

THESE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
(Diplôme National – Arrêté du 25 avril 2002)

ECOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGENIEUR

Spécialité : Génie Mécanique, Productique, Transport

Présentée par :

Manh Hung NGUYEN

ANALYSE DES ETANCHEITES ANNULAIRES A BAGUE FLOTTANTE

Directeur de Thèse : Mihaï ARGHIR

Co-Directeur de Thèse : Olivier BONNEAU

Soutenue le 4 Mars 2011

Devant la commission d'examen

JURY

M. BONIS	Professeur, Univ. Technologique de Compiègne	Rapporteur
L. SAN ANDRES	Professeur, Texas A&M University, USA	Rapporteur
M. ARGHIR	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
D. TONON	Ingénieur, SNECMA, Div. Moteurs Spatiaux	Examineur
O. BONNEAU	Professeur, Université de Poitiers	Examineur
N. BRUNETIERE	Chargé de Recherche CNRS, Univ. de Poitiers	Examineur
R. GRAS	Professeur émérite, SUPMECA Paris	Examineur

Remerciements

Cette étude a été effectuée à l'Institut Pprime, Département Génie Mécanique et Systèmes Complexes, dont je remercie son directeur, Michel Fillon, et son ancien directeur, Oliver Bonneau pour m'avoir accepté pour ces travaux de doctorat.

Je tiens bien évidemment à remercier particulièrement mon directeur de thèse Mihaï Arghir pour ses conseils et ses encouragements qui m'ont permis de réaliser ce travail de thèse.

Ce projet de recherche est financé par le CNES et soutenu par SNECMA Division Propulsion Liquide, qui ont suivi les avancements des travaux au rythme des réunions semestrielles. Je tiens ainsi à remercier nos partenaires industriels représentés principalement par Jérôme Déhouve et Emelyne Renard, David Tonon, Sebastien Guingo et Cedric Sené avec qui les échanges durant nos réunions semestrielles ont été très constructifs. Je voudrais souligner la disponibilité, l'attention et les conseils que j'ai reçu de la part de David Tonon pendant tout le long du travail de thèse.

Avant de terminer, je souhaiterais remercier amicalement l'ensemble des membres du laboratoire : les chercheurs, les secrétaires, les techniciens, mais plus particulièrement les doctorants de la salle informatique (Fabien, Jéjé, Touf, Mihai Dobrica, Dédé, Seb, et également Jean, Nono, Pascal). Je remercie très sincèrement les informaticiens, Franck et Mathieu, dont les conseils et les aides m'ont été très souvent bénéfiques.

Pour terminer, je voudrais remercier très chaleureusement ma famille qui m'a soutenu tout au long de mon travail.

Table des matières

Table des matières	5
Nomenclature	7
CHAPITRE I :	11
INTRODUCTION ET BIBLIOGRAPHIE	11
I.1. Etanchéités dynamiques utilisées dans les machines tournantes (turbopompes)	11
I.2. Classification des joints d'étanchéités	13
I.2.1. Joint labyrinthe	14
I.2.2. Joint hélicoïdal	15
I.2.3. Le joint annulaire	15
I.2.4. Joint à bague flottante (« floating ring seal »)	16
I.2.5. Joint segmenté	19
I.2.6. Joint hydrostatique (aérostatique)	22
I.2.7. Joint à faces radiales	23
I.2.8. Joint brosse (« brush seal »)	26
I.2.9. Joint à doigts (« finger seal »)	27
I.2.10. Conclusions	28
I.3. Fonctionnement d'un joint d'étanchéité dynamique à bague flottante. Analyse bibliographique.	30
CHAPITRE II :	35
MODELE HYDRAULIQUE DE L'ÉCOULEMENT DANS L'ÉTANCHEITE PRINCIPALE	35
II.1. Les équations de l'écoulement moyen (« bulk-flow »)	35
II.1.1. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'hypothèse de Hirs	36
II.1.2. L'équation de conservation de l'énergie	39
II.1.3. Conditions aux limites	40
II.1.4. Les équations stationnaires simplifiées de l'écoulement moyen (« bulk flow »)	42
II.2. Prise en compte de l'écoulement diphasique	45
II.2.1. Le changement de phase	45
II.2.2. Calcul des propriétés du fluide en régime diphasique	47
II.3. Résolution numérique des équations de l'écoulement moyen (« bulk flow ») compressibles	50
II.4. Validations. Comparaisons avec des résultats théoriques issus de la littérature	55
II.5. Le blocage sonique	57
II.5.1. Traitement numérique du blocage sonique	59
II.5.2. Analyse d'un joint annulaire convergent-divergent	65
II.6. Analyse du régime de fonctionnement dynamique (vibratoire). Hypothèse des petites perturbations	70
II.6.1. Résultats. Joint annulaire fonctionnant en LH2	74
II.6.2. Variation des coefficients dynamiques avec la fréquence d'excitation	82
CHAPITRE III :	85

STABILITE ET COMPORTEMENT DYNAMIQUE	85
III.1. Stabilité statique de la bague	86
III.2. Modélisation des principales forces sur la bague flottante. Equations du principe fondamental de la dynamique (PFD)	91
III.2.1. Les forces fluides non-stationnaires dans l'étanchéité principale (joint annulaire)	93
III.2.2. Force de frottement entre la bague et le stator (l'étanchéité secondaire)	99
III.2.3. Equations du PFD	107
III.3. Solution simplifiée « quasi-analytique » du régime de fonctionnement dynamique	108
III.3.1. Hypothèses et équations	108
III.3.2. Analyse de stabilité	112
III.3.3. Résultats et comparaisons avec le modèle numérique	116
III.4. Solution numérique complète du régime de fonctionnement dynamique	126
III.4.1. Force d'impact entre la bague et le rotor	126
III.4.2. Prise en compte de la rotation de la bague flottante autour de son axe	131
III.4.3. Prise en compte des pions anti-rotation	133
III.4.4. Résultats de la solution numérique complète. Bague flottante fonctionnant en LH2	137
CHAPITRE IV :	149
CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES	149
ANNEXE	151
Références	163

Nomenclature

a_{son}	Vitesse du son [m/s]
c	Coefficient utilisé dans la relation (III.57)
c_p, c_v	Chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant [J/kg/K]
C_{jeu}	Jeu radial [m]
$C_{xx}, C_{xy}, C_{yx}, C_{yy}$	Coefficient d'amortissement [Ns/m]
C	Couple [Nm]
d	Déformation d'aspérité [m]
D_H	Diamètre hydraulique [m]
e	Excentricité [m]
E	Module d'élasticité [Pa]
f	Coefficient de frottement
F	Force [N]
F_{dyn}	Force hydrodynamique [N]
F_f	Force de frottement [N]
F_z	Force normale [N]
g	Accélération gravitationnelle [m/s ²]
h, H	Epaisseur du film mince [m]
i	Enthalpie [J/kg]
i_t	Enthalpie totale [J/kg]
$\vec{J} = \rho\vec{V}H$	Flux massique de composantes $J_z = \rho WH$, $J_x = \rho UH$
k	Conductivité thermique [W/m/K]
k_t	Coefficient de raideur utilisé dans la relation (III.57) [N/m]
K_P	Raideur du contact de Hertz [N/m]
$K_{xx}, K_{xy}, K_{yx}, K_{yy}$	Coefficient de raideur [N/m]
L	Longueur [m]
\dot{m}	Débit massique [kg/s]
M	Nombre de Mach
p, P	Pression [Pa]
P_e^0	Pression totale (freinée) à l'entrée [Pa]
P_s^0	Pression totale (freinée) à la sortie [Pa]

Pr	Nombre de Prandtl
$q'' = k \partial T / \partial y$	Flux de chaleur [W/m ²]
R	Rayon de l'arbre [m]
Re	Nombre de Reynolds
R_{int}	Rayon intérieur du nez de la bague flottante [m]
R_{ext}	Rayon extérieur du nez de la bague flottante [m]
$\bar{R} = \frac{R_{int} + R_{ext}}{2}$	Rayon moyen du nez de la bague flottante [m]
S	Surface [m ²]
St	Nombre de Stanton
t	Temps [s]
T	Température [K]
U	Vitesse circumférentielle [m/s]
V	Vitesse [m/s]
$\vec{V}(W, U) = \vec{V}(V_n, V_t)$	Vitesse résultante [m/s]
W	Vitesse axiale [m/s]
W_g	Force de gravité [N]
\ddot{x}, \ddot{y}	Accélération [m/s ²]
z	Coordonnée axiale [m]
α	Exposant du contact de Hertz
β	Rayon d'aspérité [m]
$\gamma = c_p / c_v$	Rapport des chaleurs spécifiques
$\varepsilon = e / C_{jeu}$	Excentricité relative
η	Densité des aspérités
θ	Coordonnée circumférentielle [rad]
$\lambda = 4f$	Perte de charge distribuée dans une conduite
λ_q	Qualité du fluide
μ	Viscosité dynamique [Pa.s]
ν	Vitesse dans la définition du coefficient de restitution [m/s]
ξ	Coefficient de perte charge à l'entrée ou de récupération à la sortie
ρ	Masse volumique [kg/m ³]

σ_i	Ecart type de la surface i [m]
$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$	Ecart type combiné des surfaces de contact [m]
$\vec{\tau}_{ij}$	Tenseur des contraintes [N/m ²]
τ_{zs}, τ_{zr}	Contraintes axiales sur rotor et stator [N/m ²]
$\tau_{\theta s}, \tau_{\theta r}$	Contraintes circonférentielles sur rotor et stator [N/m ²]
ν	Coefficient de Poisson
ψ	Taux de vide du fluide dans le chapitre II ou angle dans le chapitre III
ω	Vitesse de rotation de l'arbre [rad/s], [tours/minute]
\Re	Constante universelle des gaz parfaits [m ² /s ² /K]
$\Re()$	Partie réelle du nombre complexe
$\Im()$	Partie imaginaire du nombre complexe

Indice

$0, 1$	Valeur à l'ordre zéro ou un
asp	Aspérité
dyn	Dynamique
$éq$	Equivalent
B, R	Bague, rotor
l, g	Liquide, gaz
n, t	Direction normale, tangentielle
r, s ou $1, 2$	Rotor, stator
z, θ	Direction axiale, circonférentielle
$fluide$	Fluide

Exposants

0	valeurs totales (freinées)
-----	----------------------------

CHAPITRE I :

INTRODUCTION ET BIBLIOGRAPHIE

I.1. Etanchéités dynamiques utilisées dans les machines tournantes (turbopompes)

Les bagues flottantes sont des éléments d'étanchéité utilisés dans les moteurs cryogéniques de fusée ou les turboréacteurs. La Figure I. 1 montre une turbopompe d'oxygène liquide (LOx). La pompe est entraînée par l'hydrogène gazeux qui se détend dans une turbine située à l'extrémité droite de la pompe. L'oxygène liquide est aspiré et ensuite refoulé dans la volute grâce aux effets centrifuge imprimée par le rouet. Le rouet est prévu avec des joints d'étanchéité dynamiques (avec jeu fonctionnel) sur sa face avant et sur sa face arrière. Le joint situé sur la face avant sépare le nez du rouet du corps de la pompe et limite le débit de fuite entre la volute (refoulement à haute pression) et la zone d'aspiration (basse pression). Un deuxième débit de fuite s'établit entre la volute et la chambre d'étanchéité (« seal chamber »). Ce débit de fuite qui passe par la face arrière du rouet est utilisé pour équilibrer axialement l'arbre de la turbopompe et pour lubrifier les roulements. En effet, la turbopompe ne possède pas de butée et la reprise des efforts axiaux s'effectue sur la face arrière de la volute. Pour ceci, les roulements (même précontraints) sont montés avec jeux entre la bague extérieure et le stator permettant ainsi un degré de mobilité axiale. Deux joints d'étanchéité dynamiques (« balance piston orifices » sur la Figure I. 1) ont le rôle d'assurer une pression sur la face arrière du rouet afin de la rendre capable de reprendre les efforts axiaux.

Le débit de fuite lubrifie et refroidit ensuite les roulements avant d'arriver dans la chambre d'étanchéité. Le maintien sous pression de l'oxygène dans la zone des roulements est assuré par un joint labyrinthe. Une bonne partie de la fuite d'oxygène liquide est ensuite dirigée vers l'entrée de la pompe où elle est réinjectée. Le reste s'échappe via le joint à faces radiales (« rotating mating ring »+« seal ring ») qui a le rôle de maintenir la pression dans la chambre d'étanchéité.

L'hydrogène liquide est présent à l'autre extrémité de la turbopompe, au niveau de la turbine. La turbopompe présente donc la particularité de mettre en jeu deux fluides qui ne doivent pas venir en contact. Le rôle de séparer ces deux fluides est assuré par un joint tampon (« buffer seal »). Ce joint dynamique est réalisé à partir de deux étanchéités, le plus souvent identiques, entre lesquelles on

injecte un gaz inerte sous pression (hélium GHe ou azote GN2). Ce gaz va s'échapper des deux cotés du joint tampon et va se mélanger d'une part au très faible débit d'oxygène qui arrive à traverser le joint à faces radiales et, d'autre part, à l'hydrogène liquide qui entraîne la turbine. Il est donc important que le joint tampon puisse fonctionner à des pressions assez élevées pour assurer la séparation des deux fluides cryogéniques tout en ayant un débit de fuite faible afin de limiter la quantité de gaz inerte embarquée. Le joint annulaire à bague flottante (« floating ring seal ») présenté sur la Figure I. 1 représente une solution qui répond à ces deux besoins.

La Figure I. 1 met donc en évidence plusieurs étanchéités dynamiques : joints annulaires, joint labyrinthe, joint à faces radiales, joints à bague flottante. Toutes ces étanchéités doivent fonctionner en présence des déplacements dynamiques importants de l'arbre. Les joints annulaires et labyrinthes sont généralement conçus avec des jeux radiaux importants. Les joints à faces radiales et les joints à bague flottante sont prévus avec des jeux bien plus faibles mais ils ont la possibilité de suivre le mouvement vibratoire de l'arbre. Une classification générale des systèmes d'étanchéités et une synthèse des caractéristiques des joints dynamiques sont présentées par la suite pour mieux situer les avantages et les limites des joints à bagues flottantes.

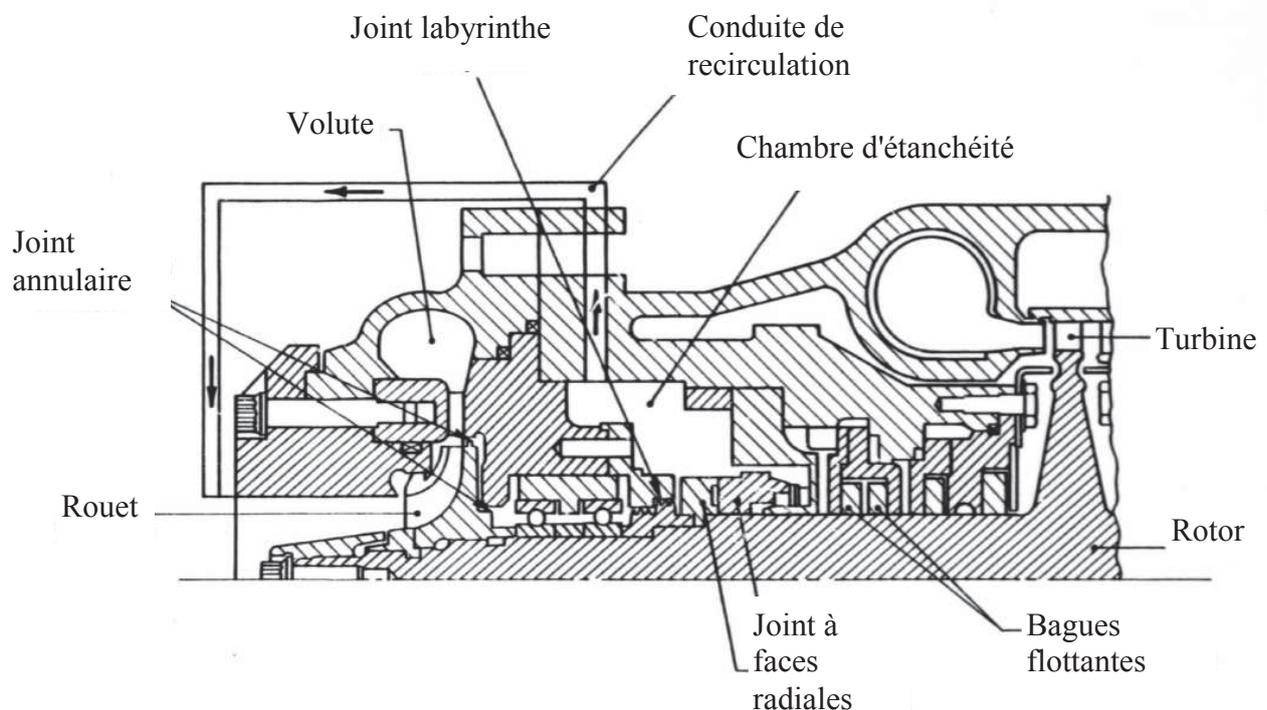


Figure I. 1 Section d'une turbopompe LOx [1].

I.2. Classification des joints d'étanchéités

Les joints d'étanchéités sont généralement classifiés comme joints statiques et joints dynamiques. Le Tableau I. 1 issu de la référence [2] présente une telle classification.

Les joints statiques sont caractérisés par une pression de contact relativement importante et sont souvent réalisés à partir d'un matériau dont le rôle est de se déformer afin de refermer une ou des cavités. Ces joints fonctionnent donc avec un débit de fuite nul.

Les joints dynamiques sont généralement prévus avec un jeu afin de permettre le déplacement relatif entre les surfaces à étancher. Dans ce cas le débit de fuite est assez important car ces joints sont destinés à étancher des pressions élevées. Une des solutions pour réduire le débit de fuite est la diminution du jeu mais dans ce cas le joint doit être capable de suivre les déplacements relatifs des surfaces à étancher.

Tableau I. 1: Classification des joints statiques et dynamiques [2]

Principal constructional materials	Dynamic seals				Static seals
	Contact seals		Clearance seals		
	Rotary	Reciprocating	Rotary	Reciprocating	
Metallic, ceramic, or carbon, etc.	Mechanical seal Packed gland	Piston rings Packed gland Bellows Diaphragm	Labyrinth Viscoseal Fixed bushing Floating bushing Centrifugal seal	Labyrinth Fixed bushing Floating bushing	Ring gasket Sheet gasket Pipe coupling Bellows
Rubber	Lip seal O-ring	U-ring V-ring O-ring Lobed O-ring Rectangular ring Coaxial seal Bellows Diaphragm			Sheet gasket O-ring Bonded washer Bellows Inflatable gasket
Plastics (inc. PTFE), fibrous or composites	Lip seal Packed gland	U-ring O-ring Coaxial seal Packed gland Piston ring Bellows Diaphragm			Sheet gasket O-ring Bellows Diaphragm Sealants

Comme le montre le Tableau I. 1, la démarcation entre joints statiques et joints dynamiques n'est pas toujours très stricte, quelques joints à contact pouvant fonctionner en présence de déplacements relatifs. Toutefois, afin de limiter les puissances dissipées, les pressions de contact et/ou les vitesses de déplacement sont assez faibles. Quelques types de joints dynamiques sont ci-dessous présentés.

I.2.1. Joint labyrinthe

Dans un joint labyrinthe le débit de fuite est limité grâce à un système de chicanes que le fluide est obligé de traverser. La puissance ainsi dissipée se traduit par une différence de pression et un débit de fuite entre la chambre haute pression et la chambre basse pression. Le joint labyrinthe est utilisé aussi bien pour des liquides que pour des gaz. La Figure I. 2 présente différents joints labyrinthes. Pour tous ces joints l'écoulement principal est dirigé dans la direction axiale. Le premier joint est un joint à stator rainuré. Le deuxième est un joint à dents sur le rotor et sur le stator. Le troisième est un joint étagé. La pression du fluide diminue en traversant chaque dent du joint.

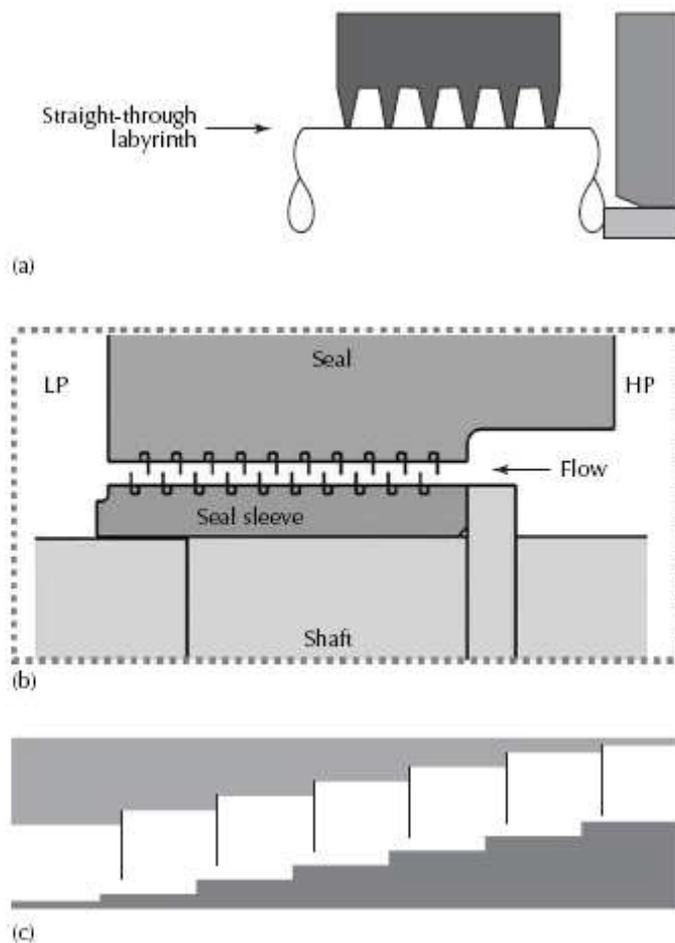


Figure I. 2 Joints labyrinthe utilisé dans les turbo-machines (a) joint à stator rainuré, (b) joint à dents décalées, (c) joint étagé. [3]

Les joints labyrinthes sont le plus souvent des joints métalliques. Néanmoins, certaines applications ne garantissent pas toujours la présence d'un jeu radial au niveau des dents. Par exemple, les moteurs d'aviation peuvent être soumis à des charges dynamiques provenant des manœuvres. Les rotors étant flexibles, les dents des labyrinthes qui étanchent les étages du compresseur ou de la turbine peuvent accidentellement venir en contact avec le stator. Afin de prévenir la dégradation du joint, soit le stator est couvert d'un matériaux abradable dans lequel les dents peuvent creuser sans se détériorer, soit (solution plus rare) les dents sont réalisés dans un polymère tolérant aux grandes déformations.

I.2.2. Joint hélicoïdal

Le fonctionnement de ce joint est basé sur l'effet de pompage qu'induit une hélice usinée sur le rotor. L'efficacité du joint dépend beaucoup de la viscosité du fluide, du jeu radial et de la vitesse de rotation de l'arbre. Le joint hélicoïdal peut fonctionner à hautes températures et fortes vitesses de rotation car le frottement entre l'arbre et le coussinet est absent. A la vitesse de rotation optimale, le joint peut fonctionner sans fuite. Il est utilisé dans des étanchéités liquide-gaz ou liquide-liquide.

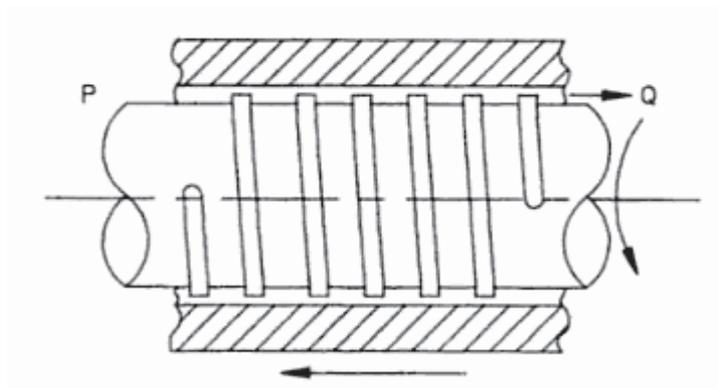


Figure I. 3 Joint hélicoïdal [4].

I.2.3. Le joint annulaire

La Figure I. 4 présente une pompe munie exclusivement de joints annulaires. Ce joint est peut être le plus simple des joints d'étanchéité dynamique. Il consiste tout simplement en un passage annulaire entre la chambre haute pression et la chambre basse pression. Les jeux radiaux sont d'un ordre de grandeur supérieurs aux jeux dans les paliers lubrifiés, car le joint annulaire doit s'accommoder des vibrations du rotor tout en évitant le contact. Le joint annulaire fonctionne donc avec des débits de fuite assez importants, d'autant plus que tout comme le joint labyrinthe, il est destiné à étancher des différences de pression importantes. Ceci fait que les forces générées à la fois

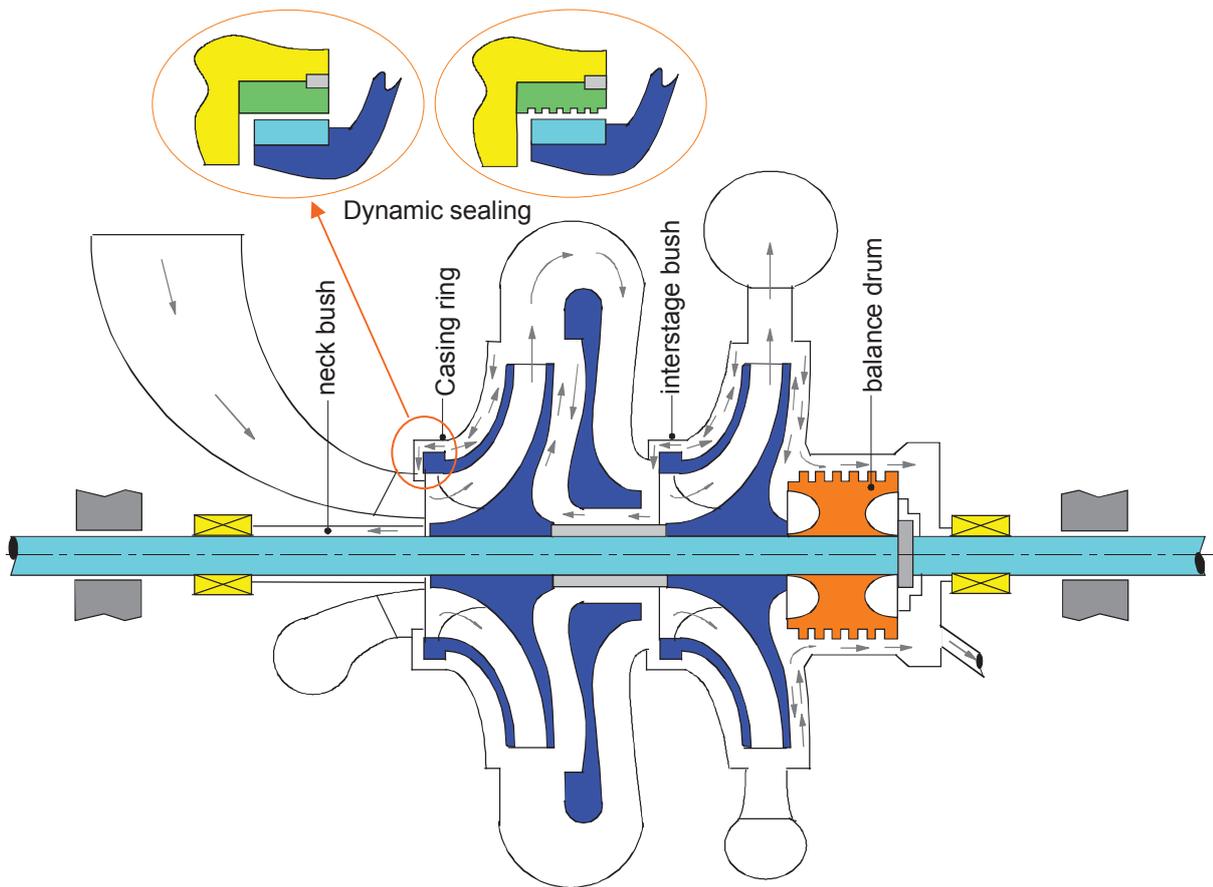


Figure I. 4 Pompe prévue avec des joints annulaires.

par l'écoulement axial (dû aux différences de pressions) et par l'écoulement circonférentiel (engendré par le rotor) sont importantes et comparables à celles dans les paliers de guidage. Pour la dynamique des rotors des machines tournantes les coefficients dynamiques des joints annulaires sont donc aussi importants que ceux des paliers lubrifiés.

I.2.4. Joint à bague flottante (« floating ring seal »)

Le joint d'étanchéité à bague flottante est d'abord un joint annulaire avec un jeu radial réduit ($15\mu\text{m} \dots 30\mu\text{m}$) pour diminuer les débits de fuite. Afin de pouvoir s'accommoder à des vibrations de l'arbre tout en conservant un faible jeu radial, le joint est réalisé sous la forme d'une bague libre de se déplacer radialement. Deux étanchéités peuvent alors être mises en évidence (Figure I. 5).

L'étanchéité principale est réalisée dans l'espace annulaire entre la bague et le rotor. Ceci est une étanchéité dynamique car un faible jeu radial doit en permanence séparer la bague et le rotor.

L'étanchéité secondaire est réalisée entre la face frontale de la bague (son « nez ») et le stator (ou le boîtier qui enferme la bague). Ceci est une étanchéité dynamique de débit quasi-nul car normalement, sous l'effet de la différence de pression entre les chambres amont et aval, le nez de la bague est en permanence en contact avec le stator.

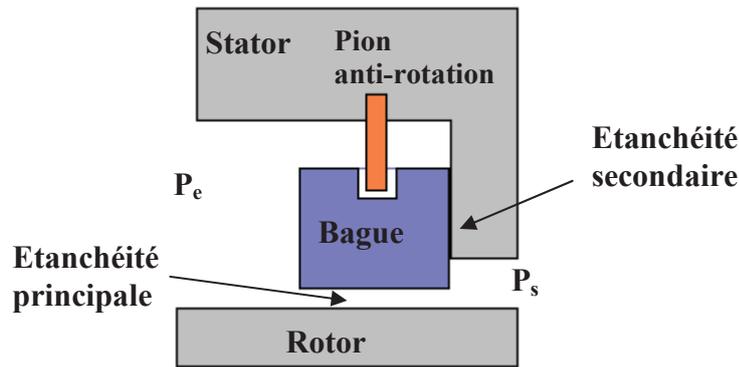


Figure I. 5 Système d'étanchéité à bague flottante.

Plusieurs aspects liés à la conception des systèmes d'étanchéité à bagues flottantes doivent être évoqués. Le premier est la raideur du film fluide dans l'étanchéité principale. La bague « flottante » est capable de suivre les vibrations de l'arbre grâce aux forces hydrodynamiques (aérodynamiques) générées dans le passage axial annulaire qui constitue l'étanchéité principale. Ces forces aérodynamiques non stationnaires sont généralement décrites comme des effets de raideur, d'amortissement et éventuellement de masse ajoutée. Pour maximiser la capacité de la bague à suivre les vibrations de l'arbre, il convient donc d'augmenter la raideur directe du film fluide. L'étanchéité principale peut donc être plus complexe qu'un simple orifice annulaire. La Figure I. 6 présente quelques solutions. Une marche ou un convergent usinés sur le diamètre intérieur de la bague et dans la direction de l'écoulement axial permettent d'augmenter la raideur statique. Une solution plus complexe désignée comme « MR » sur la Figure I. 6 consiste à usiner des poches sur la face intérieure de la bague flottante. Au voisinage de la poche, le fluide entraîné par la rotation de l'arbre va générer une pression aérodynamique (hydrodynamique) qui va augmenter la raideur du film mince. Il faut néanmoins noter que les solutions « MA » et « C » sont également caractérisées par la diminution des capacités d'amortissement du film mince et la solution « MR » présente une raideur croisée augmentée. Ceci sont des effets défavorables qui tendent à déstabiliser le comportement dynamique de la bague. Une solution intéressante est présentée sur la Figure I. 7 où la bague est prévue sur sa face intérieure avec des orifices (et éventuellement avec des poches circonferentielles) d'injection. Les orifices sont alimentés en fluide sous pression par une canalisation usinée sur la face avant de la bague flottante (en contact avec la chambre haute pression). Le support aérostatique ainsi créé confère une raideur directe très importante au film mince sans pénaliser l'amortissement et en diminuant même la raideur croisée.

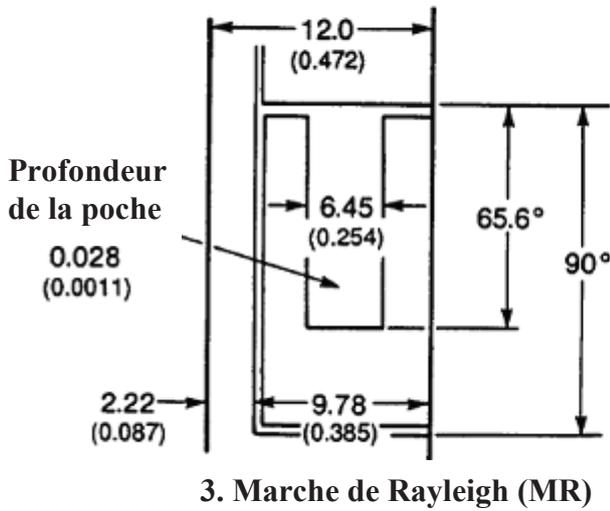
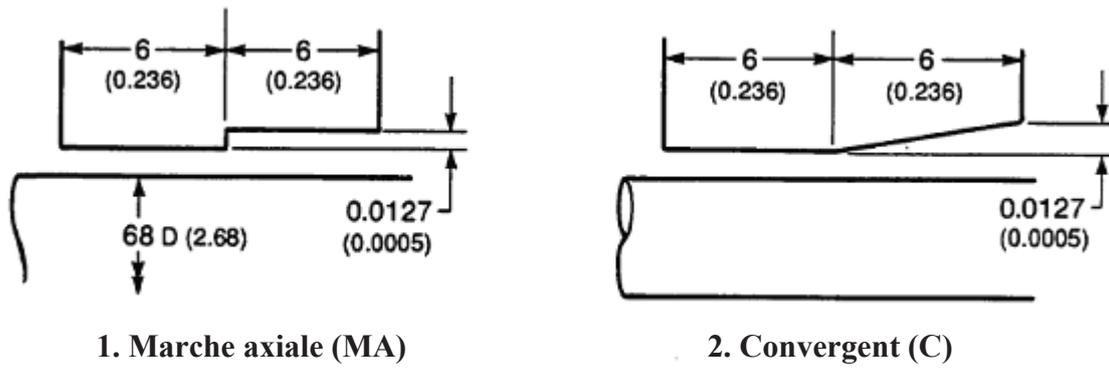


Figure I. 6 Bagues flottantes prévues avec des marches et des poches dans l'étanchéité principale [5].

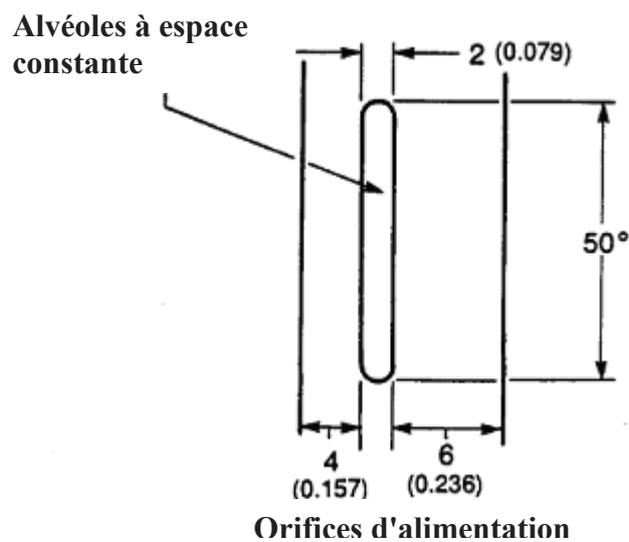


Figure I. 7 Bague flottante avec des orifices d'alimentation [5].

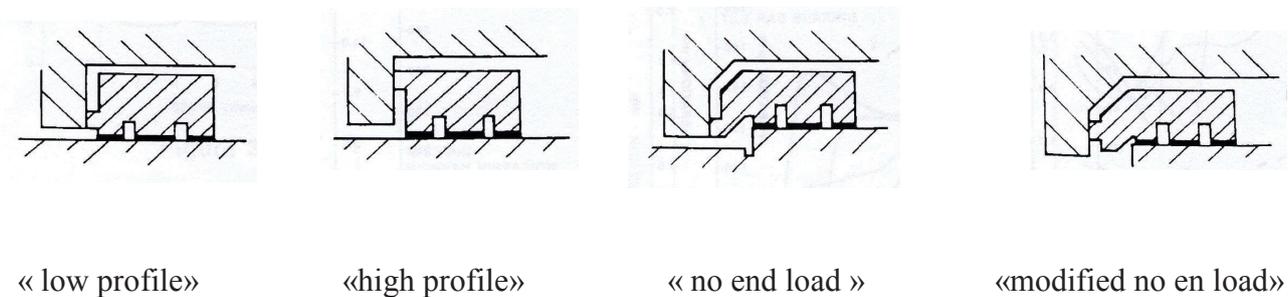


Figure I. 8 Différents profils de bague permettant l’ajustement de la force de frottement dans l’étanchéité secondaire [6].

Un deuxième aspect est lié à la puissance dissipée dans l’étanchéité secondaire (dans le contact entre le nez de la bague et le stator) quand la bague suit les vibrations de l’arbre. Cette puissance dissipée se traduit par une usure de la bague et limite sa durée de vie. Pour augmenter la durée de vie de la bague il est donc nécessaire de diminuer la force de frottement entre son nez et le stator. La bague flottante est souvent en carbone graphité ou un composite de carbone graphité autolubrifiant. Pour un stator en acier ceci correspond à un coefficient de frottement sec de 0.2...0.25. La seule manière pour ajuster la force de frottement est donc la modification de son nez qui vient s’appuyer contre le stator. La Figure I. 8 présente différentes formes du nez de la bague permettant l’ajustement de la force de frottement dans l’étanchéité secondaire.

L’usure n’est pas la seule contrainte qui conduit au choix des matériaux. Le couple de matériaux bague/stator ainsi que les tolérances de forme sont aussi très importantes car la bague est souvent soumise à des température extrêmes et le rotor tourne à des vitesses très élevées (20 krpm...50 krpm ou plus). Dans ces situations le jeu radial est affecté par des dilatations thermiques de la bague et du rotor et par la déformation de l’arbre. Il est donc nécessaire que les coefficients d'expansion thermique de la bague et de l'arbre soient similaires. De plus il faut tenir compte du fait que généralement les bagues réalisées en carbone sont montées dans une frète en acier pour éviter les endommagements. Ceci rend les problèmes de dilatations thermiques encore plus complexes.

I.2.5. Joint segmenté

Le joint segmenté est une étanchéité qui permet d’assurer, au moins du point de vue théorique, un débit de fuite très faible. Le joint est constitué de trois segments circonférentiels prévus avec un ergot et une encoche à chaque extrémité (Figure I. 9).



Figure I. 9 Joint segmenté [7].

Quand ils sont assemblés, les segments prennent la forme d'une bague annulaire de diamètre variable. La variation du diamètre est possible du fait que l'ergot de chaque segment est emboîté dans l'encoche du segment suivant. Le joint segmenté est placé dans un boîtier mais son montage se fait directement sur l'arbre. Un ressort circulaire placé sur la circonférence du joint engendre une force radiale qui permet le maintien en position des segments autour de l'arbre. Un autre ressort exerce une légère force axiale pour plaquer le joint segmenté contre son boîtier. En fonctionnement, la pression amont va à la fois serrer les segments contre l'arbre (et va ainsi assurer l'étanchéité principale) et va plaquer le nez du joint segmenté contre le stator afin de réaliser l'étanchéité secondaire. Le joint segmenté est alors une étanchéité avec contact et agit comme un joint à lèvres car la pression à étancher serre le joint contre le rotor. Tout comme la bague flottante, le joint segmenté peut être prévu avec des pions antirotation et peut renfermer du liquide ou du gaz.

Les segments sont réalisés avec un matériau ayant des bonnes propriétés antifriction, le plus souvent le carbone graphité. Pour éviter l'usure de l'arbre, celui-ci est prévu avec un fourreau monté serré et qui peut être éventuellement remplacé.

Le joint segmenté a un débit de fuite plus faible qu'un joint labyrinthe ou un joint à bague flottante mais ses performances dépendent de son niveau d'usure. En effet, la pression de contact dans l'étanchéité principale et la rotation de l'arbre engendrent une puissance dissipée qui mène à l'usure des segments. Sous l'effet de la pression dans le boîtier, les segments ont tendance à compenser l'usure mais ceci n'est possible que si l'emboîtement des ergots dans les encoches assure une étanchéité parfaite. La longueur de recouvrement entre les ergots et les encoches détermine la durée de vie du joint segmenté.

La Figure I. 10 présente une des premières conceptions de joints segmentés datant des années '60. L'étanchéité est réalisée avec un montage de trois bagues flottantes. Chaque bague flottante consiste de trois segments de 120°. Contrairement aux joints plus récents, ces segments ne possèdent pas des

ergots et des encoches à leur extrémité. Une première bague flottante de faible diamètre (seal ring) est en appui contre le boîtier du joint et en contact avec le rotor. Une deuxième bague (cover ring) est montée sur le diamètre extérieur de la première et s'appuie également sur le boîtier. Les trois segments de cette bague extérieure sont décalés de 60° par rapport aux segments de la bague intérieure et sont espacés par trois pions antirotation. Un ressort circulaire est monté sur la circonférence et va engendrer une pression de contact radiale entre la bague extérieure et la bague intérieure et entre la bague intérieure et le rotor. L'étanchéité est complétée par une troisième bague flottante (« back ring » sur la Figure I. 10), également constituée de trois segments mais décalés de 60° par rapport aux deux premières bagues. Cette bague arrière s'appuie sur les deux premières. Son arrêt en rotation est réalisé par les trois pions antirotation mentionnés avant et son serrage radial est assuré par un deuxième ressort circulaire. Un ressort ondulé appuie les trois bagues contre le boîtier et assure leur maintien en position durant le montage et en absence de la pression de fonctionnement. Le fonctionnement sous pression de ce joint est identique à celui présenté sur la Figure I. 9. La pression dans la chambre amont va pousser les bagues dans la direction axiale en les appuyant une contre l'autre et sur le boîtier. La même pression va s'exercer en direction radiale sur les bagues en les serrant contre le rotor. Etant réalisé de trois segments indépendants, les bagues peuvent suivre les vibrations de l'arbre. Dû aux multiples contacts entre bagues (bague arrière/deux bagues avant, bague extérieure/bague intérieure), la puissance dissipée par frottement par ces joints segmentés est supérieure à celle des joints décrits sur la Figure I. 9. L'échauffement et l'usure sont donc plus importants.

La complexité de ce joint datant des années '60 permet de souligner l'avantage du joint segmenté de conception plus récente présenté sur la Figure I. 9 et qui utilise seulement trois segments. Le verrou technologique permettant leur mise en œuvre est donc la possibilité d'usiner les ergots et les encoches dans les segments en carbone.

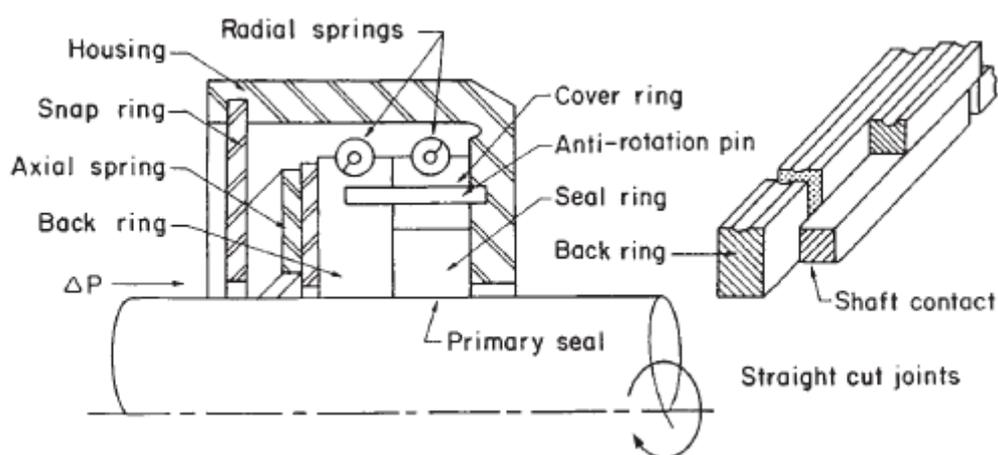


Figure I. 10 Joint segmenté [8].

I.2.6. Joint hydrostatique (aérostatique)

Un type spécial de joint à bague segmentée et flottante est présenté par Shapiro et al. [5], [9]. Le joint hérite des caractéristiques du joint à bague flottante (absence de contact entre la bague et le rotor) et du joint segmenté (possibilité d'adapter ses dimensions aux déplacements de l'arbre). Son fonctionnement est en bonne partie aérostatique (hydrostatique) étant basé sur l'injection de fluide sous pression dans le joint. Le joint et son montage sont présentés sur la Figure I. 11. Il est constitué de trois segments circulaires de 120° prévus avec un ergot et une encoche à chaque extrémité (Figure I. 12). Ceci offre au joint la possibilité de modifier légèrement son diamètre et de rajuster le jeu radial pour compenser les dilatations thermiques et centrifuges de l'arbre.

La section transversale du joint est en forme de « T ». Un ressort circulaire (non représenté sur la figure) maintient les trois segments en position quand le joint n'est pas alimenté. Deux joints secondaires sont prévus sur les faces latérales de la bague flottante. Le fluide est injecté sous pression dans des poches par des trous d'alimentation prévus sur la circonférence extérieure du joint. Ces trous débouchent sur la circonférence intérieure du joint et sur chacune des deux faces latérales comme montré sur la Figure I. 12. Des films aérostatiques se forment alors entre la surface intérieure du joint en « T » et l'arbre et entre ses faces latérales et les joints secondaires. Les joints secondaires sont des bagues munies de segments d'étanchéité classiques (« piston rings »). Les faces latérales du joint en « T » sont prévues avec des rainures pour augmenter la capacité portante du film aérostatique. La pression sur les faces latérales du joint est maintenue par les ressorts qui appuient chacun des joints secondaires contre le film aérostatique. La raideur élevée des films aérostatiques garantit un fonctionnement sans contact aussi bien entre le joint en « T » qu'entre ce joint et les deux joints secondaires.

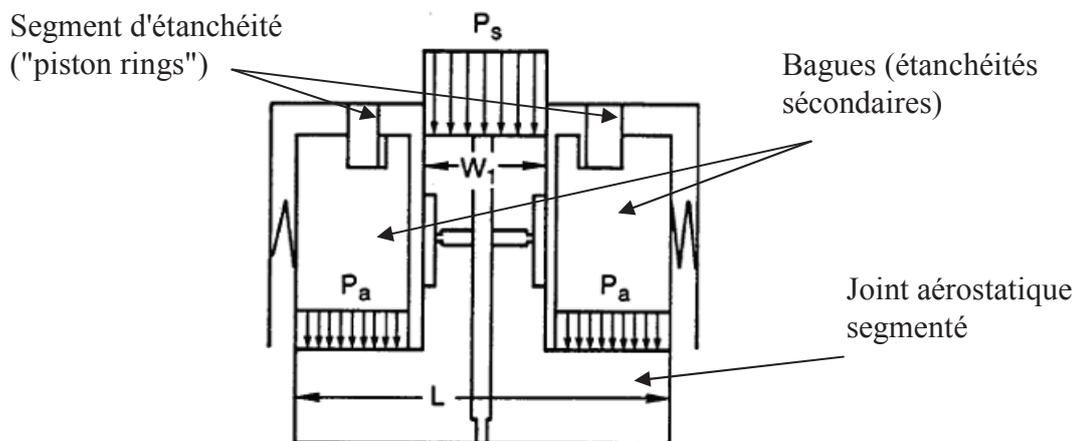


Figure I. 11 Configuration du joint aérostatique [9].

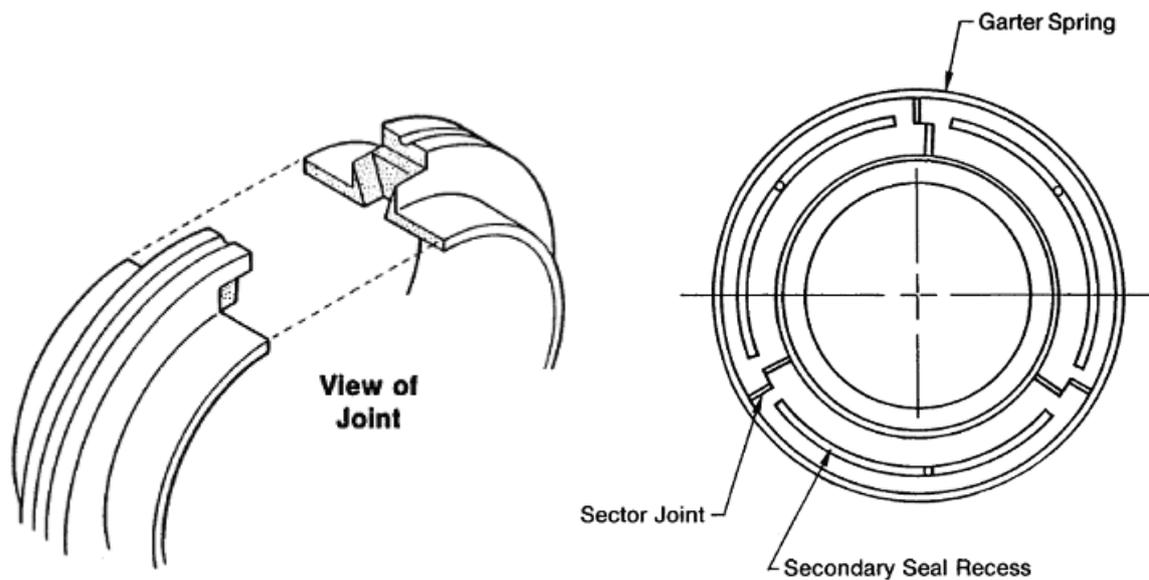


Figure I. 12 Joint aérostatique segmenté [9].

S'il est correctement conçu, ce joint peut donc fonctionner sans contact. Sa principale limitation vient du fait qu'il peut fonctionner seulement comme un joint tampon (« buffer seal ») car il nécessite un apport extérieur de fluide.

I.2.7. Joint à faces radiales

La Figure I. 13 représente un joint à faces radiales qui comprend une étanchéité principale, une étanchéité secondaire et un ressort. L'étanchéité principale est réalisée entre l'anneau mobile (« primary ring ») réalisé dans un matériau tendre comme le carbone et l'anneau fixe (« mating ring ») réalisé dans un matériau dur par rapport au premier. Le ressort et la pression du fluide vont appuyer la face radiale de l'anneau en carbone contre la surface de l'anneau fixe. La pression hydrodynamique générée par la rotation de l'anneau en carbone va créer une barrière de pression qui permettra d'étancher le fluide sous pression.

La configuration présentée sur Figure I. 13 ou sur la Figure I. 14 (a) n'est pas la seule possible. La Figure I. 14 (b) représente une solution constructive adoptée si le fluide à étancher est corrosif et le joint à face radiale est situé à l'extérieur du fluide à étancher. Pour les solutions présentées sur les Figure I. 14 (a,b) le joint à face radiale est rotatif car il est fixé sur le rotor. Dans ce cas l'équilibrage dynamique du joint est difficile et la vitesse de rotation maximale est inférieure à 30m/s. Pour des vitesses de rotation plus élevées, le joint à face radiale est monté sur le stator (Figure I. 14 (c)).

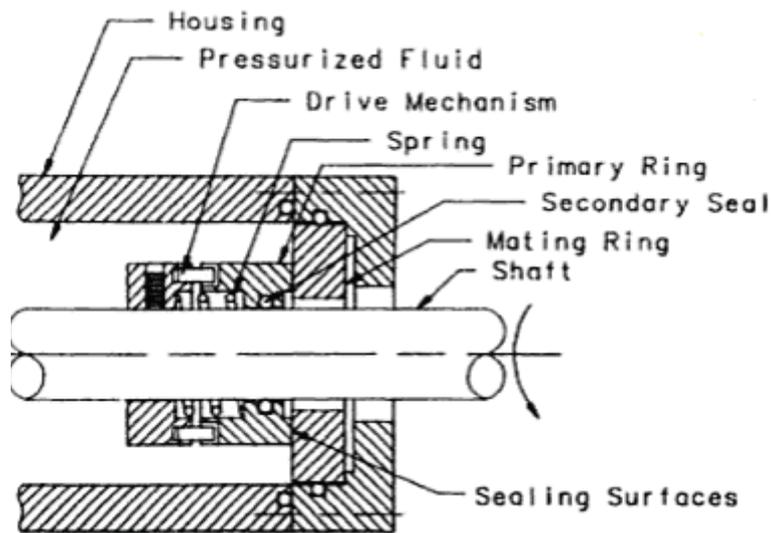


Figure I. 13 Joint à faces radiales [4].

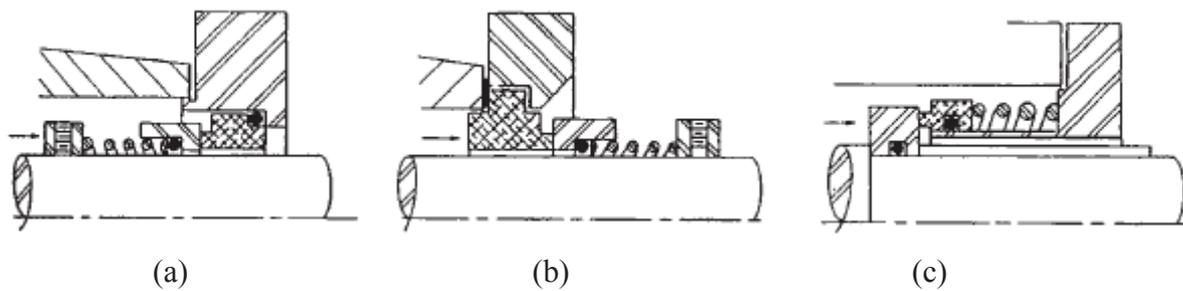


Figure I. 14 Des configurations différentes de joint à faces radiales [8].

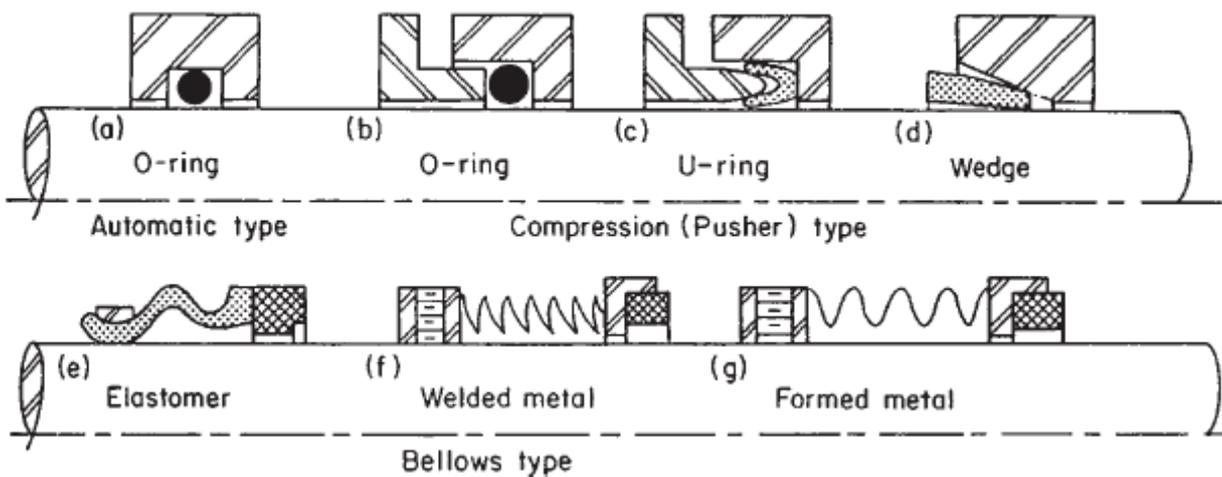


Figure I. 15 Des configurations différentes pour le joint secondaire [8].

Plusieurs solutions constructives présentées sur la Figure I. 15 sont également possibles pour l'étanchéité secondaire. Le joint secondaire peut être un joint torique, en élastomère ou un soufflet

métallique. Par rapport aux joints toriques, les soufflets ont l'avantage de diminuer le frottement sur l'arbre mais la gamme de pressions à étancher est plus réduite.

La force de fermeture des deux surfaces de contact du joint à faces radiales est fournie par des ressorts ou des soufflets. Elle doit être supérieure à la force de frottement dans le joint secondaire et assez importante pour fermer le contact principal en absence de la pression du fluide à étancher. Néanmoins, si la force de fermeture est trop élevée, les forces hydrodynamiques auront du mal à ouvrir le joint principal et le joint va s'user prématurément. Le film mince qui doit s'installer dans l'étanchéité principale en conditions de fonctionnement normales est d'environ 1 μm .

Le joint à faces radiales fonctionne généralement à des pressions de 0MPa à 20MPa, des températures de -40°C à 200°C et des vitesses de rotation de 0 à 100 m/s. Il représente un système d'étanchéité très efficace largement utilisé dans l'industrie pétrochimique ou nucléaire. Son utilisation à des applications aéronautiques a été retardée par le fait que le joint à faces radiales classique ne peut pas s'accommoder de déplacements axiaux importants du rotor.

L'utilisation des bagues en carbone est commune aux joints d'étanchéité à bague flottante, à bagues segmentées et aux joints à faces radiales. Le carbone est utilisé dans les applications tribologiques grâce à ses caractéristiques autolubrifiantes. En régime de frottement sec ou limite, un film mince de carbone peut être transféré sur la face en contact. L'usure du carbone est rapide en phase de rodage et permet de pallier les imperfections des surfaces de contact. Dès qu'un film mince de carbone est transféré sur la surface d'accouplement, le frottement est faible et l'usure devient très lente. Néanmoins la face d'accouplement doit avoir une bonne dureté et une rugosité fine car le carbone est tendre. Une usure rapide a lieu en contact avec une face de rugosité élevée et de plus cette usure est accompagnée des débris et des poussières qui sont souvent dommageables. A noter que sous vide ou à faible humidité, le carbone n'a pas de propriétés lubrifiantes [10].

Les autres caractéristiques physico-chimiques du carbone sont :

- Une bonne résistance chimique à la plupart des milieux environnants, sauf des acides oxydants forts.
- La possibilité de fonctionnement à des températures extrêmes, allant des valeurs cryogéniques jusqu'à 650°C .
- Une bonne résistance à la compression mais une faible résistance en traction. Son module d'élasticité est inférieur aux matériaux métalliques ou céramiques et il peut se déformer sous des pressions élevées.
- Un coefficient de dilatation thermique faible, de l'ordre de 10^{-6} m/m/ $^{\circ}\text{C}$.
- Un coût modéré.

Le carbone est classifié en trois groupes principaux: le carbone amorphe, le carbone graphité imprégné d'un métal ou d'une résine et le carbone électro-graphité. Le carbone amorphe a un bon module d'élasticité, mais sa conductivité thermique est faible. Le carbone graphité imprégné d'un métal ou d'une résine a une meilleure conductivité thermique et résistance chimique. Le carbone électro-graphité a la meilleure résistance chimique et conductivité thermique, cependant, il est assez tendre et s'use facilement.

