involutions non-symplectiques sur les surfaces K3, on sait que la seule surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ avec $\delta = 0$ aura forcement $r = 18$. En particulier, la surface $X_{(18,4,0)}$ est la surface de Kummer du produit de deux courbes elliptiques non isogènes : cela est dû au fait que le réseau trascendent de la surface de Kummer $Km(E\times E')$ est isométrique à $U(2)\oplus U(2)$ (voir [O]) et ce réseau est 2-élémentaire et a invariants $a = 4, \delta = 0$. Donc le groupe de Néron-Severi de $Km(E \times E')$ est un réseau 2-élémentaire avec invariants $(18, 4, 0)$.

On commence par considerer la courbe sextique qui consiste de 6 droites $l_1, \ldots, l_6$, avec deux points triples $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$ et $B := l_4 \cap l_5 \cap l_6$. Les 9 points double de cette courbe sont $P_{1,4}$, $P_{1,5}$, $P_{1,6}$, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, $P_{2,6}$, $P_{3,4}$, $P_{3,5}$, $P_{3,6}$ (voir Figure 3.2).

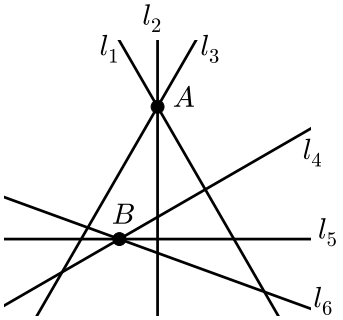


FIGURE 3.2 – 6 droites avec 2 points triples, cas $\delta = 0$

Dans ce cas, la droite qui passe par A et B n'est pas dans le lieu de ramification. Les invariants associés à cette courbe sont $\alpha = 6, \nu = 2, \gamma = 9$ et grâce au Corollaire 3.1.3 on obtient $r = 18, a = 4$. Donc la surface associée à cette configuration de courbe peut être $X_{(18,4,1)}$ ou $X_{(18,4,0)}$. Si on considère les classes $\mathcal{L}_i, i = 1, \ldots, 6$, E_A, E_B, $E_{A,i}$, $i = 1, 2, 3$, $E_{B,j}$, $j = 4, 5, 6$, $E_{P_{h,k}}$, $(h, k) = (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$, elles forment un réseau particulier appelé réseau double Kummer (cf. [O]) qui est typique des surfaces de Kummer du produit de deux courbes elliptiques. Donc on peut conclure que le recouvrement double de $\widetilde{\mathbb{P}}^2$ ramifié sur cette courbe est $Km(E \times E')$ et donc $X_{(18,4,0)}$.

Maintenant on considère la sextique qui consiste de 6 droites $l_1, \ldots, l_6$ avec deux points triples $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$, $B := l_1 \cap l_5 \cap l_6$ et 9 points doubles $P_{1,4}$, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, $P_{2,6}$, $P_{3,4}$, $P_{3,5}$, $P_{3,6}$, $P_{4,5}$, $P_{4,6}$ (voir Figure 3.3).

Cette fois la droite qui passe par A et B est l_1 et donc elle fait partie du lieu de ramification. Les invariants associés à cette configuration de courbes sont $\alpha = 6, \nu =$

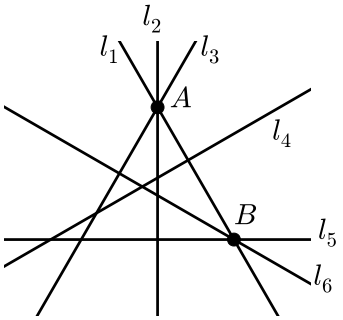


FIGURE 3.3 – 6 droites avec 2 points triples, cas $\delta = 1$

$2, \gamma = 9$ et, comme avant, on a $r = 18, a = 4$ grâce au Corollaire 3.1.3. A nouveau, la surface associée à cette configuration de courbe peut être $X_{(18,4,1)}$ ou $X_{(18,4,0)}$. La classe

$$F = \mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{4,6}} + \mathcal{L}_6 + E_{B,6} + E_B + E_{B,5} + \mathcal{L}_5 + E_{P_{2,5}} + \mathcal{L}_2 + E_{A,2} + E_A + E_{A,1}$$

donne une fibration elliptique dont la section est $s := E_{A,3}$ et telle que il y a une fibre singulière de type I_{14}. D'après [O], sur la surface $X_{(18,4,0)}$ il n'existe pas une fibration elliptique avec cette fibre, donc on peut conclure que cette configuration de droites correspond à la surface $X_{(18,4,1)}$. □

Remarque 3.1.7 *Dans le Corollaire 3.1.3, on a montré que connaitre g_i, α, γ, ν suffit pour determiner r et a. On observe que il y a plusieurs choix de la courbe sextique $\mathcal{C}_6$ (et donc de α, γ, ν) qui donnent les mêmes invariants (r, a). On le montre dans l'Exemple suivant.*

Exemple 3.1.8 Soit X la surface qui on obtient de la désingularisation du recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long de 6 droites en position générale. Donc $\alpha = 6, \gamma = 15, \nu = 0$ et on calcule $(r, a) = (16, 6)$ à l'aide du Corollaire 3.1.3. La surface X est $X_{(16,6,1)}$. La même surface est associé aussi au choix des sextiques suivantes :

i) 1 quartique rationnelle, 2 droites et 3 points triple : $\alpha = 3$, $\gamma = 3$ $\nu = 3$;

ii) 1 cubique rationnelle, 1 conique, 1 droite et 3 points triple : $\alpha = 3$, $\gamma = 3$, $\nu = 3$;

iii) 1 cubique rationnelle, 3 droites et 2 points triple : $\alpha = 4$, $\gamma = 7$, $\nu = 2$;

iv) 3 coniques et 3 points triple : $\alpha = 3$, $\gamma = 3$, $\nu = 3$;

v) 2 coniques, 2 droites et 2 points triple : $\alpha = 4$, $\gamma = 7$, $\nu = 2$;

vi) 1 conique, 4 droites et 1 point triple : $\alpha = 5$, $\gamma = 11$, $\nu = 1$;

vii) 6 droites : $\alpha = 6$, $\gamma = 15$, $\nu = 0$.

Vu que la surface $X_{(r,a,\delta)}/\iota$ ne depends pas du choix de $\mathcal{C}_6$ à transformation birationnelle près, il existe une transformation birationnelle de $\mathbb{P}^2$ dans soi-même qui envoie chaque sextique de la liste précédente dans une autre sextique.

Par exemple, on transforme la sextique *vii*) en *iv*) (resp. $v), vi)$) en considerant la transformation de Cremona qui a pour points de base 3 points doubles de la configuration *vii*) et qui contracte 3 (resp. 2, 1) droites du lieu de ramification. Pour transformer la courbe *vi*) dans la courbe *iii*) (resp. $ii), i)$), on considère la transformation de Cremona ayant pour points de base 3 points doubles de $\mathcal{C}_6$ et telle que un de ces points (resp. 1, 0) soit sur la conique et tel que la transformation contracte 1 droite (resp. 2 droites, 2 droites).

Quand $r = 18$ il se peut que deux choix associés aux mêmes α, γ, ν ne soient pas birationnelles. Cela depend du fait qu'on a deux possibilité pour la valeur de δ. On a déjà montré dans le Corollaire 3.1.6 que deux configurations différentes des 6 droites avec 2 points triples donnent deux surfaces differentes $X_{(18,4,0)}$ et $X_{(18,4,1)}$. On montre cette distinction pour des autres choix de sextiques :

Exemple 3.1.9 On fixe $(r, a) = (18, 4)$. Donc les possibilités pour les sextiques sont :

1. 2 coniques, 2 droites et 4 points triples : $\alpha = 4$, $\gamma = 1$, $\nu = 4$;
2. 1 conique, 4 droites et 3 points triples : $\alpha = 5$, $\gamma = 5$, $\nu = 3$;
3. 6 droites et 2 points triples : $\alpha = 6$, $\gamma = 9$, $\nu = 2$.

Soit 3a) le cas qui donne la surface $X_{(18,4,0)}$. Comme dans la Figure 3.2 on appelle $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$ et $B := l_4 \cap l_5 \cap l_6$. La transformation de Cremona ayant pour centre A, $P_{1,4}$ et $P_{2,5}$ donne une sextique de type 2) telle que chaque point triple est l'intersection de la conique et de deux droites mais il y a une droite qui ne passe pas par aucun point triple. La transformation de Cremona ayant pour centre B, $P_{2,4}$ et $P_{2,6}$ donne une sextique de type 1).

On appelle 3*b*) la configuration de droites qui donne la surface $X_{(18,4,1)}$, c'est-à-dire les 6 droites telles que la droite par les deux points triples fait partie du lieu de ramification. Comme dans la preuve du Corollaire 3.1.6, on a $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$ et $B := l_1 \cap l_5 \cap l_6$ (voir Figure 3.3). Alors la transformation de Cremona ayant pour centre le points A, B et $P_{2,5}$ donne une sextique de type 2) telle que chaque point triple appartient à la conique et chaque droite passe par au moins un point triple.

Chapitre 4

Fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$

Sur les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ qu'on a introduit dans le Chapitre 3, on cherche des fibrations elliptiques. Dans la Section 4.1 on montrera les seules possibles fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ pour $r = 11, \ldots, 20$. Ensuite on en montrera l'existence et les propriétés.

Les résultats de ce chapitre sont objet de l'article *Van Geemen-Sarti involutions and elliptic fibrations on K3 surfaces double cover of* $\mathbb{P}^2$ par A. Garbagnati e moi-même [CG].

4.1 Possibilités pour les fibrations elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}$

Pour qu'il puisse y avoir une fibration elliptique sur la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ il faut que certaines conditions soient respectées. On utilise ici les résultats de [O] et [Kl] et on obtient une liste de fibrations elliptiques admissibles sur la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$. L'existence sera montrée dans la prochaine section.

Soit donc $X_{(r,22-r,\delta)}$ une des surfaces K3 considérées dans le chapitre précedent, avec ι l'involution non–symplectique.

Définition 4.1.1 *On appelle* **courbe spéciale** *une courbe rationnelle sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ qui fait partie du lieu de ramification, c'est-à-dire qui est une des $\tilde{b}_i$ ou f_j avec les notations du chapitre précédent. Une courbe rationnelle qui n'est pas dans le lieu de ramification sera dite* **courbe rationnelle ordinaire**.

Lemme 4.1.2 ([Kl, Lemma 5.11]) *Soit V le lieu de ramification, c'est-à-dire $V = \bigcup_i \tilde{b}_i \bigcup_j f_j$. Soit D une courbe rationnelle ordinaire. Alors $D \cdot V = 2$.*

Lemme 4.1.3 ([O, Lemma 1.6], [Kl, Lemma 5.12]) *Si D_1 et D_2 sont deux courbes ordinaires, alors $D_1 \cdot D_2 \equiv 0 \bmod 2$.*

Proposition 4.1.4 ([Kl, Proposition 7.4]) *Soit $\mathcal{E} : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique. On rappelle que le nombre de courbes fixées par l'involution de recouvrement sur X est $s = r - 10$. Alors le type de Kodaira des fibres singuliéres de $\mathcal{E}$ est dans le Tableau suivant, où on a noté*

- *$r_i = r(F_i)$ le nombre de composantes de la fibre F_i ;*
- *$s_i = s(F_i)$ le nombre de courbes spéciales contenues dans la fibre F_i ;*
- *$\delta_i = \delta(F_i)$ la caractéristique de F_i ;*
- *$d_i = d(F_i)$ le discriminant du réseau associé au diagramme de Dynkin de la fibre F_i.*

fibre F_i	r_i	s_i	*comp. simples spéciales*	δ_i	$\lvert d_i\rvert$
III	2	$1,0$	$1,0$	3	2
I_2	2	0	0	2	2
$I_{2k}, k \geq 1$ $k \leq r-10, k \leq (r-1)/2$	$2k$	k	k	$2k$	$2k$
$I^*_{2h}, h \geq 0$ $h \leq r-11, h \leq r/2-3$	$2h+5$	$h+1$	0	$2h+6$	4
IV^*	7	4	3	8	3
III^*	8	3	0	9	2
II^*	9	4	0	10	1

(4.1.1)

Preuve. On trouve une preuve similaire dans [Kl] ; ici on donne l'idée. Il ne peut pas y avoir des fibres de type IV, I_{2k+1} ou I^*_{2h+1} et cela est dû au fait que le Lemme 4.1.2 et 4.1.3 demandent que parmi les composantes d'une fibre réductible il y ait une alternance entre courbes ordinaires et courbes spéciales (voir [Kl, Proposition 7.4]). De la même manière on calcule les nombres de courbes spéciales et courbes simples pour les fibres $III, I_{2k}, I^*_{2h}, IV^*, III^*, II^*$ donnés dans le Tableau 4.1.1. On observe que le nombre de courbes spéciales contenues dans une fibre ne peut pas dépasser le nombres de courbes spéciales de la surface, qui est $s = r-10$. De la même façon le nombre de composantes d'une fibre réductible ne peut pas dépasser $r-2 = \rho(X_{(r,22-r,\delta)}) - 2$. Grâce à ces deux conditions, on a les conditions sur h et k données dans le Tableau 4.1.1. Les autres colonnes contiennent des faits qui sont connus en théorie des fibrations elliptiques (voir par exemple la Section 1.3 ou [SS]). □

Pour classifier les possibles fibrations elliptiques il faut distinguer le cas où toute courbe spéciale est contenue dans une fibre réductible (et cela sera l'objet de la Proposition 4.1.5) et le cas où il y a au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans une fibre réductible ; ce deuxième cas sera traité dans les Lemmes 4.1.7 et 4.1.8 et dans la Proposition 4.1.9.

Proposition 4.1.5 *voir* ([Kl, Proposition 8.1]) *Soit* $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ *une fibration elliptique et on suppose que toute courbe spéciale soit contenue dans une fibre réductible de la fibration. Alors* $\mathcal{E}_r$ *est une des fibrations suivantes :*

r	*fibres réd.*	*fibres singulières irréd.*	$\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r))$
$12 \leq r \leq 20$	$I_{2k_1} + I_{2k_2}$ $k_1+k_2 = r-10$, $1 \leq k_1 \leq k_2$	$mI_1 + nII$ $m+2n = 44-2r$	$20-r$
$15 \leq r \leq 20$	$IV^* + I_{2k}$ $k = r-14$	$mI_1 + nII$ $m+2n = 16-2k$	$21-r$
$r = 18$	$2IV^*$	$mI_1 + (4-m/2)II$	4

(4.1.2)

Preuve. Si toute courbe spéciale est contenue dans une fibre réductible de la fibration, alors la section zero par définition est une courbe ordinaire. Cela implique que la fibration elliptique $\mathcal{E}_r$ n'a que deux fibres réductibles et la section zero coupe ces fibres dans une courbe spéciale. Donc il ne peut pas y avoir des fibres de type I^*_{2h}, III^*, II^*, car pour ces fibres les composantes simples sont des courbes ordinaires.

Soient donc F_1 et F_2 les deux fibres réductibles et on appelle $r_i, s_i, \delta_i, i = 1,2$ les invariants de chaque fibre définis comme dans la Proposition 4.1.4. Ici toute courbe spéciale

est contenue dans une fibre réductible donc on a l'égalité $s_1 + s_2 = s = r - 10$. De plus, $s_1, s_2 > 1$ car dans chaque fibre la section zero coupe une courbe spéciale.

Si $F_1 = IV^*$, alors $s_1 = 4$; donc s'il y a une fibre IV^* on a $s \geq 5$ et donc $r \geq 15$. Si F_1 et F_2 sont de type I_{2k}, alors $s_1 + s_2 = k_1 + k_2$. Si une des fibres est de type IV^* on a $s_1 + s_2 = 4 + s_2$. On rappelle que $s_1 + s_2 = s = r - 10$ et on a les conditions sur k_1 et k_2 indiquées dans le Tableau 4.1.2.

La caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ est 24, car elle est une surface K3 ; donc $\sum_i \delta_i = 24$. Pour les fibres de type I_1 et II on a $\delta(I_1) = 1$ et $\delta(II) = 2$, donc

$$\sum_i \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + m + 2n.$$

Cela implique les conditions sur $m + 2n$.

On a vu dans la Section 1.3 que le nombre de Picard d'une surface elliptique est la somme du rang du réseau trivial et du rang du groupe de Mordell-Weil, donc ici on a $\text{rang}(MW(\mathcal{E}_r)) = r - (r_1 + r_2)$. Si les deux fibres réductibles sont de type I_{2k}, alors $r_1 + r_2 = 2r - 20$. Si une fibre est de type IV^*, alors $r_1 + r_2 = 7 + 2k_2 = 7 + 2(r - 14)$.

Toute ces conditions déterminent les seules possibilités de fibrations, qui sont montrées dans le Tableau 4.1.2. □

Remarque 4.1.6 *On observe donc que il se peut que une de ces fibration ait une section d'ordre infini, car le rang du groupe de Mordell-Weil est positif en certains cas.*

Maintenant on passe au cas où au moins une courbe spéciale n'est pas contenue dans les fibres réductibles. A différence de ce qu'on a vu dans la Proposition 4.1.5, on voit que dans ce cas le groupe de Mordell-Weil est fini et donc il n'y aura pas des section d'ordre infini.

Lemme 4.1.7 ([O, Lemma 2.4], [Kl, Lemma 9.1], [Kl, Lemma 9.2]) *Soit $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ et on suppose que il y ait au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans les fibres réductibles. Alors le groupe de Mordell-Weil $\text{MW}(\mathcal{E}_r)$ est fini et les seules fibres de type I_{2k} sont de type I_2. Dans ce cas, les fibres I_2 et III ne contiennent pas courbes spéciales.*

Lemme 4.1.8 *Soit $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ et on suppose que il y ait au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans les fibres réductibles. Alors il n'y a pas des fibres de type IV^*. Le discriminant du réseau trivial de $\mathcal{E}_r$ est $2^c, c \in \mathbb{N}^*$ et les choix possibles pour c sont*

1. *$c = a = 22 - r$ et dans ce cas $\text{MW}(\mathcal{E}_r) = \{1\}$*
2. *$c = a + 2 = 24 - r$ et dans ce cas $\text{MW}(\mathcal{E}_r) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*
3. *$c = a + 4 = 26 - r$ et dans ce cas $\text{MW}(\mathcal{E}_r) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$*

Preuve. Puisque le groupe de Mordell-Weil est fini, le discriminant du groupe de Néron-Severi est

$$d(\text{NS}(X_{(r,22-r,\delta)})) = \frac{d(Tr_{\mathcal{E}_r})}{|\text{MW}(\mathcal{E}_r)|^2},$$

ou $Tr_{\mathcal{E}_r}$ est le réseau trivial défini dans la Définition 1.3.11. On rappelle que $d(\text{NS}(X_{(r,22-r,\delta)})) = 2^{22-r}$. Soit maintenant $d(Tr_{\mathcal{E}_r}) = 2^c \prod_i p_i^{h_i}$ où p_i sont nombres premiers. On obtient

$$|\text{MW}(\mathcal{E}_r)|^2 = \frac{d(Tr_{\mathcal{E}_r})}{d(\text{NS}(X_{(r,22-r,\delta)}))} = 2^{c-(22-r)} \prod_i p_i^{h_i} \tag{4.1.3}$$

et donc on trouve que $c-(22-r)$ et h_i sont non-negatifs et pairs pour tout i.

On sait que $d(Tr_{\mathcal{E}_r}) = \prod_i d(F_i)$ pour toute fibre réductible F_i de $\mathcal{E}_r$. Grâce au Tableau 4.1.1 et au Lemme 4.1.7, la seule fibre réductible avec discriminant qui n'est pas une puissance de 2 est IV^* et $d(IV^*)=3$, ainsi le seul nombre premier impair parmi les p_i est 3. Donc, s'il y a une fibre de type IV^*, il fait qu'il y en ait un nombre pair $2x$. Dans ce cas, $|\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r)|^2 = 3^{2x}2^{c-(22-r)}$ et il y a x sections de 3-torsion différentes. Pour la height formula, s'il y a une section de 3-torsion, alors il y a au moins 3 fibres de type IV^*. Puisque $r(IV^*)=6$ et $\sum_i r(F_i)+2 = \mathrm{rang}(Tr_{\mathcal{E}_r}) \leq 20$, il y a au maximum 3 fibres de type IV^*. Donc s'il y a une fibre de type IV^*, il y a exactement 3 fibres de type IV^* mais cela contredit le fait qu'il doit y avoir un nombre pair de fibre de type IV^*. Donc il n'y a pas de fibre réductible de type IV^*.

Alors les fibres possibles sont $III, I_2, I^*_{2h}, III^*, II^*$. Donc le groupe de Mordell-Weil est soit le groupe trivial, soit $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ soit $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; en conséquence $|\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r)|^2$ est 1, 2^2 ou 2^4. Grâce à (4.1.3), pour ces trois possibilités on trouve

1. $c-(22-r)=0$;
2. $c-(22-r)=2$;
3. $c-(22-r)=4$.

□

Proposition 4.1.9 (voir [Kl, Theorem 1.2]) *Soit $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ et on suppose que il y ait au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans les fibres réductibles. Alors $\mathcal{E}_r$ est une des fibrations énumerées dans les Tableaux A.1-A.9 dans l'Annexe A.*

Les fibres singulières sont celles qui sont presentées dans la deuxième colonne des tableaux et $m_1I_2 + m_2III + n_1I_1 + n_2II$, avec $m_1, m_2, n_1, n_2 \geq 0$ et tel que ils satisfont les conditions sur ces valeurs qui sont dans la troisième et quatrième colonne des Tableaux A.1-A.9.

Pour $r=11$ il n' y a pas une fibration elliptique telle que la courbe spéciale n'est pas contenue dans une fibre réductible.

Preuve. Grâce au Lemme 4.1.7 il n'y a pas de fibres de type $I_{2\nu}$ pour $\nu \geq 2$ et grâce au Lemme 4.1.8 il n' y a pas des fibres de type IV^*. Le Lemme 4.1.7 dit aussi que le rang du groupe de Mordell-Weil est zero, donc $\mathrm{rang}(\mathrm{NS}(\mathcal{E}_r)) = \mathrm{rang}(Tr_{\mathcal{E}_r})$. Donc les fibres réductibles F_i satisfont la condition $\sum_i (r(F_i)-1) = r-2$. Il y a au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans une fibre réductible et donc $\sum_i s(F_i) \leq s-1 = r-11$. On trouve les valeurs de $s(F_i)$ dans le Tableau 4.1.1 et, grâce au Lemme 4.1.7, $s(F)=0$ si $F=I_2$ ou $F=III$.

Si on appelle δ la somme des caractéristiques d'Euler-Poincaré des fibres réductibles, vu que la caractéristiques d'Euler-Poincaré des fibres I_1 est 1 et celle des fibres III est 2, on aura

$$24-\delta = n_1 + 2n_2.$$

Grâce au Lemme 4.1.7, $\sum_i d(F_i) = 2^c$ et $c = 22-r$, $c=24-r$ ou $c=26-r$.

En conclusion, les fibrations de l'enoncé doivent respecter la liste suivante de conditions :

— les fibres réductibles sont de type II^*, III^*, I^*_{2k}, I_2, III ;
— $\sum_i (r(F_i)-1) = r-2$;
— $\sum_i s(F_i) \leq s-1 = r-11$ $(s(I_2)=s(III)=0)$;
— $\sum_i \delta(F_i) \leq 24$;
— $\sum_i d(F_i) = 2^c$ avec $c = 22-r,\ 24-r,\ 26-r$.

De plus, quand $c = 24 - r$ ou $c = 26 - r$, il y a une autre condition. On a vu que, si $c = 24 - r$ (resp. $c = 26 - r$), alors MW $= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp.MW $= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$). La height formula donne des conditions supplementaires qui impliquent l'existence de sections de torsion. Par exemple, si $r = 19$, la fibration avec fibres réductibles $II^* + I_2^* + 3I_2$ satisfait toute condition de la liste précédente avec $c = 5 = 24 - r$. Mais cette fibration n'admet pas une section de 2-torsion et on peut le voir en appliquant la même technique que dans l'Exemple 1.3.15. Donc on exclut ce cas.

C'est grâce à la height formula qu'on détermine aussi les intersections entre les sections de torsions et les fibres réductibles qu'on montre dans la dernière colonne des Tableaux A.1 – A.9. On verra que c'est important de déterminer les intersections de chaque section avec les fibres singulières (voir Remarque 5.3.1). □

Remarque 4.1.10 *En combinant les résultats des Propositions 4.1.5 et 4.1.9, on sait que pour $r = 11$ il n'y a pas de fibrations elliptiques sur $X_{(11,11,1)}$.*

Exemple 4.1.11 On montre dans les détails le cas $r = 13$. On veut montrer que les seules deux fibrations elliptiques possibles ayant au moins une courbe spéciale qui n'est pas dans les fibres réductibles sont les deux montrées dans le Tableau A.8. Ici donc on a

$$r = 13, \quad a = 22 - r = 9, \quad s = r - 10 = 3.$$

La deuxième condition dans la liste contenue dans la preuve de la Proposition 4.1.9 dit que $\sum_i s(F_i) \leq s - 1$ et cela limite la possibilité des fibres réductibles : en effet le Tableau 4.1.1 montre que $s(II^*) = 4$ et $s(III^*) = 3$, donc il n'y aura pas fibres de type II^* ni III^*. Pour les fibres réductibles de type I_{2h}^*, vu que $s(I_{2h}^*) = h + 1$, les valeurs possibles de h sont $h = 0, 1$. Donc les fibres possibles (à part I_1, I_2, II et III) sont I_2^* et I_0^* et les valeurs des invariants pour ces deux fibres sont les suivants :

fibre F_i	r_i	s_i	δ_i	$\lvert d_i \rvert$
I_0^*,	5	1	6	4
I_2^*,	7	2	8	4

Vu que il faut que $\sum_i (r(F_i) - 1) = r - 2 = 11$, on peut avoir les configurations suivantes (on ne écrit pas le conditions sur n_1 et n_2, car elles sont facilement deduites à partir de la relation $24 - \delta = n_1 + 2n_2$) :

i) $I_2^* + m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$ avec $m_1 + m_2 = 5$;

ii) $2I_0^* + m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$ avec $m_1 + m_2 = 3$;

iii) $I_0^* + m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$ avec $m_1 + m_2 = 7$;

iv) $m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$ avec $m_1 + m_2 = 11$.

Maintenant on utilise la condition $\sum_i d(F_i) = 2^c$ avec $c = 22 - r,\ 24 - r,\ 26 - r$ pour verifier si ces cas sont possibles ou non. La valeur de c ici peut être $c \in \{9, 11, 13\}$. Il faut exclure le cas *i*), car $\sum_i d(F_i) = 4 \cdot 2^5$ donc $c = 7$ qui n'est pas admissible. Le cas *ii*) aussi est tel que $c = 7$ donc c'est pas admissible.

Pour le cas *iii*) on a $\sum_i d(F_i) = 4 \cdot 2^7$ donc $c = 9$: c'est une configuration admissible et la valeur de c determine MW $= \{1\}$. La possibilité *iv*) a $\sum_i d(F_i) = 2^{11}$ donc $c = 11$ et MW $= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Les autres condition de la liste dans la preuve de la Proposition 4.1.9 sont vérifiées, il faut juste vérifier que la configuration $m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$ avec $m_1 + m_2 = 11$ et $n_1 + 2n_2 = 24 - (2m_1 + 3m_2)$ admet une section de torsion et cela est fait comme dans l'Exemple 1.3.15.

Donc on peut conclure que les seules deux configurations de fibres réductibles pour une fibration elliptique sur $X_{(13,9,1)}$ sont les deux indiquées dans le Tableau A.8. □

4.2 Action de l'involution de recouvrement

Dans la Section précédente on a montré toutes les possibilités pour les fibration elliptiques sur $X_{(r,22-r,\delta)}, r = 11, \ldots, 20$. Dans le Chapitre 2 on a vu deux differentes actions d'une involution non–symplectique sur une surface K3 elliptique : dans un cas l'involution n'agit que sur la base de la fibration elliptique, dans l'autre cas elle n'agit que sur les fibres. On montre avec la Proposition 4.2.1 que distinguer ces deux cas correspond en fait à considerer fibrations avec toute courbe spéciale dans les fibres réductibles ou non.

Proposition 4.2.1 *Soit $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$ une fibration elliptique. L'involution ι agit sur $\mathcal{E}_r$ soit comme une involution de type a) (voir Exemple 2.4.12) soit comme une involution de type b) (voir Exemple 2.4.13). De plus, ι agit comme une involution de type a) si et seulement si toute courbe spéciale est contenue dans une fibre réductible et ι agit comme involution de type b) si et seulement si il y a au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans une fibre réductible.*

Preuve. On appelle F le diviseur qui induit la fibration elliptique $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$, c'est-à-dire F est la classe de la fibre de $\mathcal{E}_r$ ou équivalentement l'application associée au diviseur nef F est $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$. Pour la Proposition 3.1.1 l'involution ι agit comme l'identité sur NS donc $\iota^*(F) = F$ et donc une fibre est toujours envoyée sur une fibre par ι. On considère le cas où toute fibre est envoyée sur elle-même. Alors l'involution n'agit pas sur la base de la fibration $\mathbb{P}^1$ mais elle se restreint à une involution sur chaque fibre. On sait que la fibre générique de la fibration est une courbe elliptique et les automorphismes sur une courbe elliptique sont soit l'involution hyperelliptique (c'est-à-dire l'involution qui fixe les 4 points d'ordre 2 de la courbe elliptique) soit des translation par points rationnels. L'involution hyperelliptique fixe la section zero (c'est-à-dire elle fixe les points zero de chaque fibre), alors que les translations l'envoient sur une autre section. Dans notre cas on sait que ι agit comme l'identité sur NS et donc elle coïncide avec l'involution hyperelliptique sur les fibres lisses et est donc de type b).

Si au contraire ι envoie la fibre générique sur une autre fibre, alors ι agit sur la base de la fibration, c'est-à-dire elle agit sur $\mathbb{P}^1$ comme une involution de $\mathbb{P}^1$. A projectivité près, on peut supposer que ι fixes les deux points $0, \infty$ de $\mathbb{P}^1$. Vu que l'involution restreinte aux deux fibres au-dessus de 0 et ∞ agit comme un automorphismes des fibres, elle peut agir comme l'identité sur les deux fibre fixée ou comme une translation par un point d'ordre 2 ou comme une involution non-symplectique (voir Exemples 2.4.12 et 2.4.14).

Si ι agit comme l'identité sur ces deux fibres, finalement elle agit seulement sur la base de la fibration et on est dans le cas de type a) ; si au contraire elle agit comme une translation par un point d'ordre 2 sur le deux fibres spéciales, alors la section zero est envoiée sur une section de 2-torsion. Mais ces deux sections donnent deux classes differentes dans $\mathrm{NS}(X_{(r,22-r,\delta)})$ et vu que ι agit comme l'identité sur NS on a une contradiction. Encore, si ι agit comme involution non-symplectique sur le fibres fixées, alors elle est composition de deux involution non-symplectiques qui commutent. Mais vu que la composition de deux automorphismes non-symplectiques donne un automorphisme symplectique on a une contradiction. Donc finalement ι peut agir seulement comme l'identité sur les fibres au-dessus de $0, \infty$.

Quand ι est de type a), elle fixe les fibres au-dessus de $0, \infty$ et elle échange la fibre au-dessus de $\tau \neq 0, \infty$ avec la fibre au-dessus de $-\tau$. Donc toute courbe qui n'est pas contenue dans les fibres au-dessus de $0, \infty$ n'est pas fixée. En conclusion, si ι est de type a), toute courbes spéciale est contenue dans le seules fibres réductibles, c'est-à-dire les fibres au-dessus de $0, \infty$.

Si ι est de type b), la section zero est une courbe spéciale (cela est toujours vrai grâce à la Définition 4.1.1) et elle n'est pas contenue dans une fibre réductible. Donc dans le cas

b) il y a au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans les fibres réductibles.□

Remarque 4.2.2 *Quand l'involution ι est de type a), alors ι agit sur la base de la fibration, elle envoie $\tau \in \mathbb{P}^1$ sur $-\tau$ et échange les fibres deux à deux (sauf les fibres au-dessus de $\tau = 0, \infty$). Du coup, le type de la fibre au-dessus de $\tau \neq 0, \infty$ est le même que le type de la fibre au-dessus de $-\tau$. Comme conséquence, les nombres m, n dans le Tableau 4.1.2 sont pairs.*

4.3 Existence des fibrations, cas a)

Dans la Section précédente on a montré qu'on peut distinguer les fibrations de type a) et b) par l'action de l'involution ι ou, équivalentement, en regardant si toute courbe spéciale est contenue dans une fibre réductible ou pas.

On se met dans le cas des fibrations de type a), où toute courbe spéciale est contenue dans une fibre réductible. On montre quelles fibrations elliptiques existent sur la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$, c'est-à-dire pour quels invariants du Tableau 4.1.2 on peut trouver une fibration.

La stratégie pour cela sera tout d'abord de montrer une classe nef F dans $\mathrm{NS}(X_{(r,22-r,\delta)})$ (qui va définir la fibration). Après on considère l'application

$$X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}(H^0(X_{(r,22-r,\delta)}, \mathcal{O}_{X_{(r,22-r,\delta)}}(F)))^\vee$$

et on montre qu'il s'agit d'une fibration elliptique avec les propriétés qu'on désire, c'est-à-dire avec toute courbe spéciale contenue dans une fibre réductible et les fibres singulières comme dans le Tableau 4.1.2.

Théorème 4.3.1 *Toute fibration elliptique énumérée dans le Tableau 4.1.2 existe comme fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ sauf les trois cas :*

- *$r = 20$ et fibres singulières $I_{14} + I_6$;*
- *$r = 20$ et fibres singulières $I_{12} + I_8$;*
- *$r = 20$ et fibres singulières $IV^* + I_{12}$.*

Le quotient $R_r := X_{(r,22-r,\delta)}/\iota$ est une surface elliptique rationnelle et admet les fibrations elliptiques suivantes :

r	*fibres réductibles*	*fibres singulières irréductibles*	$\mathrm{rang}(MW(\mathcal{E}_r))$
$11 \leq r \leq 20$	$I_{k_1} + I_{k_2}$, $k_1 + k_2 = r - 10, 1 \leq k_1 \leq k_2$	$(m/2)I_1 + (n/2)II$	$20 - r$
$15 \leq r \leq 20$	$IV + I_k$, $k = r - 14$	$(m/2)I_1 + (n/2)II$	$21 - r$
$r = 18$	$2IV$	$(m/2)I_1 + (n/2)II$	4

(4.3.1)

où m, n sont les nombres qui apparaissent dans le Tableau 4.1.2.

La preuve sera faite en analysant chaque cas de $r = 12, \ldots, 20$ et après en regardant les quotients R_r.

4.3.1 Le cas $r = 20$

On considère ici la sextique de ramification donnée par six droites avec 4 points triples (voir Figure 4.1) et on appelle les points de la manière suivante :

$$A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_1 \cap l_5 \cap l_6, \quad C := l_3 \cap l_4 \cap l_5, \quad D := l_2 \cap l_4 \cap l_6.$$

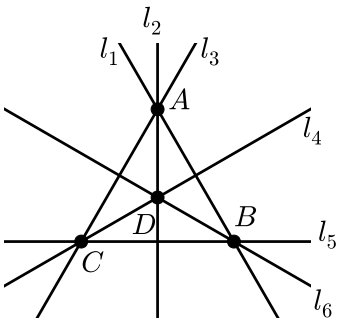


FIGURE 4.1 – Courbe de ramification, $r = 20$

Les trois points doubles sont $P_{1,4}$, $P_{2,5}$ et $P_{3,6}$.

Le groupe de Néron-Severi est engendré par $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, 6$, E_A, $E_{A,1}$, $E_{A,2}$, $E_{A,3}$, E_B, $E_{B,1}$, $E_{B,5}$, $E_{B,6}$, E_C, $E_{C,3}$, $E_{C,4}$, $E_{C,5}$, E_D, $E_{D,2}$, $E_{D,4}$, $E_{D,6}$, $E_{P_{1,4}}$, $E_{P_{2,5}}$, $E_{P_{3,6}}$ (voir le Chapitre 3 pour les notations).

On commence par la fibration elliptique avec une fibre singulière I_{18} : elle est associée au diviseur $F := \mathcal{L}_1 + E_{A_1} + E_A + E_{A,2} + \mathcal{L}_2 + E_{D,2} + E_D + E_{D,6} + \mathcal{L}_6 + E_{B,6} + E_B + E_{B,5} + \mathcal{L}_5 + E_{C,5} + E_C + E_{C,4} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{1,4}}$. Les classes des sections sont $E_{A,3}$, $E_{C,3}$ et $E_{P_{3,6}}$

Parmi les fibres singulières de la fibration $X_{(20,2,1)} \to \mathbb{P}^1$ il y a la fibre de type I_{18}, qui a composantes $\mathcal{L}_1, E_{A_1}, \dots, E_{P_{1,4}}$, et une fibre de type I_2, car on a déjà montré que si une fibration sur $X_{(20,2,1)}$ a une fibre de type I_{18}, alors elle a fibres singulières $I_{18} + I_2$.

Maintenant on calcule le groupe de Mordell-Weil : on sait que son rang est 0, donc on utilise la formule (1.3.4) d'où

$$4 = d(\mathrm{NS}(X_{(20,2,1)})) = \frac{d(I_{18})d(I_2)}{|\mathrm{MW}|^2} = \frac{18 \cdot 2}{|\mathrm{MW}|^2}.$$

Donc $|\mathrm{MW}| = 3$ et $\mathrm{MW} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Pour les autres fibrations la preuve est similaire, donc on réporte juste les diviseurs qui engendrent la fibration. La courbe de ramification est toujours la même.

— $I_{16} + I_4$: le diviseur est $F := \mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{C,4} + E_C + E_{C,5} + \mathcal{L}_5 + E_{B,5} + E_B + E_{B,6} + \mathcal{L}_6 + E_{P_{3,6}} + \mathcal{L}_3 + E_{A,3} + E_A + E_{A,1}$. La section zero est $s := E_{P_{2,5}}$ et le groupe de Mordell-Weil est $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ engendré par E_{A_2}.

— $2I_{10}$: le diviseur est $F := \mathcal{L}_1 + E_{A,1} + E_A + E_{A,2} + \mathcal{L}_2 + E_{P_{2,5}} + \mathcal{L}_5 + E_{B,5} + E_B + E_{B,1}$. La section zero est $s := E_{A,3}$ et le groupe de Mordell–Weil est $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, engendré par $E_{D,2}$.

Pour exclure la fibration avec fibres singulières $I_{14} + I_6$ on se rend compte que, si un telle fibration existât, on aurait

$$|\mathrm{MW}|^2 = \frac{d(I_{14})d(I_6)}{d(\mathrm{NS}(X_{(20,2,1)}))} = \frac{14 \cdot 6}{4} = 21$$

et 21 n'est pas un carré. De la même manière on exclut les fibrations avec fibres singulières $I_{12} + I_8$ et $IV^* + I_{12}$.

4.3.2 Le cas $r = 19$

Maintenant la courbe qu'on prend comme sextique de ramification est la courbe de la Figure 4.2. Il s'agit de l'union de 6 droites $l_1, \dots, l_6$ avec 3 points triples :

$$A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_1 \cap l_5 \cap l_6, \quad C := l_3 \cap l_4 \cap l_5.$$

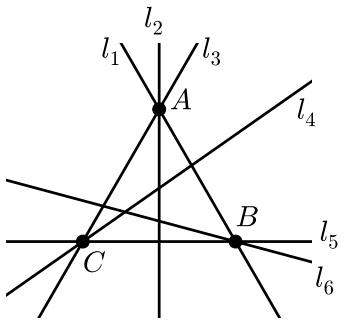


FIGURE 4.2 – Courbe de ramification, $r = 19$

Il y a donc 6 points doubles $P_{i,j}$ avec $(i,j) = (1,4),(2,4),(2,5),(2,6),(3,6),(4,6)$.

On montre dans le Tableau suivant les diviseurs associés aux différentes fibrations et on réporte aussi la section zero s dans la dernière colonne.

Il faut spécifier que pour la fibration avec fibres réductibles $I_{10} + I_8$ le diviseur F est associé à la fibre I_8 et quand la fibration a fibre réductibles $IV^* + I_{10}$, alors F est associé à la fibre de type IV^*.

fibres réductibles	F	s
$I_{16} + I_2$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{C,4} + E_C + E_{C,5} + \mathcal{L}_5 + E_{B,5}$ $+E_B + E_{B,6} + \mathcal{L}_6 + E_{P_{3,6}} + \mathcal{L}_3 + E_{A,3} + E_A + E_{A,1}$	$E_{P_{2,5}}$
$I_{14} + I_4$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{4,6}} + \mathcal{L}_6 + E_{B,6} + E_B$ $+E_{B,5} + \mathcal{L}_5 + E_{P_{2,5}} + \mathcal{L}_2 + E_{A,2} + E_A + E_{A,1}$	E_{A_3}
$I_{12} + I_6$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{2,4}} + \mathcal{L}_2 + E_{P_{2,6}}$ $+\mathcal{L}_6 + E_{P_{3,6}} + \mathcal{L}_3 + E_{A,3} + E_A + E_{A,1}$	$E_{C,4}$
$I_{10} + I_8$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{2,4}} + \mathcal{L}_2 + E_{A,2} + E_A + E_{A,1}$	$E_{A,3}$
$IV^* + I_{10}$	$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_2 + 2(E_{A,1} + E_{A_2} + E_{A,3}) + 3E_A$	$E_{P_{2,4}}$

4.3.3 Le cas $r = 18$

On a déjà vu que pour $r = 18$ il faut distinguer les deux cas $\delta = 0$ et $\delta = 1$. Pour le cas $\delta = 0$, l'existence des fibrations avec fibres réductibles $I_{12} + I_4$, $2I_8$ et $2IV^*$ a été montré par Oguiso dans [O]. Il reste donc à montrer le cas $\delta = 1$.

Dans le Corollaire 3.1.6 on a vu que pour obtenir la surface $X_{(18,4,1)}$ on peut choisir la courbe de ramification qui consiste en 6 droite avec 2 points triples tels que la droite qui passe par le deux points triple fait partie de la ramification. La courbe est montrée dans la Figure 4.3. Ici les point triples sont

$$A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_1 \cap l_5 \cap l_6$$

et il y a 9 point doubles : $P_{1,4}$, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, $P_{2,6}$, $P_{3,4}$, $P_{3,5}$, $P_{3,6}$, $P_{4,5}$, $P_{4,6}$.

On montre le diviseur F qui engendre chaque fibration, ainsi que la section zero, dans

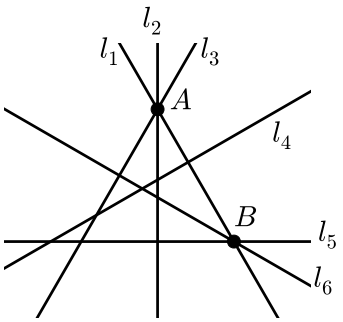


FIGURE 4.3 – Courbe de ramification, $r = 18, \delta = 1$

le Tableau suivant.

fibres réductibles	F	s
$I_{14} + I_2$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{4,6}} + \mathcal{L}_6 + E_{B,6} + E_B$ $+E_{B,5} + \mathcal{L}_5 + E_{P_{2,5}} + \mathcal{L}_2 + E_{A,2} + E_A + E_{A,1}$	E_{A_3}
$I_{12} + I_4$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{2,4}} + \mathcal{L}_2 + E_{P_{2,6}}$ $+\mathcal{L}_6 + E_{P_{3,6}} + \mathcal{L}_3 + E_{A,3} + E_A + E_{A,1}$	$E_{P_{4,5}}$
$I_{10} + I_6$	$\mathcal{L}_1 + E_{A,1} + E_A + E_{A,2} + \mathcal{L}_2 + E_{P_{2,5}}$ $+\mathcal{L}_5 + E_{B,5} + E_B + E_{B,1}$	$E_{A,3}$
$2I_8$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,4}} + \mathcal{L}_4 + E_{P_{2,4}} + \mathcal{L}_2 + E_{A,2} + E_A + E_{A,1}$	$E_{A,3}$
$IV^* + I_8$	$\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + 2(E_{A,1} + E_{A_2} + E_{A,3}) + 3E_A$	$E_{P_{2,4}}$

Pour la fibration avec fibres $2I_8$, le diviseur F est associé à une des deux fibres I_8. Il faut verifier que l'autre fibre soit I_8 et pas IV^* et pour cela il faut écrire explicitement les composantes de l'autre fibre, qui sont $\mathcal{L}_i$, $i = 3, 5, 6$, $E_{P_{3,6}}$, $E_{P_{3,5}}$, $E_{B,5}$, E_B, $E_{B,6}$. On voit donc que ces composantes forment une fibre de type I_8.