I.2.8. Joint brosse (« brush seal »)

Le joint brosse (Figure I. 16) est constitué d'un anneau circulaire de soies monté entre deux anneaux métalliques. Les deux anneaux métalliques servent de support à l'anneau de soies. Le diamètre intérieur de l'anneau circulaire de soies est plus faible que le diamètre de l'arbre tandis que les diamètres intérieurs des deux anneaux métalliques sont plus grands. Quand le joint est monté sur le rotor, les soies interfèrent avec la surface de l'arbre et subissent une déflexion de 30° à 45° dans le sens de rotation. Sous l'effet du gradient de pression, le fluide à étancher devra traverser l'anneau de soies qui agit comme un milieu poreux. Le fluide est ainsi freiné et dissipe une partie de son énergie. La faible raideur en flexion des soies (elles sont fabriquées en alliage de nickel ou cobalt, ou en acier inoxydable avec un diamètre de 0.5-0.8mm) permet au joint à brosse d'épouser la forme du rotor est de suivre ses déplacements dynamiques. En même temps, la faible raideur en flexion

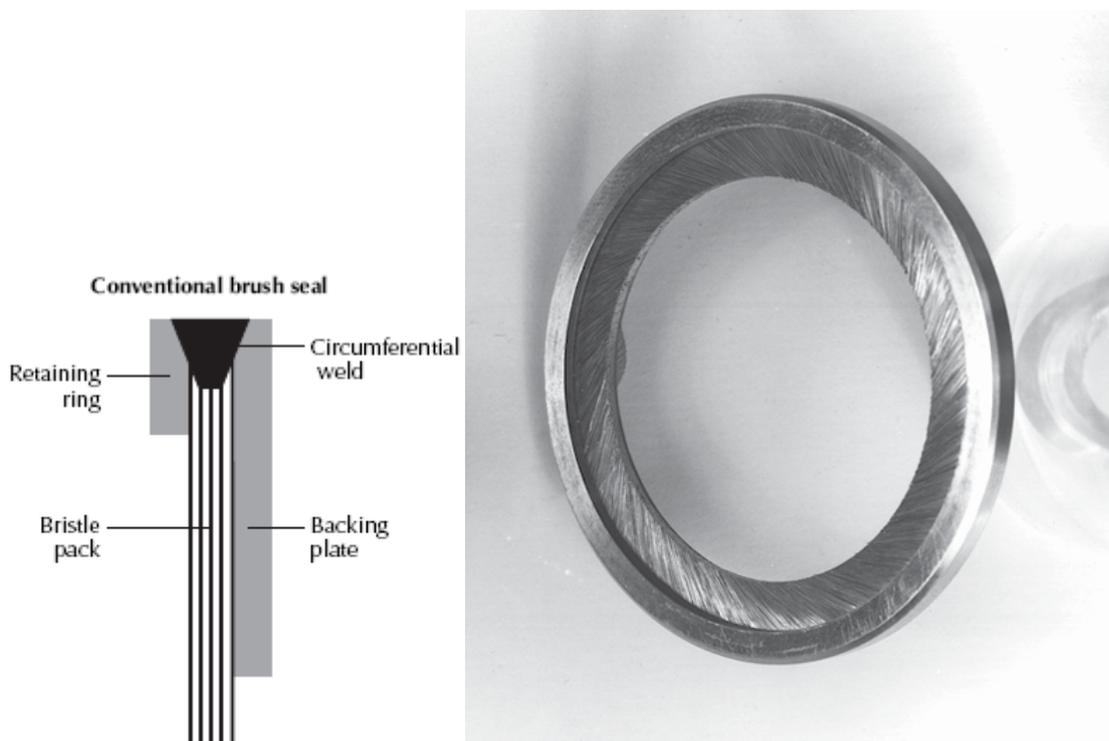


Figure I. 16 Joint brosse [3], [11].

des soies limite l'utilisation du joint à brosse uniquement à des gaz et à des pressions faibles et modérés (inférieurs à 20 bars). Néanmoins, pour les mêmes conditions de fonctionnement, le joint à brosse est supérieur au joint labyrinthe, car il est plus compact et son débit de fuite est inférieur de 20%.

L'usure du joint à brosse est un autre aspect important car les soies exercent en permanence une pression de contact sur l'arbre sans la possibilité d'établir un film mince. Un revêtement spécial doit alors couvrir la zone de contact sur l'arbre.

I.2.9. Joint à doigts (« finger seal »)

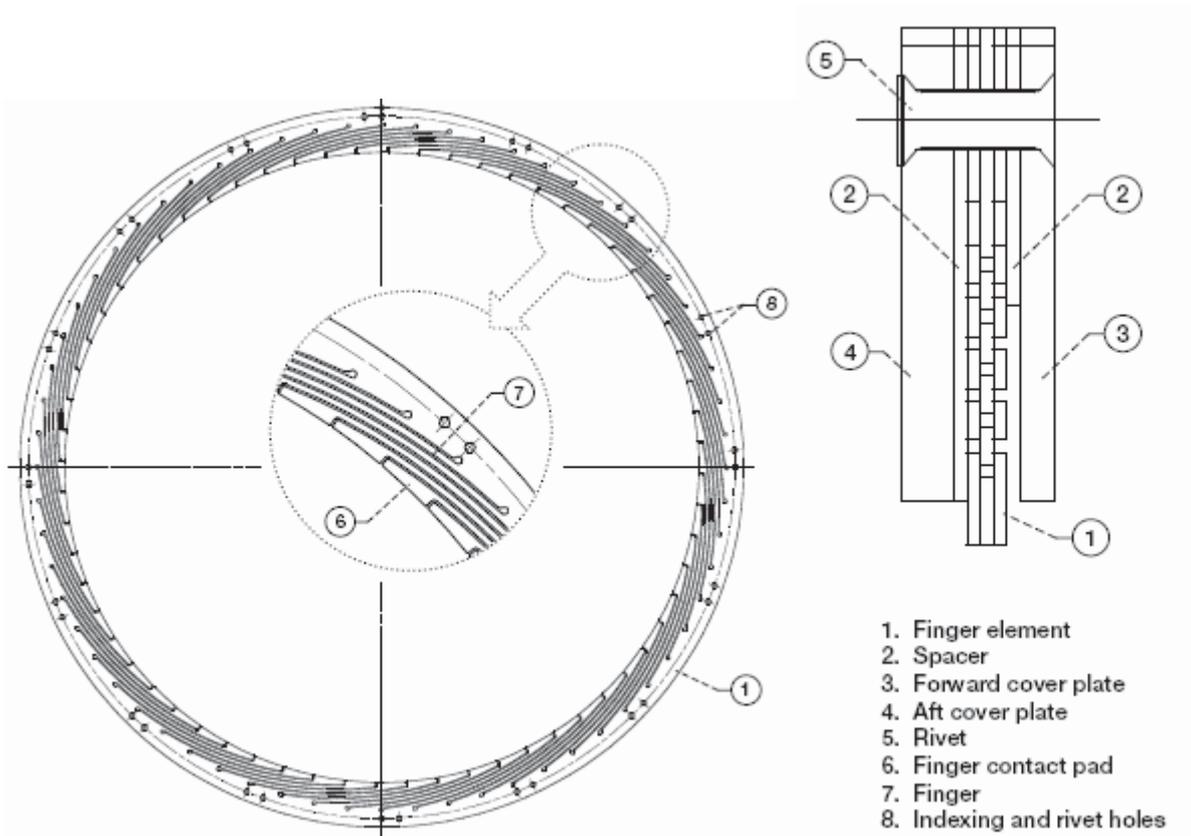


Figure I. 17 Joint à doigts [12].

L'élément principal du joint est un anneau muni des doigts légèrement courbés sur toute sa circonférence intérieure (Figure I. 17). Chaque doigt (7) dispose d'un patin (6) à son extrémité libre. Normalement, le joint complet est constitué de plusieurs anneaux prévus avec des doigts (1), des anneaux d'espacement (2) et des couvercles (3) et (4) assemblés par des rivets (5). Les anneaux munis des doigts sont montés en sens opposés de manière que les jeux entre les doigts d'un anneau

sont couverts par les doigts de l'anneau suivant. Le joint à doigts est installé sur l'arbre avec un jeu très faible ou avec une légère interférence. Sous l'effet hydrodynamique (aérodynamique) produit par la rotation de l'arbre et dû à la flexibilité des doigts, les patins vont se déplacer radialement. Le joint est ainsi capable de s'accommoder aux vibrations de l'arbre ou à sa déformation thermique.

Le joint à doigts a un débit de fuite d'environ 50% plus faible qu'un joint labyrinthe ordinaire et il est 50% moins cher qu'un joint brosse. D'après la référence [12], le joint peut fonctionner avec un débit de fuite et une usure acceptable sous des conditions aussi sévères que des températures de 1200°F, des vitesses linéaires de 1200 fps et des différences de pression de 75 psid.

I.2.10. Conclusions

Les Figure I. 18 et Figure I. 19 issues de la référence [13] montrent les débits de fuite des différents joints fonctionnant avec LOx et GHe. Pour LOx le joint brosse (« brush seal ») a un débit étalé sur une grande plage tandis que le joint à bague flottante a un débit plus faible. Le joint à faces radiales rainurées ("annular grooved face seal") et le joint labyrinthe ont des débits plus élevés que le joint à bague flottante. Le joint à face radiales planes ("face contact seal") a un débit étalé sur une large plage de valeurs, allant du plus faible jusqu'aux valeurs similaires au joint à bague flottante. Ce résultat est certainement dû à des tolérances de fabrication et à des conditions de fonctionnement spécifiques (déformations thermiques, vaporisation, etc.). Les joints à faces radiales avec des rainures spirales ("spiral groove face seal") ou prévus avec des patins de Rayleigh ("Rayleigh step face seal") ont des débits faibles et reproductibles. Ils sont donc moins sensibles aux aléas de fabrication et de fonctionnement que les joints radiaux à faces planes.

Pour GHe, le joint à bague flottante a un débit plus faible que le joint annulaire et le joint labyrinthe. Le joint à brosse présente un débit similaire sinon plus faible que le joint à bague flottante. Les joints à face radiale ("aspirating face seal" et "face contact seal") ont des débits stables et assez faibles. Le joint segmenté (« segmented circumferential seal ») a également un débit plus faible que la bague flottante. Les joints à faces radiales avec des rainures spirales ("spiral groove face seal") ont le comportement le plus favorable en terme de débit de fuite.

Le choix du joint dépend non seulement du débit mais aussi d'autres aspects:

- Le frottement, l'usure et la durée de vie (un faible jeu diminue la fuite mais augmente le frottement et l'usure),
- La capacité de maintenir un jeu approprié dans des conditions variées de fonctionnement,
- La stabilité du fonctionnement statique et dynamique du système constitué par la masse de la bague et les forces hydrodynamiques dans le film fluide,

- La capacité du joint à s'accommoder des larges déplacements du rotor aussi bien dans le plan radial (vibrations) que dans la direction axiale (jeux fonctionnels)
- Le fonctionnement du joint secondaire,
- La force axiale provenant du ressort ou du soufflet

Le joint est alors choisi afin d'être le mieux adapté aux conditions demandées.

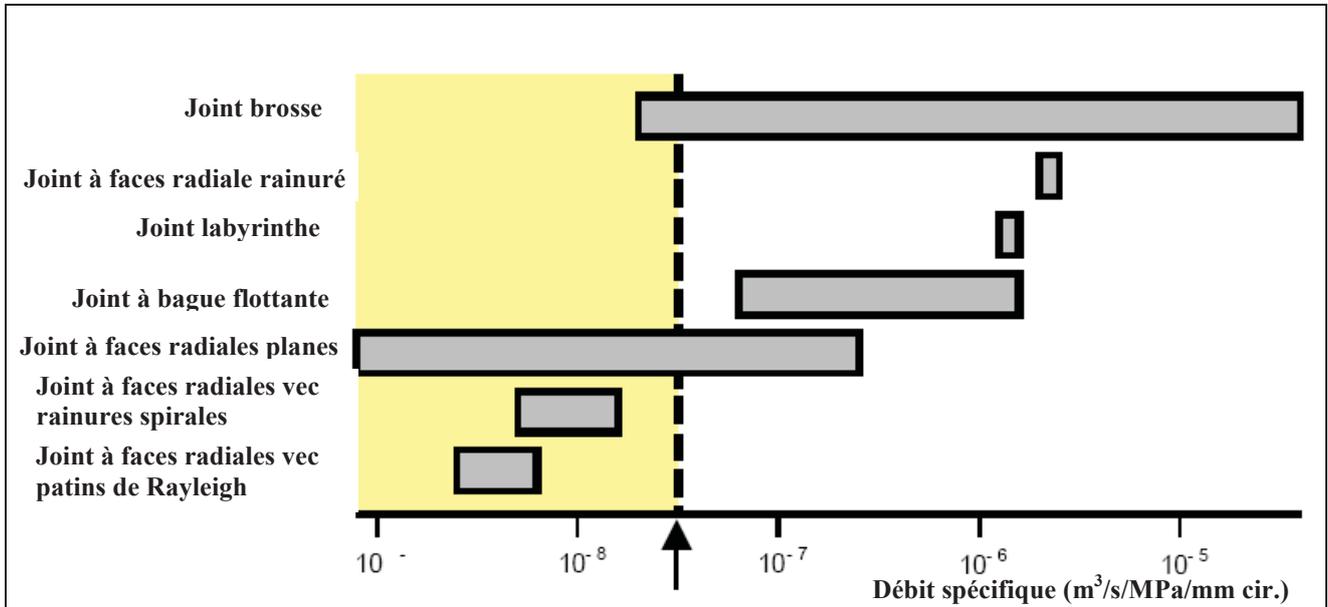


Figure I. 18 Débit de fuite spécifique pour des différents joints fonctionnant avec LOx (m³/s/MPa/mm cir.) [13].

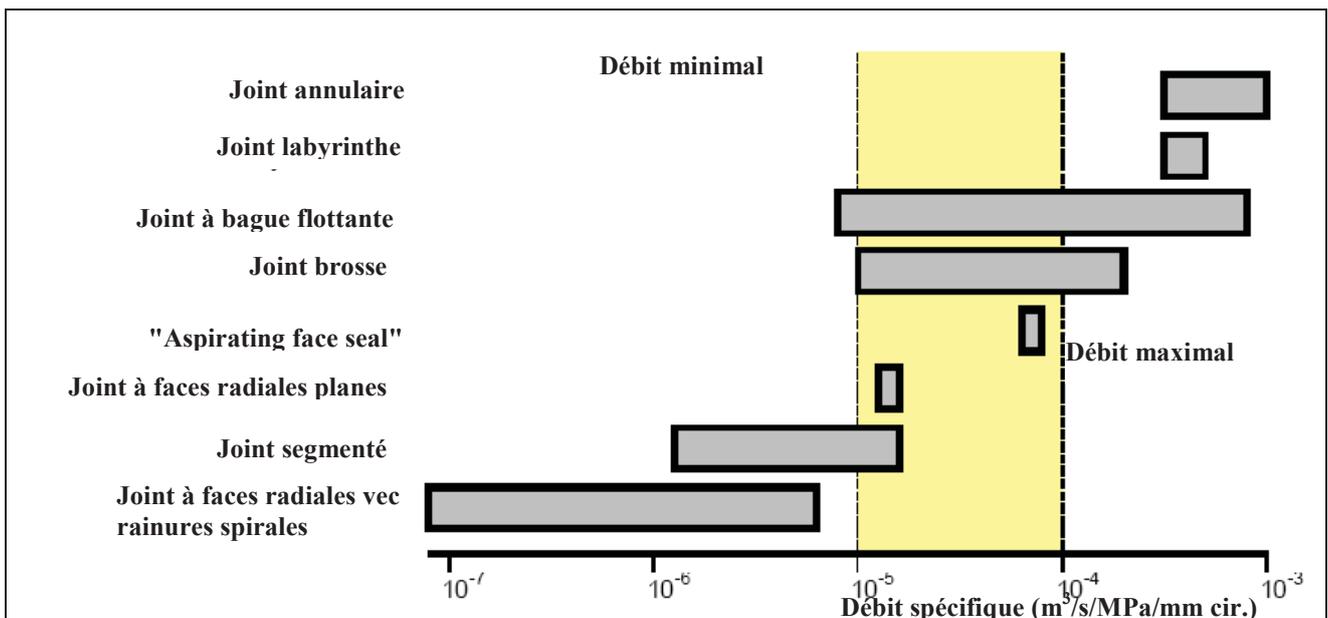


Figure I. 19 Débit de fuite spécifique pour des différents joints fonctionnant avec GHe (m³/s/MPa/mm cir.) [13].

I.3. Fonctionnement d'un joint d'étanchéité dynamique à bague flottante. Analyse bibliographique.

Le travail présenté dans ce mémoire est axé sur l'analyse des joints d'étanchéité dynamiques à bague flottante présentée sur la Figure I. 5. Plusieurs travaux se sont déjà penchés sur l'analyse de ce système d'étanchéité et seront discutés par la suite [14]-[27]

Comme il a été expliqué, cette étanchéité a l'avantage de pouvoir s'accommoder des déplacements radiaux (vibrations) et axiaux (jeux fonctionnels) du rotor tout en assurant un débit de fuite limité. Les forces qui s'exercent sur la bague flottante en fonctionnement sont présentées sur la Figure I. 20. Ces forces sont constituées de la force hydrodynamique dans le joint annulaire de l'étanchéité principale, F_{dyn} , la force de contact dans l'étanchéité secondaire bague/stator (avec deux composantes, la force normale F_z et la force de frottement F_f), la force due à la masse propre de la bague W_g et les forces hydrostatiques issues des pressions sur les faces amont et aval de la bague flottante (F_e , F_s). Il est supposé que la distance radiale entre la bague flottante et le stator est beaucoup plus grande que le jeu radial dans l'étanchéité principale (entre la bague flottante et le rotor). Ceci permet alors de négliger la force dynamique sur la surface extérieure de la bague.

La force hydrodynamique dans le joint annulaire (l'étanchéité principale) permet à la bague de suivre les déplacements radiaux du rotor. La force de frottement qui apparaît dans le contact entre le nez de la bague et le stator (étanchéité secondaire) s'oppose au déplacement radial de la bague. Selon Oike [15] cette force de frottement peut être diminuée considérablement si la cage statorique du joint est couverte de MoS_2 . Toutefois il existe souvent des situations où la bague flottante est bloquée et ne peut pas suivre les vibrations du rotor [16]-[19]. Ces situations sont rencontrées dans les compresseurs haute pression utilisés par l'industrie pétrolière où les joints à bague flottante

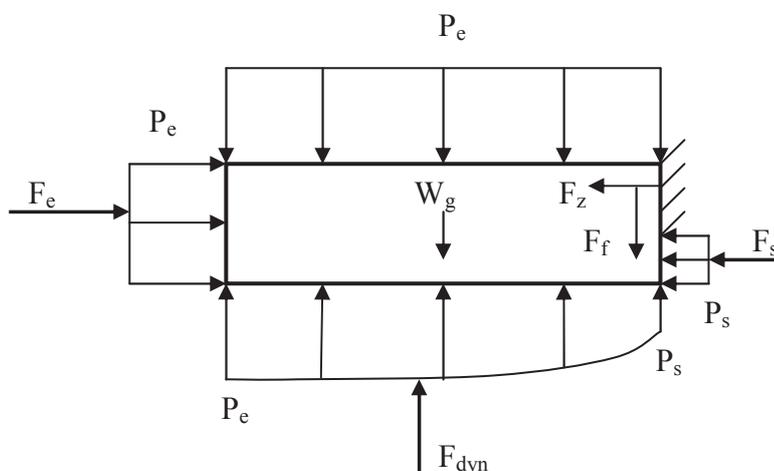


Figure I. 20 Les forces sur la bague flottante

fonctionnent avec une huile. Dans ce cas les pressions à étancher sont importantes et la force normale qui s'exerce dans l'étanchéité secondaire est très élevée. Plusieurs situations peuvent survenir. La plus simple est quand la bague flottante est bloquée dans une position fixe qui lui confère une excentricité importante et les vibrations du rotor sont contenues dans le joint annulaire de l'étanchéité principale. La raideur croisée du joint annulaire peut alors avoir des valeurs importantes d'autant plus que le joint fonctionne avec un fluide de viscosité élevée et que le jeu radial est faible. Cette raideur croisée importante a une influence défavorable sur la stabilité du rotor.

Une autre situation apparaît si l'amplitude de vibration du rotor est supérieure au jeu radial. Dans ce cas, comme le déplacement radial de la bague est bloqué par la force de frottement, des impacts auront lieu entre le rotor et la bague flottante. Ces impacts sont très destructifs car la force de frottement aura tendance à freiner rapidement le déplacement de la bague.

Il ressort donc que la situation de la bague flottante bloquée par une importante force de frottement est un dysfonctionnement. Dans une situation de fonctionnement normal la bague flottante doit suivre les vibrations du rotor. Néanmoins, le blocage de la bague sous l'effet de la force de frottement est une situation souvent décrite dans les publications car elle survient dans les compresseurs. La solution pour pallier l'effet d'une forte raideur croisée est l'usinage d'une ou de plusieurs gorges circumférentielles dans le joint annulaire de l'étanchéité principale [18], [20]-[23]. La gorge, agissant comme une zone de fort mélange, permet de diminuer la vitesse de l'écoulement circumférentiel. Cette solution n'aboutit pas seulement à la diminution de la raideur croisée mais aussi de la raideur directe et de l'amortissement et à l'augmentation du débit. Ceci représente un effet secondaire défavorable pour la bague flottante car elle aura encore moins la possibilité de suivre les vibrations du rotor. Pour corriger ses effets, la bague flottante munie d'une gorge circumférentielle peut également être prévue avec une marche destinée à augmenter sa raideur directe (Figure I. 21). La marche peut être remplacée par une légère conicité convergente qui produit également une diminution du débit de fuite. Néanmoins, la conicité convergente ou le mésalignement de la bague diminuent l'amortissement direct de la bague flottante.

Une solution quelque peu différente d'étanchéité à bague flottante destinée à augmenter son amortissement a été introduite par Lee et al. [24] et Kim et al. [25] (Figure I. 22). Une feuille métallique comportant des plissés est intercalée entre la circonférence extérieure de la bague et le stator et agit comme un support élastique. Cette solution inspirée de la technologie des paliers à feuilles permet d'ajouter un amortissement supplémentaire à la bague flottante. Les auteurs cités ont également mentionné une amélioration des coefficients dynamiques de la bague à haute pression d'étanchéité et une légère augmentation du débit de fuite.

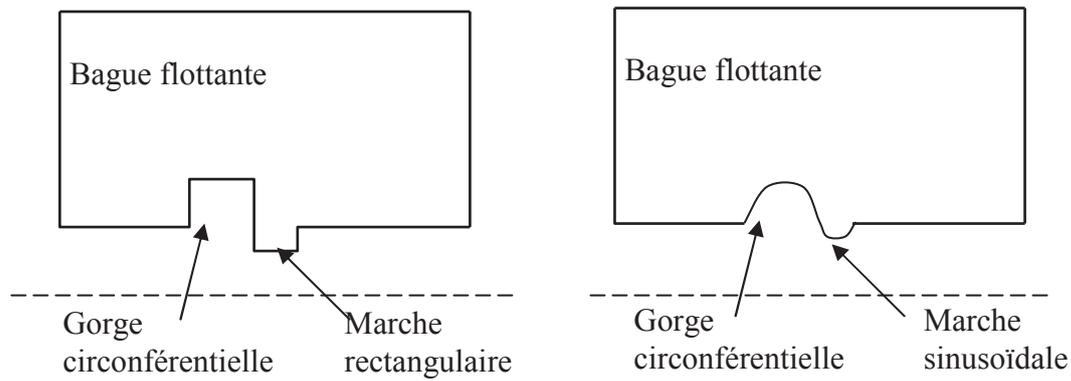


Figure I. 21 Bague flottante avec gorge circonférentielle et marche [21].

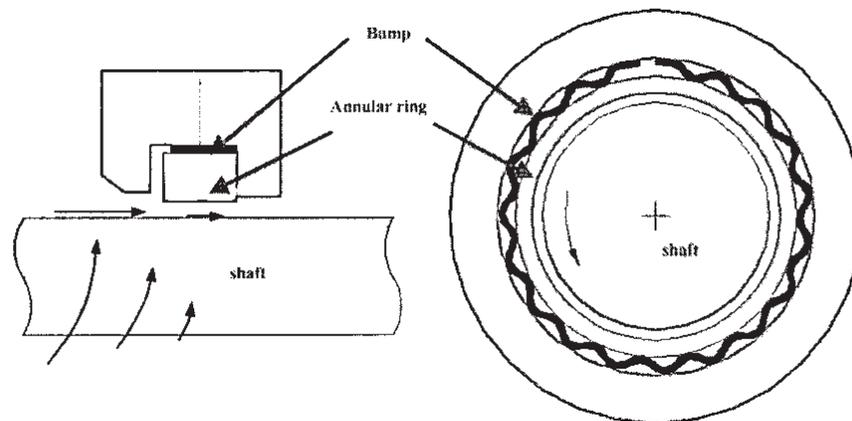


Figure I. 22 Configuration de la bague flottante avec un amortisseur métallique [24].

La réponse dynamique de la bague flottante qui suit les vibrations du rotor a été étudiée théoriquement par Kirk [26] en 1988. Le modèle est constitué d'une bague à trois degrés de liberté. L'analyse a mis en évidence la possibilité de mouvements saccadés ("stick-slip") de la bague sous l'effet de la force de frottement et a aussi montré l'interaction entre le couple sur la bague et les pions anti-rotation. Les résultats ont montré que la bague flottante devient de plus en plus instable si sa longueur ou la viscosité du fluide diminuent et des contacts ont pu être mis en évidence. Shapiro a également analysé la réponse dynamique de la bague flottante [27] à l'aide d'un modèle théorique à 2 degrés de liberté. Les résultats (trajectoires de la bague et épaisseur du film mince) ont été confrontés aux données théoriques de Kirk [26].

L'analyse précise du fonctionnement des joints d'étanchéité à bague flottante utilisés dans l'industrie aérospatiale nécessite la modélisation aussi fine que possible des forces mises en jeu.

Les forces dynamiques dans le joint annulaire qui représente l'étanchéité principale sont la partie la plus importante. Ces forces non stationnaires seront évaluées à partir d'une méthode basée sur les coefficients dynamiques déduits pour plusieurs excentricités. L'utilisation des coefficients dynamiques diminue l'effort de calcul par rapport à l'intégration numérique directe des équations de l'écoulement non stationnaire dans le joint annulaire. Néanmoins, les coefficients dynamiques doivent être estimés aussi finement que possible en prenant en compte la compressibilité du fluide cryogénique, l'écoulement non isotherme et le changement de phase qui peut avoir lieu.

Les forces de frottement dans l'étanchéité secondaire (entre le nez de la bague et le stator) doivent être estimées en tenant compte du régime de frottement exact (frottement limite ou frottement mixte). La valeur $f=0.2\dots0.25$ trouvée dans la littérature est une estimation du coefficient de frottement sec carbone/acier qui, si elle est mal utilisée, peut prédire un fonctionnement incorrect de la bague. La prise en compte du régime de frottement correct doit permettre l'estimation d'un coefficient de frottement équivalent qui est bien plus faible que la valeur citée.

L'impact entre le rotor et la bague et entre la bague et les pions anti-rotation est un aspect qui a moins d'importance que les deux précédents. Ceci est dû au fait que normalement la bague flottante doit fonctionner sans contact avec le rotor ou avec les pions anti-rotation. Les impacts sont considérés comme des cas de fonctionnement inacceptables qui mènent à une destruction rapide de la bague. Néanmoins, la prise en compte des impacts permet de mettre en évidence et de classer les instabilités afin de pouvoir ensuite les éliminer suite à une conception corrigée.

Tous ces aspects seront analysés dans les chapitres suivants et ensemble avec les équations du PFD permettront de déterminer la réponse dynamique du joint annulaire à bague flottante.

CHAPITRE II :

MODELE HYDRAULIQUE DE L'ÉCOULEMENT DANS L'ÉTANCHEITE PRINCIPALE

II.1. Les équations de l'écoulement moyen (« bulk-flow »)

L'écoulement dans l'étanchéité principale est caractérisé par des forces d'inertie convective importantes. Ceci est dû au fait que le joint annulaire a des jeux radiaux de l'ordre de 10...30 μm ou supérieurs et les conditions de fonctionnement correspondent à des différences de pression de l'ordre de plusieurs bars voir des dizaines et des vitesses de rotation supérieures à 10 krpm. Le

nombre de Reynolds réduit $Re^* = \frac{\rho V C_{\text{jeu}} C_{\text{jeu}}}{\mu R} > 1$ impose alors l'utilisation d'un modèle

mathématique basé sur les équations de l'écoulement moyen ("bulk flow"). Ce modèle a été introduit par Constantinescu en 1959 [28] sur la base d'une approximation de la couche limite proposée par Slezkin et Targ en 1948 et a été ensuite repris par Launder et Leschziner [29]. Le modèle de l'écoulement moyen (équations de continuité et de la quantité de) est obtenu en intégrant les équations de Navier-Stokes complètes suivant l'épaisseur du film. Les équations obtenues après cette intégration sont simplifiées tenant compte du fait qu'en lubrification l'écoulement est caractérisé par deux échelles de longueurs très différentes dont le rapport est $C_{\text{jeu}}/R \approx 10^{-3}$. Il est également supposé que les forces d'inertie convectives ne modifient pas le profil parabolique des vitesses caractéristique pour la lubrification classique.

Un développement différent des équations de l'écoulement moyen est proposé par Childs [30] en partant du bilan de masse et de la quantité de mouvement dans un volume de contrôle délimité par les parois du rotor et du stator. Les simplifications apportées par la présence des deux échelles de longueur différentes sont implicitement utilisées en écrivant les bilans dans un volume de contrôle. Cette approche utilise également la théorie de Hirs [31] pour des écoulements turbulents. Selon Hirs le frottement en écoulement turbulent dans un canal est exprimé en fonction de la vitesse moyenne (« bulk velocity ») par rapport à la paroi et non pas du profil de vitesse ou du caractère de

l'écoulement (Poiseuille ou Couette). Cette hypothèse est à l'origine du nom de « bulk flow » donné au modèle.

Le modèle est systématiquement utilisé pour l'analyse des paliers et des joints dynamiques quand $Re^* > 1$: Childs [32], San Andrés [33]-[35], Yang et al. [36], Arauz et San Andrés [37][38] ou Arghir et Frêne [39]-[46]. Ces applications abordent tous les problèmes de modélisation : fluide compressible et incompressible, écoulement turbulent, non-isotherme, comportement dynamique ou changement de phase d'un fluide cryogénique.

II.1.1. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. L'hypothèse de Hirs

Les équations du modèle « bulk-flow » sont obtenues à partir des équations générales de la Mécanique des Fluides :

- L'équation de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0 \quad (\text{II. 1})$$

- L'équation de la quantité de mouvement:

$$\frac{D(\rho \vec{V})}{Dt} = \nabla \tilde{\tau}_{ij} \quad (\text{II. 2})$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \nabla)$ est la dérivée particulaire.

$\tilde{\tau}_{ij} = -p + \tau_{ij}$ est le tenseur des contraintes ($\nabla \cdot = \partial/\partial x_i$).

L'écoulement dans un film mince est caractérisé par deux échelles de longueur très différentes, C_{jeu} et R . Les hypothèses simplificatrices qui en découlent sont :

- La vitesse du fluide est constante suivant l'épaisseur du film et a seulement une composante axiale et une composante circonférentielle (il n'y a pas de vitesse normale).
- Les parois peuvent avoir des mouvements d'écrasement.
- La pression et la température sont constantes suivant l'épaisseur du film.
- Les contraintes tangentielles et la conduction thermique sont prises en compte aux parois.

En intégrant les équations de conservation sur un volume de contrôle de hauteur $H(z, R\theta)$ défini par le film mince entre les parois (Figure II. 1), on obtient les équations suivantes :

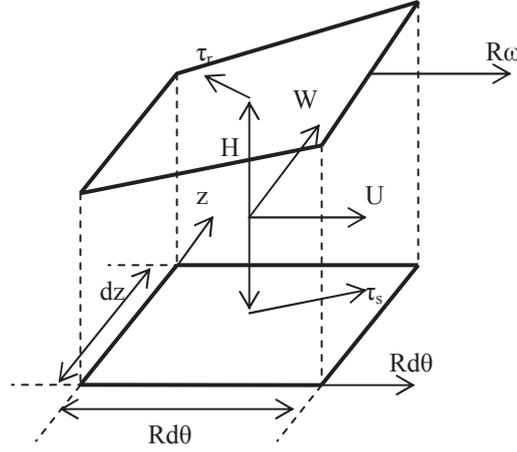


Figure II. 1 Volume de contrôle.

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \frac{1}{R} \frac{\partial(\rho H U)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho H W)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

$$\frac{\partial(\rho H W)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H W W)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho H U W)}{R \partial \theta} = -H \frac{\partial P}{\partial z} + \tau_{zs} + \tau_{zr} \quad (\text{II. 4})$$

$$\frac{\partial(\rho H U)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho H W U)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho H U U)}{R \partial \theta} = -H \frac{\partial P}{R \partial \theta} + \tau_{\theta s} + \tau_{\theta r} \quad (\text{II. 5})$$

Ces équations sont complétées par l'hypothèse de Hirs [31] pour les contraintes pariétales:

$$\tau_r = \frac{\rho f_r V_r^2}{2}, \quad \tau_{rz} = \tau_r \frac{W}{V_r} = \frac{\rho f_r V_r W}{2}, \quad \tau_{r\theta} = \tau_r \frac{U - R\omega}{V_r} = \frac{\rho f_r V_r (U - R\omega)}{2} \quad (\text{II. 6 a,b,c})$$

$$\tau_s = \frac{\rho f_s V_s^2}{2}, \quad \tau_{sz} = \tau_s \frac{W}{V_s} = \frac{\rho f_s V_s W}{2}, \quad \tau_{s\theta} = \tau_s \frac{U}{V_s} = \frac{\rho f_s V_s U}{2} \quad (\text{II. 7 a,b,c})$$

avec f_s, f_r le coefficient de frottement sur le rotor et le stator et $U_{s,r}$ les vitesses relatives par rapport aux parois :

$$V_s = \sqrt{W^2 + U^2}, \quad V_r = \sqrt{W^2 + (U - R\omega)^2}$$

La contrainte tangentielle dans la direction circonférentielle sur le rotor s'écrit :

$$\tau_{\theta r}^H = \frac{H}{2} \frac{\partial P}{R \partial \theta} + \frac{1}{2} (\tau_{\theta s} - \tau_{\theta r}) \quad (\text{II. 8})$$

Les coefficients de frottement sont donnés par un des modèles suivants:

a. Modèle de Blasius (écoulement laminaire, $Re_i < 1000$, ou turbulent, $Re_i > 2000$.)

$$f_i = nRe_i^m, \quad \text{avec } Re_i = \frac{\rho D_h V_i}{\mu}, \quad i = r, s \quad (\text{II. 9})$$

où $D_h = 2H$ est le diamètre hydraulique des canaux annulaires. Les valeurs des coefficients sont:

- en écoulement laminaire: $n = 24$ et $m = -1$,
- en écoulement turbulent, pour des surfaces hydrauliques lisses, $n = 0.079$ et $m = -0.25$;
pour d'autres types de surfaces les valeurs en écoulement turbulent doivent être ajustées.

b. Modèle de Colebrook (écoulement turbulent $Re_i > 2000$) [47]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} = 1.74 - 2 \log \left(\frac{g_i}{D_h} + \frac{18.6}{Re_i \sqrt{\lambda_i}} \right) \quad (\text{II. 10})$$

avec $f_i = \frac{\lambda_i}{4}$, $i = r, s$, g_i est la hauteur des rugosités.

c. Modèle de Moody (écoulement turbulent $Re_i > 2000$) [48]

$$f_i = 1.375 \cdot 10^{-3} \left[1 + \left(2 \cdot 10^4 \frac{g_i}{D_h} + \frac{10^6}{Re_i} \right)^{d_i} \right], \quad i = r, s \quad (\text{II. 11})$$

où $d_i = \begin{cases} 1/2.65, & Re_i < 10^5 \\ 1/3, & Re_i > 10^6 \end{cases}$

Remarque:

La relation de Moody n'est qu'une approche linéaire de la loi de Colebrook qui elle a le désavantage d'être exprimé par une relation non - linéaire. Les relations s'appliquent donc avec une erreur de 5% pour $4 \cdot 10^3 < Re_i < 10^7$ et $g_i/D_h < 0.01$. De plus, étant dérivée de la loi de Colebrook, la relation de Moody n'est correcte que pour des surfaces rugueuses commerciales [47]

Le régime de transition ($1000 < Re_i < 3000$) est pris en compte à l'aide d'un polynôme d'interpolation [49]

$$f_i = \begin{cases} (f_i)_{lami}, & \overline{Re}_i \leq 0 \\ (f_i)_{lami} \left(1 - 3\overline{Re}_i^2 + 2\overline{Re}_i^3\right) + (f_i)_{turb} \left(3\overline{Re}_i^2 - 2\overline{Re}_i^3\right), & 0 < \overline{Re}_i < 1 \\ (f_i)_{turb}, & \overline{Re}_i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{II. 12})$$

$$\text{où } \overline{Re}_i = \frac{Re_i - 1000}{2000}$$

II.1.2. L'équation de conservation de l'énergie

L'un des objectifs du travail développé dans ce mémoire est la prise en compte des écoulements diphasiques. L'équation de l'énergie utilisée doit donc être capable de traiter aussi bien le régime monophasique que le régime diphasique. L'utilisation de la pression et de la température en tant que variables primitives comme dans les versions antérieures du modèle [43], [46] n'est plus possible. L'utilisation de la pression sera préservée car c'est la clé de voûte du couplage entre les équations d'impulsion et de continuité et de l'algorithme numérique de résolution des équations de l'écoulement moyen. L'autre variable pourrait être la masse volumique, l'enthalpie, l'énergie interne ou l'entropie. La variable retenue est l'enthalpie pour des raisons qui apparaîtront plus loin dans ce travail. L'enthalpie i et la pression P sont donc choisies [50] comme variables d'état thermodynamique à la place de la pression P et de la température T .

L'équation de l'énergie est maintenant écrite soit pour l'enthalpie:

$$\frac{\partial(\rho Hi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho HW_i)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho HU_i)}{R\partial\theta} = (q_s'' - q_r'') + H \left(\frac{\partial P}{\partial t} + W \frac{\partial P}{\partial z} + U \frac{\partial P}{R\partial\theta} \right) + \left[R\omega\tau_{\theta}^H - W(\tau_{zs} + \tau_{zr}) - U(\tau_{\theta s} + \tau_{\theta r}) \right] \quad (\text{II. 13})$$

$$\text{soit pour l'enthalpie totale [51]:} \quad i_t = i + (W^2 + U^2)/2 \quad (\text{II. 14})$$

$$\frac{\partial(\rho Hi_t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho WH_i_t) + \frac{\partial}{R\partial\theta}(\rho UH_i_t) = R\omega\tau_{\theta}^H + q_s'' - q_r'' \quad (\text{II. 15})$$

Le flux de chaleur à la paroi est estimé à l'aide d'un coefficient de convection exprimé à partir de l'analogie de Reynolds – Colburn¹ [52]:

¹ L'analogie de Reynolds – Colburn est une corrélation empirique déduite pour un écoulement turbulent complètement développé dans une conduite circulaire hydraulique lisse.

$$q_i'' = k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_i = h_i (T_i - T), \quad i = s, r \quad (\text{II. 16})$$

$$St \Pr^{2/3} = f/2, \quad St = \frac{h}{\rho c_p V}, \quad \Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

Il en résulte alors:

$$h_i = \frac{1}{2} \frac{\rho c_p V_i f_i}{\Pr^{2/3}}, \quad i = s, r \quad (\text{II. 17})$$

II.1.3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites dans le joint annulaire de l'étanchéité principale sont résumées sur la Figure II. 2 et dans le Tableau II. 1. Le domaine de calcul est constitué seulement de l'intérieur du joint. Les chambres amont et aval sont considérées comme des grandes enceintes où la vitesse du fluide est négligeable par rapport aux vitesses dans l'étanchéité. La valeur P^0 est alors une pression d'arrêt (freinée).

Les conditions aux limites sont imposées sur la frontière d'entrée et la frontière de sortie du joint. Plusieurs situations peuvent être rencontrées en fonction du nombre de Mach et sont résumées dans le Tableau II. 1.

Tableau II. 1 : Les conditions aux limites à l'entrée et à la sortie.

Frontière (fonctionnement)	Variables spécifiées	Variables calculées
Entrée subsonique $V_n < 0, M_n < 1$	$P^0, \xi_{\text{entrée}}, V_b, T^0$	P, V_n, i, T
Entrée supersonique $V_n < 0, M_n > 1$	P^0, M_n (ou P, V_n), $\xi_{\text{entrée}}, V_b, T^0$	P, V_n, i, T
Sortie subsonique $V_n > 0, M_n < 1$	P^0, ξ_{sortie}	P V_n, V_b, T, i : extrapolées
Sortie supersonique $V_n > 0, M_n \geq 1$		P, V_n, V_b, T, i : extrapolées

La Figure II. 2 montre les relations entre les pressions freinées à l'amont et à l'aval du joint $P_{e,s}^0$ et les pressions et les vitesses à l'entrée et à la sortie du joint. Les relations de Bernoulli généralisées font apparaître des coefficients de perte et (éventuellement) de récupération de pression.

- pour un fluide incompressible :

$$P^0 = P + (1 \pm \xi) \frac{\rho V_n^2}{2} \quad (\text{II. 18})$$

- pour un fluide compressible (gaz parfait):

$$\frac{P^0}{P} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} (1 \pm \xi) M_n^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (\text{II. 19})$$

$$\text{où } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \text{ et } \xi = \begin{cases} \xi_{\text{entrée}} \geq 0, & V_n < 0 \\ 0 \leq \xi_{\text{sortie}} \leq 1, & V_n > 0 \end{cases}$$

Si $\xi_{\text{entrée}} = -1$ et $\xi_{\text{sortie}} = 1$ les effets d'inertie concentrés (chute ou de récupération de pression) s'annulent et la pression est directement imposée sur la frontière.

L'enthalpie à l'entrée du joint est calculée à partir de la conservation de l'enthalpie totale :

$$i_e = i_{t,e} - \frac{V_{n,e}^2 + V_{t,e}^2}{2} \quad (\text{II. 20})$$

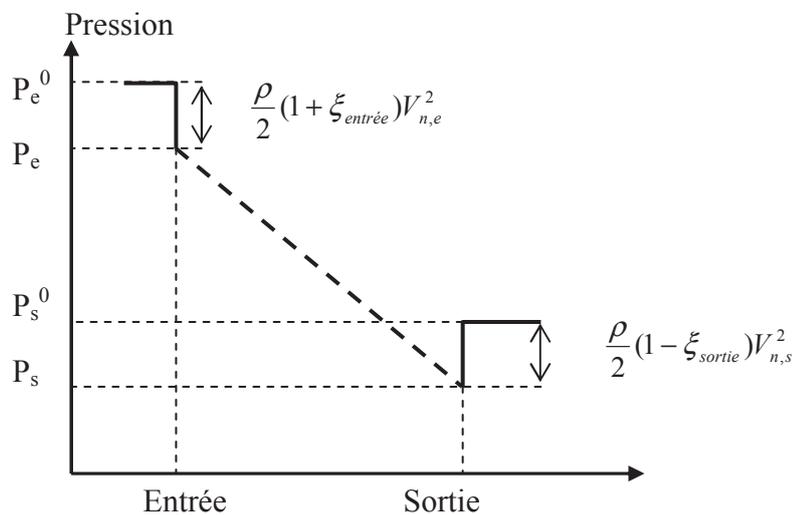


Figure II. 2 Variation de la pression à l'entrée et à la sortie du joint annulaire

Remarque :

Le calcul de la pression à l'entrée P_e peut poser des problèmes lorsque l'écoulement est liquide en amont mais devient diphasique en entrée du joint suite à la mise en vitesse et de la perte de charge.

II.1.4. Les équations stationnaires simplifiées de l'écoulement moyen (« bulk flow »)

Les équations de l'écoulement moyen peuvent être simplifiées si le joint annulaire est supposé fonctionner en position centrée [51]. Dans ce cas les dérivées dans la direction circonférentielle s'annulent, $\partial/\partial\theta = 0$. Les dérivées temporelles $\partial/\partial t$ peuvent également être éliminées car l'hypothèse $\partial/\partial\theta = 0$ (fonctionnement centré) écarte la possibilité de prendre en compte le régime nonstationnaire engendré par les vibrations de l'arbre. Les équations simplifiées de l'écoulement moyen s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz}(\rho WH) = 0 \\ \frac{d}{dz}(\rho W^2 H) = -H \frac{dP}{dz} + \tau_{zs} + \tau_{zr} \\ \frac{d}{dz}(\rho WUH) = \tau_{\theta s} + \tau_{\theta r} \\ \frac{d}{dz}(\rho i_t WH) = R\omega\tau_{\theta}^H + q''_s - q''_r \end{array} \right. \quad (\text{II. 21 a,b,c,d})$$

Ces équations sont écrites pour mettre en évidence des relations de conservation. Si l'on injecte la première équation qui décrit la conservation de la masse $d(\rho WH)/dz = 0$ dans les trois autres

équations et si l'on tient compte du fait que $\frac{di_t}{dz} = \frac{di}{dz} + W \frac{dW}{dz} + U \frac{dU}{dz}$, le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho H \frac{dW}{dz} + HW \frac{d\rho}{dz} = S_1 = -\rho W \frac{dH}{dz} \\ \rho WH \frac{dU}{dz} = S_2 = \tau_{\theta s} + \tau_{\theta r} \\ \rho WH \frac{dW}{dz} + H \frac{dP}{dz} = S_3 = \tau_{zs} + \tau_{zr} \\ \rho WH \left(\frac{di}{dz} + W \frac{dW}{dz} + U \frac{dU}{dz} \right) = S_4 = R\omega\tau_{\theta}^H + q''_s - q''_r \end{array} \right. \quad (\text{II. 22 a,b,c,d})$$

Pour écrire les équations simplifiées de l'écoulement moyen sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre il faut exprimer $d\rho/dz$ en fonction des variables retenues, P et i .

$$\frac{d\rho}{dz} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i \frac{dP}{dz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p \frac{di}{dz} \quad (\text{II. 23})$$

La première équation du système donne :

$$\rho H \frac{dW}{dz} = S_1 - HW \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i \frac{dP}{dz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p \frac{di}{dz} \right] \quad (\text{II. 24})$$

Ce résultat est injecté dans les deux dernières équations du système :

$$\begin{cases} S_1 W - HW^2 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i \frac{dP}{dz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p \frac{di}{dz} \right] + H \frac{dP}{dz} = S_3 \\ \rho WH \frac{di}{dz} + S_1 W^2 - W^3 H \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i \frac{dP}{dz} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p \frac{di}{dz} \right] + S_2 U = S_4 \end{cases} \quad (\text{II. 25 a,b})$$

Ces deux équations permettent maintenant de séparer les dérivées dP/dz et di/dz :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dP/dz \\ di/dz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e \\ f \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 26})$$

où

$$a = H \left[1 - W^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i \right], \quad b = -HW^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p, \quad c = -W^3 H \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i, \quad d = \left[1 - \frac{W^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p \right] \rho WH$$

$$e = S_3 - WS_1, \quad f = S_4 - US_2 - W^2 S_1$$

Le système des équations simplifiées de l'écoulement moyen prend alors la forme :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dz} = \frac{de - bf}{ad - bc} \\ \frac{di}{dz} = \frac{af - ce}{ad - bc} \\ \frac{dW}{dz} = \frac{S_1}{\rho H} - \frac{W}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_i \frac{de - bf}{ad - bc} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial i} \right)_p \frac{af - ce}{ad - bc} \right] \\ \frac{dU}{dz} = \frac{S_2}{\rho WH} \end{cases} \quad (\text{II. 27 a,b,c,d})$$

Ce système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre peut être intégré par une méthode numérique de type Euler. Néanmoins le système n'a plus de solution lorsque $ad-bc=0$, ce qui équivaut à :

$$W^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_i + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial i}\right)_p}, \quad (\text{II. 28})$$

Pour interpréter cette relation il est nécessaire de rappeler la définition de la vitesse du son, $a_{son}^2 = (\partial P / \partial \rho)_s$. Pour exprimer a_{son} en variable d'état P et i , la relation (II. 23) est réécrite sous la forme :

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_i dP + \left(\frac{\partial \rho}{\partial i}\right)_p di \quad (\text{II. 29})$$

mais pour une évolution isentropique, $di = dP / \rho$, soit encore

$$d\rho = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_i + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial i}\right)_p \right] dP \quad (\text{II. 30})$$

Il résulte :

$$a_{son}^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_i + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial i}\right)_p} \quad (\text{II. 31})$$

Ceci est l'expression de la vitesse du son dans un fluide réel [53]. Elle est préférable aussi bien en monophasique qu'en diphasique. Pour un écoulement dans un espace annulaire centrée, les équations simplifiées de l'écoulement moyen ont donc une singularité quand la vitesse axiale est égale à la vitesse du son.

II.2. Prise en compte de l'écoulement diphasique

II.2.1. Le changement de phase

Un corps réel peut exister sous trois phases différentes: solide, liquide et vapeur. Son état est décrit par trois variables: la pression, la température et le volume comme sur la Figure II. 3. Pour certaines valeurs de pression, de température et de volume le corps peut passer d'un état à un autre. La transition d'état ou le changement de phase est résumé sur la Figure II. 4

Le diagramme (P, T) (Figure II. 5), montre les courbes qui séparent les régions d'état gazeux, liquide et solide. Ces courbes de saturation représentent les changements de phase dans le corps réel. Au point triple noté par A, le fluide est un mélange de gaz, de liquide et de solide. Avec une augmentation de température ou de pression, le fluide peut devenir gaz, solide ou liquide. Au delà du point critique noté par C, pour une augmentation de pression et/ou de température, l'état gazeux et l'état liquide ne peuvent plus être distingués.

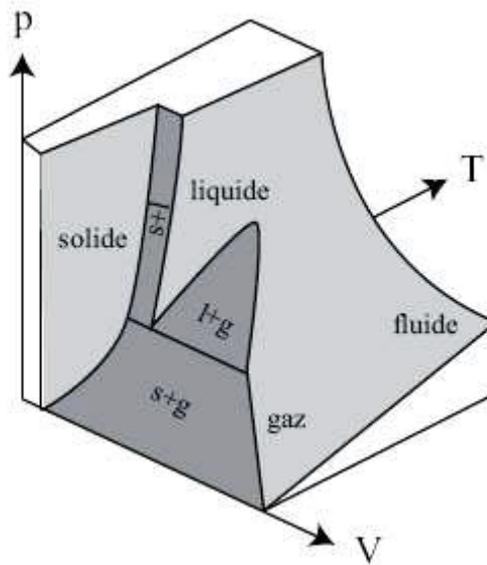


Figure II. 3 Représentation dans l'espace de la surface d'état relative à un corps réel.

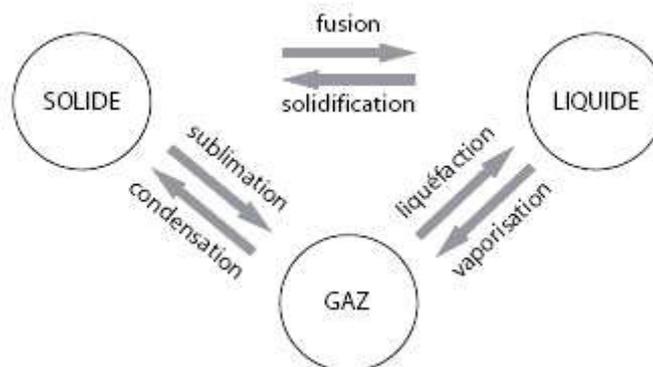


Figure II. 4 Changements de phase possible pour un corps réel.

Sur le diagramme (P, V) (Figure II. 6), les zones diphasiques sont plus détaillées ; DEFGHJ est une courbe isotherme qui traverse toutes les zones.

- Du point D au point E, la pression diminue progressivement. Le corps est en état de solide. La phase liquide commence à apparaître au point E.
- Du point E au point F, la pression reste constante. Le phénomène de fusion consiste d'un passage de l'état solide à l'état liquide.
- Du point F au point G, la pression diminue. Le fluide est en phase liquide. Des bulles de gaz apparaissent au point G.
- Du point G au point H, la pression reste constante. Le phénomène de vaporisation consiste d'un passage de l'état liquide à l'état gazeux.
- Du point H au point J, le fluide est en état gazeux.

Dans les zones diphasiques, un état isotherme est aussi un état isobare. Le point critique C est l'intersection entre les courbes de saturation de liquide CG et de vapeur CH.

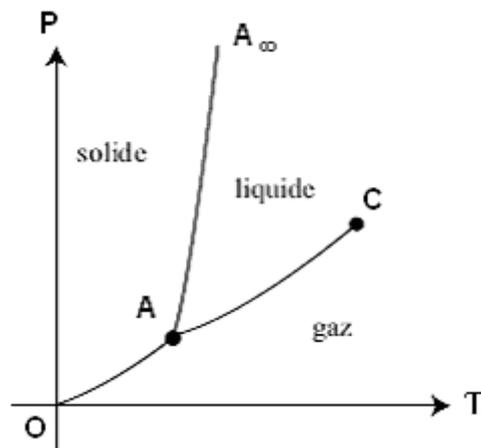


Figure II. 5 Diagramme (P, T)

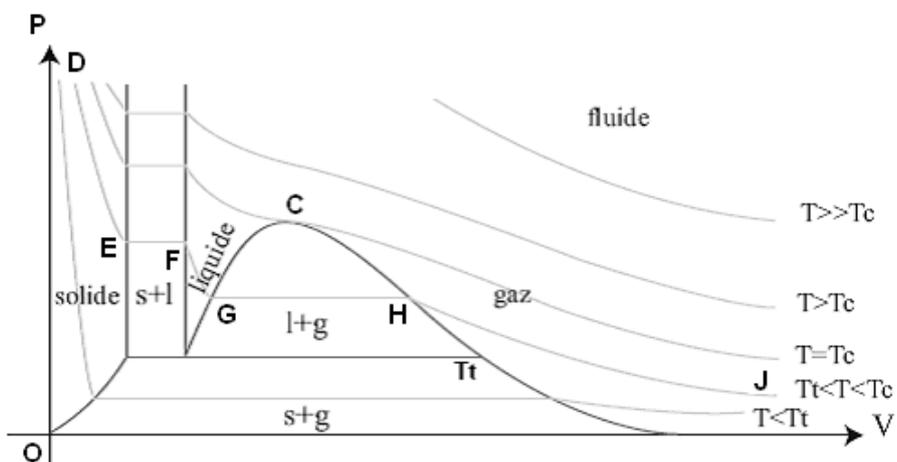


Figure II. 6 Diagramme (P, V) (diagramme de Clapeyron) (l: liquide, s: solide, g: gaz)

Lors de l'écoulement dans un joint annulaire, la diminution de pression et l'augmentation de température peuvent provoquer, respectivement, la cavitation ou la vaporisation du fluide. Ce changement de phase affecte considérablement les propriétés thermodynamiques du fluide et modifie les caractéristiques statique et dynamique du joint d'étanchéité. En 1978, Hughes et al. [54] ont étudié la vaporisation du fluide lubrifiant dans les joints à faces radiales. L'écoulement est divisé en deux régions, une pour la phase liquide et l'autre pour la vapeur. Le modèle montre que le débit massique atteint une valeur maximale quand le fluide est uniquement en phase liquide. En 1987, Beatty et Hughes [55] ont présenté un modèle avec écoulement turbulent et adiabatique pour un joint annulaire centré. L'écoulement est divisé en trois zones: phase liquide, mélange liquide-vapeur et vapeur. Il est supposé que le fluide diphasique (liquide et vapeur) se comporte comme un mélange homogène dont les propriétés physiques sont déterminées à partir des propriétés des deux phases. Les résultats montrent que le débit massique diminue suite à une augmentation de la vitesse de rotation, de la longueur du joint ou de la fraction volumique de vapeur. Beatty et Hughes [56] ont par la suite proposé en 1990 un modèle d'écoulement diphasique stratifié. L'écoulement stationnaire est supposé axisymétrique, adiabatique et turbulent. Il a été trouvé que le modèle d'écoulement diphasique stratifié prédit un débit de fuite plus élevé que le modèle homogène. Néanmoins, la même année, Yasuna et Hughes [57] ont présenté un modèle d'écoulement diphasique, laminaire et non-isotherme où la région diphasique liquide-vapeur est modélisée de nouveau comme un mélange homogène. Les résultats montrent que la région d'écoulement diphasique joue un rôle important dans la stabilité du joint.

En 1997, Arauz et San Andrés [37], [38] ont analysé le comportement statique et dynamique des joints d'étanchéité annulaires fonctionnant en régime diphasique avec des fluides cryogéniques. Le modèle est basé sur les équations de l'écoulement moyen présentées précédemment. Le mélange diphasique est supposé homogène, saturé et en équilibre thermodynamique. Les caractéristiques statiques des joints analysés concordent bien avec les résultats expérimentaux de Hendricks [58].

II.2.2. Calcul des propriétés du fluide en régime diphasique

Le fluide diphasique est considéré comme étant un mélange homogène en équilibre thermodynamique. Les propriétés du mélange diphasique sont calculées à l'aide de la qualité du fluide λ_q [37]:

$$\lambda_q = \frac{i - i_l}{i_g - i_l} \quad (\text{II. 32})$$

où i est l'enthalpie du fluide diphasique (J/kg), i_l est l'enthalpie du liquide saturé (J/kg), et i_g est l'enthalpie de la vapeur saturée (J/kg).

- **L'entropie, la chaleur spécifique, le volume spécifique et la conductivité thermique** du mélange sont calculés à l'aide de la relation suivante:

$$\phi = \lambda_q \phi_g + (1 - \lambda_q) \phi_l \quad (\text{II. 33})$$

où $\phi \in \{s, c_p, 1/\rho, \lambda\}$ est la propriété du fluide diphasique, ϕ_l est la propriété du liquide saturé et ϕ_g est la propriété de la vapeur saturée.

La masse volumique du mélange déterminée à partir de cette relation est :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\lambda_q}{\rho_g} + \frac{1 - \lambda_q}{\rho_l} \quad (\text{II. 34})$$

- **La viscosité dynamique** est donnée par la relation de McAdams [59], définie comme une fonction par morceaux:

$$\begin{cases} \frac{\mu}{\mu_l} = 1 + 2.5 \left(\frac{n + 0.4}{n + 1} \right) \psi & , \quad \psi \leq 0.3 \\ \frac{1}{\mu} = \left[\left(\frac{\lambda_+}{\mu_g} - \frac{1}{\mu_+} \right) + \left(\frac{1}{\mu_+} - \frac{1}{\mu_g} \right) \lambda_q \right] \frac{1}{\lambda_+ - 1} & , \quad \psi > 0.3 \end{cases} \quad (\text{II. 35})$$

où $n = \frac{\mu_g}{\mu_l}$ est le rapport de la viscosité dynamique de la vapeur saturée et du liquide saturé.

$$\psi = \frac{\lambda_q}{\lambda_q + (1 - \lambda_q) \frac{\rho_g}{\rho_l}} : \text{le taux de vide du fluide.}$$

$$\lambda_+ = \frac{0.3}{0.3 + 0.7 \frac{\rho_l}{\rho_g}} : \text{la qualité du fluide au taux de vide de 0.3.}$$

$$\mu_+ = \frac{1.3\mu_l^2 + 1.75\mu_l\mu_g}{\mu_l + \mu_g} : \text{la viscosité du fluide au taux de vide de 0.3.}$$

- **La vitesse du son** du mélange homogène est calculé à l'aide de la référence [60] étant basée sur la dérivée de l'enthalpie et de la pression.

$$a_{son}^2 = \frac{\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_T - \left(\frac{di}{d\rho}\right)_T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho}{\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_\rho - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho} \quad (\text{II. 36})$$

Cette relation est identique à (II.31).