4.3.4 Le cas $r = 17$

Ici on prend la sextique de ramification qui est dans la Figure 4.4, qui consiste en 6 droites avec un point triple $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$. Il y a donc 12 points doubles : $P_{1,4}$, $P_{1,5}$, $P_{1,6}$, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, $P_{2,6}$, $P_{3,4}$, $P_{3,5}$, $P_{3,6}$, $P_{4,5}$, $P_{4,6}$, $P_{5,6}$.

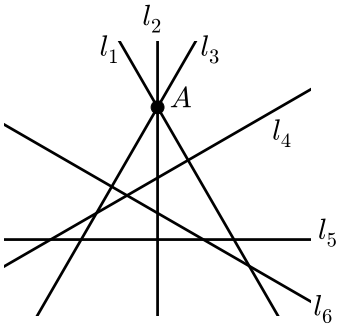


FIGURE 4.4 – Courbe de ramification, $r = 17$

Les fibration qui existent sur $X_{(17,5,1)}$ sont montrées dans le Tableau suivant.

fibres réductibles	F	s
$I_{12}+I_2$	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,4}}+\mathcal{L}_4+E_{P_{2,4}}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,6}}$ $+\mathcal{L}_6+E_{P_{3,6}}+\mathcal{L}_3+E_{A,3}+E_A+E_{A,1}$	$E_{P_{4,5}}$
$I_{10}+I_4$	$\mathcal{L}_1+E_{A,1}+E_A+E_{A,2}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,5}}+\mathcal{L}_5+E_{P_{5,6}}+\mathcal{L}_6+E_{P_{1,6}}$	$E_{A,3}$
I_8+I_6	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,4}}+\mathcal{L}_4+E_{P_{2,4}}+\mathcal{L}_2+E_{A,2}+E_A+E_{A,1}$	$E_{A,3}$
IV^*+I_6	$\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_2+\mathcal{L}_3+2(E_{A,1}+E_{A,2}+E_{A,3})+3E_A$	$E_{P_{2,4}}$

4.3.5 Le cas $r=16$

Le cas des fibrations sur $X_{(16,6,1)}$ a été analysé en [Kl] donc ici on réporte les résultats. La courbe de ramification choisie se compose de 6 droites sans aucun point triple, comme dans la Figure 4.5.

fibres réductibles	F	s
$I_{10}+I_2$	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,2}}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,3}}+\mathcal{L}_3+E_{P_{3,4}}+\mathcal{L}_4+E_{P_{4,5}}+\mathcal{L}_5+E_{P_{1,5}}$	$E_{P_{1,6}}$
I_8+I_4	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,2}}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,3}}+\mathcal{L}_3+E_{P_{3,4}}+\mathcal{L}_4+E_{P_{1,4}}$	$E_{P_{1,6}}$
$2I_6$	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,2}}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,3}}+\mathcal{L}_3+E_{P_{1,3}}$	$E_{P_{1,6}}$
IV^*+I_4	$\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4+2(E_{P_{1,2}}+E_{P_{2,3}}+E_{P_{2,4}})+3\mathcal{L}_2$	$E_{P_{1,6}}$

4.3.6 Le cas $r=15$

Pour les fibrations sur $X_{(15,7,1)}$ on considère la courbe de ramification qui consiste en 4 droites l_1,l_2,l_3,l_4 et 1 conique c_5 et qui n'a pas des point triples. On appelle $P_{i,j}, i\neq j$ les points d'intersection entre les droites l_i et l_j et on note $\{R^1_{k,5},R^2_{k,5}\}$ les deux points d'intersection entre la droite l_k et la conique. En total on a 15 points doubles.

Les fibrations qui existent sur $X_{(15,7,1)}$ sont les suivantes :

fibres réductibles	F	s
I_8+I_2	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,2}}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,3}}+\mathcal{L}_3+E_{P_{3,4}}+\mathcal{L}_4+E_{P_{1,4}}$	$E_{R^1_{1,5}}$
I_6+I_4	$\mathcal{L}_1+E_{P_{1,2}}+\mathcal{L}_2+E_{P_{2,3}}+\mathcal{L}_3+E_{P_{1,3}}$	$E_{R^1_{1,5}}$
IV^*+I_2	$\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_3+\mathcal{L}_4+2(E_{P_{1,2}}+E_{P_{2,3}}+E_{P_{2,4}})+3\mathcal{L}_2$	$E_{R^1_{1,5}}$

4.3.7 Le cas $r=14$

Ici on prend comme courbe de ramification l'union de deux droites l_1,l_2 et deux coniques c_3,c_4, sans point triples. Il y a 13 points doubles et il s'agit de

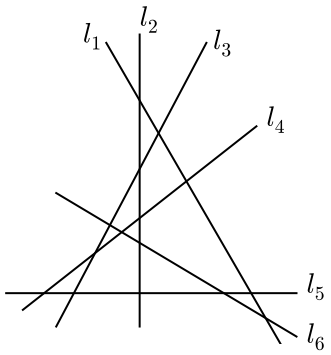


FIGURE 4.5 – Courbe de ramification, $r=16$

— les 4 points d'intersection entre c_3 et c_4 qu'on note $Q^1_{3,4}, \dots, Q^4_{3,4}$;
— les points $\{R^1_{i,j}, R^2_{i,j}\}$ qui sont intersection entre la droite l_i et la conique $c_j, i = 1, 2, j = 3, 4$;
— $P_{1,2}$.

Il y a deux fibrations elliptiques sur $X_{(14,8,1)}$ et elles sont montrées dans le Tableau suivant.

fibres réductibles	F	s
$I_6 + I_2$	$\mathcal{L}_1 + E_{P_{1,2}} + \mathcal{L}_2 + E_{R^1_{2,3}} + \mathcal{C}_3 + E_{R^1_{1,3}}$	$E_{R^1_{1,4}}$
$2I_4$	$\mathcal{L}_1 + E_{R^1_{1,3}} + \mathcal{C}_3 + E_{R^2_{1,3}}$	$E_{R^1_{1,4}}$

4.3.8 Le cas $r = 13$

La courbe de ramification qu'on choisit pour la fibration sur $X_{(13,9,1)}$ se compose de 3 coniques c_1, c_2, c_3 sans points triples. Les points d'intersection entre c_i et $c_j, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$ sont appelés $Q^1_{i,j}, \dots, Q^4_{i,j}$.

La seule fibration elliptique qui existe sur $X_{(13,9,1)}$ a fibres réductibles $I_4 + I_2$ et elle est associé au diviseur $F = \mathcal{C}_1 + E_{Q^1_{1,2}} + \mathcal{C}_2 + E_{Q^2_{1,2}}$.

4.3.9 Le cas $r = 12$

On prend ici la courbe de ramification qui consiste en une conique c et une quartique q avec 3 points doubles A, B, C (de cette façon elle est rationnelle). La fibration elliptique avec fibres réductibles $2I_2$ est associée au diviseur $F := \mathcal{Q} + E_A$.

4.3.10 Les quotients de $X_{(r,22-r,\delta)}$ par ι

On a vu que dans la situation du cas a) l'involution de recouvrement ι n'agit que sur la base de la fibration $\mathcal{E}_r : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$. Avec la même construction de l'Exemple 2.4.12 on peut donc obtenir la fibration sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ à partir d'une fibration $\mathcal{E}_{R_r}$ sur la surfaces rationnelle R_r grâce à un changement de base d'ordre 2. La situation est montrée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} R_r & \leftarrow & X_{(r,22-r,\delta)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1_t & \leftarrow & \mathbb{P}^1_\tau \end{array}$$

où $t = \tau^2$. A chaque fibre sur $t \neq 0, \infty$ correspondent deux fibres de $\mathcal{E}_r$, alors que aux fibres au-dessus de $t = 0$ correspond la fibre au-dessus de $\tau = 0$ et pareil pour $t = \infty$.

Si la fibre de $\mathcal{E}_{R_r}$ sur $t = 0$ (resp. $t = \infty$) est de type I_k ou IV, alors la fibre sur $\tau = 0$ (resp. $\tau = \infty$) est de type I_{2k} ou IV^*. Pour ce qui régarde les fibres au-dessus de $t \neq 0, \infty$, elles correspondent sur τ à fibres du même type.

Par construction on a que $X_{(r,22-r,\delta)}/\iota = R_r$ et donc la fibration elliptique sur le quotient, que on l'appelle $\mathcal{E}_{R_r}$, possède les fibres singulières indiquées dans le Théorème 4.3.1.

De plus, les sections de la fibration sur R_r donnent des section de $\mathcal{E}$ donc le groupe de Mordell-Weil des deux fibrations est le même. On peut vérifier explicitement que les rangs des deux groupes de Mordell-Weil coïncident grâce à la Formule (1.3.5) et aux conditions sur k_1, k_2 du Tableau 4.3.1 et en rappellant que $\rho(R_r) = 10$. En effet,

— si les fibres singulières de $\mathcal{E}$ sont $I_{2k_1} + I_{2k_2}$, alors $\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E})) = 20 - r$ et

$$\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E}_{R_r})) = 10 - k_1 - k_2 = 10 - (r - 10) = 20 - r;$$

— si les fibres singulières de $\mathcal{E}$ sont $I_{2k} + IV^*$, alors $\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E})) = 21 - r$ et

$$\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E}_{R_r})) = 10 - k - 3 = 7 - (r - 14) = 21 - r;$$

— si les fibres singulières de $\mathcal{E}$ sont $IV^* + IV^*$, alors rang $\mathrm{MW}(\mathcal{E}) = 4$ et

$$\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E}_{R_r})) = 10 - 3 - 3 = 4.$$

Pour certaines valeurs de r entre 12 et 15 il y a des travaux où le groupe $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_{R_r})$ est montré et aussi c'est indiquée une construction géométrique du pinceau de cubiques de $\mathbb{P}^2$ associé à la fibration (notamment dans [S1, Theorem 10.4], [F], [FT] et [Sa]). Donc la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ est obtenue à partir d'une fibration elliptique connue avec un changement de base d'ordre 2. En particulier :

— pour $r = 12$, $\mathcal{E}_{R_{12}}$ est une fibration elliptique sans fibres réductibles. Ici $\mathrm{MWL}(\mathcal{E}_{R_{12}}) \simeq E_8$ et le pinceau de cubiques associé à cette fibration elliptique c'est le pinceau générique ;
— si $r = 13$ alors $\mathrm{MWL}(\mathcal{E}_{R_{13}}) \simeq E_7^*$;
— si $r = 14$ et les fibres singulières de $\mathcal{E}_{14}$ sont $I_6 + I_2$, alors $\mathrm{MWL}(\mathcal{E}_{R_{14}}) \simeq E_6^*$;
— si $r = 14$ et les fibres singulières de $\mathcal{E}_{14}$ sont $2I_4$, alors $\mathrm{MWL}(\mathcal{E}_{R_{13}}) \simeq D_6^*$;
— si $r = 15$ et les fibres singulières de $\mathcal{E}_{15}$ sont $I_8 + I_2$, alors $\mathrm{MWL}(\mathcal{E}_{R_{13}}) \simeq D_5^*$;
— si $r = 15$ et les fibres singulières de $\mathcal{E}_{15}$ sont $I_6 + I_4$, alors $\mathrm{MWL}(\mathcal{E}_{R_{13}}) \simeq A_5^*$.

4.4 Existence des fibrations, cas b)

Comme dans la Section 4.3, on va maintenant montrer l'existence des fibrations qu'on a présenté dans la Proposition 4.1.9, c'est-à-dire les fibrations elliptiques sur les surfaces de type $X_{(r,22-r,\delta)}$ telles que il y a au moins une courbe spéciale qui n'est pas contenue dans une fibre réductible. On cherche toujours la classe nef F qui, comme dans la Section 4.3, donne une application qui est une des fibrations elliptiques avec les fibres réductibles desirées. Ici d'ailleurs, grâce à la construction de $X_{(r,22-r,\delta)}$ comme (desingularistaion du) recouvrement double de $\mathbb{P}^2$, la façon d'obtenir la fibration elliptique est bien liée à la géométrie de la courbe sextique choisie comme lieu de ramification. Grâce à la construction géométrique des fibrations, on pourra aussi écrire explicitement leur équations.

Construction 4.4.1 Soit $\mathcal{C}_6$ la sextique de ramification pour le recouvrement double $X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^2$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & S & \longleftarrow & X & & \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle 2:1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi}\ {\scriptstyle 2:1} & & \\ \mathcal{C}_6 = \bigcup_i b_i & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 & \underset{\beta}{\longleftarrow} & \widetilde{\mathbb{P}^2} & \hookleftarrow & \bigcup_i \widetilde{b_i} \end{array}$$

On considère une courbe rationnelle $\gamma \subset \mathbb{P}^2$ qui coupe $\mathcal{C}_6$ en 4 points lisses et éventuellement des autres points doubles.

Maintenant on considère le pull-back du transformé propre de γ à $X_{(r,22-r,\delta)}$. Il s'agit d'un recouvrement $2:1$ de $\mathbb{P}^1$ (car γ est une courbe rationnelle) ramifié sur 4 points : en fait dans $\mathcal{C}_6 \cap \gamma$ il y a 4 points lisses qui ne sont pas éclatés par β et qui restent dans le lieu de ramification de π. Les autres points de $\mathcal{C}_6 \cap \gamma$ sont des points doubles de $\mathcal{C}_6$ et donc sont éclatés par β. Ainsi le pull-back de γ à $X_{(r,22-r,\delta)}$ est un recouvrement de $\mathbb{P}^1$ ramifié en 4 points et donc une courbe elliptique.

Maintenant on prend un pinceau $\mathcal{P}$ de courbes rationnelles tel que le membre générique de $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{C}_6$ dans le lieu de base du pinceau plus 4 points lisses de $\mathcal{C}_6$. Comme avant, cela donne une courbe elliptique pour la courbe générique de $\mathcal{P}$ et donc on a une fibration

elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$. En effet le pinceau $\mathcal{P}$ est une famille 1-dimensionnelle de courbes parametrisée par $\mathbb{P}^1$. Ainsi on peut associer à $\mathcal{P}$ une application

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}} : X_{(r,22-r,\delta)} \to \mathbb{P}^1$$

telle que la fibre générique est une courbe elliptique. Pour voir les fibres réductibles on considère les courbes du pinceau qui passent par des points singuliers de $\mathcal{C}_6$ ou les courbes réductibles de $\mathcal{P}$.

Il sera intéressant de choisir un pinceau de droites. D'après le théorème de Bezout, pour une droite générique l'intersection avec une courbe sextique consiste en 6 points (avec multiplicité). On choisit un points double de la sextique comme lieu de base du pinceau. Soit P un point double de $\mathcal{C}_6$ et soit $\mathcal{P}$ le pinceau de droites par P. On appelle l la droite générique du pinceau. Alors l coupe $\mathcal{C}_6$ en P et 4 autres points simples. On raisonne comme dans la Proposition 3.1.1 : pour avoir un modèle lisse de surface K3 il faut éclater $\mathbb{P}^2$ dans les points singuliers de $\mathcal{C}_6$ et donc en P aussi. On appelle $\tilde{l}$ le transformé propre de l et $\tilde{\mathcal{C}_6}$ sera le transformé propre de $\mathcal{C}_6$ dans l'éclatement. Le pull-back de $\tilde{l}$ dans $X_{(r,22-r,\delta)}$ on le note $\mathcal{L}$. Maintenant on rappelle que la courbe E_P est le pull-back dans $X_{(r,22-r,\delta)}$ de la courbe exceptionelle e_P au-dessus du point P. On voit donc que E_P est une bisection de la fibration : en effet $\tilde{l} \cap e_P$ consiste d'un point Q et Q n'est pas dans le leiu de ramification de π. Donc il correspond à deux points Q_1, Q_2 sur $X_{(r,22-r,\delta)}$. Du coup sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ on a

$$E_P \cap \mathcal{L} = \{Q_1, Q_2\}$$

et donc E_P est une bisection de la fibration elliptique $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$.

On regarde maintenant ce qui se passe quand on prend un point triple P comme point de base du pinceau $\mathcal{P}$. Soit toujours l la droite générique de $\mathcal{P}$. Alors son transformé propre $\tilde{l}$ coupe le lieu de ramification de π en 4 points : l'un d'eux est l'intersection de $\tilde{l}$ avec e_P et les autres 3 sont dans $\tilde{l} \cap \mathcal{C}_6$. Vu que le transformé propre $\tilde{l}$ de la droite générique l du pinceau $\mathcal{P}$ coupe le lieu de ramification en 4 points, alors $\mathcal{P}$ induit une fibration elliptique. Cette fois E_P est une section de la fibration : en fait $\tilde{l} \cap e_P$ consiste d'un point Q qui est dans le lieu de ramification, car e_P est contenue dans le lieu de ramification. Donc quand on remonte sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ l'intersection de E_P et la fibre générique consiste toujours en un seul point et alors E_P est une section de la fibration.

Pour montrer l'existence des fibrations elliptiques de la Proposition 4.1.9, on va appliquer la construction qu'on vient de décrire. Il faut tout d'abord fixer la courbe de ramification $\mathcal{C}_6$ et après bien choisir le pinceau pour obtenir les fibres réductibles désirées. On montre cette stratégie dans les Exemples suivants.

Exemple 4.4.2 On prend la courbe $\mathcal{C}_6$ qui consiste de 6 droites $l_1, \ldots, l_6$ avec un point triple $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$. Il y a donc 12 points doubles (voir Figure 4.6). Grâce au Corollaire 3.1.6 on sait que la surface K3 obtenue comme recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié sur $\mathcal{C}_6$ est $X_{(17,5,1)}$: en effet elle a invariants $(r, a, \delta) = (17, 5, 1)$ car ici $\gamma = 12$ et $\nu = 1$.

On prend le pinceau $\mathcal{P}$ des droites qui passent par le point double $P := P_{5,6}$. La droite générique l de $\mathcal{P}$ rencontre $\mathcal{C}_6$ en $P_{5,6}$ et 4 autres points simples ; donc le pull-back de l sur $X_{(17,5,1)}$ donne une courbe elliptique. Ainsi on obtient la fibration elliptique $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$ induite par $\mathcal{P}$.

Maintenant on considère la droite m du pinceau $\mathcal{P}$ qui passe par le point $P_{1,4}$. Cette droite n'est pas une composante de la courbe de ramification et donne une fibre réductible de $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}$. Il s'agit d'une fibre de type I_2 dont les composantes sont le pull-back $\pi^*(\tilde{m})$ du transformé propre de m et la courbe $E_{P_{1,4}}$. On peut voir ça si on fait la construction qu'on a montré avant : on éclate les points singuliers de $\mathcal{C}_6$ et après on regarde le recouvrement double de l'éclatement (voir Figure 4.7). Les notations sont comme dans la Figure 4.6.

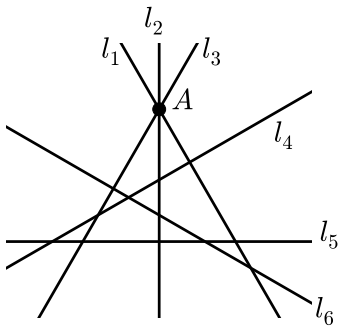


FIGURE 4.6 – La sextique qui donne $X_{(17,5,1)}$

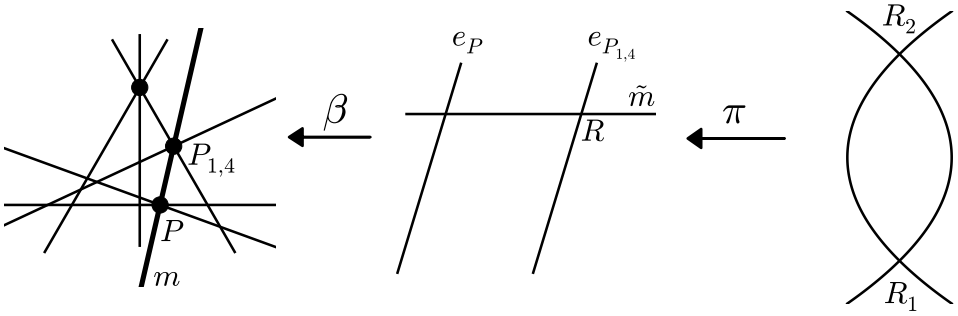


FIGURE 4.7 – Le processus pour obtenir la fibre I_2

De la même manière, les droites du pinceau qui passent par $P_{2,4}$, et $P_{3,4}$ correspondent à fibres de type I_2.

La droite l_5 est une droite de $\mathcal{P}$ et aussi une composante de la courbe de ramification. Elle contient le point base du pinceau $P_{5,6}$ et 4 autres points doubles de $\mathcal{C}_6$: $P_{1,5}$, $P_{2,5}$, $P_{3,5}$ et $P_{4,5}$. Cela donne une fibre réductible de type I_0^*, dont les composantes sont $E_{P_{1,5}}$, $E_{P_{2,5}}$, $\mathcal{L}_5$, $E_{P_{3,5}}$ et $E_{P_{4,5}}$. Pour le voir, il suffit de regarder ce qui se passe à la droite l_5 quand on applique le même processus que dans la Figure 4.7. On le montre dans la Figure 4.8.

De même, la droite l_6 donne une fibre réductible de type I_0^* avec composantes $E_{P_{1,6}}$, $E_{P_{2,6}}$, $\mathcal{L}_6$, $E_{P_{3,6}}$ et $E_{P_{4,6}}$.

Il ne reste que à considerer la droite r de $\mathcal{P}$ qui passe par le point triple A. Cette droite n'est pas une composante de $\mathcal{C}_6$ et donne une fibre réductible de type I_0^* dont les composantes sont E_{A_1}, E_{A_2}, E_{A_3}, E_A et $\pi^*(\tilde{r})$, où on appelle $\tilde{r}$ le transformé propre de la droite r.

Au final, la fibration elliptique $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ sur $X_{(17,5,1)}$ induite par le pinceau $\mathcal{P}$ a pour fibres réductibles $3I_2 + 3I_0^*$.

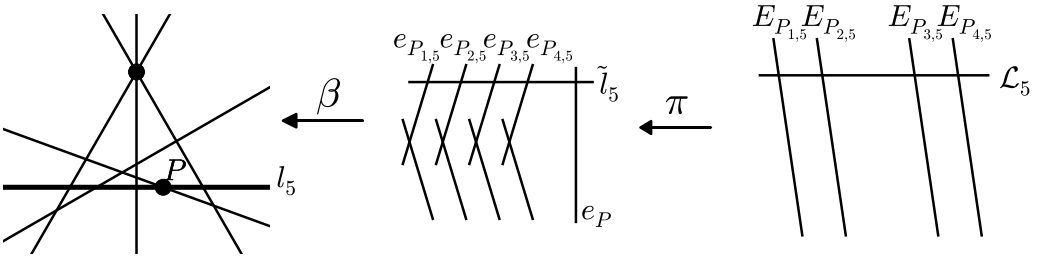


FIGURE 4.8 – Le processus pour obtenir la fibre I_0^*

Exemple 4.4.3 On prend encore la sextique de ramification $\mathcal{C}_6$ qui consiste de 6 droites avec un point triple, comme dans l'Exemple 4.4.2. Donc on est encore sur la surface K3 $X_{(17,5,1)}$. On va montrer comment le choix de pinceaux de courbes rationnelles différents donne d'autres fibres réductibles.

On considère le pinceau $\mathcal{P}$ de coniques rationnelles qui passent par les points $P_{1,4}$, $P_{2,4}$, $P_{2,6}$ et $P_{3,6}$. En général, une conique générique de $\mathcal{P}$ coupe la sextique $\mathcal{C}_6$ en 4 points simples en dehors des 4 points base du pinceau : cela est dû au Théorème de Bezout, car $6 \cdot 2 = 12 = (4 \cdot 2) + 4$. La conique qui passe par le point $P_{4,6}$ est une courbe réductible du pinceau et se décompose en $l_4 \cup l_6$. Cette conique donne une fibre réductible de type I_2^* et ses composantes sont $E_{P_{2,4}}$, $E_{P_{4,5}}$, $\mathcal{L}_4$, $E_{P_{4,6}}$, $\mathcal{L}_6$, $E_{P_{1,6}}$ et $E_{P_{5,6}}$.

Maintenant soit $\mathcal{P}$ le pinceau de coniques qui passent par $P_{1,4}$, $P_{1,5}$, $P_{3,5}$ et $P_{3,6}$. La conique de $\mathcal{P}$ qui passe par le point triple A se décompose en $l_1 \cup l_3$. Elle correspond à une fibre de type III^* avec composantes $E_{P_{1,6}}$, $\mathcal{L}_1$, $E_{A,1}$, E_A, $E_{A,2}$, $E_{A,3}$, $\mathcal{L}_3$ et $E_{P_{3,4}}$. Le processus est montré dans la Figure 4.9.

De la même manière, grâce aux pinceaux de courbes de degré plus grand que 1 on peut obtenir tous les types de fibres réductibles.

Exemple 4.4.4 Dans ce troisiéme exemple on veut montrer comment obtenir des fibres de type I_2^* et I_4^* à partir d'un pinceau des droites. On prend la sextique de ramification $\mathcal{C}_6$ donnée par 6 droites $l_1, \ldots, l_6$ avec trois points triples :

$$A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_1 \cap l_5 \cap l_6, \quad C := l_3 \cap l_4 \cap l_5.$$

Cette courbe a donc aussi 6 points doubles et on a déjà vu qu'elle donne la surface $X_{(19,3,1)}$. Soit $\mathcal{P}$ le pinceau des droites qui passent par le point $P_{1,4}$.

La droite l_1 est une droite du pinceau et une composante de la courbe de ramification $\mathcal{C}_6$. Elle passe par $P_{1,4}$ et deux points triples, A et B. Sur $X_{(19,3,1)}$ elle donne une fibre réductible de type I_4^* et ses composantes sont $E_{A,2}$, $E_{A,3}$, E_A, $E_{A,1}$, $\mathcal{L}_1$, $E_{B,1}$, E_B, $E_{B,5}$ et $E_{B,6}$.

Pour obtenir une fibre de type I_2^* on prend la droite de $\mathcal{P}$ qui passe par C, c'est-à-dire la droite l_4. Encore, elle est une droite du pinceau et une composante de $\mathcal{C}_6$; elle passe par un point triple. Les composantes de la fibre I_2^* qu'elle engendre sont $E_{P_{2,4}}$, $E_{P_{4,6}}$, $\mathcal{L}_4$, $E_{C,4}$, E_C, $E_{C,3}$ et $E_{C,5}$.

Les Exemples montrent qu'ils existent plusieurs façons d'obtenir le même type de fibre réductible : on a montré par exemple que une fibre de type I_0^* s'obtient à partir d'une droite du pinceau qui fait partie de la ramification ou aussi à partir d'une droite qui n'est pas composante de la ramification mais qui passe par un point triple de $\mathcal{C}_6$. Pour obtenir d'autres fibrations, on peut aussi changer la courbe de ramification qui donne $X_{(r,22-r,\delta)}$ et choisir ainsi d'autres pinceaux.

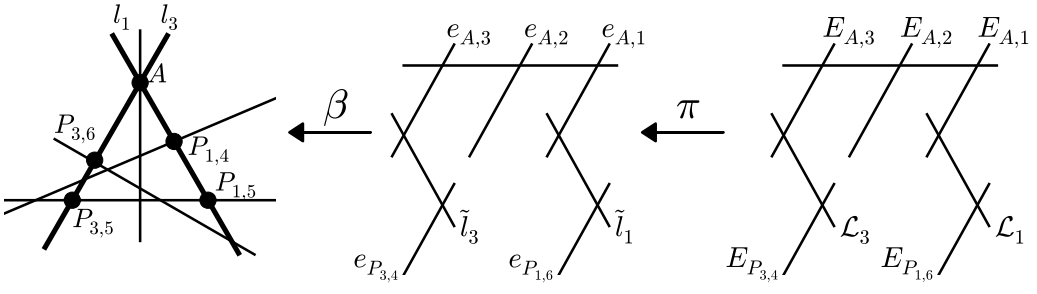


FIGURE 4.9 – Le processus pour obtenir la fibre III^*

Dans la suite on va choisir des pinceaux des droites chaque fois qu'il est possible et pour cela il va falloir changer parfois la sextique $\mathcal{C}_6$. Soit $\mathcal{P}$ le pinceau des droites ayant pour point de base un point double de la sextique $\mathcal{C}_6$ et soit l une droite de $\mathcal{P}$ qui passe par un (ou plus) point(s) singulier(s) de $\mathcal{C}_6$ et donne donc lieu à une fibre réductible. Le type de fibre induite par l est un des suivants :

1. type I_2 si l n'est pas une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par un point double ;
2. type I_0^* si l n'est pas une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par un point triple ;
3. type I_0^* si l est une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par 4 points doubles ;
4. type I_2^* si l est une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par un point triple ;
5. type I_4^* si l est une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par 2 points triples.

Maintenant soit $\mathcal{P}$ le pinceau des droites ayant pour point de base un point triple de la sextique $\mathcal{C}_6$ et soit l une droite de $\mathcal{P}$ qui passe par un (ou plus) point(s) singulier(s) de $\mathcal{C}_6$ et donne donc lieu à une fibre réductible. Le type de fibre induite par l est un des suivants :

1. type I_2 si l n'est pas une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par un point double ;
2. type I_0^* si l n'est pas une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par un point triple ;
3. type I_0^* si l est une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par 3 points doubles ;
4. type I_2^* si l est une composante de $\mathcal{C}_6$ et passe par un point triple ;

Remarque 4.4.5 *Chaque fois que les fibres réductibles de la fibration sont I_2, I_0^*, I_2^* ou I_4^*, on prendra un pinceau de droites. La seule exception est le cas 13) pour $r = 18$. Ici on voudrait obtenir une fibration elliptique avec fibres réductibles $2I_4^*$ mais, pour des raisons géométriques, il n'y a pas des courbes de ramification associées à l'invariant $r = 18$ qui puissent donner une telle fibration. En effet on vient de remarquer que pour avoir une fibre de type I_4^* il faut une droite du pinceau qui est composante de la sextique de ramification et qui passe par deux points triples. On voudrait deux droites de ce type donc il faut au moins quatre points triples. Grâce à l'Exemple 3.1.9, la seule sextique $\mathcal{C}_6$ qu'on peut choisir est la sextique qui consiste en 2 coniques et 2 droites avec 4 points triples, comme dans la Figure 4.10. Donc on devrait prendre le pinceau de droites par P pour avoir les deux fibres I_4^*, mais ce cas n'est pas admissible car la fibration induite $\mathcal{E}_\mathcal{P}$ n'aurait pas des sections. On peut conclure que pour obtenir cette fibration il va falloir choisir un pinceau de courbes de degré plus grand que 1.*

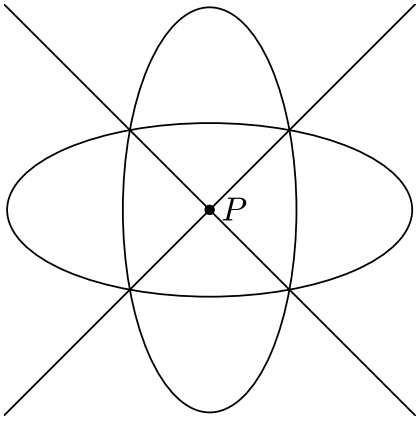


FIGURE 4.10 – Deux coniques et deux droites, avec 4 points triples

La construction qu'on vient de montrer avec les pinceaux de courbes rationnelles permet d'obtenir explicitement une équation de la fibration. On le montre dans le détails sur un exemple et cela se généralise à toute fibration.

Exemple 4.4.6 On considère la surface $X_{(13,9,1)}$ de type K3 et la fibration elliptique avec fibres réductibles $11I_2 + 2I_1$. On choisit la sextique de ramification $\mathcal{C}_6$ qui consiste en 3 coniques. Donc $\mathcal{C}_6 = V(B_{(13,9,1)}(x, y, z))$ pour un certain polynôme $B_{(13,9,1)}$. On peut supposer, à changement de coordonnées près, que $B_{(13,9,1)}$ soit de la forme suivante :

$$(xy+axz+(-1-a)yz)(xy+bxz+(-1-b)yz)(cx^2+dxy+ey^2+fxz+gyz+z^2) = 0 \quad (4.4.1)$$

et cela nous donne une famille 7-dimensionelle de sextiques réductibles. Soit $\mathcal{P}$ le pinceau de droites qui passent par $P := (0 : 0 : 1)$. Donc l'équation de $\mathcal{P}$ est $y = \tau x$, $\tau \in \mathbb{P}^1$.

Pour obtenir le recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié sur $\mathcal{C}_6$ on prend l'équation

$$w^2 = (xy + axz + (-1 - a)yz)(xy + bxz + (-1 - b)yz)(cx^2 + dxy + ey^2 + fxz + gyz + z^2).$$

On montre maintenant comment on obtient une équation de la forme $w^2 = x(x^2 + A(\tau)x + B(\tau))$ pour la fibration elliptique avec fibres réductibles $11I_2 + 2I_1$ en utilisant la construction avec un pinceau de droites.

L'équation de la fibration elliptique induite par le pinceau on l'obtient en remplaçant $y = \tau x$ in (4.4.1). Ensuite on prend un changement de coordonnées et on remplace w par $w\tau x$. On simplifie et on obtient

$$w^2 = \left(x + \frac{a}{\tau}z + (-1 - a)z\right)\left(x + \frac{b}{\tau}z + (-1 - b)z\right)(cx^2+d\tau x^2+ex^2\tau^2+fxz+g\tau xz+z^2). \quad (4.4.2)$$

Pour τ générique l'équation (4.4.2) est l'équation d'une courbe elliptique obtenue comme recouvrement double de $\mathbb{P}^1$ avec coordonnées $(x : z)$.

Maintenant on considère le changement de variable de $\mathbb{P}^1$

$$x \mapsto x\left(1 + b - \frac{b}{\tau}\right) + z\left(1 + a - \frac{a}{\tau}\right); \quad z \mapsto x + z$$

et cela fait que deux des points de ramifications soient $(0 : 1)$ et $(1 : 0)$. On obtient donc

$$\begin{aligned} w^2 = xz\Big(&\left(c + d\tau + e\tau^2\right)\left(x\left(1 + b - \tfrac{b}{\tau}\right) + z\left(1 + a - \tfrac{a}{\tau}\right)\right)^2 \\ &+ (f + g\tau)\left(x\left(1 + b - \tfrac{b}{\tau}\right) + z\left(1 + a - \tfrac{a}{\tau}\right)\right)(x + z) + (x + z)^2\Big). \end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation de la forme

$$w^2 = xz\left[H(\tau)x^2 + J(\tau)xz + K(\tau)z^2\right] \quad (4.4.3)$$

avec

$$\begin{aligned} H(\tau) &:= \left(c + d\tau + e\tau^2\right)\left(1 + b - \tfrac{b}{\tau}\right)^2 + (f + g\tau)\left(1 + b - \tfrac{b}{\tau}\right) + 1 \\ J(\tau) &:= 2\left(c + d\tau + e\tau^2\right)\left(1 + b - \tfrac{b}{\tau}\right)\left(1 + a - \tfrac{a}{\tau}\right) + (f + g\tau)\left(1 + b - \tfrac{b}{\tau} + 1 + a - \tfrac{a}{\tau}\right) + 2 \\ K(\tau) &:= \left(c + d\tau + e\tau^2\right)\left(1 + a - \tfrac{a}{\tau}\right)^2 + (f + g\tau)\left(1 + a - \tfrac{a}{\tau}\right) + 1. \end{aligned}$$

Le changement de coordonnées suivant

$$\begin{aligned} w &\mapsto w/H(\tau) \\ x &\mapsto x/H(\tau) \end{aligned}$$

envoie l'équation (4.4.3) dans $w^2 = xz(x^2 + J(\tau)xz + K(\tau)H(\tau)z^2)$.

On désire une équation de la forme $w^2 = x(x^2 + Ax + B)$ avec A et B deux polynômes en τ donc on applique le changement de coordonnées $w \mapsto w/\tau^3$, $x \mapsto x/\tau^2$ et on multiplie l'équation par τ^6. On obtient $w^2 = x(x^2 + A(\tau)x + B(\tau))$ avec

$$\begin{aligned} A(\tau) := \tau^2 J(\lambda) &= 2\left(c + d\tau + e\tau^2\right)(\tau + b\tau - b)(\tau + a\tau - a) \\ &\quad +\tau\,(f + g\tau)\,(2\tau + b\tau - b + a\tau - a) + 2\tau^2 \\ B(\tau) := \tau^4 K(\tau)H(\tau) &= \Big(\left(c + d\tau + e\tau^2\right)(\tau + b\tau - b)^2 + \tau\,(f + g\tau)\,(\tau + b\tau - b) + \tau^2\Big) \\ &\quad \Big(\left(c + d\tau + e\tau^2\right)(\tau + a\tau - a)^2 + \tau\,(f + g\tau)\,(\tau + a\tau - a) + \tau^2\Big) \end{aligned}$$

Pour trouver les valeurs de τ qui correspondent aux fibres réductibles on cherche les valeurs qui annullent le discriminant $\Delta(\tau)$. Ces valeurs correspondent aux droites du faisceau qui passent par $P = (0 : 0 : 1)$ et un des autres points singuliers de $\mathcal{C}_6$. On suit le Tableau 1.3.8 pour determiner le type de chaque fibre réductible à partir des ordres d'annullation de $\Delta(\tau)$ et, éventuellement, $A(\tau)$ et $B(\tau)$.

Par exemple, on prends la valeur $\tau = 0$. Elle correspond à la droite du pinceau $\mathcal{P}$ qui passe par le point $(1 : 0 : 0)$. Il s'agit d'une droite qui passe par un point double de la sextique de ramification et qui n'est pas composante de la ramification donc on s'attend une fibre de type I_2. En ce cas, vu que il y a une section de 2-torsion et l'équation de Weierstrass est de la forme $w^2 = x(x^2 + A(\tau)x + B(\tau))$, la formule du discriminant devient (voir [ST, p. 76])

$$\Delta(\tau) = B^2(\tau)(A^2(\tau) - 4B(\tau)).$$

Ici $A(0) = 2abc$ et $B(0) = a^2b^2c^2$ et donc effectivement la valeur $\tau = 0$ annulle $\Delta(\tau)$. L'ordre d'annullation est égal à 2 et $\tau = 0$ n'annulle pas $A(\tau), B(\tau)$, donc le Tableau 1.3.8 confirme que la fibre correspondante est de type I_2.

Remarque 4.4.7 Il y a un autre aspect intéressant lié à l'équation de la fibration : dans [GS3] il est indiqué comment la surface $X_{(r,a,1)}$ se spécialise à la surface $X_{(r+1,a-1,1)}$. Cela est dû au fait que le réseau trascendent de $X_{(r+1,a-1,1)}$ se plonge en manière primitive dans le réseau trascendent de $X_{(r,a,1)}$.

Donc par exemple si on donne une condition sur les paramètres qui apparaissent dans (4.4.1), on obtient l'effet de spécialiser la sextique $\mathcal{C}_6$ à une sextique qui est associée aux invariants $(14, 8, 1)$ et en conséquence on spécialise aussi la surface associée. De plus, on a aussi la spécialissation de la fibration elliptique et on obtient une fibration elliptique sur $X_{(14,8,1)}$ dont l'équation est obtenue en mettant dans l'équation (4.4.2) la relation sur les paramètres.

Par exemple, si on met $c = 0$ dans l'équation (4.4.1), on obtient la sextique

$$(xy + axz + (-1 - a)yz)(xy + bxz + (-1 - b)yz)(dxy + ey^2 + fxz + gyz + z^2) = 0 \quad (4.4.4)$$

c'est-à-dire trois coniques avec un point triple en $(1 : 0 : 0)$. Les invariants de cette sextique donnent la surface $X_{(14,8,1)}$.

En mettant $c = 0$ dans l'équation (4.4.2) de la fibration elliptique on obtient une fibration elliptique sur $X_{(14,8,1)}$: il s'agit de la fibration elliptique qui a fibres réductibles $I_0^* + 8I_2 + 4I_1$.

La remarque qu'on vient de faire sera utile prochainement pour trouver toutes les équations des fibrations montrées dans la Proposition 4.1.9.

Remarque 4.4.8 *Les fibration qui sont montrées dans les Tableaux A.1-A.9 admettent fibres de type I_2 et de type III comme fibres réductibles de 2 composantes. Egalement, les fibres singulières non réductibles peuvent être de type I_1 ou II. De toute façon, en général les fibres réductibles de deux composantes sont de type I_2, c'est-à-dire la fibre de type III est un cas particulier de fibre I_2 où les deux point d'intersection entre les composantes coïncident. De même les fibres singulières non réductibles sont de type I_1 et la fibre avec le point cuspidale est un cas particulier. Donc on montrera l'existence de fibrations sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ sans fibres de type II ou III. C'est quand-même possible que sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ existente des autres fibrations non isomorphes qui aient des fibres de type II, III.*

D'après cette Remarque, on veut montrer l'existence des fibrations dans le cas $m_2 = n_2 = 0$, c'est-à-dire quand on ne prend que des fibres de type I_2 comme fibres de deux composantes et fibres I_1 comme fibres singulières non réductibles. Le résultat est donc le Théorème 4.4.9.

Théorème 4.4.9 *Toutes les fibrations de la Proposition 4.1.9 montrées dans les Tableaux A.1-A.9 existent dans le cas $m_2 = n_2 = 0$.*

La preuve du Théorème 4.4.9 sera l'objet du reste du chapitre.

Remarque 4.4.10 *Encore plus en général, ici on donne des exemples et on montre l'existence de toute fibration des Tableaux A.1-A.9. Chaque ligne de ces tableaux correspond à certaines fibres réductibles et on décrira une fibration elliptique avec ces fibres. Il se peut qu'ils existent aussi d'autres fibrations avec les mêmes fibres réductibles non isomorphes à la fibration qu'on montre. Par exemple Oguiso en [O] montre que sur la surface $X_{(18,4,0)}$ ils existent 9 fibrations elliptiques non isomorphes avec fibres réductibles $2I_2^* + 4I_2$.*

4.4.1 Le cas $r = 12$

On prend la sextique de ramification $B_{(12,10,1)}$ qui consiste d'une quartique rationnelle q avec 3 points doubles Q, R, T et une conique c. On peut supposer que l'équation de $B_{(12,10,1)}$ soit, à transformation projective près, la suivante :

$$\begin{aligned} B_{(12,10,1)} := (Ax^2y^2 + Bx^2yz + Cxy^2z + Dx^2z^2 + (1 - 4A - 3B - 2C - 2D)xyz^2 + \\ (A + B + D - 1)y^2z^2 + (2A + B + C - 1)xz^3 + yz^3)(Ex^2 + xy + Fy^2 + Gxz + Hyz) \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

On prend le pinceau $\mathcal{P}$ des droites qui passent par le point double $P := (0 : 0 : 1) \in q \cap c$ et $\mathcal{P}$ donne una fibration elliptique sur $X_{(12,10,1)}$. Les fibres réductibles sont associées aux droites de $\mathcal{P}$ qui passent par Q, R, T et par les autres 7 points de $\{q \cap c\} - P$.

Il s'agit de 10 fibres de type I_2, car les droites ne sont pas des composantes de la ramification et passent par P et un autre point double.

Remarque 4.4.11 Dans la suite on gardera les notations de la Proposition 4.1.9 et des Tableaux A.1-A.9.

Pour chaque valeur de r on fixera la sextique de ramification $\mathcal{C}_6$, qu'on notera $B_{(r,22-r,\delta)}$ et on prendra le pinceau $\mathcal{P}$ de courbes rationnelles par des points singuliers de $B_{(r,22-r,\delta)}$. Le pinceau sera indiqué dans la deuxième colonne du Tableau et dans la dernière colonne on indiquera les sections de la fibration.

Parfois, pour prendre le pinceau de droites, on devra changer la sextique et, dans ce cas, on obtiendra la nouvelle sextique comme spécialisation soit de $B_{(12,10,1)}$ soit de $B_{(13,9,1)}$. Toute fois qu'on prend un pinceau de droites, la sextique de ramification est obtenue comme spécialisation de $B_{(12,10,1)}$ où $B_{(13,9,1)}$. On indiquera donc dans la troisième et

quatrième colonne quelle est la sextique qu'on spécialise et quelles sont les conditions sur les paramètres. On remarque que les paramètres de $B_{(12,10,1)}$ sont des lettres majuscules, alors que les paramètres de $B_{(13,9,1)}$ sont des lettres minuscules.

En chaque cas c'est possible obtenir les équations comme dans le cas qu'on a montré dans les détails dans l'Exemple 4.4.6, en remplaçant l'équation du pinceau de courbes rationnelles. De toute façon, quand la sextique qu'on considère est spécialisation de $B_{(13,9,1)}$ et le point de base du pinceau est $(0:0:1)$, il suffit de mettre les relations sur les paramètres dans l'équation (4.4.2) pour obtenir l'équation de la fibration elliptique. Dans ce cas, la section de 2-torsion de la fibration est la section $t : \tau \mapsto (x : w : \tau) = (0 : 0 : \tau)$.