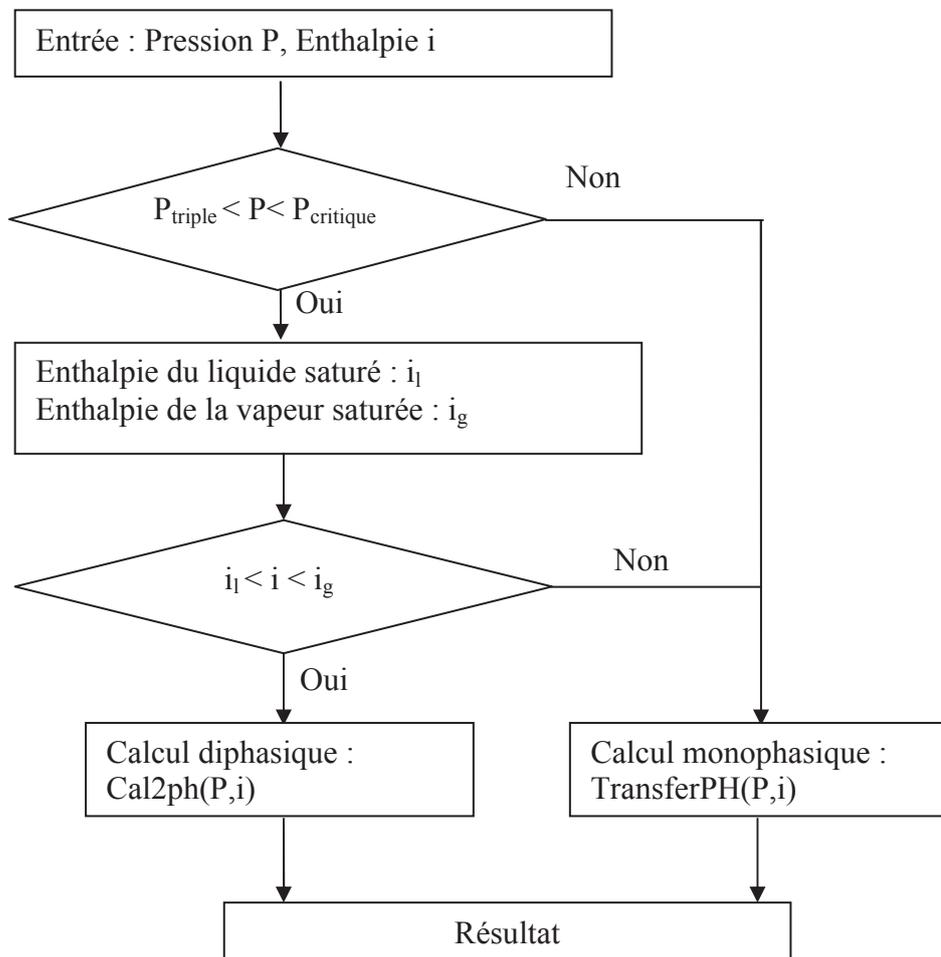


Figure II. 7 Schéma du calcul monphasique et diphasique

L'algorithme du calcul diphasique est montré sur la Figure II. 7. Pour déterminer la qualité du fluide λ_q , l'enthalpie du liquide saturé i_l et de la vapeur saturée i_g sont déterminées à partir de la pression, de l'enthalpie et des tables thermodynamiques. Les calculs de i_l et de i_g ne sont effectués que si $P_{triple} < P < P_{critique}$, sinon le fluide est monophasique. L'état du fluide (diphasique ou monophasique) est déterminé en comparant l'enthalpie du fluide i avec i_l et i_g . Si l'état du fluide est monophasique, les propriétés du fluide sont calculées directement par les tables thermodynamiques, sinon les propriétés sont obtenues par les formules précédentes.

II.3. Résolution numérique des équations de l'écoulement moyen (« bulk flow ») compressibles

Pour l'intégration numérique, les équations de l'écoulement moyen sont mises sous la forme des équations générales de transport de la quantité Ξ [43].

$$\frac{\partial(\rho H \Xi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho W H \Xi)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho U H \Xi)}{R \partial \theta} = \frac{\partial(\rho H \Xi)}{\partial t} + \nabla(\vec{J} \Xi) = S_{\Xi} \quad (\text{II. 37})$$

Dans le cas stationnaire ces équations se réduisent à :

$$\nabla(\vec{J}_0 \Xi_0) = S_{\Xi_0} \quad (\text{II. 38})$$

où $\vec{J} = (\rho W H, \rho U H)$ et les termes sources sont présentés dans le Tableau II. 2

Tableau II. 2 Termes sources des équations de l'écoulement moyen à l'ordre zéro

Ξ_0	S_{Ξ_0}
1 (éq. cont.)	0
W_0	$-H_0 \frac{\partial P_0}{\partial z} + \tau_{sz0} + \tau_{rz0}$
U_0	$-H_0 \frac{\partial P_0}{R \partial \theta} + \tau_{s\theta 0} + \tau_{r\theta 0}$
i_0	$\{q_{s0}'' - q_{r0}'' + H_0 \vec{V}_0 \cdot \nabla P_0 + R \omega \tau_{r\theta 0}^H - W_0 (\tau_{sz0} + \tau_{rz0}) - U_0 (\tau_{s\theta 0} + \tau_{r\theta 0})\}$
i_{i0}	$q_{s0}'' - q_{r0}'' + R \omega \tau_{r\theta 0}^H$

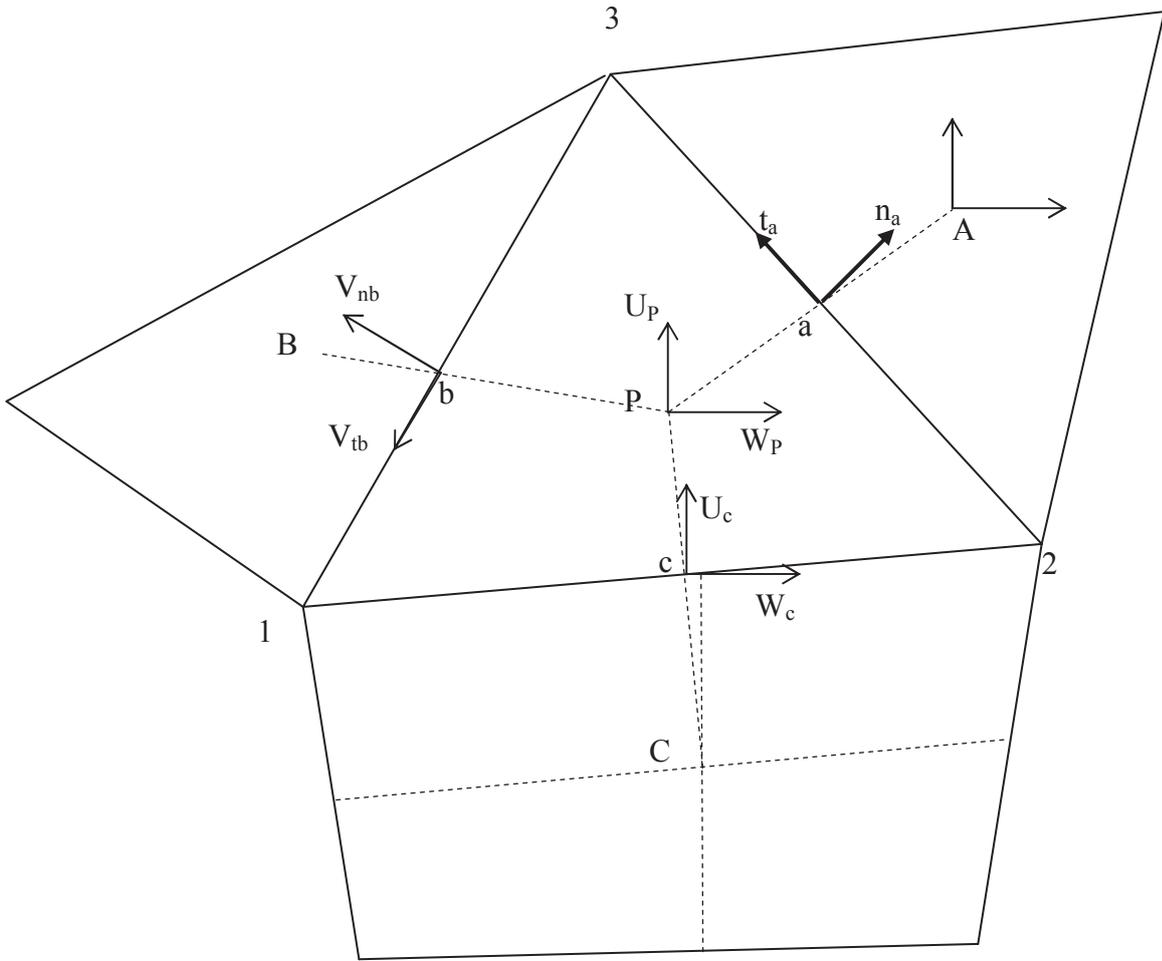


Figure II. 8 Discrétisation et volume de contrôle non - structuré

Afin d'obtenir une forme discrète, les équations seront intégrées sur un volume de contrôle (Figure II. 8):

$$\int_{\vartheta} \nabla(\bar{J}\Xi) d\vartheta = \int_{\Gamma} \bar{J}\Xi \cdot nd\gamma \quad (\text{II. 39})$$

$$\int_{\vartheta} S_{\Xi} d\vartheta = S_{\Xi} \vartheta \quad (\text{II. 40})$$

La frontière du volume de contrôle est $\Gamma = \bigcup_i \gamma_i$ et la forme discrétisée résulte:

$$\sum_i \dot{m}_i \Xi_i = S_{\Xi} \vartheta \quad (\text{II. 41})$$

$$\dot{m}_i = (J_n \gamma)_i = \rho_i V_{mi} H_i \gamma_i \quad (\text{II. 42})$$

La variable Ξ sur une arête qui intervient dans les termes de convection est déterminée en tenant compte du sens de la vitesse normale [61].²

$$\Xi_i^{HOP} = \Xi_{\substack{\text{volume} \\ \text{amont}}} + (\text{grad}_R \Xi)_{\substack{\text{volume} \\ \text{amont}}} \cdot \vec{d}_{Pi} \quad (\text{II. 43})$$

$$\Xi_i^{upwind} = \Xi_i^{1OP} = \Xi_P \frac{\text{SIGN}(1, V_{ni}) + 1}{2} - \Xi_I \frac{\text{SIGN}(1, V_{ni}) - 1}{2} \quad (\text{II. 44})$$

où $(\text{grad}_R \Xi)_{\substack{\text{volume} \\ \text{am} / \text{av}}}$ est le gradient de reconstruction dans le volume amont et \vec{d}_{Pi} est le vecteur dirigé du centre P du volume vers le point caractéristique de l'arête i .

Après discrétisation sur un volume de contrôle, l'équation de transport discrète s'écrit:

$$a_P(1 + r_{\Xi})\Xi_P = \sum_{i=A,B,C} a_i \Xi_i + S_{\Xi} \vartheta_P + a_P r_{\Xi} \Xi_P + b_{\Xi} \sum_{i=A,B,C} \dot{m}_i (\Xi_i^{1OP} - \Xi_i^{HOP}) \quad (\text{II. 45})$$

$$a_i = \dot{m}_i \frac{\text{sign}(V_{ni}) - 1}{2}, \quad a_P = \sum_{i=A,B,C} a_i \quad (\text{II. 46})$$

où r_{Ξ} est un coefficient de relaxation. $b_{\Xi} = 0$ va donner une valeur Ξ du premier ordre de précision et $b_{\Xi} = 1$ une valeur Ξ d'un ordre de précision supérieur à un (au maximum, du deuxième ordre de précision). Des valeurs $0 < b_{\Xi} < 1$ détermineront pour Ξ des ordres de précision intermédiaire.

La résolution du système d'équations linéaires normalisées est itérative et utilise une procédure de relaxation de type Gauss- Seidel.

$$\Xi_P = \sum_{i=A,B,C} \frac{a_i}{a_P(1 + r_{\Xi})} \Xi_i + a_S^{\Xi} \quad (\text{II. 47})$$

$$a_S^{\Xi} = \frac{S_{\Xi} \vartheta_P + a_P r_{\Xi} \Xi_P^{(n-1)} + b_{\Xi} \sum_{i=A,B,C} \dot{m}_i (\Xi_i^{1OP} - \Xi_i^{HOP})^{(n-1)}}{a_P(1 + r_{\Xi})} \quad (\text{II. 48})$$

Tous les coefficients a_i sont constants, étant connus de l'étape antérieure de l'algorithme de résolution global. Cette équation discrétisée est utilisée pour le calcul de la vitesse et de l'enthalpie.

² HOP: "high order precision"

Couplage vitesses – pression – densité.

Le point central de l'algorithme numérique est la résolution du couplage entre les vitesses, la pression et la densité. Il est supposé que ces variables s'écrivent comme une valeur de prédiction plus une valeur de correction:

$$W = W^* + W', \quad U = U^* + U', \quad P = P^* + P', \quad \rho = \rho^* + \rho' \quad (\text{II. 49})$$

Les valeurs de prédiction des vitesses W^* sont obtenues en résolvant les équations d'impulsion (II.47) et les valeurs initiales de pression P^* sont des valeurs estimées.

Le calcul de la pression se fait à partir de l'équation de continuité:

$$\int_{\Gamma} \rho \vec{V} H \cdot \vec{n} d\gamma = \sum_{i=a,b,c} \dot{m}_i \quad (\text{II. 50})$$

En utilisant les variables décomposées en prédictions et corrections, le débit massique et l'équation de continuité s'écrivent:

$$\sum_{i=a,b,c} (\dot{m}_i^* + \dot{m}_i') = 0 \quad (\text{II. 51})$$

$$\dot{m}_i^* = \rho_i^* V_{ni}^* H_i \gamma_i, \quad \dot{m}_i' = \rho_i^* V_{ni}' H_i \gamma_i + \rho_i' V_{ni}^* H_i \gamma_i \quad (\text{II. 52})$$

La vitesse normale est calculée à l'aide d'une interpolation spéciale [62], [63].

$$V_{ni}^* = \overline{V}_{ni}^* - \left[\frac{H_p \vartheta_p}{a_p (1 + r_v)} \right]_i \left[\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_i - \overline{\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)}_i \right] + \frac{r_v}{1 + r_v} \left[V_{ni} - \overline{(\vec{V})}_i \cdot \vec{n}_i \right]^{(k-1)}, \quad i=a,b,c \quad (\text{II. 53})$$

où W^* et U^* sont les composantes de vitesse obtenues suite à la résolution des équations de transport et " $\overline{\quad}$ " sont les valeurs interpolées. Le même coefficient de sous-relaxation r_v est utilisé pour les équations de transport de W et de U . Il est supposé que la correction de la vitesse normale dépend seulement de la correction du gradient de pression

$$V_{ni}' = -\overline{B}_i \left(\frac{\partial P'}{\partial n} \right)_i \approx -\overline{B}_i \left(\frac{\partial P'}{\partial \zeta} \right)_i = -\overline{B}_i \frac{P'_i - P'_p}{d_{PI}}, \quad i=a,b,c, \quad I=A,B,C \quad (\text{II. 54})$$

Pour un fluide compressible, l'équation de continuité peut être interprétée comme une équation de transport de la densité. La densité intervenant dans \dot{m}_i est estimée en prenant en compte la direction de la vitesse normale.

$$\rho_i = \rho_i^{1OP} \quad (\text{II. 55})$$

où ρ_i^{1OP} est la valeur amont calculé par (II. 44). Cette relation est utilisée pour les valeurs de prédiction et de correction de la densité sur l'arête. La relation entre la correction de la densité et la correction de la pression est issue de la référence [64].

$$\rho' = \kappa P', \quad \kappa = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \quad (\text{II. 56})$$

La correction de débit massique s'écrit ensuite:

$$\dot{m}'_i = \left[\frac{\rho_i^* B_i H_i \gamma_i}{d_{PI}} + \kappa_P \frac{\text{SIGN}(V_{ni}^*) + 1}{2} V_{ni}^* H_i \gamma_i \right] P'_P - \left[\frac{\rho_i^* B_i H_i \gamma_i}{d_{PI}} + \kappa_I \frac{\text{SIGN}(V_{ni}^*) - 1}{2} V_{ni}^* H_i \gamma_i \right] P'_I \quad (\text{II. 57})$$

Finalement, l'équation de continuité discrétisée est présentée comme un système linéaire:

$$a_P P'_P = \sum_{I=A,B,C} a_I P'_I - \sum_{i=a,b,c} \dot{m}'_i \quad (\text{II. 58})$$

$$a_P = \sum_{i=A,B,C} \left[\frac{\rho_i^* B_i H_i \gamma_i}{d_{PI}} + \kappa_P \frac{\text{SIGN}(V_{ni}^*) + 1}{2} V_{ni}^* H_i \gamma_i \right] \quad (\text{II. 59})$$

$$a_I = \frac{\rho_i^* B_i H_i \gamma_i}{d_{PI}} + \kappa_I \frac{\text{SIGN}(V_{ni}^*) - 1}{2} V_{ni}^* H_i \gamma_i \quad (\text{II. 60})$$

La correction de la pression P' est nulle sur les arêtes de pression imposée. Pour une sortie de type supersonique, le système linéaire est légèrement modifié pour prendre en compte la valeur extrapolée de P' .

La résolution du système d'équations linéaires est itérative et utilise une procédure de relaxation de type Gauss- Seidel. Après résolution, toutes les valeurs, sauf la densité, sont corrigées:

$$P_P = P_P^* + r_P P' \quad (\text{II. 61})$$

$$W_P = W_P^* - B_P \left(\frac{\partial P'}{\partial z} \right)_P, \quad U_P = U_P^* - B_P \left(\frac{\partial P'}{\partial x} \right)_P \quad (\text{II. 62})$$

$$V_{ni} = V_{ni}^* - B_i \frac{P'_l - P'_P}{d_{PI}}, \quad \dot{m}_i = \dot{m}_i^* + \dot{m}'_i \quad (\text{II. 63})$$

La résolution de l'équation de l'énergie permet de déterminer l'enthalpie et ensuite la température. La masse volumique est calculée à l'aide de l'équation d'état. L'algorithme itératif procède ensuite avec une nouvelle solution des équations de moment.

II.4. Validations. Comparaisons avec des résultats théoriques issus de la littérature

Pour validation, les résultats sont comparés avec ceux obtenus par Arauz et San Andrés [38] pour un joint annulaire centré fonctionnant avec oxygène liquide (LOx) dont la géométrie et les conditions de fonctionnement sont : $R=0.0325$ m, $L=0.026$ m, $C_{jeu}=174$ μm , $\omega=30\,000$ tr/min, $T^0_{\text{entrée}}=125\text{K}-150\text{K}$, $P^0_{\text{entrée}}=2.79$ MPa, $P^0_{\text{sortie}}=1.8$ MPa, $\zeta_{\text{entrée}}=0.5$, $\zeta_{\text{sortie}}=1$.

Les calculs sont effectués avec un maillage de 11 cellules dans la direction axiale et 33 dans la direction circonférentielle et sont notés par « PHARES » ou « BFS »³ sur les Figure II. 9- Figure II. 12.

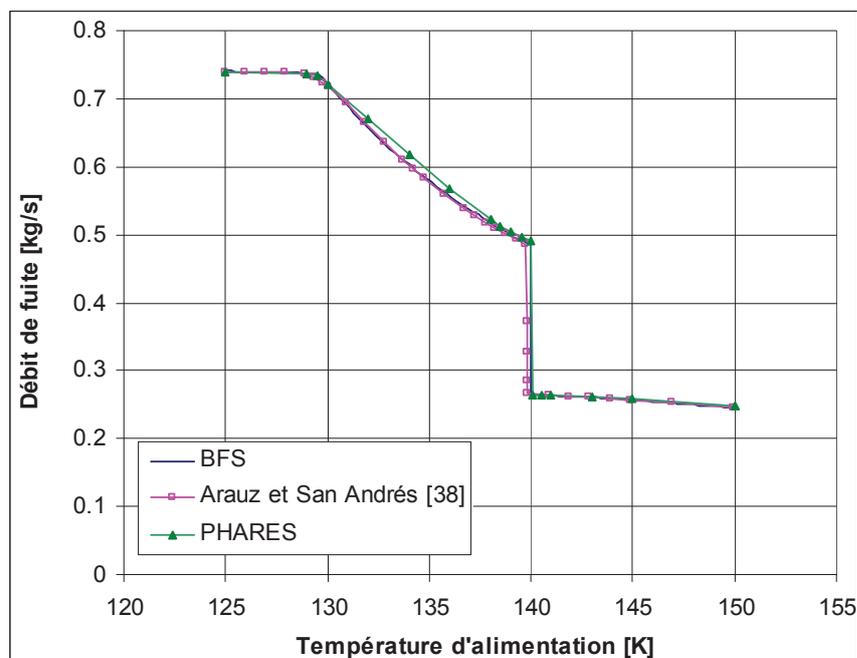


Figure II. 9 Variation du débit de fuite avec la température d'alimentation.

³ BFS : équations simplifiées du modèle « Bulk flow »

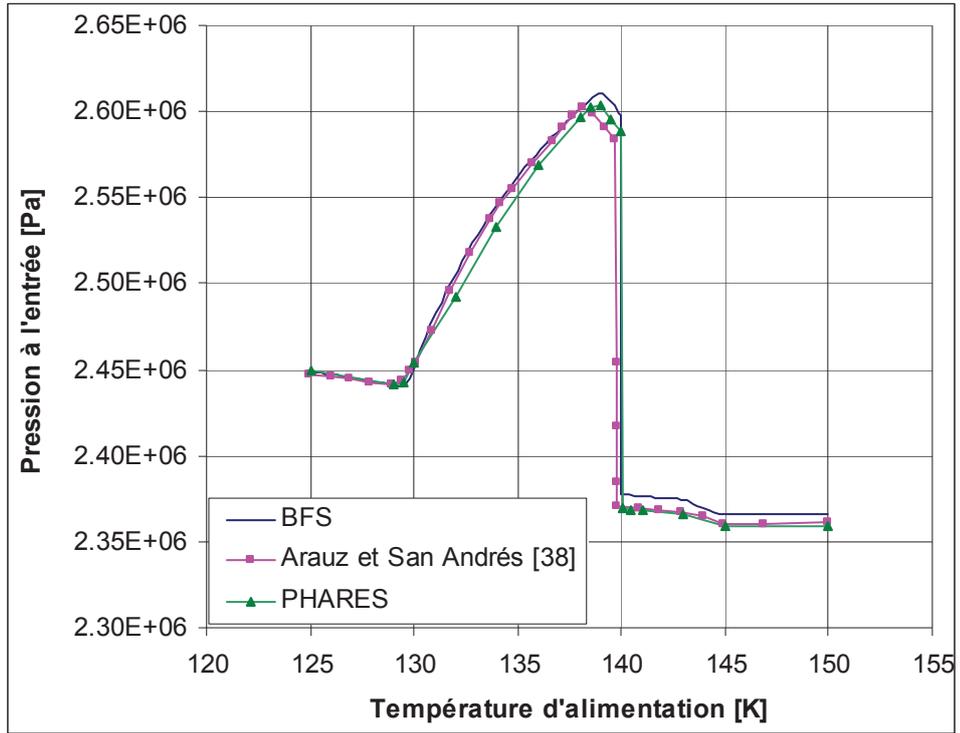


Figure II. 10 Variation de la pression dans la section d'entrée du joint en fonction de la température d'alimentation.

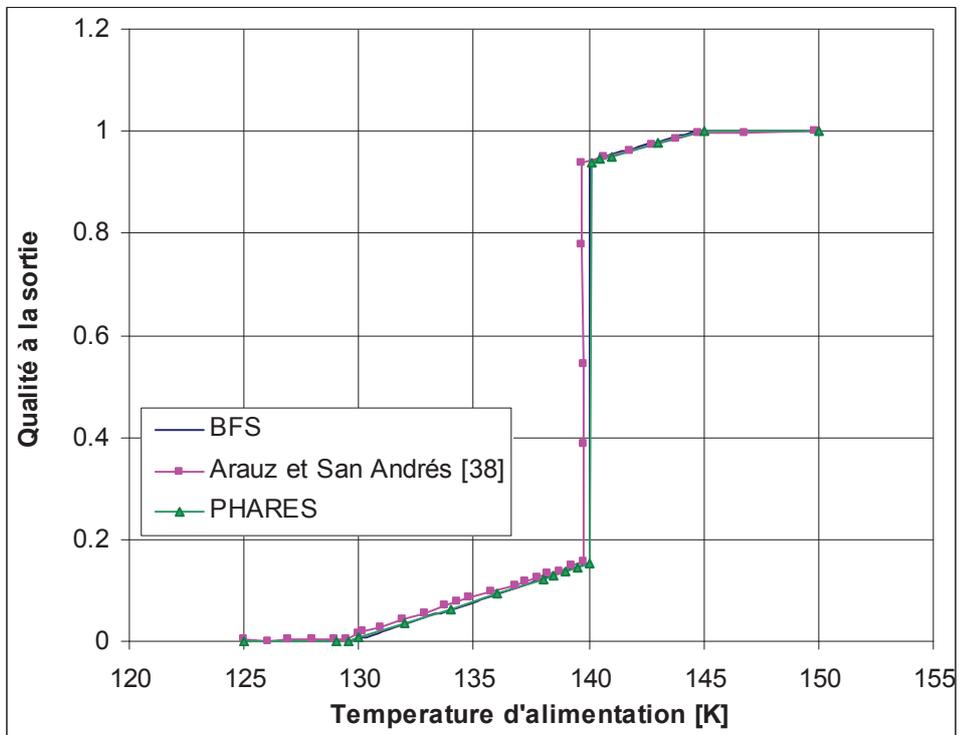


Figure II. 11 Variation de la qualité du fluide dans la section de sortie du joint en fonction de la température d'alimentation.

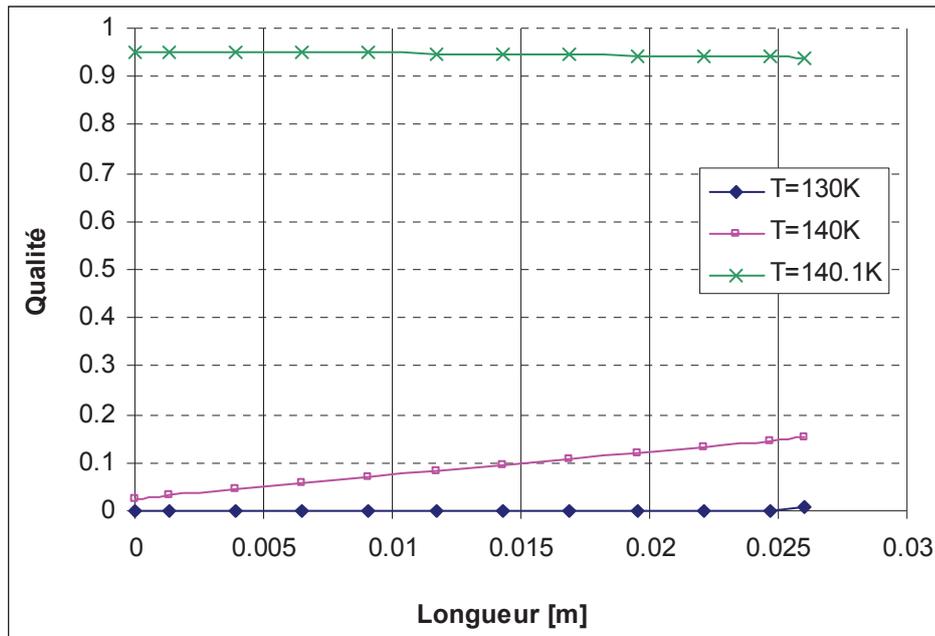


Figure II. 12 Variation de la qualité du fluide le long du joint pour différentes températures d'alimentation.

Pour une température d'alimentation de 125 K l'écoulement est monophasique et à l'état liquide ($\lambda_q=0$). Si la température d'alimentation est inférieure à 130 K le fluide reste monophasique tout le long du joint. Un faible écoulement diphasique apparaît dans la section de sortie pour $T_{entrée}^0=130$ K. Pour des températures d'alimentation comprises entre 130 K et 140 K le changement de phase commence à avoir lieu dans le joint. Le débit de fuite diminue et la qualité du fluide en sortie indique un mélange gaz-liquide. La qualité maximale est de 0.154, à la sortie du joint pour $T_{entrée}^0=140$ K. Si la température à l'entrée dépasse 140 K, pour $T_{entrée}^0=140.1$ K, le changement de phase a lieu dans la section d'entrée, l'écoulement ayant une qualité de 0.95 tout le long du joint. Ce régime est accompagné par une discontinuité dans la variation du débit de fuite, de la pression dans la section d'entrée et de la qualité du fluide. L'écoulement est totalement monophasique (état gazeux) à la température d'alimentation de 145 K.

A noter que pour LOx, le point critique est à 154.581 K, 50.430 bar et le point triple est à 54.359 K, 0.00148 bar.

II.5. Le blocage sonique

Le blocage sonique a lieu quand la vitesse axiale de l'écoulement est égale à la vitesse locale du son. Afin d'expliquer les conditions d'apparition du blocage sonique dans un joint annulaire il est nécessaire de préciser quelques notions liées à l'écoulement unidimensionnel des fluides

compressibles. Les équations simplifiées de l'écoulement moyen sans écoulement circonférentiel, $U = 0$ et $\tau_{\theta_s} = \tau_{\theta_r} = 0$ et avec des parois adiabatiques, $q_s'' = q_r'' = 0$, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\rho WH) = 0 \\ \frac{d}{dz}(\rho W^2 H) = -H \frac{dP}{dz} + \tau_{zs} - \tau_{zr} \\ \frac{d}{dz}(\rho_i WH) = 0 \end{cases} \quad (\text{II. 64})$$

Afin de trouver une solution analytique de l'écoulement dans le joint annulaire et pour mettre en évidence le blocage sonique, considérons l'évolution adiabatique d'un gaz parfait. Le fluide obéit à l'équation d'état $P = \rho \mathfrak{R}T$ et la vitesse du son est $a_{son}^2 = \gamma P / \rho = \gamma \mathfrak{R}T$. Les contraintes aux parois sont exprimées à l'aide du coefficient de frottement.

$$\tau_{zs} - \tau_{zr} = 2f \rho W^2 / 2 \quad (\text{II. 65})$$

Le coefficient de frottement est estimé à l'aide de la relation de Blasius, $f = a \text{Re}^b$ où $\text{Re} = 2\rho WH / \mu$. Si la viscosité du fluide est constante, le coefficient de frottement dans le joint annulaire l'est aussi car $\dot{M} = 2\pi R \rho WH = \text{const.}$ Avec ces hypothèses le système (II. 64) a une solution analytique :

$$\frac{dM^2}{dz} = \frac{2M^2}{H} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \frac{f\gamma M^2 - \frac{dH}{dz}}{1 - M^2} \quad (\text{II. 66})$$

Cette équation différentielle montre que les forces de frottement aux parois, f , peuvent accélérer ou décélérer un écoulement compressible tout aussi bien comme une variation de section, dH/dz . Par exemple,

- Si $f=0$ (gaz parfait), une diminution de section $dH/dz < 0$ va accélérer un écoulement subsonique, $M < 1$, et va décélérer un écoulement supersonique. Une augmentation de section va agir dans le sens contraire.

- Si $dH/dz = 0$, pour un canal lisse, l'équation montre que les forces de frottement peuvent accélérer un écoulement subsonique ($dM/dz > 0$ si $M < 1$) ou peuvent décélérer un écoulement

supersonique ($dM/dz < 0$ si $M > 1$). En revanche, comme les forces de frottement sont toujours positives ($f > 0$) elles ne peuvent pas conduire à un changement de régime d'écoulement dans un joint annulaire de section constante. Ces situations sont schématisées dans le tableau suivant.

	Écoulement non-visqueux dans une convergence	Écoulement visqueux dans un canal parallèle
Écoulement accéléré	<p>Section de passage décroissante $M < 1$ $M = 1$</p>	<p>Force de frottement $M < 1$ $M = 1$</p>
Écoulement décélééré	<p>Section de passage décroissante $M > 1$ $M = 1$</p>	<p>Force de frottement $M > 1$ $M = 1$</p>

Le régime d'écoulement sonique ou supersonique est accompagné d'un phénomène de blocage caractéristique pour les joints annulaires fonctionnant en fluide gazeux. Quand la vitesse axiale atteint la vitesse du son et donc $M=1$, l'information sur la pression aval n'est plus transmise à l'amont vers la section d'entre du joint annulaire. Le débit reste alors bloqué. Une diminution de la pression de sortie ne modifiera pas la valeur du débit de fuite.

Remarque :

A l'état liquide, la vitesse du son est très élevée et l'écoulement est toujours subsonique ($M < 1$). Pour l'état gazeux du même fluide, la vitesse du son a des valeurs plus faibles. Il est donc possible que le changement de phase soit accompagné d'une modification rapide du nombre de Mach local. Le régime d'écoulement passe alors du subsonique en état liquide vers un régime sonique ou supersonique en régime diphasique avec toutes les caractéristiques décrites auparavant (blocage du débit, etc.)

II.5.1. Traitement numérique du blocage sonique

Pour l'écoulement d'un gaz réel dans un joint annulaire, le problème du blocage sonique doit être traité de manière numérique. En fonction du nombre de Mach dans la section de sortie, le schéma

numérique doit permettre d'imposer des conditions aux limites adéquates et assurer la transmission correcte des informations.

Ainsi, si $M_n < 1$, la pression dans la section de sortie est imposée suivant la relation (II. 18) ou (II.19). Pour le modèle décrit par les équations de l'écoulement moyen, ceci est la seule information sur les conditions de l'écoulement dans la chambre aval qui doit être transmise dans le joint annulaire. La température est un scalaire transporté par convection dont le traitement numérique des termes de convection assure l'extrapolation de l'intérieur du joint vers la section de sortie.

Si $M_n \geq 1$ l'information sur la pression dans la section de sortie ne peut plus remonter dans le joint. Les équations de l'écoulement moyen ont un caractère purement hyperbolique pour lequel l'algorithme numérique décrit au paragraphe II.3 n'est pas bien adapté. En effet, le couplage vitesse-pression décrit auparavant nécessite l'estimation d'un gradient de pression dans chaque cellule du maillage. Ceci est problématique dans les cellules situées au voisinage de la section de sortie où la pression ne doit plus être imposée. Afin de dépasser cette difficulté sans faire appel à un autre algorithme numérique, la pression dans la section de sortie est extrapolée à partir des valeurs amont dans le joint.

La procédure doit être complétée par un traitement particulier des conditions de sortie soniques. En effet, le traitement d'une section sonique ne pose pas de problème si elle apparaît à l'intérieur du joint car la viscosité artificielle inhérente qui est présente dans la solution numérique va lisser les forts gradients de pression. En revanche, si les conditions soniques sont atteintes dans la section de sortie un traitement numérique exact n'est plus possible. Ceci peut être expliqué en utilisant l'équation (II. 66) pour un joint lisse, $dH/dz = 0^4$:

$$\frac{1 - M^2}{\gamma M^4 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)} \frac{dM^2}{dz} = \frac{4f}{H} \quad (\text{II. 67})$$

Si les conditions soniques $M=1$ sont atteintes, il est alors nécessaire que $dM/dz \rightarrow \pm\infty$ car le coefficient de frottement est non nul, $f \neq 0$. Il peut être démontré que cette condition est accompagnée par $dP/dz \rightarrow \pm\infty$ dans la section sonique. Les gradients $dP/dz \rightarrow \pm\infty$ sont impossibles à traiter numériquement et un compromis entre la précision des résultats et la stabilité numérique doit être accepté.

Le schéma suivant décrit le traitement de la section de sortie d'un joint annulaire pour tous les régimes d'écoulement ([46]) :

⁴ C'est pour un joint lisse que les conditions soniques en sortie sont les plus probables.

$$P_{sortie} = \begin{cases} P_{sortie0} = P_{aval} & M_{n,sortie} < M_0 = 0.95 \\ P_{sortie0} + \frac{P_{sortie1} - P_{sortie0}}{1 - M_0} (M_{n,sortie} - M_0) & M_0 < M_{n,sortie} < 1 \\ P_{sortie1} = EXTRPOL(P_{int}) & M_{n,sortie} \geq 1 \end{cases} \quad (II. 68)$$

Les conditions de fonctionnement du cas test issu de la référence [38] sont modifiées pour que le régime d'écoulement soit sonique dans la section de sortie: $\omega = 4900$ rad/s, $T^0_{entrée} = 139$ K, $P^0_{entrée} = 5$ MPa, $P^0_{sortie} = 1$ MPa, $\zeta_{entrée} = 0.5$, $\zeta_{sortie} = 1$, $R = 32.5$ mm, $L = 6$ mm (deux fois plus longue que celle dans la référence [38]), $C_{jeu} = 174$ μ m. Les équations de l'écoulement moyen sont intégrées sur un maillage de 65x5 cellules. Ces résultats sont présentés sur les Figure II. 13-Figure II. 20. Deux méthodes permettant le traitement de l'écoulement bloqué en sortie sont présentées: la méthode rigoureuse décrite ci-dessus et la méthode simplifiée qui sera détaillée par la suite. Les résultats sont également comparés avec ceux issus de la méthode de l'écoulement moyen simplifié.

La qualité du fluide présentée sur la Figure II. 16 montre que le fluide devient diphasique après $z = 44$ mm. La discontinuité de la variation du nombre de Mach est due à la modification de la vitesse du son (Figure II. 19) qui accompagne le changement de phase. Les variations de la température et de la densité montrent également des discontinuités (Figure II. 14 et Figure II. 15). Comme il est normal, la pression et l'enthalpie ont des variations continues; elles ont été choisies comme variables primitives afin de permettre à l'algorithme numérique de s'affranchir du changement de phase sans avoir à traiter des discontinuités.

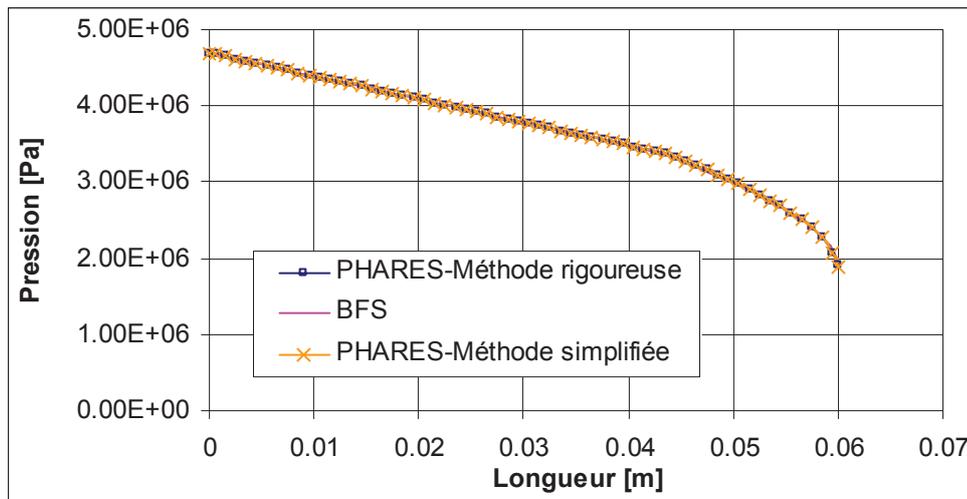


Figure II. 13 La pression suivant la longueur de la bague.

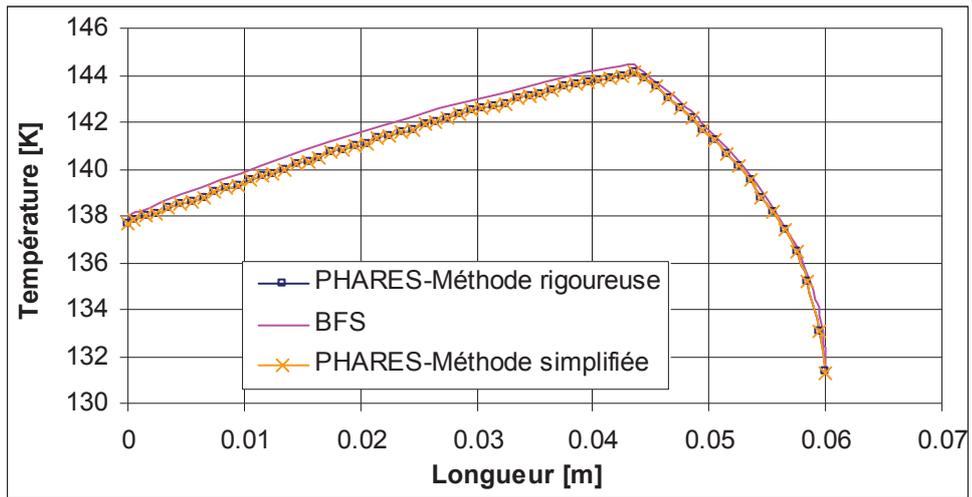


Figure II. 14 La température suivant la longueur de la bague.

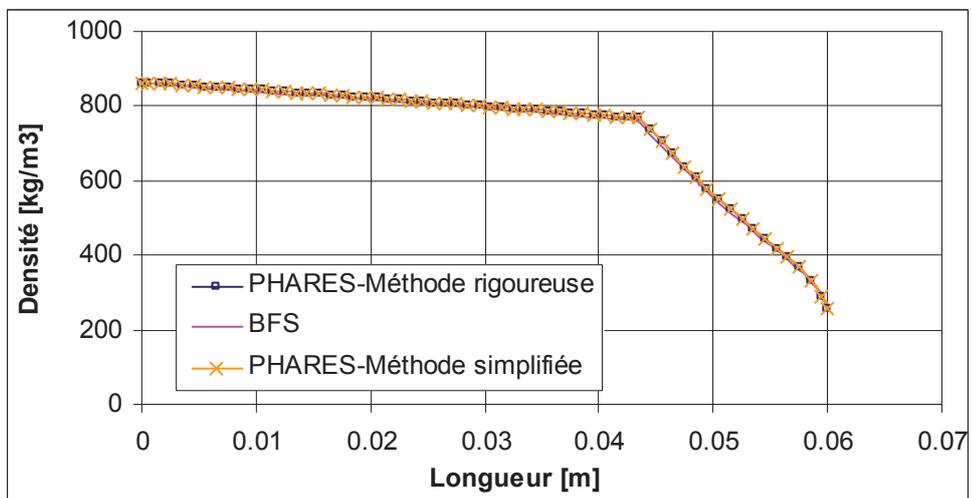


Figure II. 15 La masse volumique suivant la longueur de la bague.

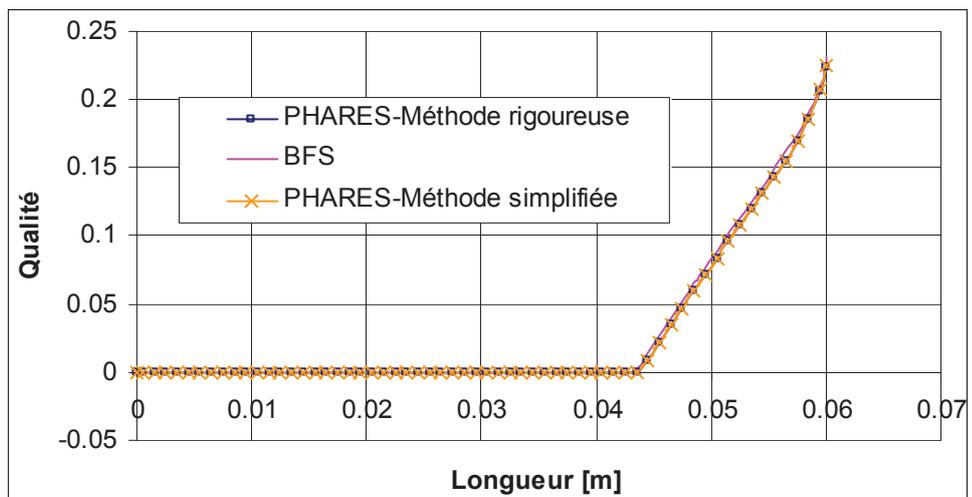


Figure II. 16 La qualité suivant la longueur de la bague.

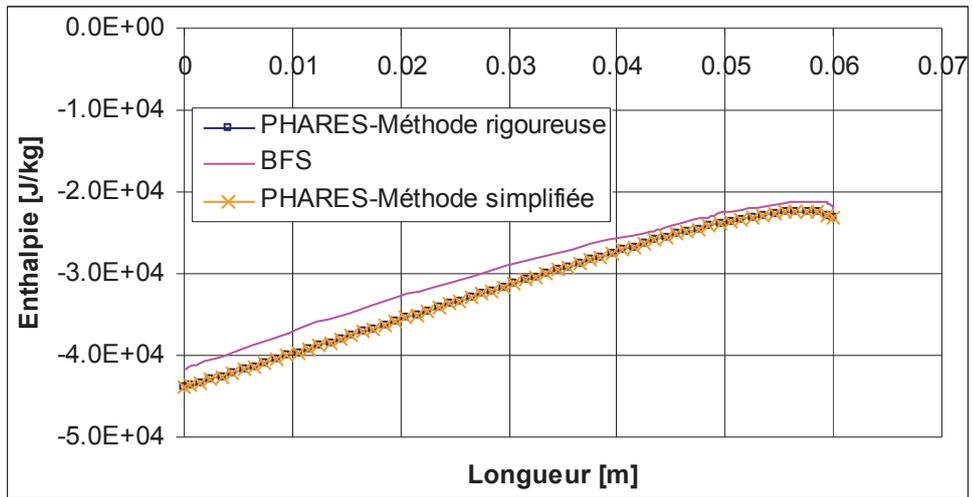


Figure II. 17 L'enthalpie suivant la longueur de la bague.

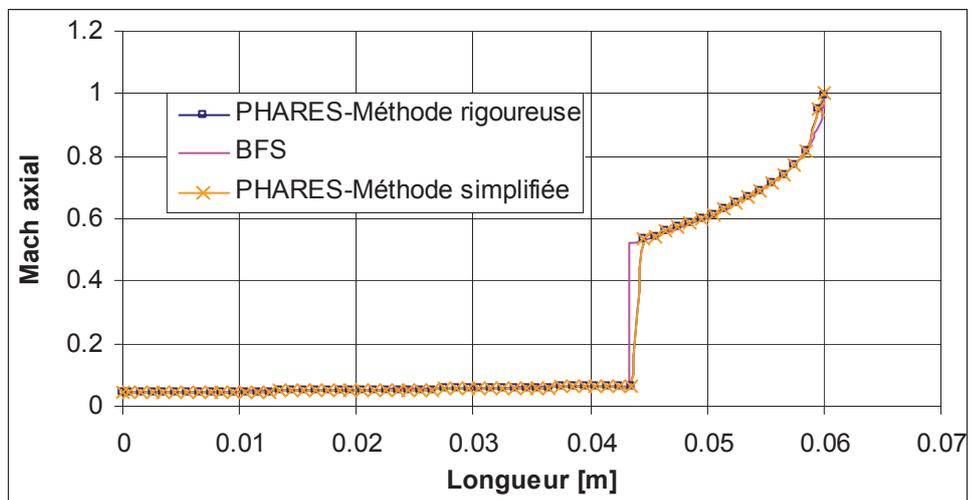


Figure II. 18 Le nombre de Mach axial suivant la longueur de la bague.

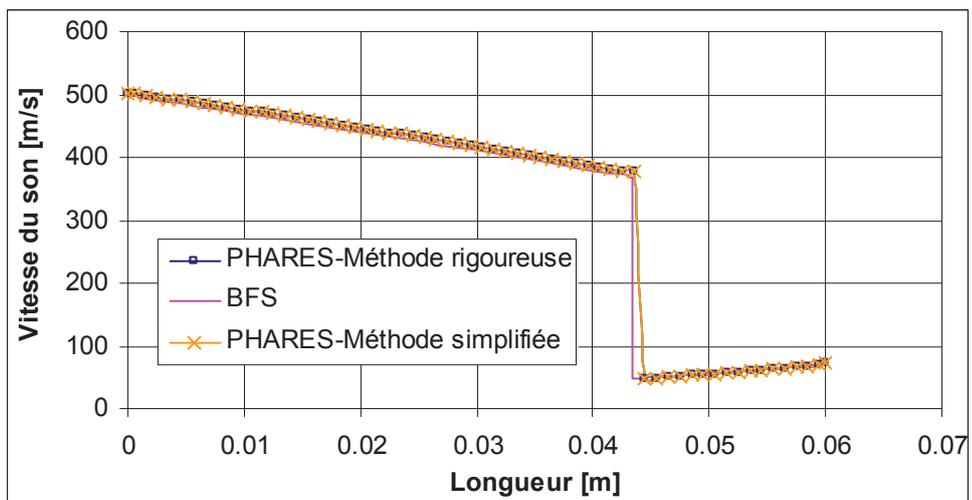


Figure II. 19 La vitesse du son suivant la longueur de la bague.

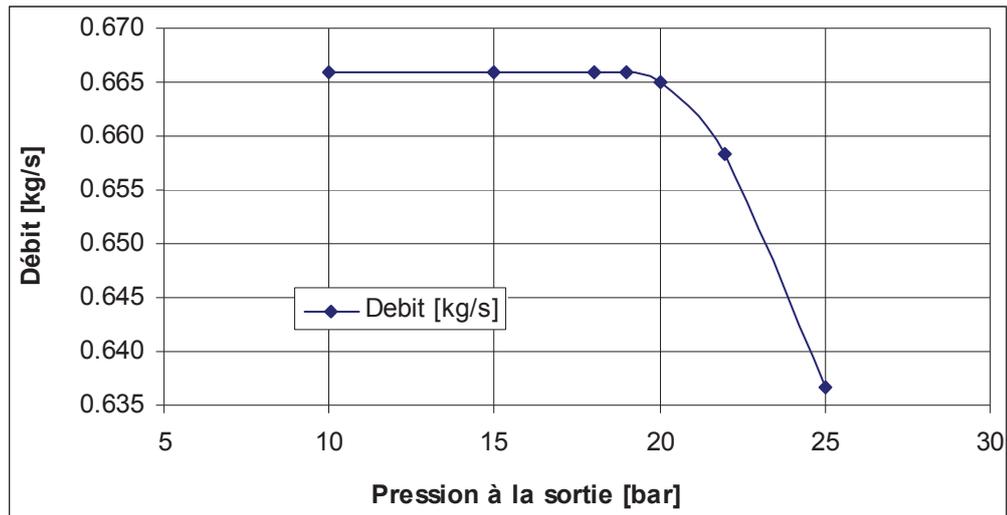


Figure II. 20 Variation du débit avec la pression à la sortie.

La Figure II. 18 montre aussi que l'écoulement dans la section de sortie est bloqué. En effet, après le changement de phase, le nombre de Mach augmente rapidement vers $M_n=1$ dans la section de sortie. Ce résultat est en corrélation avec la variation abrupte de la pression à la sortie (Figure II. 13).

La variation du débit massique avec la pression de sortie est présentée sur la Figure II. 20. Pour $P_{sortie} < 19$ bar, l'écoulement dans la section de sortie est bloqué et le débit est constant et égal à sa valeur maximale. Pour des valeurs $P_{sortie} > 19$ bar, l'écoulement n'est plus bloqué et le débit massique diminue.

Remarque

Si le jeu radial du joint est constant en absence du mésalignement et de l'excentricité, l'épaisseur du film est constante et $dH/dz = 0$. Dans ce cas, comme il a été montré, le nombre de Mach dans le joint ne peut pas dépasser $M=1$ et cette valeur apparaît dans la section de sortie. Un algorithme numérique plus simple et plus rapide est présenté sur la Figure II. 21.

Si pendant le processus de résolution numérique itérative le nombre de Mach axial dans la section de sortie est supersonique $M_{n,sortie} > 1$, l'algorithme effectue une modification heuristique de la pression dans la section de sortie, $P'_{sortie} = M_{n,sortie} P_{sortie}$. Cette augmentation de P_{sortie} mène vers une diminution de $M_{n,sortie}$ dans l'itération suivante. La diminution du nombre de Mach dans la section de sortie peut s'avérer trop sévère et le régime d'écoulement peut devenir subsonique $M_{n,sortie} < 1$ dans quel cas une nouvelle application de la relation $P'_{sortie} = M_{n,sortie} P_{sortie}$ permet de diminuer la

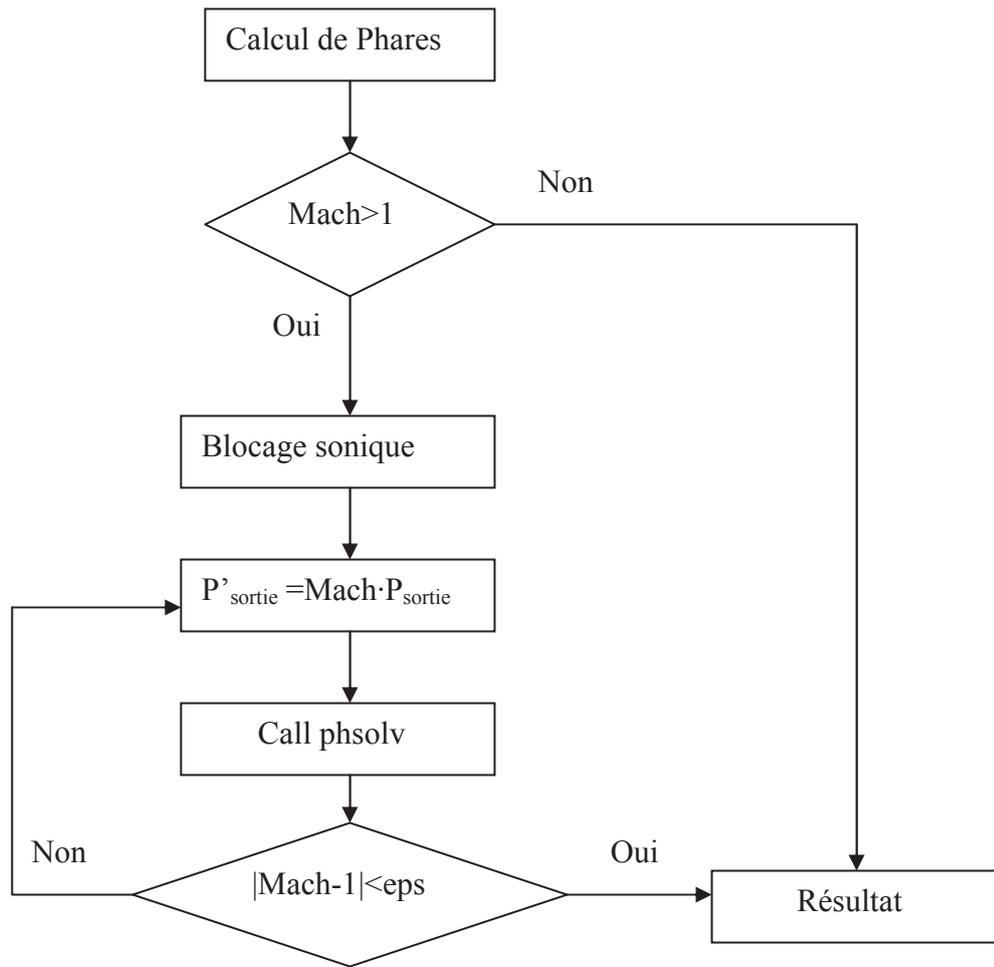


Figure II. 21 Schéma de la résolution simplifiée du blocage sonique.

pression dans la section de sortie. La procédure va converger pour $M_{n,sortie} = 1$. Les résultats obtenus avec cette procédure sont également présentés sur les Figure II. 13-Figure II. 19 et sont marqués "Méthode simplifiée". Il faut néanmoins souligner que cette procédure bien que très efficace en termes de temps de calcul ne repose sur aucune base physique. Elle est issue d'une longue pratique et peut être utilisée seulement si le régime sonique $M=1$ est limité à la section de sortie et si les conditions de fonctionnement du joint annulaire conduisent clairement à un régime sonique.

II.5.2. Analyse d'un joint annulaire convergent-divergent

Un cas plus difficile à traiter est celui d'un joint annulaire convergent-divergent. Une telle géométrie peut être due à des erreurs d'usinage ou à une usure spécifique du joint. La géométrie du joint précédent a été modifiée pour prendre en compte cette conicité. Ainsi, le jeu radial à mi-

longueur a gardé la même valeur $C_{jeu}=174 \mu m$ mais dans la section d'entrée et dans la section de sortie $C_{entrée}=174+500 \mu m$ et $C_{sortie}=174+1000 \mu m$ (Figure II. 22). Ces larges sections permettent d'avoir un écoulement supersonique dans le joint. Entre ces sections le jeu radial a une variation linéaire. La longueur du joint a également été modifiée, $L= 60 \text{ mm}$, afin de permettre l'obtention des inclusions supersoniques dans le joint annulaire. Les conditions de fonctionnement sont : $\omega=4900 \text{ rad/s}$, $T^0_{entrée}=139\text{K}$, $P^0_{entrée}=3.5 \text{ MPa}$, $P^0_{sortie}=1.8 \text{ MPa}$, $\zeta_{entrée}=0.5$, $\zeta_{sortie}=1$. Le fluide est visqueux et compressible. Les résultats sont présentés sur les Figure II. 23–Figure II. 26. Les maillages (axial x circonférentiel) utilisés y sont également indiqués.

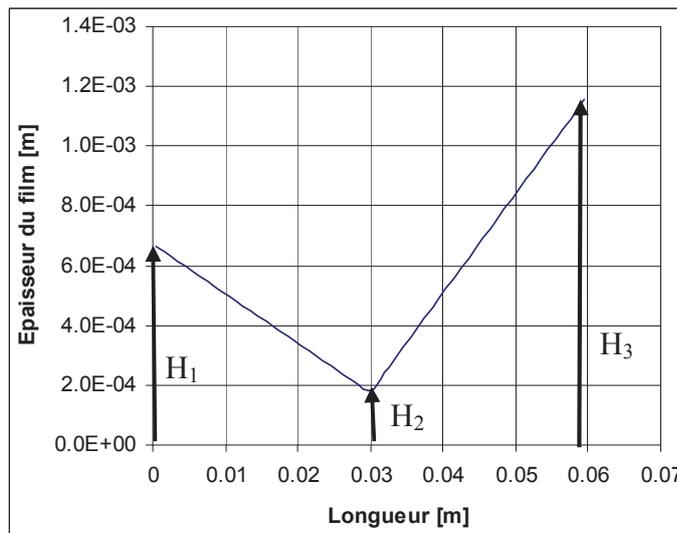


Figure II. 22 L'épaisseur du film mince.

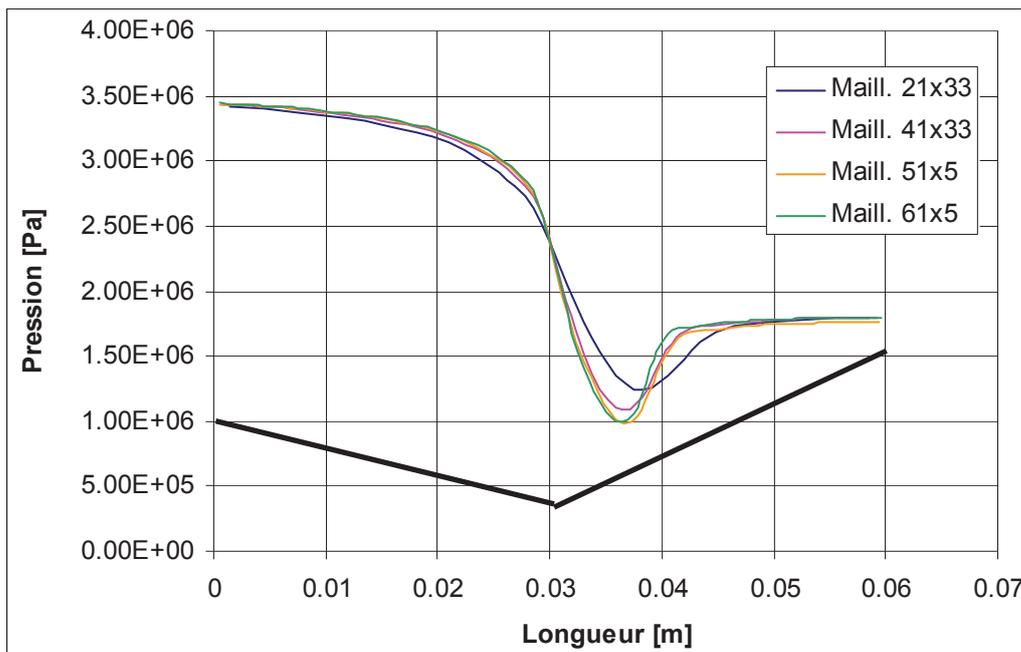


Figure II. 23 La pression suivant la direction axiale. (LOx, $\omega=4900 \text{ rad/s}$, $T^0_{entrée}=139\text{K}$, $P^0_{entrée}=3.5 \text{ MPa}$, $P^0_{sortie}=1.8 \text{ MPa}$, $C_{jeu}=174 \mu m$, $C_{entrée}=174+500 \mu m$, $C_{sortie}=174+1000 \mu m$)

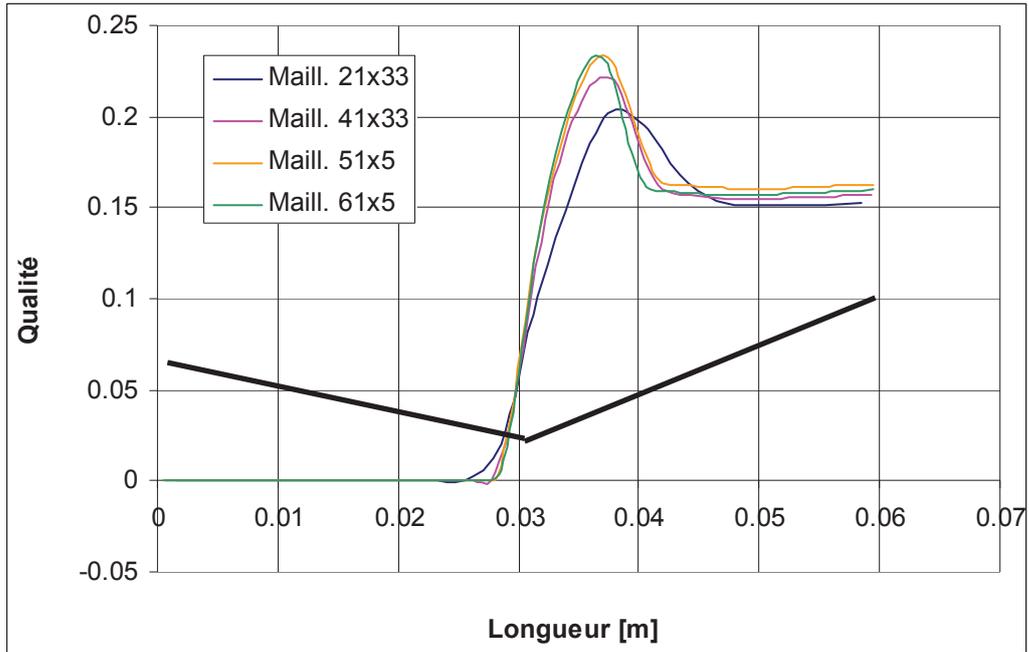


Figure II. 24 La qualité suivant la direction axiale. (LO_x , $\omega=4900$ rad/s, $T^0_{entrée}=139K$, $P^0_{entrée}=3.5$ MPa, $P^0_{sortie}=1.8$ MPa, $C_{jeu}=174$ μ m, $C_{entrée}=174+500$ μ m, $C_{sortie}=174+1000$ μ m)

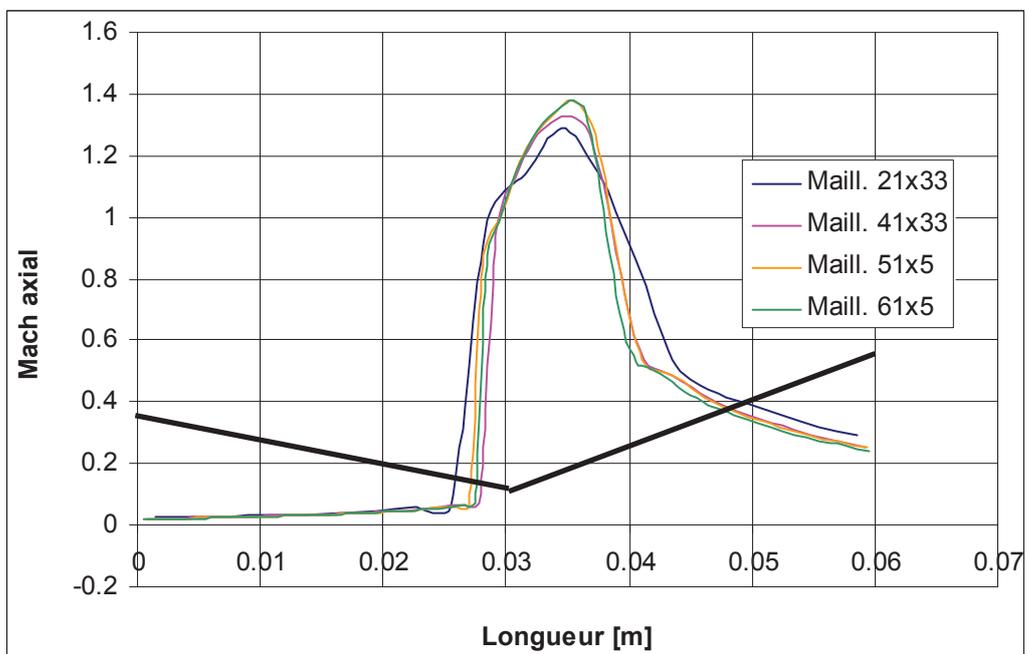


Figure II. 25 Le nombre de Mach axial suivant la longueur de la bague. (LO_x , $\omega=4900$ rad/s, $T^0_{entrée}=139K$, $P^0_{entrée}=3.5$ MPa, $P^0_{sortie}=1.8$ MPa, $C_{jeu}=174$ μ m, $C_{entrée}=174+500$ μ m, $C_{sortie}=174+1000$ μ m)

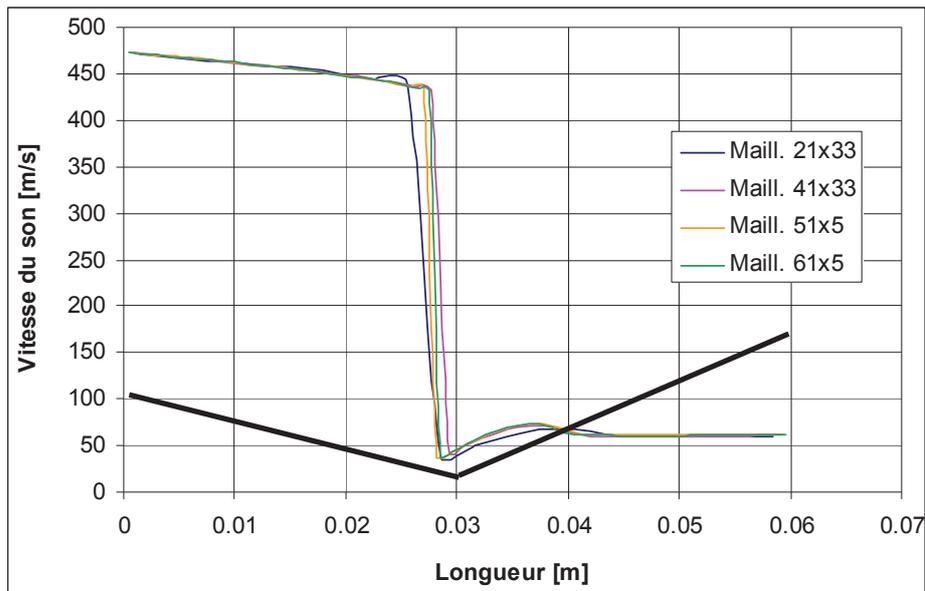


Figure II. 26 La vitesse du son suivant la longueur de la bague. (LOx , $\omega=4900$ rad/s, $T^0_{entr\acute{e}e}=139K$, $P^0_{entr\acute{e}e}=3.5$ MPa, $P^0_{sortie}=1.8$ MPa, $C_{jeu}=174$ μm , $C_{entr\acute{e}e}=174+500$ μm , $C_{sortie}=174+1000$ μm)

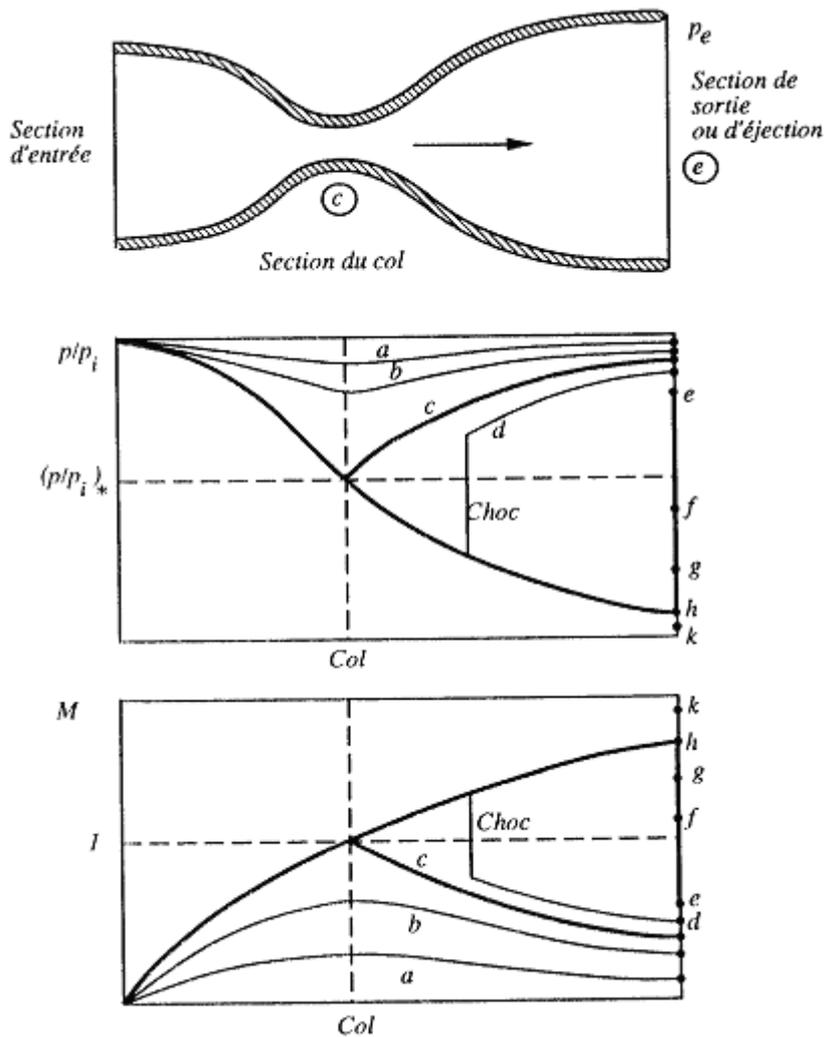


Figure II. 27 R\u00e9gimes d'\u00e9coulements dans une tuy\u00e8re convergente-divergente [65].

La Figure II. 23 montre une diminution de pression au-delà de la section du jeu minimal qui correspond à une accélération du fluide. Cette accélération est bien mise en évidence par la variation du nombre de Mach dans le joint présentée sur la Figure II. 25 due à la diminution de la vitesse du son (Figure II. 26). En effet le nombre de Mach présente d’abord une augmentation lente sous l’effet des forces de frottement et du rétrécissement du jeu radial. Le changement de phase qui a lieu juste avant la section minimale de passage (Figure II. 24) produit une augmentation rapide du nombre de Mach. Dans la section minimale de passage, le nombre de Mach atteint la valeur 1, et continue ensuite d’augmenter. Ceci montre que l’effet d’accélération engendré par l’augmentation du jeu est plus important que l’effet de freinage produit par les forces de frottement. Le nombre de Mach atteint même des valeurs supersoniques de 1.3 pour revenir ensuite assez rapidement à des valeurs subsoniques. Les variations de la pression et du nombre de Mach peuvent être expliquées à partir de l’écoulement d’un gaz parfait (sans frottement) dans un ajutage. Comme il est montré sur la Figure II. 27, une onde de choc apparaît dans la partie divergente de l’ajutage si la pression dans la section de sortie est comprise entre les courbes « c » (écoulement sonique dans le col mais subsonique dans la partie divergente) et « h » (écoulement sonique dans le col et supersonique dans toute la partie divergente). Le choc est caractérisé par une augmentation brutale de la pression et une chute brusque du nombre de Mach. Les mêmes effets sont observés sur la Figure II. 23 et sur la Figure II. 25 exceptant le fait que les variations de la pression et du nombre de Mach ne sont pas aussi brutales que pour l’écoulement d’un gaz parfait. Ce résultat est dû au fait que l’intégration des équations de l’écoulement moyen est effectuée sur un maillage qui n’est pas raffiné au voisinage des variations rapides et, de toute façon, la méthode numérique ne permet pas de capturer les chocs.

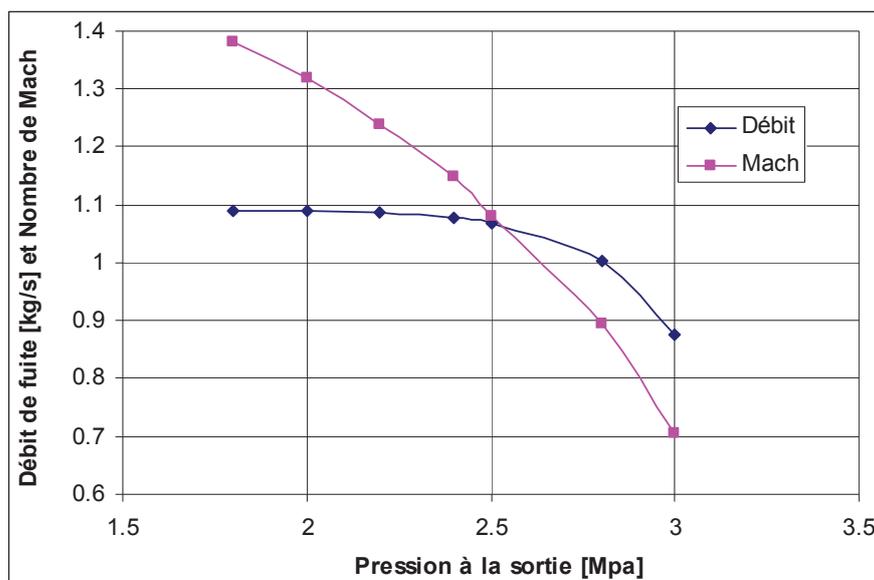


Figure II. 28 Variation du débit et du nombre de Mach avec la pression à la sortie

En final, le débit massique dans le joint est présenté dans la Figure II. 28 pour différentes pressions dans la section de sortie (toutes les autres conditions de fonctionnement étant les mêmes). On peut observer que l'écoulement est bloqué pour des pressions de sortie inférieures à 2.5 MPa pour lesquelles on rencontre $M \geq 1$ dans le joint annulaire. L'augmentation de la pression de sortie au-delà de 2.5 MPa conduit à une diminution du débit.

II.6. Analyse du régime de fonctionnement dynamique (vibratoire). Hypothèse des petites perturbations

L'analyse du régime de fonctionnement dynamique du joint annulaire est un problème d'interaction fluide – structure qui, dans le cas le plus général, fait intervenir des forces hydrodynamiques/aérodynamiques, élastiques (dues à l'élasticité du rotor et de la structure) et d'inertie (dues à la masse). Avec les moyens de calcul actuels et pour des problèmes pratiques, il est presque impossible d'analyser ces trois types de forces sans introduire des hypothèses simplificatrices.

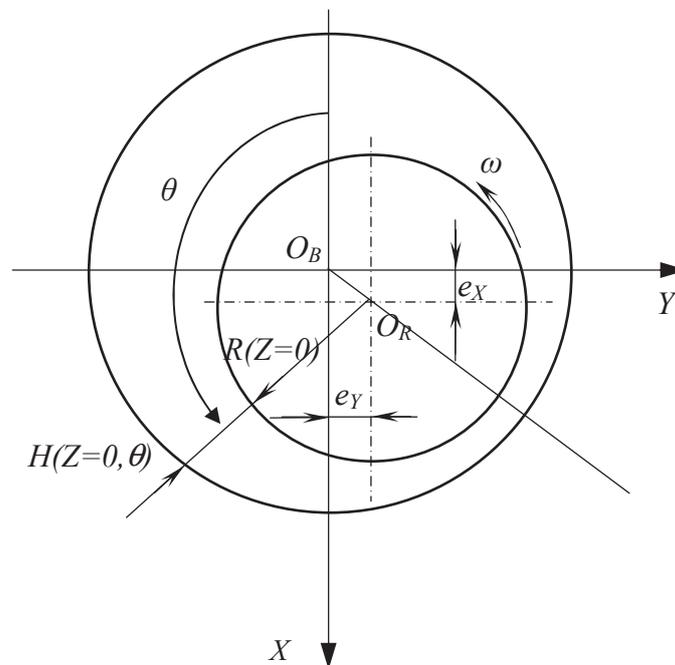


Figure II. 29 Système de coordonnées.

La première hypothèse est de considérer les vibrations du rotor comme étant un mouvement périodique autour de la position d'équilibre. La deuxième hypothèse est de supposer que l'amplitude du mouvement périodique représente une faible perturbation par rapport au jeu.

La position de l'arbre dans un système fixe $OXYZ$ est donnée par deux déplacements de son centre, e_X, e_Y .⁵ Dans un système de coordonnées cartésiennes, l'épaisseur du film s'écrit :

$$H(Z, \theta) = C_{\text{jeu}}(Z) - e_X \cos \theta - e_Y \sin \theta \quad (\text{II. 69})$$

En régime statique e_X, e_Y sont constants. En régime dynamique linéaire $e_X(t)$ et $e_Y(t)$ décrivent un mouvement de faible amplitude de pulsation Ω autour de la position statique. Cette hypothèse permet de décrire le régime dynamique comme une perturbation ajoutée au régime statique. L'épaisseur du film mince s'écrit alors :

$$H(Z, \theta, t) = H_0(Z, \theta) + \Delta H_1(Z, \theta, t) \quad (\text{II. 70})$$

où $\Delta \ll 1$ joue à la fois le rôle d'un opérateur et désigne une petite perturbation.⁶

$$\Delta H_1(Z, \theta, t) = \Delta \bar{H}_1(Z, \theta) \exp(-j\Omega t), \quad j = \sqrt{-1} \quad (\text{II. 71})$$

$$\Delta \bar{H}_1(Z, \theta) = -e_{X1} \cos \theta - e_{Y1} \sin \theta \quad (\text{II. 72})$$

Les variables de l'écoulement et les propriétés du fluide seront décomposés de la même manière :

$$\Xi(Z, \theta, t) = \Xi_0(Z, \theta, t) + \Delta \tilde{\Xi}_1(Z, \theta, t) \quad (\text{II. 73})$$

$$\tilde{\Xi}_1(Z, \theta, t) = \Re[\Xi_1(Z, \theta) \exp(-j\Omega t)] \quad (\text{II. 74})$$

$$\Xi_1(Z, \theta) = \Xi_c(Z, \theta) + j\Xi_s(Z, \theta) \quad (\text{II. 75})$$

La décomposition en petites perturbations des variables et des propriétés du fluide est injectée dans les équations de l'écoulement moyen mises sous la forme des équations générales de transport (II. 37). Deux systèmes d'équations sont obtenus après la séparation des termes à l'ordre zéro et à l'ordre un. Le système à l'ordre zéro correspond au fonctionnement stationnaire du joint et a été

⁵ Deux rotations de l'axe du rotor peuvent être ajoutées, δ_X, δ_Y

⁶ H_0, H_1 sont du même ordre de grandeur.

présenté au paragraphe II.3. Le système à l'ordre un représente le modèle de l'écoulement perturbé. Sous la forme des équations de transport, le modèle s'écrit :

$$\nabla(\vec{J}_0 \Xi_1 + \vec{J}_1 \Xi_0) = S_{\Xi_1} + j\Omega(\rho_1 H_0 \Xi_0 + \rho_0 H_1 \Xi_0 + \rho_0 H_0 \Xi_1) \quad (\text{II. 76})$$

où les termes sources sont présentés dans le tableau suivant.

Tableau II. 3 Termes sources des équations de l'écoulement moyen à l'ordre un

Ξ_1	S_{Ξ_1}
0 (éq. cont.)	0
W_1	$-H_0 \frac{\partial P_1}{\partial z} - H_1 \frac{\partial P_0}{\partial z} + \tau_{sz1} + \tau_{rz1}$
U_1	$-H_0 \frac{\partial P_1}{R \partial \theta} - H_1 \frac{\partial P_0}{R \partial \theta} + \tau_{s\theta1} + \tau_{r\theta1}$
i_1	$\{q_{s1}'' - q_{r1}'' + H_0(-j\omega P_1 + \vec{V}_1 \cdot \nabla P_0 + \vec{V}_0 \cdot \nabla P_1) + H_1 \vec{V}_0 \cdot \nabla P_0 + R\omega \tau_{r\theta1}^H - W_1(\tau_{sz0} + \tau_{rz0}) - W_0(\tau_{sz1} + \tau_{rz1}) - U_1(\tau_{s\theta0} + \tau_{r\theta0}) - U_0(\tau_{s\theta1} + \tau_{r\theta1})\}$
i_{tl}	$q_{s1}'' - q_{r1}'' + R\omega \tau_{r\theta1}^H$

Pour des fluides cryogéniques, les valeurs à l'ordre un des propriétés sont obtenues numériquement à l'aide de différences finies centrées.

$$\Xi_1 = \left(\frac{\partial \Xi}{\partial P}\right)_{i_0} P_1 + \left(\frac{\partial \Xi}{\partial i}\right)_{P_0} i_1 \quad (\text{II. 77})$$

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial i}\right)_{P_0} = \frac{\Xi_0(P_0, i_0 + \delta i_0) - \Xi_0(P_0, i_0 - \delta i_0)}{2\delta i_0} \quad (\text{II. 78})$$

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial P}\right)_{i_0} = \frac{\Xi_0(P_0 + \delta P_0, i_0) - \Xi_0(P_0 - \delta P_0, i_0)}{2\delta P_0} \quad (\text{II. 79})$$

Des discontinuités artificielles peuvent être introduites suite à l'utilisation des différences finies. En effet, les perturbations finies δP_0 et δi_0 peuvent déboucher sur des changements de phase qui ne caractérisent pas l'écoulement stationnaire⁷. Par exemple, si pour l'écoulement stationnaire le fluide est monophasique (gaz ou liquide), suite à une perturbation finie δP_0 et δi_0 le fluide doit rester

⁷ Il est nécessaire que les perturbations des propriétés du fluide soient estimées pour le même régime que l'écoulement stationnaire.

monophasique. La même règle s'applique pour l'écoulement diphasique. Afin de respecter ces contraintes qui évitent l'introduction artificielle de discontinuités dans la solution numérique les perturbations sont définies à l'aide des différences finies excentrées (en amont ou en avant) de la manière suivante :

Tableau II. 4

Qualité	Etat du fluide	Perturbation
$\lambda_q=0$	Liquide	$+\delta P_0, -\delta I_0, -\delta i_0$
$\lambda_q=1$	Vapeur	$+\delta I_0, +\delta i_0, -\delta P_0$
$0<\lambda_q\leq 0.5$	Diphasique	$+\delta I_0, +\delta i_0, -\delta P_0$
$0.5<\lambda_q<1$	Diphasique	$+\delta P_0, -\delta I_0, -\delta i_0$

où δ est de l'ordre de 0.1%.

Par exemple, une variable à l'ordre 1 dans le domaine liquide s'écrit:

$$\Xi_1 = \left(\frac{\partial \Xi}{\partial P} \right)_{i_0} P_1 + \left(\frac{\partial \Xi}{\partial i} \right)_{P_0} i_1 \quad (\text{II. 80})$$

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial i} \right)_{P_0} = \frac{\Xi_0(P_0, i_0) - \Xi_0(P_0, i_0 - \delta i_0)}{\delta i_0} \quad (\text{II. 81})$$

$$\left(\frac{\partial \Xi}{\partial P} \right)_{i_0} = \frac{\Xi_0(P_0 + \delta P_0, i_0) - \Xi_0(P_0, i_0)}{\delta P_0} \quad (\text{II. 82})$$

La résolution du système d'équation à l'ordre un est identique à celle du système à l'ordre zéro présenté au paragraphe II.3.

Pour l'estimation des forces et des moments transversaux il est généralement accepté que la contribution des effets visqueux est négligeable par rapport à la pression. Il résulte donc:

$$F_{x1} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P_1(z, \theta) \cos \theta R d\theta dz, \quad F_{y1} = - \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} P_1(z, \theta) \sin \theta R d\theta dz \quad (\text{II. 83})$$

Ces forces sont conventionnellement décrites par des coefficients dynamiques de raideur, de masse et d'amortissement.

$$-\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{x1} \\ e_{y1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e}_{x1} \\ \dot{e}_{y1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & M_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{e}_{x1} \\ \ddot{e}_{y1} \end{Bmatrix} \quad (\text{II. 84})$$

Les coefficients sont identifiés en interprétant les impédances complexes comme des polynômes d'ordre deux en Ω .

$$-Z_{\alpha\beta} = \frac{F_{x1}}{e_{\beta 1}} = K_{\alpha\beta} - \Omega^2 M_{\alpha\beta} + j\Omega C_{\alpha\beta} \quad (\text{II. 85})$$

où $\alpha, \beta \in \{x, y\}$. Du point de vue pratique, les forces et les moments sont calculés pour plusieurs fréquences d'excitation (par exemple, $\Omega \in \{0, \pm\omega\}$) et l'identification des coefficients dynamiques est faite à l'aide d'une simple procédure de moindres carrés.

II.6.1. Resultats. Joint annulaire fonctionnant en LH2

Un joint annulaire lisse fonctionnant avec hydrogène liquide a les caractéristiques suivantes : $R=37$ mm, $L=10$ mm, $C_{\text{jeu}}=50$ μm . Ses conditions de fonctionnement sont : $P^0_{\text{entrée}}=27$ bars, $P^0_{\text{sortie}}=21$ bars, $T^0_{\text{entrée}}=37$ K, $\omega=36500$ tr/min, $\zeta_{\text{entrée}}=0.1$ et $\zeta_{\text{sortie}}=1$. Les résultats sont obtenus avec un maillage de 15x71 cellules à pas constants.

Les Figure II. 30-Figure II. 34 présentent les résultats du calcul statique pour un fonctionnement centré du joint annulaire. Comme le montrent les variations de la pression et du nombre de Mach, l'écoulement dans le joint centré correspond à un régime incompressible, le fluide étant en état liquide.

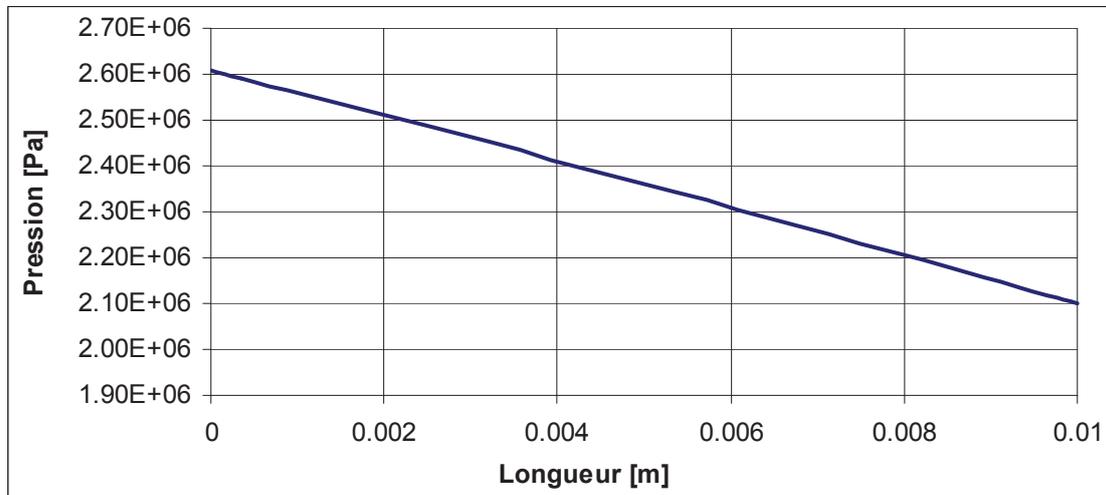


Figure II. 30 Pression suivant la longueur du joint.

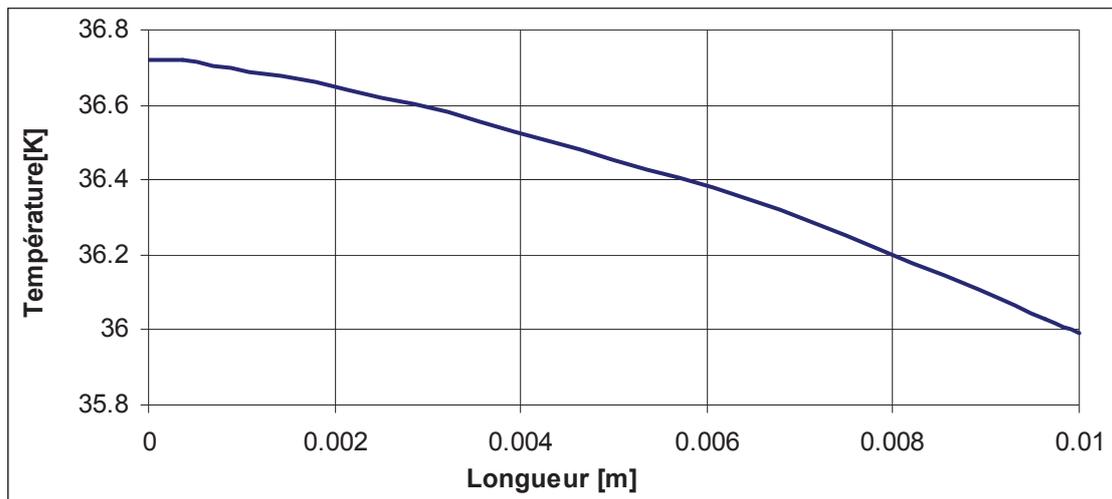


Figure II. 31 Température suivant la longueur du joint.

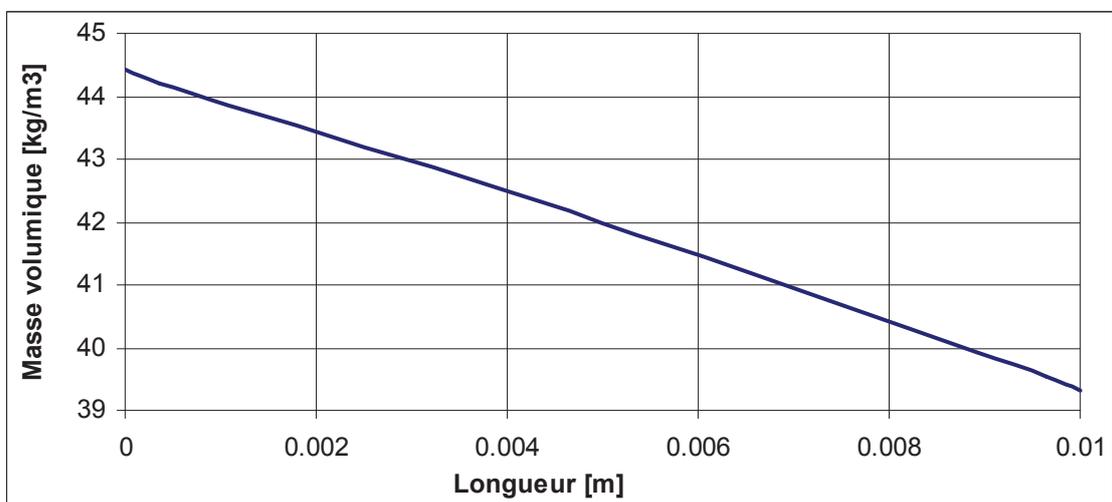


Figure II. 32 Masse volumique suivant la longueur du joint.

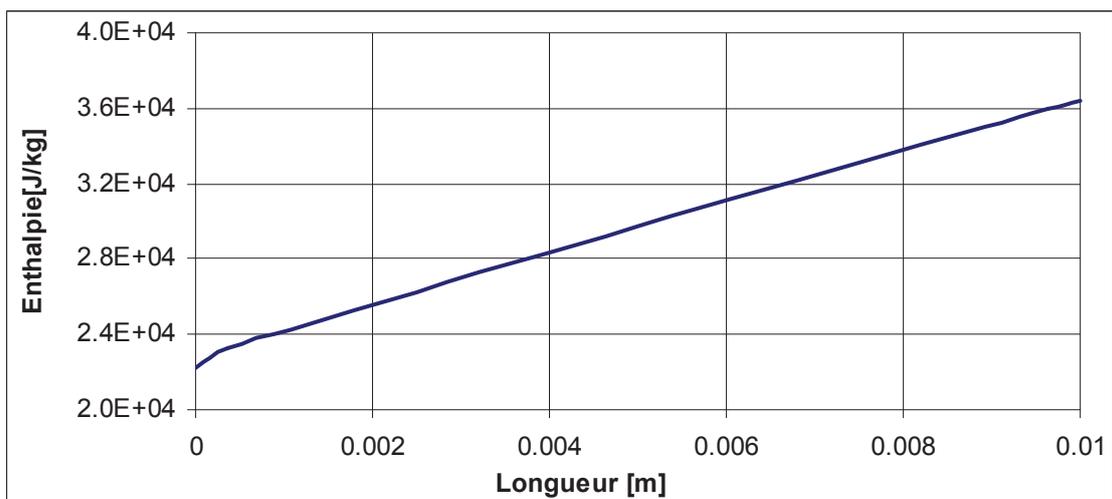


Figure II. 33 Enthalpie suivant la longueur du joint.

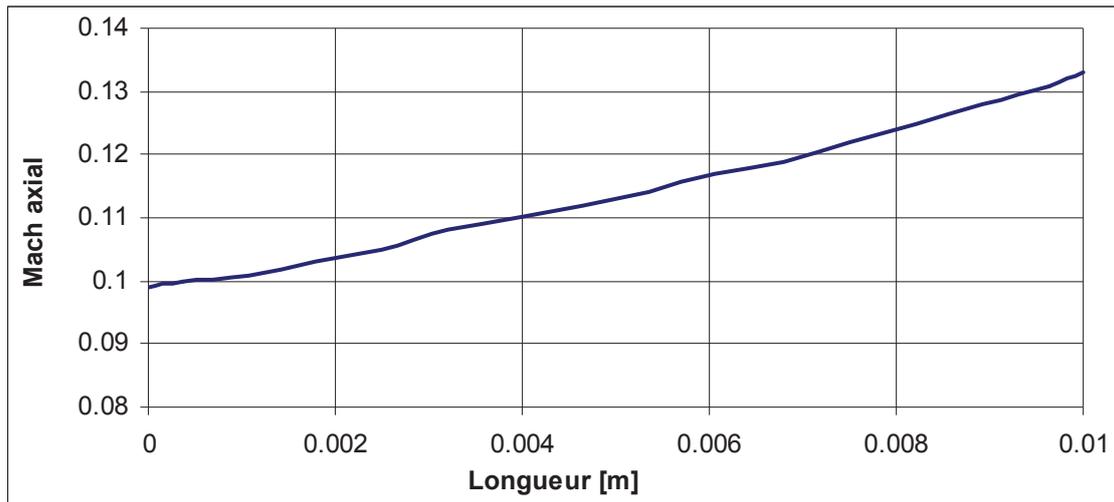


Figure II. 34 Mach axial suivant la longueur du joint.

Les coefficients dynamiques du joint en fonction de l'excentrement suivant l'axe x sont présentés sur les Figure II. 35-Figure II. 38. Pour des excentricités très élevées, supérieures à 80%, les coefficients dynamiques ont une variation rapide. Les résultats statiques obtenus pour une excentricité de 90% et présentés sur les Figure II. 39-Figure II. 43 permettent d'expliquer cette variation rapide.

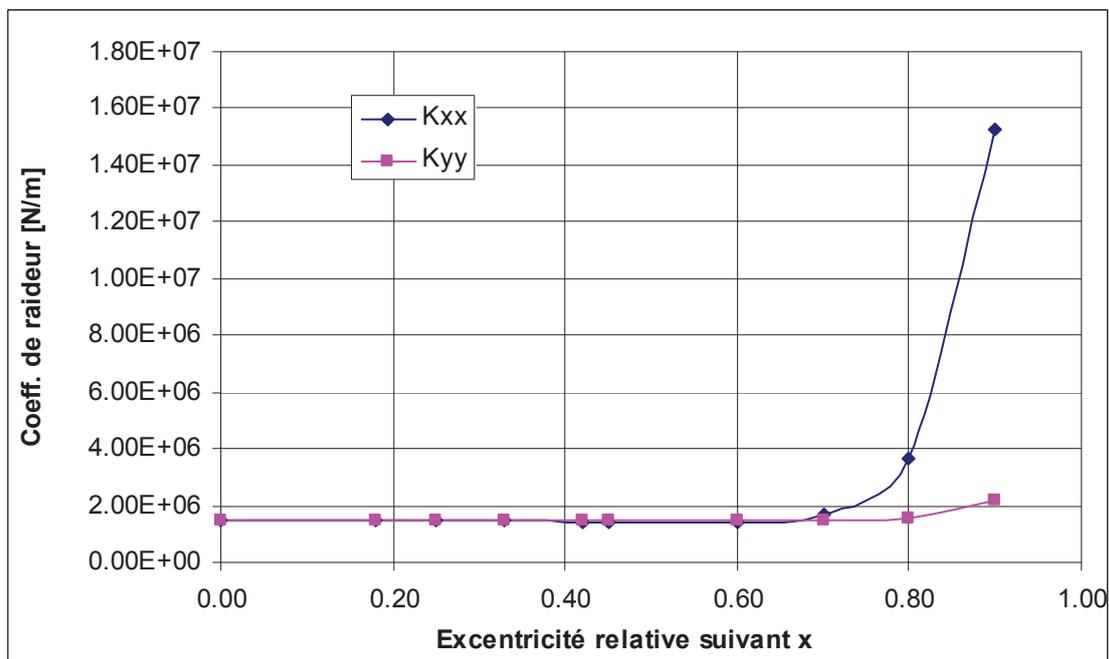


Figure II. 35 Coefficients de raideur directe.

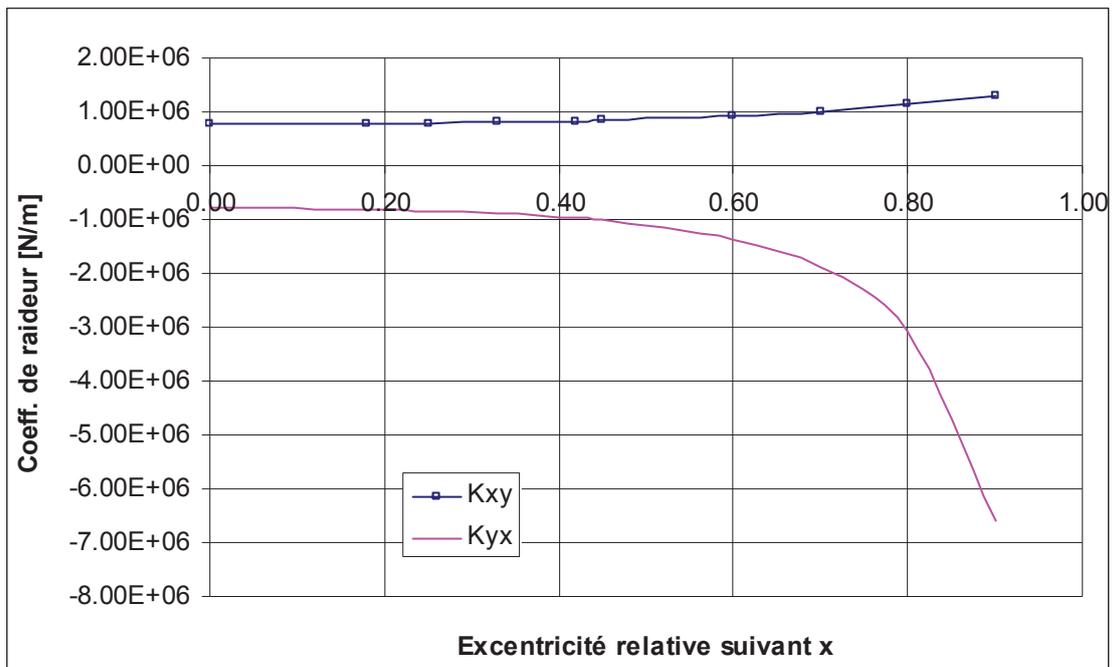


Figure II. 36 Coefficients de raideur croisée.

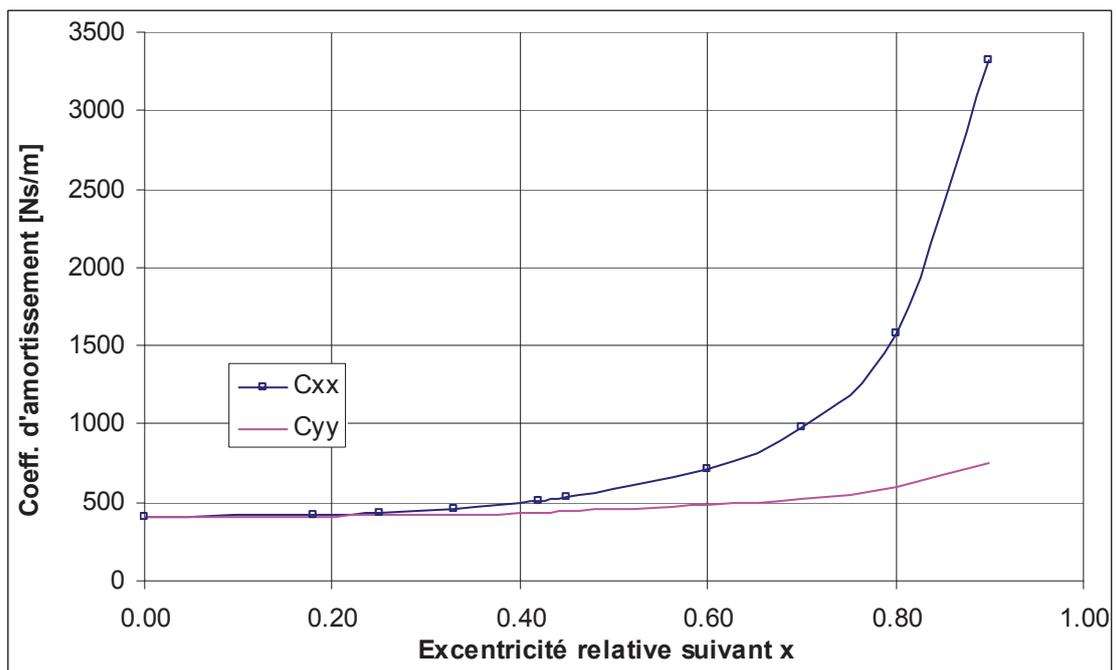


Figure II. 37 Coefficients d'amortissement direct.

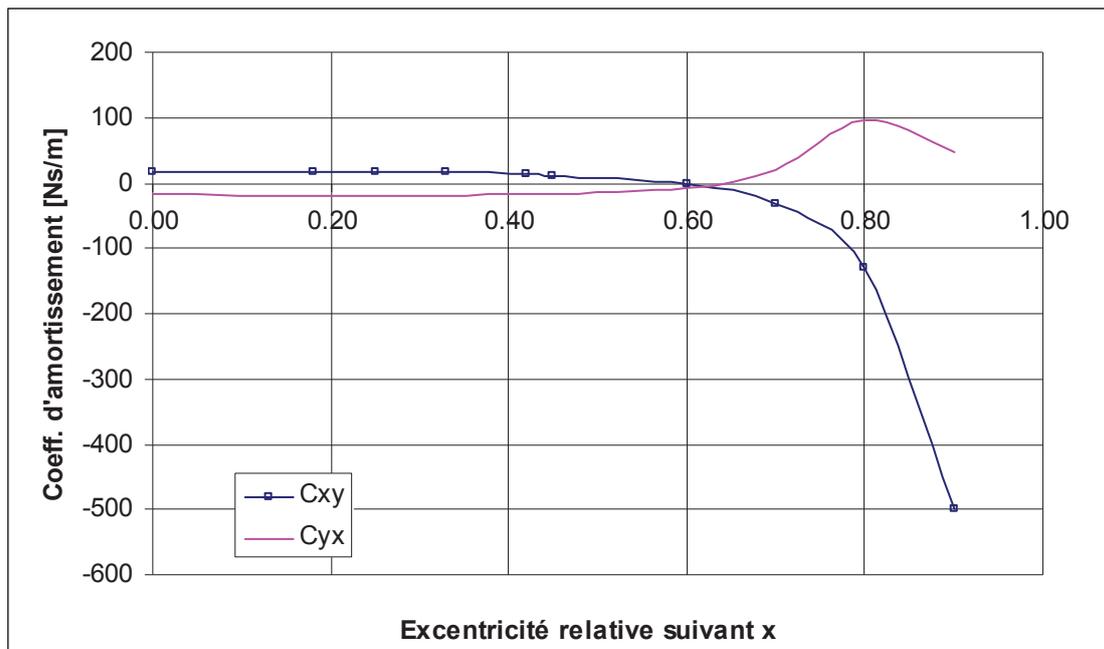


Figure II. 38 Coefficients d'amortissement croisé.

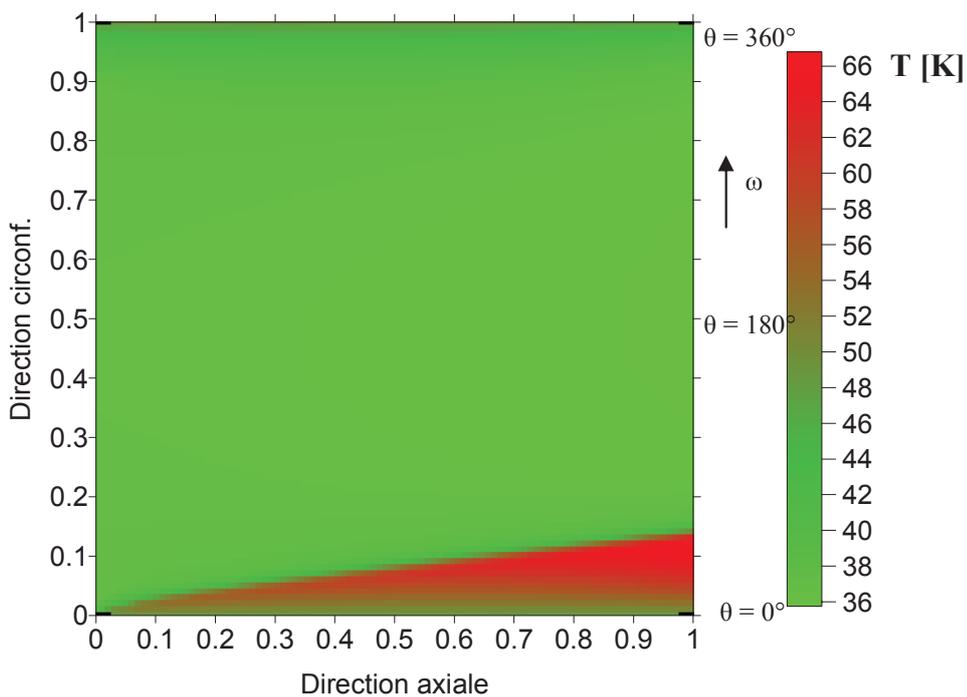


Figure II. 39 Température dans le film mince à l'excentricité relative de 0.9.

Ainsi la Figure II. 39 présente la variation de la température dans le joint. L'on peut observer une augmentation de température au voisinage de la zone où l'épaisseur du film est minimale $x = R\theta = 0$ qui progresse le long du joint. La Figure II. 40 présente la variation de la température

dans une section transversale située à mi-longueur du joint. L'augmentation de température a lieu au voisinage de la section où l'épaisseur du film est minimale mais le pic est décalé dans le sens de la vitesse de rotation. La pression et la densité dans le joint sont présentées sur la Figure II. 41 (a,b). A l'échauffement correspond une augmentation de pression. Cette forte augmentation de pression est responsable des variations rapides des coefficients dynamiques pour des excentricités supérieures à 80%.

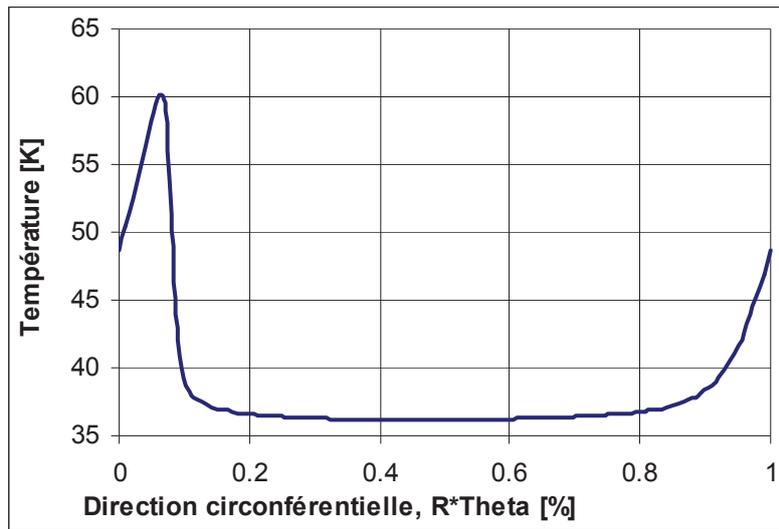


Figure II. 40 Evolution circconférentielle de la température à mi-longueur du joint.

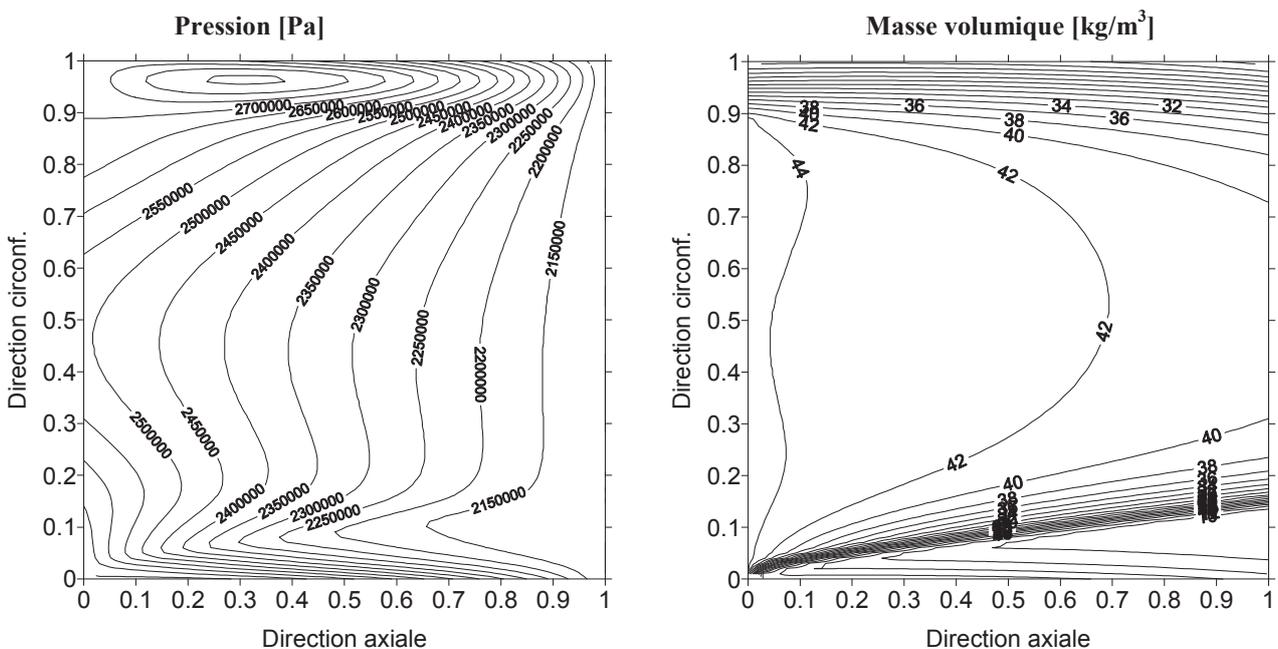


Figure II. 41 (a,b) Nappe de pression et de densité à l'excentricité relative de 0.9.

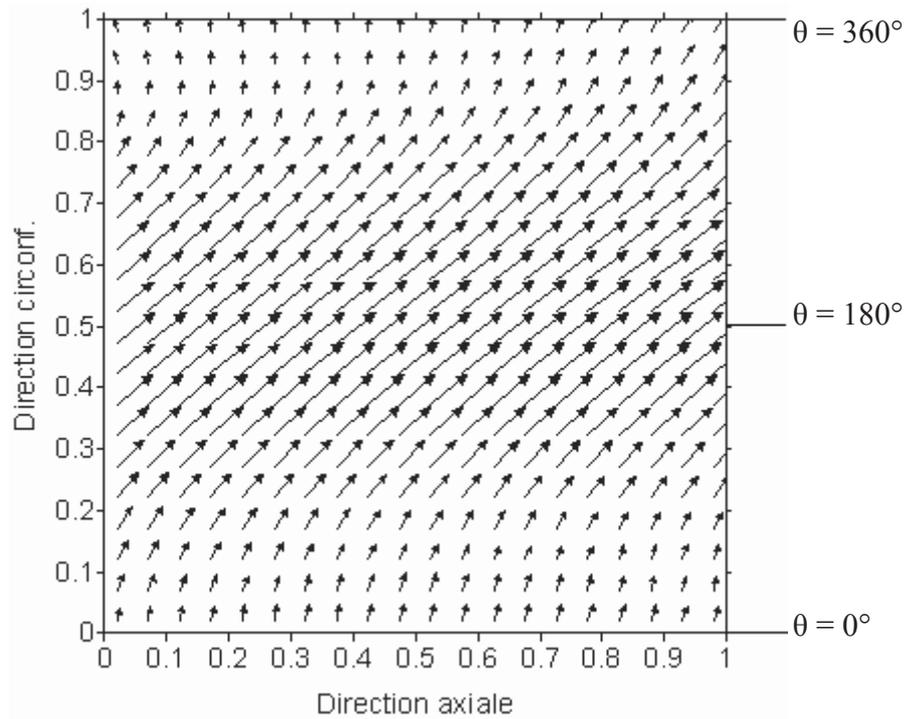


Figure II. 42 Vecteurs vitesse du fluide à l'excentricité relative de 0.9.

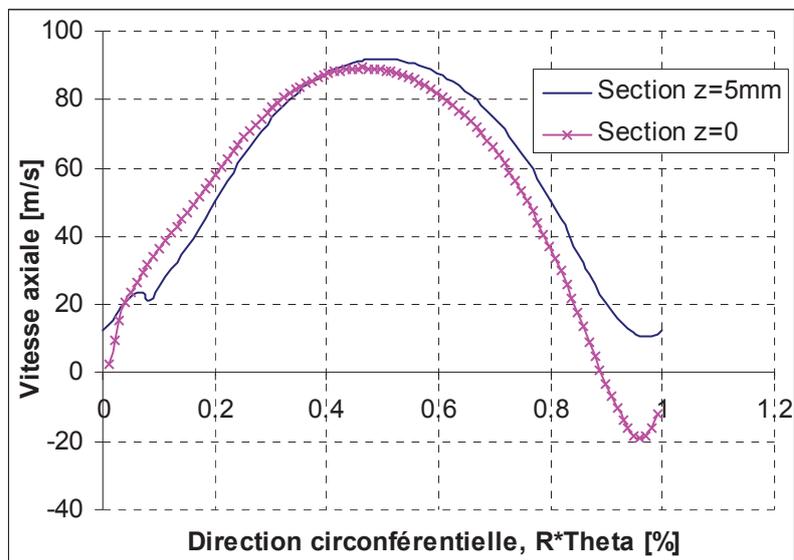


Figure II. 43 Evolution de la vitesse axiale à l'entrée et à mi longueur du joint à l'excentricité relative de 0.9.

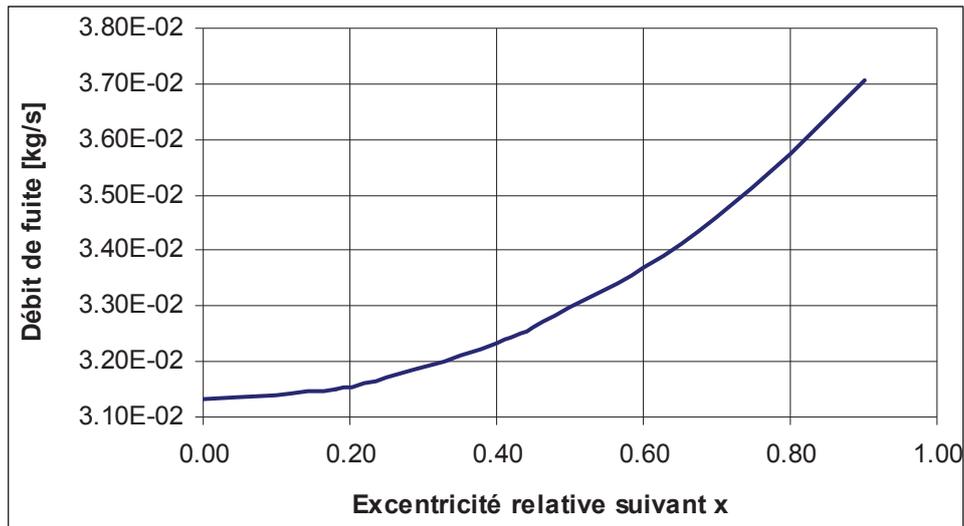


Figure II. 44 Débit massique par rapport à l'excentricité relative.

L'effet de l'augmentation rapide et localisée de la pression est visible aussi sur les Figure II. 42 et Figure II. 43. Ainsi la Figure II. 42 présente les vecteurs de vitesse dans le joint. On peut observer que la vitesse est beaucoup plus élevée dans la section où le jeu est maximal (autour de $\theta = 180^\circ$), étant proche du zéro dans la section où le jeu est minimal (autour de $\theta = 0^\circ$). La Figure II. 43 présente la variation de la vitesse axiale dans la section d'entrée ($z=0$) et à mi longueur du joint ($z=5\text{mm}$). Les valeurs négatives de la vitesse axiale montrent que dans la section d'entrée du joint le fluide peut être expulsé du joint vers la chambre amont. Une recirculation du fluide a lieu donc dans la section d'entrée autour de la section d'épaisseur minimale du film.

Finalement la Figure II. 44 présente la variation du débit massique avec l'excentricité relative. Le débit massique augmente constamment avec l'augmentation de l'excentricité ne montrant aucun signe de blocage.

Remarque :

Ce cas de calcul a permis de vérifier le traitement numérique correct de l'équation de l'énergie (II.15) écrite pour l'enthalpie totale. Ainsi le Tableau II. 5 présente le couple sur l'arbre déterminé soit en intégrant les contraintes sur le rotor:

$$C_{z1} = \tau_{r\theta} 2\pi RL = \frac{1}{2} \rho f_R V_{rot} (R\omega - U) 2\pi RL \quad (\text{II. 86})$$

soit à partir du bilan de l'enthalpie totale entre les sections d'entrée et de sortie du joint :

$$C_{z2} = \frac{\dot{m}\Delta i_t}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left[\int_{\text{entrée}} i_t d\dot{m} - \int_{\text{sortie}} i_t d\dot{m} \right] = \frac{1}{\omega} \left[\int_0^{2\pi} (\rho W H i_t)_{\text{entrée}} R d\theta - \int_0^{2\pi} (\rho W H i_t)_{\text{sortie}} R d\theta \right] \quad (\text{II. 87})$$

Tableau II. 5 Les valeurs du couple sur l'arbre.

Excentricité [%]	0	0.2	0.4	0.6	0.8
C_{z1} [Nm]	0.11653	0.116505	0.11646	0.116273	0.113958
C_{z2} [Nm]	0.116441	0.11652	0.11653	0.116425	0.114206

Les deux couples sont identiques, les erreurs obtenues étant acceptables compte tenu des approximations numériques introduites à des fortes excentricités.

II.6.2. Variation des coefficients dynamiques avec la fréquence d'excitation

L'analyse des coefficients dynamiques doit être complétée avec un résultat obtenu pour le joint annulaire fonctionnant avec oxygène liquide LOx en régime de blocage sonore diphasique et présenté au paragraphe II.5.1. Le calcul des coefficients dynamiques suppose plusieurs solutions numériques du système des équations perturbées pour des fréquences d'excitation différentes. La démarche d'identification avec la relation (II. 85) est basée sur une simple procédure de moindres carrés appliquée aux impédances complexes calculées pour quelques fréquences d'excitations (par exemple $\Omega \in \{0, \pm\omega\}$). Cette démarche est inspirée de l'analyse des joints annulaires fonctionnant avec un fluide incompressible. Un effet non linéaire propre à la lubrification à gaz est le fait que les coefficients dynamiques dépendent de la fréquence d'excitation⁸.

Pour les joints annulaires lubrifiés avec des fluides cryogéniques compressibles cet effet n'a pas été encore mis clairement en évidence.