4.4.2 Le cas $r = 13$

La sextique $B_{(13,9,1)}$ consiste de 3 coniques sans points triples et son équation est (4.4.1). Le pinceau $\mathcal{P}$ est le pinceau des droites qui passent pas $(0 : 0 : 1)$, comme il est indiqué dans la deuxième colonne du tableau suivant.

Pour le cas 1) on considère la setique obtenue comme spécialisation de $B_{(12,10,1)}$ avec la relation sur les paramètres $E = 0$. Le pinceau est encore le pinceau de droites par $(0 : 0 : 1)$.

1)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(12,10,1)}$	$E = 0$
2)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	

4.4.3 Le cas $r = 14$

On ne fixe pas la sextique $B_{(14,8,1)}$ car dans tous les cas on prend des spécialisation soit de $B_{(12,10,1)}$ soit de $B_{(13,9,1)}$.

1)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(12,10,1)}$	$E = G = 0$
2)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(12,10,1)}$	$E = F = 0$
3)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	$c = 0$
4)	$\lvert H - E_{(1:0:0)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	$c = 0$

On observe que la sextique est la même pour les cas 3) et 4) mais on change le point de base du pinceau.

4.4.4 Le cas $r = 15$

La sextique $B_{(15,7,1)}$ consiste de 2 droites l_1, l_2 et deux coniques c_3, c_4 avec un point triple $A := l_1 \cap c_3 \cap c_4$. Il y a dix points doubles : $P_{1,2}$, $R_{1,j} = l_1 \cap c_j$, $j = 3, 4$, $\{R^1_{2,j}, R^2_{2,j}\} = l_2 \cap c_j$, $j = 3, 4$, $\{Q^1_{3,4}, Q^2_{3,4}, Q^3_{3,4}\} \in c_3 \cap c_4$.

1)	$\lvert 3H - 2E_{R_{1,3}} - E_{R_{1,4}} - E_{R^1_{2,3}} - E_{R^2_{2,3}} - E_{Q^1_{3,4}} - E_{Q^2_{3,4}}\rvert$	$B_{(15,7,1)}$		$\mathcal{L}_2$
2)	$\lvert H - E_{(C,-B:0)}\rvert$	$B_{(12,10,1)}$	$A = F = E = 0$	
3)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(12,10,1)}$	$E = F = G = 0$	
4a)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	$b = 0, f = -1 - c$	
4b)	$\lvert H - E_{(1:0:c)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	$b = 0, f = -1 - c$	
5)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(12,10,1)}$	$E = F = 0$, $H = -1 - G$	
6)	$\lvert H - E_{(0:0:1)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	$a = -1, b = 0$	
7)	$\lvert H - E_{(0:1:0)}\rvert$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = 0$	

Pour les cas 2)-7) on prend des pinceaux de droites sur des spécialisations soit de $B_{(12,10,1)}$ soit de $B_{(13,9,1)}$.

Pour le cas 1) on prend un pinceau de cubiques rationnelles qui passent par les points $R_{1,4}, R^1_{2,3}, R^2_{2,3}$, $Q^1_{3,4}, Q^2_{3,4}$ et qui aient un point double en $R_{1,3}$. Ce pinceau induit la fibration elliptique sur $X_{(15,7,1)}$ avec fibres réductibles $III^* + 6I_2$. La cubique du pinceau

qui correspond à III^* est la cubique qui se décompose en $l_1 \cup c_3$ et la seule section de cette fibration est $\mathcal{L}_2$. Cela est cohérent avec le fait, montré dans le Tableau A.6, que cette fibration a groupe de Mordell-Weil trivial : MW $= \{1\}$.

4.4.5 Le cas $r = 16$

La sextique $B_{(16,6,1)}$ consiste de 4 droites $l_1, \ldots, l_4$ et une coniques c_5 avec un point triple $A := l_1 \cap l_2 \cap c_5$. Il y a donc 11 double points et il s'agit de $P_{h,k}$, $h = 1, 2$, $k = 3, 4$, $P_{3,4}$, $R_{1,5}$, $R_{2,5}$ and $\{R^1_{j,5}, R^2_{j,5}\}$, $j = 3, 4$.

1)	$\|4H - 2E_{P_{1,3}} - 2E_{P_{2,4}} - 2E_{R_{2,5}} - E_{R_{1,5}}$ $-E_{P_{1,4}} - E_{R^1_{3,5}} - E_{R^2_{3,5}}\|$	$B_{(16,6,1)}$		$\mathcal{L}_4$
2)	$\|2H - E_{P_{1,4}} - E_{R_{1,5}} - E_{P_{2,4}} - E_{P_{2,3}}\|$	$B_{(16,6,1)}$		$\mathcal{L}_3$
3)	$\|4H - 2E_{P_{2,3}} - 2E_{R^2_{3,5}} - 2E_{P_{1,4}} - E_{R^2_{4,5}} - E_{R_{1,5}}$ $-2E_A - E_{A,1} - E_{A,2} - E_{A,5} - E_{R^1_{4,5}}\|$	$B_{(16,6,1)}$		$\mathcal{L}_2, E_A$
4)	$\|3H - 2E_{P_{2,3}} - E_{P_{1,3}} - E_{R^1_{4,5}} - E_{R^2_{4,5}} - E_{R_{2,5}}$ $-E_{P_{1,4}}\|$	$B_{(16,6,1)}$		$\mathcal{L}_1$
5)	$\|H - E_{(0:1:1-A-B-D)}\|$	$B_{(12,10,1)}$	$E = F = G = H = 0$	
6a)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = b = 0, f = -1$	
6b)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(12,10,1)}$	$A = 0, E = F = -1/2,$ $H = -G$	
7)	$\|H - E_{(0:-G,1)}\|$	$B_{(12,10,1)}$	$A = E = F = H = 0$	
8)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(12,10,1)}$	$E = F = G = 0,$ $H = -1$	
9a)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = c = e = 0$	
9b)	$\|H - E_{(1:0:c)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$b = 0, f = -1 - c,$ $g = -d - e$	
10)	$\|H - E_{(0:1:-g)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = e = 0, b = -1$	
11)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = 0,$ $g = -d - f - 1$	
12)	$\|H - E_{(1:0:0)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = 0,$ $g = -d - f - 1$	

Le cas 1) prend en consideration un pinceau de courbe de degré 4 qui passent par $R_{1,5}, P_{1,4}, R^1_{3,5}, R^2_{3,5}$ et qui ont un point double en $P_{1,3}, P_{2,4}, R_{2,5}$. Donc il s'agit de quartiques rationnelles et le pinceau induit une fibration elliptique sur $X_{(16,6,1)}$. La courbe qui se decompose en $l_1 \cup l_2 \cup l_2 \cup l_3$ (c'est-à-dire les droites l_1 et l_3 et la droite l_2 prise deux fois) donne la fibre réductible de type II^*.

Pour le cas 2) on prend le pinceau de coniques qui passent par $P_{1,4}, R_{1,5}, P_{2,4}$ et $P_{2,3}$. La conique réductible $l_1 \cup l_2$ fait partie du pinceau et donne la fibre de type III^*. La fibre de type I^*_0 est donnée par la conique $l_4 \cup m$, où m est une droite qui passe par $R_{1,5}$ et $P_{2,3}$.

Les autres pinceaux des cas 3) et 4) ressemblent au cas déjà vus avant.

Donc pour les cas 1)-4) on a pris une sextique de ramification qui consiste en 4 droites et une conique avec un point triple. Dans les cas 5)-12) on change la sextique pour pouvoir considerer un pinceau de droites et les courbes de ramification sont obtenues à partir soit de $B_{(12,10,1)}$ soit de $B_{(13,9,1)}$. Par exemple pour le cas 6a), si on remplace les conditions sur les paramètres dans l'équation (4.4.1) on obtient une courbe de ramification d'équation

$$y(x - z)(xy - axz + (-1 - a)yz)(dxy + ey^2 - xz + gyz + z^2) = 0.$$

Les composantes de cette courbe sont les 2 droites $y = 0$ et $x - z = 0$ et les deux coniques et la courbe admet 2 points triples $(1 : 0 : 0)$ et $(1 : 0 : 1)$. On avait déjà analysé dans l'Exemple 3.1.8 les differentes possibilités pour la courbe de ramification qui donne la surface $X_{(16,6,1)}$ et cette sextique avec 2 coniques et 2 droites avec 2 points triples correspond au cas v) de l'Exemple.

Aussi pour les cas 9a) et 9b) la courbe de ramification consiste en 2 coniques et deux droites avec 2 point triples et donc elle correspond au cas v) de l'Exemple 3.1.8. La courbe

de ramification du cas 10) se decompose en une conique et 4 droites et un point triple (cf. Exemple 3.1.8, cas *vi*)) ; pour le cas 11) et 12) on a une sextique qui est union de 3 coniques avec 3 points triples (cf. Exemple 3.1.8, cas *iv*)) et la sextique de ramification des cas 5) et 8) est union d'une quartique rationnelle et 2 droites avec 3 point triples (cf. Exemple 3.1.8, cas *i*)). Enfin, la sextique de ramification des cas 6b) et 7) consiste en une cubique rationnelle et 3 droites avec 2 points triples (cf. Exemple 3.1.8, cas *iii*))

Remarque 4.4.12 *On observe que la fibration du cas 6b) est analysée en [CD, Section 3] et elle est obtenue à partir d'une courbe de ramification qui consiste en 6 droites en position générale avec un pinceau des courbes de degré 5. Ici le fait de changer de courbe et prendre una sextique de ramification qui se décompose en une cubique rationnelle et 3 droites avec 2 points triples permet d'obtenir la même fibration mais avec un pinceau de courbes de degré plus petit.*

4.4.6 Le cas $r = 17$

La sextique $B_{(17,5,1)}$ consiste en 6 droites $l_1, \dots, l_6$ avec un point triple $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3$. Les points doubles sont $P_{1,4}$, $P_{1,5}$, $P_{1,6}$, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, $P_{2,6}$, $P_{3,4}$, $P_{3,5}$, $P_{3,6}$, $P_{4,5}$,$P_{4,6}$, $P_{5,6}$ (voir Figure 4.4).

Les fibrations elliptiques du Tableau A.4 sont obtenues à partir des pinceaux suivants.

1)	$\|6H - 3E_{P_{3,5}} - 3E_{P_{2,4}} - 3E_{P_{4,6}} - 2E_{P_{3,6}} - 2E_A - 2E_{A,1} - E_{A,2} - E_{A,3} - E_{P_{1,5}} - E_{P_{2,5}} - E_{P_{5,6}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		$\mathcal{L}_2$
2)	$\|3H - 2E_A - 2E_{A,2} - E_{A,1} - E_{A,3} - 2E_{P_{1,4}} - E_{P_{2,5}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{4,5}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		$\mathcal{L}_3$
3)	$\|4H - 2E_A - E_{A,1} - E_{A,2} - E_{A,3} - 2E_{P_{1,5}} - 2E_{P_{2,5}} - 2E_{P_{3,6}} - E_{P_{3,4}} - E_{P_{1,6}} - E_{P_{2,6}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		E_A
4)	$\|2H - E_{P_{1,4}} - E_{P_{1,5}} - E_{P_{3,6}} - E_{P_{3,5}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		$\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_6$
5)	$\|5H - 3E_{P_{1,4}} - 2E_{P_{1,5}} - 2E_{P_{3,6}} - 2E_{P_{5,6}} - E_{P_{2,6}} - E_{P_{2,4}} - E_{P_{3,4}} - E_{P_{3,5}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		$\mathcal{L}_3$
6)	$\|4H - 2E_{P_{3,5}} - 2E_{P_{2,4}} - 2E_{P_{3,6}} - E_{P_{4,5}} - E_{P_{1,4}} - E_{P_{5,6}} - E_{P_{2,6}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		$\mathcal{L}_2$
7)	$\|3H - 2E_{P_{3,4}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{5,6}} - E_{P_{2,6}} - E_{P_{1,6}} - E_{P_{1,4}}\|$	$B_{(17,5,1)}$		$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_5$
8)	$\|H - E_{(0:1:1)}\|$	$B_{(12,10,1)}$	$A = 0, E = 0, G = -1, H = F = 0$	
9)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = b = 0, a = -1, f = -1$	
10)	$\|H - E_{(1:1:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = e = 0, f = -1 - c, d = -cg$	
11)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = a = 0, g = -d - f - 1$	
12)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = a = d = 0$	
13)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = 0, f = -1, g = -d$	
14a)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = b = 0, a = -1, g = -1 - e$	
14b)	$\|H - E_{(1:0:0)}\|$	$B_{(12,10,1)}$	$A = 0, E = H = F = 0, G = -1$	

La manière de voir les fibrations est analogue à ce qu'on a fait avant. On remarque juste certaines fibres particulières.

Le pinceau du cas 1) consiste en sextiques rationnelles qui passent par $A, P_{1,5}, P_{2,5}, P_{5,6}$, qui ont un point double en $P_{3,6}$ et un point triple en $P_{3,5}, P_{2,4}, P_{4,6}$ et telles que la droite tangente à la courbe en A soit l_1. La fibre réductible de type II^* est donnée par la sextique du pinceau qui se decompose en $l_5 \cup l_3 \cup l_3 \cup l_4 \cup l_4 \cup l_4$, c'est-à-dire trois copies de l_4, deux copies de l_3 et une copie de l_5.

Les courbes du pinceau du cas 5) sont des courbes rationnelles de degré 5 qui passent par $P_{2,6}, P_{2,4}, P_{3,4}, P_{3,5}$ et qui ont un point double en $P_{1,5}, P_{5,6}, P_{3,6}$ et un point triple en $P_{1,4}$. La fibre de type I_8^* vient de la quintique qui se decompose en $l_1 \cup l_4 \cup l_5 \cup l_6 \cup m$, où m est la droite qui passe par $P_{1,4}$ et $P_{3,6}$.

4.4.7 Le cas $r = 18$

Quand $r = 18$ il faut distinguer si $\delta = 1$ ou $\delta = 0$ et donc on prendra les deux sextiques différentes qu'on a vu dans la preuve du Corollaire 3.1.6. La courbe $B_{(18,4,1)}$ consiste en six droites $l_1, \dots l_6$ avec deux points triples $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, B := l_1 \cap l_5 \cap l_6$ (voir Figure 4.3). Donc il y a une des droites de la sextique de ramification qui passe pour les deux points triples.

La courbe $B_{(18,4,0)}$ est l'union de six droites $l_1, \dots l_6$ avec deux points triples $A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_4 \cap l_5 \cap l_6$ (voir Figure 3.2). En ce cas les deux points triples ne sont pas sur une des droites composantes de la ramification.

En conséquence, pour chaque fibration on indique aussi la valeur de δ dans la dernière colonne du Tableau. Les pinceaux qu'on choisit sont analogues aux cas déjà vus pour valeurs plus petites de r.

1)	$\|3H - 2E_A - 2E_{A,3} - E_{A,2} - E_{A,1} - 2E_{P_{1,4}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{2,5}} - E_{P_{4,5}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_1$	1
2)	$\|4H - 2E_B - E_{B,4} - E_{B,5} - E_{B,6} - 2E_{P_{3,4}} - 2E_{P_{1,5}} - 2E_{P_{1,6}} - E_{P_{2,4}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(18,4,0)}$		E_B	0
3)	$\|3H - 2E_A - 2E_{A,3} - E_{A,2} - E_{A,1} - 2E_B - 2E_{B,5} - E_{B,1} - E_{B,6} - 2E_{P_{2,6}} - E_{P_{3,5}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_1$	1
4)	$\|3H - 2E_A - 2E_{A,3} - E_{A,2} - E_{A,1} - 2E_B - 2E_{B,1} - E_{B,6} - E_{B,5} - 2E_{P_{2,5}} - E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_6$	1
5a)	$\|2H - E_{P_{3,6}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{2,4}} - E_{P_{2,6}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_4, \mathcal{L}_5$	1
5b)	$\|2H - E_{P_{1,4}} - E_{P_{1,5}} - E_{P_{3,6}} - E_{P_{3,4}}\|$	$B_{(18,4,0)}$		$\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$	0
6)	$\|2H - E_{P_{3,6}} - E_{P_{4,6}} - E_{P_{4,5}} - E_{P_{2,5}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$	1
7)	$\|5H - 2E_B - 2E_{B,1} - E_{B,5} - E_{B,6} - 3E_{P_{3,6}} - 2E_{P_{4,5}} - 2E_{P_{1,4}} - 2E_{P_{3,5}} - E_{P_{2,4}} - E_{P_{2,6}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_1$	1
8)	$\|4H - 2E_A - 2E_{A,2} - E_{A,1} - E_{A,3} - 2E_{P_{3,6}} - 2E_{P_{1,5}} - 2E_{P_{2,6}} - E_{P_{1,4}} - E_{P_{3,5}}\|$	$B_{(18,4,0)}$		$\mathcal{L}_5$	0
9)	$\|3H - 2E_{P_{2,5}} - E_{P_{1,4}} - E_{P_{4,6}} - E_{P_{2,6}} - E_{P_{3,4}} - E_{P_{3,5}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_6$	1
10)	$\|3H - 2E_B - 2E_{B,6} - E_{B,1} - E_{B,5} - 2E_{P_{1,4}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{4,5}} - E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_3$	1
11)	$\|2H - E_{P_{3,6}} - E_{P_{3,4}} - E_{P_{4,5}} - E_{P_{2,5}}\|$	$B_{(18,4,1)}$		$\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_6$	1
12)	$\|2H - E_{P_{3,6}} - E_{P_{3,4}} - E_{P_{2,5}} - E_{P_{1,5}}\|$	$B_{(18,4,0)}$		$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_6$	0
13)	$\|3H - 2E_A - 2E_{A,1} - E_{A,2} - E_{A,3} - 2E_{P_{2,6}} - E_{P_{3,5}} - E_{P_{3,6}} - E_{P_{1,5}}\|$	$B_{(18,4,0)}$		$\mathcal{L}_5$	0
14a)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = b = 0, a = f = -1, g = -1 - e$		1
14b)	$\|H - E_{(g:1:0)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = d = 0, f = -1, a = 0$		1
15)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = 0, b = -1, c = 0, f = -1, g = -d - e$		0
16)	$\|H - E_{(1:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = 0, c = d = e = 0, f = -1$		1
17)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = 0, b = -1, d = 1, f = -1 - c, g = -1 - e$		1
18)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$c = e = 0, g = -d, f = a = -1$		1
19)	$\|H - E_{(1:0:0)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = 0, b = -1, c = e = 0, d = fg$		0
20a)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = c = e = 0, b = -1, d = fg$		0
20b)	$\|H - E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a = c = d = e = 0, b = -1$		1

4.4.8 Le cas $r = 19$

La courbe $B_{(19,3,1)}$ consiste de six droites $l_1, \dots, l_6$ avec 3 points triples

$$A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_1 \cap l_5 \cap l_6, \quad C := l_3 \cap l_4 \cap l_5$$

et 6 points doubles $P_{1,4}, P_{2,5}, P_{3,6}, P_{2,4}, P_{2,6}, P_{4,6}$.

Les pinceaux qui donnent les fibrations du Tableau A.2 sont les suivants.

1)	$\|3H-2E_A-2E_{A,2}-E_{A,1}-E_{A,3}-2E_B$ $-2E_{B,5}-E_{B,1}-E_{B,6}-2E_{P_{3,6}}-E_{P_{2,5}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_1$
2)	$\|3H-2E_A-2E_{A,1}-E_{A,2}-E_{A,3}-2E_B$ $-2E_{B,5}-E_{B,1}-E_{B,6}-2E_{P_{3,6}}-E_{P_{2,5}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_2$
3)	$\|2H-2E_A-E_{A,1}-E_{A,2}-E_{A,3}-E_{P_{1,4}}$ $-E_{P_{4,6}}-E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_2, E_A$
4)	$\|3H-2E_B-2E_{B,5}-E_{B,1}-E_{B,6}-2E_C$ $-2E_{C,4}-E_{C,3}-E_{C,5}-2E_{P_{3,6}}-E_{P_{1,4}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_1$
5)	$\|2H-2E_A-E_{A,1}-E_{A,2}-E_{A,3}-E_{P_{1,4}}$ $-E_{P_{2,6}}-E_{P_{4,6}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_3, E_A$
6)	$\|2H-2E_A-E_{A,1}-E_{A,2}-E_{A,3}-2E_B$ $-E_{B,1}-E_{B,5}-E_{B,6}-E_{P_{3,6}}-E_{P_{2,5}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		E_A, E_B
7)	$\|5H-4E_C-4E_{C,5}-2E_{C,4}-2E_{C,3}-2E_B$ $-2E_{B,1}-E_{B,5}-E_{B,6}-3E_{P_{3,6}}-2E_{P_{1,4}}$ $-E_{P_{2,6}}-E_{P_{2,4}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_1$
8)	$\|3H-2E_A-2E_{A,3}-E_{A,1}-E_{A,2}-2E_B$ $-2E_{B,6}-E_{B,1}-E_{B,5}-2E_{P_{2,5}}-E_{P_{1,4}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_6$
9)	$\|3H-2E_B-2E_{B,5}-E_{B,1}-E_{B,6}-2E_C$ $-2E_{C,3}-E_{C,4}-E_{C,5}-2E_{P_{2,4}}-E_{P_{2,6}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_6$
10a)	$\|2H-E_{P_{1,4}}-E_{P_{2,5}}-E_{P_{2,6}}-E_{P_{4,6}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_5$
10b)	$\|2H-2E_B-2E_{B,6}-E_{B,1}-E_{B,5}-2E_C$ $-E_{C,3}-E_{C,4}-E_{C,5}-E_{P_{1,4}}\|$	$B_{(19,3,1)}$		$\mathcal{L}_3, E_C$
11)	$\|H-E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$b=-1, a=c=e=0,$ $f=-1, g=-1$	
12)	$\|H-E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a=c=d=e=0, b=g=-1$	
13)	$\|H-E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a=c=d=e=0, b=-1,$ $g=-1-f$	

4.4.9 Le cas $r = 20$

La courbe $B_{(20,2,1)}$ est l'union de six droites $l_1 \ldots, l_6$ avec 4 points triples

$$A := l_1 \cap l_2 \cap l_3, \quad B := l_1 \cap l_5 \cap l_6, \quad C := l_3 \cap l_4 \cap l_5, \quad D := l_2 \cap l_4 \cap l_6$$

et 3 points doubles $P_{1,4}, P_{2,5}$ et $P_{3,6}$. Le tableau suivant montre les pinceaux qui donnent les fibrations elliptiques sur $X_{(20,2,1)}$.

1)	$\|3H-2E_D-2E_{D,2}-E_{D,4}-E_{D,6}-2E_B-2E_{B,5}$ $-E_{B,1}-E_{B,6}-2E_{P_{1,4}}-E_{P_{2,5}}\|$	$B_{(20,2,1)}$		$\mathcal{L}_6$
2)	$\|3H-2E_B-2E_{B,5}-E_{B,1}-E_{B,6}-2E_C-2E_{C,4}$ $-E_{C,3}-E_{C,5}-E_{P_{1,4}}-2E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(20,2,1)}$		$\mathcal{L}_1$
3)	$\|2H-2E_A-E_{A,1}-E_{A,2}-E_{A,3}-2E_B-E_{B,1}$ $-E_{B,5}-E_{B,6}-E_{P_{2,5}}-E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(20,2,1)}$		E_A, E_B
4)	$\|2H-2E_C-2E_{C,3}-E_{C,4}-E_{C,5}-2E_D-2E_{D,6}$ $-E_{D,4}-E_{D,2}\|$	$B_{(20,2,1)}$		$\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_5$
5)	$\|5H-2E_B-2E_{B,1}-E_{B,5}-E_{B,6}-4E_C-4E_{C,5}-2E_{C,3}$ $-2E_{C,4}-2E_D-2E_{D,2}-E_{D,4}-E_{D,6}-2E_{P_{1,4}}-3E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(20,2,1)}$		$\mathcal{L}_1$
6)	$\|3H-2E_C-2E_{C,5}-E_{C,4}-E_{C,3}-2E_D-2E_{D,2}$ $-E_{D,4}-E_{D,6}-E_{P_{1,4}}-2E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(20,2,1)}$		$\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_5$
7)	$\|2H-2E_C-2E_{C,5}-E_{C,4}-E_{C,3}-E_{P_{1,4}}-E_{P_{3,6}}\|$	$B_{(20,2,1)}$		$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_6$
8)	$\|H-E_{(0:0:1)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a=c=d=e=0,$ $b=g=-1, f=-1$	
9)	$\|H-E_{(1:0:0)}\|$	$B_{(13,9,1)}$	$a=c=d=e=0,$ $b=g=-1, f=-1$	

Chapitre 5

Les involutions de van Geemen-Sarti

Ce chapitre sera dedié à la classification des involutions de van Geemen-Sarti sur les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ de type K3. On rappelle qu'il s'agit des involutions symplectiques qui sont induites par la translation par rapport à une section d'ordre 2 d'une fibration elliptique sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ et donc il suffira des classifier les sections d'ordre 2 des fibrations qu'on a montré dans le Chapitre precédent. Le Theorème 3.1 de [GS3] assure que les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ qu'on considère admettent une involution symplectique, mais cette involution n'est pas forcement de type van Geemen-Sarti.

On va toujours distinguer si l'involution ι induite par l'involution de recouvrement est de type a), c'est-à-dire elle n'agit que sur la base de la fibration elliptique (voir Exemple 2.4.12 et Section 4.3) ou de type b), c'est-à-dire elle agit seulement sur les fibres de la fibration (voir Exemple 2.4.13 et Section 4.4). De plus, on regardera quelles involutions van Geemen-Sarti sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ sont aussi des involution de Morrison-Nikulin (voir Section 5.1).

Les résultats de ce Chapitre sont objet de [CG].

5.1 Involutions de Morrison-Nikulin

Quand on a une involution de van Geemen-Sarti sur $X_{(r,22-r,\delta)}$, on peut se demander si elle est aussi une involution de Morrison-Nikulin. La définition est la suivante

Définition 5.1.1 *Une involution symplectique μ sur une surface S de type K3 est dite de* **Morrison-Nikulin** *si la désingularisation $\widetilde{S/\mu}$ du quotient S/μ est une surface de Kummer* $\mathrm{Km}(A)$ *pour une certaine surface abélienne A et $T_S \simeq T_A$.*

C'est une définition équivalente demander que $\widetilde{S/\mu}$ soit une surface de Kummer $\mathrm{Km}(A)$ et que $T_{\widetilde{S/\mu}} \simeq T_A(2)$, ou encore que μ agisse sur $\mathrm{NS}(S)$ en échangeant deux copies orthogonales de E_8 (voir [Mo, Theorem 6.3]).

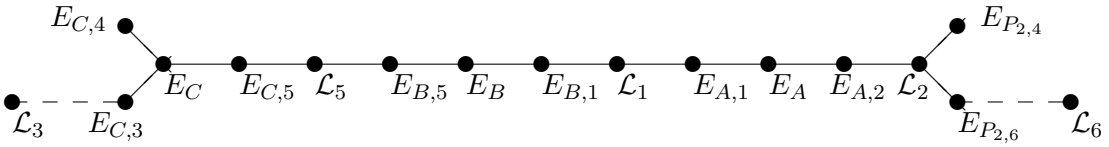
Parmi les involutions de Morrison-Nikulin, il y en a qui sont induites par la translation par rapport à une section d'ordre 2, c'est-à-dire il y a des involutions de Morrison-Nikulin qui sont aussi des involutions de van Geemen-Sarti. Ces involutions sont décrites pour la première fois en [vGS].

En [Ko] l'auteur classifie les involutions de Morrison-Nikulin qui sont aussi de van Geemen-Sarti sur une surface K3 qui a nombre de Picard 17 avec une fibration elliptique dont le groupe de Mordell-Weil est fini.

En [Sc], trois familles 3-dimensionnelles de surfaces K3 avec une involution de Morrison-Nikulin sont présentées. Pour chacune de ces familles l'involution de Morrison-Nikulin est une involution de van Geemen-Sarti aussi et on observe que le groupe de Mordell-Weil de ces familles n'est pas fini.

Exemple 5.1.2 *On montre que une des involutions qu'on a déja vu comme involution de van Geemen-Sarti est aussi une involution de Morrison-Nikulin, car elle échange deux copies de E_8.*

On prend la surface $X_{(19,3,1)}$ avec la fibration elliptique du cas 8) du Tableau A.2. Les fibres réductibles sont $I_{10}^*+3I_2$ et on montre dans la Figure suivante quelles courbes donnent la fibre I_{10}^*.



On a montré aussi dans la Figure les deux sections : la section zero $\mathcal{L}_3$ et la section de 2-torsion $\mathcal{L}_6$. L'involution de van Geemen-Sarti est une translation par la section de 2-torsion donc elle envoie $\mathcal{L}_3$ sur $\mathcal{L}_6$ et le reste de la fibre en conséquence. Les deux copies de E_8 qui sont échangées sont montrées dans la Figure 5.1.

5.2 Involutions de van Geemen-Sarti, cas a)

On considère les fibrations elliptiques de type a) sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ qui sont montrées dans la Proposition 4.1.5. Avant on n'a pas détaillé le groupe de Mordell-Weil de ces fibrations mais on en a besoin maintenant. En particulier on veut voir s'il y a des sections de 2-torsion, vu que les involutions de van Geemen-Sarti sont induites par la translation par rapport à une section de 2-torsion de la fibration.

On collecte les résultats dans la Proposition suivante.

Proposition 5.2.1 *Soit $\mathcal{E}_r$ une des fibrations du Tableau 4.1.2. Alors les seules fibrations qui admettent une section d'ordre 2 sont celles qui ont les fibres réductibles suivantes :*

- *si $r = 20$, fibres réductibles $I_4 + I_{16}$;*
- *si $r = 19$, fibres réductibles $I_2 + I_{16}$;*
- *si $r = 18$, fibres réductibles $I_4 + I_{12}$ ou $2I_8$.*

Comme conséquence, seulement en ces cas il y aura une involution de van Geemen-Sarti. Quand $r = 19, 20$, l'involution de van Geemen-Sarti est aussi une involution de Morrison-Nikulin.

Preuve. En général, une section de 2-torsion coupe une fibre de type I_{2k} soit en la composante Θ_0 soit en la composante Θ_k, d'après la loi de groupe sur une fibre réductible et la définition de section de 2-torsion (voir [Mi]).

Soit $\mathcal{E}_r$ la fibration elliptiques sur la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ avec fibres réductibles $I_{2k_1} + I_{2k_2}$ et soit t une section de 2-torsion. Supposons que t coupe la fibre I_{2k_1} en la composante

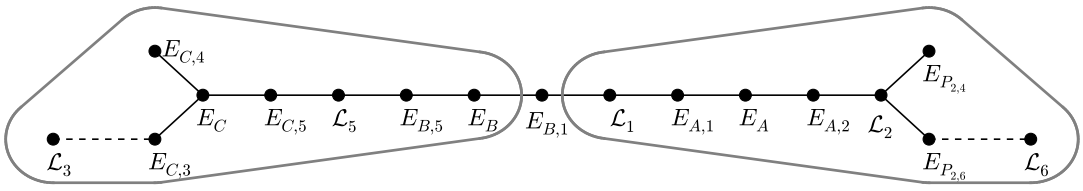


FIGURE 5.1 – L'échange de deux copies de E_8

Θ_0 ; forcement t coupera I_{2k_2} en la composante Θ_{k_2} car sinon t ne serait pas une section de 2-torsion (il suffit d'appliquer la height formula). Pour la height formula (1.3.6) on doit avoir

$$\frac{k_2(2k_2 - k_2)}{2k_2} = \frac{k_2}{2} = 4$$

d'où $k_2 = 8$. Donc il faut qu'il y ait une fibre de type I_{16} et les seules possibilités sont : $r = 20$ avec fibres réductibles $I_4 + I_{16}$ et $r = 19$ avec fibres réductibles $I_2 + I_{16}$.

Maintenant on suppose que t coupe les deux fibres réductibles en composantes differentes de Θ_0. Toujours pour la height formula on a

$$\frac{k_1}{2} + \frac{k_2}{2} = 4$$

d'oú $k_1 + k_2 = 8$ et donc $r = 18$.

On regarde donc les possibilités pour $r = 18$. S'il y a une fibre de type IV^* la fibration a fibres réductibles soit $IV^* + I_8$ soit $2IV^*$. Dans ces cas il ne peut pas y avoir une section de 2-torsion : en effet, quand une section de 2-torsion coupe une fibre IV^*, la contribution dans la height formula est 0 ou 4/3, selon la composante qui est coupée. Mais donc il n'y a pas de configuration de la section de 2-torsion possibles pour obtenir 4 dans la height formula. Donc on exclut les cas avec fibres réductibles $IV^* + I_8$ et $2IV^*$. Elles nous restent les fibrations avec fibres réductibles $I_{2k_1} + I_{2k_2}$ et $k_1 + k_2 = 8$. Soit $\mathcal{E}_{R_r}$ la fibration induite sur le quotient $X_{(r,22-r,\delta)}$ (voir Section 4.3.10 et Tableau 4.3.1). Si t est une section de 2-torsion pour $\mathcal{E}_r$, alors t induit une section de 2-torsion pour $\mathcal{E}_{R_r}$ aussi. On rappelle que, si $\mathcal{E}_r$ a fibres réductibles $I_{2k_1} + I_{2k_2}$ alors $\mathcal{E}_{R_r}$ a fibres réductibles $I_{k_1} + I_{k_2}$ et on est dans le cas $r = 18$ et $k_1 + k_2 = 8$. Si k_1 et k_2 sont impairs ou si un de k_1, k_2 est impair et l'autre n'est pas 8, alors la fibration $\mathcal{E}_{R_r}$ avec fibre réductibles $I_{k_1} + I_{k_2}$ n'admet pas une section de 2-torsion, car une section de 2-torsion coupe forcement la fibre de type I_k en la composante Θ_0 si k est impair. Donc on exclut les fibrations au quotient $\mathcal{E}_{R_{18}}$ avec fibres $I_1 + I_7$ ou $I_3 + I_5$ et en conséquence les fibrations $\mathcal{E}_{18}$ sur $X_{(18,4,\delta)}$ avec fibres réductibles $I_2 + I_{14}$ ou $I_6 + I_{10}$ car il n'y a pas des section d'ordre 2 au quotient. Pour $r = 18$ donc les seules possibilités sont les fibrations avec fibres réductibles $I_4 + I_{12}$ et $2I_8$.

Il nous restent les 4 fibrations de l'énoncé et on doit montrer l'existence de la section de 2-torsion. Pour cela, il suffit de montrer qui existe une courbe rationnelles sur la surface telle que elle coupe les fibres réductibles selon les règles qu'on a montré avant. Par exemple, pour la fibration sur $X_{(20,2,1)}$ avec fibres réductibles $I_4 + I_{16}$, on cherche une courbe qui coupe la fibre I_4 en la composante Θ_0 et la fibre I_{16} en Θ_8. On a décrit cette fibration dans la preuve du Théorème 4.3.1 et on a choisi la courbe $E_{P_{2,5}}$ comme section zero de la fibration. Par rapport à ce choix, la courbe $E_{A,2}$ est une section de 2-torsion, car elle coupe la fibre I_{16} en la composante Θ_8 et la fibre I_4 en Θ_0, comme désiré. Pareillement pour la fibration $\mathcal{E}_{19}$ avec fibres réductibles $I_2 + I_{16}$, la courbe $E_{A,2}$ est section de 2-torsion. Pour le cas $r = 18$, il s'avère que les deux fibrations possibles correspondent toutes les deux à $\delta = 0$ et donc l'existence d'une section de 2-torsion est déjà montrée dans [O].

Maintenant on veut voir quand les involutions de van Geemen-Sarti sont aussi des involutions de Morrison-Nikulin. Quand t est une section de 2-torsion qui coupe une fibre de type I_{16} en la composante Θ_8, [vGS] montrent que l'involution induite par la translation par rapport à t est une involution de Morrison-Nikulin. Donc l'involution de van Geemen-Sarti des cas $r = 19, 20$ est aussi une involution de Morrison-Nikulin.

Sur la surface $X_{(18,4,\delta)}, \delta = 0, 1$ il n'y a pas des involutions de Morrison-Nikulin. En effet si S est une surface K3 avec nombre de Picard 18, alors pour [Mo, Corollaire 6.4] la surface S admet une involution de Morrison-Nikulin si et seulement si le réseau trascendent T_S de S est isométrique à $U \oplus T'$, où T' est un réseau de rang 2. Mais la longueur d'un réseau isométrique à $U \oplus T'$ est au maximum 2 (c'est-à-dire au maximum la longueur maximale

de T') et dans notre cas la longueur du réseau trascendent de $X_{(18,4,\delta)}$ est 4. Donc il n'y a pas des involutions de Morrison-Nikulin sur la surface $X_{(18,4,\delta)}$ et en conséquence les deux involutions de van Geemen-Sarti de l'énoncé ne sont pas de type Morrison-Nikulin. □

Remarque 5.2.2 *Si $r = 18$ et $\delta = 1$, alors il y a au moins une fibration elliptique avec fibres réductibles $I_{12} + I_4$ (resp. $2I_8$) et il s'agit de la fibration montrée dans la preuve du Théorème 4.3.1. Cette fibration elliptique n'admet pas une section d'ordre 2 : en effet une $\mathbb{Z}$-base de la surface est donnée par $\mathcal{L}_4$, $E_{P_{2,4}}$, $\mathcal{L}_2$, $E_{P_{2,6}}$, $\mathcal{L}_6$, $E_{P_{3,6}}$, $\mathcal{L}_3$, $E_{A,3}$, E_A, $E_{A,1}$, $\mathcal{L}_1$, $E_{P_{1,4}}$, $\mathcal{L}_5$, E_B, $E_{B,5}$, $E_{P_{4,5}}$, E_{B_1} et E_{B_6}. Cela correspond au choix des composantes $\Theta_i, i = 1, \dots, 12$ de la fibre de type I_{12}, des composantes $\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2$ de la fibre de type I_4, de la section zero et de deux section d'ordre infini. S'il y avait une section d'ordre 2, alors l'ensemble des composantes de fibres réductibles, de la section zero et des section d'ordre infini est un ensemble de générateurs mais il n'est pas une $\mathbb{Z}$-base.*

C'est quand-même possible qu'il y ait une autre fibration elliptique sur $X_{(18,4,1)}$ avec fibres réductibles $I_{12} + I_4$ qui admet une section d'ordre 2. Le même arrive pour la fibration avec fibres réductibles $2I_8$.

Remarque 5.2.3 Soit $\mathcal{E}_r$ une des fibrations elliptiques de type a) pour $X_{(r,22-r,\delta)}$. Soit $P \in \mathrm{MW}(\mathcal{E}_r)$ une section de la fibration dont l'ordre est différent de 2. Alors il existe une involution symplectique α_P qui preserve la fibration mais qui n'est pas une involution de van Geemen-Sarti. On appelle β_P l'involution définie dans l'Exemple 2.4.14, c'est-à-dire l'involution que sur chaque fibre envoie le point Q sur $P - Q$ où P est l'intersection de la section et de la fibre.

Soit $\alpha_P := \iota\beta_P$. L'involution ι est induite par l'involution de recouvrement et n'agit que sur la base de la fibration ; au contraire β_P n'agit que sur les fibres et les deux fibrations commutent. Il s'agit de deux involutions non-symplectiques donc leur produit est une involution symplectique qui preserve $\mathcal{E}_r$.

Evidemment α_P n'est pas une translation par rapport à une section d'ordre 2 de la fibration $\mathcal{E}_r$, mais c'est quand-même possible qu'elle soit une involution de van Geemen-Sarti par rapport à une autre fibration elliptique (voir par exemple les Remarques 5.2.4 et 5.3.8).

Remarque 5.2.4 En [vGT, Section 3.4] les auteurs décrivent une involution de Morrison-Nikulin particulière ι sur la surface $X_{(19,3,1)}$ pour montrer une isogénie sur $\mathbb{Q}$ entre $X_{(19,3,1)}$ et le désingularisation de $X_{(19,3,1)}/\iota$. Dans le même travail c'est montré que ι agit sur la fibration elliptique avec fibres réductibles $I_{10} + I_8$ comme l'involution α_P décrite dans la Remarque 5.2.3. On montrera dans la Remarque 5.3.8 que cette involuton est une involution de van Geemen-Sarti par rapport à une autre fibration elliptique.

5.3 Involutions de van Geemen-Sarti, cas b)

Classifier les involutions de van Geemen-Sarti sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ pour le cas b) veut dire classifier toutes les section de 2-torsion des fibrations $\mathcal{E}_r$ sur ces surfaces et cela a été fait dans la Proposition 4.1.9.

De plus, toute involution de van Geemen-Sarti induit une isogénie entre la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ et son quotient par rapport à l'involution. Donc on décrira les quotients des surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ par les involutions de van Geemen-Sarti et on obtiendra ainsi des isogénies entre surfaces K3.

On montre d'abord ce fait sur un exemple et après on résume dans le Théorème 5.3.5 les résultats pour toute fibration de la Proposition 4.1.9.

Remarque 5.3.1 *On observe que ce n'est pas suffisant de connaître le type de fibres singulières de la fibration pour déterminer les intersections d'une section avec ces fibres. Par exemple dans [Kl] l'auteur montre explicitement une fibration elliptique sur $X_{(16,6,1)}$ ayante fibres réductibles $I_4^* + 6I_2$. Pour donner la fibration le diviseur nef qui l'induit est donné, donc les intersections des sections de 2-torsion avec les fibres réductibles sont données aussi. In [CD] les auteurs donnent eux-aussi un exemple de fibration sur $X_{(16,6,1)}$ ayante fibres réductibles $I_4^* + 6I_2$, mais si on compare les deux fibrations on se rend compte que les sections de 2-torsion ne rencontrent pas les fibres réductibles dans les mêmes composantes. Cela correspond au fait que dans le Tableau A.5 pour le cas 6) on a les deux possibilités 6a) et 6b). Ces deux configurations donnent donc deux involutions de van Geemen-Sarti différentes.*

C'est pour ça que dans les Tableaux A.1-A.9 on a montré les types des fibres singulières mais aussi les intersections de chaque section avec les fibres réductibles.

Remarque 5.3.2 *On observe que quand le groupe de Mordell-Weil de la fibration $\mathcal{E}_r$ est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ il y a 3 section d'ordres 2, qu'on appelle $t, u, t+u$ (la somme $+$ étant faite par rapport à la loi de composition du groupe de Mordell-Weil). Donc il y a 3 involutions de van Geemen-Sarti distinctes et on doit tenir compte de 3 différents quotients.*

Proposition 5.3.3 *Soit $X := X_{(19,3,1)}$ la surface K3 associée aux invariants $(r, a, \delta) = (19, 3, 1)$. Soit Y la surface de type K3 qui admet la fibration elliptique $\mathcal{E}_Y$ avec $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_Y) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ et fibres réductibles $2I_2^* + I_4 + 2I_2$. Alors il existe une 2-isogénie entre X et Y.*

Soient t' et u' deux sections d'ordre 2 de $\mathcal{E}_Y$. Alors t' et u' coupent les composantes suivantes des fibres réductibles :

$$t' : \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5;$$
$$u' : \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_0^5;$$

où on rappelle que Θ_j^i est la j-ème composante de la i-ème fibre réductibles. Le réseau trascendent de Y est $T_Y \simeq U(2) \oplus \langle 4 \rangle$ et la fibration elliptique $\mathcal{E}_Y$ a équation

$$w^2 = x(x + \tau(\tau-1)^2)(x + \tau(\tau^2 + 2\tau(1-2d) + 1)), \quad \tau \in \mathbb{P}^1,\ d \in \mathbb{C}. \tag{5.3.1}$$

Si on appelle $\sigma_{t'}$ l'involution induite par la translation par t', alors le quotient $Y/\sigma_{t'}$ est $X = X_{(19,3,1)}$ et l'isogénie entre Y et X est donnée par $(x, w) \mapsto (P(x, w, \tau), Q(x, w, \tau))$ avec

$$P(x,w,\tau) = \frac{\left(x^2 + 2\tau\left(\tau^2 - 2d\tau + 1\right)x + \tau^2(\tau-1)^2\left(\tau^2 + 2\tau(1-2d) + 1\right)\right)}{x};$$
$$Q(x,w,\tau) = \frac{w\left(x^2 - \tau^2(\tau-1)^2\left(\tau^2 + 2\tau(1-2d) + 1\right)\right)}{x^2}.$$

Avant de commencer la preuve on donne le résultat suivant, qui décrit en général les fibres réductibles qu'on aura au quotient. Pour le prouver, il suffit de regarder où la section d'ordre 2 coupe une fibre réductible.

Remarque 5.3.4 *Si F est une fibre de type I_{2k}, la désingularisation du quotient de F par rapport à la translation σ_t est une fibre de type I_k si t coupe la composante Θ_k de F, sinon si t coupe Θ_0, le quotient est une fibre de type I_{4k}. La désingularisation du quotient d'une fibre F de type I_1 par rapport à σ_t est une fibre de type I_2.*

Soit F une fibre réductible de type I_{2k}^* et soit t une section de 2-torsion de la fibration. Alors la désingularisation du quotient de F par rapport à σ_t est une fibre de type

I_k^* si t coupe soit la composante Θ_{2k+3} de F soit Θ_{2k+4}. Si t coupe la composante Θ_1, la désingularisation du quotient est une fibre de type I_{4k}^*.

Enfin, la désingularisation du quotient d'une fibre F de type III^* par rapport à σ_t est une fibre de type III^*.

Preuve de la Proposition . On sait grâce à la Proposition 4.1.9, Tableau A.2, cas 11), que la surface $X = X_{(19,3,1)}$ admet une fibration elliptique avec fibres réductibles $2I_4^* + I_2 + 2I_1$ et que le groupe de Mordell-Weil de cette fibration est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La section t d'ordre 2 de cette fibration coupe les fibres réductibles en les composantes $\Theta_7^1, \Theta_7^2, \Theta_0^3$ (voir Figure 5.2) donc, grâce à la Remarque 5.3.4, au quotient les fibres réductibles sont $2I_2^* + I_4 + 2I_2$.

Pour la Proposition 4.1.9 on sait que la fibration sur X n'a pas sections d'ordre infini et vu que le rang du groupe de Mordell-Weil est invariant par rapport à une isogénie, alors le groupe de Mordell-Weil $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_Y)$ de la fibration sur Y n'a pas sections d'ordre infini.

Si on consulte les Tableaux de [Sh], on voit que une fibration avec fibres réductibles $2I_2^* + I_4 + 2I_2$ et sans sections d'ordre infini a groupe de Mordell-Weil $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_Y) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Soient t' et u' deux générateurs de $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_Y)$. Vu que Y est obtenue comme quotient de X par rapport à la translation d'une section d'ordre 2, il faut que sur Y il y ait une section d'ordre 2, disons t', qui donne l'isogénie inverse, c'est-à-dire telle que le quotient par $\sigma_{t'}$ donne la fibration originale sur X. Donc t' coupe les fibres réductibles de $\mathcal{E}_Y$ en les composantes $\Theta_1^1, \Theta_1^2, \Theta_2^3, \Theta_1^4, \Theta_1^5$.

Grâce à la height formula (1.3.6) les autres deux sections d'ordres 2 coupent les fibres réductibles dans les composantes $\Theta_5^1, \Theta_5^2, \Theta_2^3, \Theta_0^4, \Theta_0^5$ et $\Theta_6^1, \Theta_6^2, \Theta_0^3, \Theta_1^4, \Theta_1^5$. Donc on peut supposer que u' soit comme dans l'énoncé.

On considère maintenant les classes

$$\begin{aligned} b_1 :=& (\Theta_5^1 + \Theta_6^1 + \Theta_5^2 + \Theta_6^2)/2, \\ b_2 :=& (\Theta_1^2 + \Theta_3^2 + \Theta_5^2 + \Theta_1^4)/2, \\ b_3 :=& (\Theta_5^1 + \Theta_6^1 + \Theta_1^4)/2 + (\Theta_1^3 + 2\Theta_2^3 + 3\Theta_3^3)/4. \end{aligned}$$

Il s'agit de générateurs du groupe discriminant de $\mathrm{NS}(Y)$, qui est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. La forme discriminante, calculée sur ces classes, est telle que

$$b_i^2 \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3 \text{ and } b_i b_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, i, j = 1, 2, 3. \tag{5.3.2}$$

La forme discriminante de T_Y est l'opposée de la fome de $\mathrm{NS}(Y)$ et donc ses générateurs satisfont la même propriété (5.3.2) et, de plus, $\mathrm{rang}(T_Y) = l(T_Y)$. Donc on peut conclure que $T_X \simeq L(2)$ pour un certain réseau pair L. Ce réseau L a signature $(2, 1)$ et groupe discriminant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, donc il satisfait [N3, Corollaire 1.13.3]. Ainsi L est isométrique à un seul réseau, c'est-à-dire $U \oplus \langle 2 \rangle$ et $T_Y \simeq U(2) \oplus \langle 4 \rangle$.

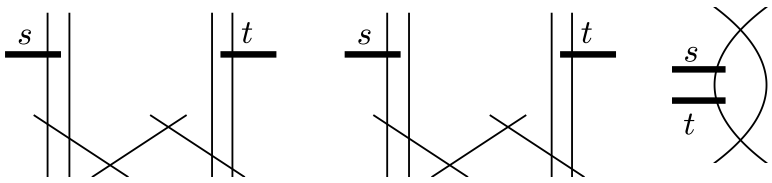


FIGURE 5.2 – Fibres de la fibration sur $X_{(19,3,1)}$

Tout ce qu'on vient de faire n'utilise pas l'équation explicite de la fibration sur $X_{(19,3,1)}$ donc avec la même méthode on peut trouver les fibrations quotient de toute fibration de la Proposition 4.1.9.

Maintenant on revient à notre cas spécifique et on rappelle que grâce à ce qu'on a vu dans la preuve du Théorème 4.4.9, l'équation

$$w^2 = x\left(x^2 - \tau\left(\tau^2 - 2d\tau + 1\right)x + \tau^4(d-1)^2\right) \tag{5.3.3}$$

induit une fibration elliptique sur $X_{(19,3,1)}$ avec fibres réductibles $2I_4^* + I_2 + 2I_1$. Il s'agit donc d'une courbe elliptique définie sur $\mathbb{C}(d)[\tau]$ et donc son quotient par rapport à la translation σ_t correspond au quotient de cette courbe elliptique par rapport au point de 2-torsion $(0,0)$. D'après [ST, pag. 79] et ce qu'on a vu dans la Section 2.3.1 on trouve l'équation de la fibration sur Y :

$$w^2 = x(x^2 - 2\tau(\tau^2 - 2d\tau + 1)x + \tau^2(\tau^2 - 2d\tau + 1)^2 - 4\tau^4(d-1)^2$$

et si on calcule on obtient l'équation (5.3.1).

Pareillement on trouve aussi la formule pour l'isogénie : il suffit d'adapter la formule qu'on trouve dans [ST, pag. 79] avec les valeurs de l'équation (5.3.1) pour trouver $P(x,w,\tau)$ et $Q(x,w,\tau)$. □

Avec les mêmes techniques utilisées pour prouver la Proposition 5.3.3 on prouve le Théorème suivant.

Théorème 5.3.5 *Les involutions de van Geemen-Sarti sur la surface $X_{(r,22-r,\delta)}$ pour le cas b), c'est-à-dire quand l'involution ι induite par l'involution de recouvrement est une involution de type b) (voir Exemple 2.4.13), sont les involutions induites par la translation par rapport aux section de 2-torsion classifiées dans la Proposition 4.1.9. Parmi ces involutions, les involutions qui sont aussi de type Morrison-Nikulin sont :*

- *l'involution σ_t pour $r = 20$ pour les cas 4), 6), 8) et 9) ;*
- *l'involution σ_t pour $r = 19$ pour les cas 8), 10b), 12) et 13) ;*
- *l'involution σ_u et l'involution σ_{t+u} pour $r = 20$ pour le cas 9).*

On resume dans les Tableaux de l'Annexe B les fibrations elliptiques qui sont obtenues au quotient. D'ailleurs, l'involution induite au quotient par l'involution ι agit comme l'identité sur le groupe de Néron-Severi dans les cas suivants :

- *$r = 20$: quotient par rapport à σ_t pour les cas 3) et 7) ;*
- *$r = 20$: quotient par rapport à σ_u et σ_{t+u} pour le cas 8) ;*
- *$r = 18$: quotient par rapport à σ_t pour les cas 5b), 6), 14b) 15) et 19) ;*
- *$r = 18$: quotient par rapport à σ_u pour les cas 12), 16), 18) et 19) ;*
- *$r = 18$: quotient par rapport à σ_{t+u} pour les cas 19 et 20a) ;*
- *$r = 16$: quotient par rapport à σ_t pour les cas 6b), 9b) et 11).*

Preuve. Pour la classification et l'existence de sections de 2-torsion pour les fibrations sur $X_{(r,22-r,\delta)}$ on renvoie à la Proposition 4.1.9 et à la Section 4.4. Grâce à la classification des sections de 2-torsion on obtient la classification complète des involutions de van Geemen-Sarti sur ces surfaces. Les propriétés des fibrations elliptiques au quotient sont montrées dans les Tableaux de l'Annexe B et la façon de les trouver est analogue à ce qu'on a fait dans la Proposition 5.3.3 : d'abord on calcule les fibres réductibles de la fibration $\mathcal{E}_r/\sigma_t$ en regardant où la section t coupe les fibres de $\mathcal{E}_r$. Ensuite on deduit la partie de torsion de $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_t)$ grâce aux résultats de [Sh] et au fait que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_t)$ et, comme dans la Proposition 5.3.3, on prouve que $\mathrm{rang}(\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_t)) = 0$.

Il y a 2 cas où cette analyse ne suffit pas à déterminer le groupe de Mordell-Weil de la fibration quotient : il s'agit du quotient par rapport à σ_t ou σ_u pour $r = 18$, cas 20a)

et du quotient par rapport à σ_t pour $r = 18$, cas 20b). Pour ces quotients le groupe de Mordell-Weil pourrait en principe être $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

On regarde $r = 18$, cas 20a). Grâce au Tableau de la Section 4.4.7 on sait qu'une équation de cette fibration elliptique $\mathcal{E}_{18}$ sur $X_{(18,4,1)}$ est

$$w^2 = x\left(x + \tau\left(g\tau + 1\right)\left(f + \tau\right)\right)\left(x + \tau^2\left(g + 1\right)\left(f + 1\right)\right)$$

d'où on calcule la fibration quotient $\mathcal{E}_{18}/\sigma_t$ qui a équation

$$w^2 = x\left(x^2 - 2\tau\left(2fg\tau + (1+\tau)\left(g\tau + f\right) + 2\tau\right)x + \tau^2\left(1-\tau\right)^2\left(g\tau - f\right)^2\right). \qquad (5.3.4)$$

Maintenant on utilise [GS2, Tableau 1] : ici les auteurs donnent des conditions sur l'équation d'une fibration elliptique pour qu'elle puisse avoir un certain groupe de Mordell-Weil. En particulier, pour qu'il y ait une section de 4-torsion, il faut que l'équation de la fibration soit de la forme

$$w^2 = x(x^2 + (E^2(\tau) - 2F(\tau))x + F^2(\tau))$$

avec $\deg(F) = 4$ et $\deg(E) = 2$. Ici l'équation (5.3.4) ne remplit pas les conditions et donc il ne peut pas y avoir une section de 4-torsion et on conclut que $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_t) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pareillement on trouve aussi que $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_u) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $r = 18$, cas 20a) et $\mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_t) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $r = 18$, cas 20b).

On veut voir quelles involutions de van Geemen-Sarti sont aussi de type Morrison-Nikulin. Dans la preuve de la Proposition 5.2.1 on a vu qu'il n'y a pas des involutions de Morrison-Nikulin sur la surface $X_{(18,4,\delta)}$ et le même raisonnement peut être utilisé pour montrer qu'il ne peut pas y avoir des involutions de type Morrison-Nikulin sur $X_{(17,5,1)}$. D'ailleurs, si le nombre de Picard d'une surface X de type K3 est inferieur ou égal à 16, alors X n'admet pas des involutions Morrison-Nikulin : cela est évident car la présence d'une involution de Morrison-Nikulin implique que $E_8 \oplus E_8$ est contenu dans le groupe de Néron-Severi de la surface. Donc ils restent seulement $r = 19, 20$.

Le groupe discriminant du réseau trascendent de $X_{(r,22-r,\delta)}$ est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{22-r}$ d'où, si σ_t est une involution de Morrison-Nikulin, le groupe discriminant du réseau trascendent de $\widetilde{\frac{X_{(r,22-r,\delta)}}{\sigma_t}}$ devrait être $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{22-r}$. Si on regarde les Tableau de l'Annexe B on voit que les seules possibilités sont :

— le quotient par σ_t pour $r = 20$, cas 4), 6), 8) et 9) ;
— le quotient par σ_t pour $r = 19$, cas 8), 10b), 12) et 13) ;
— le quotient par σ_u et σ_{t+u} pour $r = 20$, cas 9).

Maintenant on doit prouver que en tous ces cas on a $T_{X_{(r,22-r,\delta)}/\sigma_v} \simeq T_{X_{(r,22-r,\delta)}}(2)$ (v est la section concernée, c'est-à-dire soit $v = t$ soit $v = u$). Pour cela on peut calculer directement comme on a fait dans la Proposition 5.3.3 ou, pour $r = 20$, consulter [SZ, Tableau 2, Cas 137, 177, 188, 286].

Il reste à regarder quand l'involution induite au quotient par ι (l'involution de recouvrement sur $X_{(r,22-r,\delta)}$) agit comme l'identité sur le groupe de Néron-Severi. On appelle α cette involution, c'est-à-dire l'involution qui agit sur la fibration elliptique quotient.

L'involution α est une involution de type b) (voir Exemple 2.4.13). Si α agit trivialement sur le groupe de Néron-Severi du quotient, alors le groupe de Néron-Severi est 2-élémentaire et, grâce au Tableaux de l'Annexe B, on voit que les seuls quotients tels que le groupe de Néron-Severi soit 2-élémentaire sont les cas de l'enoncé.

On prend par exemple les cas 16b) pour $r = 16$. D'après l'Annexe B, la fibration au quotient a fibres singulières $I_8^* + 2I_2 + 6I_1$, le groupe de Mordell-Weil est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et la section de 2-torsion t' coupe les composantes de fibres réductibles $\Theta_{11}^1, \Theta_1^2$ et Θ_1^3. La fibration induite α fixe la section zero, la section de 2-torsion t' et la bisection b qui passe par les autres points

d'ordre 2 de chaque fibre. Vu que les points d'ordre 2 sont fixés, les composantes $\Theta_0^1, \Theta_1^1, \Theta_{11}^1$ et Θ_{12}^1 sont (globalement) preservées. Donc aussi la composante Θ_2^1 est preservée et les 2 points d'intersection $\Theta_0^1 \cap \Theta_2^1$ et $\Theta_1^1 \cap \Theta_2^1$ sont fixés. Or, une involution non-symplectique n'admet pas des points fixes isolés et on sait que la composante Θ_0^1 n'est pas fixée point par point car elle rencontre la section zero qui est fixe et le lieu fixe est lisse. Pareillement Θ_1^1 n'est pas fixée point par point et donc la composante Θ_2^1 est fixée. De la même façon on obtient que les composantes $\Theta_{2i}, i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont fixées.

Donc les courbes rationnelles fixées par α sont 7 : les deux sections (la section zero et t') et 5 composantes de la fibre de type I_8^*. De plus, α fixe la courbe b. Cette courbe a deux points (distincts) d'intersection avec les fibres lisses et elle coupe deux composantes de la fibre I_8^* (il s'agit de Θ_1^1 et Θ_{12}^1). La courbe b coupe aussi les deux composantes Θ_0, Θ_1 de chaque fibre I_2 et elle est tangente aux fibres I_1. Ainsi b coupe la ramification en 6 points distincts. Finalement b est recouvrement $2:1$ de $\mathbb{P}^1$ ramifié sur 6 points et donc, avec la formule de Riemann-Hurwitz (1.2.3), on trouve que b a genre égal à 2.

L'involution α fixes 7 courbes rationnelles et une courbe de genre 2 et donc elle agit comme l'identité sur le groupe de Néron-Severi si et seulement si le groupe de Néron-Severi est un réseau 2-élémentaire de rang 16 et longueur 2. Le groupe de Néron-Severi en question satisfait ces propriétés donc α agit comme l'identité.

La preuve est similaire pour tous les autres cas. □

Remarque 5.3.6 Le Théorème 5.3.5 donne explicitement une méthode pour obtenir les isogénies entre des surfaces qui admettent une involution non-symplectique qui agit trivialement sur le groupe de Néron-Severi. En particulier on a des isogénies entre $X_{(16,6,1)}$ et $X_{(16,4,1)}$, entre $X_{(16,6,1)}$ et $X_{(16,2,1)}$, entre $X_{(18,4,0)}$ et $X_{(18,2,1)}$, entre $X_{(18,4,1)}$ et $X_{(18,2,0)}$ et entre $X_{(18,4,0)}$ et $X_{(18,0,0)}$. De plus, il y a une isogénie d'ordre 2 entre $X_{(18,4,0)}$ et $X_{(18,4,1)}$ donnée par le quotient de la fibration elliptique du cas 15), pour $r = 18$ avec l'involution σ_t.

Remarque 5.3.7 L'équation explicite de la fibration sur $X_{(16,6,1)}$, cas 6b), peut être trouvée grâce à l'équation (4.4.5) et aux conditons sur les paramètres $A = 0$, $E = F = -1/2$, $H = -G$. L'équation est $w^2 = x(x^2 + a(\tau)x + b(\tau))$ avec

$$\begin{aligned} a := \;& (1-\tau)\left(8\tau\left(B + C\tau\right) + 2(1-\tau)\left(D + \tau(1 - 3B - 2C - 2D) + \tau^2(B + D - 1)\right)\right) \\ b := \;& 4\tau(B + C\tau)\left(1-\tau\right)^2\left(4G^2\tau(B + C\tau) + 2G(1-\tau)\left(D + \tau\left(1 - 3B - 2C - 2D\right) + \right.\right. \\ & \left.\left.\tau^2(B + D - 1)\right) + (1-\tau)^2\left(B + C - 1 + \tau\right)\right). \end{aligned}$$

Comme on a fait dans la Proposition 5.3.3, cela nous donne une expression explicite pour l'isogénie qui est décrite en [CD].

Remarque 5.3.8 Le Théorème 5.3.5 montre que pour $r = 19$, cas 10b) l'involution σ_t est une involution de type Morrison-Nikulin. C'est facile voir les deux copies de E_8 qui sont échangées par l'involution : une des deux est $\mathcal{L}_1$, $E_{A,1}$, E_A, $E_{A,2}$, $E_{A,3}$, $\mathcal{L}_3$, $E_{P_{3,6}}$, $\mathcal{L}_6$ et l'autre est $\mathcal{L}_4$, $E_{C,4}$, E_C, $E_{C,5}$, $E_{P_{2,5}}$, $\mathcal{L}_5$, $E_{B,5}$, E_B (voir Figure 5.3, $\mathcal{L}_3$ et E_C sont deux sections).

Cela montre que σ_t est l'involution de Morrison-Nikulin montrée en [vGT] : il faut identifier $\mathcal{L}_1$ avec $(x = 0)$, $\mathcal{L}_2$ avec $(x = -tz)$, $\mathcal{L}_3$ avec $(z = 0)$, $\mathcal{L}_4$ avec $(z = -1)$, $\mathcal{L}_5$ avec l_∞ et $\mathcal{L}_6$ avec $(x = -1)$ (on suit ici les notation de [vGT, Section 3.1]).

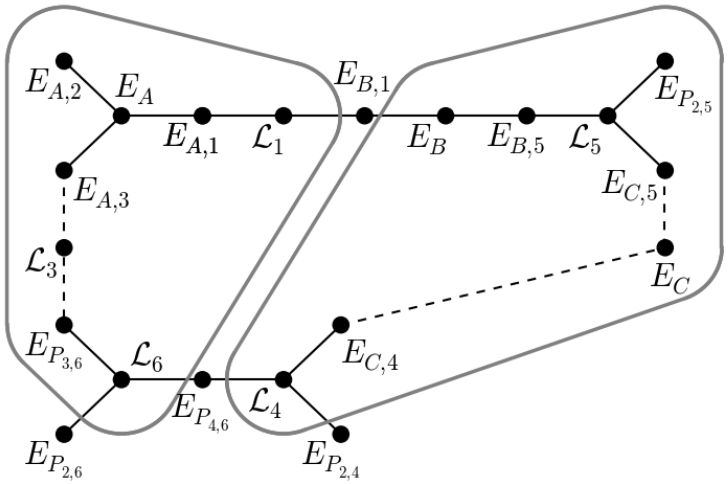


FIGURE 5.3 – Les deux copies de E_8 échangées

Deuxième partie

Symétrie miroir pour surfaces K3

Chapitre 6

La construction miroir de Berglund-Hübsch

Dans ce chapitre on presentera la construction miroir de Berglund-Hübsch, qui permet de construire des paires d'hypersurfaces dans certains espaces projectifs à poids. Les résultats de Chiodo-Ruan qu'on détaillera dans la suite vont montrer que pour $n \geq 3$ ces deux hypersurfaces sont en effet l'une miroir de l'autre en sens classique. Pour $n = 2$ l'équivalence entre symétrie de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan et symétrie miroir classique n'a été montrée que pour des classes de surfaces K3 particulières dans [ABS] et [CLPS].

6.1 Hypersurfaces dans des espaces projectifs à poids

Définition 6.1.1 *Soient $w_1, \ldots, w_n$ des entiers positifs, $n \geq 2$. On appelle* **espace projectif à poids** $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ *le quotient*

$$\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n) := \frac{\mathbb{C}^n - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$$

où l'action de $\mathbb{C}^*$ est donnée par

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_n} x_n).$$

Il s'agit d'un espace de dimension $n - 1$.

On suppose toujours que $\text{pgcd}(w_1, \ldots, w_n) = 1$ et on prend $\mathbb{P}(w_1 \ldots, w_n)$ **normalisé**, c'est-à-dire tel que

$$\text{pgcd}(w_1, \ldots, \widehat{w_i}, \ldots, w_n) = 1 \quad \forall i.$$

Soit P_i le point $(0 : \ldots : 0 : 1 : 0 : \ldots : 0)$ avec 1 en i-ème position. On rappelle la définition du **simplexe fondamental** Δ de l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, w_2, \ldots, w_n)$: Δ est défini comme étant l'union des hyperplanes $H_{1,2\ldots\hat{i}\ldots n}$ où l'hyperplane $H_{1,2\ldots\hat{i}\ldots n}$ est engendré par les points $P_1, P_2, \ldots, \hat{P}_i, \ldots P_k$..

D'après [I-F, 5.15], en général les espaces projectifs à poids sont singuliers et les singularités peuvent apparaître seulement sur Δ. Ainsi pour trouver les singularités de $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ on regarde d'abord les sommets P_i : le point P_i est une singularité cyclique quotient de type $\frac{1}{w_i}(w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, w_n)$ et elle peut ne pas être une singularité isolée car il se peut que tout point générique du côté P_iP_j soit singulier. En effet, chaque point générique P du segment P_iP_j peut avoir un voisinage où il correspond à une singularité de type $\frac{1}{g_{i,j}}(w_1, \ldots, \hat{w}_i, \ldots, \hat{w}_j, \ldots, w_n)$ avec $g_{i,j} = \text{pgcd}(w_i, w_j)$.

Exemple 6.1.2 *Si on prend par exemple l'espace projectif à poids* $\mathbb{P}(4,4,3,1)$ *on aura :*
- $P_1 = (1:0:0:0)$ *et* $P_2 = (0:1:0:0)$ *sont deux singularités de type* $\frac{1}{4}(0,3,1)$ *;*
- $P_3 = (0:0:1:0)$ *est une singularité de type* $\frac{1}{3}(1,1,1)$ *;*
- *chaque point générique du côté* P_1P_2 *est une singularité de type* $\frac{1}{4}(3,1)$.

Définition 6.1.3 *Un polynôme* $W \in \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ *est dit* **quasi-homogène de degré** d *dans* $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$ *si il est homogène en tenant compte des poids, c'est-à-dire si pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}^*$ *on a*

$$W(\lambda^{w_1}x_1,\dots,\lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d W(x_1,\dots,x_n).$$

L'entier d *est dit* **degré total** *du polynôme.*

Remarque 6.1.4 *Le polynôme* W *est souvent appelé* **potential** *dans la literature physique.*

Un polynôme quasi-homogène W donne une hypersurface de degré d en $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$ et on veut que $\{W=0\}$ soit well-formed et quasi-smooth :

Définition 6.1.5 *L'hypersurface* $\{W=0\}$ *est dite* **well-formed** *si pour tout* i,j

$$\mathrm{pgcd}(w_1,\dots,\widehat{w_i},\dots,\widehat{w_j},\dots,w_n) \text{ divise } d$$

et elle est dite **quasi-smooth** *si* W *est* **non-dégénérée**, *c'est-à-dire le cone affine est lisse en dehors de* $(0,\dots,0)$.

Remarque 6.1.6 *En effet grâce à [D, Proposition 6], si* $\dim W \geq 3$, *une hypersurface quasi-smooth* W *est automatiquement well-formed. Pour* $n=1,2$ *cele doit être verifié à la main : on a que, si* W *est un polynôme inversible dans un espace projectif à poids normalisé et l'hypersurface* W *est quasi-smooth et la condition Calabi-Yau est satisfaite, alors* W *est non-dégénérée (voir [ABS] et voir la suite pour la définition de Condition Calabi-Yau).*

Remarque 6.1.7 *On suppose que l'hypersurfaces* $\{W=0\} \subset \mathbb{P}(w_1,w_2,\dots,w_n)$ *soit quasi-smooth. Alors les singularités de* $\{W=0\}$ *viennent de l'action de* $\mathbb{C}^*$ *et donc il s'agit des sigularités cycliques quotient. Donc les seules singularités possibles pour* $\{W=0\}$ *sont héritées des singularités de* $\mathbb{P}(w_1,w_2,\dots,w_n)$. *On verra ça dans les détails dans l'Exemple 6.1.12.*

On choisit des polynôme W **de type Delsarte**, c'est-à-dire tels que le nombre de monômes est égal au nombre de variables (et donc il s'agit de polynômes de n monômes). Un polynôme de Delsarte peut s'écrire en la forme

$$W(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{i,j}} \tag{6.1.1}$$

et on peut appliquer un changement de variables pour obtenir $c_i = 1,\ i = 1,\dots,n$. Grâce à ça, on associe à W la **matrice des exposants** $A_W := (a_{i,j})_{i,j}$. Il s'agit d'une matrice carrée de taille n qui présente sur la ligne i-ème les exposants du i-ème monôme.

On dira que W est **inversible** si la matrice A_W est inversible sur $\mathbb{Q}$. Si la matrice A_W est inversible, on note $A_W^{-1} = (a^{i,j})_{i,j}$ son inverse.

Définition 6.1.8 *On définit les* **charges** q_i *:*

$$q_i := \sum_{j=1}^{n} a^{i,j}$$

c'est-à-dire la charge i*-ème est la somme des entrées de la ligne* i*-ème de* A_W^{-1}.

On a donc les propriétés suivantes :

Lemme 6.1.9 *Soit A_W la matrice des exposants d'un polynôme quasi-homogène inversible W de degré d dans $\mathbb{P}(w_1,\ldots,w_n)$. Alors on a $w_i = dq_i$ pour tout $i = 1,\ldots,n$ et*

$$A_W \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.1.2}$$

Preuve. La preuve est immédiate. □

Un théorème de Kreuzer et Skarke établit un important critère pour déterminer si un polynôme est non-dégénéré et inversible.

Théorème 6.1.10 (voir [KrSk, Théorème 1]) *Un polynôme quasi-homogène W est non-dégénéré et inversible si et seulement si W est somme de polynômes des 3 types suivants (dits* **types atomiques***) :*

$$\begin{array}{lcl} W_{Fermat} & = & x^a \\ W_{chain} & = & x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \ldots + x_m^{a_m} \\ W_{loop} & = & x_1^{a_1}x_2 + x_2^{a_2}x_3 + \ldots + x_m^{a_m}x_1 \end{array}$$

avec $a, a_i \in \mathbb{N}$ et $a, a_i > 1$.

Exemple 6.1.11 *On prend le polynôme $W = x_1^3 + x_2^3 + x_3^4 + x_2x_4^8$, qui est un polynôme quasi-homogène dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(4,4,3,1)$. Il s'agit d'un polynôme qui est somme des types atomiques et qui est non-dégénéré, car le vecteur des derivées est le suivant :*

$$(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{x_4}) = (3x_1^2, 3x_2^2 + x_4^8, 4x_3^3, 8x_2x_4^7)$$

et il s'annulle juste en $(0,0,0,0)$.

En effet la matrice associée est la matrice A_W qui est inversible, avec inverse A_W^{-1}.

$$A_W = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Dans ce cas le degré total est $d = 12$ et le vecteur de charges est

$$q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{12}\right)$$

Par contre, si on prend par exemple le polynôme $R := x_1^3 + x_2^3 + x_1^2x_2 + x_3^3x_4^3$ dans $\mathbb{P}(4,4,3,1)$, il n'est pas somme des types atomiques montrés dans le Théorème 6.1.10 et en effet la matrice associée à ce polynôme est

$$A_R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas inversible.

Exemple 6.1.12 *On veut voir les singularités de l'hypersurface* $\{W = 0\} \subset \mathbb{P}(4,4,3,1)$ *avec* $W = x_1^3 + x_2^3 + x_3^4 + x_2x_4^8$. *On a vu dans l'exemple précédent que* W *donne une hypersurface non-dégénérée et quasi-smooth donc, grâce à la Remarque 6.1.7, les possibles singularités de* $\{W = 0\}$ *sont les singularités de* $\mathbb{P}(4,4,3,1)$, *qu'on a montré dans l'Exemple 6.1.2. Les sommets* P_1, P_2 *et* P_3 *n'appartiennent pas à l'hypersurface* $\{W = 0\}$, *donc il reste à regarder les points du côté* P_1P_2. *Cela correspond aux* $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ *tels que* $x_3 = x_4 = 0$ *et donc*

$$\begin{aligned} P_1P_2 \cap \{W = 0\} &= \{(x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \in \mathbb{P}(4,4,3,1) : x_1^3 + x_2^3 = 0\} \\ &= \{(\xi_6^i : 1 : 0 : 0) : i = 1,3,5\} \end{aligned}$$

avec ξ_6 *une racine sixième de l'unité.*

En conclusion, les singularités de $\{W = 0\}$ *sont les 3 points* $(\xi_6^i : 1 : 0 : 0)$ *avec* $i = 1,3,5$, *et elles correspondent à 3 singularités de Du Val de type* A_3.

On utilisera beaucoup ces techniques dans la suite, pour trouver les singularités des hypersurfaces données par des polynômes de type Delsarte.

On s'intéresse maintenant à certaines symétries du polynôme inversible W. L'idée d'associer au polynôme W des groupes d'automorphismes a eté l'objet des deux travaux indépendants de Berglund et Henningson [BHe] et Krawitz [Kra]. On suit ici et dans la suite les définitions de Krawitz.

Définition 6.1.13 *Soit* W *un polynôme inversible dans* $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$. *On appelle* **groupe des automorphismes diagonaux de** W *le groupe*

$$G_W := \{(c_1, \ldots, c_n) \in (\mathbb{C}^*)^n : W(c_1x_1, c_2x_2, \ldots, c_nx_n) = W(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}.$$

Si $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ appartient à G_W, alors les c_i doivent être des racines de l'unité et cela permet d'écrire les éléments de G_W sous la forme additive :

$$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n) = (e^{2\pi i g_1}, e^{2\pi i g_2}, \ldots, e^{2\pi i g_n})$$

et donc on associe à c le point $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$. On identifie c avec

$$g = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$$

qui on considère donc comme un élément de G_W (en notation additive). Pour tout $i = 1, \ldots, n$ on doit avoir

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} g_j \in \mathbb{Z}$$

et cela correspond au fait que g soit dans le $\mathbb{Z}$-span des colonnes de A_W^{-1}. Alors G_W est engendré par les colonnes de A_W^{-1} et on a donc le Lemme 6.1.14 (voir [Kra]).

Lemme 6.1.14 *Soit* G_W *le groupe d'automorphismes diagonaux associés au polynôme* W. *Alors*

$$|G_W| = \det(A_W).$$

Un élément spécial de G_W est $j_W := (q_1, q_2, \ldots, q_n) = (\frac{w_1}{d}, \frac{w_2}{d}, \ldots, \frac{w_n}{d})$ et on appelle J_W le groupe cyclique engendré par j_W, c'est-à-dire $J_W = \langle j_W \rangle$. Le groupe J_W a ordre d.

De plus, si on pense à $c \in G_W$ de la forme multiplicative, on peut lui associer une matrice diagonale qui a les c_i sur la diagonale principale et 0 ailleurs. Alors on définit

$$\mathrm{SL}_W := G_W \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}).$$

En notation additive, les éléments de SL_W sont les $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G_W$ tels que $\sum_{i=1}^n g_i \in \mathbb{Z}$.

On considerera les paires (W, G), où W est un polynôme quasi-homogène inversible et G est un groupe d'automorphismes diagonaux $G \subset G_W$. A partir de cette paire on veut obtenir des variétés de Calabi-Yau.

Définition 6.1.15 *Une varieté X de dimension m est dite* **variété de Calabi-Yau** *si X a singularités canoniques, son faisceau canonique K_X est trivial et*

$$\dim H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 \qquad 1 \leq i \leq m-1.$$

La condition pour que l'hypersurface $\{W = 0\} \subset \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ soit une variété de Calabi-Yau est la suivante (voir [CGo, Lemme 1.12]) :

Lemme 6.1.16 *Soit W une hypersurface well-formed et quasi-smooth dans $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$. Alors W est une variété de Calabi-Yau si et seulement si*

$$d = \sum_{i=1}^n w_i \tag{6.1.3}$$

Lemme 6.1.17 *Si W est Calabi-Yau, alors $j_W \in \mathrm{SL}_W$ et $J_W \subset \mathrm{SL}_W$.*

Preuve. Clairement, si (6.1.3) vaut, alors $\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{d} = 1$ et donc $j_W \in \mathrm{SL}_W$ et comme conséquence tout le groupe cyclique J_W est contenu dans SL_W. □

Remarque 6.1.18 *En effet j_W agit trivialement sur l'espace projectif à poids car*

$$j_W : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_n} x_n)$$

avec $\lambda = e^{\frac{2\pi i}{d}}$.

Pour obtenir des variété Calabi-Yau à partir de (W, G) on impose la condition suivant :
Condition Calabi-Yau : on dit que la paire (W, G) satisfait la condition Calabi-Yau si les deux faits suivants sont verifiés :

i) $\sum_{i=1}^n w_i = d$;

ii) $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$.

Dans la prochaine section on se concentre sur les surfaces K3, qui sont les seules variétés de Calabi-Yau de dimension 2 et on montre comment les obtenir à partir de (W, G).

6.2 Obtenir des surfaces K3

Soit (W, G), avec W polynôme quasi-homogène, inversible et non-dégénéré dans l'esapce projectif à poids normalisé $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$. On suppose aussi que la condition Calabi-Yau soit satisfaite.

Ces hypothèses nous permettent de considerer l'hypersurface $\{W = 0\}$ de degré d dans $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$, que dorénavant on appelle Y_W. Vu que W est non-dégénéré, alors Y_W est quasi-smooth.

Remarque 6.2.1 *Dire que Y_W est quasi-smooth signifie en particulier que les seules singularités que Y_W peut avoir sont induites par les singularités de $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$.*

Les résultats qui nous assurent comment obtenir des surfaces K3 sont résultat de deux travaux indépendants de Reid (non publié mais voir [I-F]) et Yonemura [Y]. Ces auteurs indiquent une liste de 95 systèmes de poids (w_1, w_2, w_3, w_4) tels que l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ admette une hypersurface de degré $d = \sum w_i$ dont la résolution minimale est une surface K3. Les 95 systèmes de poids sont appellés **les 95 familles** et sont montrés dans le Tableau 6.1. La numération suit [Y]. Dans le tableau, on note les poids dans la forme $(w_1, w_2, w_3, w_4; d)$ en ordre décrescent et avec le degré total $d = \sum w_i$.

1)	(1,1,1,1 ;4)	33)	(9,4,3,2 ;18)	65)	(14,11,5,3 ;33)
2)	(4,3,3,2 ;12)	34)	(15,7,6,2 ;30)	66)	(3,2,1,1 ;7)
3)	(2,2,1,1 ;6)	35)	(14,7,4,3 ;28)	67)	(9,7,3,2 ;21)
4)	(4,4,3,1 ;12)	36)	(10,5,3,2 ;20)	68)	(13,10,4,3 ;30)
5)	(3,1,1,1 ;6)	37)	(8,4,3,1 ;16)	69)	(7,4,3,2 ;16)
6)	(5,2,2,1 ;10)	38)	(15,8,6,1 ;30)	70)	(8,5,3,2 ;18)
7)	(4,2,1,1 ;8)	39)	(9,5,3,1 ;18)	71)	(4,7,3,1 ;15)
8)	(6,3,2,1 ;12)	40)	(7,4,2,1 ;14)	72)	(7,5,2,1 ;15)
9)	(10,5,4,1 ;20)	41)	(12,7,3,2 ;24)	73)	(25,10,8,7 ;50)
10)	(6,4,1,1 ;12)	42)	(5,3,1,1 ;10)	74)	(16,7,5,4 ;32)
11)	(15,10,3,2 ;30)	43)	(18,11,4,3 ;36)	75)	(11,5,4,2 ;22)
12)	(9,6,2,1 ;18)	44)	(8,5,2,1 ;16)	76)	(13,6,5,2 ;26)
13)	(12,8,3,1 ;24)	45)	(14,9,4,1 ;28)	77)	(13,7,5,1 ;26)
14)	(21,14,6,1 ;42)	46)	(33,22,6,5 ;66)	78)	(11,6,4,1 ;22)
15)	(5,4,3,3 ;15)	47)	(21,14,4,3 ;42)	79)	(16,9,5,2 ;32)
16)	(8,7,6,3 ;24)	48)	(24,16,5,3 ;48)	80)	(22,13,5,4 ;44)
17)	(5,5,3,2 ;15)	49)	(21,14,5,2 ;42)	81)	(13,8,3,2 ;26)
18)	(3,3,2,1 ;9)	50)	(15,10,4,1 ;30)	82)	(11,7,3,1 ;22)
19)	(3,2,2,1 ;8)	51)	(18,12,5,1 ;36)	83)	(27,18,5,4 ;54)
20)	(9,8,6,1 ;24)	52)	(12,9,8,7 ;36)	84)	(9,7,6,5 ;27)
21)	(2,1,1,1 ;5)	53)	(6,5,4,3 ;18)	85)	(5,4,3,2 ;14)
22)	(6,5,3,1 ;15)	54)	(7,6,5,3 ;21)	86)	(9,7,5,4 ;25)
23)	(5,3,2,2 ;12)	55)	(7,6,5,2 ;20)	87)	(5,4,3,1 ;13)
24)	(5,4,2,1 ;12)	56)	(11,8,6,5 ;30)	88)	(11,9,5,2 ;27)
25)	(4,3,1,1 ;9)	57)	(9,6,5,4 ;24)	89)	(5,3,2,1 ;11)
26)	(9,5,4,2 ;20)	58)	(6,5,4,1 ;16)	90)	(17,7,6,4 ;34)
27)	(11,8,3,2 ;24)	59)	(8,7,5,1 ;21)	91)	(19,8,6,5 ;38)
28)	(10,7,3,1 ;21)	60)	(7,6,4,1 ;18)	92)	(19,11,5,3, ;38)
29)	(15,6,5,4 ;30)	61)	(11,7,6,4 ;28)	93)	(17,10,4,3 ;34)
30)	(20,8,7,5 ;40)	62)	(8,5,4,3 ;20)	94)	(7,5,4,3 ;19)
31)	(12,5,4,3 ;24)	63)	(4,3,2,1 ;10)	95)	(7,5,3,2 ;17)
32)	(7,3,2,2 ;14)	64)	(10,7,4,3 ;24)		

Tableau 6.1 – Les 95 familles

Remarque 6.2.2 *On observe que tous les systèmes des poids du Tableaux 6.1 donnent des espaces projectifs à poids normalisés.*

De plus, grâce à [CGo, Théorème 1.13], l'hypersurface générale de degré d de $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ est well-formed quand les poids font partie des 95 familles.

Encore grâce à [CGo, Lemme 1.12], toute hypersurface quasi-smooth et well-formed de $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ de degré $d = \sum w_i$ admet une surface K3 comme résolution minimale.

En conclusion, quand on prend W un polynôme quasi-homogène, inversible et non-dégénéré dans $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ de degré $d = \sum w_i$ et (w_1, w_2, w_3, w_4) est un des systèmes de poids des 95 familles, alors la résolution minimale de Y_W, qu'on appelle X_W, est une surface K3.

Maintenant on considère l'action de G_W sur X_W. Le groupe G_W agit sur Y_W et on étend ça à X_W, donc X_W a un espace d'automorphismes diagonaux qui agissent sur lui. Un résultat classique (voir e.g. [ABS]) donne un critère pour voir quels automorphismes diagonaux sont symplectiques :

Proposition 6.2.3 (voir [ABS, Prop. 1]) *Un automorphisme $\sigma \in G_W$ de X_W est symplectique si et seulement si* $\det(\sigma) = 1$*, ou équivalentement si $\sigma \in \mathrm{SL}_W$.*

Le long de toutes les prochaines sections on voudra considerer des polynômes W de la forme suivante :

$$W = x_1^p + f(x_2, x_3, x_4) \tag{6.2.1}$$

avec p premier et $f \in \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4]$.

Dans ce cas on voit tout de suite qu'il y a un automorphisme diagonal

$$\sigma_p : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \mapsto (\xi_p x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$$

où ξ_p est une racine p-ième de l'unité. Cet automorphisme est dans G_W et il s'écrit dans la forme additive $\sigma_p = (\frac{1}{p}, 0, 0, 0)$. La Proposition 6.2.3 dit donc qu'il s'agit d'un automorphisme non-symplectique. En conclusion, quand W est de la forme (6.2.1), on obtient une surface X_W de type K3 et on a aussi un automorphisme non-symplectique d'ordre premier p.

On prend le paire (W, G) qui satisfait la condition Calabi-Yau ; maintenant on considère le groupe G et on obtient des autres surfaces K3 en prenant les quotients.

Grâce à la condition Calabi-Yau on a que $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$ et donc le groupe $\widetilde{G} := G/J_W$ agit de manière symplectique sur la surface X_W. On prend alors la résolution minimale du quotient $X_W/\widetilde{G}$ et on appelle $X_{W,G}$ cette surface. Il s'agit encore d'une surface K3. L'automorphisme σ_p vu avant passe au quotient (car G_W est abélien) et donc on a aussi sur $X_{W,G}$ un automorphisme non-symplectique d'ordre p. On l'appelle toujours σ_p s'il n'y a pas de la confusion.

Remarque 6.2.4 *La surface X_W est X_{W,J_W}, c'est-à-dire elle correspond au choix $G = J_W$.*

Dans la suite l'objet de notre travail seront ces surfaces $X_{W,G}$ de type K3, avec W polynôme de la forme (6.2.1) et qui admettent un automorphisme d'ordre p de la forme $\sigma_p = (\frac{1}{p}, 0, 0, 0)$ avec p premier.

6.3 La classification des K3 admissibles

On veut d'abord classifier toutes les possibilités de K3 de type $X_{W,G}$ qu'on peut obtenir à partir d'un espace $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ avec un système de poids (w_1, w_2, w_3, w_4) qui fait partie des 95 familles et de la paire (W, G) qui satisfait la condition Calabi-Yau. On prend toujours le polynôme W de la forme (6.2.1), de façon que il y a un automorphisme non-symplectique σ_p d'ordre premier p de la forme $\sigma_p = (\frac{1}{p}, 0, 0, 0)$.

Le Lemme 2.4.6 assure que $p \leq 19$. D'ailleurs, des calculs explicits montrent qu'il y a des systèmes de poids qui ne donnent pas des polynômes de la forme souhaitée. On verra le type des calculs à faire dans le détails dans les Exemples 6.3.5, 6.3.6 et 6.3.7 ; on peut en conclure que il y a seulement 69 des 95 systèmes de poids qui admettent un polynôme quasi-homogène et inversible de la forme (6.2.1) avec $p = 2, 3, 5, 7, 13$.

Remarque 6.3.1 *Il n' y a pas des poids qui donnent des polynômes de la forme souhaitée avec $p = 11, 17, 19$. Pour $p = 13$ il y a un seule polynôme possible (voir l'Exemple 6.3.7).*

Le cas $p = 2$ a déjà été traité dans [ABS] donc on se concentre sur $p \neq 2$ et ils restent 41 systèmes de poids.

Les Tableaux C.1-C.4 dans l'Annexe C contiennent tous les polynômes possibles qui soient quasi-homogènes et inversibles et de la forme (6.2.1) et qui satisfassent la Condition Calabi-Yau. Ils sont rangés selon l'ordre de l'automorphisme σ_p.

Avant de montrer les exemples, il y a certaines remarques à faire.