Néanmoins, le joint annulaire fonctionnant avec oxygène liquide et avec blocage sonore diphasique permet de mettre en évidence certaines non linéarités dues à la fréquence d'excitation. Les impédances Z_{xx} et Z_{yx} calculées pour une excentricité statique nulle et pour plusieurs pulsations d'excitation comprises entre 0 et 3000 rad/s sont présentées sur les Figure II. 45-Figure II. 48. Si les coefficients dynamiques de raideur, amortissement et masse ajoutée ne dépendent pas de la fréquence d'excitation, les parties réelle et imaginaire des impédances permettent une identification rapide avec la relation (II. 85).

⁸ Pour un palier aérodynamique ceci a lieu si le paramètre $\sigma = 12\mu\Omega R^2 / P_{atm} C^2$ décrivant la fréquence adimensionnée est supérieur à l'unité.

$$\Re(-Z_{\alpha\beta}) = K_{\alpha\beta} - \Omega^2 M_{\alpha\beta}, \quad \Im(-Z_{\alpha\beta}) = \Omega C_{\alpha\beta}, \quad \alpha\beta = X, Y \quad (\text{II. 88})$$

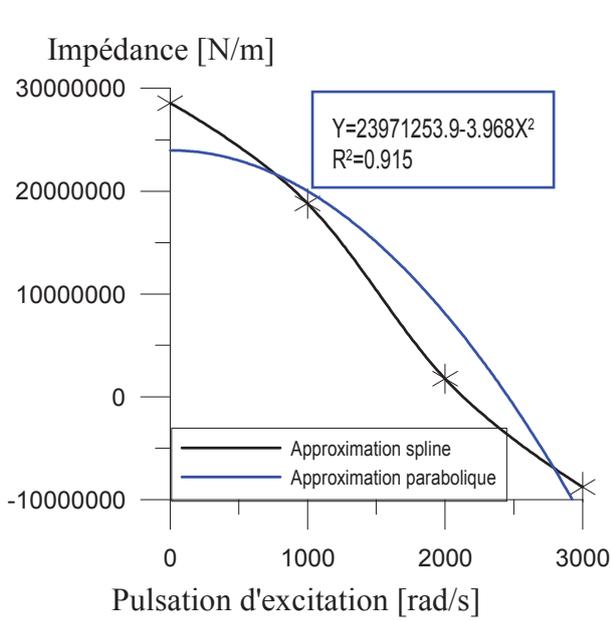


Figure II. 45 Partie réelle de l'impédance Z_{xx} .

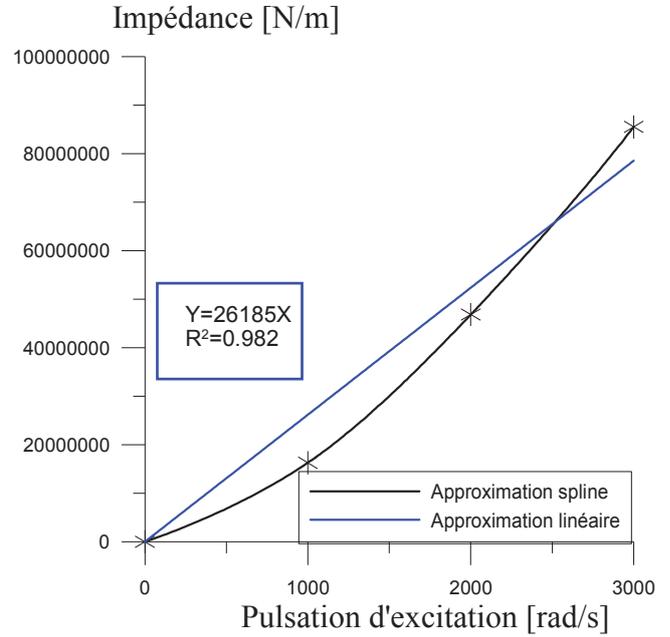


Figure II. 46 Partie imaginaire de l'impédance Z_{xx} .

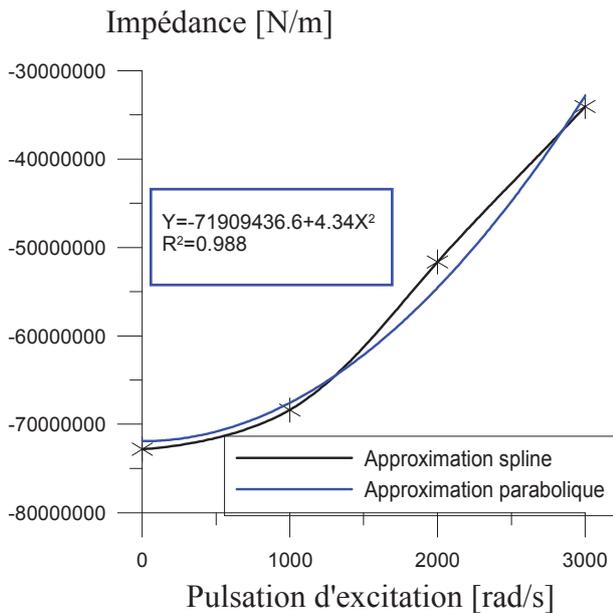


Figure II. 47 Partie réelle de l'impédance Z_{yx} .

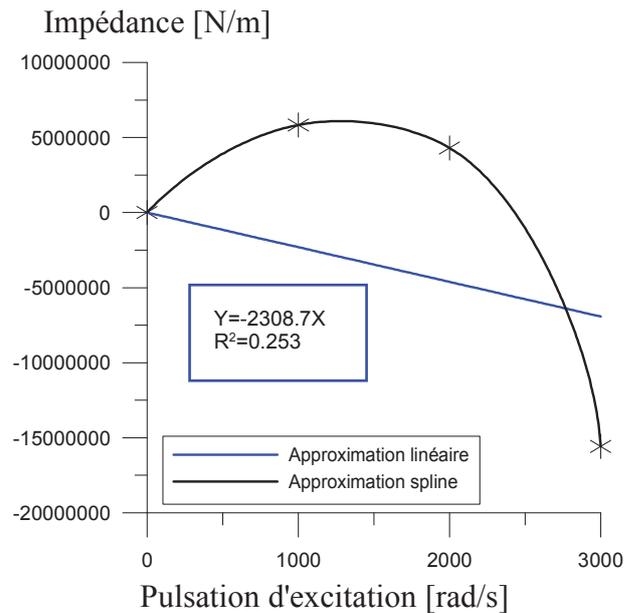


Figure II. 48 Partie imaginaire de l'impédance Z_{yx} .

Pour que l'identification soit correcte il est donc nécessaire que $\Re(-Z_{\alpha\beta})$ ait une variation parabolique et $\Im(-Z_{\alpha\beta})$ une variation linéaire avec Ω . Les courbes tracées sur les Figure II. 45- Figure II. 48 représentent les régressions d'ordre deux et respectivement un pour $\Re(-Z_{\alpha\beta})$ et $\Im(-Z_{\alpha\beta})$ ainsi qu'une interpolation par fonctions spline. La distance entre les deux courbes est une mesure de l'erreur faite en considérant les coefficients dynamiques du joint annulaire comme étant indépendants de la pulsation d'excitation.

CHAPITRE III :

STABILITE ET COMPORTEMENT DYNAMIQUE

La Figure III. 1 reprend le schéma de principe et les forces du joint d'étanchéité à bague flottante présenté sur la Figure I.5. Pour des conditions normales de fonctionnement, la pression amont P_e^0 est plus grande que la pression aval P_s^0 . Cette différence de pression engendre un écoulement de fuite dans l'étanchéité principale et un torseur sur la bague. La composante axiale du torseur appuie la bague contre le stator. La pression de contact ainsi engendrée entre la bague et le stator va fermer l'étanchéité secondaire. Le débit de fuite dans l'étanchéité secondaire est normalement négligeable par rapport au débit dans l'étanchéité principale. La bague est souvent prévue avec un ergot ou un pion antirotation qui limite le mouvement de la surface mobile suivant le fait que le joint est plan ou circulaire.

Le rotor a généralement des vibrations synchrones (dues aux balourds résiduels) d'amplitude supérieure au jeu radial dans l'étanchéité principale.

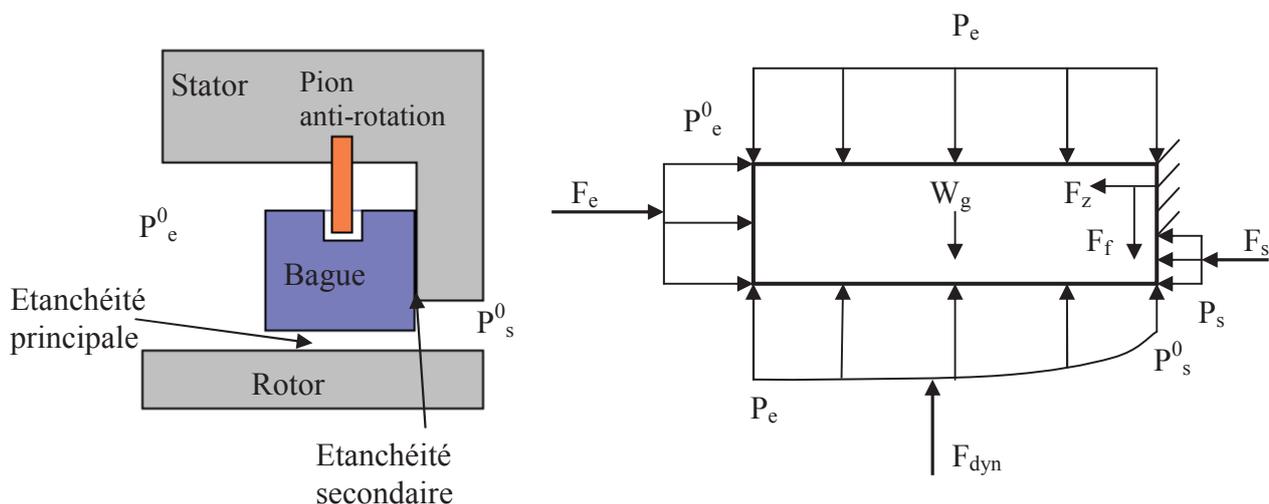


Figure III. 1 Schéma de principe d'un joint d'étanchéité dynamique à bague flottante et les forces exercées sur la bague flottante.

La bague flottante doit alors s'adapter à ces déplacements. La stabilité dynamique de la bague est donc associée à sa capacité à suivre sans contact les vibrations du rotor. Toutefois l'analyse du

comportement dynamique de la bague n'a de sens que si sa stabilité statique est vérifiée. La stabilité statique de la bague décrite par sa capacité à occuper une position d'équilibre en absence d'une perturbation dynamique est abordée dans le paragraphe suivant.

III.1. Stabilité statique de la bague

La bague peut occuper une position d'équilibre statique seulement si sa raideur directe est positive. La raideur statique est une mesure de la résistance que la bague oppose à une perturbation qui peut être soit une translation soit un basculement.

Pour une perturbation de déplacement radial (le seul que la bague flottante peut avoir) la bague oppose une raideur statique directe K_{xx} provenant essentiellement de l'effet de Lomakin. Les forces mises en jeu par cet effet pour un écoulement incompressible sont présentées sur la Figure III. 2. La vitesse du fluide du côté de l'épaisseur du film élevée est plus grande que du côté où le jeu est faible. Suite à l'effet de Bernoulli dans la section d'entrée, la pression a une variation contraire à celle de la vitesse axiale : la pression du côté de la faible épaisseur du film est plus importante que du côté où l'épaisseur du film est élevée. Cette différence de pression engendre une force qui a tendance à recentrer la bague par rapport au rotor.

Pour un fluide compressible la situation est similaire si le nombre de Mach est subsonique partout dans le joint annulaire et dans la section de sortie (Figure III. 3a). Comme illustré dans le Chapitre II, il existe des situations où $M_{sortie}=1$ (Figure III. 3b). Dans ce cas l'accélération du fluide dans la section où l'épaisseur du film est minimale est plus importante que dans la section où l'épaisseur

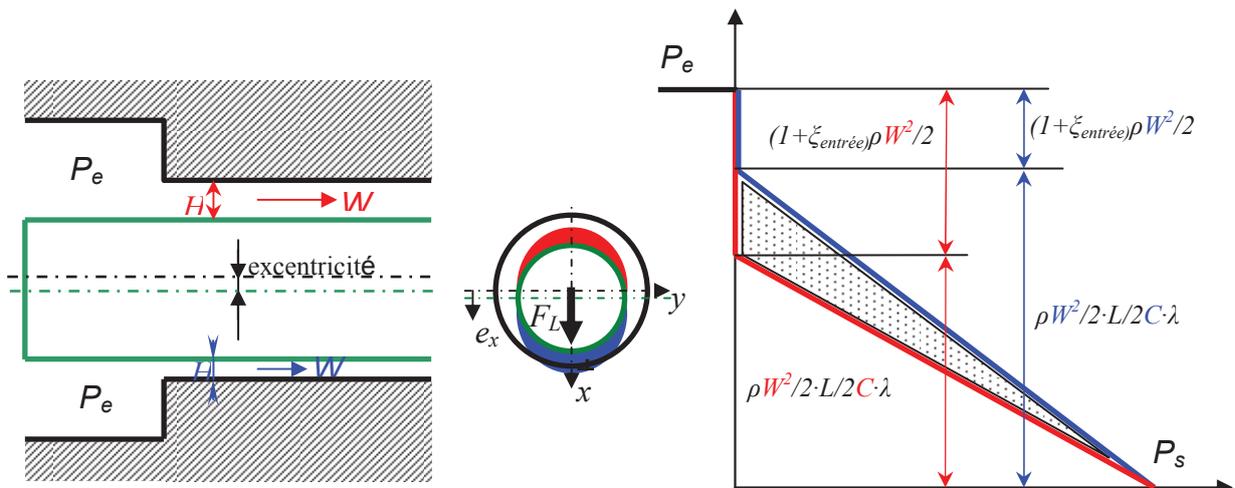
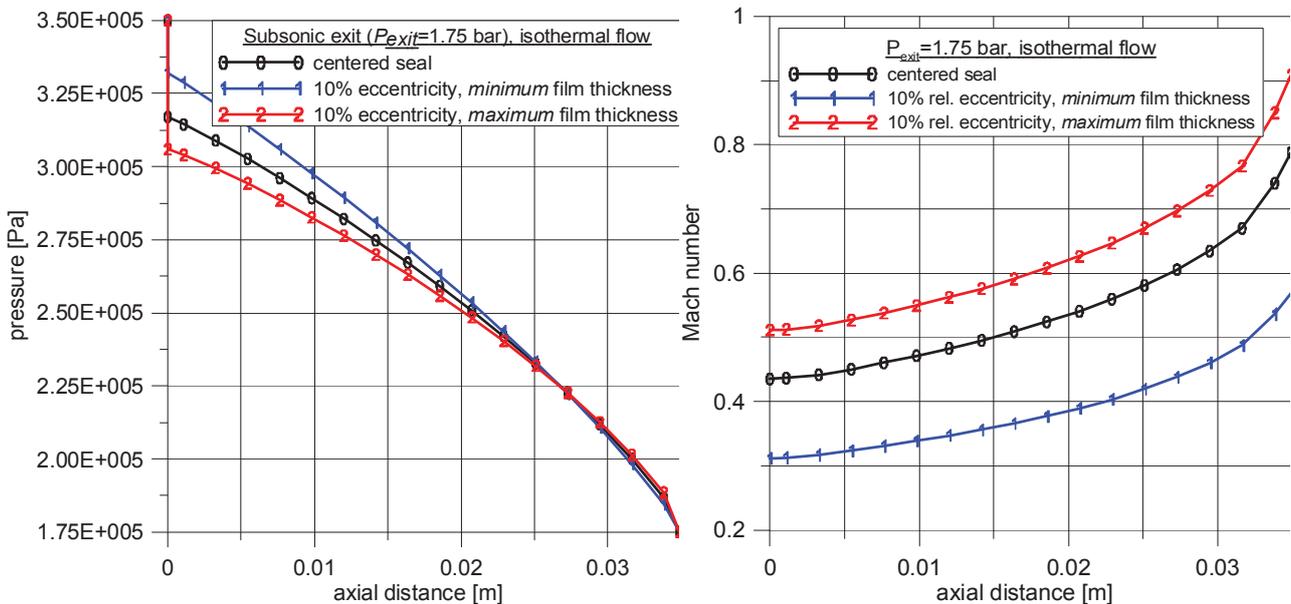
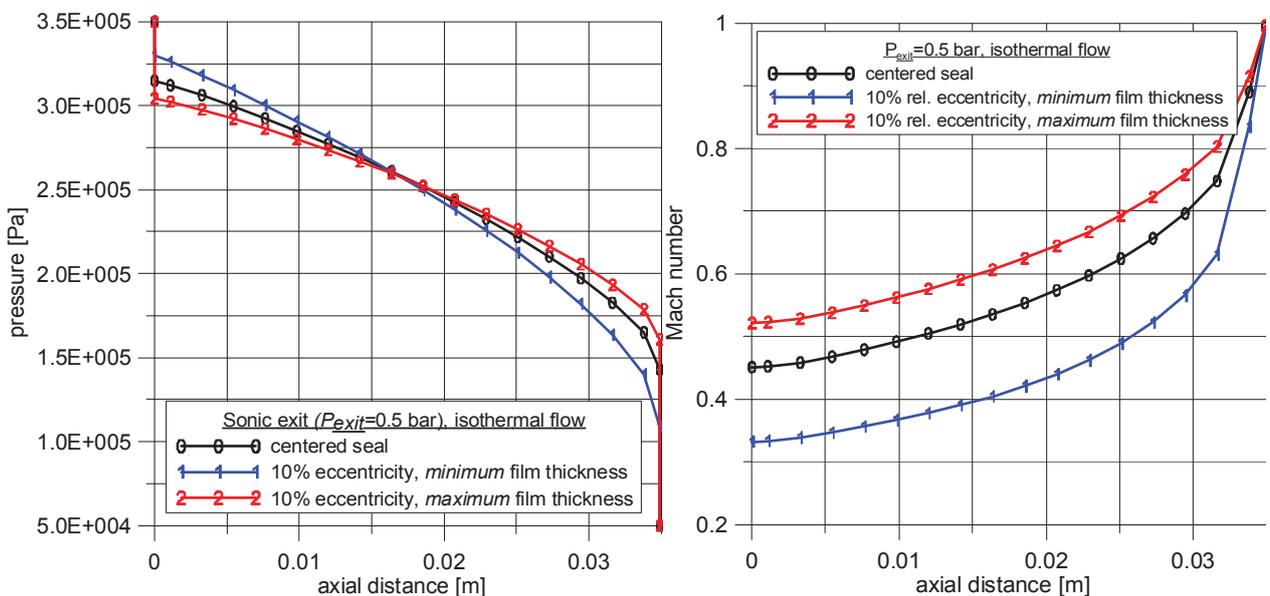


Figure III. 2 Effet de Lomakin sur la bague flottante [46].

du film est maximale. La Figure III. 3b montre que cet effet est prépondérant dans la deuxième moitié du joint où le champ de pression est inversé. Ceci peut mener à une valeur négative de la raideur statique directe dans quel cas la bague sera « collée » sur l'arbre dès la mise sous pression du système d'étanchéité. La bague flottante ne remplit alors plus son rôle et le fonctionnement a lieu avec des fuites maximales et avec contact entre la bague et le rotor.



a.) Ecoulement subsonique dans la section de sortie ($P_{sortie}=1.75$ bars)



b.) Ecoulement sonique (bloqué) dans la section de sortie ($P_{sortie}=0.5$ bars)

Figure III. 3 Variation de la pression et du nombre de Mach dans un joint annulaire (écoulement compressible)[46]. (air, $L=35$ mm, $R=38.25$ mm, $C=200\mu\text{m}$, $\omega=2576$ rad/s, $\xi_{entree}=0.1$ and $\xi_{sortie}=1$, $P_{entree}=3.5$ bars)

Un deuxième aspect de la stabilité statique est décrit par la possibilité de basculement de la bague autour d'un axe transversal de l'étanchéité secondaire (Figure III. 4 et Figure III. 5). Ainsi, le torseur des forces aérodynamiques sur la bague suite à un déplacement radial Δx est constitué d'une force radiale F_x et d'un moment M_{δ_y} définis à l'aide des coefficients de raideur K_{xx} et $K_{\delta_y,x}$. Le couple donné par ce torseur par rapport au point A de l'étanchéité secondaire (Figure III. 5) est :

$$M_{y_A} = F_x \frac{L}{2} + M_{\delta_y} \quad (\text{III. 1})$$

où L est la longueur de la bague.⁹ Ce couple a tendance à produire un basculement de la bague flottante autour du point A et donc d'ouvrir l'étanchéité secondaire. Une fois l'étanchéité secondaire ouverte, la bague flottante ne remplit plus son rôle. Afin de déterminer les conditions de basculement de la bague autour du point A il est nécessaire d'introduire une pression de contact entre le nez de la bague et le stator (dans l'étanchéité secondaire). Il est supposé que cette pression de contact a une variation sinusoïdale avec une valeur maximale à $\theta=0$ et une valeur minimale à $\theta=\pi$ (Figure III. 4).

$$P(\theta) = a + b \cos \theta \quad (\text{III. 2})$$

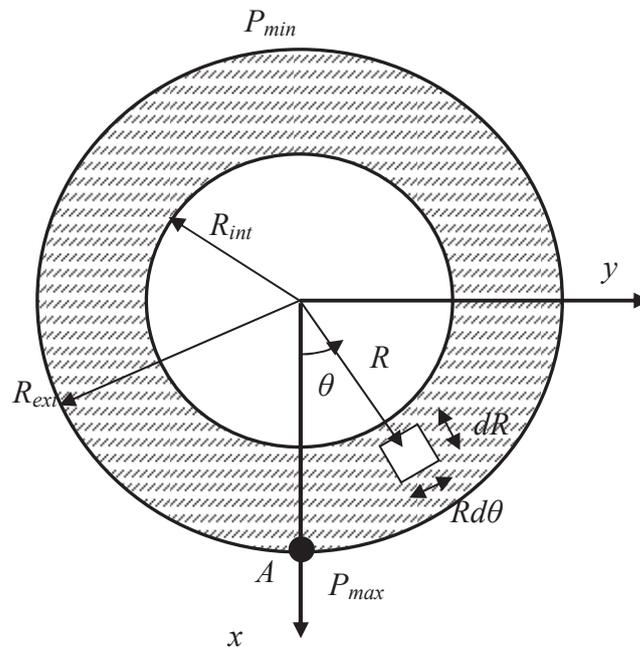


Figure III. 4 La surface de contact bague-stator et la distribution de pression.

⁹ Les forces fluides dans le joint annulaire (étanchéité principale) sont estimées par rapport à la mi-longueur du joint.

Les constantes a et b sont exprimées en fonction des valeurs maximale et minimale de la pression de contact.

$$P(0) = a + b = P_{\max}, P(\pi) = a - b = P_{\min} \quad (\text{III. 3})$$

$$\Rightarrow a = (P_{\max} + P_{\min})/2, b = (P_{\max} - P_{\min})/2 \quad (\text{III. 4})$$

Conformément au PFS¹⁰, la force de contact qui appuie la bague contre le stator est égale à l'intégrale des pressions de contact sur la surface de l'étanchéité secondaire :

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} P(\theta) R d\theta dR = \int_0^{2\pi} (a + b \cos \theta) d\theta \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} R dR = \pi a (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2) = a S_0 \quad (\text{III. 5})$$

$$\Rightarrow a = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = \frac{F_z}{\pi (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)} \quad (\text{III. 6})$$

Toujours conformément au PFS, le moment créé par les pressions de contact autour du centre de l'étanchéité secondaire est égal au moment M_{y_A} engendré par les forces hydrodynamiques dans l'étanchéité principale :

$$M_{y_A} = \int_0^{2\pi} \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} P(\theta) R d\theta dR R \cos \theta = \int_0^{2\pi} (a + b \cos \theta) \cos \theta d\theta \int_{R_{\text{int}}}^{R_{\text{ext}}} R^2 dR = \frac{R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3}{3} \int_0^{2\pi} (b \cos^2 \theta) d\theta = \frac{R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3}{3} \pi b \quad (\text{III. 7})$$

$$\Rightarrow b = \frac{P_{\max} - P_{\min}}{2} = \frac{3M_{y_A}}{\pi (R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3)} \quad (\text{III. 8})$$

L'étanchéité secondaire est fermée si la pression de contact est non nulle dans tous les points de la surface.

$$P_{\min} = a - b = \frac{F_z}{\pi (R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2)} - \frac{3M_{y_A}}{\pi (R_{\text{ext}}^3 - R_{\text{int}}^3)} > 0 \quad (\text{III. 9})$$

La condition de fermeture de l'étanchéité secondaire et donc de fonctionnement sans basculement s'écrit :

¹⁰ PFS=Principe Fondamental de la Statique

$$M_{yA} < \frac{1}{3} \frac{R_{ext}^3 - R_{int}^3}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} F_z \approx \frac{1}{2} \bar{R} F_z \quad (\text{III. 10})$$

où le moment M_{yA} est exprimé en fonction des forces fluides sur la bague flottante:¹¹

$$M_{yA} = \left| F_{xx} \frac{L}{2} + M_{\delta_y, x} \right| < \frac{1}{3} \frac{R_{ext}^3 - R_{int}^3}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} F_z \quad (\text{III. 11})$$

$$F_x = F_{x,0} + \int_{x_0}^x K_{xx} dx = F_{x,0} + \sum \frac{K_{xx} + K_{xx,0}}{2} (x - x_0) \quad (\text{III. 12})$$

$$M_{\delta_y} = M_{\delta_y,0} + \int_{x_0}^x K_{\delta_y, x} dx = M_{\delta_y,0} + \sum \frac{K_{\delta_y, x} + K_{\delta_y, x,0}}{2} (x - x_0) \quad (\text{III. 13})$$

La contribution de F_x est moins importante si la distance entre la mi-longueur du joint annulaire et le plan de contact où se trouve le point A diminue. La bague en forme de « L » représentée sur la Figure III. 5b permet ainsi de réduire le risque de basculement.

Les résultats présentés dans le Tableau III. 1 permettent de vérifier la stabilité statique de la bague LH2 analysée dans le Chapitre II.6.1. La bague ne présente pas de risque de basculement car la valeur du couple qui s'oppose au basculement $F_z \bar{R} / 2$ est largement supérieure aux valeurs de M_{yA} .

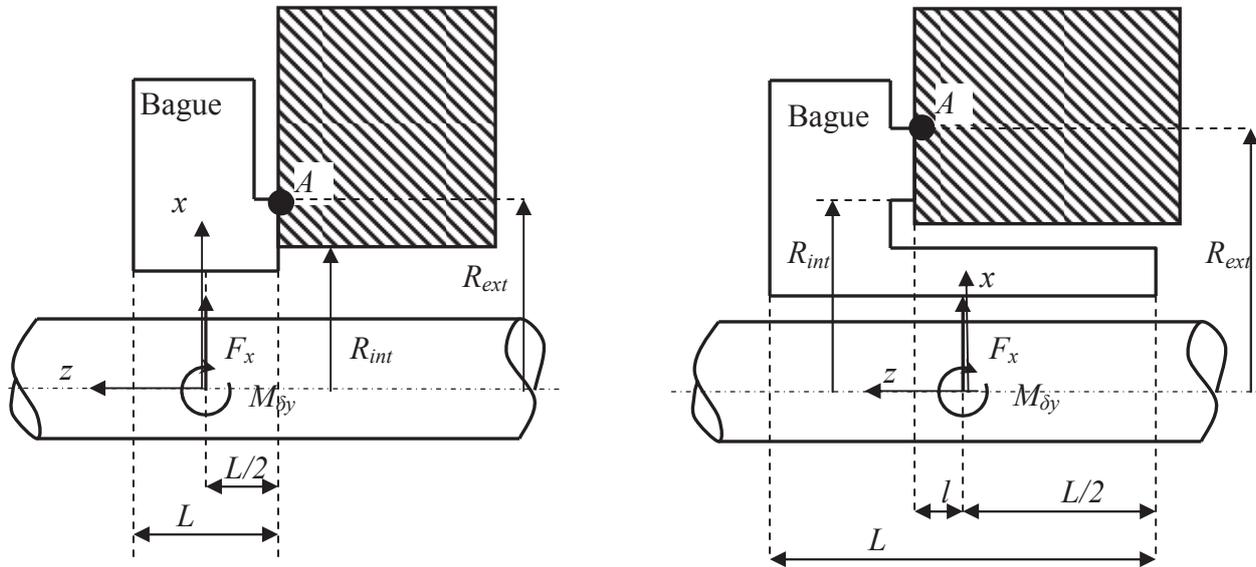


Figure III. 5 Bague normale et bague en forme de L.

¹¹ Le signe « + » dans les relations (III.12) et (III.13) est justifié par le fait que F_x et M_{δ_y} sont des composants du torseur des efforts hydrodynamique sur la bague flottante. Le signe « - » dans les mêmes relations permet de déterminer les efforts sur la rotor.

Tableau III. 1 Stabilité statique de la bague LH2.

Excentricité	K_{xx} (N/m)	K_{dyx} (N)	Δx (m)	F_x (N)	M_{dy} (Nm)	M_{y_A} (Nm)	$F_z r_m / 2$ [Nm]
0.00	1464160	2465.26	0.00E+00	0	0.00E+00	0.00E+00	5.56
0.18	1474910	2419.84	9.00E-06	1.32E+01	2.20E-02	8.81E-02	
0.25	1462290	2392.44	3.50E-06	1.84E+01	3.04E-02	1.22E-01	
0.33	1446790	2346.94	4.00E-06	2.42E+01	3.99E-02	1.61E-01	
0.42	1424230	2268.1	4.50E-06	3.06E+01	5.03E-02	2.03E-01	
0.45	1415150	2234.01	1.50E-06	3.28E+01	5.36E-02	2.18E-01	
0.60	1417330	1934.97	7.50E-06	4.34E+01	6.93E-02	2.86E-01	
0.70	1697070	1469.79	5.00E-06	5.12E+01	7.78E-02	3.34E-01	
0.80	3643790	485.861	5.00E-06	6.45E+01	8.27E-02	4.05E-01	
0.90	15252000	-1377.99	5.00E-06	1.12E+02	8.04E-02	6.39E-01	

III.2. Modélisation des principales forces sur la bague flottante. Equations du principe fondamental de la dynamique (PFD)

La Figure III. 1 décrit les forces qui s'exercent sur un joint d'étanchéité de type bague flottante :

- la force radiale hydrodynamique dans l'étanchéité principale, F_{dyn} ,
- les forces axiales sur les faces d'entrée et de sortie, F_e, F_s ,
- la force radiale de frottement F_f ,
- la force axiale normale sur la face de contact de l'étanchéité secondaire, F_z .

D'autres forces peuvent être négligées. Par exemple si le volume compris entre la bague flottante et le stator est très grand, les forces issues de l'écrasement du fluide sont négligées.

De même, dans un moteur fusée qui se déplace dans l'espace, la force due gravitationnelle W_g peut prendre une direction arbitraire. S'il est supposé que l'accélération peut atteindre 9 fois la gravité terrestre, pour une bague de 0.07 kg, la force de pression nécessaire pour compenser l'accélération due à la masse propre de la bague sera, $W_g = 0.07 \cdot 9.81 \cdot 9 = 6.2$ N. Cette force est beaucoup plus faible que toutes les autres qui s'exercent sur la bague et peut donc être négligée.

Pour le cas d'un fonctionnement normal la bague suit les vibrations du rotor. Les équations du PFD de la bague flottante s'écrivent :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_B = F_{dyn,x}^{R/B} + F_{fx} \\ M\ddot{y}_B = F_{dyn,y}^{R/B} + F_{fy} \end{cases} \quad (\text{III. 14})$$

Ce système d'équations peut être complété par une équation de moment autour de la direction axiale mais le couple fluide dans l'étanchéité principale est généralement plus faible que le couple de frottement. Ceci est vrai surtout si le fluide à étancher a une faible viscosité. Toutefois, si la viscosité est importante la bague risque d'être entraînée en rotation et le système peut être prévu avec des pions anti-rotation.

Il y a des situations où la bague flottante ne peut pas suivre les vibrations du rotor. En effet, la force hydrodynamique dépend de l'excentricité de la bague. La diminution de l'excentricité entre la bague flottante et le rotor réduit la force hydrodynamique. Si cette force hydrodynamique est inférieure à la force de frottement, la bague est bloquée. Elle fonctionne alors comme une bague annulaire conventionnelle. La position de blocage de la bague flottante dépend des conditions de fonctionnement de la machine, des paramètres géométriques de la bague et du coefficient de frottement entre la bague flottante et sa cage. Ceci est une situation non souhaitée pour plusieurs raisons :

- Une bague bloquée et fonctionnant donc comme une bague annulaire conventionnelle va engendrer un raideur croisée. Ceci va diminuer l'amortissement équivalent du rotor si les dimensions de la bague sont importantes.
- Des impacts auront lieu si l'amplitude des vibrations du rotor est supérieure au jeu radial.

D'autres impacts peuvent avoir lieu quand la bague est prévue avec des pions antirotation. Ceci peut arriver si le déplacement de la bague est supérieur au jeu entre les pions et les encoches prévus à cet effet. Les équations du PFD doivent alors prendre en compte les impacts et la rotation de la bague :

$$\begin{cases} M\ddot{x}_B = F_{dyn,x}^{R/B} + F_{fx} + F_{contact,x} \\ M\ddot{y}_B = F_{dyn,y}^{R/B} + F_{fy} + F_{contact,y} \\ J_P\ddot{\theta}_B = C_{dyn,z}^{R/B} + C_{f,z} + C_{contact,z} \end{cases} \quad (III. 15)$$

où M est la masse de la bague flottante et J_P est son moment d'inertie polaire.

Dans une première étape le mouvement de la bague sera résolu pour la situation simplifiée sans contact et sans rotation. Le cas complet de la bague avec rotation et impact sera résolu dans une deuxième étape.

III.2.1. Les forces fluides non-stationnaires dans l'étanchéité principale (joint annulaire)

Définition et hypothèse

L'étanchéité principale est un joint annulaire. Il est supposé que les axes de la bague flottante et du rotor sont parfaitement parallèles et les forces ne proviennent que de l'excentricité et du mouvement relatif entre les deux axes. Ceci revient à négliger tout effet de mésalignement qui peut apparaître. Cette hypothèse n'est pas trop restrictive car la longueur de la bague flottante est généralement d'un ordre de grandeur inférieure à son rayon.

Avec ces hypothèses, la variation des forces fluides dans un palier ou un joint d'étanchéité annulaire s'écrit [66]:

$$\begin{cases} dF_{dyn,x} = \frac{\partial F_{dyn,x}}{\partial x} dx + \frac{\partial F_{dyn,x}}{\partial y} dy + \frac{\partial F_{dyn,x}}{\partial \dot{x}} d\dot{x} + \frac{\partial F_{dyn,x}}{\partial \dot{y}} d\dot{y} \\ dF_{dyn,y} = \frac{\partial F_{dyn,y}}{\partial x} dx + \frac{\partial F_{dyn,y}}{\partial y} dy + \frac{\partial F_{dyn,y}}{\partial \dot{x}} d\dot{x} + \frac{\partial F_{dyn,y}}{\partial \dot{y}} d\dot{y} \end{cases} \quad (\text{III. 16})$$

Les dérivées sont généralement remplacées par les coefficients dynamiques $K_{ij} = -\partial F_i / \partial x_j$, $C_{ij} = -\partial F_i / \partial \dot{x}_j$ ($i,j=x,y$) supposés constants. Si les variations élémentaires des déplacements et des vitesses sont exprimées par des différences finies et l'on intègre le système d'équations (III.16) il résulte :

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x_0} \\ F_{dyn,y_0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} - \dot{x}_0 \\ \dot{y} - \dot{y}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{III. 17})$$

Cette relation permet d'exprimer la variation des forces fluides en fonction des coefficients dynamiques et de la variation des déplacements et des vitesses. L'utilisation de cette relation pour l'intégration des équations du PFD (III.14) ou (III.15) peut être sujet à plusieurs interprétations. Il est nécessaire alors de rappeler la démarche utilisée pour le calcul numérique des coefficients dynamiques [66]. Les étapes de calcul sont :

- Le rotor est supposé être dans une position initiale décrite par x_0 et y_0 de vitesse nulle, $\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$. Les équations de l'écoulement dans le film mince sont ensuite solutionnées et ceci représente la solution « à l'ordre zéro », $F_{x,y}(x_0, y_0, \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = 0)$

- Il est ensuite supposé que le rotor subit des vibrations de faible amplitude autour de cette position, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ où $|\Delta x| \ll |x|$ et $|\Delta y| \ll |y|$. Aucune hypothèse n'est faite sur la valeur des vitesses, $\Delta \dot{x} = \dot{x}$ et $\Delta \dot{y} = \dot{y}$ mais ceci ne pose pas de problèmes car les termes non stationnaires peuvent être identifiés dans les équations de l'écoulement dans le film mince.

Il résulte de cette dernière remarque que l'équation (III.17) issue de l'intégration de (III.16) doit être remplacée par :

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x_0} \\ F_{dyn,y_0} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 18})$$

Cette équation peut être réécrite comme :

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 19})$$

Vérification

Pour vérifier la validité de cette interprétation il est nécessaire de disposer d'un palier ou d'un joint annulaire dont les forces non-stationnaires et les coefficients dynamiques sont exprimés par des relations analytiques. Le palier court [66] répond à ce besoin. Le système analysé est donc un arbre court et rigide muni d'un disque central rigide de masse $2M_R$ et supporté par deux paliers courts identiques (Figure III. 6). Il est supposé que toute la masse du système arbre+disque est concentrée dans la masse du disque, chaque palier supporte la même charge, $W_0 = M_R g$ et le centre géométrique du disque coïncide avec son centre d'inertie (l'effet du balourd est négligé). Suite à une perturbation arbitraire, le centre de l'arbre décrit une trajectoire $x(t), y(t)$. Les équations du PFD pour le rotor s'écrivent :

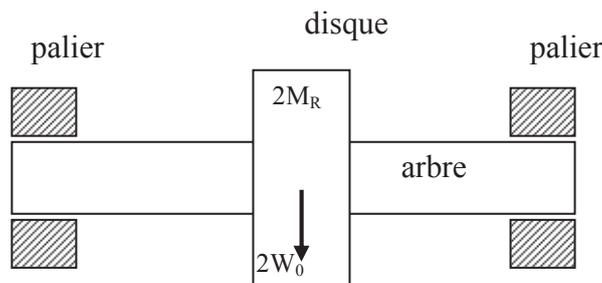


Figure III. 6 Modèle du rotor de Jeffroft.

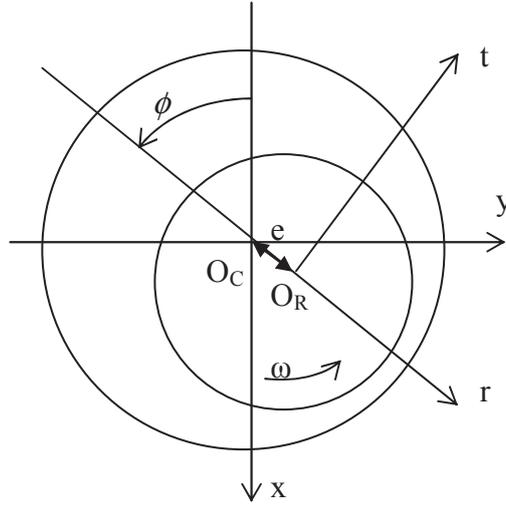


Figure III. 7 Système de coordonnées.

$$M_R \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 20})$$

où $F_{dyn,x,y}(t) = F_{dyn,x,y}(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ sont les forces hydrodynamiques non-stationnaires dans le palier. Dans un système de coordonnées lié à la ligne des centres (Figure III. 7), ces forces sont décrites par les équations:

$$F_{dyn,r}(t) = -\frac{\mu RL^3}{2C^2(1-\varepsilon^2)^2} \left[\frac{\pi \dot{\varepsilon}(1+2\varepsilon^2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 4\varepsilon^2(\bar{\omega} - \dot{\phi}) \right] \quad (\text{III. 21})$$

$$F_{dyn,t}(t) = \frac{\mu RL^3 \varepsilon}{2C^2(1-\varepsilon^2)^2} \left[4\dot{\varepsilon} + \pi(\bar{\omega} - \dot{\phi})\sqrt{1-\varepsilon^2} \right] \quad (\text{III. 22})$$

où $\bar{\omega} = (\omega_{arbre} + \omega_{coussinet})/2$

Les coefficients dynamiques dans le système lié à la ligne des centres sont calculés à partir des relations [66] :

$$K_{rr} = -\frac{\partial F_r}{\partial e} = \frac{2\mu RL^3 \bar{\omega}}{C^3} \frac{2\varepsilon(1+\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^3} \quad (\text{III. 23})$$

$$K_{tt} = -\frac{\partial F_t}{e_0 \partial \phi} = \frac{2\mu RL^3 \bar{\omega}}{C^3} \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} \quad (\text{III. 24})$$

$$K_{rt} = -\frac{\partial F_r}{e_0 \partial \phi} = \frac{2\mu RL^3 \bar{\omega}}{C^3} \frac{\pi}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (\text{III. 25})$$

$$K_{tr} = -\frac{\partial F_t}{\partial e} = -\frac{2\mu RL^3 \bar{\omega}}{C^3} \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{4(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \quad (\text{III. 26})$$

$$C_{rr} = -\frac{\partial F_r}{\partial \dot{e}} = \frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{\pi(1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \quad (\text{III. 27})$$

$$C_{tt} = -\frac{\partial F_t}{e_0 \partial \dot{\phi}} = \frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{\pi}{2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} \quad (\text{III. 28})$$

$$C_{rt} = -\frac{\partial F_r}{e_0 \partial \dot{\phi}} = -\frac{\mu RL^3}{C^3} \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2} = C_{tr} = -\frac{\partial F_t}{\partial \dot{e}} \quad (\text{III. 29})$$

Les forces $F_{dyn,x}(t), F_{dyn,y}(t)$ et les coefficients dynamiques dans le système fixe sont déduits après une rotation:

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{dyn,r}(t) \\ F_{dyn,t}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 30})$$

Il est supposé que la masse du rotor est $M_R=1$ kg et sa vitesse de rotation de $\omega=1000$ rad/s. Les caractéristiques géométriques des paliers sont $R=0.037$ m, $L=0.01$ m et $C_{jeu}=50$ μ m et le lubrifiant a une viscosité dynamique $\mu=10^{-3}$ kg/m/s en conditions isothermes. Au moment initial $t=0$, le rotor se trouve au centre des paliers avec une vitesse initiale nulle. Le rotor est ensuite laissé libre et doit trouver sa position d'équilibre statique sous l'effet de son poids $2W_0$.

Les équations (III.20) seront intégrées suivant une méthode de type Euler du deuxième ordre et le calcul des forces hydrodynamiques entre deux pas de temps sont sujet à plusieurs interprétations.

1. En utilisant les relations (III.21), (III.22) pour les forces dynamiques non-stationnaires. Les résultats sont représentés par la courbe noire sur la Figure III. 8. Cette trajectoire est le résultat correct et sera utilisé pour valider les autres approches.

2. A chaque pas de temps les forces hydrodynamiques sont calculées par la relation (III.19). Cette relation suppose deux étapes. Dans une première étape $F_{dyn,x,y}(x, y, 0, 0)$ sont déterminées à partir de la position (x,y) de l'arbre dans le palier. Cette estimation peut être faite en intégrant les coefficients dynamiques de raideur soit dans le système cylindrique Ort soit dans le système cartésien Oxy . Par exemple, l'intégration des coefficients de raideur dans le système Ort donne :

$$F_{dyn,r} = - \int_{r=0}^{excentricité} K_{rr} dr, \quad F_{dyn,t} = - \int_{r=0}^{excentricité} K_{tr} dr \quad (\text{III. 31})$$

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{dyn,r} \\ F_{dyn,t} \end{bmatrix}_{(r,t,0,0)} \quad (\text{III. 32})$$

et correspond à la partie stationnaire des forces décrites par (III.21) et (III.22). Les effets non stationnaires sont ensuite ajoutés à l'aide des coefficients d'amortissement et des vitesses du centre de l'arbre, \dot{x} et \dot{y} .

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x} \\ F_{dyn,y} \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 33})$$

Le résultat de cette intégration est marqué en bleue sur la Figure III. 8 et montre que l'approche est correcte.

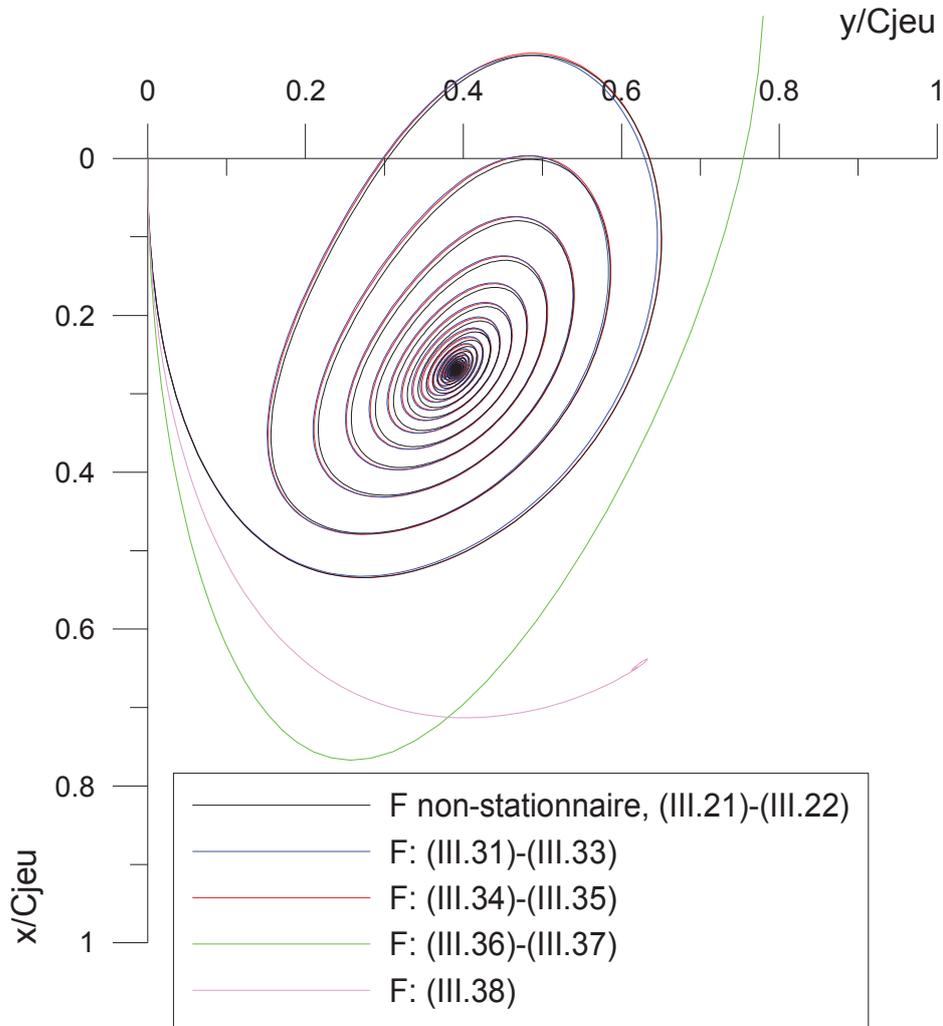


Figure III. 8 Trajectoire de l'arbre.

3. Les forces hydrodynamiques sont calculées toujours avec la relation (III.19) en deux étapes. Dans la première étape $F_{dynX,Y}(x,y,0,0)$ sont déterminées suivant la définition des coefficients de raideur dans le système de coordonnées Oxy :

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t-1) \\ F_{dyn,y}(t-1) \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-1) \\ y(t) - y(t-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 34})$$

La deuxième étape est identique à celle de l'approche précédente, les effets non stationnaires étant ajoutés à l'aide des coefficients d'amortissement et des vitesses du centre de l'arbre, \dot{x} et \dot{y} .

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 35})$$

Il est à remarquer que seulement la partie « stationnaire » des forces hydrodynamiques est calculée en additionnant les effets du déplacement du centre de l'arbre entre deux pas de temps. Les effets non-stationnaires dus aux vitesses absolues du centre de l'arbre sont ajoutés à chaque pas de temps. Le résultat de cette intégration est marqué en rouge Figure III. 8. Il est superposé sur les courbes précédentes (noire et bleue) ce qui montre que l'approche est correcte.

4. La partie « stationnaire » des forces hydrodynamiques est calculée comme dans la méthode précédente en additionnant l'effet des déplacements relatifs et des coefficients de raideur K_{ij} .

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t-1) \\ F_{dyn,y}(t-1) \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-1) \\ y(t) - y(t-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 36})$$

Les effets non-stationnaires sont ensuite ajoutés en tenant compte de la variation de la vitesse du centre de l'arbre comme la relation (III.17) pourrait le suggérer.

$$\begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} = \begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,0,0)} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(t-1) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 37})$$

Les résultats de cette intégration sont représentés sur la Figure III. 8 par la ligne verte et montrent que cette approche est incorrecte.

5. Dans cette approche les forces hydrodynamiques sont calculées dans une seule étape comme la relation (III.17) pourrait le suggérer.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} &= \begin{bmatrix} F_{dyn,x}(t) \\ F_{dyn,y}(t) \end{bmatrix}_{(x,y,\dot{x},\dot{y})} - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(t-1) \\ y(t) - y(t-1) \end{bmatrix} \\ &- \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,0,0)} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(t-1) \\ \dot{y}(t) - \dot{y}(t-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III. 38)$$

Les résultats représentés avec une ligne rose sur la Figure III. 8 montrent que cette approche est incorrecte.

En conclusion, les forces hydrodynamiques non-stationnaires peuvent être calculées à l'aide des coefficients dynamiques à condition de tenir compte de la manière dont ces coefficients ont été définis et estimés. Le calcul s'effectue en deux étapes. La première étape est destinée à l'évaluation de la partie « stationnaire » des forces hydrodynamiques soit par intégration des déplacements relatifs $x-x_0$ et $y-y_0$ et des coefficients de raideur, soit par estimation directe des forces en fonction de la position x, y du rotor. La deuxième étape est destinée à la prise en compte des effets non-stationnaires dus aux vitesses de déplacement du rotor \dot{x} et \dot{y} et des coefficients d'amortissement.

III.2.2. Force de frottement entre la bague et le stator (l'étanchéité secondaire)

Due à la différence de pression entre l'amont et l'aval de l'étanchéité, une pression de contact est toujours présente dans l'étanchéité secondaire créée entre le nez de la bague et le stator. Tenant compte que pour des conditions de fonctionnement normal la bague doit suivre les vibrations du rotor il en résulte alors que cette force de frottement joue un rôle important dans le comportement dynamique de la bague flottante.

Régimes de frottement

Pour une force normale donnée, le régime de frottement dans l'étanchéité secondaire dépend des rugosités et des matériaux des surfaces en contact. Il est supposé que h est l'épaisseur du film mince de lubrifiant mesurée entre les plans moyens des deux surfaces en contact. Chacune des surfaces a une rugosité définie par son écart type σ_1 ou σ_2 et σ est l'écart type combiné des deux surfaces du contact :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (\text{III. 39})$$

Le régime de frottement entre les deux surfaces est défini par le rapport h/σ [67] :

- $7 < h/\sigma$: lubrification hydrodynamique. Les deux surfaces sont complètement séparées par un film épais de lubrifiant. Seule la force hydrodynamique/hydrostatique est prise en compte et les rugosité des deux surfaces ne jouent aucun rôle.
- $3 < h/\sigma < 7$: lubrification hydrodynamique avec un film mince de lubrifiant ou lubrification modérée. La situation est similaire au cas précédent car les deux surfaces sont toujours complètement séparées par un lubrifiant (il n'y a pas contact entre les rugosités) mais le film est très mince et il faut prendre en compte la rugosité des surfaces.

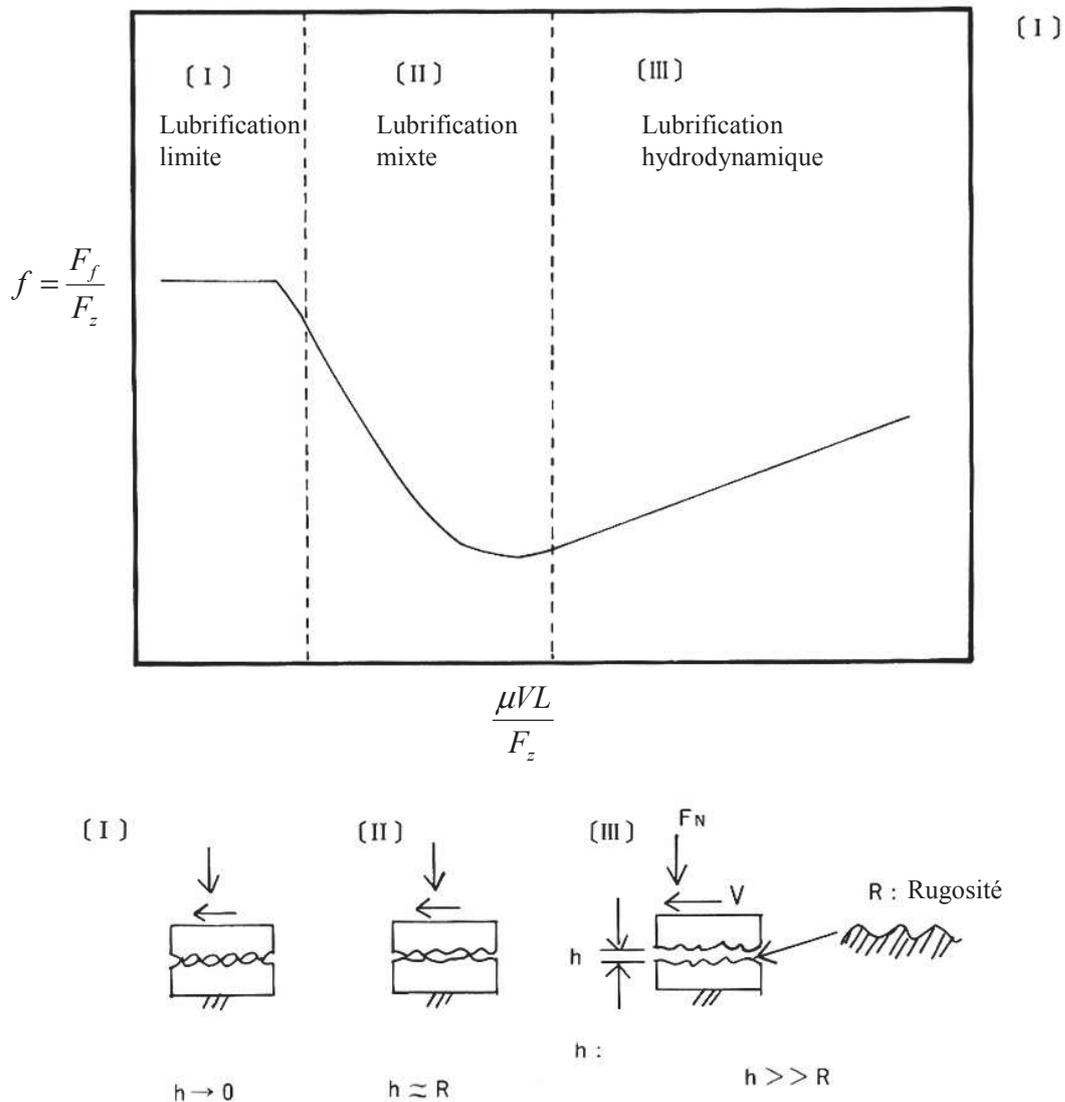


Figure III. 9 Courbe de Stribeck [68].

- $1 < h/\sigma < 3$: lubrification mixte ou partielle. Les aspérités des surfaces viennent sporadiquement en contact et subissent des déformations élastiques. Les caractéristiques des matériaux des surfaces s'ajoutent à la rugosité et aux caractéristiques du fluide. Les forces normale et tangentielle proviennent du contact des aspérités et partiellement de l'effet hydrodynamique/hydrostatique.
- $h/\sigma < 1$: lubrification limite. Les aspérités sont toujours en contact et subissent des déformations plastiques. La force de frottement est le résultat du cisaillement des microsoudures et de la déformation des aspérités. Les propriétés du lubrifiant qui entrent en jeu ne sont plus les mêmes et sont liées à la capacité des molécules du lubrifiant à adhérer aux surfaces, à la piézoviscosité et au comportement non-newtonien en présence des grandes vitesses de déformation.

Ces régimes de frottement décrivent la courbe de Stribeck représentée sur la Figure III. 9.

Chacun des régimes de frottement ci-dessus présenté nécessite une modélisation propre. Afin de pouvoir déterminer les forces mises en jeux dans le contact il est nécessaire de se fixer sur un régime de frottement, de déterminer ses caractéristiques et de vérifier à posteriori la validité de l'hypothèse de départ.

Frottement mixte entre le nez de la bague et le stator

Pendant le fonctionnement, la bague flottante suit le mouvement de l'arbre et glisse sur le stator. Il est supposé que le contact entre le nez de la bague et le stator a lieu en régime de frottement mixte, $1 < h/\sigma < 3$. Les forces normale et tangentielle proviennent du contact des aspérités et partiellement de l'effet hydrodynamique/hydrostatique. Ainsi la force normale F_z est équilibrée par la force due au fluide et la force de contact des aspérités (Figure III. 10):

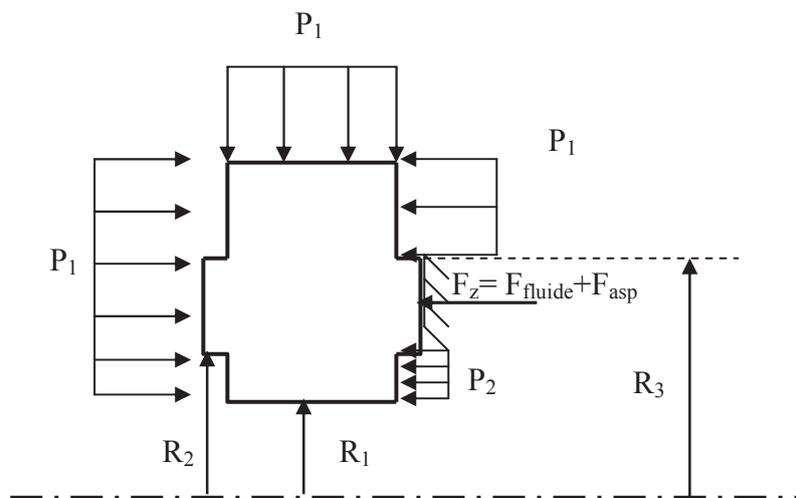


Figure III. 10 Forces sur le nez de la bague flottante.

$$F_z = F_{z,fluide} + F_{z,asp} \quad (\text{III. 40})$$

et la force de frottement dans le contact est :

$$F_f = F_{f,fluide} + F_{f,asp} \quad (\text{III. 41})$$

Pour le régime de frottement mixte, des contacts entre les aspérités ont lieu quand la distance h entre les deux surfaces est inférieure à 3σ . En même temps, seulement les aspérités avec une hauteur supérieure à h peuvent être en contact. La probabilité de contact est donnée par [67]:

$$\text{Prob}(z > h) = \int_h^{\infty} \varphi(z) dz = \int_h^c \frac{35}{32c^7} (c^2 - z^2)^3 dz \quad (\text{III. 42})$$

où $\varphi(z)$ est la distribution gaussienne de la hauteur des rugosités:

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{35}{32c^7} (c^2 - z^2)^3 & -c < z < c \\ 0 & \text{autre} \end{cases} \quad (\text{III. 43})$$

et $c=3\sigma$.

Il est ensuite supposé que les rugosités ont une forme sphérique et subissent des déformations élastiques. La force de contact sur une aspérité est calculée par la théorie de Hertz :

$$F_{n,e} = \frac{4}{3} E' \beta^{1/2} d^{3/2} \quad (\text{III. 44})$$

où $F_{n,e}$: la force normale élémentaire.

β : le rayon de la rugosité.

$d=z-h$: la déformation élastique de la rugosité (indentation)

E' : le modules d'élasticité combiné des deux surfaces.

$$\frac{1}{E'} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

ν_1, ν_2 : le coefficient de Poisson du matériaux des surfaces 1 et 2.