Remarque 6.3.2 Soit W de la forme (6.2.1). Alors pour le polynôme $f \in \mathbb{C}[x_2, x_3, x_4]$, d'après le Théorème 6.1.10 on a cinq possibilités :

$$f(x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} x_2^a + x_3^b + x_4^c & \text{(Fermat)} \\ x_2^a x_3 + x_3^b x_4 + x_4^c & \text{(chain)} \\ x_2^a x_3 + x_3^b x_4 + x_4^c x_2 & \text{(loop)} \\ x_2^a x_3 + x_3^b + x_4^c & \text{(chain+Fermat)} \\ x_2^a x_3 + x_3^b x_2 + x_4^c & \text{(loop+Fermat)} \end{cases}$$

pour certains $a, b, c \in \mathbb{N}, a, b, c > 1$.

Remarque 6.3.3 On suppose que W soit de la forme (6.2.1). Alors, vu que W est quasi-homogène de degré total d, on aura $pw_1 = d$. On observe que en général on peut operer une permutation des variables $x_i \leftrightarrow x_j$ pour voir s'il y a d'autres poids w_j qui satisfont $pw_j = d$ et pourront en principe nous donner des polynômes differents de la forme $W' = x_j^q + g$ avec un automorphisme d'ordre $q \neq p$. On remarque donc que c'est possible que, une fois qu'on choisit un système de poids, on trouve plusieurs polynômes possibles avec des automorphismes diagonaux d'ordres differents (voir l'Exemple 6.3.6).

Remarque 6.3.4 Certains polynômes apparaissent dans plus d'un tableau. Il s'agit de polynômes qui admettent des automorphismes σ_p et σ_q pour deux premiers p et q différents.

Pour obtenir la liste des polynômes admissible qui est contenue dans les Tableaux C.1-C.4 on agit comme il est montré dans les exemples suivants.

Exemple 6.3.5 On prend le système de poids $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (4, 4, 3, 1)$ qui apparait dans la liste de 95 familles de Reid et Yonemura. On cherche un polynôme quasi-homogène de la forme (6.2.1) avec $p \in \{3, 5, 7, 13\}$ et de degré total $d = \sum w_i = 12$. La seule possibilité est $p = 3$ et donc la forme de notre polynôme sera

$$W = x_1^3 + f(x_2, x_3, x_4).$$

On a les possibilités pour f montrées dans la Remarque 6.3.2 et, toujours en rappellant que le polynôme W doit être quasi-homogène, on résout des systèmes linéaires pour trouver les possibles polynômes f. On trouve plusieurs polynômes :

$$\begin{aligned} f_1 =& x_2^3 + x_3^4 + x_4^{12} \\ f_2 =& x_2^3 + x_3^4 + x_3 x_4^9 \\ f_3 =& x_2^3 + x_3^4 + x_2 x_4^8 \end{aligned}$$

Le premier cas est un polynôme de type *Fermat*, tandis que les autres sont de type *chain+Fermat*.

Exemple 6.3.6 On prend maintenant le système de poids $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (5, 4, 3, 3)$. Le degré total des polynômes qu'on cherche est ici $d = \sum w_i = 15$. Comme dans l'exemple précédent, on cherche pour quels p il peut y avoir un polynôme de la forme (6.2.1). Vu que $d = 15$, cela est possible pour $p = 3$ ou $p = 5$. On commence par $p = 3$. Les possibilités pour W sont les suivantes :

$$\begin{aligned} W_1 =& x_1^3 + x_2^3 x_3 + x_3^4 x_4 + x_4^5 \\ W_2 =& x_1^3 + x_2^3 x_3 + x_3^5 + x_4^5 \end{aligned}$$

Pour ces polynômes l'automorphisme non-symplectique associé à la surface K3 est $\sigma_3 = (\frac{1}{3}, 0, 0, 0)$.

On passe à $p = 5$ et on trouve que le poids w_j associé au monôme x_j^5 doit être 3. Alors on considère $x_1 \leftrightarrow x_4$ et on trouve le polynôme $x_1^3 + x_2^3 x_3 + x_3^5 + x_4^5$, c'est-à-dire on trouve à nouveau W_2. Donc la surface donnée par ce polynôme admet aussi un automorphisme d'ordre 5 qui est $\sigma_5 = (0, 0, 0, \frac{1}{5})$.

En conclusion, le polynôme W_2 apparait dans le Tableau C.1 pour $p = 3$ et aussi dans le Tableau C.2 pour $p = 5$.

Exemple 6.3.7 On prend le système de poids $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (5, 3, 2, 1)$ et on cherche un polynôme W de degré total $d = \sum w_i = 11$ de la forme (6.2.1) associé à ce système de poids. Vu que le polynôme doit avoir degré total égal à 11, le monôme x_i^p sera associé au poid 1 et W sera de la forme

$$x_4^{11} + f(x_1, x_2, x_3).$$

Les autres poids ne divisent pas 11 donc f ne peut pas être de type *Fermat*, ni *chain*, ni *chain+Fermat*, ni *loop+Fermat*, car dans ces 4 cas il y a au moins un autre monôme x_i^a et cela est impossible ici. Donc il reste à verifier si on trouve un polynôme f de type *loop*

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^a x_2 + x_2^b x_3 + x_3^c x_4.$$

Si les poids sont associés aux variables (x_1, x_2, x_3) dans l'ordre $(5, 3, 2)$, alors, pour que le polynôme W soit quasi-homogène de degré total 11, on doit avoir

$$\begin{cases} 5a + 3 &= 11 \\ 3b + 2 &= 11 \\ 2c + 5 &= 11 \end{cases}$$

avec $a, b, c \in \mathbb{N}, a, b, c > 1$ et ce système n'a pas des solutions. Également, si l'ordre des poids est $(5, 2, 3)$, on cherche des exposants a, b, c qui satisfont

$$\begin{cases} 5a + 2 &= 11 \\ 2b + 3 &= 11 \\ 3c + 5 &= 11 \end{cases}$$

et ce système non plus a des solutions $a, b, c \in \mathbb{N}, a, b, c > 1$.

Donc au final il n'y a pas des polynômes quasi-homogènes de la forme (6.2.1) associés au système de poids $(5, 3, 2, 1)$ de degré total $d = \sum w_i = 11$. On utilise la même technique pour montrer qu'il n'y a pas des polynômes de la forme (6.2.1) associés aux ordres $p = 11, 17, 19$.

Chapitre 7

La symétrie miroir

Ils existent différentes formulations de la notion de symétrie miroir pour surfaces K3, c'est-à-dire pour les variétés de Calabi-Yau de dimension 2. On montrera ici deux définitions de symétrie miroir qui s'appliquent, en différentes manières, aux surfaces K3 qu'on a construit dans le Chapitre 6.

La symétrie miroir LPK3 (*lattice polarized K3*) est introduite pour la première fois par Dolgachev et Nikulin dans [DN] et indépendamment par Pinkham dans [Pi]. Il s'agit de la symétrie miroir classique pour surfaces K3 polarisées et est établie entre familles de surfaces K3. Si on prend l'espace des modules des surfaces K3 polarisées par un réseau M avec certaines propriétés, la construction donne une famille de surfaces K3 miroir de dimension $20 - \mathrm{rang}(M)$ et les membres de cette famille sont encore des K3 polarisées par un réseau M', determiné par M. On verra dans la Section 7.2 quel est le meilleur choix pour polariser les surfaces K3 qu'on a déjà construit.

La construction miroir de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan (BHCR), par contre, donne des paires de variétés de Calabi-Yau de dimension quelconque et un théorème de Chiodo-Ruan dans [CR] montre que les deux variétés sont miroir l'une de l'autre dans le sens classique (on a par exemple la symétrie des diamants de Hodge). On verra comment appliquer ce résultat au cas de nos surfaces K3 dans la Section 7.1.

Les résultats de ce Chapitre sont l'objet de la prépublication [CLPS].

On signale aussi une troisième construction miroir due à Batyrev (voir [Ba]) : grâce à l'aide de la géométrie torique, en 1994 l'auteur a montré comment construir des paires de familles de variétés de Calabi-Yau miroir. Cette dernière construction sera le sujet du Chapitre 8.

7.1 Symétrie miroir BHCR

On suppose d'avoir une paire (W, G) avec un polynôme

$$W = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{i,j}}$$

quasi-homogène de type Delsarte dans $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$, de degré total d, qui soit inversible et non-dégénéré et qui donne une hypersurface quasi-smooth $\{W = 0\} \subset \mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ de dimension $n - 2$. Au polynôme W on a associé la matrice $A_W = (a_{i,j})$. On suppose aussi que la condition Calabi-Yau vaut pour la paire (W, G), c'est-à-dire $d = \sum_i w_i$ et $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$.

Pour construire une paire miroir (W^T, G^T) on prend le polynôme $W^T := \sum_i \prod_j x_j^{a_{j,i}}$, qui est le polynôme associé à la matrice transposée

$$(A_W)^T = (a_{j,i})_{i,j}.$$

Ce polynôme est quasi-homogène dans l'espace projectif a poids $\mathbb{P}(w_1^T, \ldots, w_n^T)$ et soit d^T son degré total. Le polynôme W^T est toujours de type Delsarte et il est non-dégénéré grâce au Théorème 6.1.10. De plus, on a

$$\sum_i w_i^T = d^T.$$

Pour le groupe G^T on prend la définition de Krawitz (voir [Kra]) :

$$G^T := \{g \in G_{W^T} : gA_W h \in \mathbb{Z} \text{ pour tout } h \in G\}.$$

Le groupe transposé G^T satisfait les propriétés suivantes :

Proposition 7.1.1 (voir [ABS, Proposition 3]) *Soit G^T le groupe transposé de G comme avant. Alors on a*

- $(G^T)^T = G$;
- $(J_W)^T = \mathrm{SL}_{W^T}$ *et* $(\mathrm{SL}_W)^T = J_{W^T}$;
- *si $G_1 \subset G_2$, alors $G_2^T \subset G_1^T$;*
- $(G_W)^T$ *est le groupe trivial.*

En particulier, si (W, G) satisfait la condition Calabi-Yau, pour le groupe transposé il vaut

$$J_{W^T} \subset G^T \subset \mathrm{SL}_{W^T}.$$

Donc au final on a construit une paire (W^T, G^T) qui satisfait elle aussi la condition Calabi-Yau.

Remarque 7.1.2 *Une autre façon de voir le groupe G est la suivante : soient $g = (g_1, \ldots, g_n) \in G_W$ et $h = (h_1, \ldots h_n) \in G_{W^T}$. On considère le couplage*

$$G_W \times G_{W^T} \to \mathbb{C}^*$$

qui envoie (g, h) sur $gA_W h^T$. Il s'agit d'un couplage non-dégénéré et à $G \subset G_W$ on peut associer son orthogonal à gauche ${}^{\perp}G$. Ce groupe est le groupe G^T donné par Krawitz.

L'importance de la définition de paire miroir qu'on vient de donner est due au Théorème suivant, qui dit que les deux orbifold $[\{W = 0\}/\tilde{G}]$ et $[\{W^T = 0\}/\tilde{G}^T]$, associés a (W, G) et (W^T, G^T), sont miroir l'un de l'autre en sens classique. Le Théorème est du a Chiodo et Ruan.

Théorème 7.1.3 ([CR, Théorème 2]) *Soit (W, G) une paire qui satisfait la condition Calabi-Yau, avec W polynôme quasi-homogène dans $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ de type Delsarte, inversible et non-dégénéré et tel que l'hypersurface $\{W = 0\}$ soit quasi-smooth.*

Soient $\tilde{G} := G/J_W$ et $\tilde{G}^T := G^T/J_{W^T}$.

Alors les deux orbifold $[\{W = 0\}/\tilde{G}]$ et $[\{W^T = 0\}/\tilde{G}^T]$ sont miroir en sens classique, c'est-à-dire

$$H_{CR}^{p,q}([\{W = 0\}/\tilde{G}], \mathbb{C}) \simeq H_{CR}^{n-2-p,q}([\{W^T = 0\}/\tilde{G}^T], \mathbb{C}) \tag{7.1.1}$$

et $H_{CR}(\cdot, \mathbb{C})$ indique la cohomologie de Chen-Ruan

Remarque 7.1.4 *Le desavantage de ce théorème est que il ne donne aucune information pour les surfaces, c'est-à-dire quand on considère les surfaces K3 et on a $n = 4$. En effet toute surface K3 a le même diamante de Hodge. C'est pour ça qu'il va falloir analyser des autres formulations de la symétrie miroir pour surfaces K3.*

7.2 Symétrie miroir LPK3

On présente ici la symétrie miroir pour surfaces K3 polarisées, comme elle a été introduite par Dolgachev, Nikulin, Voisin et autres auteurs. Il s'agit d'une symétrie miroir entre deux espaces de modules.

Tout d'abord, quand on a un réseau, on veut définir son réseau miroir :

Définition 7.2.1 *Soit M un réseau pair hyperbolique non-dégéneré qui se plonge de manière primitive dans Λ_{K3} et soit*

$$i : M \hookrightarrow \Lambda_{K3}$$

un tel plongement. Si $i(M)^\perp$ contient une copie de U, c'est-à-dire

$$i(M)^\perp \simeq U \oplus \overline{M}$$

on appelle $\overline{M}$ le **réseau miroir** *de M.*

On rappelle que grâce à la Définition 2.4.8, une surface K3 M-polarisée est le paire (X, j) avec X une surface K3 et j un plongement primitif de M dans $\mathrm{NS}(X)$:

$$j : M \hookrightarrow \mathrm{NS}(X).$$

On appelle $\mathbf{K}_M$ l'espace de modules des surfaces K3 M-polarisées.

La construction de l'espace de modules miroir est donc la suivante : soit $\overline{M}$ le réseau miroir de M ; on y associe l'espace de modules $\mathbf{K}_{\overline{M}}$ et il satisfait la propriété suivante (voir [Dol2]) : si X est une surface générique de $\mathbf{K}_M$, alors $\mathrm{rang}(\mathrm{NS}(X)) = \mathrm{rang}(M) = \dim \mathbf{K}_{\overline{M}}$

Cela permet de donner une définition de symétrie miroir pour deux familles de K3.

Définition 7.2.2 *Soient $\mathbf{K}_M$ et $\mathbf{K}_{M'}$ deux espaces de modules des surfaces K3 polarisées, respectivement, par M et M'. On dit que $\mathbf{K}_M$ est* **miroir de $\mathbf{K}_{M'}$ au sens des surfaces K3 polarisées** *si M' est isomorphe au réseau miroir de M, c'est-à-dire*

$$M' \simeq \overline{M}.$$

Cette symétrie miroir sera appellée aussi symétrie miroir LPK3 (ça vient de *lattice polarized*).

Si on revient maintenant à la construction miroir de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan présentée dans la Section 7.1, on a deux surfaces $X_{W,G}$ et X_{W^T,G^T}, on veut choisir des polarisations telles que $X_{W,G}$ et X_{W^T,G^T} soient miroir l'une de l'autre au sens des K3 polarisées.

On pourrait choisir comme réseau de polarisation l'entier réseau de Néron-Severi $\mathrm{NS}(X_{W,G})$. Celui-ci c'était l'approche de Belcastro dans [Be] mais elle a montré que cette idée n'est pas valide, car si on prend deux surfaces $X_{W,G}$ et X_{W^T,G^T} qui sont miroir au sens BHCR et on considère la polarisation par leur réseau de Néron-Severi, les deux ne sont pas nécessairement miroir l'une de l'autre au sens LPK3, c'est-à-dire elles n'appartiennent pas forcement à deux familles miroir au sens LPK3.

Si on suppose maintenant que $X_{W,G}$ possède un automorphisme non-symplectique σ_p d'ordre premier $p \geq 3$, le bon choix c'est de polariser $X_{W,G}$ par le réseau invariant $S(\sigma_p)$ (voir Section 2.2). On verra dans la prochaine section pourquoi ce choix est le bon.

7.3 Le Théorème principal

Une fois qu'on a les surfaces $X_{W,G}$ et X_{W^T,G^T} qui sont miroir au sens BHCR, on va montrer qu'elles sont aussi miroir LPK3. Pour cela, on veut les polariser avec le réseau invariant $S(\sigma_p)$ et voir qu'elles appartiennent à deux familles miroir LPK3. On a d'abord besoin que le réseau invariant $S(\sigma_p)$ admet un réseau miroir et donc on a besoin du Lemme suivant :

Lemme 7.3.1 *Si $p = 3, 5, 7, 13$ et $X_{W,G}$ est la surface obtenue avec la construction de Berglund-Hübsch pour la paire (W, G), soit σ_p l'automorphisme non–symplectique d'ordre p premier qui agit sur $X_{W,G}$ et $S(\sigma_p)$ le réseau invariant associé à σ_p. Alors le réseau $S(\sigma_p)$ admet un réseau miroir, c'est-à-dire il existe un plongement primitif*

$$i : S(\sigma_p) \hookrightarrow \Lambda_{K3}$$

tel que $i(S(\sigma_p))^\perp$ contient une copie de U.

Preuve. On doit prouver que U se plonge de manière primitive dans $T(\sigma_p)$. D'abord on regarde les Tableaux 2.8, 2.7, 2.6 et 2.4 et on se rend compte que il faut équivalentement montrer que les invariants (r, a) de $S(\sigma_p)$ ne prennent pas les valeurs suivantes :

— si $p = 3$, $(r, a) = (20, 1)$;
— si $p = 7$, $(r, a) = (4, 3)$;

car pour ces valeurs des invariants le réseau $T(\sigma_p)$ ne contient pas une copie de U. Maintenant il suffit de regarder les Tableaux C.1–C.4 et on voit que ces valeurs de (r, a) ne sont jamais atteints. □

Remarque 7.3.2 *En utilisant les formules de la Proposition 2.4.10, on peut observer que la valeur interdite du Lemme 7.3.1 pour $p = 7$ correspond à un automorphisme symplectique qui ne fixe pas des courbes mais qui a seulement des points fixes isolés. Cette situation est clairement impossible dans nos cas, car la forme* (6.2.1) *du polynôme W implique que l'entière courbe $\{x_1 = 0\}$ soit toujours fixée.*

Remarque 7.3.3 *Une autre preuve du fait que il faut eviter le cas $p = 3, (r, a) = (20, 1)$ est donné de la forme de $T(\sigma_p)$ dans ce cas. En fait, si $(r, a) = (20, 1)$ alors $T(\sigma_3)$ est $A_2(-1)$, qui est un réseau de signature $(0, 2)$. Vu que la signature de U est $(1, 1)$, c'est impossible qu'il y ait un plongement de U dans $T(\sigma_3)$.*

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 7.3.4 *(*[CLPS, Théorème 3.5]*) Soit $X_{W,G}$ la surface K3 obtenue avec la construction de Berglund-Hübsch, avec l'automorphisme non-symplectique σ_p d'ordre premier $p \geq 3$. Soit X_{W^T,G^T} son miroir BHCR, avec l'automorphisme non-symplectique σ_p^T. Alors les deux surfaces $X_{W,G}$, polarisée par $S(\sigma_p)$, et X_{W^T,G^T}, polarisée par $S(\sigma_p^T)$, sont miroir l'une de l'autre au sens LPK3.*

Remarque 7.3.5 *Ce théorème est la généralisation du résultat analogue pour $p = 2$ que l'on trouve dans [ABS].*

La preuve de ce théorème est faite cas par cas et elle est contenue dans les Tableaux C.1-C.4. On décrit ici la méthode de la preuve, qui sera montré à l'œuvre dans les Exemples de la Section 7.4.

On prend un polynôme W des Tableaux C.1-C.4, avec système de poids (w_1, w_2, w_3, w_4) et degré total d. Vu que on connait $|J_W| = d$, d'abord on calcule $|\mathrm{SL}_W|$ pour voir les possibilités pour le groupe G tel que $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$. On rappelle deux résultats de [ABS], qui permettent de calculer $|\mathrm{SL}_W|$ et de différencier le calcul de $|\mathrm{SL}_W|$ selon le type du polynôme.

Lemme 7.3.6 (voir [ABS, Corollary 1]) *L'ordre de* SL_W *est*

$$|\mathrm{SL}_W| = \frac{|\det(A_W)|}{d^T}$$

où d^T *est le degré total du polynôme transposé* W^T.

Corollaire 7.3.7 (voir [ABS, Proposition 4]) *L'ordre de* SL_W *selon le type de* W *est le suivant :*

1. *si* W *est de type Fermat avec* $W = x_1^p + x_2^a + x_3^b + x_4^c$, *alors* $|\mathrm{SL}_W| = \frac{pabc}{\mathrm{ppcm}(a,b,c)}$;
2. *si* W *est de type chain avec* $W = x_1^p + x_2^a x_3 + x_3^b x_4 + x_4^c$, *alors* $|\mathrm{SL}_W| = p \cdot \mathrm{pgcd}(ab - a + 1, abc)$;
3. *si* W *est de type loop avec* $W = x_1^p + x_2^a x_3 + x_3^b x_4 + x_4^c x_2$, *alors* $|\mathrm{SL}_W| = p \cdot \mathrm{pgcd}(ab - a + 1, abc + 1)$;
4. *si* W *est de type chain+Fermat avec* $W = x_1^p + x_2^a + x_3^b x_4 + x_4^c$, *alors*
   — *si* $\mathrm{pgcd}(d^T, w_3^T) = 1$ *alors* $|\mathrm{SL}_W| = p \cdot c \cdot \mathrm{pgcd}(ab, a - 1)$,
   — *si* $\mathrm{pgcd}(d^T, w_3^T) \neq 1$ *alors* $\mathrm{pgcd}(d^T, w_3^T) = p$ *et* $|\mathrm{SL}_W| = c \cdot \mathrm{pgcd}(ab, a - 1)$;
5. *si* W *est de type loop+Fermat avec* $W = x_1^p + x_2^a + x_3^b x_4 + x_4^c x_3$, *alors*
   — *si* $\mathrm{pgcd}(d^T, w_3^T) = 1$ *alors* $|\mathrm{SL}_W| = p \cdot c \cdot \mathrm{pgcd}(ab + 1, a - 1)$,
   — *si* $\mathrm{pgcd}(d^T, w_3^T) \neq 1$ *alors* $\mathrm{pgcd}(d^T, w_3^T) = p$ *et* $|\mathrm{SL}_W| = c \cdot \mathrm{pgcd}(ab + 1, a - 1)$.

Preuve. Ce résultat est corollaire du Lemme 7.3.6, généralisé au cas d'automorphisme d'ordre p premier avec $p \geq 3$. On repète ici la preuve de la Proposition 4 de [ABS]. La clé de la preuve est le Lemme 7.3.6 et le système linéaire donné par

$$A_W^T \cdot w^T = d^T \cdot e. \tag{7.3.1}$$

On commence par W de type chain. Vu que la matrice A_W^T est

$$A_W^T = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix},$$

le systéme (7.3.1) devient

$$\begin{cases} pw_1^T = d^T \\ aw_2^T = d^T \\ w_2^T + bw_3^T = d^T \\ w_3^T + cw_4^T = d^T \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} pw_1^T = d^T \\ w_2^T = \frac{d^T}{a} \\ w_3^T = \frac{d^T(a-1)}{ab} \\ w_4^T = \frac{d^T(ab-a+1)}{abc}. \end{cases}$$

La dernière egalité donne

$$\frac{pabc}{d^T} w_4^T = p(ab - a + 1)$$

Soit maintenant $m = \text{pgcd}(d^T, w_4^T)$. On a que m divise d^T et donc m divise w_2^T, w_3^T, w_4^T. Vu que l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1^T, w_2^T, w_3^T, w_4^T)$ est normalisé, alors $m = 1$ et donc d^T et w_4^T sont premiers entre eux. On utilise le Lemme 7.3.6 et on a que

$$|\text{SL}_W| = \frac{\det(A_W)}{d^T} = p \cdot \text{pgcd}(ab - a + 1, abc).$$

Pour le cas de W de type loop le système (7.3.1) donne

$$\begin{cases} w_1^T = \frac{d^T}{p} \\ w_2^T = \frac{d^T - w_4^T}{a} \\ w_3^T = \frac{d^T(a-1) + w_4^T}{ab} \\ w_4^T = \frac{d^T(ab-a+1) - w_4^T}{abc} \end{cases}$$

d'où $\frac{p(abc+1)}{d^T} w_4^T = p(ab - a + 1)$ et la preuve se termine de façon similaire.

Soit maintenant W de type Fermat. Alors le systéme (7.3.1) donne

$$\begin{cases} w_1^T = \frac{d^T}{p} \\ w_2^T = \frac{d^T}{a} \\ w_3^T = \frac{d^T}{b} \\ w_4^T = \frac{d^T}{c}. \end{cases}$$

Alors $d^T = \text{ppcm}(a, b, c)$ car, si le contraire était vrai, alors w_2^T, w_3^T, w_4^T auraient un diviseur commun et cela contredirait le fait que $\mathbb{P}(w_1^T, w_2^T, w_3^T, w_4^T)$ est normalisé. Donc on trouve l'expression pour $|SL_W|$ donnée dans l'enoncé.

Soit $W == x_1^p + x_2^a + x_3^b x_4 + x_4^c$ de type chain+Fermat. Encore grâce au système (7.3.1) on trouve

$$\begin{cases} w_1^T = \frac{d^T}{p} \\ w_2^T = \frac{d^T}{a} \\ w_3^T = \frac{d^T(a-1)}{ab} \\ w_4^T = \frac{d^T}{c}. \end{cases}$$

On appelle $m = \text{pgcd}(d^T, w_3^T)$. Vu que m divise $w_2^T, w_3^T, pw_1^T, cw_4^T$, alors m peut être 1 ou p car $\mathbb{P}(w_1^T, w_2^T, w_3^T, w_4^T)$ est normalisé. Si d'ailleurs $m = p$, alors p divise c, toujours pour l'hypothèse que l'espace à poids soit normalisé. Soit $m = 1$: alors grâce au système on trouve $|\text{SL}_W| = \frac{pabc}{d^T} = p \cdot c \cdot \text{pgcd}(ab, a-1)$. Si $m = p$ on a $|\text{SL}_W| = \frac{pabc}{d^T} = c \cdot \text{pgcd}(ab, a-1)$.

La preuve est tout à fait similaire si W est de type loop+Fermat. □

Les valeurs de $|\text{SL}_W/J_W|$ sont reportés dans les Tableau de l'Annexe C. Grâce au Corollaire 7.3.7, on connait les choix possibles pour G. On fixe donc la paire (W, G) qui satisfait la condition Calabi-Yau.

— On suppose pour commencer que $|\text{SL}_W/J_W| = 1$ et donc la seule possibilité pour G est $G = J_W = \text{SL}_W$, d'où $\tilde{G} = G/J_W = \{1\}$. On a donc l'hypersurface $\{W = 0\} \subset \mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ de degré d et l'automorphisme non-symplectique

$$\sigma_p : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \mapsto (\xi_p x_1 : x_2 : x_3 : x_4).$$

On veut calculer les deux réseaux $S(\sigma_p)$ et $T(\sigma_p)$ et, grâce à la Proposition 2.4.10, c'est équivalent à étudier le lieu fixe de σ_p et sa structure topologique.

D'abord on regarde les singularités de $\{W = 0\}$ qui sont héritées des singularités de l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3, w_4)$ (car W est non dégéneré d'après l'hypothèse). On les éclate et on compte les k courbes rationnelles fixées, les n points fixes isolés et on calcule le genre g de la courbe fixe $\{x = 0\}$ à l'aide de la formule du genre suivante :

Lemme 7.3.8 (voir [I-F, Théorème 12.2]) *Soit C une courbe non-singulière de degré total d dans $\mathbb{P}(w_1, w_2, w_3)$. Alors le genre de C est*

$$g(C) = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{w_1 w_2 w_3} - d\sum_{i>j}\frac{\mathrm{pgcd}(w_i, w_j)}{w_i w_j} + \sum_{i=1}^{3}\frac{\mathrm{pgcd}(d, w_i)}{w_i} - 1\right) \tag{7.3.2}$$

On a donc les invariants (g, k, n) associés au $\mathrm{Fix}(\sigma_p)$ et on utilise les résultats de la Proposition 2.4.10 pour calculer (r, a), c'est-à-dire le rang de $S(\sigma_p)$ et sa longuer. À l'aide des Tableaux 2.8-2.2 on trouve $S(\sigma_p)$ et son réseau miroir $\overline{S(\sigma_p)}$.

— Si $|\mathrm{SL}_W| \neq |J_W|$, il y a un choix non trivial pour $\tilde{G}$. Ici il faut étudier $X_W/\tilde{G}$ où $\tilde{G} = G/J_W$. L'action de $\tilde{G}$ est une action symplectique (on voit par exemple que G est contenu dans SL_W) et donc grace à [N2] on connait le nombre de point fixes pour cette action et les singularités qu'elle va donner au quotient (voir 2.1). À l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz (1.2.3) et en comptant les courbes fixes et les points fixes isolés on trouve les invariants (g, k, n) et (r, a) et on calcule ici aussi les réseaux $S(\sigma_p)$ et son réseau miroir.

Il faut maintenant répéter le calcul pour la paire miroir (W^T, G^T), trouver $S(\sigma_p^T)$ et son réseau miroir $\overline{S(\sigma_p^T)}$ et verifier que $S(\sigma_p)$ est le réseau miroir de $S(\sigma_p^T)$ et vice versa. En analysant chaque cas des Tableaux C.1-C.4 on prouve le Théorème.

Remarque 7.3.9 On peut observer que cette symétrie correspond exactement à la symétrie qu'on a remarqué dans les Figures 2.6–2.8 dans la Section 2.4. On avait observé que, sauf certaines valeurs spéciales, il y a une correspondence entre (r, a) et $(20 - r, a)$. Les cas spéciaux qui n'ont pas un point symétrique dans les diagrammes des Figures 2.6–2.8 correspondent aux invariants

$$(r, a) = \begin{cases} (20, 1), (8, 7) & \text{si } p = 3 \\ (6, 4) & \text{si } p = 5 \\ (4, 3) & \text{si } p = 7. \end{cases}$$

Tous ces cas sont exclus, soit grâce au Lemme 7.3.1 soit pour le fait qu'ils ne se présentent pas pour notre construction car ils correspondent à des automorphismes qui ne fixent que des points isolés (voir Remarque 7.3.2).

Remarque 7.3.10 *On mentionne que Ebeling dans [E] a travaillé sur ce même sujet et a prouvé que pour certaines des paires de surfaces qui sont LPK3 miroir dans [Be], la symétrie BHCR vaut aussi. Il faut pour ça que la forme du polynôme soit* (6.2.1) *et que $J_W = \mathrm{SL}_W$. Donc en particulier certains des polynômes du travail de Ebeling sont aussi dans notre classification : c'est le cas quand il s'agit de polynômes de type* (6.2.1) *avec p premier et tels que $S(\sigma_p)$ est l'entier réseau de Néron-Severi.*

7.4 Exemples

Vu que la preuve du Théoréme 7.3.4 se fait cas par cas, on décrit dans les détails 4 exemples qui représentent toutes les situations possibles. Dorénavant on remplace (x_1, x_2, x_3, x_4) par (x, y, z, w).

7.4.1 Exemple 1 : cas 22a) dans le Tableau C.1

On prend le polynôme

$$W = x^2 z + y^3 + x z^3 + w^{15}$$

dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(6,5,3,1)$ (on observe qu'ici on a changé l'ordre des variables pour garder l'ordre decrescent des poids). Il s'agit d'un polynôme de type loop+Fermat et son degré total est $d = 15$; la matrice associée à W est

$$A_W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

et le vecteur des charges est $(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$. La matrice A_W étant symetrique, le polynôme transposé W^T coïncide avec W.

L'automorphisme qu'on prend en consideration est l'automorphisme de degré 3 donné par

$$\sigma_3 : (x : y : z : w) \mapsto (x : \xi_3 y : z : w)$$

et en forme additive σ_3 s'écrit $\sigma_3 = (0, \frac{1}{3}, 0, 0)$.

On calcule l'ordre de SL_W et J_W pour voir quels sont les groupes possibles G avec $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$. Le générateur de J_W est $j_W = (\frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15})$ et son ordre est $|J_W| = 15$. Grâce au calculs de la Section 6.1, aux Lemmes 6.1.14 et 7.3.6 et au Corollaire 7.3.7, on a que $G_W/\mathrm{SL}_W \cong J_{W^T} \cong J_W$ et $|G_W| = \det(A_W)$. Vu qu'ici $\det(A_W) = 225$, on trouve donc le diagramme de la Figure 7.1 d'où on sait que $|\mathrm{SL}_W/J_W| = 1$.

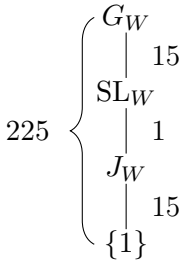


FIGURE 7.1 – Les sous-groupes de G_W quand $W = x^2z + y^3 + z^3x + w^{15}$

Donc la seule possibilité pour G est $G = \mathrm{SL}_W = J_W$.

Il faut maintenant calculer le réseau $S(\sigma_3)$ et on veut montrer que $T(\sigma_3^T) \cong U \oplus \overline{S(\sigma_3)}$ qui devient ici

$$T(\sigma_3) \cong U \oplus S(\sigma_3)$$

car $W = W^T$. Cela suffira pour prouver le Théorème 7.3.4 dans ce cas.

Pour calculer $S(\sigma_3)$ on décrit l'hypersurface $\{W = 0\} \subset \mathbb{P}(6,5,3,1)$ et on régarde le lieu fixe de σ_3, car la Proposition 2.4.10 assure le lien entre la structure topologique de $\mathrm{Fix}(\sigma_3)$ et les invariants de $S(\sigma_3)$.

Les singularités de $\{W = 0\}$ ne peuvent venir que des singularités de $\mathbb{P}(6,5,3,1)$ et on sait que l'action de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{P}(6,5,3,1)$ est

$$\lambda \cdot (x, y, z, w) = (\lambda^6 x, \lambda^5 y, \lambda^3 z, \lambda w).$$

Parmi les sommets du simplexe fondamental Δ de $\mathbb{P}(6,5,3,1)$ il y en a deux qui appartiennent aussi à $\{W = 0\}$: le point $(1 : 0 : 0 : 0)$ donne une singularité de type A_5 alors que le point $(0 : 0 : 1 : 0)$ donne une singularité de type A_2.

En regardant les côtés de Δ, on voit que $\{y = w = 0\} \cap \{W = 0\}$ consiste des trois points $\{(1 : 0 : 0 : 0), (0 : 0 : 1 : 0), (-1 : 0 : 1 : 0)\}$ et donc on a une singularité de type A_2 de plus, qui correspond au point $(-1 : 0 : 1 : 0)$. Au final on a trouvé trois singularités :

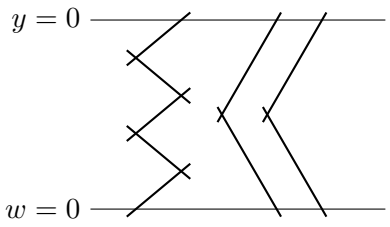


FIGURE 7.2 – La resolution des singuarités de $\{W = 0\}$

$A_5 + 2A_2$ et le diagramme des courbes quand on résout les singularités est representé dans la Figure 7.2.

La courbe $\{y = 0\}$ est fixée par σ_3 et la courbe $\{w = 0\}$ est fixée elle aussi, car dans $\mathbb{P}(6, 5, 3, 1)$ on a

$$(x : \xi_3 y : z : w) = (\xi_3^6 x : \xi_3^5 \xi_3 y : \xi_3^3 z : \xi_3 w) = (x : y : z : \xi_3 w)$$

et donc l'action de σ_3 peut s'écrire aussi

$$\sigma_3 : (x : y : z : w) \mapsto (x : y : z : \xi_3 w).$$

Grâce à la formule (7.3.2) on trouve que $\{y = 0\}$ a genre égal à 2, alors que la courbe $\{w = 0\}$ est rationnelle. Pour trouver les invariants (k, n) du lieu fixe $\mathrm{Fix}(\sigma_3)$ on regarde la Figure 7.2 et grâce à ça et au Corollaire 2.4.5 on trouve que $n = 4$ et $k = 2$. On applique donc les formules de la Proposition 2.4.10 et on a les invariants du réseau $S(\sigma_3)$, c'est-à-dire $(r, a) = (10, 2)$.

Le Tableau 2.8 montre que les réseaux associés à ces invariants sont

$$S(\sigma_3) = U \oplus A_2 \oplus E_6, \qquad T(\sigma_3) = U \oplus U \oplus A_2 \oplus E_6$$

d'où $T(\sigma_3) = U \oplus S(\sigma_3)$ et cela prouve le Théorème 7.3.4 dans ce cas.

7.4.2 Exemple 2 : cas 13d) dans le Tableau C.1

On va considerer maintenant un cas où il y a une possibilité non-triviale pour le groupe $\tilde{G}$.

Soit $W = x^2 + y^3 + z^8 + w^{24}$ dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(12, 8, 3, 1)$. Le degré total de W est $d = 24$ et il est égal à la somme des poids. Le polynôme W est un polynôme de type Fermat ; la matrice A_W associé à W est

$$A_W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

et vu qu'elle est symetrique, on a $W = W^T$.

On considère ici l'automorphisme non-symplectique d'ordre 3

$$\sigma_3 : (x : y : z : w) \mapsto (x : \xi_3 y : z : w)$$

dont la répresentation en forme additive est $\sigma_3 = (0, \frac{1}{3}, 0, 0)$.

Le groupe J_W est engendré par $j_w = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{24})$ en notation additive et $|J_W| = d = 24$. On cherche les possibilités pour G tel que $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$ et grâce au calculs de la Section 6.1, aux Lemmes 6.1.14 et 7.3.6 et au Corollaire 7.3.7, on sait que $G_W/\mathrm{SL}_W \cong J_{W^T} \cong J_W$ et $|G_W| = \det(A_W)$ et donc ici $|G_W| = 1152$. Cela donne le diagramme representé dans la Figure 7.3 d'où $|\mathrm{SL}_W/J_W| = 2$. Donc il y a deux possibilités pour G : soit $G = \mathrm{SL}_W$ et donc $\tilde{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, soit $G = J_W$ et donc $\tilde{G} = \{1\}$. On traite les deux cas séparément.

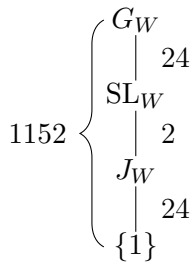


FIGURE 7.3 – Les sous-groupes de G_W quand $W = x^2 + y^3 + z^8 + w^{24}$

si $G = J_W$: On commence par décrire l'hypersurface $\{W = 0\} \subset \mathbb{P}(12, 8, 3, 1)$. Les possibles singularités sont heritées des singularités de l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(12, 8, 3, 1)$, où l'action de $\mathbb{C}^*$ est donnée par

$$\lambda \cdot (x, y, z, w) = (\lambda^{12}x, \lambda^8 y, \lambda^3 z, \lambda w).$$

Si on regarde les sommets du simplexe fondamental Δ de $\mathbb{P}(12, 8, 3, 1)$ on se rend compte qu'ils n'appartiennent pas à $\{W = 0\}$ donc ils ne donnent pas des singularités de l'hypersurface. Par rapport aux côtés de Δ, on voit que les intersections de $\{y = w = 0\}$ avec $\{W = 0\}$ sont les deux points $(\pm 1 : 0 : 1 : 0)$ qui donnent deux singularités de type A_2. De la même façon on trouve que $\{z = w = 0\} \cap \{W = 0\} = \{(-1 : 1 : 0 : 0)\}$ et il s'agit d'une singularité de type A_3. La resolution de ces singularités, dont on montre la structure dans la Figure 7.4, donne X_W.

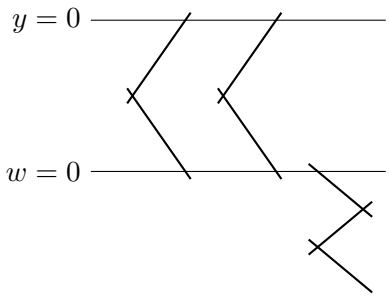


FIGURE 7.4 – La resolution des singularités de $\{W = 0\}$

On passe à étudier le lieu fixe $\mathrm{Fix}(\sigma_3)$. La courbe $\{y = 0\}$ est fixée et grâce à (7.3.2) son genre est 3. La courbe $\{w = 0\}$ est, elle aussi, fixée par σ_3 car dans l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(12, 8, 3, 1)$ on a

$$(x : \xi_3 y : z : w) = (\xi_3^{12}x : \xi_3^8 \cdot \xi_3 y : \xi_3^3 z : \xi_3 w) = (x : y : z : \xi_3 w)$$

et donc une autre description de σ_3 est

$$\sigma_3 : (x : y : z : w) \mapsto (x : y : z : \xi_3 w).$$

Avec (7.3.2) on trouve que le genre de la courbe $\{w = 0\}$ est 0, comme on s'attend car déjà la courbe $\{y = 0\}$ a genre positif. Finalement on calcule les nombre k des courbe rationnelles fixées et le nombre n de points fixes isolés à l'aide du Corollaire 2.4.5.
On trouve $(g, k, n) = (3, 2, 3)$ d'où $(r, a) = (8, 1)$. À l'aide du Tableau 2.8 on trouve que $S(\sigma_3) = U \oplus E_6$ et $T(\sigma_3) = U \oplus U \oplus A_2 \oplus E_8$.
Le réseau miroir de $S(\sigma_3)$ est donc

$$\overline{S(\sigma_3)} = U \oplus A_2 \oplus E_8.$$

si $G = \mathrm{SL}_W$: Dans ce cas, il faut regarder l'action de $\tilde{G}$ sur X_W. On sait que $\tilde{G} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et son action sur X_W est symplectique, donc d'après le Tableau 2.1 on cherche ses 8 points fixes isolés. Pour les calculs, on peut prendre comme générateur de $\tilde{G}$ l'élément $\gamma = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$ ou tout autre élément de SL_W d'ordre 2 qui n'appartient pas à J_W : il sera parfois utile de changer de représentant pour mieux voir les points fixes. Ici par exemple on peut prendre équivalentement γ ou les éléments $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ ou $(0, 0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ comme générateurs de $\tilde{G}$.
L'action associée à γ est l'action

$$(x : y : z : w) \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2}} x : y : z : e^{\frac{2\pi i}{2}} w)$$

qui fixe le point $(0 : -1 : 1 : 0)$. Également, si on prend le générateur de $\tilde{G}$ donné par $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$ on trouve les 3 points fixes $\{(0 : \xi_6^j : 0 : 1) : j = 1, 3, 5\}$. Encore, avec le générateur $(0, 0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ on trouve que les 4 points fixes qui manquent sont sur la courbe donnée par la résolution de la singularité de type A_3 de X_W. Enfin, les courbes qui apparaissaient avec la résolution des deux singularités A_2 de X_W sont permutées par $\tilde{G}$ et donc il ne reste qu'une seule singularité A_2.
Le groupe $\tilde{G}$ preserve aussi les courbes $\{y = 0\}$ et $\{w = 0\}$ et donc on trouve le diagramme montré dans la Figure 7.5. On y dessine avec des lignes en pointillé les courbes qui viennent de la résolution des singularités de $X_W/\tilde{G}$. Elles sont 8, comme on s'attend.

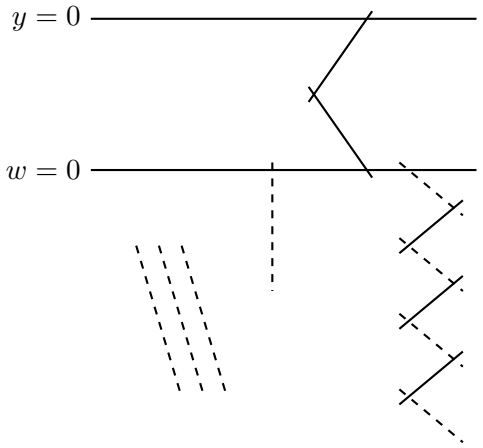


FIGURE 7.5 – Courbes sur X_{W,SL_W} (les courbes en pointillé viennent de la résolution de $X_W/\tilde{G}$)

On observe que dans la Figure 7.5 on a indiqué encore $\{y = 0\}$ et $\{w = 0\}$ les deux courbes fixés, bien qu'il s'agit de leur image au quotient.
Pour calculer le genre de l'image de $\{y = 0\}$ on utilise la formule de Riemann-Hurwitz (1.2.3) : ici on a un recouvrement 2 :1 sans ramification car il n'y a pas des points fixés par $\tilde{G}$ sur $\{y = 0\}$. Donc la ramification S' est vide et

$$\begin{aligned} 2 - 2g_{old} &= 2(2 - 2g_{new}) - \sum_{\rho \in S'} (e_\rho - 1) \\ 2 - 2 \cdot 3 &= 2(2 - 2g_{new}) - 0 \\ g_{new} &= 2. \end{aligned}$$

Pour $\{w = 0\}$ on a un recouvrement 2 :1 avec 4 points de ramification d'ordre 2,

d'où

$$\begin{aligned} 2-2g_{old} &= 2(2-2g_{new}) - \sum_{\rho\in S'}(e_\rho - 1) \\ 2-2\cdot 0 &= 2(2-2g_{new}) - 4 \\ g_{new} &= 0 \end{aligned}$$

et on trouve que le genre de l'image de $\{w=0\}$ dans $X_W/\tilde{G}$ est 0.
Il faut encore regarder comment agit l'automorphisme σ_3 sur les courbes obtenues des points fixés par $\tilde{G}$. On trouve que les 3 points $\{(0:\xi_6^j:1:0) : j=1,3,5\}$ sont permutés par σ_3 donc au final ils ne donnent qu'une seule singularité de type A_1. À nouveau on calcule les nombre k des courbe rationnelles fixées et le nombre n de points fixes isolés grâce au Corollaire 2.4.5 et on trouve $(g,k,n)=(2,3,5)$. Donc les invariants de $S(\sigma_3)$ dans ce cas sont $(r,a)=(12,1)$ et

$$S(\sigma_3) = U \oplus E_8 \oplus A_2.$$

Son réseau miroir est

$$\overline{S(\sigma_3)} = U \oplus E_6.$$

Maintenant qu'on a etudié les deux cas, on voit que le réseau miroir du $S(\sigma_3)$ associé au choix de $G = J_W$ correspond au réseau $S(\sigma_3)$ quand on prend $G = \mathrm{SL}_W$ et viceversa. Donc le Théorème est prouvé pour ce cas.