E_1, E_2 : le module d'élasticité du matériaux des surfaces 1 et 2.

La force totale des contacts d'aspérités est déduite à partir des références [67] et [69] :

$$F_{z,asp} = \frac{4}{3} NE' \beta^{1/2} \int_h^c (z-h)^{3/2} \frac{35}{32c^7} (c^2 - z^2)^3 dz \quad (\text{III. 45})$$

où $N = (\eta_1 + \eta_2)S_c$ est le nombre total des aspérités, η_1, η_2 sont les densités surfaciques des rugosités et $S_c = \pi(R_{ext}^2 - R_{int}^2)$ est la surface de contact.

Pour déterminer la force fluide il est supposé que les aspérités ne modifient pas la pression dans le film mince. Ceci revient à calculer la force fluide entre deux surfaces lisses séparées par un film fluide mince d'épaisseur h [69]. La force fluide est estimée à partir de la solution numérique des équations simplifiées de l'écoulement moyen présentées dans le Chapitre II.1.4 qui ne prennent en compte que l'effet hydrostatique sur le nez de la bague.¹² Le champ de pression est ensuite intégré sur la surface de contact bague/stator pour déterminer la force fluide $F_{z,fluide}$.

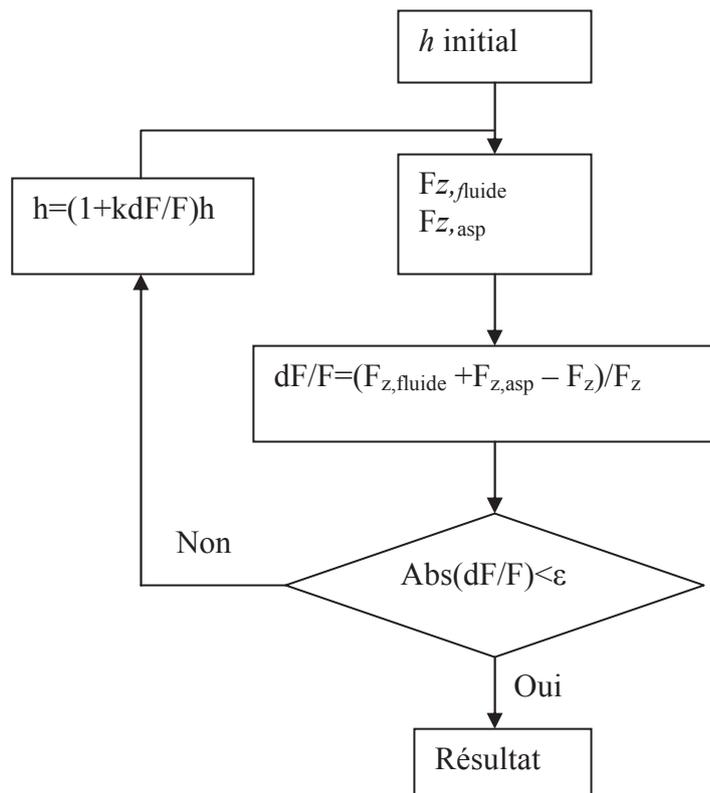


Figure III. 11 Schéma du calcul des forces normales dans le régime de frottement mixte.

¹² Ces équations sont formulées dans le Chapitre II.1.4 pour l'écoulement axial du fluide dans l'étanchéité principale entre le rotor et la bague. Cependant, elles peuvent être utilisées comme une approche pour le calcul de l'écoulement radial dans l'étanchéité secondaire entre le nez de la bague et le stator.

Il reste à déterminer la distance h entre les surfaces en contact. Cette distance est calculée en interprétant (III.40) comme une équation non-linéaire. L'algorithme de résolution basé sur la méthode de l'itération simple est présenté sur le Figure III. 11. Une estimation initiale de h est donc nécessaire pour calculer les forces fluides et les forces de contact entre les aspérités. Plus la valeur de h est faible, plus la force totale $F_{z,fluide} + F_{z,asp}$ est élevée. Un coefficient de sous-relaxation $k=0.2$ est nécessaire pour assurer la convergence de l'algorithme.

La force de frottement est ensuite calculée à l'aide de la relation (III.41) en supposant que la force fluide est uniquement due à un écoulement de cisaillement (Couette) dans le film mince:

$$F_{f,fluide} = \tau S_c = \mu \frac{dV}{dh} S_c = \mu \frac{V_B}{h} S_c = \mu \frac{e_B \Omega}{h} S_c \quad (\text{III. 46})$$

où $V_B = e_B \omega$ est la vitesse de la bague

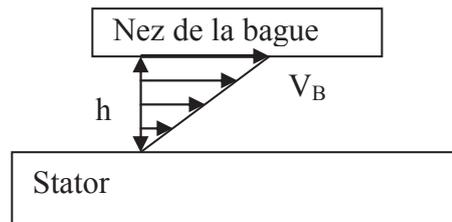


Figure III. 12 L'écoulement de cisaillement dans le film mince.

Du fait qu'il est supposé que les deux surfaces en contact sont parallèles et que les rugosités ne perturbent pas la distribution de pression dans le film mince, la vitesse de glissement de la bague par rapport au stator, V_B , ne joue aucun rôle sur le champ de pression généré par le régime de frottement mixte dans le contact secondaire.

La force de frottement d'aspérité est ensuite calculée à l'aide de la loi de Coulomb :

$$F_{f,asp} = f F_{z,asp} \quad (\text{III. 47})$$

où $f=0.2 \dots 0.25$ est le coefficient de frottement sec entre les deux surfaces en contact. Les relations restent applicables pour toute autre vitesse de la bague car l'inégalité $F_{f,fluide} \ll F_{f,asp}$ est toujours valable et $F_{z,fluide}$ est calculée uniquement à partir de l'effet hydrostatique qui existe sur le nez de la bague.

Modèle numérique de Pétrov

La force de frottement déduite précédemment doit être introduite dans un modèle numérique capable de traiter aisément les phases transitoires qui peuvent apparaître dans le frottement saccadé. Le traitement numérique proposé par Petrov [70] n'est pas basé sur une analyse physique du contact mais sur une régularisation de la vitesse de glissement.

Le modèle est applicable au mouvement plan arbitraire d'une surface sur l'autre, le contact étant caractérisé par un effort normal et un coefficient de frottement. Afin de pouvoir généraliser ce modèle à tous les types de contact et donc au contact en régime mixte dont les aspects physiques ont été discutés dans le paragraphe précédent, il est convenable d'utiliser un coefficient de frottement équivalent :

$$f_{\text{éq}} = \frac{\|\vec{F}_f\|}{F_z} = \frac{\|\vec{F}_{f,asp} + \vec{F}_{f,fluide}\|}{F_z} \approx \frac{\|\vec{F}_{f,asp}\|}{F_z} \quad (\text{III. 48})$$

où il a été mis en évidence que pour le mouvement plan de la bague sur le stator, la force de frottement est un vecteur avec deux composantes :

$$\vec{F}_f = \{F_{fx}, F_{fy}\}^T \quad (\text{III. 49})$$

Le point de départ du modèle proposé par Petrov est de considérer que les rugosités en contact sont des aspérités de raideur k_t . De ce fait une distinction est faite entre le déplacement d'un point A de la surface de contact $u = \{x(t), y(t)\}^T$ et du point S correspondant qui se trouve au sommet d'une rugosité $u_s = \{x_s(t), y_s(t)\}^T$ (Figure III. 13). La rugosité a une déformation linéaire élastique et tangentielle due à la force de frottement. Il est supposé que la direction de la force de frottement est la même que la vitesse de déplacement du point de contact qui se trouve au sommet d'une rugosité.

$$\frac{\vec{u}_s}{\|\vec{u}_s\|} = \frac{\vec{F}_f}{\|\vec{F}_f\|} \quad (\text{III. 50})$$

où $\|\vec{u}_s\| = \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2}$ et $\|\vec{F}_f\| = \sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2}$.

La force de frottement est alors exprimée à l'aide de la loi de Coulomb :

$$\|\vec{F}_f\| = \text{sign}(\|\vec{u}_s\|) f_{\text{éq}} F_z \quad (\text{III. 51})$$

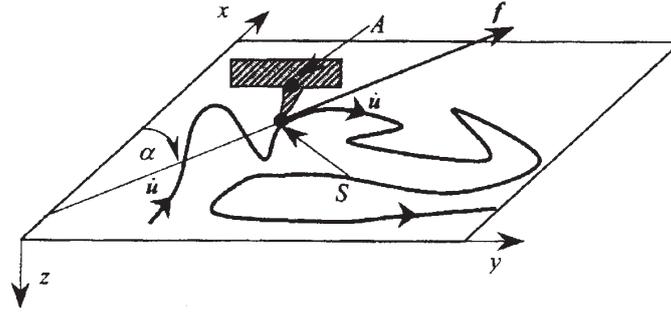


Figure III. 13 Le mouvement plan et le modèle de contact phénoménologique de Petrov [70].

La régularisation introduite par Petrov est basée sur l'approximation de la fonction signum :

$$\text{sign}\left(\|\vec{u}_s\|\right) = \frac{2 \arctan\left(c \|\vec{u}_s\|\right)}{\pi} \quad (\text{III. 52})$$

où des valeurs élevées de la constante c permettent des approximations précises des discontinuités.

Avec des valeurs faibles de c , la précision diminue mais l'intégration numérique est plus facile.

Alors, l'équation (III.51) devient :

$$\|\vec{u}_s\| = \frac{1}{c} \tan\left(\frac{\pi \|\vec{F}_f\|}{2 f_{\text{éq}} F_z}\right) \quad (\text{III. 53})$$

A chaque moment, la force de frottement est exprimée en fonction des déplacements du point A de la surface de contact, du point correspondant qui se trouve au sommet d'une rugosité ainsi que de la raideur de l'aspérité.

$$\vec{F}_f = k_t (\vec{u} - \vec{u}_s) \quad (\text{III. 54})$$

où le fait d'avoir utilisé une raideur k_t constante suppose que le contact est isotrope et homogène sur toute la surface. Cette équation est dérivée par rapport au temps:

$$\vec{F}_f = k_t (\vec{u} - \vec{u}_s) = k_t \left(\vec{u} - \|\vec{u}_s\| \frac{\vec{F}_f}{\|\vec{F}_f\|} \right) \quad (\text{III. 55})$$

et après avoir injecté l'équation (III.53) pour éliminer $\|\vec{u}_s\|$, il résulte:

$$\vec{F}_f = k_t \left[\vec{u} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|\vec{F}_f\|}{2 f_{\dot{e}q} F_z} \right) \frac{\vec{F}_f}{\|\vec{F}_f\|} \right] \quad (\text{III. 56})$$

Cette équation différentielle peut être décomposée selon deux directions dans le plan du contact.

$$\dot{F}_{f_x} = k_t \left[\dot{x} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|\vec{F}_f\|}{2 f_{\dot{e}q} F_z} \right) \frac{F_{f_x}}{\|\vec{F}_f\|} \right], \quad \dot{F}_{f_y} = k_t \left[\dot{y} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|\vec{F}_f\|}{2 f_{\dot{e}q} F_z} \right) \frac{F_{f_y}}{\|\vec{F}_f\|} \right] \quad (\text{III. 57})$$

où $k_t = 10^{10}$ N/m, $c = 10^4$ s/m. La force de frottement obtenue en intégrant ces deux équations différentielles permet de prendre en compte tout « l'historique » du mouvement plan et de simuler des mouvements saccadés des deux corps en contact (« stick-slip »).

III.2.3. Equations du PFD

Les équations (III.14) du PFD sans impacts bague/rotor ou bague/pions antirotation peuvent maintenant être résolues. La solution numérique est basée sur l'intégration des équations différentielles du PFD données par (III.14) et complétées par les équations du modèle de Petrov pour la prise en compte de la force de frottement.

$$\left\{ \begin{array}{l} M\ddot{x}_B = F_{dyn,x}^{R/B}(x_R - x_B, y_R - y_B, 0, 0) - C_{xx}(\dot{x}_R - \dot{x}_B) - C_{xy}(\dot{y}_R - \dot{y}_B) + F_{fx} \\ M\ddot{y}_B = F_{dyn,y}^{R/B}(x_R - x_B, y_R - y_B, 0, 0) - C_{yx}(\dot{x}_R - \dot{x}_B) - C_{yy}(\dot{y}_R - \dot{y}_B) + F_{fy} \\ \dot{F}_{f_x} = k_t \left[\dot{x}_B - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|\vec{F}_f\|}{2 f_{\dot{e}q} F_z} \right) \frac{F_{f_x}}{\|\vec{F}_f\|} \right] \\ \dot{F}_{f_y} = k_t \left[\dot{y}_B - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|\vec{F}_f\|}{2 f_{\dot{e}q} F_z} \right) \frac{F_{f_y}}{\|\vec{F}_f\|} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III. 58})$$

A cause de la présence des forces de frottement, ce système d'équations différentielles du premier ordre doit être intégré à l'aide d'une méthode numérique adaptée aux problèmes « raides ». La méthode de Gear a été retenue.¹³

¹³ Fonction DIVPAG de la bibliothèque IMSL

Toutefois, sous certaines hypothèses simplificatrices, le système (III.58) admet une solution quasi-analytique. Ces hypothèses, les développements supplémentaires et la solution quasi-analytique seront présentés par la suite.

III.3. Solution simplifiée « quasi-analytique » du régime de fonctionnement dynamique

III.3.1. Hypothèses et équations

Sous certaines hypothèses le calcul dynamique de la bague flottante peut être effectué sans faire appel ni à une intégration numérique des équations différentielles ni à une modélisation avancée de la force de frottement. Cependant le modèle qui sera obtenu n'est pas complètement analytique mais nécessitera la résolution numérique d'un système de deux équations algébriques non linéaires. Les hypothèses de base qui seront utilisées sont:

- Le rotor a un mouvement de précession centrée et uniforme avec la vitesse Ω .
- Il n'y a pas d'impact entre le rotor et la bague. Les résultats ne sont plus valables en dessous d'une épaisseur minimale du film égale à 7σ où σ est l'écart type combiné de la surface du rotor et de la bague.
- La bague est soit bloquée par la force de frottement, soit a un mouvement de précession centrée et uniforme avec la même vitesse que le rotor. Le phénomène de *stick-slip* n'est pas pris en compte.
- La bague ne peut avoir qu'un mouvement de précession. Ni le couple fluide ni l'éventuelle présence des pions anti-rotation ne sont pris en compte.

Ces hypothèses permettent de reformuler les équations du PFD dans un système de coordonnées tournant. La bague flottante et le rotor sont représentés sur la Figure III. 14. Le système de coordonnées $O\xi\eta$ est un système tournant dont l'axe $O\xi$ est toujours orienté vers le centre B de la bague. Celle-ci est entraînée par le rotor qui décrit une orbite circulaire de rayon e_R autour du point O . La distance entre le centre de la bague et le centre du rotor est constante et représente une excentricité e_{BR} . Le vecteur \vec{e}_{BR} tourne avec le système de coordonnée $O\xi\eta$ et a toujours la même inclinaison γ par rapport au vecteur \vec{e}_B et donc à l'axe $O\xi$.

Les équations du PFD pour la bague flottante s'écrivent :

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_B \\ \ddot{\eta}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{f,\xi} \\ F_{f,\eta} \end{Bmatrix} \quad (III. 59)$$

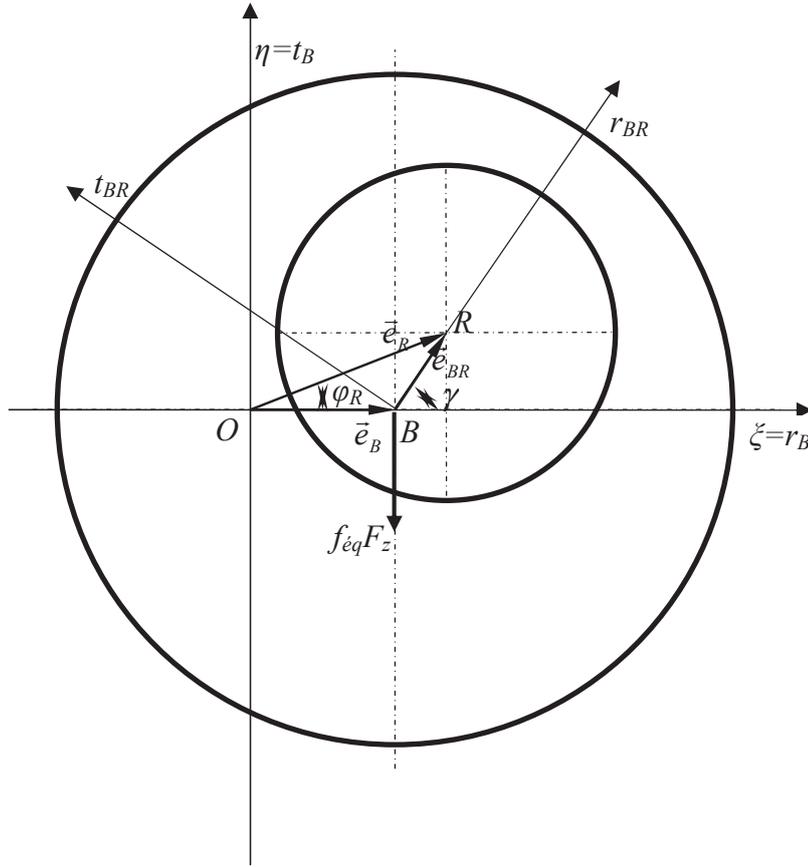


Figure III. 14 Système de coordonnées tournantes pour l'analyse de la bague flottante et du rotor

Les coordonnées, les vitesses et les accélérations du centre du rotor ou de la bague sont:

$$\xi_{R,B} = e_{R,B} \cos \varphi_{R,B} \quad (\text{III. 60})$$

$$\dot{\xi}_{R,B} = \dot{e}_{R,B} \cos \varphi_{R,B} - e_{R,B} \dot{\varphi}_{R,B} \sin \varphi_{R,B} \quad (\text{III. 61})$$

$$\ddot{\xi}_{R,B} = \ddot{e}_{R,B} \cos \varphi_{R,B} - 2\dot{e}_{R,B} \dot{\varphi}_{R,B} \sin \varphi_{R,B} - e_{R,B} \ddot{\varphi}_{R,B} \sin \varphi_{R,B} - e_{R,B} \dot{\varphi}_{R,B}^2 \cos \varphi_{R,B} \quad (\text{III. 62})$$

$$\eta_{R,B} = e_{R,B} \sin \varphi_{R,B} \quad (\text{III. 63})$$

$$\dot{\eta}_{R,B} = \dot{e}_{R,B} \sin \varphi_{R,B} + e_{R,B} \dot{\varphi}_{R,B} \cos \varphi_{R,B} \quad (\text{III. 64})$$

$$\ddot{\eta}_{R,B} = \ddot{e}_{R,B} \sin \varphi_{R,B} + 2\dot{e}_{R,B} \dot{\varphi}_{R,B} \cos \varphi_{R,B} + e_{R,B} \ddot{\varphi}_{R,B} \cos \varphi_{R,B} - e_{R,B} \dot{\varphi}_{R,B}^2 \sin \varphi_{R,B} \quad (\text{III. 65})$$

Conformément aux hypothèses énoncées, il est supposé que:

- le rotor décrit un mouvement de précession uniforme et centré:

$$\dot{\varphi}_R = \Omega, \quad \ddot{\varphi}_R = 0, \quad \dot{e}_R = \ddot{e}_R = 0 \quad (\text{III. 66})$$

- la bague décrit un mouvement de précession uniforme et centré en suivant le rotor (son mouvement est stabilisé), l'axe $O\xi$ du système tournant étant orienté vers le centre de la bague (Figure III. 14) :

$$\varphi_B = 0, \dot{\varphi}_B = \Omega, \ddot{\varphi}_B = 0, \dot{e}_B = \ddot{e}_B = 0 \quad (\text{III. 67})$$

Il résulte alors:

$$\xi_R = e_R \cos \varphi_R, \dot{\xi}_R = -e_R \Omega \sin \varphi_R \quad (\text{III. 68})$$

$$\eta_R = e_R \sin \varphi_R, \dot{\eta}_R = e_R \Omega \cos \varphi_R \quad (\text{III. 69})$$

$$\xi_B = e_B, \dot{\xi}_B = 0, \ddot{\xi}_B = -e_B \Omega^2 \quad (\text{III. 70})$$

$$\eta_B = 0, \dot{\eta}_B = e_B \Omega, \ddot{\eta}_B = 0 \quad (\text{III. 71})$$

La force de frottement qui s'exerce sur le nez de la bague est perpendiculaire au vecteur \vec{e}_B et donc parallèle à l'axe $O\eta$ mais de sens opposé, $F_{f,\xi} = 0$, $F_{f,\eta} = -f_{\dot{e}q} F_z$.

La force hydrodynamique exercée par le rotor sur la bague $\vec{F}_{dyn}^{R/B}$ est la force dans l'étanchéité principale \vec{F}_{dyn} décrite au paragraphe III.2.2. Elle dépend de l'excentricité entre le rotor et la bague $\xi_R - \xi_B$, $\eta_R - \eta_B$ ainsi que de la vitesse relative $\dot{\xi}_R - \dot{\xi}_B$, $\dot{\eta}_R - \dot{\eta}_B$. Les équations du PFD de la bague flottante deviennent alors:

$$M \begin{Bmatrix} -e_B \Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \\ \dot{\xi}_R - \dot{\xi}_B \\ \dot{\eta}_R - \dot{\eta}_B \end{pmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -f_{\dot{e}q} F_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 72})$$

Le mouvement de précession du rotor est imposé, son amplitude e_R et sa vitesse Ω sont donc connues. L'équation permet de déterminer le mouvement de la bague dont les inconnues sont l'amplitude e_B et le déphasage entre la rotor et la bague φ_R . Pour alléger la notation, l'indice R de l'angle de déphasage et l'indice B de e_B seront dorénavant négligés, $\varphi_R \equiv \varphi$, $e_B \equiv e$. L'équation (III.72) représente un système non linéaire de deux équations à deux inconnues, e et φ .

L'excentricité relative entre la bague et le rotor et l'angle d'inclinaison du vecteur \vec{e}_{BR} sont :

$$\varepsilon(e, \varphi) = \frac{e_{BR}}{C_{jeu}} = \sqrt{e^2 + e_R^2 - 2e e_R \cos \varphi} \quad (\text{III. 73})$$

$$\gamma(e, \varphi) = \arctan \frac{e_R \sin \varphi}{e_R \cos \varphi - e} \quad (\text{III. 74})$$

Les forces aérodynamiques s'écrivent:

$$\begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \\ \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [C_{\xi\eta}]_{R/B} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_R - \dot{\xi}_B \\ \dot{\eta}_R - \dot{\eta}_B \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 75})$$

Les forces hydrodynamiques et les coefficients d'amortissement sont calculés d'abord dans le système de coordonnées $Br_{BR}t_{BR}$ dont l'axe Br_{BR} est lié à la ligne des centres et au vecteur \vec{e}_{BR} . Dans ce système de coordonnées les forces et les coefficients dynamiques ne dépendent que de l'excentricité entre le rotor et la bague $\varepsilon(e, \varphi)$. Une rotation d'angle $\gamma(e, \varphi)$ est nécessaire pour pouvoir les exprimer dans le système de coordonnée $O\xi\eta$. Le calcul des forces hydrodynamiques non-stationnaires se fait en deux étapes selon la démarche décrite dans le paragraphe III.2.2.

$$\begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [R_{\gamma(e,\varphi)}] \begin{Bmatrix} F_{dyn,r}^{R/B} \\ F_{dyn,t}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(e,\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III. 76})$$

$$[R_{\gamma(e,\varphi)}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma(e, \varphi) & -\sin \gamma(e, \varphi) \\ \sin \gamma(e, \varphi) & \cos \gamma(e, \varphi) \end{bmatrix} \quad (\text{III. 77})$$

et

$$[C_{\xi\eta}]_{R/B} = [R_{\gamma(e,\varphi)}]^T \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rt} \\ C_{tr} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(e,\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} [R_{\gamma(e,\varphi)}] \quad (\text{III. 78})$$

Les équations (III.75) deviennent:

$$\begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \\ \xi_R - \xi_B \\ \eta_R - \eta_B \end{pmatrix} = [R_{\gamma(e,\varphi)}] \begin{Bmatrix} F_{dyn,r}^{R/B} \\ F_{dyn,t}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(e,\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + [R_{\gamma(e,\varphi)}]^T \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rt} \\ C_{tr} & C_{tt} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon(e,\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} [R_{\gamma(e,\varphi)}] \begin{Bmatrix} -e_R \Omega \sin \varphi \\ e_R \Omega \cos \varphi - e \Omega \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 79})$$

Il résulte un système non-linéaire de 2 équations aux deux inconnues e , φ :

$$M \begin{Bmatrix} -e\Omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [R_{\gamma(e,\varphi)}] \begin{Bmatrix} F_{dyn,r}^{R/B} \\ F_{dyn,t}^{R/B} \end{Bmatrix}_{(\varepsilon(e,\varphi)_0)} + [R_{\gamma(e,\varphi)}]^T \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{rt} \\ C_{tr} & C_{tt} \end{bmatrix}_{(\varepsilon(e,\varphi)_0)} [R_{\gamma(e,\varphi)}] \begin{Bmatrix} -e_R\Omega \sin \varphi \\ e_R\Omega \cos \varphi - e\Omega \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -f_{\dot{e}q}F_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 80})$$

Ce système peut être résolu par une méthode numérique de type gradient.

Il a été supposé que le rotor décrit une précession circulaire uniforme donnée. Cette hypothèse suppose que le mouvement du rotor n'est pas influencé par la bague flottante. La solution du système (III.80) permet de vérifier à *posteriori* la validité de cette hypothèse. Les forces transmises par la bague flottante au rotor sont :

$$\begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{B/R} \\ F_{dyn,\eta}^{B/R} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{R/B} \\ F_{dyn,\eta}^{R/B} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Me_B\Omega^2 \\ -f_{\dot{e}q}F_z \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 81})$$

et dans un système de coordonnées tournant lié au rotor et déterminé par le vecteur \vec{e}_R :

$$\begin{Bmatrix} F_{dyn,\xi}^{B/R} \\ F_{dyn,\eta}^{B/R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Me_B\Omega^2 \\ -f_{\dot{e}q}F_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} K_{Reff}e_R \\ C_{Reff}e_r\Omega \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 82})$$

Il résulte :

$$K_{Reff} = \frac{f_{\dot{e}q}F_z \sin \varphi - Me_B\Omega^2 \cos \varphi}{e_R}, \quad C_{Reff} = \frac{f_{\dot{e}q}F_z \cos \varphi + Me_B\Omega^2 \sin \varphi}{e_R\Omega} \quad (\text{III. 83})$$

Il peut être vérifié qu'au moins pour des joints annulaires à bagues flottantes en carbone utilisées par les industries aéronautique et aérospatiales, les forces transmises par la bague au rotor sont faibles.

III.3.2. Analyse de stabilité

L'analyse précédente ne permet pas de déterminer si la bague décrit une orbite stable ou non. Il est possible qu'en réalité le mouvement de la bague flottante soit quasi-périodique ou chaotique. Dans

ce cas la solution trouvée, $e=e_B$ et $\varphi=\varphi_B$, n'est pas correcte car son hypothèse principale est une précession uniforme sur une orbite circulaire (un mouvement quasi-stationnaire dans un système tournant).

L'analyse de la stabilité de la solution du système (III.80) est effectuée à l'aide de la théorie de Floquet pour les solutions périodiques et de la matrice de monodromie [71].

Dans un système de coordonnées fixes Oxy présenté sur la Figure III. 15 les équations du PFD s'écrivent :

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_B \\ \ddot{y}_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{dyn,x}^{R/B} \\ F_{dyn,y}^{R/B} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{f,x} \\ F_{f,y} \end{Bmatrix} \quad (III. 84)$$

où les forces hydrodynamiques dans l'étanchéité principale sont calculées en mettant en évidence les deux étapes soulignées précédemment :

$$\begin{Bmatrix} F_{dyn,x}^{R/B} \\ F_{dyn,y}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} x_R - x_B \\ x_R - y_B \\ x_R - \dot{x}_B \\ y_R - \dot{y}_B \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{dyn,x}^{R/B} \\ F_{dyn,y}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} x_R - x_B \\ y_R - y_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + [C_{xy}^{R/B}] \begin{Bmatrix} \dot{x}_R - \dot{x}_B \\ \dot{y}_R - \dot{y}_B \end{Bmatrix} \quad (III. 85)$$

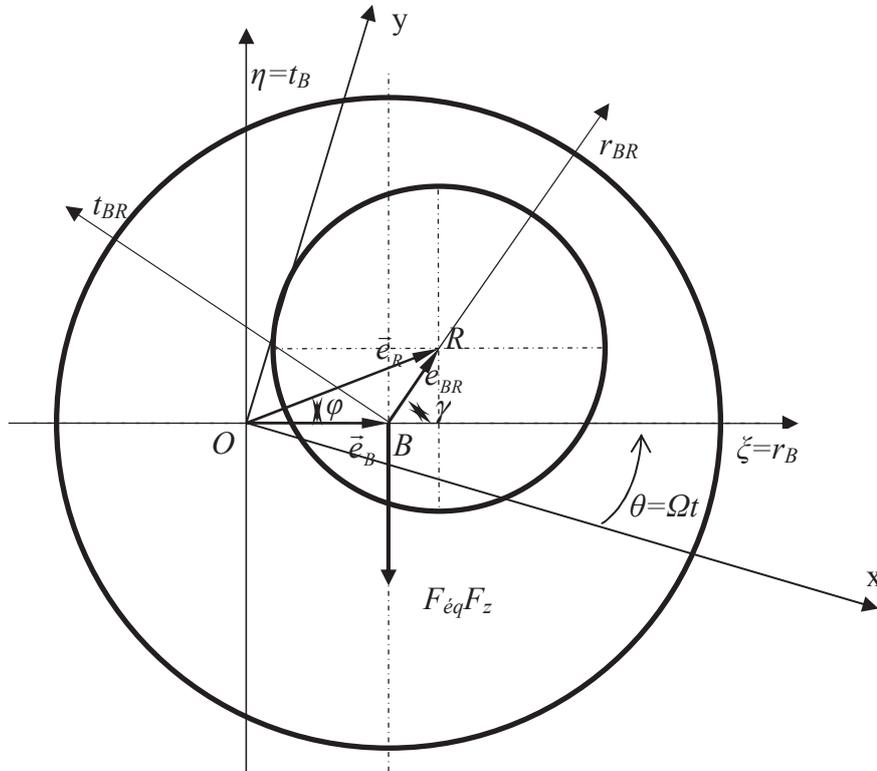


Figure III. 15 Système de coordonnées tournantes et fixes pour l'analyse de la bague flottante et du rotor.

Les composantes de la force de frottement peuvent être exprimées en fonction des vitesses de la bague en tenant en compte du fait que $\theta = \Omega t$, $x_B = e_B \cos \theta$ et $y_B = e_B \sin \theta$:

$$\dot{x}_B = -e_B \Omega \sin \theta, \quad \sin \theta = -\frac{\dot{x}_B}{e_B \Omega} \quad (\text{III. 86})$$

$$\dot{y}_B = e_B \Omega \cos \theta, \quad \cos \theta = \frac{\dot{y}_B}{e_B \Omega} \quad (\text{III. 87})$$

Il résulte :

$$\begin{Bmatrix} F_{f,x} \\ F_{f,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{eq} F_z \sin \theta \\ -f_{eq} F_z \cos \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{f_{eq} F_z}{e_B \Omega} & 0 \\ 0 & -\frac{f_{eq} F_z}{e_B \Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 88})$$

Les équations du PFD s'écrivent en mettant en évidence les deux étapes de calcul des forces hydrodynamiques

$$M \begin{Bmatrix} \ddot{x}_B \\ \ddot{y}_B \end{Bmatrix}_t = \begin{Bmatrix} F_{dyn,x}^{R/B} \\ F_{dyn,y}^{R/B} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} x_R - x_B \\ y_R - y_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_t + [C_{xy}^{R/B}] \begin{Bmatrix} \dot{x}_R - \dot{x}_B \\ \dot{y}_R - \dot{y}_B \end{Bmatrix}_t - \frac{f_{eq} F_z}{e_B \Omega} \begin{Bmatrix} \dot{x}_B \\ \dot{y}_B \end{Bmatrix}_t \quad (\text{III. 89})$$

Ceci est un système non-autonome ayant une solution périodique de période T .

$$\begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}_{t_0} = \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}_{t_0+T} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}_{t_0} \neq \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \end{Bmatrix}_{t_0+t} \quad \text{pour } 0 < t < T \text{ et } \forall t_0 > 0 \quad (\text{III. 90})$$

Dans ce système la réponse de la bague $\{x_B, y_B\}^T$ est un vecteur inconnu tandis que l'excitation introduite par le rotor $\{x_R, y_R\}$ est connue.

Soit une perturbation de la trajectoire de la bague, $|\delta x_B, \delta y_B| \ll x_B, y_B$. Le système des équations du PFD (III.89) perturbé s'écrit :

$$M \begin{Bmatrix} \delta \ddot{x}_B \\ \delta \ddot{y}_B \end{Bmatrix}_t = [K_{xy}^{R/B}]_t \begin{Bmatrix} -\delta x_B \\ -\delta y_B \end{Bmatrix}_t + [C_{xy}^{R/B}]_t \begin{Bmatrix} -\delta \dot{x}_B \\ -\delta \dot{y}_B \end{Bmatrix}_t - \frac{f_{eq} F_z}{e_B \Omega} \begin{Bmatrix} \delta \dot{x}_B \\ \delta \dot{y}_B \end{Bmatrix}_t \quad (\text{III. 91})$$

Ces équations peuvent être mises sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre un :

$$\begin{aligned} \{\dot{\delta}_B(t)\} &= [\Phi_B(t)]\{\delta_B(t)\} \\ \{\delta_B\} &= \{\delta x_B \quad \delta y_B \quad \delta \dot{x}_B \quad \delta \dot{y}_B\}^T \end{aligned} \quad (\text{III. 92})$$

où $[\Phi_B(t)]$ est une matrice périodique de période T.

$$[\Phi_B(t)] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -\frac{1}{M} [K_{xy}^{R/B}] & -\frac{1}{M} \left\{ [C_{xy}^{R/B}] + \frac{f_{eq} F_z}{e_B \Omega} [I] \right\} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 93})$$

La matrice de monodromie $[\Phi]$ est définie comme étant :

$$\{\delta_B(t_0 + T)\} = [\Phi]\{\delta_B(t_0)\}, \forall t_0 > 0 \quad (\text{III. 94})$$

Elle peut être déterminée en exprimant $\{\dot{\delta}_B\}$ à l'aide des différences finies :

$$\{\dot{\delta}_B(t)\} = \frac{1}{\Delta t} (\{\delta_B(t + \Delta t)\} - \{\delta_B(t)\}) \quad (\text{III. 95})$$

Après injection dans le système d'équations différentielles (III.92) il résulte:

$$\{\delta_B(t + \Delta t)\} = ([I] + \Delta t [\Phi_B(t)])\{\delta_B(t)\} \quad (\text{III. 96})$$

Si $t_i = t_0 + i\Delta t$, $\Delta t = T/n$, $i := \overline{0, n}$ est une discrétisation de la période T, il s'écrit:

$$\{\delta_B(t_1)\} = ([I] + \Delta t [\Phi_B(t_0)])\{\delta_B(t_0)\} \quad (\text{III. 97})$$

$$\{\delta_B(t_2)\} = ([I] + \Delta t [\Phi_B(t_1)])\{\delta_B(t_1)\} = ([I] + \Delta t [\Phi_B(t_1)])([I] + \Delta t [\Phi_B(t_0)])\{\delta_B(t_0)\} \quad (\text{III. 98})$$

...

$$\{\delta_B(t_n)\} = ([I] + \Delta t [\Phi_B(t_{n-1})])\{\delta_B(t_{n-1})\} = [\Phi]\{\delta_B(t_0)\} \quad (\text{III. 99})$$

où $[\Phi]$ est donc la matrice de monodromie :

$$[\Phi] = ([I] + \Delta t[\Phi_B(t_0)])([I] + \Delta t[\Phi_B(t_1)]) \dots ([I] + \Delta t[\Phi_B(t_{n-1})]) = \prod_{i=0}^{n-1} ([I] + \Delta t[\Phi_B(t_i)]) \quad (\text{III. 100})$$

Les quatre valeurs propres de cette matrice, $\lambda_i, i = \overline{1,4}$, sont les multiplicateurs de Floquet et permettent de déterminer la stabilité de la solution périodique :

- Si les modules de toutes les valeurs propres sont strictement inférieurs à 1, $|\lambda_i| < 1, i = \overline{1,4}$, la solution est asymptotiquement stable.
- Si un module au moins est égal à un, c'est-à-dire $\exists |\lambda_i| = 1$, la solution est stable.
- Si un module au moins est supérieur à 1, c'est-à-dire $\exists |\lambda_i| > 1$, la solution est instable

III.3.3. Résultats et comparaisons avec le modèle numérique

Les résultats issus du modèle analytique sont comparés avec le modèle numérique (III.58) pour une bague flottante fonctionnant avec de l'air et pour la bague LH2 présentée au chapitre II.6.1. Les caractéristiques de la bague à air et de la bague LH2 sont données sur la Figure III. 16:

- Bague à air: $M=56\text{g}, R_1=45.29\text{ mm}, R_2=45.5\text{ mm}, R_3=47\text{ mm}, R_4=49.75\text{ mm}, R_5=53\text{ mm}, L=4\text{ mm}, C_{\text{jeu}}=20\text{ }\mu\text{m}, T_e^0=300^\circ\text{C}, P_e^0=9\text{ bars}, P_s^0=3\text{ bars}, \omega=4510.1\text{ rad/s}, \zeta_{\text{entrée}}=0.5\text{ et } \zeta_{\text{sortie}}=1.$
- Bague LH2: $R_1=37\text{ mm}, L=10\text{ mm}, C_{\text{jeu}}=50\text{ }\mu\text{m}, P^0_{\text{entrée}}=27\text{ bars}, P^0_{\text{sortie}}=21\text{ bars}, T^0_{\text{entrée}}=37\text{ K}, \omega=36500\text{ tr/min}, \zeta_{\text{entrée}}=0.1\text{ et } \zeta_{\text{sortie}}=1.$

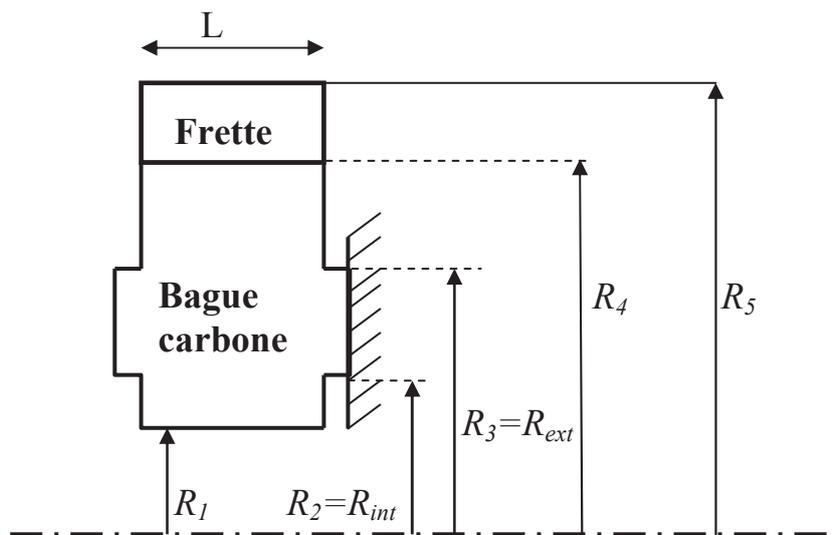


Figure III. 16 Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement de la bague à air

Afin de solutionner le fonctionnement dynamique de la bague il est nécessaire de déterminer d'abord la force de frottement dans l'étanchéité secondaire (le contact entre le nez de la bague et le stator). Ce contact est analysé à l'aide du modèle de frottement mixte présenté au paragraphe III.2.1. Il est considéré (aussi bien pour la bague flottante fonctionnant à air que pour la bague flottante à LH2) que les caractéristiques du contact des aspérités sont (ces valeurs sont basées sur le référence [67]) :

Densité des aspérités sur le nez de la bague	$= 0.4588 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2}$
Densité des aspérités sur la face du stator	$= 0.4 \cdot 10^{10} \text{ m}^{-2}$
Rayon des aspérités.....	$= 0.52 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
Ecart type des rugosités sur le nez de la bague	$= 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Ecart type des rugosités du stator	$= 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$
Module d'élasticité de la bague (carbone).....	$= 0.142 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
Module d'élasticité du stator (acier).....	$= 0.2 \cdot 10^{12} \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson de la bague (carbone).....	$= 0.22$
Coefficient de Poisson du stator (acier).....	$= 0.29$

Le Tableau III. 2 présente les résultats du modèle de contact avec frottement mixte. La force totale de contact F_z issue de la somme des pressions sur les faces amont et aval de la bague flottante est la somme de la force de fluide $F_{z,fluide}$ et de la force de contact des aspérités $F_{z,asp}$, $F_z = F_{z,fluide} + F_{z,asp}$. La force de frottement sur la face de contact comprend la force de frottement visqueux et la force de frottement d'aspérité, $F_f = F_{f,fluide} + F_{f,asp}$. La force de frottement des aspérités, $F_{f,asp} = fF_{z,asp}$, est calculée pour une valeur du coefficient de frottement sec carbone/acier $f=0.2$.

Le modèle de contact fournit également la distance h entre les deux surfaces de contact qui est d'environ 1.6 μm . Ceci confirme l'existence d'un régime de frottement mixte entre le nez de la bague et le stator car l'écart type des rugosités des deux surfaces en contact est $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = 0.7 \mu\text{m}$, et la condition $\sigma < h < 3 \sigma$ est bien vérifiée.

Tableau III. 2 Les forces de contact bague/stator.

Bague	F_z [N]	h [μm]	$F_{z,fluide}$ [N]	$F_{z,asp}$ [N]	F_f [N]	$F_{f,asp}$ [N]	$F_{f,fluide}$ [N]	$f_{eq}=F_f/F_z$
Bague à air	428.24	1.591	283.75	144.86	28.9735	28.972	1.5055E-3	0.06766
LH2	1352	1.58	1156.8	194.2	38.8441	38.8438	2.344E-04	0.028731

Les résultats présentés dans le Tableau III. 2 montrent que la force de fluide $F_{z,fluide}$ représente entre 66% et 86% de l'effort normal F_z . ce qui diminue d'une manière significative la force de contact des aspérités $F_{z,asp}$. Comme la force de frottement de fluide $F_{f,fluide}$ est très faible par rapport à la force de frottement d'aspérité $F_{f,asp}$, le coefficient de frottement équivalent $f_{\acute{e}q}=F_f/F_z$, apparaît ainsi beaucoup diminué par rapport à la valeur $f=0.2$ du coefficient de frottement sec carbone/acier.

Ces résultats sont ensuite utilisés dans les modèles de comportement dynamique de la bague. La force de frottement F_f (ou la force de frottement des aspérités $F_{f,asp}$) sont directement injectées dans l'équation (III.80) du modèle analytique tandis que le coefficient de frottement équivalent $f_{\acute{e}q}$ est utilisé avec les équations de Petrov (III.57) dans le modèle numérique.

Bague à air

Les résultats obtenus pour les conditions nominales de fonctionnement de la bague à air sont présentés sur les Figure III. 17-Figure III. 20. Les résultats montrent que sous l'effet de la force de frottement la bague reste bloquée pour des amplitudes d'excitation du rotor $e_R/C_{jeu} < 0.7$. La bague peut ensuite suivre les vibrations synchrones du rotor jusqu'au contact qui se produit pour une excentricité $e_R/C_{jeu} = 3$. Dans toutes les situations les valeurs propres de la matrice de monodromie (III.100) sont $|\lambda_i| < 1$; le fonctionnement dynamique de la bague flottante est donc stable. Les figures montrent également que les résultats des analyses analytiques et numériques sont identiques. L'angle γ entre les vecteurs \vec{e}_B et \vec{e}_{BR} est présenté sur la Figure III. 19. Par analogie avec la réponse au balourd d'un palier, si l'on considère que le rotor est l'excitateur et la bague flottante le système excité, des valeurs $0 < \gamma < 90^\circ$ indiquent un régime sous-critique, la valeur $\gamma = 90^\circ$ correspond à la résonance et $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ caractérise un régime sur-critique. Les valeurs de $\gamma > 110^\circ$ présentées sur la Figure III. 19 montrent que la bague commence à glisser sur le stator directement en régime sur-critique. Le contact a donc lieu suite à la diminution du jeu radial entre la bague et le rotor au fur et à mesure que la bague avance dans le régime sur-critique. La diminution progressive de l'angle $\varphi = \varphi_R$ entre les vecteurs \vec{e}_B et \vec{e}_R présenté sur la Figure III. 20 montre que le centre R du rotor se place progressivement entre le centre O du système de coordonnées autour duquel la précession a lieu et le centre B de la bague.

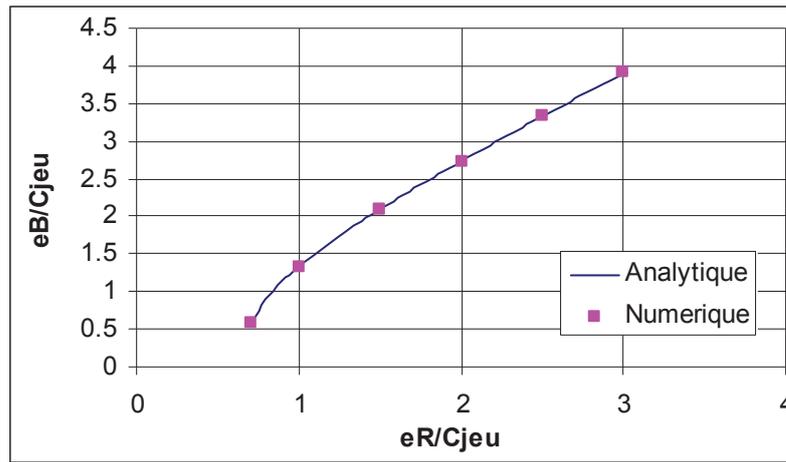


Figure III. 17 Excentricité relative de la bague

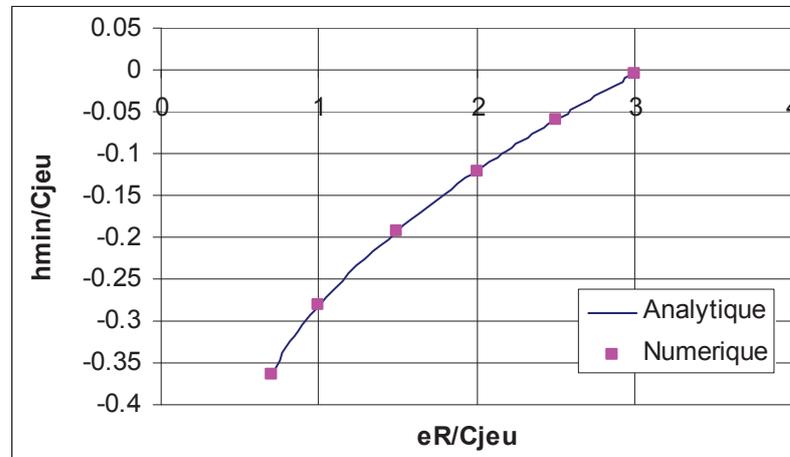


Figure III. 18 Epaisseur minimale du film entre le rotor et la bague¹⁴.

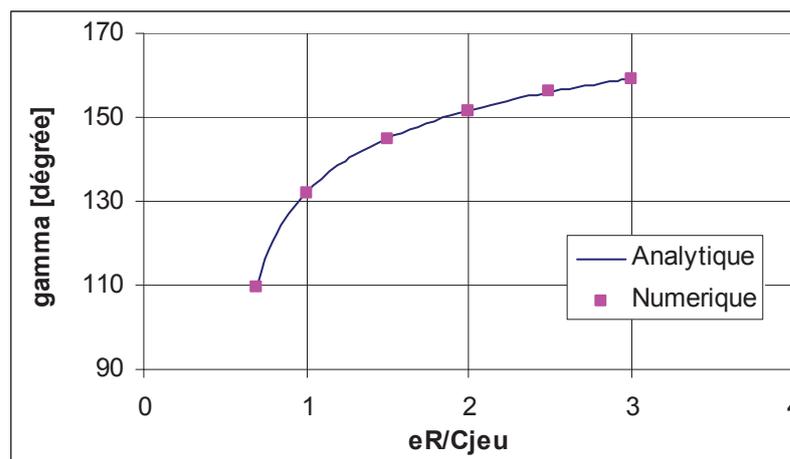


Figure III. 19 Angle de déphasage du rotor par rapport à la bague flottante.

¹⁴ La définition de l'épaisseur minimal du film est donné par la relation (III.103).

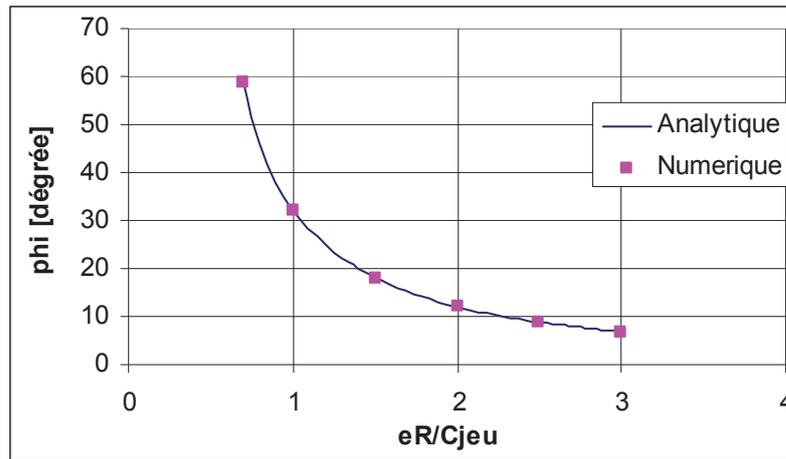


Figure III. 20 Angle du rotor par rapport à la bague flottante.

Il est justifié de se poser la question du domaine de fonctionnement de cette bague. La vitesse de rotation de l'arbre a donc été variée de 1510 rad/s à 7510 rad/s et la pression à l'entrée de 5 bars à 13 bars tout en gardant constante la pression à la sortie de la bague.

Tableau III. 3 Fonctionnement de la bague flottante à air à $P_e^0=9\text{bars}$.

Vitesse de rotation [rad/s]	1510.1	2510.1	3510.1	4510.1	5510.1	6510.1	7510.1	
Amplitude d'excitation (%)	0.1							
	0.2							
	0.3							
	0.4						bloquée	
	0.5					bloquée	bloquée	flotte
	0.6			bloquée	flotte	flotte	flotte	
	0.7		bloquée	flotte	flotte			
	0.8	bloquée	flotte					
	0.9	Flotte						flotte
	1						flotte	contact
	1.1						contact	
	1.2					flotte		
	1.3					contact		
	1.4							
	...							
	3				flotte			
	3.1				contact			
	...							
	3.4			flotte				
3.5			contact					
...								
4		flotte						
4.1		contact						
...								
10.6	flotte							
10.7	contact							

Le Tableau III. 3 présente les résultats obtenus pour $P_e^0=9\text{bars}$. A faible amplitude d'excitation de l'arbre, la bague est bloquée (zone marquée en jaune ou gris clair). Pour des fortes amplitudes d'excitation, la bague finit par arriver en contact avec l'arbre (zone marquée en rouge ou gris foncé). La zone de fonctionnement correct où la bague flottante suit les vibrations du rotor est marquée en bleu ou gris. Il est à noter que le système d'étanchéité peut fonctionner convenablement aussi dans la zone marquée en jaune ou gris clair car la vibration du rotor est contenue à l'intérieur du jeu radial et la bague flottante s'y comporte comme un joint annulaire.

Cette analyse est répétée pour d'autres pressions d'entrée et les limites du fonctionnement correct (bague bloquée et bague en contact avec le rotor) sont présentées sur la Figure III. 21. Le fonctionnement correct du système d'étanchéité à bague flottante dépend donc des conditions de fonctionnement. Par exemple, la Figure III. 21 montre que pour $P_e^0 < 11\text{ bar}$ la bague flottante analysée peut suivre les vibrations synchrones du rotor jusqu'à 6500 rad/s et présente un optimum autour de $P_e^0=9\text{ bar}$ où elle peut fonctionner pour des grandes amplitudes d'excitation. Pour $P_e^0=13\text{ bars}$ le fonctionnement sans contact est toujours possible mais seulement à partir des vibrations synchrones supérieures à 2500 rad/s et pour des amplitudes d'excitation limitées.

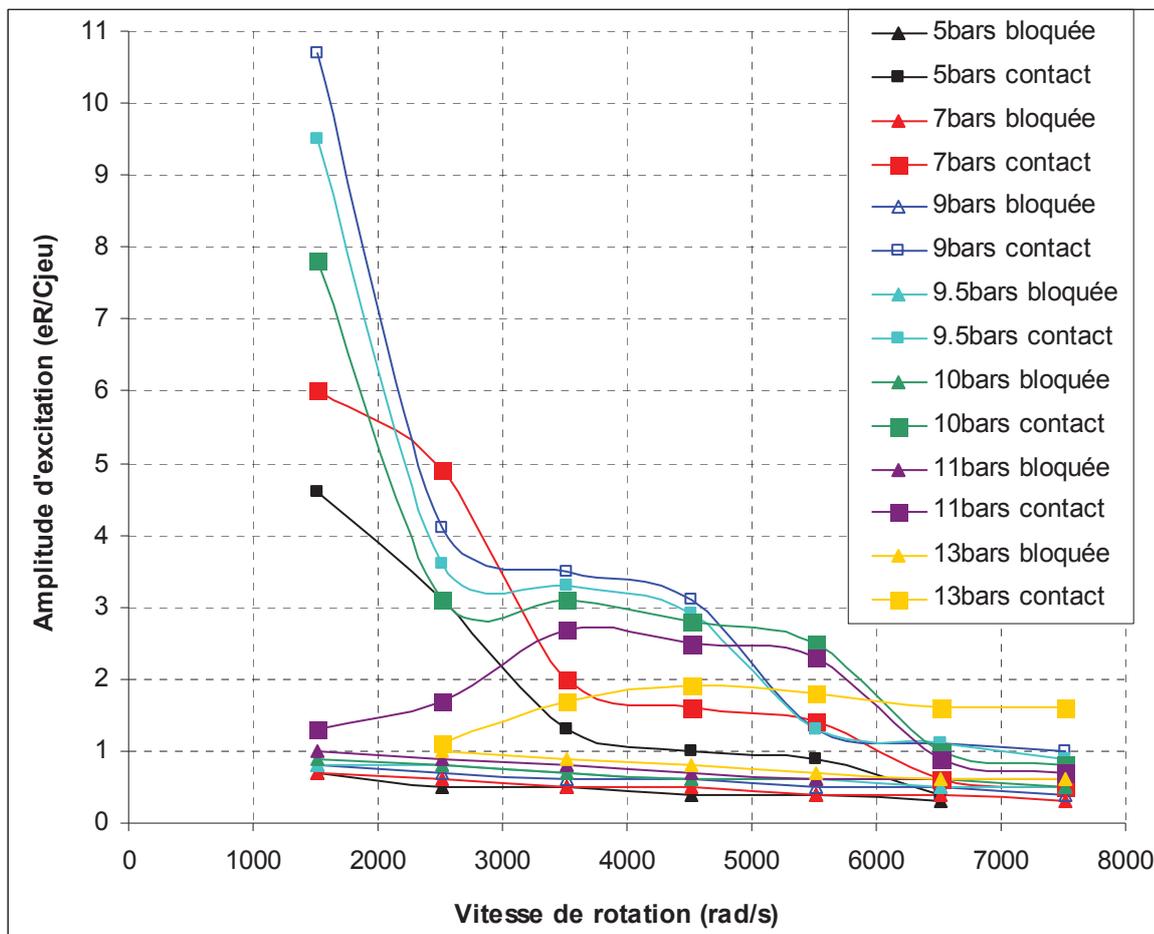


Figure III. 21 Domaine de fonctionnement de la bague flottante à air.

Il semble que la position de blocage final de la bague flottante dépend de la pression à l'entrée mais qu'elle est indépendante de la vitesse de rotation.

Il est à noter que pour toutes les conditions de fonctionnement de la bague à air analysées, la solution analytique a toujours été stable (les quatre valeurs propres de la matrice de monodromie (III.100) sont toutes inférieures à l'unité) et identique à la solution numérique. Une situation différente est rencontrée pour la bague fonctionnant en LH2.

Bague LH2

Les résultats analytiques et numériques de la bague LH2 du paragraphe II.6.1 sont présentés sur les Figure III. 22-Figure III. 25. Les conditions de fonctionnement ont été décrites dans le Chapitre II. Les résultats du modèle analytique sont identiques à ceux du modèle numérique jusqu'à une amplitude d'excitation de $1.1C_{jeu}$. Pour $e_R/C_{jeu}=1.15$ le modèle numérique aboutit à une solution sans contact mais qui est caractérisée par une réponse quasi-périodique de la bague (Figure III. 26, Figure III. 27). Pour des amplitudes d'excitation plus grandes le modèle numérique prédit un contact entre la bague et le rotor tandis que le modèle analytique continue à fournir une solution. L'explication à ce résultat est donnée par l'analyse des valeurs propres de la matrice de monodromie de la solution analytique (III.100). Pour $e_R/C_{jeu} \geq 1.15$ la matrice de monodromie a une valeur propre supérieure à l'unité ce qui indique un fonctionnement instable. La solution analytique n'est alors plus correcte car son hypothèse de départ (le fait que la bague suit le mouvement de précession synchrone du rotor avec un déphasage et une amplitude constante) n'est plus correcte.

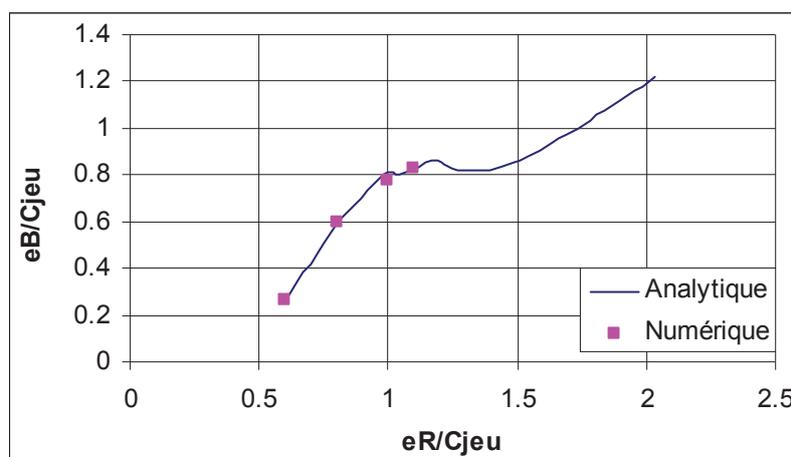


Figure III. 22 Excentricité relative de la bague

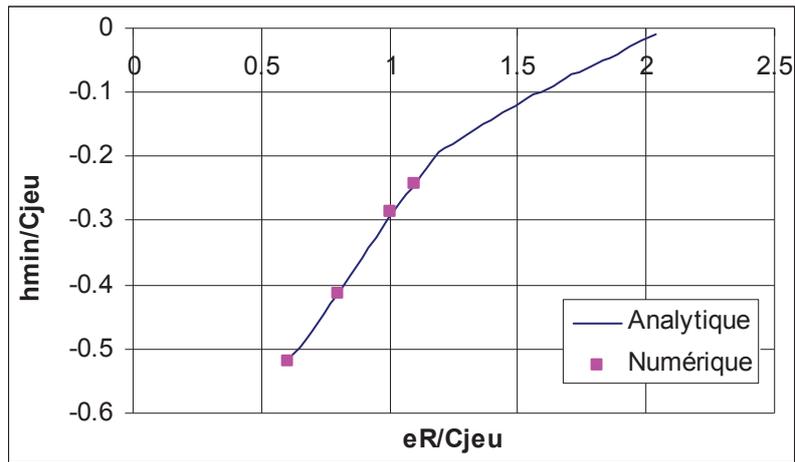


Figure III. 23 Epaisseur minimale du film.