7.4.3 Exemple 3 : cas 6c) dans le Tableau C.2

Dans ce troisième exemple on prend un polynôme W tel que $W \neq W^T$: il s'agit du cas 6c) dans le Tableau C.2. La façon de calculer les réseaux $S(\sigma_p)$ et $T(\sigma_p)$ est similaire aux exemples déjà vu auparavant.

Le polynôme est $W = x^2 + y^5 + z^5 + xw^5$, quasi-homogène dans l'espace $\mathbb{P}(5,2,2,1)$, de type chain+Fermat et de degré total $d=10$. La matrice associée est

$$A_W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas symetrique et donne le polynôme transposé $W^T = x^2w + y^5 + z^5 + w^5$. Ce dernier polynôme correspond au cas 21a) du Tableau C.2 et il est un polynôme quasi-homogène dans $\mathbb{P}(2,1,1,1)$.

Dans le deux cas on a un automorphisme non-symplectique d'ordre 5, qu'on appelle respectivement σ_5 et σ_5^T ; l'automorphisme σ_5 est donné, en notation additive, par $\sigma_5 = (0, \frac{1}{5}, 0, 0)$, c'est-à-dire il s'agit de

$$\sigma_5 : (x:y:z:w) \mapsto (x:\xi_5 y:z:w).$$

On calcule maintenant les ordres de G_W, SL_W et J_W. L'élément j_w a ordre 10 et il est $j_W = (\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10})$, d'où $|J_W| = 10$. Pour le transposé on a $j_{W^T} = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ et $|J_{W^T}| = 5$.
On a que

$$|G_W/SL_W| = |J_{W^T}| = 5.$$

On sait que $|G_W| = \det(A_W) = 250$ et donc on a le diagramme montré dans la Figure 7.6.

Vu que l'indice de J_W dans SL_W est 5, pour G tel que $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$ on aura les choix $G = SL_W$ et $G = J_W$. On traite séparément les deux cas :

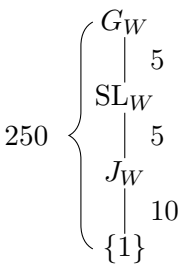


FIGURE 7.6 – Les sousgroupes de G_W quand $W = x^2 + y^5 + z^5 + xw^5$

si $G = J_W$: les singularités qu'on trouve sont heritées de l'espace $\mathbb{P}(5,2,2,1)$ et elles sont

$$\{W = 0\} \cap \{x = w = 0\} = \{(0 : \xi_{10}^j : 1 : 0) : j = 1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Il s'agit de 5 singularités de type A_1 et quand on résout on trouve 5 courbes exceptionnelles qui sont permutés par σ_5. De plus σ_5 fixe la courbe $\{y = 0\}$ dont on calcule le genre avec (7.3.2) et on trouve qu'elle a genre 2.
Dans $\mathbb{P}(5,2,2,1)$, si on multiplie $(x : \xi_5 y : z : w)$ fois $\lambda = \xi_5^2$ (avec les poids) on trouve $(x : y : \xi_5^4 z : \xi_5^2 w)$, ainsi une autre façon d'écrire l'action de σ_5 en notation additive est $\sigma_5 = (0, 0, \frac{4}{5}, \frac{2}{5})$. Cela montre que $(i : 1 : 0 : 0)$ est un point fixe isolé pour σ_5.
Au final on a $(g, k, n) = (2, 0, 1)$ d'où $(r, a) = (2, 1)$. Le Tableau 2.7 donne $S(\sigma_5) = H_5$ et le réseau miroir de $S(\sigma_5)$ est

$$\overline{S(\sigma_5)} = H_5 \oplus E_8^2.$$

si $G = \mathrm{SL}_W$: On choisit ici $G = \mathrm{SL}_W$ et donc $\tilde{G} = \mathrm{SL}_W/J_W$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Son action sur X_W est symplectique. On prend pour générateur de $\tilde{G}$ l'élément $g = (0, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0)$ qui s'écrit aussi de la forme $(0, \frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$ ou $(0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5})$ (toujours en forme additive). Grâce au Tableau 2.1 on sait que $\tilde{G}$ aura 4 points fixes isolés et on voit qu'il s'agit des points $(0 : 0 : 0 : 1)$, $(-1 : 0 : 0 : 1)$, $(i : 0 : 1 : 0)$ et $(i : 1 : 0 : 0)$. Le quotient $X_W/\tilde{G}$ a donc 4 singularités A_4 et quand on résout on obtient 16 courbes exceptionnelles sur $X_{W,G}$. Chacune de ces courbes est (entièrement) préservée par l'action de σ_5 sur $X_{W,G}$ et à l'aide du Corollaire 2.4.5 on trouve que le nombre de points fixes isolés est 12. L'automorphisme σ_5 sur $X_{W,G}$ fixe aussi les images des courbes $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ et $\{w = 0\}$ et on calcule leur genres grâce à la formule de Riemann-Hurwitz (1.2.3). Toutes les 3 courbes ont genre égal à 0 et il n'y a pas des autres courbes de genre positif, donc au final $(g, k, n) = (0, 2, 12)$. Ainsi on trouve $(r, a) = (18, 1)$ et $S(\sigma_5) = H_5 \oplus E_8^2$ et son réseau miroir $\overline{S(\sigma_5)} = H_5$.
Remarque 7.4.1 *Il faut faire attention à bien compter les nombre k de courbes rationnelles quand il n' y a pas aucune courbe de genre positif (voir la Remarque 2.4.11).*

On a observé que dans cet exemple on a $W \neq W^T$ et donc il faut répéter les calculs pour le polynôme $W^T = x^2 w + y^5 + z^5 + w^5$ dans $\mathbb{P}(2,1,1,1)$. Les mêmes remarques faites pour W donnent le diagramme de la Figure 7.7 pour les sousgroupes de G_{W^T}.

A nouveau il y a deux possibilités pour G tel que $J_{W^T} \subset G \subset \mathrm{SL}_{W^T}$, c'est-à-dire $G = J_{W^T}$ ou $G = \mathrm{SL}_{W^T}$.

Remarque 7.4.2 *Grâce à la Proposition 7.1.1 on observe que ces deux choix correspondent aux groups transposés du cas (W, G), c'est-à-dire si on prend $G = J_{W^T}$ il s'agit du groupe transposé de SL_W et également SL_{W^T} est le transposé de J_W.*

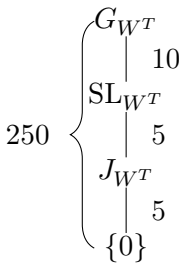


FIGURE 7.7 – Les sousgroupes de G_W quand $W^T = x^2w + y^5 + z^5 + w^5$

On separe les deux cas et on rappelle qu'ici l'automorphisme non-symplectique est $\sigma_5^T = (0, \frac{1}{5}, 0, 0)$.

si $G = J_{W^T}$: la seule singularité de l'hypersurface $\{W^T = 0\}$ est la singularité A_1 dans $(1 : 0 : 0 : 0)$. La seule courbe fixée par σ_5 est $\{y = 0\}$, qui grâce à (7.3.2) a genre $g = 2$. La courbe exceptionnelle obtenue en éclatant la singularité A_1 coupe la courbe mais elle n'est pas fixée point par point, donc on a sur cette courbe un point fixes isolé. On trouve $(g, k, n) = (2, 0, 1)$ et $(r, a) = (2, 1)$. Le réseau $S(\sigma_5^T)$ et son miroir sont

$$S(\sigma_5^T) = H_5, \qquad \overline{S(\sigma_5^T)} = H_5 \oplus E_8^2.$$

si $G = \mathrm{SL}_{W^T}$: On prend pour générateur de $\tilde{G} = \mathrm{SL}_{W^T}/J_{W^T} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'élément $g = (0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0)$. On a à nouveau une action symplectique qui fixe donc 4 points isolés et donne donc 4 singularités A_4 sur $X_{W^T}/\tilde{G}$. En éclatant ces points on obtiendra 16 courbes exceptionnelles qui sont toutes invariantes sous l'action de σ_5^T. Deux des points fixes pour l'action de g sont $(\pm i : 0 : 0 : 1)$ et les autres deux vivent sur la singularité A_1. On montre la comportement des courbes exceptionnelles de $X_{W^T,G}$ dans la Figure 7.8.

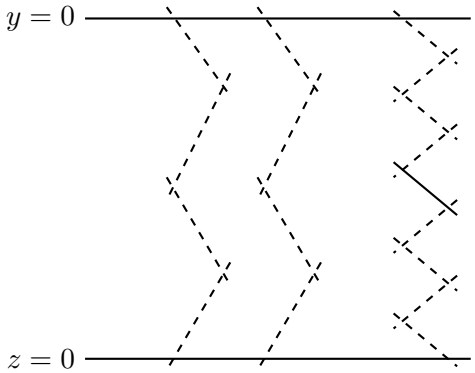


FIGURE 7.8 – Courbes sur X_{W,SL_W} (les courbes en pointillé viennent de la résolution de $X_W/\tilde{G}$)

La courbe $\{y = 0\}$ est fixée par σ_5^T, de même que la courbe $\{z = 0\}$. Leur genre se calcule à l'aide de la formule de Riemann-Hurwitz (1.2.3) et on trouve que toutes les deux sont des courbe rationnelles. Au final les invariants de $\mathrm{Fix}(\sigma_5^T)$ sont $(g, k, n) = (0, 2, 12)$ et donc $(r, a) = (18, 1)$. Les réseau $S(\sigma_5)$ et son miroir sont

$$S(\sigma_5^T) = H_5 \oplus E_8^2, \text{ et } \overline{S(\sigma_5^T)} = H_5.$$

Maintenant on peut voir que le théorème est bien verifié pour ces deux cas : si on prend

les deux surfaces BHCR miroirs X_W et $X_{W^T,\mathrm{SL}_{W^T}}$ on voit que

$$\overline{S(\sigma_5)} \simeq S(\sigma_5^T)$$

et donc les deux surfaces X_W polarisée par $S(\sigma_5)$ et $X_{W^T,\mathrm{SL}_{W^T}}$ polarisée par $S(\sigma_5^T)$ sont miroir l'une de l'autre dans le sens des K3 polarisées LPK3.

Le même résultat vaut pour X_{W,SL_W} et X_{W^T}.

7.4.4 Exemple 4 : cas 3a) dans le Tableau C.1

On regarde maintenant le cas 3a) dans le Tableau C.1, c'est-à-dire le polynôme

$$W = x^3 + y^3 + z^3 + w^6$$

dans l'espace $\mathbb{P}(2,2,1,1)$. Il s'agit d'un polynôme de degré total $d = 6$ et la matrice associée est

$$A_W = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Vu que A_W est symetrique on a $W = W^T$ et on considère l'automorphisme d'ordre 3 donné par $\sigma_3 = (\frac{1}{3}, 0, 0, 0)$.

Comme dans les exemples précédents on cherche les possibilités pour G tel que $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$. On trouve que $|G_W| = \det(A_W) = 324$, $|G_W/\mathrm{SL}_W| = |\mathrm{SL}_W/J_W| = 6$ et donc, grâce à [N2, Section 5], on a $\mathrm{SL}_W/J_W \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. On peut choisir $G = \mathrm{SL}_W, G = J_W$ mais on a aussi 4 possibles sousgroupes $G_i, i = 1, \ldots, 4$ d'ordre 3 : soit $G_i =< g_i >, i = 1, \ldots, 4$ avec

$$g_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right), \quad g_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad g_3 = \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0\right), \quad g_4 = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$$

Déjà on sait que $\mathrm{SL}_W^T = J_{W^T}$ et ici $J_{W^T} \simeq J_W$, on s'interesse aux transposés des sousgroupes G_i. Grâce à la définition du groupe transposé et au fait que $g_1 A_W g_2^T \in \mathbb{Z}$ on trouve que

$$G_1^T = G_2 \quad \text{et} \quad G_2^T = G_1.$$

De même, vu que $g_3 A_W g_3^T \in \mathbb{Z}$ et $g_4 A_W g_4^T \in \mathbb{Z}$, on a

$$G_3^T = G_3 \quad \text{et} \quad G_4^T = G_4.$$

Les calculs pour trouver (r, a) dans chacun des cas sont les mêmes que dans les Exemples précédents.

On montre quelque détail. Ici $j_W = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ Quand on prend $G = J_W$ les seules singularités sont $\{z = w = 0\} \cap \{W = 0\} = \{(\xi^j : 1 : 0 : 0) : j = 1, 3, 5\}$ et cela donne trois singularités de type A_1 permutées par σ_3. La courbe $\{x = 0\}$ est la seule courbe fixées par σ_3 et à l'aide de la formule (7.3.2) on sait qu'elle a genre égal à 4. Il n'y a pas des points fixes ni des autres courbes rationnelles préservées, d'où $(g, k, n) = (4, 0, 0)$ et on en tire que $(r, a) = (2, 2)$. La situation est montrée dans la Figure 7.9.

Maintenant on choisit $G = \mathrm{SL}_W$. Pour trouver (r, a) dans ce cas il faut regarder l'action de $\tilde{G} = \mathrm{SL}_W/J_W \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ sur X_W. On sait d'après [N2, Section 5] que le groupe SL_W/J_W agit de manière symplectique et il admet 24 points fixes d'ordre 3. Soient $\gamma_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)$ et $\gamma_2 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ les deux générateurs des deux copies de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On cherche d'abord les points fixés par γ_1 et on trouve qu'il s'agit des 6 points

$$\{(0 : 0 : \xi_{12}^j : 1), \quad j = 1, 3, 5, 7, 9, 11\}.$$

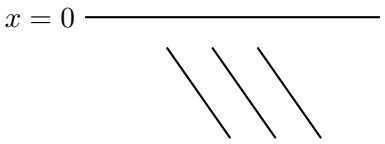


FIGURE 7.9 – Courbes sur X_{W,J_W}

Les points fixés par γ_2 sont sur les courbes données par l'eclatement des singularités A_1 (voir Figure 7.9) et cela donne donc 3 singularités de type A_5 au quotient. Encore, les autres générateurs des sousgroupes de SL_W/J_W sont $g_3 = (0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$ qui fixe les points

$$\{(\xi_6^j : 0 : 1 : 0), j = 1, 3, 5\} \text{ et } \{(0 : \xi_6^i : 0 : 1), i = 1, 3, 5\},$$

et $g_4 = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ qui fixe les points

$$\{(\xi_6^j : 0 : 0 : 1), j = 1, 3, 5\} \text{ et } \{(0 : \xi_6^i : 1 : 0), i = 1, 3, 5\}.$$

Au final, quand on résout toutes les singularités, on trouve la configuration de courbes montrée dans la Figure 7.10 (où on n'a pas dessiné toutes les courbes fixes mais juste les singularités éclatées).

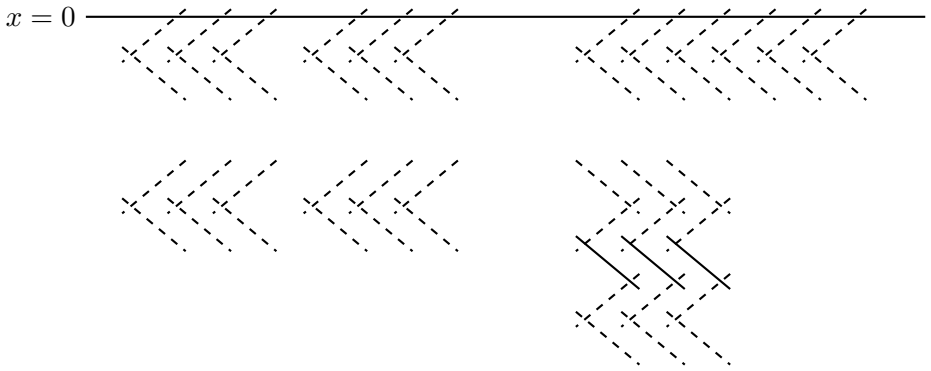


FIGURE 7.10 – Courbes sur X_{W,SL_W}

Il faut se rappeler que certaines de ces courbes sont permutés par σ_3, notamment les $3A_5$. De plus, quand on prend les point fixés par exemple par $< \gamma_1 >$, il faut aussi tenir compte de l'action de l'orthogonal de $< \gamma_1 >$ dans $\tilde{G}$ (qui est ici le sousgroupe $< \gamma_2 >$) qui agit encore sur les singularités et les permute. On se sert de ça pour tous les 24 points fixes d'ordre 3. Au final, on applique la formule de Riemann-Hurwitz (1.2.3) et les autres relation de la Proposition 2.4.10 et on a $(g, k, n) = (0, 4, 8)$ d'où $(r, a) = (18, 2)$.

Avec des calculs similaires pour les sougroupes $G_i =< g_i >$ on trouve

G	(r, a)
J_W	(2,2)
G_1	(14,4)
G_2	(6,4)
G_3	(10,4)
G_4	(10,4)
SL_W	(18,2)

D'après les valeurs du Tableau 2.8, on trouve $S(\sigma_3)$ et son miroir $\overline{S(\sigma_3)}$ dans tous les cas :

G	$S(\sigma_3)$	$\overline{S(\sigma_3)}$
J_W	$U(3)$	$U \oplus A_2 \oplus E_6 \oplus E_8$
G_1	$U \oplus A_2^3 \oplus E_6$	$U(3) \oplus A_2^2$
G_2	$U(3) \oplus A_2^2$	$U \oplus A_2^3 \oplus E_6$
G_3	$U \oplus A_2^4$	$U \oplus A_2^4$
G_4	$U \oplus A_2^4$	$U \oplus A_2^4$
SL_W	$U \oplus A_2 \oplus E_6 \oplus E_8$	$U(3)$

On confronte les réseaux obtenus et on voit que le tableau précédent montre le Théorème 7.3.4 pour le cas 3a) du Tableau C.1.

Chapitre 8

La symétrie miroir de Batyrev

On a vu dans les Chapitres précedents que ils existent différentes formulations de la notion de symétrie miroir pour des variétés de Calabi-Yau. Une de ces formulation est la notion de symétrie miroir dans le cadre de la géométrie torique, qui a été suggerée par Batyrev en [Ba]. L'auteur se sert des variétés toriques obtenues à partir d'un polytope réflexif pour construir deux familles de variétés de Calabi-Yau. Il existe une conjecture qui suggère que les deux familles soient miroir l'une de l'autre dans le sens de la physique et on verra dans la Section 8.2 les pas qui on été faits pour démontrer cette conjecture.

En plus, on voudrait démontrer une équivalence entre les différentes notions de symétrie pour les surfaces vues dans les Chapitres 6 et 7. On doit donc reinterpreter la construction de Berglund-Hübsch dans le cadre de la géométrie torique pour montrer quand les résultats de Batyrev s'appliquent. Un problème majeur de cet approche est que la symétrie miroir de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan est établie entre deux variétés precises, tandis que la symétrie miroir de Batyrev relie deux familles de variétés de Calabi-Yau.

Dans ce chapitre on va expliquer la définition de symétrie miroir donnée par Batyrev dans le cadre de la géométrie torique. D'abord on rappellera des définitions et théorèmes utils pour la suite et on montrera comment on construit des variétés toriques à partir de cônes et éventails ou à partir d'un polytope. Ensuite on va présenter la définition de symétrie miroir entre deux familles de variétés de Calabi-Yau obtenues à partir d'un polytope et de son polaire. Enfin on montrera comment relier ça à la symétrie miroir de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan pour surfaces K3 vue dans le Chapitre 7.

8.1 Quelques rappels

On rappelle des définitions et notations qui seront utiles pour la suite. Pour plus de détails voir [Fu], [CK], [CLS].

Définition 8.1.1 *Une variété torique est une variété algébrique normale X qui contient un ouvert de Zariski qui est un tore $T \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ de façon que l'action du tore sur lui-même $T \times T \to T$ s'étend à une action sur X :*

$$T \times X \to X.$$

On veut montrer comment construire une variété torique à partir d'un éventail (ou fan) et à partir d'un polytope. Dorénavant soit N un réseau et M son dual : $M = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. On denote $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $M_{\mathbb{R}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Le produit standard $M \times N \to \mathbb{Z}$ est indiqué $(\cdot, \cdot)$.

Définition 8.1.2 *Un* **cône polyhedral** *dans N est un cône σ qui est engendré par un nombre fini de vecteurs dans $N_{\mathbb{R}}$:*

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i v_i : a_i \geq 0, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les v_i sont dits **générateurs** *et on dit que σ est* **rationnel** *si $v_i \in N$ pour tout i et qu'il est* **fortement convexe** *si $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$. La* **dimension de** *$\sigma$ est la dimension du sous-espace de $N_{\mathbb{R}}$ engendré par σ.*

Définition 8.1.3 *Le* **cône dual** *$\sigma^\vee$ est*

$$\sigma^\vee := \{m \in M_{\mathbb{R}} : (m, x) \geq 0 \ \forall x \in \sigma\}$$

Définition 8.1.4 *Une* **face** *de σ est le sous-ensemble*

$$\tau := \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma : (v, u) = 0\}$$

pour $u \in \sigma^\vee$. La face τ est dite **propre** *si $\tau \neq \sigma$; une* **facette** *de σ est une face de dimension* $\dim \sigma - 1$.

On denote

$$S_\sigma := \sigma^\vee \cap M.$$

Si σ est un cône rationnel alors S_σ est un semigroupe finiement engendré et on considère l'algèbre de semigroupe $\mathbb{C}[S_\sigma] = \{\sum_{u_i \in S_\sigma} a_i t^{u_i} : a_i \in \mathbb{C}\}$.

Définition 8.1.5 *La* **variété torique affine associée au cône** *σ est $U_\sigma := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$.*

Pour montrer que U_σ est une variété torique il faut montrer l'action d'un tore sur U_σ. D'abord on remarque que, vu que $S_\sigma \subset M$, alors $\mathbb{C}[M] \supset \mathbb{C}[S_\sigma]$ et $\mathbb{C}[M] \simeq \mathbb{C}[\mathbb{Z}^n]$ est l'anneau de polynômes de Laurent et est un domaine integral. Donc $\mathrm{Spec}\mathbb{C}[M] \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ et on l'appelle T_N. L'inclusion $S_\sigma \subset M$ induit l'application $T_N \to \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma]) = U_\sigma$ et cela nous permet de voir le tore dans U_σ.

L'action est donc

$$\begin{aligned} T_N \times U_\sigma &\to U_\sigma \\ (t, x) &\mapsto t \cdot x \end{aligned}$$

avec $t \cdot x(s) = t(s)x(s)$. Il s'agit d'une action compatible avec l'inclusion des faces, c'est-à-dire le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} T_N \times U_\tau & \longrightarrow & T_N \times U_\sigma \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\tau & \longrightarrow & U_\sigma \end{array}$$

est commutatif pour τ face de σ.

Exemple 8.1.6 Soit $N \cong \mathbb{Z}^n$. Soit $\sigma = \{0\}$ le cône qui contient seulement l'origine de N. Donc $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M \simeq \mathbb{Z}^n$, engendré par les $(\ldots, 0, \pm 1, , 0 \ldots)$. Alors

$$\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}, \ldots, x_n, x_n^{-1}]$$

et $U_\sigma = (\mathbb{C}^*)^n$, c'est-à-dire la variété torique associée est le tore de dimension n.

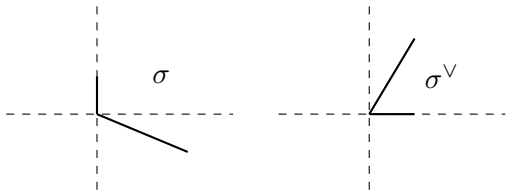


FIGURE 8.1 – Les cônes σ et $\sigma^\vee$ de l'Exemple 8.1.8

Exemple 8.1.7 Si $\sigma = (\mathbb{R}^+)^n$, alors $\sigma^\vee$ est l'espace des vecteurs avec toute coordonnée positive et donc $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ et $U_\sigma = \mathbb{C}^n$.

Exemple 8.1.8 Soit $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ le cône engendré par les vecteurs $2e_1 - e_2$ et e_2. Donc son dual est le cône $\sigma^\vee$ engendré par $e_1, e_1 + 2e_2$ et donc $S_\sigma = \langle e_1, e_1 + e_2, e_1 + 2e_2 \rangle$ (voir Figure 8.1).

Il suit que $\mathbb{C}[S_\sigma] = \mathbb{C}[x_1, x_1x_2, x_1x_2^2]$ et la variété torique associée est

$$U_\sigma = \mathbb{C}[x, y, z]/\langle xz - y^2 \rangle,$$

c'est-à-dire le cône quadrique qu'on appelle Q.

Définition 8.1.9 *Un* **éventail** *ou* **fan** Σ *dans* N *est une famille finie de cônes rationnels fortement convexes telle que :*

— *si* $\sigma \in \Sigma$*, alors toute face de* σ *est dans* Σ *;*

— *si* $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$*, alors* $\sigma_1 \cap \sigma_2$ *est une face de* σ_1 *et de* σ_2*.*

Pour tout d *on denote* $\Sigma(d)$ *l'ensemble des cônes de* Σ *de dimension* d *et le* **support** *de* Σ *est le sous-espace de* $N_\mathbb{R}$ *définit par* $|\Sigma| = \cup_{\sigma \in \Sigma} \sigma \subset N_\mathbb{R}$*.*

Dans la suite on se servira souvent des générateurs des cônes de dimension 1, c'est-à-dire les éléments de $\Sigma(1)$. On les appelle $\rho \in \Sigma(1)$ et v_ρ est le seul générateur du semigroupe $\rho \cap N$, $\rho \in \Sigma(1)$. Cela permet d'écrire tout cône $\sigma \in \Sigma$ sous la forme

$$\sigma = \left\{ \sum_{\rho \in \Sigma(1), \rho \subset \sigma} \lambda_\rho v_\rho : \lambda_\rho \geq 0 \right\}.$$

Définition 8.1.10 *On dit que le fan* Σ *est* **non-dégénéré** *si les* v_ρ *engendrent* $N_\mathbb{R}$*.*

La Définition 8.1.9 permet de définir la variété torique associée au fan Σ, qui est obtenue en collant les variétés toriques affines U_σ pour $\sigma \in \Sigma$ le long des faces communes. Soit $\bigsqcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma$ l'union disjointe des U_σ et τ une face de σ. On prend $x \in U_\tau$ et on considère la rélation d'équivalence induite par

$$(x, \tau) \sim (\iota_{\sigma\tau}(x), \sigma)$$

où $\iota_{\sigma\tau}$ est le plongement $\iota_{\sigma\tau} : U_\tau \hookrightarrow U_\sigma$. La rélation d'équivalence induite est bien définie car $U_\sigma \cap U_{\sigma'} = U_{\sigma \cap \sigma'}$ et il y a un plongement $U_{\sigma \cap \sigma'} \hookrightarrow U_\sigma \times U_{\sigma'}$.

Définition 8.1.11 *La* **variété torique associée au fan** Σ *est* $\mathbb{P}_\Sigma$ *la variété algébrique qui est l'ensemble des classes d'équivalence par rapport à* $\sim$*.*

Pour voir l'action du tore sur $\mathbb{P}_\Sigma$ on rappelle que, pour $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, $\tau = \sigma_1 \cap \sigma_2$ on a

$$\begin{array}{ccc} T_N \times U_{\sigma_1} & \longrightarrow & U_{\sigma_1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_N \times U_{\tau} & \longrightarrow & U_{\tau} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_N \times U_{\sigma_2} & \longrightarrow & U_{\sigma_2} \end{array}$$

Donc l'action de T_N sur $\mathbb{P}_\Sigma$ est la seule application $T_N \times \mathbb{P}_\Sigma \to \mathbb{P}_\Sigma$ telle que sa restriction aux $T_N \times U_\sigma$ coïncide avec l'action $T_N \times U_\sigma \to U_\sigma$ déjà vue.

Exemple 8.1.12 Soit Σ le fan de la Figure 8.2. où on appelle $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ les trois cônes de

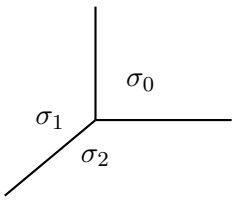


FIGURE 8.2 – Fan de $\mathbb{P}^2$

dimension 2. On veut montrer que ce fan correspond à la variété torique $\mathbb{P}^2$. Grâce à ce qu'on a vu dans l'Exemple 8.1.7 on sait que $U_{\sigma_i} \simeq \mathbb{C}^2$ pour $i = 0, 1, 2$. On voit par exemple comment coller U_{σ_0} et U_{σ_1}. Vu que

$$U_{\sigma_0} = \text{Spec}\mathbb{C}[x, y] \text{ et } U_{\sigma_1} = \text{Spec}\mathbb{C}[x^{-1}, x^{-1}y],$$

on peut les coller grâce à l'isomorphisme

$$(x, y) \mapsto (x^{-1}, x^{-1}y).$$

Ce même principe permet d'obtenir $\mathbb{P}^2$ en collant les trois copies de $\mathbb{C}^2$. D'ailleurs, si on prend $x = \frac{x_1}{x_0}$ et $y = \frac{x_2}{x_0}$, on voit que U_{σ_i} correspond à la carte affine $\{x_i \neq 0\}$ pour $i = 0, 1, 2$ donc on retrouve la construction classique de $\mathbb{P}^2$.

Exemple 8.1.13 En généralisant l'Exemple précédent on obtient la construction de l'espace projectif $\mathbb{P}^n$. Le fan de $\mathbb{P}^n$ est le fan qui a comme v_ρ (les générateurs des cônes de dimension 1) les point suivants :

$$\begin{array}{c} x_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ x_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \ldots \\ x_{n-1} = (0, \ldots, 0, 1) \\ x_n = (-1, -1, \ldots, -1) \end{array} .$$

Exemple 8.1.14 La construction pour l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ est similaire (voir [Co, Ex.2.5]). On suppose que $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ soit normalisé. On prend $N = \mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}(w_1, \ldots, w_n)$ et soient $e_i, i = 1, \ldots, n$ les éléments de la base standard de $\mathbb{Z}^n$. On appelle v_i les images des e_i et on a donc $w_1v_1 + \ldots + w_nv_n = 0$. On obtient le fan de $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ en prenant tous les cônes engendrés par un sous-ensemble propre de $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Quand tout w_i est égal à 1, alors $v_1, \ldots v_{n-1}$ forment une $\mathbb{Z}$-base de N et

$$v_n = -v_1 - \ldots - v_{n-1}.$$

Donc on retrouve les générateurs de cônes vu dans l'exemple précédent.

Si par exemple les poids sont $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (6, 5, 3, 1)$, alors les vecteurs v_1, v_2, v_3 forment une $\mathbb{Z}$-base de N et $v_4 = -6v_1 - 5v_2 - 3v_3$. Donc les generateurs

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 0, 0) \\ x_2 &= (0, 1, 0) \\ x_3 &= (0, 0, 1) \\ x_4 &= (-6, -5, -3) \end{aligned}$$

donnent le fan $\Sigma_{\mathbb{P}(6,5,3,1)}$.

On rappelle ici le Théorème de correspondence orbites-cônes :

Théorème 8.1.15 *([CLS, Theor. 3.2.6]) Soit Σ un fan dans $N_{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{P}_\Sigma$ la variété torique associée. Alors*

— *il y a une correspondence 1 :1*

$$\{\textit{cônes } \sigma \textit{ dans } \Sigma\} \leftrightarrow \{\textit{orbites de } T_N \textit{ dans } \mathbb{P}_\Sigma\} \tag{8.1.1}$$

$$\sigma \leftrightarrow O(\sigma) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^*); \tag{8.1.2}$$

— *si $n = \dim N_{\mathbb{R}}$, alors pour tout $\sigma \in \Sigma$ on a*

$$\dim O(\sigma) = n - \dim \sigma; \tag{8.1.3}$$

— *les U_σ sont union d'orbites :*

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \textit{ face de } \sigma} O(\tau)$$

— *τ est face de σ si et seulement si $O(\sigma) \subset \overline{O(\tau)}$ et*

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \textit{ face de } \sigma} O(\sigma)$$

où $\overline{O(\tau)}$ est l'adherence de Zariski.

Ce Théorème donne par exemple que le point $\{0\}$ correspond au tore T et les cônes de dimension maximale du fan correspondent au points fixes par l'action du tore.

Exemple 8.1.16 *On voit par exemple le cas de $\mathbb{P}^2$ vu dans l'Exemple 8.1.12 : l'origine $(0, 0, 0)$ correspond à T_N qui a dimension 2 et en effet l'égalité* (8.1.3) *est satisfaite car $\dim O((0, 0, 0)) = 2 = n - \dim((0, 0, 0))$. Les trois cônes de dimension 1 donnent trois orbites de dimension 1 grâce à* (8.1.3) *et de même les cônes maximaux correspondent au trois points fixes par l'action du tore $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.*

Soient Σ_1 un fan dans N_1 et Σ_2 un fan dans N_2 ; soient $\mathbb{P}_{\Sigma_1}$ et $\mathbb{P}_{\Sigma_2}$ les deux variétés toriques associées et T_1, T_2 les deux tores qui agissent sur $\mathbb{P}_{\Sigma_1}$ et $\mathbb{P}_{\Sigma_2}$.

Définition 8.1.17 *On appelle* **morphisme torique** *tout morphisme de variété projective*

$$F : \mathbb{P}_{\Sigma_1} \to \mathbb{P}_{\Sigma_2}$$

tel que $F(T_1) \subset T_2$ et $F_{|T_1}$ est un morphisme de groupes.

Remarque 8.1.18 *Tout morphisme torique peut être obtenu à partir d'un morphisme entre les réseaux (c'est-à-dire un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules) qui conserve les fan. Soit $\phi : N_1 \to N_2$ tel que pour tout $\sigma_1 \in \Sigma_1$ il existe $\sigma_2 \in \Sigma_2$ tel que $\phi_{\mathbb{R}}(\sigma_1) \subset \sigma_2$ ($\phi_{\mathbb{R}}$ est l'extension réelle de ϕ). Cela induit un homomorphisme entre $\mathbb{C}[S_{\sigma_2}]$ et $\mathbb{C}[S_{\sigma_1}]$, d'oú un morphisme $f_{\sigma_1} : U_{\sigma_1} \to U_{\sigma_2}$. Il faut maintenant coller ces morphimes pour obtenir un morphisme $f : \mathbb{P}_{\Sigma_1} \to \mathbb{P}_{\Sigma_2}$. On remarque que le tore T_1 est envoyé, par f, dans le tore T_2 car ϕ est un morphisme de réseaux et donc $\phi(0) = 0$ et on a vu que le point 0 du réseau correpond au tore dans la variété torique.*

Exemple 8.1.19 Soit $\sigma = \mathrm{Cone}(e_1, e_2)$ dans $\mathbb{R}^2$. On prend le fan Σ donné par σ et toutes ses faces. Il s'agit donc du premier quadrant de $\mathbb{R}^2$. Soit F l'application suivante :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ (x, y) &\mapsto (2x, y - x) \end{aligned}$$

On a $F(e_1) = (2e_1 - e_2)$ et $F(e_2) = (e_2)$, d'où $F_{\mathbb{R}}(\sigma) = \mathrm{Cone}(2e_1 - e_2, e_2)$ (voir Figure 8.1.19). La variété torique associée à σ est $\mathbb{C}^2$, tandis que la variété associée à $F_{\mathbb{R}}(\sigma)$ est le cône quadrique Q vu dans l'Exemple 8.1.8. Donc F donne un morphisme torique entre $\mathbb{C}^2$ et Q. L'application entre les tores est $(\lambda, \mu) \mapsto (\lambda^2, \mu\lambda^{-1})$.



FIGURE 8.3 – Exemple de morphisme torique

Maintenant on veut definir une variété torique à partir d'un polytope et montrer comment ces deux définition s'équivalent (voir [Fu, Sec 1.5], [CK, Sect 3.2.2]).

Définition 8.1.20 *Un* **polytope convexe** Δ *dans $N_{\mathbb{R}}$ est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points $v_i \in N_{\mathbb{R}}, i = 1, \ldots r$. Un polytope est dit* **entier (ou lattice polytope)** *si $v_i \in N$ pour tout i.*

Une **face propre** F *de Δ est l'intersection de Δ avec un hyperplane de support H_r, c'est-à-dire*

$$F = \Delta \cap H_r = \{v \in \Delta : (v, u) = r\}$$

où $u \in M_{\mathbb{R}}$ et $(v, u) \geq r$ pour tout $v \in \Delta$. Les faces de dimension 0 sont dites **sommets** *de Δ.*

Définition 8.1.21 *Si Δ est un polytope dans N, le* **polytope polaire (ou dual)** *de Δ est*

$$\Delta^\circ = \{u \in M_{\mathbb{R}} : (v, u) \geq -1 \ \forall v \in \Delta\}.$$

Proposition 8.1.22 (voir [Fu, Sec 1.5]) *Le polytope polaire est un polytope convexe et $(\Delta^\circ)^\circ = \Delta$. Si F est une face de Δ, alors l'ensemble*

$$F^* = \{u \in \Delta^\circ : (v, u) = -1 \ \forall v \in F\}$$

est une face de Δ° et cette correspondence $F \leftrightarrow F^*$ est une correpondence $1:1$ entre les faces de Δ et les faces de Δ° qui intervertit les inclusions. En plus, $\dim(F) + \dim(F^*) = \dim(N) - 1$.

Définition 8.1.23 *Un polytope $\Delta \subset N_{\mathbb{R}}$ est dit* **réflexif** *si Δ est un polytope entier, il contient l'origine comme point interne et Δ° est entier lui-aussi.*

Une définition équivalente de polytope réflexif dit que Δ est réflexif si et seulement si $Int(\Delta) \cap M = \{0\}$ et tout hyperplane qui est de support à une facette F de Δ est à distance 1 de l'origine, c'est-à-dire il est un hyperplane de la forme $H_F = \{m \in M_{\mathbb{R}} : (m, v_F) = -1\}$ pour un élément $v_F \in N$.

Batyrev dans [Ba, Theorem 4.1.6] montre la Proposition suivante :

Proposition 8.1.24 *Un polytope Δ est réflexif si et seulement si Δ° est réflexif.*

La construction de la variété torique à partir d'un polytope convexe est montré dans [CK, Sec.3.2.2]. Soit Δ un polytope entier de dimension n. On prend les monômes donnés par $t_0^k \chi^m$ pour $m \in k\Delta$. L'operation entre monômes est $t_0^k \chi^m \cdot t_0^l \chi^s = t_0^{k+l} \chi^{m+s}$ et elle est bien definie car $m + s \in (k + l)\Delta$.

On appelle S_Δ la $\mathbb{C}$-algèbre engendrée par les $t_0^k \chi^m$ et on lui donne une graduation en fixant $\deg(t_0^k \chi^m) = k$.

Définition 8.1.25 *La variété projective associée au polytope Δ est $\mathbb{P}_\Delta = \mathrm{Proj}(S_\Delta)$.*

On veut montrer que $\mathbb{P}_\Delta$ est une variété torique et pour cela on déterminera le fan qui l'engendre.

Soit Δ un polytope dans M et $F \subset \Delta$ une face. On prend le cône

$$\hat{\sigma}_F = \{\lambda(m - m') : m \in \Delta, m' \in F, \lambda \geq 0\}.$$

Il s'agit d'un cône dans $M_{\mathbb{R}}$ et son dual est un cône $\sigma_F \subset N_{\mathbb{R}}$. On appelle **fan normal à** Δ le fan $\Sigma_\Delta \subset N$ de ces cônes, c'est-à-dire

$$\Sigma_\Delta = \{\sigma_F : F \text{ face de } \Delta\}.$$

Batyrev dans [Ba] montre que la variété torique associée au fan Σ_Δ est $\mathbb{P}_\Delta$. En particulier, si le polytope Δ contient l'origine 0 à l'interieur, le fan normal Σ_Δ est le fan des cônes sur les faces propres du polytope polaire, comme montre le lemme suivant.

Lemme 8.1.26 (voir [CK, Lemma 3.2.1]) *Le fan dans $N_{\mathbb{R}}$ qui est obtenu à partir des cônes sur les faces propres de Δ° est le fan normal de Δ et donne donc la variété torique $\mathbb{P}_\Delta$.*

Exemple 8.1.27 Soit Δ le polytope de sommets $P_0 = (-1, -1)$, $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (-1, 2)$.

On veut montrer que la variété torique donnée par Δ est $\mathbb{P}^2$ et on va se servir du Lemme 8.1.26. Le polytope polaire de Δ est $\Delta^\circ = \mathrm{Conv}((1, 0), (0, 1), (-1, -1))$.

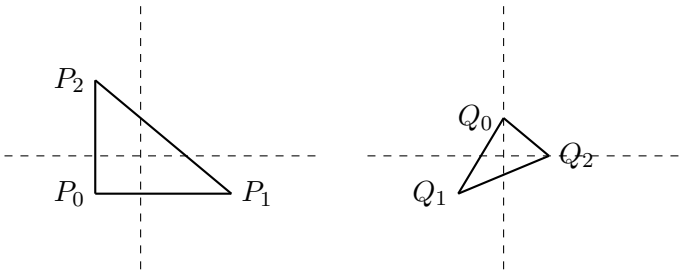


FIGURE 8.4 – Polytopes Δ et Δ°

L'origine est un point interne et le fan des cônes sur les faces propres de Δ° est exactement le fan de la Figure 8.2, qui est le fan de $\mathbb{P}^2$. Pareillement, le polytope qui donne $\mathbb{P}^n$ est

$$\Delta_{\mathbb{P}^n} = \mathrm{Conv}((-1, \ldots, -1), (n, -1, \ldots, -1), \ldots, (-1, \ldots, -1, n)).$$

On rappelle la définition de variété Gorenstein et Fano (voir [CLS]). Soient ρ les générateurs des cônes de dimension 1 du fan Σ.

Définition 8.1.28 *Une* **variété Gorenstein** *est une variété torique normale X_Σ telle que le diviseur anticanonique $-K_{X_\Sigma} = \sum_\rho D_\rho$ est de Cartier. Une* **variété Gorenstein Fano** *est une variété complète normale telle que $-K_X$ est Cartier et ample.*

Donc toute variété Gorenstein Fano est projective et en général, vu que toute variété lisse est Gorenstein, si X est lisse on dit juste que X est Fano.

Demander que un polytope soit réflexif est une condition nécessaire et suffisante pour que la variété associée soit Fano, comme montré dans [CK, Prop. 3.5.5] :

Proposition 8.1.29 *$\mathbb{P}_\Delta$ est une variété Fano si et seulement si Δ est un polytope réflexif.*

La proposition précedente pour les espaces projectifs à poids $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$ se traduit dans le Lemme 8.1.30.

Lemme 8.1.30 *([CK, Lemme 3.5.6] L'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_n)$ est Fano si et seulement si pour tout $j = 1, \dots, n$ le poid w_j divise $d = \sum_{i=1}^n w_i$.*

Exemple 8.1.31 On prend l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_{n-1}, 1)$ avec $w_n = 1$. Soit d la somme des poids, c'est-à-dire $d = \sum_{i=1}^{n-1} w_i + 1$. Alors le polytope qui donne la variété torique $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_{n-1}, 1)$ est l'enveloppe convexe de

$$\left(\frac{d}{w_1} - 1, -1, \dots, -1\right), \dots, \left(-1, \dots, -1, \frac{d}{w_{n-1}} - 1\right), (-1, \dots, -1).$$

Grâce à la Proposition 8.1.29 ce polytope est réflexif si et seulement si l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, \dots, w_{n-1}, 1)$ est Fano, c'est-à-dire w_j divise d pour tout $j = 1, \dots, n-1$.

Par exemple on prend l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. Les sommets de $\Delta_{\mathbb{P}(6,4,1,1)}$ sont

$$(1, -1, -1), (-1, 2, -1), (-1, -1, 11), (-1, -1, -1)$$

et il s'agit d'un polytope réflexif car tout poid divise la somme des poids $d = 12$. Si on prend $\mathbb{P}(6, 5, 3, 1)$, les sommets de $\Delta_{\mathbb{P}(6,5,3,1)}$ sont

$$\left(\frac{3}{2}, -1, -1\right), (-1, 2, -1), (-1, -1, 4), (-1, -1, -1)$$

et $\Delta_{\mathbb{P}(6,5,3,1)}$ n'est pas un polytope réflexif car il n'est pas entier. Equivalentement $\mathbb{P}(6, 5, 3, 1)$ n'est pas Fano.

On va avoir besoin, dans la suite, de la notion de **subdivision projective** d'un fan Σ :

Définition 8.1.32 ([CK, Def.4.1.1]) *Soit $\Delta \subset M_\mathbb{R}$ un polytope réflexif. Si Σ est un fan dans $N_\mathbb{R}$ on dit que Σ est une* **subdivision projective** *si Σ raffine le fan normal de Δ et*

- *$\Sigma(1) \subset \Delta^\circ - \{0\}$,*
- *la variété associée X_Σ est projective et simpliciale (c'est-à-dire , pour tout cône du fan Σ ses générateurs son linéairement independants sur $\mathbb{R}$).*

De plus, si $\Sigma(1) = \Delta^\circ - \{0\}$ on dit que Σ est une subdivision projective **maximale**.

Les subdivisions projectives sont utiles pour s'assurer que la variété associée à un polytope ne soit pas "trop singulière" :

Proposition 8.1.33 ([CK, Lemma 4.1.2]) *Si Σ est une subdivision projective de $\Delta \subset M_\mathbb{R}$ polytope réflexif, alors on a un morphisme birationnel $f : X_\Sigma \to \mathbb{P}_\Delta$ et*

— X_Σ *est un orbifold Gorenstein ;*
— Δ *est le polytope associé à* $-K_{X_\Sigma}$ *;*
— *le diviseur* $-K_{X_\Sigma}$ *est semi-ample, c'est-à-dire il est engendré par les sections globales et* $(-K_{X_\Sigma})^n > 0$ *;*
— *l'application* f *est crepante, c'est-à-dire* $f^*(K_{\mathbb{P}_\Delta}) = K_{X_\Sigma}$.

La preuve de cette Proposition est basé sur la remarque suivante (voir [CK] et [Re]) qui explique comment la classe canonique d'une variété torique X change quand on ajoute des nouveaux générateurs de cônes. En général, ajouter un générateur 1-dimensionnel v à un fan Σ en le raffinant (c'est-à-dire en ajoutant tous les nouveaux cônes qui comprennent v) equivaut à éclater la variété X_Σ et on obtient une variété torique birationnelle.

Remarque 8.1.34 *Soit X une variété torique ; soit X' la variété obtenue en ajoutant au fan de X un générateur 1-dimensionnel v' et soit $g : X' \to X$ le morphisme associé. Alors*

$$g^*(K_X) = K_{X'} - ((m_{F^*}, v') + 1)D'$$

où F^* est une face de Δ° et v' est dans l'interieur de F^* et le diviseur D' est le diviseur qui correspond à v'.

8.1.1 L'anneau de Cox

On rappelle la construction qui donne l'anneau de Cox d'une variété torique. L'idée est d'obtenir chaque variété torique de la même façon de la construction de $\mathbb{P}^n$ comme étant le quotient $\frac{\mathbb{C}^n - \{0\}}{\mathbb{C}^*}$. Ainsi l'anneau de Cox donnera des coordonnées à la variété qui sont analogues aux coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^r$.

Soit X une variété torique avec fan $\Sigma \subset N_\mathbb{R}$ qui est non-dégénéré. Donc $X = \mathbb{P}_\Sigma$. Soient $v_1, \ldots, v_r$ les générateurs primitifs des cônes de dimension 1 de Σ.

On appelle $e_1, \ldots, e_r$ les générateurs de $\mathbb{Z}^r$ et on pose

$$\begin{aligned} P : \mathbb{Z}^r &\to N \\ e_i &\mapsto v_i \end{aligned}$$

qui est une application $\mathbb{Z}$-linéaire. Soit maintenant Σ_0 le fan donné par le quadrant positif $(\mathbb{N})^r$ avec toutes ses faces. A l'interieur de Σ_0 on prend le fan $\hat{\Sigma}$ des cônes $\hat{\sigma}$ de Σ_0 tels que $P_\mathbb{R}(\hat{\sigma}) \subset \sigma$ pour un cône σ de Σ. Alors $\mathbb{P}_{\Sigma_0} \simeq \mathbb{C}^r$ et on note $\hat{X} := \mathbb{P}_{\hat{\Sigma}}$, qui est un ouvert de Zariski de $\mathbb{C}^r$.

Le morphisme $p : \hat{X} \to X$ est un morphisme torique, car on n'a pris que les cônes qui sont envoyés par p sur des cônes de Σ (voir Remarque 8.1.18). On appelle **lieu irrilevant** le complement de $\hat{X}$ dans X.

On prend maintenant le dual de P :

$$P^\vee : M \to \mathbb{Z}^r$$

et il s'agit d'une application injective car Σ est non-dégénéré. On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{P^\vee} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{Q} K \longrightarrow 0, \tag{8.1.4}$$

où K est le conoyau de $P^\vee$. Cette suite donne une graduation à $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r] = \bigoplus_{w \in K} \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]_w$ de la manière suivante :

$$\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]_w = \bigoplus_{u \in Q^{-1}(w) \cap \Sigma_0} \mathbb{C}x^u.$$

Définition 8.1.35 *L'***anneau de Cox** $\mathcal{R}(X_\Sigma)$ *de* X *est l'anneau de polynômes* $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_r]$ *avec la graduation donnée par* K*.*

De plus, la graduation induit l'action d'un groupe : on prend $G := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[K])$. Ce groupe agit sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{R}(X_\Sigma)) \simeq \mathbb{C}^r$ de la façon suivante :

$$g \cdot (x_1, \ldots, x_r) = (\chi^{w_1}(g)x_1, \ldots, \chi^{w_r}(g)x_r)$$

avec $\deg x_i = w_i$ pour tout i.

Cela implique le théorème suivant, où on rappelle que une application est un bon quotient par l'action de G si localement il s'agit d'une application de la forme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A^G)$ et A^G est l'anneau d'invariants pour l'action de G.

Théorème 8.1.36 *Le morphisme* $p : \hat{X} \to X$ *est un bon quotient par l'action du groupe* $G = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[K])$*.*

Exemple 8.1.37 *Pour voir l'analogie avec la construction de* $\mathbb{P}^n$ *on montre par exemple comment obtenir l'anneau de Cox de* $X = \mathbb{P}^2$ *avec cette construction. On prend* P *donnée par la matrice*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

donc les colonnes de P *sont les générateurs primitifs de* $\mathbb{P}^2$*. Le fan* Σ_0 *est* $(\mathbb{N})^3$ *mais il faut enlever l'interieur de* $(\mathbb{N})^3$ *pour que tout cône soit envoyé sur un cône de* Σ*. Donc* $\hat{\Sigma}$ *est le bord de* Σ_0*. Ici* $\mathbb{P}_{\Sigma_0} = \mathbb{C}^3$ *et* $\hat{X} = \mathbb{C}^3 - \{0\}$*, donc le lieu irrelevant est* $\{0\}$*. On prend la suite* (8.1.4) *qui dans ce cas est*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{P^T} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{Q} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{8.1.5}$$

où on voit que $K \simeq \mathbb{Z}$ *engendré par* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. L'anneau de Cox de* $\mathbb{P}^2$ *est* $\mathcal{R}_{\mathbb{P}^2} = \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$ *est pour voir les degrés des éléments* x_i *on doit regarder le produit avec*$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *:*

$$\deg(x_1) = Q(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

De la même façon, le degré d'un élément $x_1^a x_2^b x_3^c$ *est* $a + b + c$*.*

8.2 La symétrie de Batyrev

Les résultats de cette Section viennent de [CK]. Batyrev montre une façon de traduire la dualité entre un polytope Δ et son polytope polaire Δ° dans le cadre de la symétrie miroir, c'est-à-dire comme dualité entre familles de variétés de Calabi-Yau obtenues à partir des variétés toriques $\mathbb{P}_\Delta$ et $\mathbb{P}_{\Delta^\circ}$.

Dorénavant soit $\Delta \subset M_\mathbb{R}$ un polytope réflexif de dimension n et Δ° son polytope polaire. D'abord on rappelle comment on obtient des familles des variétés de Calabi-Yau à partir de Δ.

Proposition 8.2.1 ([CK, Prop 4.1.3]) *La section anticanonique générale* $\bar{V} \in |-K_{\mathbb{P}_\Delta}|$ *est une variété de Calabi-Yau de dimension* $n-1$*. Si* Σ *est une subdivision projective de* Δ *alors la section antincanonique générale* $V \in |-K_{X_\Sigma}|$ *est un orbifold Calabi-Yau ; si en plus* Σ *est maximale, alors* V *est un orbifold Calabi-Yau minimal.*

Grâce à la proposition precedente on a donc ce diagramme :

$$\begin{array}{rccc} f: & X_\Sigma & \to & \mathbb{P}_\Delta \\ & \cup & & \cup \\ f_{|V}: & V & \to & \bar{V} \end{array}$$

où V et $\bar{V}$ sont Calabi-Yau et $f_{|V}$ est crepante. Du coup on a la famille de variétés de Calabi-Yau $V \in |-K_{X_\Sigma}|$.

Si on repète la construction avec le polytope polaire Δ° on obtient une famille de variétés de Calabi-Yau $V^* \in |-K_{X_{\Sigma^*}}|$. Dans [Ba] on conjecture que les deux familles de variétés soient miroir l'une de l'autre dans le sens de la physique. En général ce résultat est difficile à demontrer mais il assume une forme plus claire pour les variétés de dimension inferieure ou égale à 3. En effet comme conséquence de cette conjecture on devrait avoir, par exemple, des isomorphismes entre les espaces $H^{1,1}(V)$ et $H^{n-2,1}(V^*)$ et aussi entre $H^{1,1}(V^*)$ et $H^{n-2,1}(V)$.

À support de cette conjecture Batyrev preuve que

$$h^{1,1}(V) = h^{n-2,1}(V^*) \quad \text{et} \quad h^{n-2,1}(V) = h^{1,1}(V^*)$$

et donc on retrouve grâce à la construction avec les polytopes polaire des familles qui sont les bons candidats pour être miroir l'une de l'autre.

Pour prouver le résultat de Batyrev il faut d'abord définir certaines applications. Soit $L(k\Delta) = \{f : f = \sum_{m \in k\Delta \cap M} a_m t^m, a_m \in \mathbb{C}\}$ l'espace des polynômes de Laurent. On indiquera

$$l(k\Delta) = \dim(L(k\Delta)) = |k\Delta \cap M|$$

$$l^*(k\Delta) = |\{m \in k\Delta \cap M : m \text{ n'est pas dans une facette de } k\Delta \cap M\}|$$

Proposition 8.2.2 ([Ba]) *Soit V la famille de variétés de Calabi-Yau obtenue comme avant. Alors*

$$h^{1,1}(V) = l(\Delta^\circ) - n - 1 - \sum_{\Gamma^\circ} l^*(\Gamma^\circ) + \sum_{\theta^\circ} l^*(\theta^\circ) l^*(\tilde{\theta}^\circ)$$

$$h^{n-2,1}(V) = l(\Delta) - n - 1 - \sum_{\Gamma} l^*(\Gamma) + \sum_{\theta} l^*(\theta) l^*(\tilde{\theta})$$

où Γ° est une facette Δ° et θ° est une face de codimension 2 de Δ° et $\tilde{\theta}^\circ$ est la face de Δ dual de θ° (et équivalentement pour $\Gamma, \theta, \tilde{\theta}$).

On se rend compte de la Proposition 8.2.2 que si on change Δ et Δ° on intervertit les rôles de $h^{1,1}$ et $h^{n-2,1}$. Du coup on a comme consequence le théorème sur les nombres de Hodge.

Théorème 8.2.3 ([Ba]) *Soient V et V^* les deux familles de variétés de Calabi-Yau obtenues comme avant. Alors*

$$h^{1,1}(V) = h^{n-2,1}(V^*) \quad \textit{et} \quad h^{n-2,1}(V) = h^{1,1}(V^*)$$

Remarque 8.2.4 *La construction de Batyrev a comme hypothèse le fait que le polytope Δ soit réflexif. Une question naturelle est donc de se demander si c'est possible obtenir les mêmes résultats sur la symétrie miroir pour les cas où les variétés ne s'obtiennent pas à partir des polytopes réflexifs mais avec des hypothèses moins fortes. Cela sera l'objet de la prochaine Section.*

8.3 Construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan et géométrie torique

On collecte ici des résultats qui montrent comment lier la construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan et la géométrie torique. En partie on trouve ces résultats dans [Pu] où dans [Sho] et [Ke], bien que les méthodes utilisées sont parfois différentes. Les faits qu'on remarque dans ce chapitre sont la motivation pour les travaux futurs sur ce thème (voir [AC]).

8.3.1 La construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan

On va maintenant expliquer la construction Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan en termes de la géométrie torique. Soient comme d'habitude N un réseau et M son dual. D'abord on traite la construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan pour toute dimension n, avant de passer au cas $n = 4$, c'est-à-dire aux surfaces K3. Le contexte est le même du Chapitre 6, $W = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{i,j}}$ est un polynôme quasi-homogène dans $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ de degré total d. On suppose aussi que la condition Calabi-Yau soit vérifiée et donc $d = \sum_i w_i$. Alors $d = \deg |-K_{\mathbb{P}(w_1,\ldots,w_n)}|$.

Soit $\Sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ le fan de l'espace projective à poids $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ et on appelle $v_1, \ldots, v_n \in N$ les générateurs primitifs des cônes de dimension 1 de Σ. On a donc la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{P} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{Q} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \tag{8.3.1}$$

où P est la matrice $n \times (n-1)$ qui a pour lignes $v_1, \ldots, v_n$ et Q est l'application définie

$$Q(\alpha) = \alpha \cdot w$$

pour $\alpha \in \mathbb{Z}^n$.

Soit $e \in \mathbb{Z}^n$ le vecteur qui a toute entrée égale à 1 ; alors $Q(e) = d$ (c'est une conséquence de la condition Calabi-Yau). Soit donc $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\alpha \in Q^{-1}(d)$. Étant donné que la suite (8.3.1) est exacte, il existe un unique élément $u \in M$ tel que $P(u) = \alpha - e$. Cela permet d'associer à chaque monôme de degré d un élément de M et donc, quand on a le polynôme W on y associe les n éléments $u_1, \ldots, u_n \in M$.

Exemple 8.3.1 Soit $W = x^2 + y^3 + z^{12} + w^{12}$ dans $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$. Alors les générateurs du fan de $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ sont $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1), v_4 = (-6, -4, -1)$ et donc

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les u_1, u_2, u_3, u_4 associés aux monômes de W sont $u_1 = (1, -1, -1), u_2 = (-1, 2, -1), u_3 = (-1, -1, 11), u_4 = (-1, -1, -1)$.

Exemple 8.3.2 Soit W de la forme $W = x^2z + y^3 + xz^3 + w^{15}$ dans $\mathbb{P}(6, 5, 3, 1)$. Les générateurs des cônes 1-dimensionnels du fan de $\mathbb{P}(6, 5, 3, 1)$ sont $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1), v_4 = (-6, -5, -3)$ d'où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme W a degré total 15 et les éléments $u_1, \ldots, u_4$ associés aux monômes de W sont

$$u_1 = (1, -1, 0),\ u_2 = (-1, 2, -1),\ u_3 = (0, -1, 2),\ u_4 = (-1, -1, -1).$$

Dorénavant on fixe les notations suivantes :

— Soit W un polynôme de la forme $W = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_{i,j}}$, quasi-homogène dans $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$, de degré total $d = \sum_i w_i$ qui définit une variété de Calabi-Yau dans $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$. Cela est donc équivalent à se donner $u_1, \ldots, u_n \in M$ tels que

$$(u_i, v_j) \geq -1, \quad \forall i, j = 1, \ldots, n. \tag{8.3.2}$$

On suppose aussi que rang $< u_1, \ldots, u_n >= n - 1$.

— On prend un groupe fini G qui est sous-groupe du tore $(\mathbb{C}^*)^n$ et qui agit sur $\mathbb{C}^n$ de façon que $G \subset \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ et G est un groupe qui préserve tout monôme de W, c'est-à-dire $g^*(W) = W$ pour tout $g \in G$.

Proposition 8.3.3 *La matrice A_W est inversible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $u_1, \ldots, u_n$ engendrent un simplexe. Dans ce cas,* rang $< u_1, \ldots, u_n >= n - 1$.

Preuve. On suppose que les $u_i, i = 1, \ldots, n$ n'engendrent pas un simplexe. Alors ils existent $\alpha_i, i = 1, \ldots, n-1$ qui ne sont pas tous zero et tels que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (u_i - u_n) = 0$$

et si on appelle $\alpha_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$, alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i - \alpha_n u_n = 0.$$

Cela donne

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i m_i - \alpha m_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (P(u_i) + e) - \alpha P(u_n) - \alpha e = 0.$$

Ainsi les m_i sont linéairement dépendants et donc la matrice n'est pas inversible. Pour l'autre implication on suppose que $\sum_i \beta_i m_i = 0$ et les β_i ne sont pas tous zero. Alors on a

$$Q(\sum_i \beta_i m_i) = d(\sum_i \beta_i) = 0,$$

et cela implique $\sum_i \beta_i = 0$. Alors $\sum_i \beta_i u_i = \sum_i \beta_i (u_i - u_n) = 0$ et les u_i n'engendrent pas un simplexe.

Pour la condition sur le rang on suppose que rang $< u_1, \ldots, u_n >< n - 1$. Alors l'espace des vecteurs $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i = 0$ a dimension au moins deux. Alors il existe un vecteur non-zero tel que $\sum_i \alpha_i = 0$ et cela permet de conclure à nouveau que $\sum_i \alpha_i (u_i - u_n) = 0$. □

Remarque 8.3.4 *Fixer le groupe G est équivalent à donner un homomorphisme de réseaux*

$$\psi_G : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$$

qui ait conoyau fini H et tel que $G \cong \mathrm{Spec}\mathbb{C}[H], e \in \mathrm{Im}(\psi_G)$ et $P(u_i) \in \mathrm{Im}(\psi_G)$ pour tout i.

L'homomorphisme ψ_G induit un homomorphisme $\mathbb{Z}^{n-1} \to M$ qu'on appelle toujours ψ_G qui a un conoyau fini $\tilde{H}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\psi_G} & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow P & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{n-1} & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \tilde{H} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

et le groupe $\tilde{G} = \mathrm{Spec}\mathbb{C}[\tilde{H}]$ est le quotient de G par le sous-groupe J_W qui agit trivialement sur $\mathbb{P}(w)$.

Cela nous donne le diagramme suivant, où tout carré est commutatif et les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \langle w^T \rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{P^T} & N^T & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \phi_G} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \langle w^T \rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{U_G} & \mathbb{Z}^{n-1} & \longrightarrow & \tilde{G}^T & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \psi_G} & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \langle w^T \rangle & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{U_0} & M & \longrightarrow & \tilde{G}_0^T & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{8.3.3}$$

et on a :

- U_0 est la matrice de taille $(n-1) \times n$ qui a les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sur les colonnes. L'homomorphisme associé agit sur $\mathbb{Z}^n$. Le conoyau $\tilde{G}_0^T$ de cet homomorphisme est fini et U_0 a un noyau $< w^T >$ de rang 1 car les u_i engendrent un sous-réseau de M d'index fini ;
- $P^\vee$ est l'application conoyau de l'inclusion $\langle w^T \rangle \to \mathbb{Z}^n$;
- vu que $u_i \in \mathrm{Im}(\psi_G)$, alors on soulève U_0 et on obtient un homomorphisme U_G qui a pour conoyau un sous groupe fini $\tilde{G}^T$ de $\tilde{G}_0^T$;
- U_G induit naturellement l'homomorphisme $\phi_G : N^T \to M$ qui a conoyau $\tilde{G}^T$.

Maintenant soit E la matrice $n \times n$ qui a toute entrée égale à 1.

Lemme 8.3.5 *On a les identités*

$$PU_0 = A^T - E, \quad U_0(A^T)^{-1}P = I,$$

où on appelle A la matrice des exposants de W.

Preuve. L'égalité $PU_0 = A^T - E$ vient de la suite exacte (8.3.1), car Pu_i est égal à la i-ème ligne de A moins le vecteur e.

On observe que $P^T A^{-1} E = 0$ car le noyau de P est engendré par le vecteur de poids w qui est un multiple de $A^{-1}e$. Alors on multiplie l'égalité $PU_0 = A^T - E$ à droite par $(A^T)^{-1}P$ et on obtient

$$PU_0(A^T)^{-1}P = P.$$

De plus, P est injective et donc cela induit la deuxième égalité. □

L'homomorphisme ϕ_G est un morphisme de réseaux avec conoyau fini qui est isomorphe à $\tilde{G}^T$ et N^T est l'espace où vit le fan de $\mathbb{P}(w^T)$. Donc on a un quotient fini

$$\Gamma_G : \mathbb{P}(w^T) \to \mathbb{P}(w^T)/\tilde{G}^T,$$

où le fan de $\mathbb{P}(w^T)/\tilde{G}^T$ est l'image du fan de $\mathbb{P}(w^T)$.

Remarque 8.3.6 *On observe que quand $\tilde{G} = \{1\}$ est le groupe trivial, alors $\psi_G = id$, $U_0 = U_G$ et $\tilde{G}^T = \tilde{G}_0^T$.*

De plus, $\phi_0 = \phi_G \circ \psi_G$ pour tout G et donc Γ_0 se facteurise grâce à un des Γ_G.

Maintenant on prend le dual du carré qui contient U_0 et U_G :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{U_0^T} & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_G^*} & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow[U_G^T]{} & \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & K_G & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

On peut observer que ce diagramme montre que Γ_G, si on l'écrit en coordonnées de Cox, est l'identité. Grâce à la condition (8.3.2) on a que les éléments $v_1, \ldots, v_n \in N$ donnent n vecteurs $U_0^T(v_i) + e \in \mathbb{Z}^n$ qui ont entrées non negatives.

Donc cela donne n monômes de degré $\deg | - K_{\mathbb{P}(w^T)/\tilde{G_0^T}}|$ et, grâce au diagramme précedent, de degré $\deg | - K_{\mathbb{P}(w^T)/\tilde{G^T}}|$. On appelle W^T le polynôme quasi-homogène qui est la somme de ces monômes.

On veut montrer que cette construction miroir est la même que la construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan.

Théorème 8.3.7 *i) W^T est le polynôme quasi-homogène qui a matrice des exposantes A^T ; ii) G^T est le groupe dual de G au sens de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan.*

Preuve. Le transposé de l'égalité $PU_0 = A^T - E$ donne

$$U_0^T(v_1, \ldots, v_n) = A - E$$

et cela prouve que W^T est le polynôme qui a matrice A^T. Maintenant on passe aux groupes. On rappelle la définition du groupe transposé G^T selon la formulation de Krawitz. Dans le Chapitre 7 on avait donné deux définitions de G^T, on en donne une troisième ici.

$$\begin{aligned} G^T &= \left\{ \prod_{j=1}^n (\rho_j^T)^{a_j} : \prod_{j=1}^n x_j^{a_j} \text{ est } G\text{-invariant} \right\} \\ &= \{\mathrm{diag}(e^{2\pi i\lambda_1}, \ldots, e^{2\pi i\lambda_n}) : x^{A^T\lambda} \text{ est } G\text{-invariant}\} \end{aligned}$$

où ρ_j est la matrice diagonale associée à la j-ème colonne de A^{-1} :

$$\rho_j = \mathrm{diag}(e^{2\pi i a^{1,j}}, \ldots, e^{2\pi i a^{n,j}}).$$

On observe que le monôme $\prod_{j=1}^n x_j^{a_j}$ est G-invariant si et seulement si $(a_1, \ldots, a_n) \in \psi_G(\mathbb{Z}^n)$ et donc si et seulement si $(a_1, \ldots, a_n) - e \in P\psi_G(\mathbb{Z}^{n-1})$.

L'homomorphisme de réseaux induit le quotient $\tilde{\Gamma}_G : \mathbb{C}^n - \{0\} \to \mathbb{P}(w^T)/\tilde{G}^T$ et cela donne le morphisme entre les tores

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^*)^{n-1} &\to (\mathbb{C}^*)^{n-1} \\ [x_1, \ldots, x_n] &\mapsto (x^{u_1}, \ldots, x^{u_1}) \end{aligned}$$

où u_i est la ligne i-ème de U_G.

On appelle $q^T := (A^T)^{-1}e$. L'automorphisme diagonal d'ordre fini $\mathrm{diag}(e^{2\pi i\lambda_1}, \ldots, e^{2\pi i\lambda_n})$ de $\mathbb{P}(w^T)$ peut être identifié avec les vecteurs $\lambda \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n / < q^T >$. Alors, grâce à la description de $\tilde{\Gamma}_G$, on a

$$\tilde{\Gamma}_G \circ \lambda = \tilde{\Gamma}_G \iff U_G \cdot \lambda \in \mathbb{Z}^{n-1}.$$

Vu que $\sum_i q_i^T = 1$ on peut supposer que $\sum_i \lambda_i = 1$, en ajoutant si nécessaire un multiple rationnel de q^T. L'application ψ_G est injective et donc, grâce au fait que le diagramme (8.3.3) est commutatif, on a

$$U_G \cdot \lambda \in \mathbb{Z}^{n-1} \Longleftrightarrow U_0 \cdot \lambda \in \psi_G(\mathbb{Z}^{n-1}).$$

Le Lemme 8.3.5 et l'injectivité de P donnent

$$U_0 \cdot \lambda \in \psi_G(\mathbb{Z}^{n-1}) \Longleftrightarrow P \cdot U_0 \cdot \lambda = (A^T - E) \cdot \lambda = A^T\lambda - e \in P\psi_G(\mathbb{Z}^{n-1}).$$

Cela prouve donc ii).

□

Exemple 8.3.8 W est de la forme $W = x^2 + y^3 + z^{12} + w^{12}$ dans $\mathbb{P}(6,4,1,1)$.

Les généreateurs de $\mathbb{P}(6,4,1,1)$ sont

$$v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (0,0,1), v_4 = (-6,-4,-1)$$

et les éléments de M qui correspondent aux monômes de W sont

$$u_1 = (1,-1,-1),\ u_2 = (-1,2,-1),\ u_3 = (-1,-1,11),\ u_4 = (-1,-1,-1).$$

donc on a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 11 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de l'homomorphisme U_0 est engendré par $w^T = (6,4,1,1)$. En prenant la forme normale de Smith de U_0 on trouve

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

où $U_0 = ASB$.

Ici donc on peut calculer que le conoyau de U_0 est le groupe $\tilde{G}_0^T \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Dans ce cas les applications $P^\vee : \mathbb{Z}^4 \to N^T$ et $\phi_0 : N \to \mathbb{Z}^3$ sont données par les matrices

$$P^\vee = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $S = DS_G$ où $D = \mathrm{diag}(1,1,2)$ le morphisme U_G est donné par $U_G = AS_GB$. On observe que S_G est la forme de Smith de U_G et donc son conoyau est $\tilde{G}^T \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. De plus, $U_0 = ADA^{-1}U_G$ et donc le morphisme des réseaux ψ_G est le morphisme associé à ADA^{-1}. Cela correspond au choix $\tilde{G} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

De même, si on choisit $D = \mathrm{diag}(1,1,3)$, on retrouve le cas $\tilde{G} \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exemple 8.3.9 *Les choses sont encore plus simples pour le polynôme* $W = x^2z + y^3 + xz^3 + w^{15}$ *dans* $\mathbb{P}(6,5,3,1)$. *D'après l'Exemple 8.3.2 on a*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de U_0 est engendré par $w^T = (6,5,3,1)$. Maintenant si on prend la forme de Smith de U_0 on trouve

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où le conoyau de U_0 est le groupe trivial. On calcule aussi $\phi_0 = id$ et

$$P^\vee = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

8.3.2 Les polytopes

Soit $\mathcal{P}_0 \subset M_\mathbb{R}$ le polytope anticanonique de $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$, c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_0 = \{v \in M_\mathbb{R} : (v, v_i) \geq -1 \ \forall i = 1,\dots,n\}.$$

On prend maintenant $\mathcal{P}$ le polytope de Newton de $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$ qui consiste de l'enveloppe convexe des points de $\mathcal{P}_0 \cap M$. En général les deux polytopes sont dinstincts ; ils coïncident si et seulement si $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$ est un espace Fano.

Dans $\mathcal{P}$ on prend le polytope $\mathcal{P}_W$ associé au polynôme W, c'est-à-dire le polytope qui est l'enveloppe convexe des points $u_1,\dots,u_n$. On a donc les inclusions suivantes :

$$\mathcal{P}_W \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0. \tag{8.3.4}$$

Exemple 8.3.10 Dans le cas $W = x^2+y^3+z^{12}+w^{12}$ dans $\mathbb{P}(6,4,1,1)$, on a $\mathcal{P}_W = \mathcal{P} = \mathcal{P}_0$ et les sommets de ce polytope sont

$$(1,-1,-1),(-1,2,-1),(-1,-1,11),(-1,-1,-1).$$

Cela est vrai en général : quand le polynôme W est de type Fermat, les trois polytopes coïncident.

Exemple 8.3.11 On décrit les trois polytopes pour le polynôme $W = x^2z+y^3+xz^3+w^{15}$ dans $\mathbb{P}(6,5,3,1)$. On a déjà vu que les sommets du polytope $\mathcal{P}_W$ sont

$$(1,-1,0),\ (-1,2,-1),\ (0,-1,2),\ (-1,-1,-1).$$

Les sommets de $\mathcal{P}_0$ sont

$$\left(\frac{3}{2},-1,-1\right),\ (-1,2,-1),\ (-1,-1,4),\ (-1,-1,-1)$$

et les sommets de $\mathcal{P}$ sont

$$(1,-1,-1),(1,-1,0),\ (-1,2,-1),\ (-1,-1,4),\ (-1,-1,-1).$$

On voit que $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_0$ car l'espace $\mathbb{P}(6,5,3,1)$ n'est pas Fano et en effet les sommets du polytope $\mathcal{P}_0$ ne sont pas dans $M = \mathbb{Z}^3$.

Maintenant on prend les polaire des polytopes de (8.3.4) et on a

$$\mathcal{P}_0^\circ \subset \mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}_W^\circ. \tag{8.3.5}$$

On voit que $\mathcal{P}_0^\circ$ est le polytope entier engendré par les $v_1,\dots,v_n$.

Théorème 8.3.12

$$\mathcal{P}_W^\circ = \mathcal{P}_0^T, \quad \mathcal{P}_0^\circ = \mathcal{P}_{W^T}$$

Preuve. La première égalité vient du fait que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n \in M$ sont les générateurs du fan de $\mathbb{P}(w^T)/\tilde{G}_0^T$ grâce au Théorème 8.3.7. La seconde égalité vient du fait que les $v_1, \ldots, v_n$ représentent les monômes de W^T. □

Exemple 8.3.13 Si on prend le polynôme W comme dans l'Exemple 8.3.8, on a les v_i générateurs du fan de $\mathbb{P}(6,4,1,1)$:

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1),\ v_4 = (-6,-4,-1).$$

Les sommets de $\mathcal{P}_0$ sont

$$(1,-1,-1),\ (-1,2,-1),\ (-1,-1,11),\ (-1,-1,-1).$$

Vu que $\mathbb{P}(6,4,1,1)$ est Fano, ici $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0$. De plus, les éléments qui correspondent aux monômes de W sont exactement les sommets de $\mathcal{P}$ donc ici

$$\mathcal{P}_W = \mathcal{P} = \mathcal{P}_0.$$

Exemple 8.3.14 Soit maintenant $\mathbb{P}(w) = \mathbb{P}(3,2,1,1)$ avec fan engendré par

$$v_1 = (1,0,0),\ v_2 = (0,1,0),\ v_3 = (0,0,1),\ v_4 = (-3,-2,-1).$$

Les sommets de $\mathcal{P}_0$ sont

$$(4/3,-1,-1),\ (-1,5/2,-1),\ (-1,-1,6),\ (-1,-1,-1).$$

On prend le polynôme $W = x^2z + y^2x + z^5y + w^7$ et on trouve la matrice U_0

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix},$$

qui a les u_i sur les colonnes. Le conoyau de U_0 est $\tilde{G}_0^T \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Le polytope $\mathcal{P}_W$ est le polytope qui a les u_i pour sommets. On peut calculer avec MAGMA la variété torique Y definie par le fan normal à $\mathcal{P}_W^\circ$: il s'agit de la variété qui a $\mathbb{C}[x,y,z,w]$ pour anneau de Cox et les variables ont graduation entière $(1,1,3,2)$ et graduation quotient $1/3(0,1,1,1)$. Il s'agit donc du quotient de $\mathbb{P}(w^T) = \mathbb{P}(1,1,3,2)$ par l'action de l'automorphisme d'ordre 3 donné par $(1,\zeta,\zeta,\zeta)$, ζ étant une racine de l'unité d'ordre 3.

Enfin, les sommets $v_1, \ldots, v_4$ définissent les monômes $z'^2y', y'^5w', w'^2z', x'^7$ dans $H^0(Y, -K_Y)$ et en prenant la somme de ces monômes on a le polynôme transposé W^T dans $\mathbb{P}(1,1,3,2)$.

8.3.3 Rélation avec la construction de Batyrev

On a vu avec le Théorème 8.2.3 que grâce aux polytopes réflexifs on construit deux familles de variétés de Calabi-Yau l'une miroir de l'autre. Dans certains cas, la construction de Berglund-Hübsch entre dans ce cadre et les hypersurfaces données par les polynômes de type W s'obtiennent avec cette contruction. Il s'agit des cas où l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ est Fano et donc, comme montré dans le Lemme 8.1.30, le polytope $\mathcal{P}_0$ est réflexif.

Pour comprendre aussi les cas où $\mathbb{P}(w_1, \ldots, w_n)$ n'est pas Fano, on fait maintenant des hypothèses moins fortes et on donne la definiton de polytope quasi-réflexif. Cette definition vient de [Pu].

Définition 8.3.15 *Un polytope $\Delta \in N_{\mathbb{R}}$ qui contient l'origine à l'interieur est* **quasi-réflexif (almost reflexive)** *si le polytope*

$$\bar{\Delta}^\circ := Conv(\Delta^\circ \cap M)$$

est réflexif, c'est-à-dire si l'enveloppe convexe des points entiers du polytope polaire Δ° est un polytope réflexif.

Vu que le polaire d'un polytope réflexif est réflexif (voir Proposition 8.1.24), on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Delta \subset N_{\mathbb{R}} & \longleftrightarrow & \Delta^\circ \subset M_{\mathbb{R}} \\ \cap & & \cup \\ \bar{\Delta} & \longleftrightarrow & \bar{\Delta}^\circ \end{array}$$

où $\bar{\Delta} = (\bar{\Delta}^\circ)^\circ$ est un polytope réflexif qui contient Δ.

Exemple 8.3.16 Le polytope $\mathcal{P}_0$ de l'Exemple 8.3.11 est quasi-réflexif. En effet, les points entiers de $\mathcal{P}_0$ sont 21 et sont

$$\begin{array}{ll} (-1,-1,-1), & (1,-1,-1), \\ (0,-1,-1), & (-1,0,2), \\ (-1,0,1), & (-1,0,0), \\ (-1,0,-1), & (-1,2,-1), \\ (0,0,-1), & (-1,1,0), \\ (-1,-1,4), & (0,0,0), \\ (-1,-1,3), & (0,-1,0), \\ (1,-1,0), & (-1,-1,2), \\ (0,-1,1), & (-1,-1,1), \\ (0,-1,2), & (-1,-1,0), \\ (-1,1,-1). & \end{array}$$

L'origine est un point interne et l'enveloppe convexe de ces points est $\mathcal{P}$. Le polytope polaire $\mathcal{P}^\circ$ a comme sommets

$$(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (-3,-2,0), (-6,-5,-3).$$

Donc il s'agit encore d'un polytope entier et cela preuve que $\mathcal{P}_0$ est quasi-réflexif.

Remarque 8.3.17 *On a vu dans le Lemme 8.1.30 que la condition pour que $\mathbb{P}(w_1,\dots,w_n)$ soit Fano est que w_j divise $d = \sum_i w_i$ pour tout $j = 0,\dots,n$. Parmi les 95 familles de poids vues dans le Chapitre 6 il y en a 14 qui satisfont cette condition. Pour ces 14 espaces projectifs le polytope $\mathcal{P}_0$ est donc réflexif. Pour tous les autres cas $\mathcal{P}_0$ n'est pas un polytope entier et donc ne peut pas être réflexif, mais il est quasi-réflexif.*

Le Théorème [Pu, Theorem 2.25] montre que c'est possible obtenir des familles des variétés de Calabi-Yau même dans le cas des polytopes quasi-réflexifs.

Théorème 8.3.18 *([Pu, Theorem 2.25]) Soient Δ un polytope, Σ le fan sur les faces de Δ et $\mathbb{P}_\Sigma$ la variété torique associée à Σ. Alors Δ est quasi-réflexif si et seulement si l'hypersurface anticanonique générale de $\mathbb{P}_\Sigma$ est une variété de Calabi-Yau.*

Cela se traduit donc en demandant que l'enveloppe convexe des points entiers du polytope anticanonique de $\mathbb{P}_\Sigma$ soit un polytope réflexif. L'intérêt des polytopes quasi-réflexifs est aussi dans le Lemme suivant :

Lemme 8.3.19 *([Pu, Lemma 2.19]) Soit Δ un polytope quasi-réflexif et $\bar{\Delta}$ le polytope réflexif dans lequel Δ est contenu. Alors il existe un fan $\tilde{\Sigma}$ qui raffine les deux fan Σ_Δ et $\Sigma_{\bar{\Delta}}$ et qui est le fan sur les faces d'une triangulation de $\bar{\Delta}$. Cela donne donc les morphismes toriques suivants :*

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}_{\tilde{\Sigma}} & \\ {\scriptstyle\phi}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle\psi} \\ \mathbb{P}_{\Sigma_\Delta} & & \mathbb{P}_{\Sigma_{\bar{\Delta}}} \end{array} \tag{8.3.6}$$

On regarde (8.3.6) plus en detail : l'application ψ est crepante ([CK, Lemma 4.12]) et $\bar{\Delta}^\circ$ est le polytope de Newton associé au diviseur anticanonique de $\mathbb{P}_{\tilde{\Sigma}}$. Encore, l'hypersurface générique anticanonique de $\mathbb{P}_{\tilde{\Sigma}}$ est la transformé stricte de l'hypersurface anticanonique générique de $\mathbb{P}_{\Sigma_\Delta}$.

On préfère prendre les polaires des polytopes quasi-réflexif car cette définition est plus naturelle. Soit donc $\mathcal{P}$ le polaire d'un polytope quasi-réflexif et $\bar{\mathcal{P}}$ le polytope réflexif corespondent qui est contenu dans $\mathcal{P}$. On prend $\mathcal{P}'$ dans $\bar{\mathcal{P}}$ qui soit un polytope quasi-réflexif. On a donc

$$\mathcal{P}' \subset \bar{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}. \tag{8.3.7}$$

Le choix du subpolytope $\mathcal{P}'$ dans $\bar{\mathcal{P}}$ correspond à choisir des monômes dans les système anticanonique de $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$. Donc soit $\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{P})$ la famille des hypersurfaces anticanoniques de $\mathbb{P}_{\mathcal{P}}$ qui sont engendrées par ces monômes.

Maintenant on prend les polaires de (8.3.7) et on trouve

$$\mathcal{P}^\circ \subset (\bar{\mathcal{P}})^\circ \subset (\mathcal{P}')^\circ. \tag{8.3.8}$$

Si on appelle $\mathbb{P}^\circ_{\mathcal{P}}$ la variété torique obtenue à partir du fan normal à $(\mathcal{P}')^\circ$, on peut definir $\mathcal{F}((\bar{\mathcal{P}})^\circ, (\mathcal{P}')^\circ)$ comme étant la famille des hypersurfaces anticanoniques de $\mathbb{P}^\circ_{\mathcal{P}}$ qui sont engendrés par les monômes correspondents aux points de $(\bar{\mathcal{P}})^\circ$.

Définition 8.3.20 *Les deux familles $\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{P})$ et $\mathcal{F}((\bar{\mathcal{P}})^\circ, (\mathcal{P}')^\circ)$ sont familles miroir.*

Remarque 8.3.21 *Quand le polytope $\mathcal{P}$ est réflexif, alors on a $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{P}}$.*

Remarque 8.3.22 *Si on prend $\mathcal{P}$ réflexif et aussi $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ cela correspond à choisir l'entier polytope anticanonique. Alors les deux familles $\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{P})$ et $\mathcal{F}((\bar{\mathcal{P}})^\circ, (\mathcal{P}')^\circ)$ sont exactement les familles miroir selon la symétrie de Batyrev.*

L'interet est donc dans le choix du subpolytope $\mathcal{P}'$, pour voir comment ce choix influence les familles $\mathcal{F}(\mathcal{P}', \mathcal{P})$ et $\mathcal{F}((\bar{\mathcal{P}})^\circ, (\mathcal{P}')^\circ)$. Il faut en particulier vérifier quelles hypothese assurent que ces familles sont des familles de variétés de Calabi-Yau.

Ils restent dans ce sujet beaucoup de thèmes ouverts et des remarques à préciser. Ce qu'on a présenté ici donne une motivation pour poursuivre ce travail sur la description torique de la symétrie BHCR.

Annexe A

Possibilités pour les fibrations du cas $b)$

On décrit ici les possibles fibration elliptiques sur les surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$. Ces fibration sont l'objet de la Proposition 4.1.9.

Les notations sont les suivantes : la fibration aura fibres singulières $m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$ et les fibres montrées dans la deuxième colonne. Les valeurs m_1, m_2, n_1, n_2 sont plus grands ou égaux à 0 et les conditions sur eux sont décrites dans la troisième et quatrième colonne. La cinquième colonne reporte le groupe de Mordell-Weil de la fibration et la sixième les intersections de la section de 2-torsion t, s'il elle existe, avec les fibres réductibles. Quand le groupe de Mordell-Weil est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ on appelle t, u les deux générateurs de MW et on décrit les intersections de t, u avec les fibres réductibles.