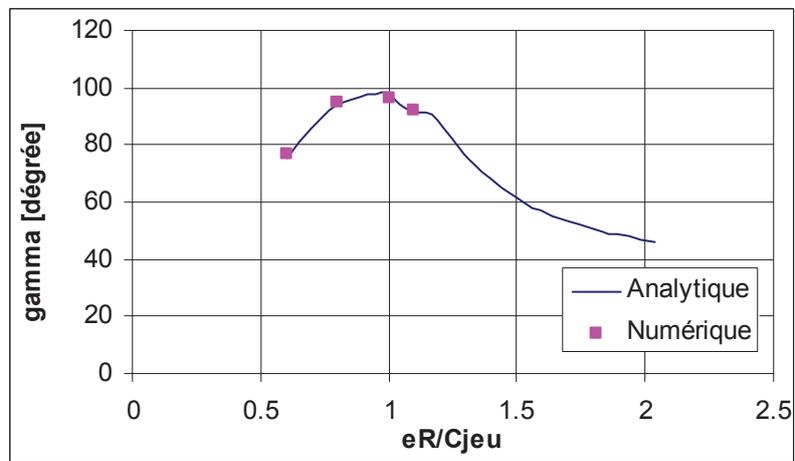


Figure III. 24 Angle de déphasage du rotor par rapport à la bague flottante.

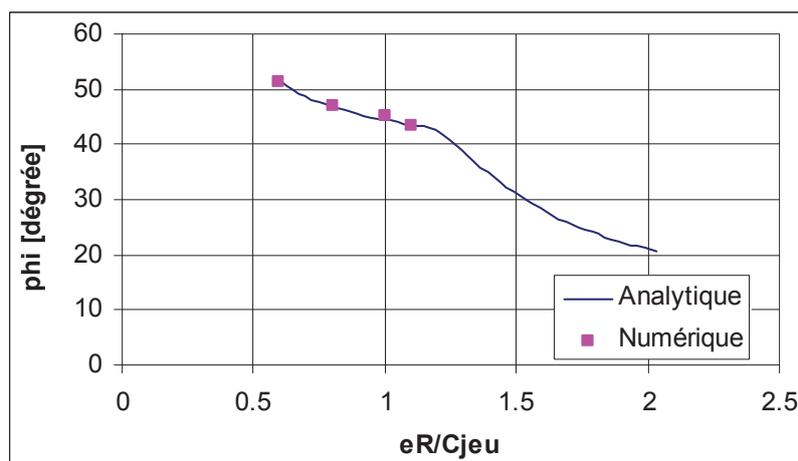


Figure III. 25 Angle du rotor par rapport à la bague flottante.

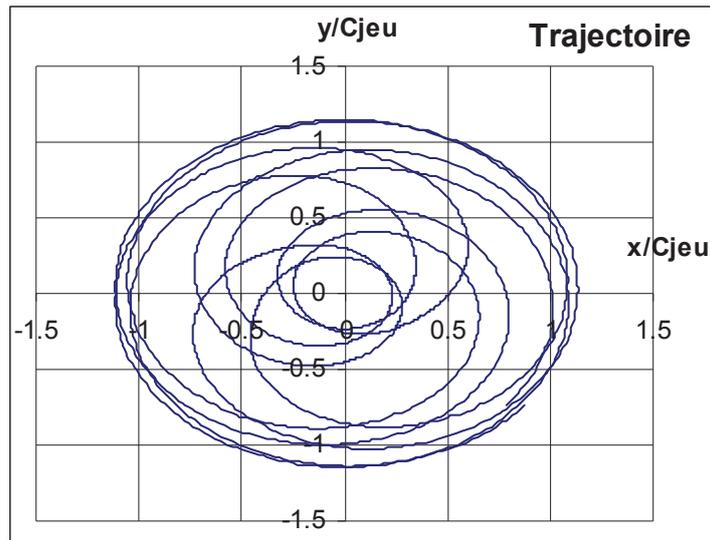


Figure III. 26 Trajectoire de la bague à $e_R/C_{jeu}=1.15$

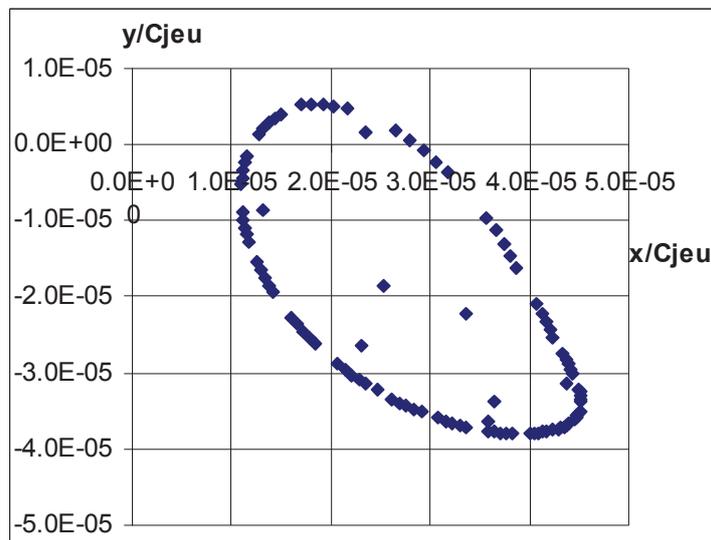


Figure III. 27 Carte de Poincaré à $e_R/C_{jeu}=1.15$

La réponse non-linéaire de la bague et le caractère quasi-périodique des résultats de la solution numérique pour $e_R/C_{jeu}=1.15$ sont analysés à l'aide des Figure III. 26-Figure III. 27. La Figure III. 26 montre la trajectoire de la bague mais le caractère quasi-périodique est déterminé à l'aide du diagramme de Poincaré représentée sur la Figure III. 27. Le contenu fréquentiel de la réponse de la bague est analysé sur la Figure III. 30 qui représente les amplitudes de la transformée de Fourier de la trajectoire suivant x. Le contenu fréquentiel montre un spectre continu avec des pics élevés pour la valeur synchrone de 608 Hz, pour 365 Hz et 851 Hz.

L'épaisseur minimale du film est représentée sur la Figure III. 28 et les valeurs négatives montrent qu'il n'y a pas de contact bague/rotor. Le caractère continu des courbes représentées sur la Figure

III. 26 montre aussi que la bague n'est jamais bloquée sous l'effet de la force de frottement et glisse en permanence sur le stator. Cette remarque est validée par la Figure III. 29 qui montre que le rapport entre la force de frottement instantanée issue de l'intégration numérique de l'équation (III.57) et la valeur $f_{eq}F_z$ est égal à 1.

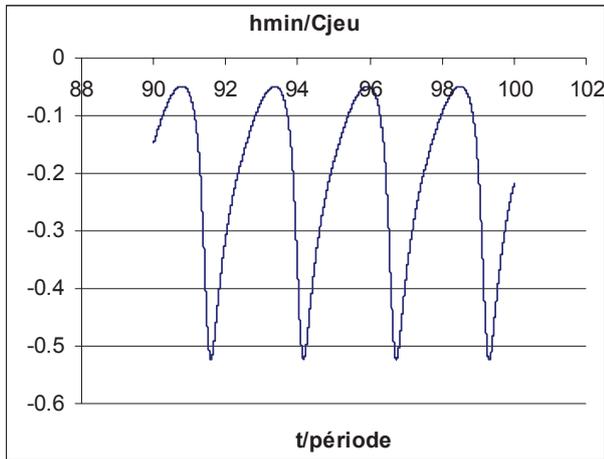


Figure III. 28 Epaisseur minimale du film à $e_R/C_{jeu}=1.15$

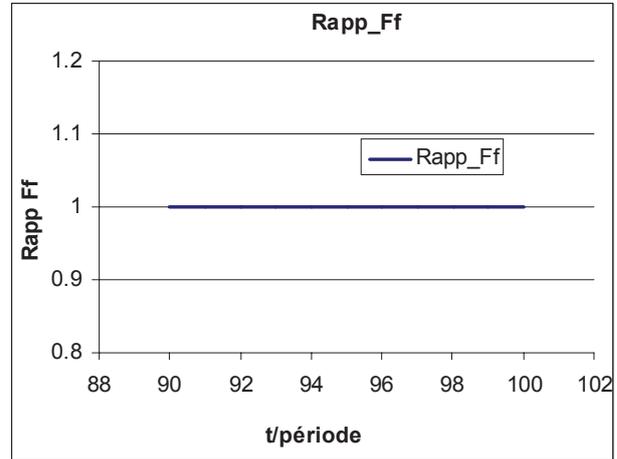


Figure III. 29 Valeur du rapport

$$\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{eq} F_z \text{ à } e_R/C_{jeu}=1.15$$

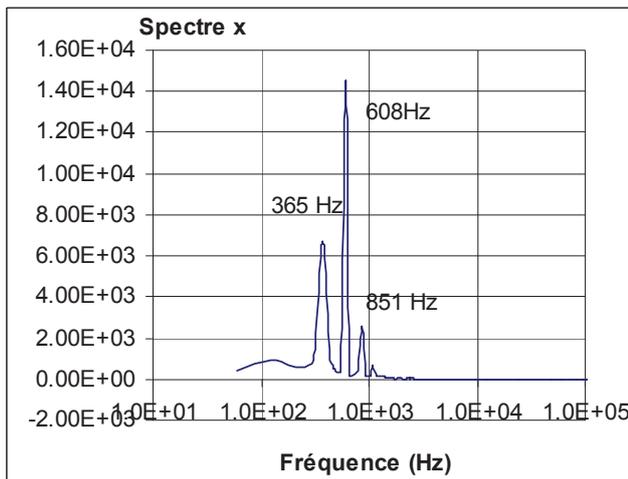


Figure III. 30 Analyse de Fourier de la trajectoire suivant x à $e_R/C_{jeu}=1.15$

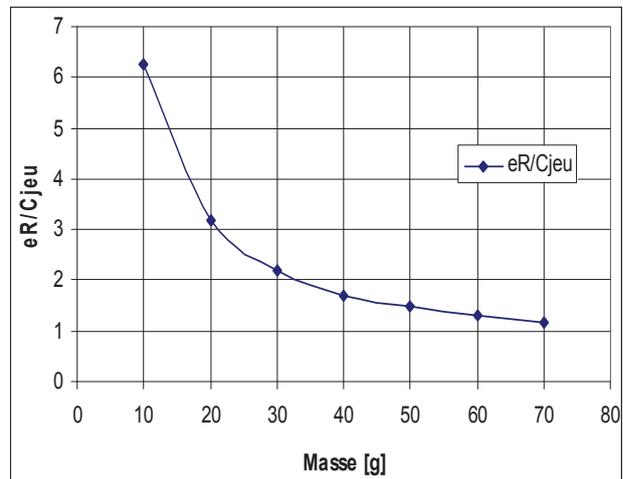


Figure III. 31 Limite du fonctionnement périodique de la bague LH2.

Il faut aussi remarquer que pour $e_R/C_{jeu}=1.15$ l'angle γ entre les vecteurs \vec{e}_B et \vec{e}_{BR} présenté sur la Figure III. 24 a des valeurs très proches de 90° ce qui indique que le fonctionnement non-linéaire

de la bague apparaît au voisinage de la résonance. La Figure III. 25 montre que la bague commence à glisser sur le rotor en régime sous-critique. Le régime critique déclenche une réponse non-linéaire qui finalement ne peut pas être dépassée car les amplitudes sont élevées et la bague arrive en contact avec le rotor.

Ce régime de fonctionnement non-linéaire peut être reproduit en modifiant d'une manière hypothétique la masse de la bague, toutes les autres conditions de fonctionnement restant les mêmes. La Figure III. 31 présente le dernier point de fonctionnement quasi-périodique pour des masses de la bague comprises entre 10g et 70g. Une fois cette valeur de e_R/C_{jeu} dépassée le rotor vient en contact avec la bague. La diminution de la masse de la bague flottante a donc un effet favorable sur la capacité de la bague de suivre les vibrations du rotor car la limite du fonctionnement sans impact rotor/bague se déplace de $e_R/C_{jeu} = 1.15$ pour $M=70g$ à $e_R/C_{jeu} = 6.25$ à $M=10g$.

III.4. Solution numérique complète du régime de fonctionnement dynamique

III.4.1. Force d'impact entre la bague et le rotor

Des contacts bague/rotor peuvent avoir lieu si l'amplitude de vibration du rotor est élevée et la bague ne peut pas suivre les déplacements du rotor. Dans ce cas, soit la bague peut résister aux contacts et continue à fonctionner, soit les impacts amplifient l'amplitude de ses vibrations et son fonctionnement devient instable. La force d'impact bague/rotor est donc un élément important pour l'analyse dynamique.

Coefficient de restitution

Le modèle d'impact le plus simple est basé sur le coefficient de restitution où les vitesses de deux corps avant et après le contact sont liées par la relation :

$$v_{1_{final}} - v_{2_{final}} = r(v_{1_{initial}} - v_{2_{initial}}) \quad (\text{III. 101})$$

Le coefficient de restitution r est adimensionnel et varie entre 0 (contact totalement inélastique) et 1 (contact totalement élastique). Ce coefficient est la mesure de l'énergie perdue pendant l'impact dû aux dissipations d'énergie comme le travail des forces viscoélastiques, des forces de déformation plastique, ou de la vibration des corps. Il dépend des matériaux des solides en contact, de leur

géométrie et de la vitesse d'impact. Par exemple, une formule proposée pour le calcul du coefficient de restitution est [73] :

$$r(v) = 1 - f(v^{1/5}) \quad (\text{III. 102})$$

où v est la vitesse d'impact et f est une fonction de la vitesse. Cette relation montre que plus la vitesse d'impact est élevée, plus l'énergie perdue est importante.

L'avantage du modèle de coefficient de restitution est sa simplicité. Cependant, le modèle dépend largement de la valeur du coefficient de restitution et son évaluation exige des travaux expérimentaux. De plus, le modèle ne fournit pas directement la force d'impact et de ce fait ne peut pas être inclus directement dans les équations du PFD.

Modèle de contact de Hertz

Ce modèle est basé sur la théorie du contact de Hertz [74] et a été déjà utilisé pour l'analyse des contacts rotor/paliers [75]. Il doit être souligné que le modèle de Hertz n'est valable que pour des contacts non-conformes, où les rayons de contact des deux solides sont très différents. Pour le contact bague/rotor les rayons sont extrêmement proches ce qui est normalement en dehors des limites d'application du modèle. Toutefois le modèle de Hertz est ici utilisé pour donner une approche qualitative de la force d'impact.

Il est donc supposé que les deux solides en contact subissent une déformation δ pendant l'impact.

Le rotor et la bague sont représentés dans un système de coordonnées fixes (Figure III. 32). Le rotor a un mouvement de rotation avec une vitesse ω et un mouvement de précession avec la vitesse $\Omega = \dot{\phi}_R$. L'épaisseur minimale du film dans l'étanchéité principale entre le rotor et la bague est :

$$h_{\min} = \delta = \sqrt{(x_R - x_B)^2 + (y_R - y_B)^2} - C_{\text{jeu}} \quad (\text{III. 103})$$

Une valeur négative indique l'absence du contact et si $\delta \geq 0$, un contact a lieu entre le rotor et la bague.

Dans un système de coordonnées lié à la ligne des centres \overrightarrow{BR} , la force issue de l'impact a une composante radiale et une autre tangentielle. Ces composantes sont exprimées à l'aide du modèle de Hertz pour un contact ponctuel [74] et de la loi de Coulomb:

$$F_r = \begin{cases} 0 & \delta \leq 0 \\ K_P \delta^\alpha & \delta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III. 104})$$

$$F_t = fF_r = \begin{cases} 0 & \delta \leq 0 \\ fF_r \text{sign}(v_{R/B,t}) & \delta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III. 105})$$

où K_P est la raideur constante du contact de Hertz, $K_P=10^7$ N/m.

α est l'exposant du contact de Hertz, $\alpha=1.1$.

f est le coefficient de frottement, $f=0.2$.

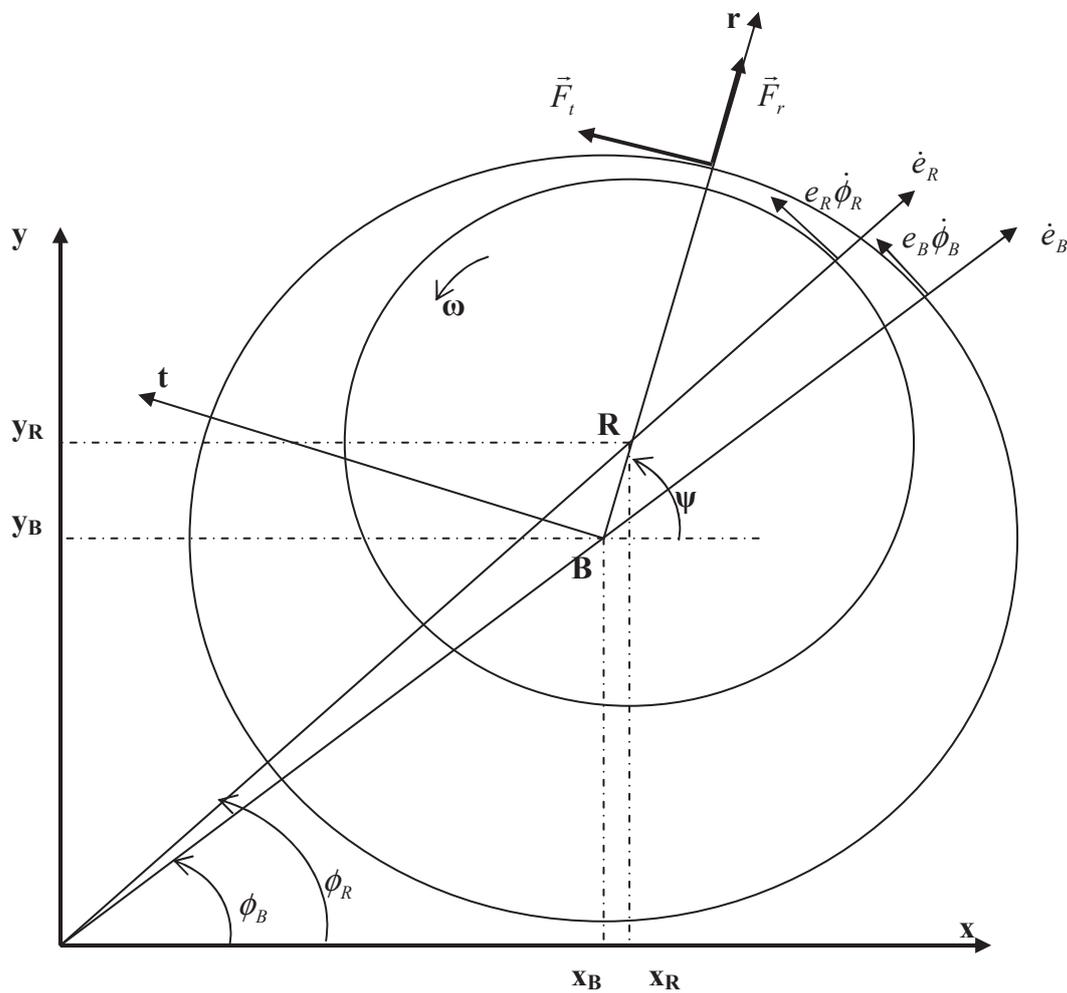


Figure III. 32 Forces et vitesses au contact rotor-stator

La composante radiale de la force de contact a la direction de la ligne des centres \overline{BR} . La composante tangente de la force de contact est proportionnelle à la force de contact radiale et son

sens dépend de la vitesse relative du rotor par rapport à la bague au point de contact $v_{R/B,t}$ exprimée dans le système de coordonnées lié à la ligne des centres \overline{BR} . Afin de déterminer $v_{R/B,t}$ il faut exprimer les vitesses de la bague et du rotor. Dans un système de coordonnées cartésiennes les vitesses du rotor ou de la bague s'expriment en fonction des vitesses représentées sur la Figure III. 32 :

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ e\dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e} \cos \phi - e\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{e} \sin \phi + e\dot{\phi} \cos \phi \end{bmatrix} \quad (\text{III. 106})$$

où :

$$e = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{III. 107})$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{III. 108})$$

$$\sin \phi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{III. 109})$$

$$\dot{e} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{III. 110})$$

$$\dot{\phi} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2} \quad (\text{III. 111})$$

La vitesse du rotor par rapport à la bague est :

$$\vec{v}_{R/B} = \vec{v}_R - \vec{v}_B = [v_{R,x} - v_{B,x}] \vec{e}_x + [v_{R,y} - v_{B,y}] \vec{e}_y = v_{R/B,x} \vec{e}_x + v_{R/B,y} \vec{e}_y \quad (\text{III. 112})$$

où $\vec{v}_R(v_{R,x}, v_{R,y})$ et $\vec{v}_B(v_{B,x}, v_{B,y})$ sont déterminées à l'aide des relations (II.106) car la bague et le rotor sont traités comme des solides rigides, leurs vitesses respectives ayant la même valeur en tous les points.

$$\begin{bmatrix} v_{R,x} \\ v_{R,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_R \cos \phi_R - e_R \dot{\phi}_R \sin \phi_R \\ \dot{e}_R \sin \phi_R + e_R \dot{\phi}_R \cos \phi_R \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{B,x} \\ v_{B,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{e}_B \cos \phi_B - e_B \dot{\phi}_B \sin \phi_B \\ \dot{e}_B \sin \phi_B + e_B \dot{\phi}_B \cos \phi_B \end{bmatrix} \quad (\text{III. 113})$$

Dans le système de coordonnées lié à la ligne des centres \overline{BR} et incliné d'un angle Ψ par rapport à Ox les composantes de la vitesse du rotor par rapport à la bague au point de contact sont :

$$\begin{bmatrix} v_{R/B,r} \\ v_{R/B,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{R/B,x} \\ v_{R/B,y} \end{bmatrix} \quad (\text{III. 114})$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{y_R - y_B}{x_R - x_B}\right) \quad (\text{III. 115})$$

Au point du contact, ces relations doivent être corrigées avec la vitesse issue de la rotation ω du rotor. Les relations finales sont :

$$v_{R/B,r} = v_{R/B,x} \cos\psi + v_{R/B,y} \sin\psi \quad (\text{III. 116})$$

$$v_{R/B,t} = -v_{R/B,x} \sin\psi + v_{R/B,y} \cos\psi + R\omega \quad (\text{III. 117})$$

Cette vitesse $v_{R/B,t}$ permet alors de déterminer le sens de la composante tangentielle de la force d'impact.

Remarque:

Ce modèle peut être enrichi en prenant en compte non pas seulement la déformation δ mais aussi la vitesse de déformation $\dot{\delta}$ du contact. Par exemple Wilkes et al. [76] ont utilisé une relation basée sur le modèle de Hunt et Crossley [77]:

$$F_r = k_1\delta + k_2\delta^2 + c\delta\dot{\delta} \quad (\text{III. 118})$$

$$F_t = fF_n \text{sgn}(V_T) \quad (\text{III. 119})$$

où k_1 , k_2 sont des coefficients de raideur non-linéaire, c est un coefficient d'amortissement non-linéaire et f est le coefficient de frottement.

Ce modèle est plus précis que celui basé sur la théorie de Hertz et la loi de Coulomb seulement si les coefficients k_1 , k_2 et c peuvent être estimés avec précision.

Le modèle basé sur la théorie de Hertz et la loi de Coulomb sera utilisé par la suite pour tous les impacts rencontrés. Ce modèle est plus simple car il ne fait pas intervenir la vitesse de déformation $\dot{\delta}$ et le coefficient d'amortissement c . Les forces d'impact rotor/bague nécessaires dans les équations du PFD exprimées dans un système de coordonnées cartésiennes sont :

$$\vec{F}_r^{R/B} = \vec{F}_{r,x}^{R/B} + \vec{F}_{r,y}^{R/B} = \begin{cases} 0 & \delta \leq 0 \\ K_p \delta^\alpha [\cos \psi \vec{e}_x + \sin \psi \vec{e}_y] & \delta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III. 120})$$

$$\vec{F}_t^{R/B} = \vec{F}_{t,x}^{R/B} + \vec{F}_{t,y}^{R/B} = \begin{cases} 0 & \delta \leq 0 \\ fK_p \delta^\alpha [-\sin \psi \vec{e}_x + \cos \psi \vec{e}_y] \text{sign}(v_{R/B,t}) & \delta \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III. 121})$$

III.4.2. Prise en compte de la rotation de la bague flottante autour de son axe

Dans certains cas la bague flottante peut tourner autour de son axe pendant le fonctionnement. Alors, la vitesse de chaque point de la bague est différente, étant la somme des vitesses de translation \dot{x}_B, \dot{y}_B et d'une vitesse de rotation $\bar{R} \dot{\theta}_B$ où \bar{R} est le rayon moyen du nez de la bague et $\dot{\theta}_B$ est la vitesse de rotation instantanée autour de son axe. Ceci entraîne des forces de frottement différentes suivant la circonférence de la bague. Pour résoudre ce problème, la bague est divisée en m segments (Figure III. 33). La force normale qui s'exerce sur chaque segment est F_z/m . La force de frottement sur chaque segment est différente car la vitesse locale sur la bague est variable le long de la circonférence.

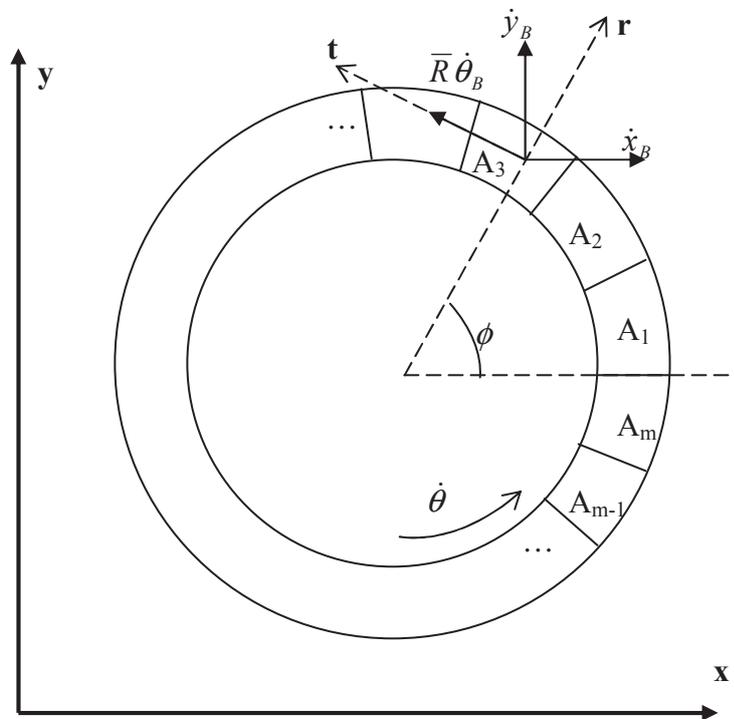


Figure III. 33 Discrétisation de la bague flottante.

$$V_{Ai,x} = \dot{x}_B - \bar{R} \dot{\theta}_B \sin \phi_{Ai}, \quad V_{Ai,y} = \dot{y}_B + \bar{R} \dot{\theta}_B \cos \phi_{Ai}, \quad i = \overline{1, m} \quad (\text{III. 122})$$

La force de frottement pour chaque segment est calculée selon le modèle de Petrov.

$$\dot{F}_{fi,x} = k_t \left[V_{Ai,x} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|F_{fi}\|}{2 \frac{f_{\acute{e}q} F_z}{m}} \right) \frac{F_{fi,x}}{\|F_{fi}\|} \right], \quad i = \overline{1, m} \quad (\text{III. 123})$$

$$\dot{F}_{fi,y} = k_t \left[V_{Ai,y} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \|F_{fi}\|}{2 \frac{f_{\acute{e}q} F_z}{m}} \right) \frac{F_{fi,y}}{\|F_{fi}\|} \right], \quad i = \overline{1, m} \quad (\text{III. 124})$$

où $\|F_{fi}\| = \sqrt{F_{fi,x}^2 + F_{fi,y}^2}$ est la force de frottement totale sur le segment i et $f_{\acute{e}q}$ est le coefficient de frottement équivalent déduit du modèle de contact d'aspérité.

Les équations du PFD de la bague doivent maintenant être complétée par une équation de moment autour de l'axe z . Elles s'écrivent :

$$M \ddot{x}_B = F_{dyn,x}^{R/B} - \sum_{i=1}^m F_{fi,x} + F_{r,x}^{R/B} + F_{t,x}^{R/B} \quad (\text{III. 125})$$

$$M \ddot{y}_B = F_{dyn,y}^{R/B} - \sum_{i=1}^m F_{fi,y} + F_{r,y}^{R/B} + F_{t,y}^{R/B} \quad (\text{III. 126})$$

$$J_P \ddot{\theta}_B = C_{dyn,z}^{R/B} - \underbrace{\sum_{i=1}^m (-F_{fi,x} \sin \phi_{Ai} + F_{fi,y} \cos \phi_{Ai})}_{C_{f,z}} \bar{R} + \underbrace{F_t^{R/B}}_{C_{contact,z}^{R/B}} R \quad (\text{III. 127})$$

où $F_r^{R/B}$ et $F_t^{R/B}$ sont les force radiale et tangentielle d'impact entre la bague et le rotor, calculées selon le modèle de Hertz présenté avant. Compte tenu de la vitesse de rotation de la bague, $\dot{\theta}_B$, la vitesse relative rotor/bague (III.114) est maintenant donnée par :

$$v_{R/B,t} = -v_{R/B,x} \sin \psi + v_{R/B,y} \cos \psi + R \omega - R \dot{\theta}_B \quad (\text{III. 128})$$

Les équations du PFD sont réécrites sous la forme d'un système d'équations différentielles d'ordre un:

$$\begin{cases}
\dot{r}_1 = r_2 \\
\dot{r}_2 = \frac{1}{M} \left[F_{dyn,x}^{R/B} - \sum_{i=1}^m r_{2(i-1)+5} + F_{r,x}^{R/B} + F_{t,x}^{R/B} \right] \\
\dot{r}_3 = r_4 \\
\dot{r}_4 = \frac{1}{M} \left[F_{dyn,y}^{R/B} - \sum_{i=1}^m r_{2(i-1)+6} + F_{r,y}^{R/B} + F_{t,y}^{R/B} \right] \\
\text{Pour } i = \overline{1..m} \\
\dot{r}_{2(i-1)+5} = k_t \left(r_2 - \bar{R} r_n \sin \phi_{Ai} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \sqrt{r_{2(i-1)+5}^2 + r_{2(i-1)+6}^2}}{2 \frac{f_{eq} F_z}{m}} \right) \frac{r_{2(i-1)+5}}{\sqrt{r_{2(i-1)+5}^2 + r_{2(i-1)+6}^2}} \right) \\
\dot{r}_{2(i-1)+6} = k_t \left(r_4 + \bar{R} r_n \cos \phi_{Ai} - \frac{1}{c} \tan \left(\frac{\pi \sqrt{r_{2(i-1)+5}^2 + r_{2(i-1)+6}^2}}{2 \frac{f_{eq} F_z}{m}} \right) \frac{r_{2(i-1)+6}}{\sqrt{r_{2(i-1)+5}^2 + r_{2(i-1)+6}^2}} \right) \\
\dot{r}_n = \frac{1}{J_P} \left(C_{dyn,z}^{R/B} - \sum_{i=1}^m (-r_{2(i-1)+5} \sin \phi_{Ai} + r_{2(i-1)+6} \cos \phi_{Ai}) \bar{R} + F_t R \right)
\end{cases} \quad (III. 129)$$

où les inconnues sont :

$$\{r_1, r_r, \dots, r_n\} = \{x_B, \dot{x}_B, y_B, \dot{y}_B, [F_{fi,x}, F_{fi,y}]_{i=1..m}, \dot{\theta}_B\}, \quad n=2m+5$$

Ce système d'équations différentielles est résolu par la méthode de Gear.

III.4.3. Prise en compte des pions anti-rotation

Certaines bagues flottantes sont prévues avec des pions antirotation pour empêcher leur rotation $\dot{\theta}_B$ autour de l'axe z (Figure III. 34). Ces pions sont des ergots disposés sur le stator. La frette métallique de la bague est prévue à son tour avec des encoches destinées à loger ces ergots. Comme il est montré sur la Figure III. 34 des jeux e_1 et e_2 sont prévus entre les pions et leurs encoches.

Des systèmes locaux de coordonnées Prt permettent de décrire les contacts entre la bague et les pions. Comme il est montré sur la Figure III. 34, des contacts ont lieu si la bague flottante se déplace d'une distance supérieure à e_1 en direction circonférentielle (positive ou négative) ou e_2 en direction radiale positive. Des forces d'impact et de frottement apparaissent alors entre les pions et la bague. Dans le système de coordonnée local lié au pion antirotation les forces d'impact sont $F_{1t,P}$, $F_{2r,P}$ et les forces de frottement sont $F_{1r,P}$, $F_{2t,P}$. Ces forces peuvent être décrites par le modèle de Hertz déjà présenté (paragraphe III.4.1).

$$F_{1t,P} = K_p \delta_{1,P}^\alpha, \quad F_{2r,P} = K_p \delta_{2,P}^\alpha \quad (\text{III. 130})$$

$$F_{1r,P} = fF_{1t,P} = fK_p \delta_{1,P}^\alpha, \quad F_{2t,P} = fF_{2r,P} = fK_p \delta_{2,P}^\alpha \quad (\text{III. 131})$$

où K_p et α sont les coefficients du contact de Hertz et f est le coefficient de frottement, ayant les mêmes valeurs que dans le modèle de contact bague/rotor ($K_p=10^7$ N/m, $\alpha=1.1$, $f=0.2$).

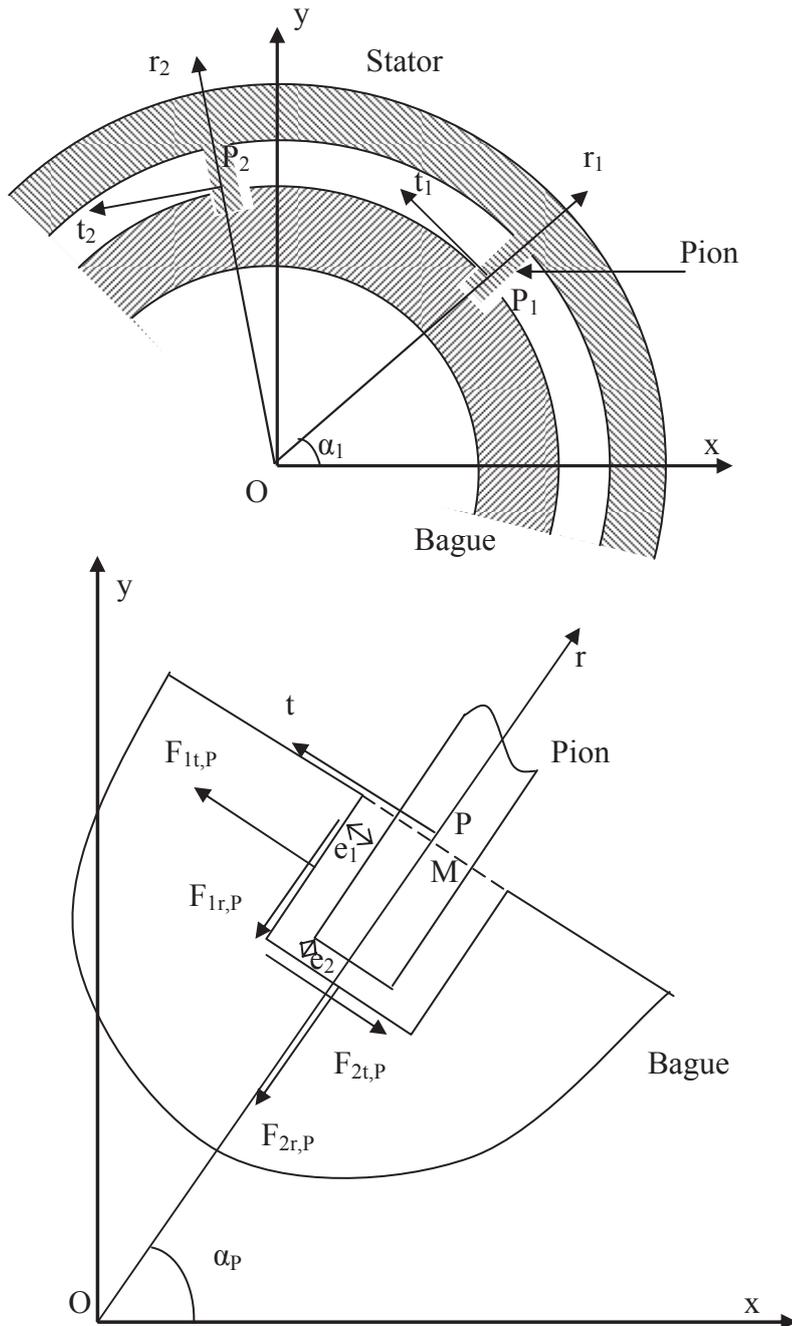


Figure III. 34 Modélisation de la bague flottante avec des pions anti-rotation.

Ces forces vont ensuite s'additionner pour donner les forces d'impact et de frottement dans le système cartésien global.

$$\begin{aligned} F_{imp,P,x} &= -F_{2r,P} \cos \alpha_P - \text{sign}(t_M) F_{1t,P} (-\sin \alpha_P) \\ &= -K_p \delta_{2,P}^\alpha \cos \alpha_P + \text{sign}(t_M) K_p \delta_{1,P}^\alpha \sin \alpha_P \end{aligned} \quad (\text{III. 132})$$

$$\begin{aligned} F_{imp,P,y} &= -F_{2r,P} \sin \alpha_P - \text{sign}(t_M) F_{1t,P} \cos \alpha_P \\ &= -K_p \delta_{2,P}^\alpha \sin \alpha_P - \text{sign}(t_M) K_p \delta_{1,P}^\alpha \cos \alpha_P \end{aligned} \quad (\text{III. 133})$$

$$\begin{aligned} F_{f,P,x} &= -\text{sign}(\dot{r}_M) F_{1r,P} \cos \alpha_P - \text{sign}(\dot{t}_M) F_{2t,P} (-\sin \alpha_P) \\ &= -\text{sign}(\dot{r}_M) fK_p \delta_{1,P}^\alpha \cos \alpha_P + \text{sign}(\dot{t}_M) fK_p \delta_{2,P}^\alpha \sin \alpha_P \end{aligned} \quad (\text{III. 134})$$

$$\begin{aligned} F_{f,P,y} &= -\text{sign}(\dot{r}_M) F_{1r,P} \sin \alpha_P - \text{sign}(\dot{t}_M) F_{2t,P} \cos \alpha_P \\ &= -\text{sign}(\dot{r}_M) fK_p \delta_{1,P}^\alpha \sin \alpha_P - \text{sign}(\dot{t}_M) fK_p \delta_{2,P}^\alpha \cos \alpha_P \end{aligned} \quad (\text{III. 135})$$

où t_M est le déplacement de la bague en direction circonférentielle et la fonction $\text{sign}(t_M)$ permet de tenir compte de la face de l'encoche où l'impact a lieu. Les fonctions $\text{sign}(\dot{r}_M)$ et $\text{sign}(\dot{t}_M)$ sont destinées à prendre en compte le sens de la force de frottement sur les faces des encoches.

Pour la prise en compte des contacts, il est nécessaire de calculer les déplacements d'un point M situé sur le rayon extérieur de la bague par rapport au pion P . Quand la bague est centrée et immobile, le point M est confondu avec le pion P . Le vecteur \overrightarrow{PM} issu du déplacement et/ou de la rotation de la bague a deux composantes r_M et t_M qui, pour vérifier de l'occurrence du contact, doivent être exprimées dans le système de coordonnées local du pion Prt . Si $r_M > e_2$, le contact a lieu au fond de l'encoche et si $t_M > e_1$ ou $t_M < -e_1$, le contact a lieu sur une des deux cotés de l'encoche. La position du point M doit donc être connue en permanence (Figure III. 35). A chaque pas de temps, le déplacement de ce point de M_0 en M résulte d'un mouvement de translation plane du centre B de la bague et de vecteur $\overrightarrow{B_0B}$ et d'un mouvement de rotation θ_B de la bague autour de son centre et de vecteur de position $\overrightarrow{M'M}$.

La bague étant considérée comme un solide rigide, $\overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{B_0B}$, et la position du point M_0 suite à la translation $\overrightarrow{B_0B}$ du centre de la bague est :

$$x_{M'} = x_{M_0} + \Delta x_{BB_0} = x_{M_0} + (x_B - x_{B_0}) \quad (\text{III. 136})$$

$$y_{M'} = y_{M_0} + \Delta y_{BB_0} = y_{M_0} + (y_B - y_{B_0}) \quad (\text{III. 137})$$

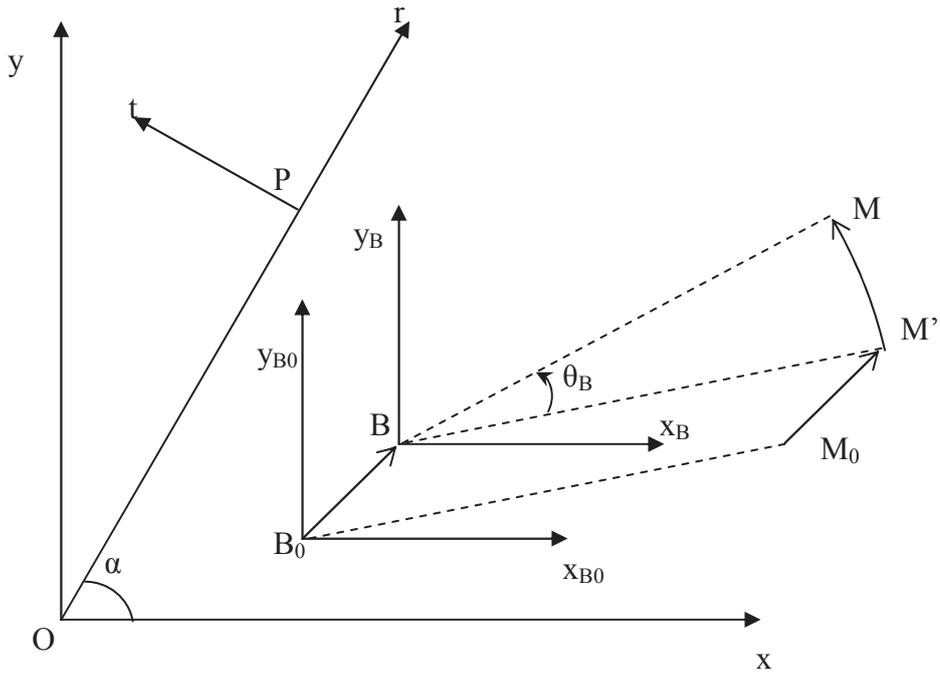


Figure III. 35 Déplacement du point M .

Le déplacement du point M' dû à la rotation θ_B est :

$$\begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \theta_B & -\sin \theta_B \\ \sin \theta_B & \cos \theta_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M'} - x_B \\ y_{M'} - y_B \end{bmatrix} \quad (\text{III. 138})$$

Les composants du vecteur $\overrightarrow{PM}(r_M, t_M)$ dans le système de coordonnées local du pion Prt sont alors calculées :

$$\begin{bmatrix} r_M \\ t_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \end{bmatrix} \quad (\text{III. 139})$$

Si $r_M > e_2$, le contact a lieu au fond de l'encoche et si $t_M > e_1$ ou $t_M < -e_1$, le contact a lieu sur une des deux cotés de l'encoche.

Finalement le système d'équations du PFD de la bague avec la prise en compte de sa rotation, des impacts rotor/bague et des impacts bague/pions s'écrit :

$$M\ddot{x}_B = F_{dyn,x}^{R/B} - \sum_{i=1}^m F_{fi,x} + F_{r,x}^{R/B} + F_{t,x}^{R/B} + \sum_{j=1}^l (F_{imp,Pj,x} + F_{f,Pj,x}) \quad (\text{III. 140})$$

$$M\ddot{y}_B = F_{dyn,y}^{R/B} - \sum_{i=1}^m F_{fi,y} + F_{r,y}^{R/B} + F_{t,y}^{R/B} + \sum_{j=1}^l (F_{imp,Pj,y} + F_{f,Pj,y}) \quad (\text{III. 141})$$

$$J_P \ddot{\theta}_B = C_{dyn,z}^{R/B} - \underbrace{\sum_{i=1}^m (-F_{fi,x} \sin \phi_{Ai} + F_{fi,y} \cos \phi_{Ai})}_{C_{f,z}} \bar{R} + \underbrace{F_{t,z}^{R/B}}_{C_{contact,z}^{R/B}} R + R_e \underbrace{\sum_{j=1}^l (-\text{sign}(t_j) F_{1t,Pj} - \text{sign}(\dot{t}_j) F_{2t,Pj})}_{C_{contact,z}^{Pion/B}} \quad (\text{III. 142})$$

où l est le nombre de pions et R_e le rayon extérieure de la bague. Le système doit être complété avec $2m$ équations différentielles à l'ordre un pour les forces de frottement locales $\dot{F}_{fi,x}, \dot{F}_{fi,y}$ dans l'étanchéité secondaire données par (III.123), (III.124).

III.4.4. Résultats de la solution numérique complète. Bague flottante fonctionnant en LH2

Le précédent joint annulaire à bague flottante fonctionnant avec du LH2 est maintenant analysé en tenant compte de la rotation de bague autour de son axe, de l'impact bague/rotor et de l'impact bague/pion. Les conditions de fonctionnement sont les mêmes et le rotor est supposé avoir un mouvement de précession circulaire synchrone. Les cas de calculs suivants seront présentés :

1. $e_R/C_{jeu}=1$, sans pions antirotation
2. $e_R/C_{jeu}=2$, sans pions antirotation
3. $e_R/C_{jeu}=3$, sans pions antirotation
4. $e_R/C_{jeu}=1$, avec 1 pion antirotation
5. $e_R/C_{jeu}=1$, avec 3 pions antirotation
6. $e_R/C_{jeu}=3$, avec 3 pions antirotation

1. Résultats pour $e_R/C_{jeu}=1$ et sans pions antirotation

Ce cas est identique à l'analyse effectuée au paragraphe III.3.3 excepté le fait que maintenant la bague peut avoir un mouvement de rotation autour de son axe. Les résultats sont présentés sur les Figure III. 36- Figure III. 40. Le calcul a été fait pour 300 périodes du rotor mais, afin d'éliminer le comportement transitoire au démarrage, seulement les 10 dernières périodes sont analysées. La trajectoire de la bague est un cercle représenté sur la Figure III. 36. Le diagramme de Poincaré représenté sur la Figure III. 37 indique également que la trajectoire de la bague est périodique. La Figure III. 38 présente les valeurs du rapport $\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{éq} F_z$. Les valeurs très proches de l'unité

de ce rapport montrent que la bague glisse continuellement sur la stator ; le phénomène "stick-slip" n'apparaît donc pas.

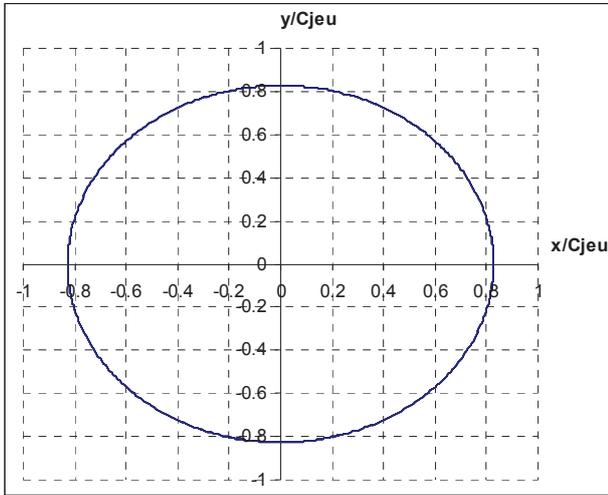


Figure III. 36 Trajectoire de la bague

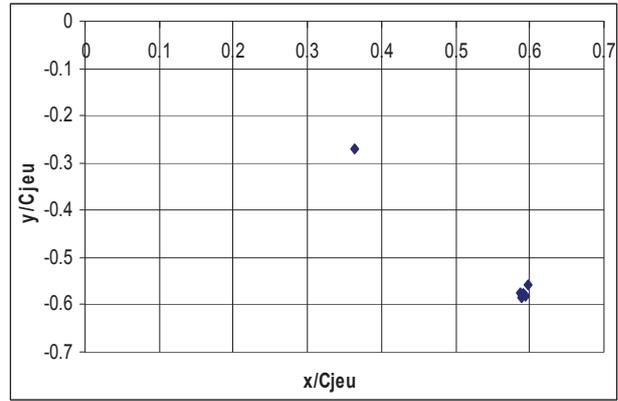


Figure III. 37 Carte de Poincaré.

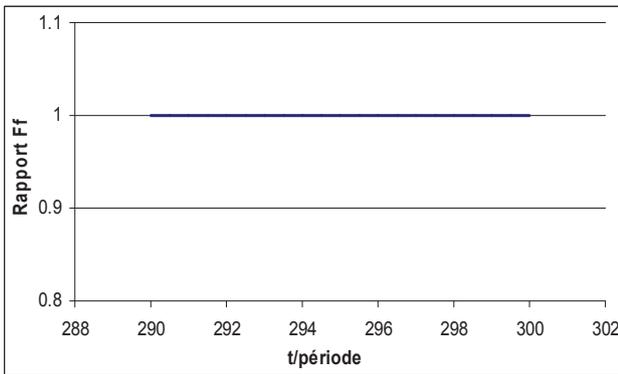


Figure III. 38 Valeurs du rapport $\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{\text{éq}} Fz$

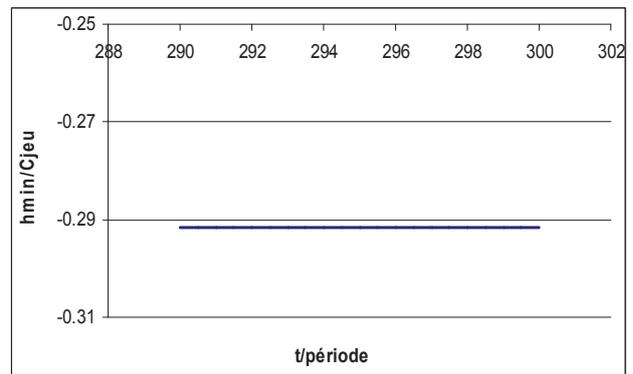


Figure III. 39 Epaisseur minimale du film.

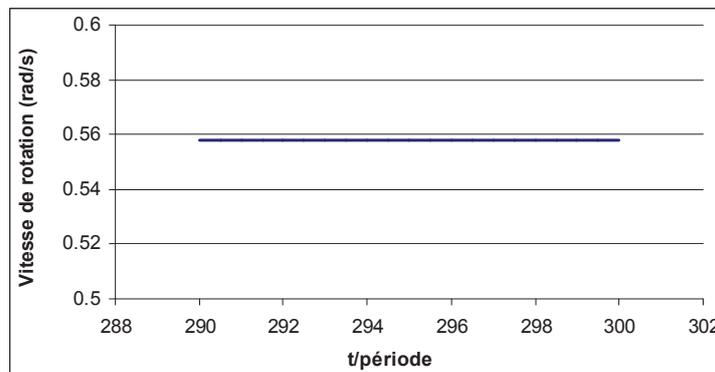


Figure III. 40 Vitesse de rotation de la bague.

La Figure III. 39 présente le jeu minimal h_{min} défini par la relation III.103 et montre qu'il n'y pas de contact bague/rotor. Tous ces résultats sont très proches de ceux obtenu au paragraphe III.3.3 quand la vitesse angulaire de la bague autour de son centre était négligée.

La Figure III. 40 présente la vitesse de rotation de la bague. Sous l'action d'un couple fluide $C_{dyn,z}^{R/B} = 0.11640$ Nm dans l'étanchéité principale, la bague a une faible vitesse de rotation d'environ 0.56 rad/s qui explique le très léger écart avec les résultats présentés au paragraphe III.3.3.

2. Résultats pour $eR/C_{jeu}=2$ et sans pions antirotation

Les résultats présentés au paragraphe III.3.3 montrent qu'une trajectoire quasi-périodique apparaît pour $eR/C_{jeu}=1.15$ suivie rapidement du contact rotor/bague. Les résultats du calcul pour $eR/C_{jeu}=2$ et avec la possibilité de rotation de la bague autour de son centre sont présentés sur les Figure III. 41- Figure III. 45. La bague a une trajectoire quasi-périodique (Figure III. 41, Figure III. 42) et son nez glisse en permanence sur le stator (Figure III. 43). Les valeurs du rapport h_{min}/C_{jeu} tracées la Figure III. 44 montrent que la bague est périodiquement en contact avec le rotor. Ce contact dure approximativement deux périodes puis la bague se détache pendant approximativement une demi période.

La Figure III. 45 montre la vitesse de rotation de la bague autour de son axe. Dans la première partie du contact la vitesse augmente rapidement ; dans la deuxième partie, la diminution progressive de la distance de pénétration du rotor dans la bague est accompagnée d'une diminution de la vitesse de rotation.

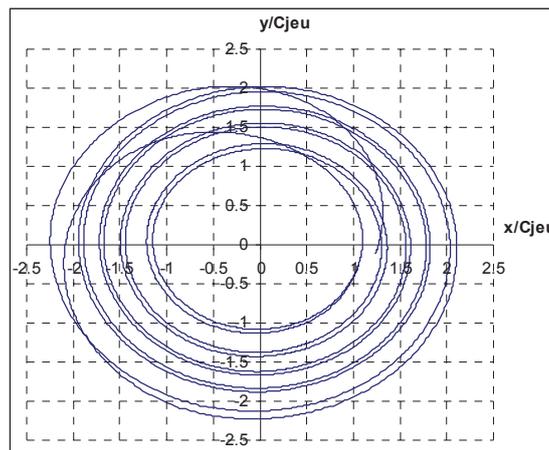


Figure III. 41 Trajectoire de la bague.

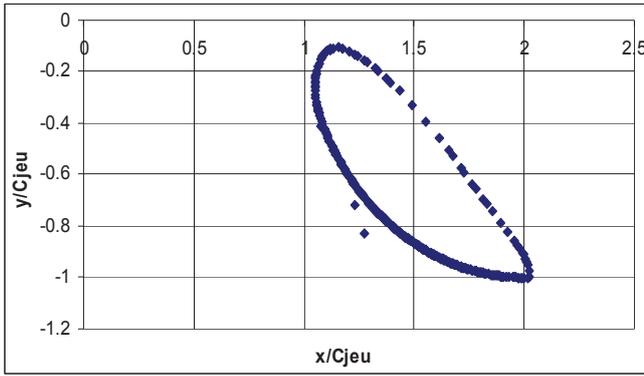


Figure III. 42 Carte de Poincaré.

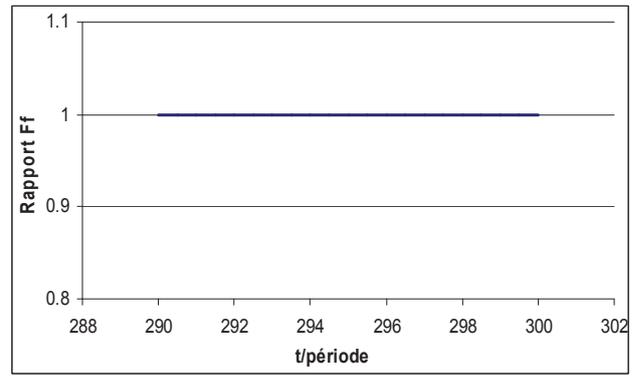


Figure III. 43 Valeurs du rapport $\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{\dot{e}q} F_z$.

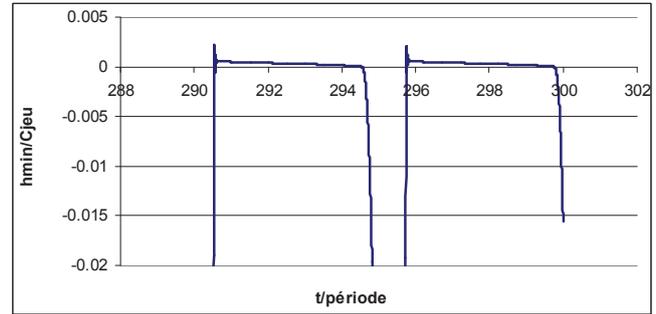
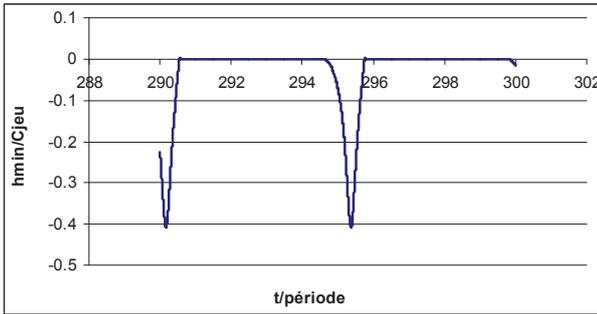


Figure III. 44 Epaisseur minimale du film (étanchéité principale)

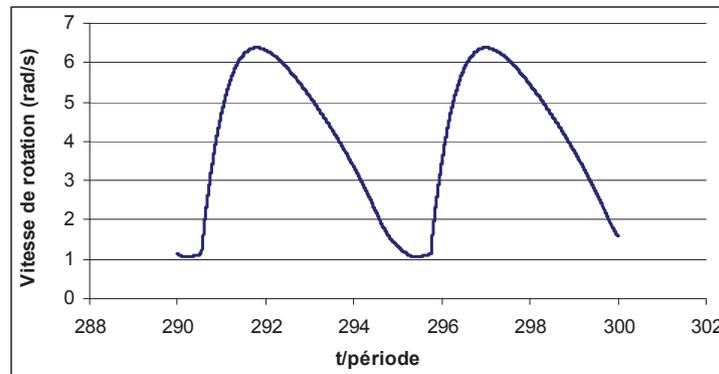


Figure III. 45 Vitesse de rotation de bague et épaisseur minimale du film.

3. Résultats pour $eR/Cjeu=3$ et sans pions antirotation

Les résultats sont présentés sur les Figure III. 46- Figure III. 50. La bague a une trajectoire périodique (Figure III. 46, Figure III. 47) et son nez glisse continuellement sur le stator (Figure III. 48). Les valeurs très faibles et positives de l'épaisseur minimale du film dans l'étanchéité principale h_{min} (Figure III. 49) montrent que la bague est continuellement en contact avec le rotor. Dans ce cas les forces dans l'étanchéité principale sont négligeables par rapport aux forces de contact. La bague est maintenant collée sur le rotor qui lui imprime aussi bien un mouvement de précession (Figure

III. 46) qu'un mouvement de rotation autour de son axe (Figure III. 50). La vitesse de rotation de la bague autour de son axe est de 32.5 rad/s donc beaucoup plus importante que dans le cas précédent quand $e_R/C_{jeu}=2$ mais largement inférieure à la vitesse du rotor, $\omega=3820$ rad/s. L'analyse pourrait être complétée par le calcul de la puissance dissipée entre le nez de la bague et le stator et entre la bague et le rotor. Les vitesses relatives élevées entre les surfaces en contact mèneraient à des valeurs non- négligeables de la chaleur que la bague devra dissiper ou à l'usure. Il est toutefois à souligner que les résultats de ce cas de calcul dépendent beaucoup du modèle de contact entre le rotor et la bague et des constantes qui interviennent.

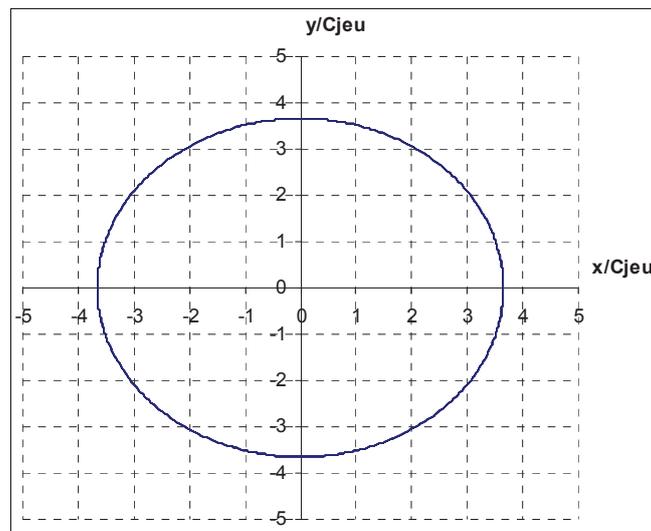


Figure III. 46 Trajectoire de la bague.