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	$2II^*$	2	0	$\{1\}$	
2)	$II^*+I_6^*$	0	2	$\{1\}$	
3)	$2III^*+I_0^*$	0	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3$
4)	$III^*+I_6^*$	1	$3-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_9^2,\ \Theta_0^3$
5)	I_{14}^*	0	4	$\{1\}$	
6)	I_{12}^*	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_{15}^1,\ \Theta_0^2,\ \Theta_0^3$
7)	$I_8^*+I_2^*$	0	2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_1^2$
8)	$2I_4^*$	2	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_0^4$ $u:\ \Theta_8^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$
9)	$3I_2^*$	0	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_1^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_5^3$ $u:\ \Theta_5^1,\ \Theta_6^2,\ \Theta_1^3$

TABLEAU A.1 – Possibilités pour $r=20$ ($a=2$, $s=10$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	II^*+III^*	2	$5-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	$II^*+I_4^*$	1	$4-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
3)	$2III^*$	3	0	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5$
4)	$III^*+I_6^*$	0	3	$\{1\}$	
5)	$III^*+I_4^*$	2	$5-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4$
6)	$III^*+I_2^*+I_0^*$	0	1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\Theta_5^2,\ \Theta_1^3$
7)	I_{12}^*	1	$6-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
8)	I_{10}^*	3	$8-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_{13}^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_0^i,\ i=3,4$
9)	$I_8^*+I_0^*$	1	$4-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_0^3$
10a)	$I_6^*+I_2^*$	1	$4-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_9^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3$
10b)	$I_6^*+I_2^*$	1	$4-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_9^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_0^3$
11)	$2I_4^*$	1	$4-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_0^3$
12)	$I_4^*+I_2^*$	3	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_0^5$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_6^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$
13)	$2I_2^*+I_0^*$	1	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_6^2,\ \Theta_3^3,\ \Theta_1^4$

TABLEAU A.2 – Possibilités pour $r=19$ ($a=3$, $s=9$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	$II^*+I_2^*$	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	$II^*+2I_0^*$	0	2	$\{1\}$	
3)	$2III^*$	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
4)	$III^*+I_4^*$	1	$5-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
5a)	$III^*+I_2^*$	3	$7-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5$
5b)	$III^*+I_2^*$	3	$7-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$
6)	$III^*+2I_0^*$	1	$3-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$
7)	I_{10}^*	2	$8-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
8)	$I_8^*+I_0^*$	0	4	$\{1\}$	
9)	I_8^*	4	$10-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_0^5$
10)	$I_6^*+I_2^*$	0	4	$\{1\}$	
11)	$I_6^*+I_0^*$	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_9^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4$
12)	I_6^*	6	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_9^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5,\ \Theta_0^6,\ \Theta_0^7$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_1^7$
13)	$2I_4^*$	0	4	$\{1\}$	
14a)	$I_4^*+I_2^*$	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4$
14b)	$I_4^*+I_2^*$	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$
15)	$I_4^*+2I_0^*$	0	2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3$
16)	$I_4^*+I_0^*$	4	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5,\ \Theta_0^6$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6$
17)	$2I_2^*+I_0^*$	0	2	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3$
18)	$I_2^*+2I_0^*$	2	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_3^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$
19)	$4I_0^*$	0	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$ $u:\ \Theta_3^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_3^3,\ \Theta_3^4$
20a)	$2I_2^*$	4	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_6^1,\ \Theta_6^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5,\ \Theta_0^6$ $u:\ \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6$
20b)	$2I_2^*$	4	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5,\ \Theta_0^6$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_6^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6$

TABLEAU A.3 – Possibilités pour $r=18$ ($a=4$, $s=8$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	$II^*+I_0^*$	3	$8-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	$III^*+I_2^*$	2	$7-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
3)	$III^*+2I_0^*$	0	3	$\{1\}$	
4)	$III^*+I_0^*$	4	$9-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_0^6$
5)	I_8^*	3	$10-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
6)	$I_6^*+I_0^*$	1	$6-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
7)	I_6^*	5	$12-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_9^1,\Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5,\ \Theta_0^6$
8)	$I_4^*+I_2^*$	1	$6-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
9)	$I_4^*+I_0^*$	3	$8-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5$
10)	I_4^*	7	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_0^6,\ \Theta_0^7,\ \Theta_0^8,$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_1^7,\ \Theta_1^8$
11)	$I_2^*+2I_0^*$	1	$4-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$
12)	$I_2^*+I_0^*$	5	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_0^6,\ \Theta_0^7$ $u:\ \Theta_1^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_1^7$
13)	$3I_0^*$	3	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_0^6$ $u:\ \Theta_3^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_3^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6$
14a)	$2I_2^*$	3	$8-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5$
14b)	$2I_2^*$	3	$8-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$

TABLEAU A.4 – Possibilités pour $r=17$ ($a=5$, $s=7$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	II^*	6	$14-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	$III^*+I_0^*$	3	$9-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
3)	III^*	7	$15-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_0^7,\ \Theta_0^8$
4)	I_6^*	4	$12-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
5)	$I_4^*+I_0^*$	2	$8-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
6a)	I_4^*	6	$14-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_0^6,\ \Theta_0^7$
6b)	I_4^*	6	$14-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_1^7$
7)	$2I_2^*$	2	$8-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
8)	$I_2^*+2I_0^*$	0	4	$\{1\}$	
9a)	$I_2^*+I_0^*$	4	$10-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_5^1,\Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_0^6$
9b)	$I_2^*+I_0^*$	4	$10-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^1,\Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6$
10)	I_2^*	8	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_5^1,\Theta_1^i,\ i=2,\dots,6,\ \Theta_0^7,\ \Theta_0^8,\ \Theta_0^9$ $u:\ \Theta_1^1,\Theta_0^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_1^i,\ i=4,\dots,9$
11)	$3I_0^*$	2	$6-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$
12)	$2I_0^*$	6	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_0^7,\ \Theta_0^8,$ $u:\ \Theta_3^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_1^5,\ \Theta_1^6,\ \Theta_1^7,\ \Theta_1^8$

TABLEAU A.5 – Possibilités pour $r=16$ ($a=6$, $s=6$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	III^*	6	$15-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	I_4^*	5	$14-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
3)	$I_2^*+I_0^*$	3	$10-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
4a)	I_2^*	7	$16-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_5^1,\ \Theta_1^i,\ i=2,\dots,6,\ \Theta_0^7,\ \Theta_0^8$
4b)	I_2^*	7	$16-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^i, i=1,\dots,7,\ \Theta_0^8$
5)	$3I_0^*$	1	$6-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
6)	$2I_0^*$	5	$12-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^i,\ i=1,\dots,6,\ \Theta_0^7$
7)	I_0^*	9	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_1^i,\ i=1,\dots,7,\Theta_0^8,\ \Theta_0^9,\ \Theta_0^{10}$ $u:\ \Theta_3^1,\ \Theta_0^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_0^4,\Theta_1^i\ i=5,\dots 10$

TABLEAU A.6 – Possibilités pour $r=15$ ($a=7$, $s=5$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	I_2^*	6	$16-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	$2I_0^*$	4	$12-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
3)	I_0^*	8	$18-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^i,\ i=1,\dots,7,\ \Theta_0^8,\ \Theta_0^9$
4)	-	12	0	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t:\ \Theta_1^i,\ i=1,\dots,8,\Theta_0^9,\Theta_0^{10},\Theta_0^{11},\Theta_0^{12}$ $u:\ \Theta_0^i,\ i=1,\dots,4,\Theta_1^j,\ j=5,\dots,12$

Tableau A.7 – Possibilités pour $r=14$ ($a=8$, $s=4$)

	fibres singulières	m_1+m_2	n_1+2n_2	MW	composantes qui rencontrent les sections de torsion
1)	I_0^*	7	$18-(2m_1+3m_2)$	$\{1\}$	
2)	-	11	$24-(2m_1+3m_2)$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t:\ \Theta_1^i,\ i=1,\ldots,8, \Theta_0^9, \Theta_0^{10}, \Theta_0^{11}$

TABLEAU A.8 – Possibilités pour $r=13$ ($a=9$, $s=3$)

fibres singulières	$m_1 + m_2$	$n_1 + 2n_2$	MW
$m_1 I_2 + m_2 III + n_1 I_1 + n_2 II$	$m_1 + m_2 = 10$	$n_1 + 2n_2 = 24 - (2m_1 + 3m_2)$	$\{1\}$

TABLEAU A.9 – Possibilité pour $r = 12$ ($a = 10$, $s = 2$)

Annexe B

Quotients

On montre ici les quotients des surfaces $X_{(r,22-r,\delta)}$ par rapport à l'involution de van Geemen-Sarti, cas b). La notation est la même de la Proposition 4.1.9 et de la Section 4.4 et, comme dans le Théorème 4.4.9, on prend $m_2 = n_2 = 0$ (voir Remarque 4.4.8).

Les Tableaux sont organisés en la manière suivante : la première colonne contient le nombre du cas, c'est-à-dire elle indique la fibration elliptique qu'on prend. Dans la deuxième colonne on indique l'involution de van Geemen-Sarti considerée et dans la troisième colonne on montre les fibres singulières du quotient. Il se peut que deux quotients par rapport à deux involutions de van Geemen-Sarti aient une fibration elliptique avec les mêmes fibres singulières : dans ce cas on les met dans la même ligne (voir par exemple la dernière ligne du Tableau pour $r = 20$).

Après on décrit la fibration elliptique : on donne le groupe de Mordell-Weil dans la quatrième colonne et vu que on sait que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset \mathrm{MW}(\mathcal{E}_r/\sigma_t)$ (car au quotient la fibration elliptique admet à nouveau une section de 2-torsion), on appelle t' le généraeur de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que $(\mathcal{E}/\sigma_t)/\sigma_{t'}$ soit la fibration originale sur $X_{(r,22-r,\delta)}$. Si $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \subset MW(\mathcal{E}/\sigma_t)$, on appelle u' un autre générateur de $MW(\mathcal{E}/\sigma_t)$.

La cinquième colonne contient les intersections des générateurs avec les fibres réductibles de la fibration et la convention est toujours que Θ^i_j est la j-ème composante de la i-ème fibre réductible.

La sixième colonne indique le groupe discriminant du groupe de Néron-Severi de la surface quotient. Si le groupe de Néron–Severi est 2-élémentaire, la surface quotient est à nouveau une surface K3 de type $X_{(r,a,\delta)}$: alors dans ce cas on indique les invariants de la surface (r, a, δ) dans la septième colonne. Enfin, si $a = 22 - r$, on indique aussi le nombre de la fibration elliptique correspondante, en suivant la numeration des Tableaux de la Proposition 4.1.9.

Quotients du cas $r = 20$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$	(r, a, δ), *case*
3)	σ_t	$2III^* + I_0^*$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(20, 2, 1),\ 3)$
4)	σ_t	$III^* + I_3^* + I_4 + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
6)	σ_t	$I_6^* + 2I_4 + 2I_2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$ $u' : \Theta_9^7,\ \Theta_2^2,\ \Theta_0^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_0^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
7)	σ_t	$2I_4^* + 2I_2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t' : \Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$ $u' : \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(20, 2, 1),\ 8)$
8)	σ_t	$2I_2^* + 2I_4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$ $u' : \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_0^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
8)	σ_u, σ_{t+u}	$I_8^* + I_2^* + 2I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_1^2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(20, 2, 1),\ 7)$
9)	$\sigma_t,\ \sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$I_4^* + 2I_1^*$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	

Quotients du cas $r = 19$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$
3)	σ_t	$2III^* + 2I_1 + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_2^3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
5)	σ_t	$III^* + I_2^* + I_4 + I_2 + I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
6)	σ_t	$III^* + I_1^* + I_0^* + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
8)	σ_t	$I_5^* + 2I_4 + 2I_2 + I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
9)	σ_t	$I_4^* + I_0^* + I_4 + 2I_2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$ $u' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_0^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
10a)	σ_t	$I_3^* + I_4^* + 2I_2 + I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
10b)	σ_t	$I_3^* + I_1^* + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
11)	σ_t	$2I_2^* + I_4 + 2I_2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$ $u' :\ \Theta_5^1,\ \Theta_5^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_0^4,\ \Theta_0^5$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
12)	σ_t	$I_2^* + I_1^* + 2I_4 + I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
12)	σ_u	$I_8^* + I_1^* + 3I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_1^2$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
12)	σ_{t+u}	$I_2^* + I_4^* + 2I_1 + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_2^3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
13)	σ_t	$2I_1^* + I_0^* + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
13)	$\sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$I_1^* + I_4^* + I_0^* + I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

Quotients du cas $r = 18$: Dans le cas 12) on appelle v' la section de 4-torsion et ici la section t' est deux fois v'.

		firbes singulières	MW		$NS^\vee/NS$	(r, a, δ), *case*
5a)	σ_t	$III^* + I_1^* + 2I_1 + I_4 + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
5b)	σ_t	$III^* + I_4^* + 3I_1 + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_7^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(18, 2, 1)$
6)	σ_t	$III^* + 2I_0^* + I_1 + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$(18, 4, 1),\ 6)$
9)	σ_t	$I_4^* + 2I_1 + 2I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
11)	σ_t	$I_3^* + I_0^* + I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
12)	$\sigma_t,\ \sigma_{t+u}$	$I_3^* + 3I_1 + 3I_4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$	v' : $\Theta_6^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
12)	σ_u	$I_{12}^* + 6I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : Θ_{15}^1		$(18, 0, 0)$
14a)	σ_t	$I_2^* + I_1^* + I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
14b)	σ_t	$I_2^* + I_4^* + 2I_1 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$(18, 4, 1),\ 14b)$
15)	σ_t	$I_2^* + 2I_0^* + 2I_2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$ u' : $\Theta_5^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_3^3,\ \Theta_1^3,\ \Theta_0^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$(18, 4, 1),\ 18)$
16)	$\sigma_t,\ \sigma_{t+u}$	$I_2^* + I_0^* + 2I_1 + 2I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
16)	σ_u	$I_8^* + I_0^* + 4I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_{11}^1,\ \Theta_1^1$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(18, 2, 0)$
17)	σ_t	$2I_1^* + I_0^* + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
18)	$\sigma_t,\ \sigma_{t+u}$	$I_1^* + 2I_0^* + I_1 + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
18)	σ_u	$I_4^* + 2I_0^* + 2I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$(18, 4, 0),\ 15)$
19)	$\sigma_t,\ \sigma_u\,\sigma_{t+u}$	$4I_0^*$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$ u' : $\Theta_3^1,\ \Theta_3^2,\ \Theta_3^3,\ \Theta_3^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$(18, 4, 0),\ 19)$
20a)	$\sigma_t,\ \sigma_u$	$2I_1^* + 2I_1 + 2I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
20a)	σ_{t+u}	$2I_4^* + 4I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_7^1,\ \Theta_7^2$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(18, 2, 0)$
20b)	σ_t	$2I_1^* + 2I_4 + 2I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
20b)	$\sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$I_1^* + I_4^* + 3I_1 + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	t' : $\Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_2^3$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	

Quotients du cas $r = 17$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$
4)	σ_t	$III^* + I_0^* + 3I_1 + I_4 + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
7)	σ_t	$I_3^* + 3I_1 + 2I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
9)	σ_t	$I_2^* + I_0^* + 2I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
10)	σ_t	$I_2^* + 4I_1 + 3I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
10)	σ_u	$I_8^* + 6I_1 + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_2^2$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$
11)	σ_t	$I_1^* + 2I_0^* + I_1 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
12)	$\sigma_t,\ \sigma_{t+u}$	$I_1^* + I_0^* + 3I_1 + 2I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
12)	σ_u	$I_4^* + I_0^* + I_4 + 4I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
13)	$\sigma_t,\ \sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$3I_0^* + 2I_1 + I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_2^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
14a)	σ_t	$2I_1^* + 2I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
14b)	σ_t	$I_1^* + I_4^* + 3I_1 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_7^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

Quotients du cas $r = 16$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$	$(r, a, \delta),\ case$
3)	σ_t	$III^* + 5I_1 + 2I_4 + I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
6a)	σ_t	$I_2^* + 4I_1 + 2I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
6b)	σ_t	$I_8^* + 6I_1 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_{11}^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	$(16, 2, 1)$
9a)	σ_t	$I_1^* + I_0^* + 3I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	
9b)	σ_t	$I_4^* + I_0^* + 4I_1 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$	$(16, 4, 1)$
10)	$\sigma_t,\ \sigma_{t+u}$	$I_1^* + 5I_1 + 3I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$	
10)	σ_u	$I_4^* + 2I_4 + 6I_1$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$	
11)	σ_t	$3I_0^* + 2I_1 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$	$(16, 6, 1),\ 11)$
12)	$\sigma_t,\ \sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$2I_0^* + 4I_1 + 2I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$	

Quotients du cas $r = 15$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$
$4a)$	σ_t	$I_1^* + 5I_1 + 2I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$
$4b)$	σ_t	$I_4^* + 6I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_7^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_1^3,\ \Theta_1^4$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$6)$	σ_t	$2I_0^* + 4I_1 + I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_1^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^2$	$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$
$7)$	$\sigma_t,\ \sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$I_0^* + 6I_1 + 3I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$

Quotients du cas $r = 14$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$
$3)$	σ_t	$I_0^* + 6I_1 + 2I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_1^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$
$4)$	$\sigma_t,\ \sigma_u,\ \sigma_{t+u}$	$8I_1 + 4I_4$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_2^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_2^4$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$

Quotient du cas $r = 13$:

		fibres singulières	MW		$NS^\vee/NS$
$2)$	σ_t	$8I_1 + 3I_4 + 2I_2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$t' :\ \Theta_2^1,\ \Theta_2^2,\ \Theta_2^3,\ \Theta_1^4,\ \Theta_1^5$	$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$

Annexe C

Les K3 obtenues avec la construction BHCR

On reporte ici les Tableaux qui contiennent la liste des polynômes admissibles W pour obtenir une surface X_W de type K3 selon la construction de Berglund-Hübsch. La première colonne contient le nombre du système de poids, en suivant la numération de [Y]. Les poids sont ordonnés selon l'ordre décrescent. La deuxième colonne contient les poids (w_1, w_2, w_3, w_4), auxquels on ajoute le degré total $d = \sum w_i$. La troisième colonne contient les polynômes admissibles. On remplace ici (x_1, x_2, x_3, x_4) par (x, y, z, w).

Les autres colonnes contiennent les valeurs de $\left|\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}\right|$ et $\left|\frac{G}{J_W}\right|$ pour tous les polinômes et tout group G tel que $J_W \subset G \subset \mathrm{SL}_W$. En tout cas on calcule les invariants (r, a) et on montre le nombre du cas miroir dans la dernière colonne. Cela prouve le Théorème 7.3.4.

No.	Poids	Polynôme	$\left\|\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}\right\|$	$\left\|\frac{G}{J_W}\right\|$	(r, a)	Dual BHCR
2a	(4,3,3,2 ;12)	$x^3 + y^3z + yz^3 + w^6$	1	1	(10,4)	2a
2b	(4,3,3,2 ;12)	$x^3 + y^4 + z^4 + w^6$	2	2	(10,4)	2b
				1	(10,4)	
2c	(4,3,3,2 ;12)	$x^3 + y^3z + z^4 + w^6$	3	2	(18,2)	3c
				1	(10,4)	
3a [1]	(2,2,1,1 ;6)	$x^3 + y^3 + z^6 + w^6$	9	9	(18,2)	3a
				3	(6,4)	
				3	(14,4)	
				3	(10,4)	
				3	(10,4)	
				1	(2,2)	
3b	(2,2,1,1 ;6)	$x^3 + y^3 + z^5w + w^6$	3	3	(14,4)	17a
				1	(2,2)	
3c	(2,2,1,1 ;6)	$x^3 + y^3 + yz^4 + w^6$	3	3	(10,4)	2c
				1	(2,2)	
3d	(2,2,1,1 ;6)	$x^3 + y^3 + z^5w + zw^5$	6	6	(18,2)	3d
				3	(14,4)	
				2	(6,4)	
				1	(2,2)	
3e	(2,2,1,1 ;6)	$x^3 + y^3 + yz^4 + zw^5$	2	2	(6,4)	15a
				1	(2,2)	

1. Ici il y a 4 sousgroupes d'ordre 3, on montre les détails dans l'Exemple de la Section 7.4.4

No.	Weights	Polynomial	$\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}$	$\frac{G}{J_W}$	(r,a)	Dual BHCR
4a	(4,4,3,1 ;12)	$x^3+y^3+z^4+w^{12}$	3	3	(14,3)	4a
				1	(4,3)	
4b	(4,4,3,1 ;12)	$x^3+y^3+z^4+zw^9$	3	3	(16,3)	18a
				1	(4,3)	
4c	(4,4,3,1 ;12)	$x^3+y^3+z^4+yw^8$	1	1	(4,3)	16b
10a	(6,4,1,1 ;12)	$x^2+y^3+z^{11}w+w^{12}$	1	1	(2,0)	46
10b	(6,4,1,1 ;12)	$x^2+xw^6+y^3+z^{11}w$	1	1	(2,0)	65
10c	(6,4,1,1 ;12)	$x^2+y^3+z^{11}w+zw^{11}$	5	5	(18,0)	10c
				1	(2,0)	
10d	(6,4,1,1 ;12)	$x^2+y^3+z^{12}+w^{12}$	6	6	(18,0)	10d
				3	(14,2)	
				2	(6,2)	
				1	(2,0)	
10e	(6,4,1,1 ;12)	$x^2+y^3+xz^6+w^{12}$	3	3	(14,2)	24b
				1	(2,0)	
11a	(15,10,3,2 ;30)	$x^2+y^3+z^{10}+w^{15}$	1	1	(10,2)	11a
11b	(15,10,3,2 ;30)	$x^2+y^3+xz^5+w^{15}$	1	1	(10,2)	22b
12a	(9,6,2,1 ;18)	$x^2+y^3+z^9+zw^{16}$	1	1	(4,1)	48a
12b	(9,6,2,1 ;18)	$x^2+y^3+z^9+xw^9$	3	3	(16,1)	25d
				1	(4,1)	
12c	(9,6,2,1 ;18)	$x^2+y^3+z^9+w^{18}$	3	3	(16,1)	12c
				1	(4,1)	
13a	(12,8,3,1 ;24)	$x^2+y^3+xz^4+w^{24}$	1	1	(8,1)	20a
13b	(12,8,3,1 ;24)	$x^2+y^3+xz^4+zw^{21}$	1	1	(8,1)	59a
13c	(12,8,3,1 ;24)	$x^2+y^3+z^8+xw^{12}$	1	1	(8,1)	27
13d	(12,8,3,1 ;24)	$x^2+y^3+z^8+w^{24}$	2	2	(12,1)	13d
				1	(8,1)	
13e	(12,8,3,1 ;24)	$x^2+y^3+z^8+zw^{21}$	1	1	(8,1)	49
14a	(21,14,6,1 ;42)	$x^2+y^3+z^7+w^{42}$	1	1	(10,0)	14a
14b	(21,14,6,1 ;42)	$x^2+y^3+z^7+xw^{21}$	1	1	(10,0)	28b
14c	(21,14,6,1 ;42)	$x^2+y^3+z^7+zw^{36}$	1	1	(10,0)	51b
15a	(5,4,3,3 ;15)	$x^3+y^3z+z^4w+w^5$	2	2	(18,2)	3e
				1	(14,4)	
15b	(5,4,3,3 ;15)	$x^3+y^3z+z^5+w^5$	1	1	(14,4)	17b
16a	(8,7,6,3 ;24)	$x^3+y^3w+z^4+zw^6$	1	1	(16,3)	18b
16b	(8,7,6,3 ;24)	$x^3+y^3w+z^4+w^8$	1	1	(16,3)	4c
17a	(5,5,3,2 ;15)	$x^3+y^3+z^5+zw^6$	3	3	(18,2)	3b
				1	(6,4)	
17b	(5,5,3,2 ;15)	$x^3+y^3+z^5+yw^5$	1	1	(6,4)	15b
18a	(3,3,2,1 ;9)	$x^3+y^3+z^4w+w^9$	3	3	(16,3)	4b
				1	(4,3)	
18b	(3,3,2,1 ;9)	$x^3+y^3+z^4w+yw^6$	1	1	(4,3)	16a
18c	(3,3,2,1 ;9)	$x^3+y^3+xz^3+zw^7$	1	1	(4,3)	54
18d	(3,3,2,1 ;9)	$x^3+y^3+z^4w+zw^7$	3	3	(16,3)	18d
				1	(4,3)	
18e	(3,3,2,1 ;9)	$x^3+y^3+z^3x+w^9$	3	3	(16,3)	18e
				1	(4,3)	
20a	(9,8,6,1 ;24)	$x^2z+y^3+z^4+w^{24}$	1	1	(12,1)	13a
20b	(9,8,6,1 ;24)	$x^2z+y^3+z^4+xw^{15}$	1	1	(12,1)	72a

No.	Weights	Polynomial	$\left\lvert\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{G}{J_W}\right\rvert$	(r,a)	Dual BHCR
22a	(6,5,3,1 ;15)	$x^2z+y^3+xz^3+w^{15}$	1	1	(10,2)	22a
22b	(6,5,3,1 ;15)	$x^2z+y^3+z^5+w^{15}$	1	1	(10,2)	11b
22c	(6,5,3,1 ;15)	$x^2z+y^3+z^5+xw^9$	2	2	(16,1)	25c
				1	(10,2)	
24a	(5,4,2,1 ;12)	$x^2z+y^3+z^6+xw^7$	1	1	(6,2)	67
24b	(5,4,2,1 ;12)	$x^2z+y^3+z^6+w^{12}$	3	3	(18,0)	10e
				1	(6,2)	
25a	(4,3,1,1 ;9)	$x^2w+y^3+xz^5+zw^8$	1	1	(4,1)	88
25b	(4,3,1,1 ;9)	$x^2z+y^3+z^8w+w^9$	1	1	(4,1)	48b
25c	(4,3,1,1 ;9)	$x^2w+y^3+xz^5+w^9$	2	2	(10,2)	22c
				1	(4,1)	
25d	(4,3,1,1 ;9)	$x^2w+y^3+z^9+w^9$	3	3	(16,1)	12b
				1	(4,1)	
25e	(4,3,1,1 ;9)	$x^2w+y^3+z^9+xw^5$	3	3	(16,1)	25e
				1	(4,1)	
27	(11,8,3,2 ;24)	$x^2w+y^3+z^8+w^{12}$	1	1	(12,1)	13c
28a	(10,7,3,1 ;21)	$x^2w+y^3+z^7+xw^{11}$	1	1	(10,0)	28a
28b	(10,7,3,1 ;21)	$x^2w+y^3+z^7+w^{21}$	1	1	(10,0)	14b
28c	(10,7,3,1 ;21)	$x^2w+y^3+z^7+zw^{18}$	1	1	(10,0)	51c
46	(33,22,6,5 ;66)	$x^2+y^3+z^{11}+zw^{12}$	1	1	(18,0)	10a
48a	(24,16,5,3 ;48)	$x^2+y^3+z^9w+w^{16}$	1	1	(16,1)	12a
48b	(24,16,5,3 ;48)	$x^2+y^3+z^9w+xw^8$	1	1	(16,1)	25b
49	(21,14,5,2 ;42)	$x^2+y^3+z^8w+w^{21}$	1	1	(12,1)	13e
51a	(18,12,5,1 ;36)	$x^2+y^3+z^7w+zw^{31}$	1	1	(10,0)	51a
51b	(18,12,5,1 ;36)	$x^2+y^3+z^7w+w^{36}$	1	1	(10,0)	14c
51c	(18,12,5,1 ;36)	$x^2+y^3+z^7w+xw^{18}$	1	1	(10,0)	28c
54	(7,6,5,3 ;21)	$x^3+y^3w+yz^3+w^7$	1	1	(16,3)	18c
59a	(8,7,5,1 ;21)	$x^2z+y^3+z^4w+w^{21}$	1	1	(12,1)	13b
59b	(8,7,5,1 ;21)	$x^2z+y^3+z^4w+xw^{13}$	1	1	(12,1)	72b
65	(14,11,5,3 ;33)	$x^2z+y^3+z^6w+w^{11}$	1	1	(18,0)	10b
67	(9,7,3,2 ;21)	$x^2z+y^3+z^7+xw^6$	1	1	(14,2)	24a
72a	(7,5,2,1 ;15)	$x^2w+y^3+xz^4+w^{15}$	1	1	(8,1)	20b
72b	(7,5,2,1 ;15)	$x^2w+y^3+xz^4+zw^{13}$	1	1	(8,1)	59b
88	(11,9,5,2 ;27)	$x^2z+y^3+z^5w+xw^8$	1	1	(16,1)	25a

TABLEAU C.1: Calculs pour $p=3$

No.	Poids	Polynôme	$\left\lvert\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{G}{J_W}\right\rvert$	(r,a)	Dual BHCR
6a	(5,2,2,1 ;10)	$x^2+y^5+z^5+w^{10}$	5	5	(18,1)	6a
				1	(2,1)	
6b	(5,2,2,1 ;10)	$x^2+y^5+z^5+zw^8$	1	1	(2,1)	30a
6c	(5,2,2,1 ;10)	$x^2+y^5+z^5+xw^5$	5	5	(18,1)	21a
				1	(2,1)	
9a	(10,5,4,1 ;20)	$x^2+y^4+z^5+w^{20}$	2	2	(10,1)	9a
				1	(10,1)	
9b	(10,5,4,1 ;20)	$x^2+y^4+z^5+yw^{15}$	1	1	(10,1)	34
9c	(10,5,4,1 ;20)	$x^2+y^4+z^5+xw^{10}$	1	1	(10,1)	26
9d	(10,5,4,1 ;20)	$x^2+xy^2+z^5+w^{20}$	1	1	(10,1)	9d
9e	(10,5,4,1 ;20)	$x^2+xy^2+z^5+yw^{15}$	1	1	(10,1)	71a
15b	(5,4,3,3 ;15)	$x^3+y^3z+z^5+w^5$	1	1	(6,2)	17b
17b	(5,5,3,2 ;15)	$x^3+y^3+z^5+yw^5$	1	1	(14,2)	15b
17c	(5,5,3,2 ;15)	$x^2y+y^3+z^5+xw^5$	2	2	(18,1)	21d
				1	(14,2)	
21a	(2,1,1,1 ;5)	$x^2w+y^5+z^5+w^5$	5	5	(18,1)	6c
				1	(2,1)	
21b	(2,1,1,1 ;5)	$x^2y+y^4z+z^5+w^5$	1	1	(2,1)	30b
21c	(2,1,1,1 ;5)	$x^2z+y^5+z^4w+xw^3$	1	1	(2,1)	86
21d	(2,1,1,1 ;5)	$x^2z+xy^3+z^5+w^5$	2	2	(6,2)	17c
				1	(2,1)	
21e	(2,1,1,1 ;5)	$x^2w+y^5+z^5+xw^3$	5	5	(18,1)	21e
				1	(2,1)	
26	(9,5,4,2 ;20)	$x^2w+y^4+z^5+w^{10}$	1	1	(10,1)	9c
30a	(20,8,7,5 ;40)	$x^2+y^5+z^5w+w^8$	1	1	(18,1)	6b
30b	(20,8,7,5 ;40)	$x^2+y^5+z^5w+xw^4$	1	1	(18,1)	21b
34	(15,7,6,2 ;30)	$x^2+y^4w+z^5+w^{15}$	1	1	(10,1)	9b
71a	(7,4,3,1 ;15)	$x^2w+xy^2+z^5+w^{15}$	1	1	(10,1)	9e
71b	(7,4,3,1 ;15)	$x^2w+xy^2+z^5+yw^{11}$	1	1	(10,1)	71b
86	(9,7,5,4 ;25)	$x^2y+y^3w+z^5+xw^4$	1	1	(18,1)	21c

TABLEAU C.2 – Calculs pour $p=5$

No.	Poids	Polynôme	$\left\lvert\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{G}{J_W}\right\rvert$	(r,a)	Dual BHCR
14a	(21,14,6,1 ;42)	$x^2+y^3+z^7+w^{42}$	1	1	(10,0)	14a
14b	(21,14,6,1 ;42)	$x^2+y^3+z^7+xw^{21}$	1	1	(10,0)	28b
14d	(21,14,6,1 ;42)	$x^2+y^3+z^7+yw^{28}$	1	1	(10,0)	45b
28a	(10,7,3,1 ;21)	$x^2w+y^3+z^7+xw^{11}$	1	1	(10,0)	28a
28b	(10,7,3,1 ;21)	$x^2w+y^3+z^7+w^{21}$	1	1	(10,0)	14b
28d	(10,7,3,1 ;21)	$x^2w+y^3+z^7+yw^{14}$	1	1	(10,0)	45c
32	(7,3,2,2 ;14)	$x^2+y^4z+z^7+w^7$	1	1	(4,1)	35a
35a	(14,7,4,3 ;28)	$x^2+y^4+z^7+yw^7$	1	1	(16,1)	32
35b	(14,7,4,3 ;28)	$x^2+xy^2+z^7+yw^7$	1	1	(16,1)	66a
45a	(14,9,4,1 ;28)	$x^2+y^3w+z^7+yw^{19}$	1	1	(10,0)	45a
45b	(14,9,4,1 ;28)	$x^2+y^3w+z^7+w^{28}$	1	1	(10,0)	14d
45c	(14,9,4,1 ;28)	$x^2+y^3w+z^7+xw^{14}$	1	1	(10,0)	28d
66a	(3,2,1,1 ;7)	$x^2z+xy^2+z^7+w^7$	1	1	(4,1)	35b
66b	(3,2,1,1 ;7)	$x^2w+xy^2+z^7+yw^5$	3	3	(16,1)	66b
				1	(4,1)	

Tableau C.3 – Calculs pour $p=7$

No.	Poids	Polynôme	$\left\lvert\frac{\mathrm{SL}_W}{J_W}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{G}{J_W}\right\rvert$	(r,a)	Dual BHCR
87	(5,4,3,1 ;13)	$x^2z+xy^2+yz^3+w^{13}$	1	1	(10,1)	87

Tableau C.4 – Calculs pour $p=13$

Bibliographie

[ABS] M. Artebani, S. Boissière, A. Sarti, *The Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan mirror symmetry for K3 surfaces*, à paraître dans Journal des Mathématiques Pures et Appliquées.

[AC] M. Artebani, P. Comparin, *Berglund-Hübsch mirror as a duality of polytopes*, en préparation.

[AS1] M. Artebani, A. Sarti, *Non-symplectic automorphisms of order three on $K3$ surfaces*, Math. Ann. **342** (2008), no. 4, 903–921.

[AS2] M. Artebani, A. Sarti, *Symmetries of order four on $K3$ surfaces*, à paraître dans Journal of the Mathematical Society of Japan.

[AST] M. Artebani, A. Sarti, S. Taki, *$K3$ surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order*, with an appendix by Shigeyuki Kondō, Math. Z. **268** (2011), no. 1-2, 507–533.

[BHPvdV] W. Barth, K. Hulek, C.A.M. Peters, A. Van de Ven, *Complex Compact Surfaces*, Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics], 4. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[Ba] V. Batyrev, *Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535.

[Be] S.-M. Belcastro, *Picard lattices of families of $K3$ surfaces*, Comm. Algebra **30** (2002), no. 1, 61–82.

[BHe] P. Berglund, M. Henningson, *Landau-Ginzburg orbifolds, mirror symmetry and the elliptic genus*, Nuclear Phys. B **433** (1995), no. 2, 311–332.

[BHu] P. Berglund, T. Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Phys. B **393** (1993), no. 1-2, 377-391.

[BL] M.J. Bertin, O. Lecacheux, *Elliptic fibrations on the modular surface associated to $\Gamma_1(8)$*, in "Arithmetic and Geometry of K3 Surfaces and Calabi-Yau Threefolds", Fields Institute Communications **67** (2013), 153–200.

[CD] A. Clingher, C.F. Doran *Note on a Geometric Isogeny of K3 Surfaces*, Int. Math. Res. Notices. (2011), 3657–3687.

[CG] P. Comparin, A. Garbagnati, *Van Geemen-Sarti involutions and elliptic fibrations on K3 surfaces double cover of $\mathbb{P}^2$*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), no. 2, 479–522.

[CLPS] P. Comparin, C. Lyons, N. Priddis, R. Suggs, The mirror symmetry of $K3$ surfaces with non-symplectic automorphisms of prime order, à paraître dans Advances in Theoretical and Mathematical Physics.

[CGo] A. Corti, Y. Golyshev, *Hypergeometric equations and weighted projective spaces*, Sci. China Math. **54** (2011), no. 8, 1577–1590.

[Co] D.A. Cox, *Lecture notes on toric varieties*, notes pour CIMPA School on Commutative Algebra, Hanoi, 2005.

[CK] D.A. Cox, S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 68, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[CLS] D.A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck, *Toric Varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[CR] A. Chiodo, Y. Ruan, *LG/CY correspondence : the state space isomorphism*, Adv. Math. **227** (2011), no. 6, 2157–2188.

[Di] J. Dillies, *On some order 6 non-symplectic automorphisms of elliptic K3 surfaces*, Albanian J. Math. **6** (2012), no. 2, 103–114.

[D] A. Dimca, *Singularities and coverings of weighted complete intersections*, J. Reine Angew. Math. **366** (1986), 184–193.

[Dol] I. V. Dolgachev *Classical algebraic geometry. A modern view*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[Dol2] I. V. Dolgachev, *Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces*, J. Math. Sci. **81** (1996), no. 3, 2599–2630.

[DN] I. V. Dolgachev, V.V. Nikulin, *Exceptional singularities of V. I. Arnold and K3 surfaces*, in Proc. USSR Topological Conference in Minsk, 1977.

[E] W. Ebeling, *Mirror symmetry, Kobayashi's duality and Saito's duality*, Kodai Math. J. **29** (2006), no. 3, 319–336.

[F] D. Fusi, *Construction of linear pencils of cubic curves with Mordell–Weril rank six and seven*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **55** (2006), no. 2, 195–205.

[FT] D. Fusi, A. Tironi, *On rational elliptic surfaces with Mordell-Weil group of rank five*, Boll. Unione Mat. Ital. **(9) 3** (2010), no. 2, 363–379.

[Fu] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematics Studies, 131, The William H. Roever Lectures in Geometry, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[vGS] B. van Geemen, A. Sarti, *Nikulin involutions on K3 surfaces*, Math. Z. **255** (2007), no. 4, 731–753.

[GS1] A. Garbagnati, A. Sarti, *Symplectic automorphisms of prime order on K3 surfaces*, J. Algebra **318** (2007), no. 1, 323–350.

[GS2] A. Garbagnati, A. Sarti, *Elliptic fibrations and symplectic automorphisms on K3 surfaces*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 10, 3601–3631.

[GS3] A. Garbagnati, A. Sarti, *On symplectic and non–symplectic automorphisms of K3 surfaces*, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), no. 1, 135–162.

[vGT] B. van Geemen, J. Top, *An isogeny of K3 surfaces*, Bull. London Math. Soc. **38** (2006), no. 2, 209–223.

[Ha] R. Hartshorne *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[I] H. Inose, *Defining equations of singular K3 surfaces and a notion of isogeny*, Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977), 495–502, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1978.

[I-F] A. R. Iano-Fletcher, *Working with weighted complete intersections*, Explicit birational geometry of 3-folds, 101–173, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[ISha] V.A. Iskovskikh, I.R. Shafarevich, *Algebraic surfaces*, Algebraic geometry, II, 127–262, Encyclopaedia Math. Sci. **35**, Springer, Berlin, 1996.

[Ke] T. Kelly, *Berglund-Hübsch-Krawitz Mirrors via Shioda Maps*, Adv. Theor. Math. Phys. **17** (2013) no. 6, 1425–1449.

[Kl] R. Kloosterman, *Classification of all Jacobian elliptic fibrations on certain K3 surfaces*, J. Math. Soc. Japan **58** (2006), no. 3, 665–680.

[Kod] K. Kodaira, *On compact complex analytic surfaces I*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 111–152.

[Ko] K. Koike, *Elliptic K3 surfaces admitting a Shioda-Inose structure*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **61** (2012), no. 1, 77–86.

[Kon] S. Kondō, *Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), no. 1, 75–98.

[KS] M. Kuwata, T. Shioda, *Elliptic parameters and defining equations for elliptic fibrations on a Kummer surface*, Algebraic geometry in East Asia–Hanoi 2005, 177–215, Adv. Stud. Pure Math., **50**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2008.

[Kra] M. Krawitz, *FJRW rings and Landau-Ginzburg mirror symmetry*, Thèse de Doctorat, 2010.

[KrSk] M. Kreuzer, H. Skarke *On the classification of quasihomogeneous functions*,Comm. Math. Phys. **150** (1992), no. 1, 137–147.

[Ku] A. Kumar, *Elliptic fibrations on a generic Jacobian Kummer surface*, to appear in J. Algebraic Geometry.

[Mi] R. Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces*, Università di Pisa, Dottorato di ricerca in matematica, ETS Editrice Pisa, 1989.

[Mo] D.R. Morrison, *On K3 surfaces with large Picard number*, Invent. Math. **75** (1984), no. 1, 105–121.

[N1] V.V. Nikulin, *Factor groups of groups of the automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections*, J. Soviet Math. **22** (1983), no. 4, 1401–1475.

[N2] V.V. Nikulin, *Finite groups of automorphisms of Kählerian $K3$ surfaces*, (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obshch. **38** (1979), 75–137. English translation : Trans. Moscow Math. Soc. **38** (1980), 71–135.

[N3] V. V. Nikulin, *Integral symmetric bilinear forms and some applications*, Izv. Math. Nauk SSSR **43** (1979), no. 1, 111–177, English translation : Math. USSR Izvestija **14** (1980), no. 1, 103–167.

[O] K. Oguiso, *On Jacobian fibrations on the Kummer surfaces of the product of nonisogenous elliptic curves*, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), no. 4, 651–680.

[Pi] H. Pinkham, *Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces K-3*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **284** (1977),no. 11, A615–A618.

[Pu] M. Pumperla, *Unifying Constructions in Toric Mirror Symmetry*, Thèse de Doctorat, 2011.

[Re] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, in Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985), Proc. Sympos. Pure Math. **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 345–414.

[RS] A.N. Rudakov, I.R. Shafarevich, *Surfaces of type K3 over fields of finite characteristic*, Current problems in mathematics, Vol. 18, pp. 115–207, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow, 1981.

[Sa] C. Salgado *Construction of linear pencils of cubics with Mordell-Weil rank five*, Comment. Math. Univ. St. Pauli **58** (2009), no.2, 95–104.

[Sc] M. Schütt, *Sandwich theorems for Shioda-Inose structures*, Izv. Math. **77** (2013), no. 1, 211–222.

[SS] M. Schütt, T. Shioda, *Elliptic surfaces*, Algebraic geometry in East Asia- Seoul 2008, 51–160, Adv. Stud. Pure Math., **60**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[Sh] I. Shimada, *On elliptic K3 surfaces*, Michigan Math. J. 47 (2000), no. 3, 423–446 (version en ligne avec liste complète arXiv : math/0505140v3 [math.AG]).

[SZ] I. Shimada, D.-Q. Zhang, *Classification of extremal elliptic K3 surfaces and fundamental groups of open K3 surfaces*, Nagoya Math. J. **161** (2001), 23–54.

[S1] T. Shioda, *On the Mordell–Weil lattices*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **39** (1990), no. 2, 211–240.

[S2] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 20–59.

[Sho] M. Shoemaker, *Birationality of Berglund-Hübsch-Krawitz mirrors*, preprint : arXiv :1209.5016.

[ST] J. H. Silverman, J. Tate, *Rational points on elliptic curves*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1992.

[T] S. Taki, *Classification of non–symplectic automorphisms of order 3 on K3 surfaces*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 1, 124–135.

[U] K. Utsumi, *Weierstrass equations for Jacobian fibrations on a certain K3 surface*, Hiroshima Math. J. **42** (2012), no. 3, 355–383.

[Y] T. Yonemura, *Hypersurface K3 simple singularities*, Tohoku Math. J. **(2) 42** (1990), no. 3, 351–380.

Titre : Symétrie miroir et fibrations elliptiques spéciales sur les surfaces K3

Une surface K3 est une surface X complexe compacte projective lisse qui a fibré canonique trivial et $h^{0,1}(X) = 0$. Dans cette thèse on s'intéresse à deux problèmes pour ces surfaces. D'abord on considère des surfaces K3 obtenues comme recouvrement double de $\mathbb{P}^2$ ramifié le long d'une sextique. On classifie les fibrations elliptiques sur ces surfaces et leur groupe de Mordell-Weil, c'est-à-dire le groupe des sections. Vu que une section de 2-torsion définit une involution de la surface (dite involution de van Geemen-Sarti), alors en classifiant les fibrations et les section de 2-torsion on obtient une classification complète des involutions de van Geemen-Sarti sur ce type de surfaces K3. On montre aussi comment calculer l'équation de la fibration et on étudie le quotient par l'involution de van Geemen-Sarti.

Ensuite on montre la construction de Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan (BHCR) : il s'agit d'une construction miroir qui part d'un polynôme dans un espace projectif à poids et d'un groupe d'automorphismes (avec certaines propriétés) et qui donne, en toute dimension, des paires de variétés de Calabi-Yau. Ces deux variétés sont l'une miroir de l'autre en sense classique. On classifie toutes les paires de surfaces K3 obtenues avec cette construction qui aient en plus un automorphisme non–symplectique d'ordre premier $p \geq 3$. Pour les surfaces K3 une autre notion de symétrie miroir a été introduite par Dolgachev et Nikulin : la symétrie pour K3 polarisées (LPK3). On montre dans la thèse comment polariser les surfaces obtenues avec la construction BHCR et on preuve que deux surfaces miroir au sense BHCR, dûment polarisées, appartiennent à deux familles miroir LPK3.

Mots-clefs : Surfaces K3, Automorphismes des surfaces, Fibrations elliptiques, Symétrie miroir BHCR, Symétrie miroir pour surfaces K3

Title : Mirror symmetry and special elliptic fibrations on K3 surfaces

A K3 surface is a complex compact projective surface X which is smooth and such that its canonical bundle is trivial and $h^{0,1}(X) = 0$. In this thesis we study two different topics about K3 surfaces. First we consider K3 surfaces obtained as double covering of $\mathbb{P}^2$ branched on a sextic curve. For these surfaces we classify elliptic fibrations and their Mordell-Weil group, i.e. the group of sections. A 2-torsion section induces a symplectic involution of the surface, called van Geemen-Sarti involution. The classification of elliptic fibrations and 2-torsion sections allows us to classify all van Geemen-Sarti involutions on the class of K3 surfaces we are considering. Moreover, we give details in order to obtain equations for the elliptic fibrations and their quotient by the van Geemen-Sarti involutions.

Then we focus on the mirror construction of Berglund-Hübsch-Chiodo-Ruan (BHCR). This construction starts from a polynomial in a weighted projective space together with a group of diagonal automorphisms (with some properties) and gives a pair of Calabi-Yau varieties which are mirror in the classical sense. The construction works for any dimension. We use this construction to obtain pairs of K3 surfaces which carry a non-symplectic automorphism of prime order $p \geq 3$. Dolgachev and Nikulin proposed another notion of mirror symmetry for K3 surfaces : the mirror symmetry for lattice polarized K3 surfaces (LPK3). In this thesis we show how to polarize the K3 surfaces obtained from the BHCR construction and we prove that these surfaces belong to LPK3 mirror families.

Keywords : K3 surfaces, Automorphisms of surfaces, Elliptic fibrations, Mirror symmetry BHCR, Mirror symmetry for K3 surfaces