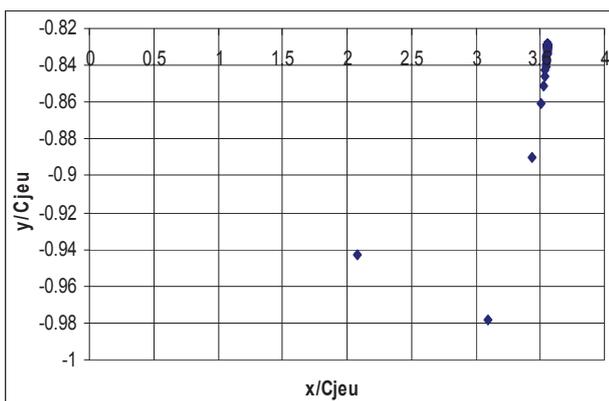


Figure III. 47 Carte de Poincaré.

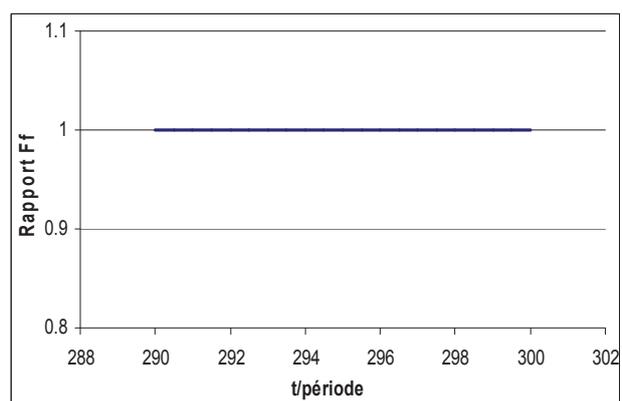


Figure III. 48 Valeurs du rapport

$$\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{\acute{e}q} Fz$$

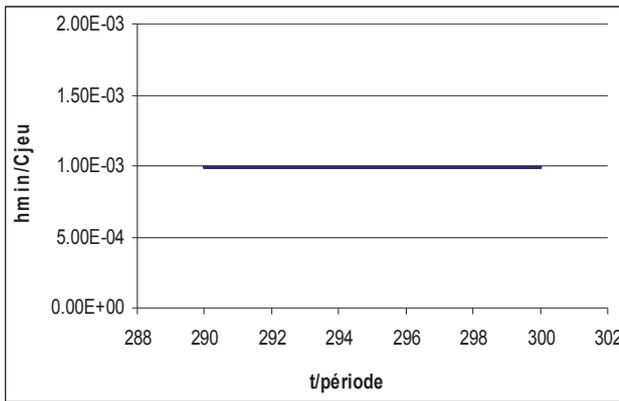


Figure III. 49 Epaisseur minimale du film

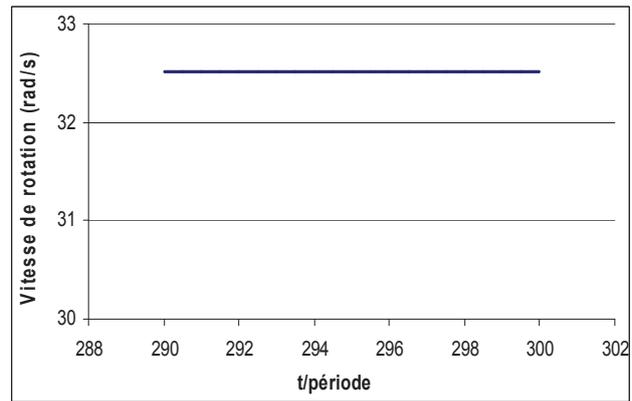


Figure III. 50 Vitesse de rotation de bague.

4. Résultats pour $eR/C_{jeu}=1$ et 1 pion anti-rotation

La bague fonctionne maintenant avec un pion anti-rotation. La position et les dimensions du pion et de l'encoche sont données ci-dessous:

- Nombre de pions = 1
- Largeur du pion 1..... = $4 \cdot 10^{-3}$ m
- Rayon inférieur du pion 1..... = $44.05 \cdot 10^{-3}$ m
- Position angulaire du pion 1..... = 0°
- Largeur de l'encoche 1..... = $5 \cdot 10^{-3}$ m
- Rayon de fond de l'encoche 1..... = $43.35 \cdot 10^{-3}$ m
- Position angulaire de l'encoche 1 = 0°

Les résultats sont présentés sur les Figure III. 51-Figure III. 55. La Figure III. 51 montre que la trajectoire de la bague est déformée dû aux contacts avec le pion. Il est à rappeler que le même cas de calcul $eR/C_{jeu}=1$ mais sans pions anti-rotation montre une trajectoire circulaire de la bague sans contacts avec le rotor. La Figure III. 52 montre qu'il y a des temps très courts où la bague est bloquée contre le stator. La distance h_{min} (Figure III. 53) est toujours négative ce qui indique l'absence de contacts bague/rotor, mais elle n'est plus constante. La vitesse de rotation de la bague autour de son axe est présentée sur la Figure III. 54. Un paramètre supplémentaire, *iflag*, y est introduit afin de faciliter l'interprétation des résultats.

$$iflag = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a contact bague / pion} \\ 0 & \text{s'il n'y a pas de contact} \end{cases}$$

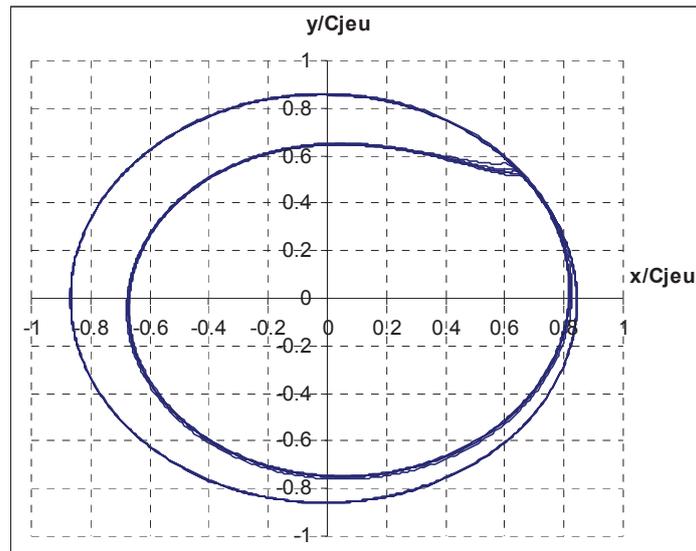


Figure III. 51 Trajectoire de la bague.

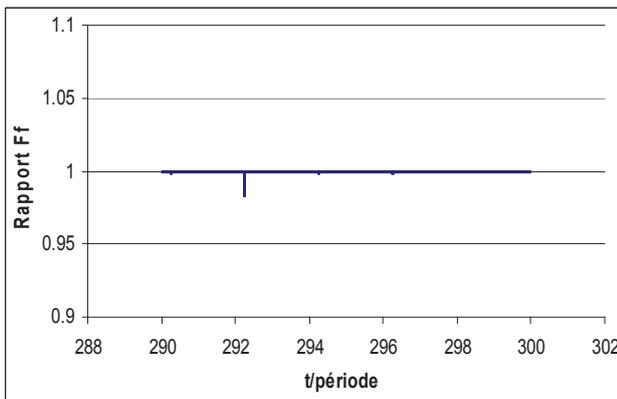


Figure III. 52 Valeurs du rapport

$$\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{\acute{e}q} Fz$$

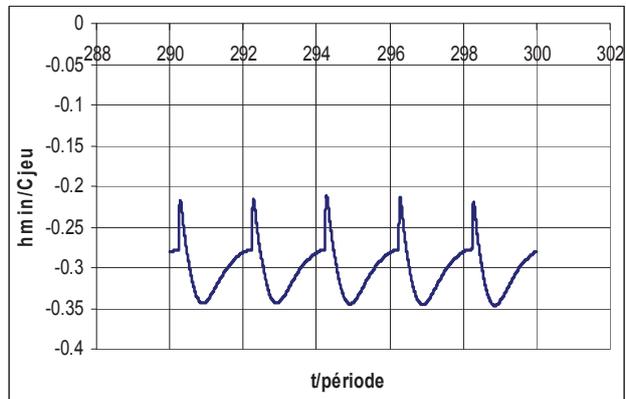


Figure III. 53 Epaisseur minimale du film.

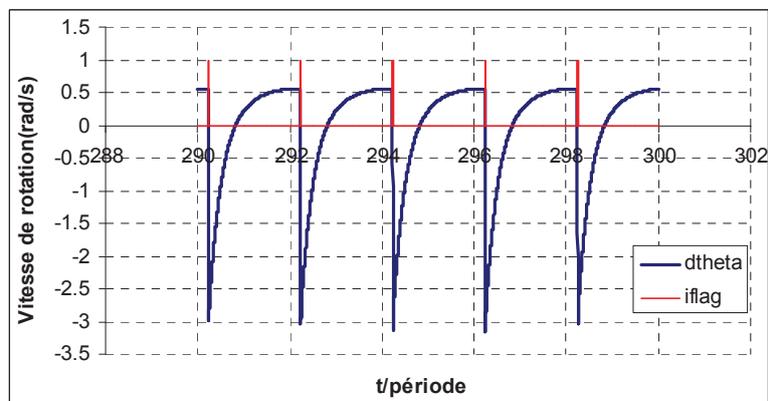


Figure III. 54 Vitesse de rotation de bague autour de son axe.

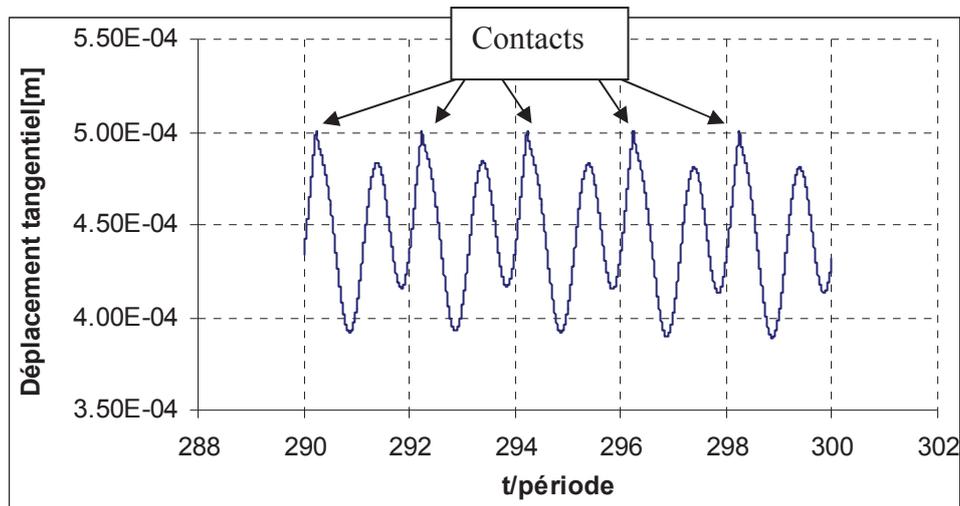


Figure III. 55 Déplacement tangentiel du point *M* sur la Figure III. 34.

La Figure III. 54 montre qu’après le contact avec le pion la bague rebondit avec des fortes vitesses de rotation négatives autour de son axe. Cette rotation est vite freinée par le frottement bague/stator et tend ensuite vers des valeurs positives très faibles dues au couple fluide dans l’étanchéité principale. La forte valeur négative de la vitesse de rotation après l’impact peut être expliquée à l’aide du déplacement du point *M* représenté sur la Figure III. 34. Au moment initial, ce point coïncide avec le pion *P*. Le déplacement tangentiel du point *M* est représenté sur la Figure III. 55. L’on peut observer que des contacts ont lieu si le déplacement tangentiel du point *M* est supérieur au jeu entre le pion et l’encoche, $e_l = 0.5 \text{ mm}$.¹⁵ Ce déplacement est le résultat de la rotation de la bague autour de son centre mais surtout de son mouvement plan sous l’action du rotor. La vitesse du mouvement plan imprimé par le rotor est beaucoup plus importante que la vitesse de rotation de la bague autour de son centre. De ce fait l’intensité des impacts entre le pion placé en *P* et l’encoche de la bague (et des rebondissements qui en résultent) dépend plutôt de la vitesse du mouvement plan de la bague que de la vitesse de rotation autour de son axe.

5. Résultats pour $eR/C_{\text{jeu}}=1$ et 3 pions anti-rotation

La bague est prévue maintenant avec trois pions anti-rotation. Les positions des pions et des encoches sont données ci-dessous:

- Nombre de pions= 3
- Largeur du pion 1.....= $4.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

¹⁵ Le jeu entre le pion et l’encoche résulte de la différence entre la largeur de l’encoche et la largeur du pion, $e_l = (5\text{mm}-4\text{mm})/2 = 0.5 \text{ mm}$

Rayon inférieur du pion 1.....	= $44.05 \cdot 10^{-3}$ m
Angle de la position de pion 1.....	= 0°
Largeur de l'encoche 1.....	= $5 \cdot 10^{-3}$ m
Rayon de fond de l'encoche 1.....	= $43.35 \cdot 10^{-3}$
Angle de la position de l'encoche 1	= 0°
Largeur du pion 2.....	= $4 \cdot 10^{-3}$ m
Rayon inférieur du pion 2.....	= $44.05 \cdot 10^{-3}$ m
Angle de la position de pion 2	= 120°
Largeur de l'encoche 2.....	= $5 \cdot 10^{-3}$ m
Rayon de fond de l'encoche 2.....	= $43.35 \cdot 10^{-3}$ m
Angle de la position de l'encoche 2	= 120°
Largeur du pion 3.....	= $4 \cdot 10^{-3}$ m
Rayon inférieur du pion 3.....	= $44.05 \cdot 10^{-3}$ m
Angle de la position de pion 3.....	= 231°
Largeur de l'encoche 3.....	= $5 \cdot 10^{-3}$ m
Rayon de fond de l'encoche 3.....	= $43.35 \cdot 10^{-3}$ m
Angle de la position de l'encoche 3	= 231°

La trajectoire de la bague est présentée sur la Figure III. 56. Les résultats sont similaires au cas précédent où la bague glisse continuellement sur le stator (Figure III. 57) sans subir des impacts avec le rotor car l'épaisseur minimale du film h_{min} tracée sur la Figure III. 58 a des valeurs négatives. Toutefois, le nombre d'impacts entre la bague et les pions est plus élevé et rend la trajectoire irrégulière.

La vitesse de rotation de la bague autour de son axe est tracée sur la Figure III. 59. Les déplacements tangentiels des points M_1 , M_2 , M_3 correspondant aux positions des pions 1, 2 et 3 sont représentés sur la Figure III. 60. Le contact entre le pion et la bague a lieu si chaque point M se déplace une distance supérieure à 0.5 mm. La Figure III. 60 montre que tous les trois pions subissent des contacts avec la bague.

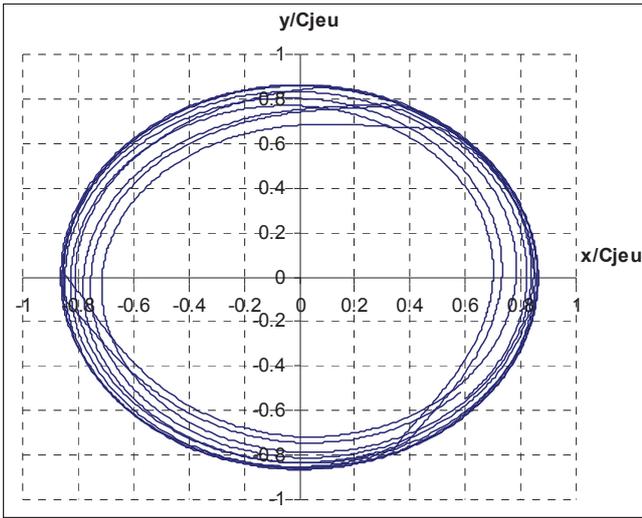


Figure III. 56 Trajectoire de la bague

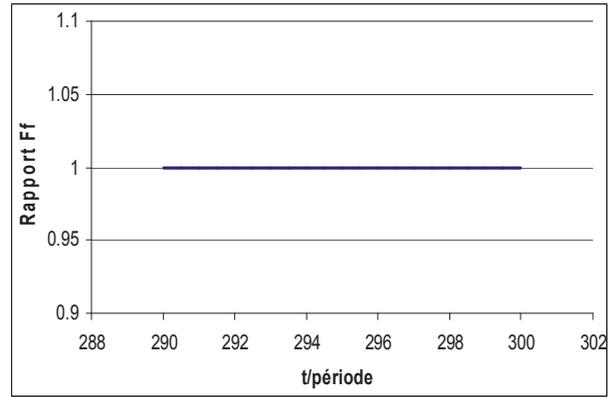


Figure III. 57 Valeurs du rapport $\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{\text{eq}} Fz$

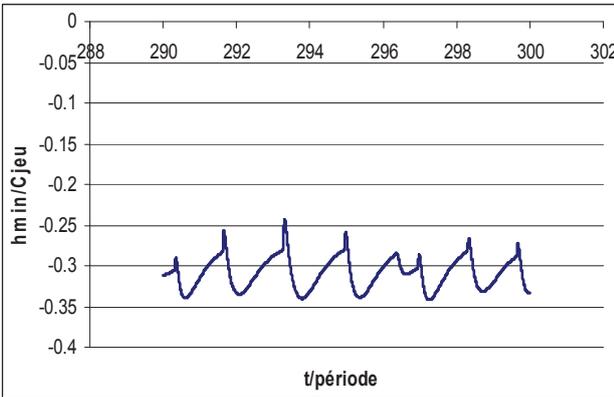


Figure III. 58 Epaisseur minimale du film.

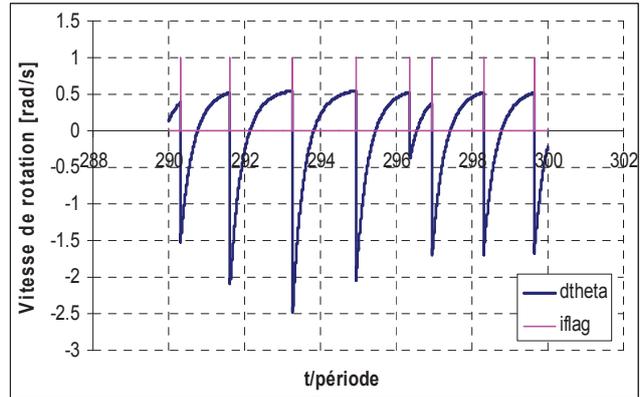


Figure III. 59 Vitesse de rotation de bague autour de son axe.

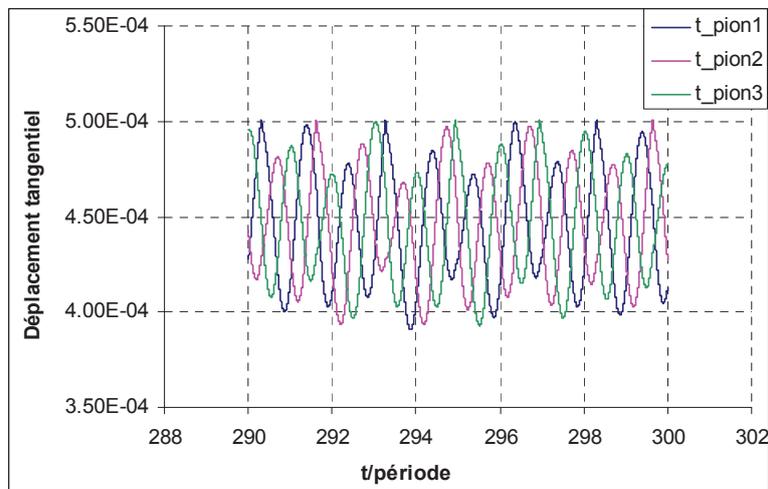


Figure III. 60 Déplacement tangentiel des point M_1 , M_2 , M_3 correspondant aux pions 1, 2 et 3.

6. Résultats pour $eR/C_{jeu}=3$ et 3 pions anti-rotation

Les pions et les encoches ont les mêmes positions et dimensions que dans le cas précédent. La trajectoire de la bague est présentée sur la Figure III. 61. Le nez de la bague continue à glisser sur le stator (Figure III. 62) mais l'épaisseur minimale du film h_{min} (Figure III. 63) montre que la bague peut venir périodiquement en contact avec le rotor et y rester attachée pour une durée d'approximativement une période. Les contacts entre la bague et les pions peuvent être identifiés grâce aux valeurs $iflag > 0$. Les résultats présentés sur la Figure III. 63 ou sur la Figure III. 64 montrent que les impacts bague/pions sont toujours assez forts pour décoller la bague du rotor ($h_{min} < 0$) pour un court intervalle de temps. Les contacts entre la bague et les trois pions peuvent également être observés sur la Figure III. 65 qui présente les déplacements tangentiels des points M_1, M_2, M_3 correspondant aux pions 1, 2, et 3.

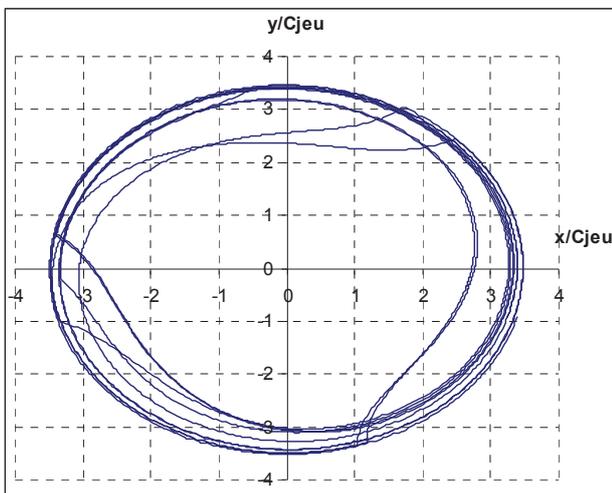


Figure III. 61 Trajectoire de la bague.

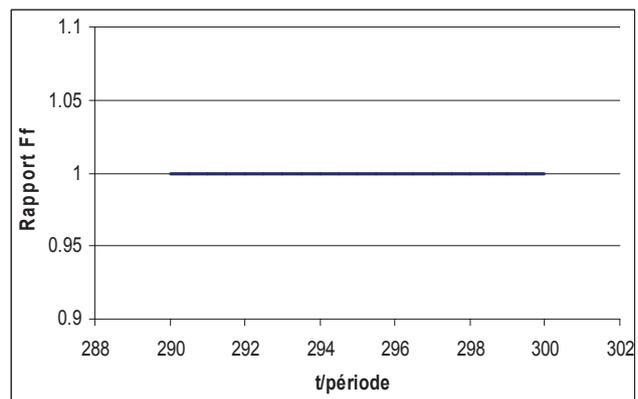


Figure III. 62 Valeurs du rapport $\sqrt{F_{fx}^2 + F_{fy}^2} / f_{\text{éq}} F_z$

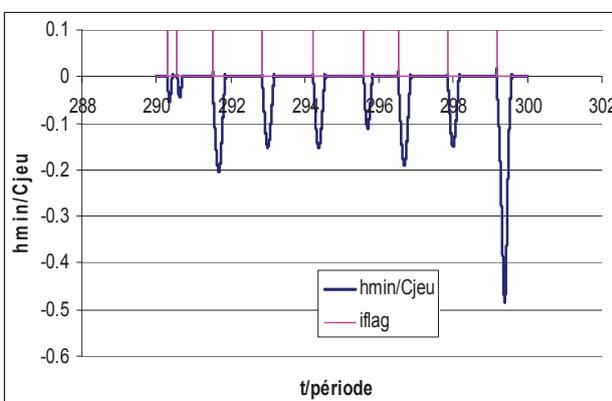


Figure III. 63 Epaisseur minimale du film.

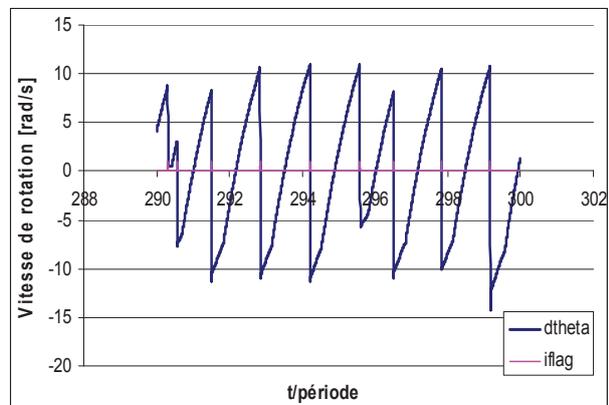


Figure III. 64 Vitesse de rotation de bague autour de son axe.

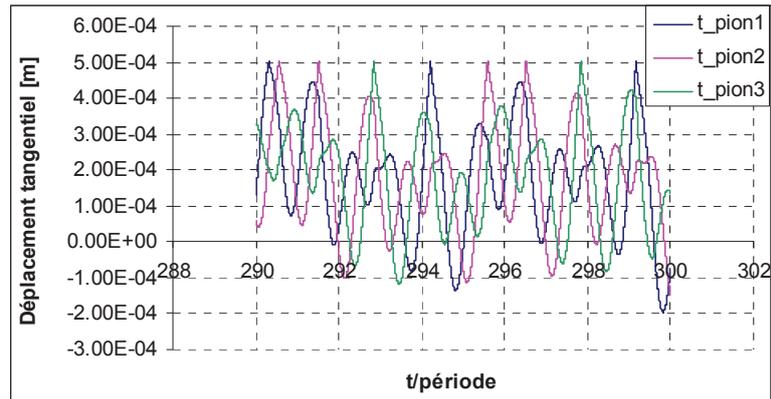


Figure III. 65 Déplacement tangentiel des point M_1 , M_2 , M_3 correspondant aux pions 1, 2 et 3.

CHAPITRE IV :

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Une analyse complète du fonctionnement d'un joint d'étanchéité annulaire à bague flottante a été développée. L'analyse porte aussi bien sur la stabilité statique de la bague flottante que sur la réponse dynamique de la bague sous l'effet d'une excitation introduite par la vibration du rotor. Tous les aspects liés au fonctionnement du joint annulaire qui constitue l'étanchéité principale ont été abordés : l'écoulement à fort nombre de Reynolds, la prise en compte du changement de phase dans un fluide cryogénique et le blocage sonique de l'écoulement.

Les forces dans l'étanchéité secondaire constituée par le contact entre le nez de la bague et le stator sont modélisées en supposant un régime de frottement mixte ou partiel. Ce modèle s'est avéré suffisant pour les bagues d'étanchéité analysées et a permis de mettre en évidence des coefficients de frottement équivalents beaucoup plus faibles que les valeurs de 0.2...0.25 généralement acceptées pour le frottement sec carbone/acier.

L'impact entre le rotor et la bague flottante ou entre la bague flottante et les pions anti-rotation a été décrit par le modèle de contact ponctuel de Hertz et par le modèle de frottement de Coulomb. Ceci est une forte approximation car le modèle de Hertz est applicable seulement aux contacts non-conformes ce qui n'est pas le cas pour l'impact entre le rotor et la bague. Sa précision devrait donc être très limitée. Pour des calculs dynamiques précis ce modèle devrait être remplacé par une approche beaucoup plus exacte. Malheureusement les modèles d'impact entre deux surfaces conformes comme le rotor et la bague flottante (ou le coussinet d'un palier) ne sont pas disponibles dans la littérature et constituent à eux-mêmes des sujets de recherche indépendants. Néanmoins le modèle de Hertz a permis de mettre en évidence le comportement de la bague flottante après l'impact et les trajectoires qui peuvent apparaître.

Il est à souligner que pour un comportement dynamique normal la bague doit pouvoir suivre les vibrations du rotor. Comme le montre les résultats obtenus, la réponse dynamique de la bague flottante peut être périodique ou quasi-périodique. Pour un fonctionnement normal, les contacts avec le rotor ou avec les pions anti-rotation doivent être absents.

Les analyses effectuées ont mis en évidence que le joint annulaire d'étanchéité n'est pas un simple produit « sur étagère ». Le domaine de fonctionnement du joint annulaire à air analysé au chapitre

III est délimité d'un part par ses conditions de fonctionnement (vitesse du rotor, pression et température à l'entrée, pression en sortie) et d'autre part par l'amplitude et la fréquence d'excitation introduite par le rotor. Sa masse et la force de frottement sur son nez jouent également un rôle important dans la stabilité dynamique. La force de frottement sur le nez doit être aussi faible que possible pour ne pas bloquer la bague contre le stator. De même sa masse doit être réduite pour diminuer les forces d'inertie et pour permettre à la bague de suivre les vibrations du rotor. Les résultats obtenus soulèvent aussi des questions liées à l'utilisation des pions anti-rotation. La bague fonctionnant avec LH2 montre que pour une amplitude du rotor égale au jeu la bague flottante simple peut fonctionner correctement mais la présence des pions anti-rotation mène à des contacts. La conception de la frette de la bague flottante et des pions anti-rotation doit donc intégrer aussi ces résultats.

Le travail présenté dans ce manuscrit n'aborde pas tous les aspects liés aux joints annulaires d'étanchéité à bagues flottantes. Afin d'augmenter leurs caractéristiques, ces joints peuvent être montés en série à deux ou trois, le nez d'une bague reposant sur la face de la bague suivante. Ce type de joint nécessite le développement d'un modèle propre qui trouve son point de départ dans le travail développé dans ce manuscrit.

Des analyses expérimentales des joints à bague flottante fonctionnant correctement (capables donc de suivre sans contact les vibrations du rotor) sont complètement absentes de la littérature et seraient nécessaires.

ANNEXE

Bague à air

M=56g,

R1=45.29mm

R2=45.5mm

R3=47mm

R4=49.75 mm

R5=53mm

L=4 mm

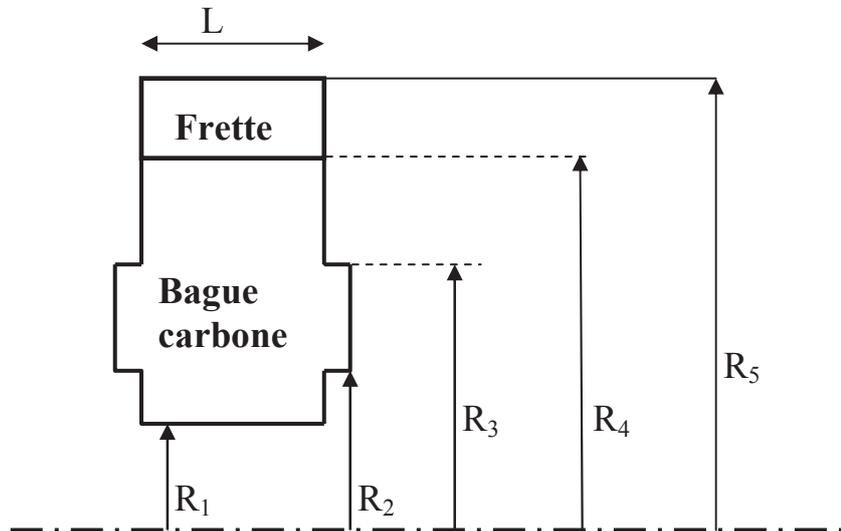
C_{jeu}=20μm

T=300°C

P_{amont}=9 bars

P_{aval}=3bars

Omega=4510.1rad/s



Les parametres pour les contacts d'aspérité

Densité d'aspérité de la bague(/m2).....= 0.45880E+10

Densité d'aspérité du stator (/m2).....= 0.40000E+10

Rayon du but d'aspérité (m).....= 0.52000E-04

Déviations standards de rugosité de la bague (m).....= 0.50000E-06

Déviations standards de rugosité de du stator (m).....= 0.50000E-06

Module d'élasticité de la bague (Pa).....= 0.14200E+11

Module d'élasticité du stator (Pa).....= 0.20000E+12

Coefficient de Poisson de la bague= 0.22000

Coefficient de Poisson du stator= 0.29000

Coefficients de frottement sur le contact bague/stator aux pressions différentes

Coefficient de frottement sec: 0.2, c'est-à-dire: $F_{f,as} = 0.2F_{as}$

Le frottement visqueux ($F_{f,v}$) est très faible et négligé.

$P_{\text{entrée}}$ [bars]	F_z [N]	h [μm]	F_n [N]	F_{as} [N]	F_f [N]	$F_{f,as}$ [N]	$f_{\text{éq}}=F_f/F_z$
5	229.93	1.6851	178.08	51.65	10.33	10.33	0,04493
7	329.086	1.6276	229.79	99.46	19.89	19.89	0.06044
9	428.24	1.591	283.75	144.86	28.97	28.97	0.06765
9.5	453.034	1.5835	297.46	155.957	31.19	31.19	0.06884
10	477.824	1.5765	311.241	166.97	33.39	33.39	0.06988
11	527.403	1.5636	338.99	188.758	37.75	37.75	0.07158
13	626.562	1.5414	395.042	231.394	46.28	46.28	0.07386

Coefficients dynamiques aux pressions et vitesses de rotations différentes

$P_{\text{entrée}}=5\text{bars}$, $\omega=1510.1\text{rad/s}$

Excentricité	K_{xx} (N/m)	K_{xy} (N/m)	K_{yx} (N/m)	K_{yy} (N/m)	C_{xx} (Ns/m)	C_{xy} (Ns/m)	C_{yx} (Ns/m)	C_{yy} (Ns/m)
0	543589	23150	-23150	543589	30.5974	0.0281312	-0.0281312	30.5974
0.1	544560	23363.4	-23790	543811	31.4339	0.0248466	-0.0251743	30.8655
0.2	550560	24041.6	-25894.8	545322	34.202	0.013467	-0.0149173	31.7357
0.3	571672	25309.1	-30105.5	549898	39.7564	-0.0127854	0.00863564	33.3647
0.4	634295	27432.7	-37879.8	561774	50.0539	-0.0724679	0.0615516	36.0838
0.5	812433	30980.6	-52462.2	590896	69.606	-0.220456	0.185175	40.5654

$P_{\text{entrée}}= 5\text{bars}$, $\omega= 2510.1\text{rad/s}$

Excentricité	K_{xx} (N/m)	K_{xy} (N/m)	K_{yx} (N/m)	K_{yy} (N/m)	C_{xx} (Ns/m)	C_{xy} (Ns/m)	C_{yx} (Ns/m)	C_{yy} (Ns/m)
0	608082	38593.2	-38593.2	608082	30.6966	0.0387543	-0.0387543	30.6966
0.1	616275	38941.4	-39636.5	610708	31.518	0.0330106	-0.0332196	30.9598
0.2	647490	40046.1	-43053	619981	34.2306	0.013205	-0.014144	31.8139
0.3	726319	42101.9	-49814.7	640323	39.6359	-0.0326803	0.0298478	33.4063
0.4	920241	45533.7	-62024.4	682327	49.5653	-0.139904	0.128455	36.0532
0.5	1426430	51548.2	-83811.9	771904	67.2695	-0.431329	0.287457	40.4293

$P_{\text{entrée}}= 5\text{bars}$, $\omega= 3510.1\text{rad/s}$

Excentricité	K_{xx} (N/m)	K_{xy} (N/m)	K_{yx} (N/m)	K_{yy} (N/m)	C_{xx} (Ns/m)	C_{xy} (Ns/m)	C_{yx} (Ns/m)	C_{yy} (Ns/m)
0	702790	54275.5	-54275.5	702790	30.8602	0.0358248	-0.0358247	30.8602
0.1	721559	54750.9	-55697.6	708976	31.666	0.0267565	-0.0262901	31.1189
0.2	789390	56256.3	-60326.5	729541	34.3246	-0.0047368	0.00712337	31.9576
0.3	951880	59051.3	-69366.4	772735	39.6279	-0.0814743	0.086834	33.5234
0.4	1334130	63864.7	-85328.6	858352	49.0479	-0.289179	0.253246	36.1559

$P_{\text{entrée}}= 5\text{bars}$, $\omega= 4510.1\text{rad/s}$

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	826482	70287.8	-70287.8	826482	31.1823	0.0165635	-0.0165635	31.1823
0.1	858863	70885.9	-72062.2	837153	31.9787	0.00343383	-0.0020788	31.4435
0.2	974352	72775	-77790.6	872443	34.5705	-0.0430091	0.047302	32.2736
0.3	1247230	76318.2	-88753.3	945687	39.5255	-0.1563	0.155503	33.8003
0.4	1860460	82375.5	-105028	1082580	46.2454	-0.437091	0.504274	34.3363

P_{entrée} = 5bars, omega = 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	975137	86887.4	-86887.4	975137	31.5371	-0.0373905	0.0373904	31.5371
0.1	1023700	87604.3	-88999.2	991173	32.3263	-0.0583001	0.0606373	31.7988
0.2	1197220	89881.7	-95770.9	1044150	34.8394	-0.133515	0.142084	32.6176
0.3	1599770	94479.3	-108555	1153500	39.5475	-0.33727	0.350199	34.0747

P_{entrée} = 5bars, omega = 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1145510	103948	-103948	1145510	32.0276	-0.134076	0.134076	32.0276
0.1	1214010	104772	-106414	1168420	32.7913	-0.167065	0.170237	32.283
0.2	1453540	107470	-114387	1242210	35.2533	-0.295104	0.320357	33.0704
0.3	1987540	110465	-129170	1386220	39.1508	-0.665031	0.94395	33.0786

P_{entrée} = 7bars, omega = 1510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1321310	35431	-35431	1321310	46.8869	-0.0298981	0.0298981	46.8869
0.1	1302510	35685	-36165	1316170	47.8396	-0.0340395	0.0331092	47.1841
0.2	1230050	36495.2	-38524	1293220	50.9542	-0.0474008	0.043299	48.1712
0.3	1125670	37924.2	-42992	1255090	56.857	-0.0746733	0.0637518	49.9589
0.4	1036170	40175.7	-50911.7	1210550	67.3197	-0.129678	0.10627	52.8208
0.5	1044160	43786.3	-65620.6	1173660	86.8324	-0.255725	0.20835	57.3915
0.6	1385870	50106.5	-95438.4	1172320	126.927	-0.611559	0.499094	65.1059

P_{entrée} = 7bars, omega = 2510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1384830	59027.4	-59027.4	1384830	47.0201	-0.0558058	0.0558058	47.0201
0.1	1368370	59476.4	-60276.3	1379530	48.0007	-0.0632436	0.0619129	47.3323
0.2	1311100	60828.7	-64184.6	1360960	51.1052	-0.0863405	0.0803546	48.3259
0.3	1247520	63177.7	-71498.1	1333030	56.9192	-0.132951	0.117274	50.1022
0.4	1257450	66854.7	-84270.9	1310050	67.1095	-0.226669	0.194124	52.9187
0.5	1520000	72728.3	-107308	1318740	85.7411	-0.442648	0.380621	57.367
0.6	2633420	83701.5	-150725	1423780	122.22	-1.12913	0.925692	64.805

P_{entrée} = 7bars, omega = 3510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1485830	82998.7	-82998.7	1485830	47.2248	-0.0917239	0.0917239	47.2248
0.1	1465150	83668.6	-84807.6	1477200	48.2495	-0.103282	0.101804	47.5595
0.2	1428600	85566.2	-90238.8	1462250	51.3435	-0.137735	0.131035	48.5648
0.3	1424280	88799.5	-100250	1448090	57.0606	-0.20669	0.190176	50.3294
0.4	1577470	93834.9	-117425	1455810	66.9684	-0.347409	0.318517	53.1
0.5	2201690	102009	-147454	1529560	84.9522	-0.703048	0.675018	57.457

P_{entrée} = 7bars, omega = 4510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1619520	106876	-106876	1619530	46.1355	-0.153277	0.153289	46.1365
0.1	1592830	108245	-109808	1608680	48.751	-0.155035	0.153912	48.0297
0.2	1578700	110731	-116794	1595490	51.8598	-0.203366	0.197757	49.0688
0.3	1651650	114864	-129421	1597950	57.4913	-0.299622	0.288621	50.8394
0.4	1990620	121315	-150648	1645020	67.1397	-0.502161	0.495193	53.5857
0.5	3054470	131885	-182445	1796040	79.6487	-0.992064	1.09893	54.2912

P_{entrée} = 7bars, omega = 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1781430	132288	-132288	1781430	47.8426	-0.208347	0.208347	47.8426
0.1	1752290	133354	-135422	1769400	48.9709	-0.23193	0.232184	48.2163
0.2	1757850	136423	-144015	1758310	52.1437	-0.300956	0.300904	49.2843
0.3	1917970	141444	-159217	1778360	57.8261	-0.442095	0.452728	51.0798
0.4	2464770	149469	-184953	1869040	67.8995	-0.790006	0.881054	53.9056
0.5	4084120	173367	-233012	2125740	87.1314	-2.93167	2.91372	58.2748

P_{entrée} = 7bars, omega = 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1959310	157111	-157111	1959310	48.2432	-0.294631	0.294631	48.2432
0.1	1934120	158336	-160993	1948780	49.4184	-0.326405	0.32963	48.6315
0.2	1965380	162030	-171504	1943520	52.7258	-0.423429	0.436667	49.7498
0.3	2221900	168192	-189755	1984330	58.6406	-0.63437	0.691805	51.6325
0.4	3005320	179197	-221782	2125040	69.6294	-1.28595	1.57086	54.6712

P_{entrée} = 7bars, omega = 7510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2148300	183411	-183411	2148300	48.7138	-0.408704	0.408806	48.7146
0.1	2131320	184769	-188054	2140710	49.9435	-0.450502	0.45859	49.1204
0.2	2195580	189074	-200714	2144620	53.4583	-0.585674	0.623409	50.3089
0.3	2554530	196699	-222820	2209390	59.863	-0.912162	1.06047	52.3444
0.4	3593160	214822	-265680	2406410	73.3086	-2.34716	3.06234	55.7069

P_{entrée} = 9bars, omega = 1510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1746870	53457.6	-53457.5	1746870	70.8547	-0.156713	0.156713	70.8547
0.1	1687000	53661.8	-54106.3	1726560	71.6851	-0.160998	0.157818	71.1123
0.2	1524140	54376.8	-56366	1669180	74.6502	-0.175193	0.163259	72.0178
0.3	1342320	55691.5	-60620.3	1590210	80.2134	-0.202705	0.175314	73.7164
0.4	1188870	57787.3	-67997	1507940	89.9158	-0.253615	0.201987	76.3989
0.5	1130850	61192.7	-81928.9	1435730	108.376	-0.364164	0.275415	80.6802
0.6	1370130	67273.4	-111358	1397760	147.763	-0.668044	0.509369	88.0348
0.7	2857130	81381.5	-176755	1473310	227.326	-1.76649	1.39219	94.2871

P_{entrée} = 9bars, omega = 2510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1806210	88992	-88992	1806210	70.9982	-0.266288	0.266288	70.9982
0.1	1753150	89306.4	-90041.9	1788330	71.799	-0.273157	0.26819	71.2446
0.2	1599160	90436.6	-93746.3	1735810	74.7072	-0.29628	0.277774	72.1264
0.3	1444720	92595.2	-100757	1662920	80.2254	-0.342533	0.300053	73.8027
0.4	1371220	96049.9	-112816	1596570	89.7879	-0.428707	0.349821	76.4527
0.5	1520410	101652	-135148	1560370	107.692	-0.615677	0.485024	80.6579
0.6	2394260	111774	-180077	1608890	144.68	-1.13323	0.924574	87.7652

P_{entrée} = 9bars, omega = 3510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1887790	124925	-124925	1887790	71.1721	-0.384635	0.384635	71.1721
0.1	1846510	125324	-126335	1873990	71.9378	-0.393746	0.387558	71.4068
0.2	1715490	126795	-131403	1831170	74.7738	-0.425353	0.402469	72.2581
0.3	1595060	129760	-141141	1769160	80.279	-0.491688	0.439334	73.9132
0.4	1635610	134557	-157663	1725910	89.7065	-0.617107	0.523431	76.5377
0.5	2084650	142370	-187546	1742010	107.082	-0.8948	0.75897	80.6713
0.6	5720510	219087	-311284	2303730	144.059	-3.92019	3.92255	87.9291

P_{entrée} = 9bars, omega = 4510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1985590	160772	-160772	1985590	71.3384	-0.511406	0.511406	71.3384
0.1	1960660	161249	-162516	1977380	72.0697	-0.522376	0.51608	71.5627
0.2	1868350	163017	-168895	1949190	74.8341	-0.561916	0.538954	72.3835
0.3	1791690	166765	-181513	1905040	80.3934	-0.651055	0.599666	74.0255
0.4	1972730	172982	-202511	1891650	89.8024	-0.825274	0.741373	76.6528
0.5	2792960	183241	-239783	1972610	107.152	-1.24035	1.18681	80.7844
0.6	5720510	219087	-311284	2303730	144.059	-3.92019	3.92255	87.9291

P_{entrée} = 9bars, omega = 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2095070	197419	-197419	2095070	71.474	-0.651465	0.651465	71.474
0.1	2089360	197980	-199473	2093340	72.1848	-0.663912	0.658749	71.6908

0.2	2048030	200022	-207099	2083310	74.8978	-0.710522	0.693306	72.4914
0.3	2033330	204494	-222803	2064070	80.5905	-0.825784	0.792068	74.1351
0.4	2372180	212327	-248634	2087360	90.2634	-1.06868	1.03736	76.8189
0.5	3631360	226165	-294654	2245660	108.723	-1.75529	1.97879	81.0998

P_{entrée} = 9bars, omega = 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2215120	232896	-232896	2215120	71.5604	-0.799362	0.799363	71.5604
0.1	2229380	233574	-235292	2220050	72.2699	-0.812809	0.810938	71.7785
0.2	2245250	235970	-244265	2229670	74.9818	-0.865683	0.863662	72.5769
0.3	2308890	241256	-263559	2239670	80.9213	-1.01132	1.02261	74.2517
0.4	2825850	251164	-295496	2306250	91.298	-1.36029	1.45896	77.0676
0.5	4574120	273370	-355803	2553020	113.023	-2.74333	3.63111	81.7786

P_{entrée} = 9bars, omega = 7510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2344310	270184	-270184	2344310	71.8829	-0.965072	0.965072	71.8829
0.1	2377600	271037	-272999	2355560	72.622	-0.979035	0.982658	72.118
0.2	2450590	273927	-283551	2384450	75.4106	-1.03753	1.06084	72.9459
0.3	2606600	280281	-307042	2425370	81.7195	-1.22032	1.30576	74.699
0.4	3325600	292876	-346783	2541450	93.064	-1.72086	2.04494	77.7172
0.5	5673350	325123	-398189	2882200	112.036	-3.3562	5.91841	78.7096

P_{entrée} = 9.5bars, omega = 1510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1743170	58946.7	-58946.7	1743170	78.1539	-0.201757	0.201757	78.1539
0.1	1700690	59063.8	-59431	1729040	78.7428	-0.204672	0.20086	78.3292
0.2	1562880	59598.5	-61302.6	1684440	81.1768	-0.215805	0.201444	79.0255
0.3	1379430	60762.9	-65340.7	1612940	86.4638	-0.241097	0.209403	80.515
0.4	1225130	62746.3	-72506.1	1534180	95.8551	-0.291135	0.230088	83.0248
0.5	1162890	66088.5	-86211.1	1463610	114.046	-0.397465	0.297196	87.1415
0.6	1385290	72102.4	-115527	1425330	153.277	-0.689552	0.521163	94.3392
0.7	2823520	85588.1	-185765	1493230	250.403	-1.81032	1.39463	108.388

P_{entrée} = 9.5bars, omega = 2510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1797340	98026.4	-98026.4	1797340	78.2296	-0.340169	0.340169	78.2296
0.1	1763550	98213.1	-98817	1786220	78.8039	-0.344842	0.338987	78.4001
0.2	1642570	99061.6	-101888	1748760	81.196	-0.362834	0.340698	79.082
0.3	1479290	100973	-108572	1684620	86.4612	-0.405098	0.356225	80.5563
0.4	1399650	104246	-120329	1620760	95.7517	-0.488629	0.396834	83.0485
0.5	1536710	109758	-142388	1584340	113.449	-0.668879	0.521251	87.1023
0.6	2367470	119787	-187470	1628800	150.465	-1.16743	0.937335	94.0783

P_{entrée}=9.5bars, omega= 3510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1871590	137389	-137389	1871590	78.3006	-0.485979	0.485979	78.3006
0.1	1850850	137642	-138468	1864910	78.8644	-0.492136	0.484951	78.4682
0.2	1760650	138765	-142681	1839130	81.2059	-0.516339	0.489341	79.136
0.3	1627110	141386	-152021	1788620	86.4871	-0.576309	0.516881	80.5978
0.4	1652610	145958	-168219	1746650	95.7079	-0.696849	0.5881	83.0817
0.5	2076330	153645	-197898	1759590	112.929	-0.964293	0.804306	87.0862
0.6	3768980	168705	-255826	1922100	148.699	-1.7875	1.69181	93.9156

P_{entrée}= 9.5bars, omega= 4510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1960720	176474	-176474	1960720	78.3312	-0.63804	0.63804	78.3312
0.1	1956240	176807	-177842	1959500	78.8911	-0.645392	0.638121	78.4978
0.2	1910100	178208	-183179	1949280	81.1993	-0.674909	0.648011	79.1578
0.3	1824330	181511	-195344	1919950	86.5492	-0.753797	0.696389	80.6149
0.4	1976980	187521	-216103	1907090	95.8535	-0.919702	0.820669	83.1246
0.5	2761550	197593	-253212	1983030	112.974	-1.31265	1.21904	87.1394
0.6	5545260	227094	-325888	2295550	150.529	-3.28657	3.65478	94.1676

P_{entrée}= 9.5bars, omega= 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2060980	216193	-216193	2060980	78.3049	-0.80095	0.80095	78.3049
0.1	2074100	216635	-217869	2065610	78.8793	-0.809087	0.803217	78.4768
0.2	2080770	218357	-224341	2073100	81.1887	-0.842739	0.822663	79.1428
0.3	2065090	222332	-239511	2070900	86.6748	-0.941522	0.904344	80.6145
0.4	2366260	229965	-265272	2095420	96.2963	-1.17144	1.12256	83.1964
0.5	3569600	243232	-310955	2246490	114.33	-1.78786	1.92654	87.3573

P_{entrée}= 9.5bars, omega= 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2171290	254482	-254482	2171290	78.2187	-0.968223	0.968223	78.2187
0.1	2201550	255078	-256530	2181550	78.8274	-0.976771	0.974625	78.4033
0.2	2263640	257246	-264297	2207000	81.2057	-1.01336	1.00994	79.0959
0.3	2337540	262062	-282896	2235050	86.9286	-1.13491	1.14414	80.6201
0.4	2812460	271638	-314835	2305060	97.2	-1.45699	1.52937	83.3363
0.5	4478180	291187	-373716	2542040	118.036	-2.5608	3.28728	87.8709

P_{entrée} = 9.5bars, omega = 7510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2288300	294601	-294601	2288300	78.4015	-1.15108	1.15108	78.4015
0.1	2334030	295426	-297157	2303610	79.0824	-1.15949	1.1637	78.6177
0.2	2451000	298273	-306566	2345940	81.6217	-1.19875	1.22277	79.3759
0.3	2633260	304253	-329057	2406850	87.672	-1.35027	1.43099	81.0022
0.4	3303620	316248	-368708	2529210	98.8662	-1.79814	2.07994	83.9125
0.5	5501720	344987	-445931	2865420	121.727	-3.82926	5.3521	88.8382

P_{entrée} = 10 bars, omega = 1510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1709030	64662.6	-64662.6	1709030	85.7588	-0.25045	0.25045	85.7588
0.1	1686700	64710.4	-64994.2	1701870	86.1292	-0.251977	0.247703	85.8601
0.2	1589910	65069.6	-66436.1	1674110	87.9317	-0.260799	0.241891	86.338
0.3	1418430	66090.1	-70121.6	1617880	92.799	-0.281869	0.245145	87.5588
0.4	1266520	67953.7	-77082.2	1548140	101.975	-0.326093	0.263328	89.8573
0.5	1201670	71187.5	-90580	1483040	119.901	-0.429549	0.322763	93.7978
0.6	1404680	77100.1	-119771	1446740	158.945	-0.715586	0.532278	100.835
0.7	2780100	90405	-190675	1511040	256.655	-1.80171	1.38333	114.756

P_{entrée} = 10bars, omega = 2510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1758790	107415	-107415	1758790	85.7477	-0.419876	0.419876	85.7477
0.1	1745490	107503	-107969	1754690	86.1233	-0.422332	0.415821	85.852
0.2	1670230	108073	-110366	1735090	87.9164	-0.435576	0.408224	86.3348
0.3	1516650	109751	-116489	1688090	92.7755	-0.470601	0.415936	87.5499
0.4	1434280	112872	-127926	1632490	101.883	-0.54762	0.449464	89.84
0.5	1561150	118224	-149739	1600070	119.386	-0.723155	0.56122	93.736
0.6	2348320	128068	-194970	1643070	156.393	-1.2073	0.952841	100.579

P_{entrée} = 10bars, omega = 3510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1827030	150308	-150308	1827030	85.6921	-0.595051	0.595051	85.6921
0.1	1826250	150453	-151093	1827120	86.0863	-0.598251	0.590306	85.8037
0.2	1785290	151236	-154435	1819620	87.8892	-0.615234	0.582831	86.2986
0.3	1665060	153529	-163031	1788850	92.7601	-0.664408	0.599445	87.5117
0.4	1679480	157939	-178876	1754640	101.847	-0.776591	0.660124	89.8102
0.5	2080950	165444	-208361	1769780	118.949	-1.0374	0.85493	93.6773
0.6	3695470	180000	-266838	1926170	154.731	-1.80775	1.6593	100.387

P_{entrée} = 10bars, omega = 4510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1910680	192342	-192342	1910680	83.9172	-0.792238	0.79224	83.9184
0.1	1924390	192542	-193317	1915970	84.1302	-0.796707	0.789056	83.846

0.2	1926470	194022	-198092	1921340	87.8563	-0.796609	0.76645	86.2021
0.3	1864420	196909	-209293	1913610	92.7607	-0.862694	0.797154	87.4343
0.4	1996870	202730	-229761	1909520	101.965	-1.01873	0.906392	89.7751
0.5	2742230	212603	-266832	1985850	119.014	-1.39334	1.26606	93.6685
0.6	5397210	237768	-340091	2285380	156.548	-2.9614	3.36856	100.541

P_{entrée} = 10bars, omega = 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2000750	235585	-235585	2000750	85.3634	-0.960812	0.960812	85.3634
0.1	2029830	235947	-236948	2011010	85.8335	-0.964684	0.958532	85.5014
0.2	2083300	237420	-242386	2034190	87.7876	-0.985191	0.963301	86.0536
0.3	2104650	240984	-256361	2054180	92.8272	-1.06618	1.02159	87.3363
0.4	2380930	248319	-281917	2090280	102.347	-1.28109	1.21666	89.7585
0.5	3523330	261236	-327596	2240160	120.213	-1.84567	1.92311	93.7921
0.6	7507440	322637	-414553	2723960	158.481	-6.74586	6.76541	100.667

P_{entrée} = 10bars, omega = 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2101460	276777	-276777	2101460	85.1011	-1.14808	1.14814	85.102
0.1	2143640	277341	-278568	2115610	85.6447	-1.15184	1.14999	85.2646
0.2	2247620	279386	-285354	2153980	87.7644	-1.17278	1.16962	85.8806
0.3	2376610	283857	-302370	2205370	93.0101	-1.27327	1.27091	87.2473
0.4	2823420	292893	-334096	2290520	103.099	-1.56846	1.61324	89.7935
0.5	4401750	311001	-392435	2524820	123.436	-2.50549	3.0897	94.1587

P_{entrée} = 10bars, omega = 7510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	2205690	319124	-319124	2205690	84.8673	-1.34476	1.34482	84.8682
0.1	2259340	319969	-321526	2223480	85.5175	-1.34789	1.35384	85.0682
0.2	2421840	322904	-329998	2277370	87.8748	-1.37282	1.39695	85.7775
0.3	2672950	328524	-350368	2364740	93.4108	-1.49508	1.56611	87.2551
0.4	3307870	339531	-389712	2505150	104.428	-1.9036	2.15118	89.9873
0.5	5355620	369136	-469326	2833190	130.168	-3.70331	5.40045	94.9741

P_{entrée} = 11bars, omega = 1510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1600660	76538.8	-76538.8	1600660	101.426	-0.354602	0.354602	101.426
0.1	1614280	76501.3	-76557.7	1605720	101.45	-0.35442	0.347201	101.394
0.2	1614140	76531	-77154.7	1612820	102.137	-0.354627	0.330394	101.509
0.3	1510320	77095	-79760.7	1599540	105.582	-0.365472	0.317605	102.14
0.4	1369980	78606.9	-86232.5	1559380	114.162	-0.405035	0.321996	103.897
0.5	1287910	81542.5	-99466	1511720	131.704	-0.503432	0.367639	107.411
0.6	1451000	87198.9	-128494	1482350	170.453	-0.775374	0.554505	114.093
0.7	2717470	100158	-200477	1542610	269.024	-1.79976	1.35383	127.752

P_{entrée} = 11bars, omega = 2510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1641840	126908	-126908	1641840	101.226	-0.590485	0.590485	101.226
0.1	1663050	126868	-126999	1649430	101.301	-0.588371	0.580753	101.213
0.2	1687070	126995	-128050	1664390	102.064	-0.590088	0.553347	101.364
0.3	1614310	127965	-132419	1663560	105.544	-0.607922	0.534491	102.026
0.4	1529800	130500	-143156	1638500	114.11	-0.675399	0.547272	103.803
0.5	1623430	135377	-164700	1621560	131.339	-0.842581	0.636045	107.304
0.6	2328710	144813	-210230	1665880	168.362	-1.30188	0.986509	113.847

P_{entrée} = 11bars, omega = 3510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1697610	177110	-177110	1697610	100.908	-0.828599	0.828599	100.908
0.1	1728680	177136	-177323	1708470	101.056	-0.825833	0.816216	100.923
0.2	1785830	177443	-178975	1733810	101.945	-0.825692	0.784111	101.126
0.3	1771830	178885	-185149	1751890	105.487	-0.851444	0.762546	101.845
0.4	1766110	182478	-200212	1752020	114.11	-0.950297	0.794345	103.66
0.5	2110270	189353	-229626	1780370	131.061	-1.19618	0.955048	107.178
0.6	3585430	203203	-289053	1930610	166.856	-1.89922	1.63241	113.62

P_{entrée} = 11bars, omega = 4510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1762970	226398	-226397	1762960	100.462	-1.06524	1.06524	100.462
0.1	1804630	226563	-226842	1777290	100.711	-1.05986	1.05334	100.525
0.2	1899780	227229	-229276	1814080	101.791	-1.05893	1.01882	100.802
0.3	1975410	229266	-237346	1857100	105.414	-1.09211	1.00322	101.594
0.4	2077930	233970	-257084	1894130	114.214	-1.22915	1.07373	103.479
0.5	2731710	243104	-294421	1981810	131.195	-1.57841	1.36958	107.054
0.6	5174770	264790	-367644	2266180	168.173	-2.76872	2.96141	113.605

P_{entrée} = 11bars, omega = 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1832080	275828	-275849	1832090	99.9199	-1.30328	1.30333	99.9198
0.1	1883690	276281	-276672	1849810	100.307	-1.29624	1.29253	100.05
0.2	2023790	277559	-280224	1898270	101.655	-1.29292	1.26411	100.431
0.3	2214190	280363	-290232	1972240	105.365	-1.3362	1.2636	101.322
0.4	2462610	286192	-315041	2057390	114.459	-1.51797	1.40418	103.289
0.5	3468330	298108	-361358	2217790	132.197	-2.02159	1.96957	107.016
0.6	7067040	344401	-455556	2662740	175.282	-4.89833	6.31714	114.145

P_{entrée} = 11bars, omega = 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1897190	323392	-323392	1897190	99.5208	-1.53226	1.53226	99.5208
0.1	1959120	324106	-324692	1918930	99.927	-1.52436	1.52583	99.5876
0.2	2162020	326266	-329501	1983090	101.555	-1.52459	1.51042	100.086

0.3	2480680	329962	-341575	2094710	105.372	-1.57909	1.53936	101.078
0.4	2904850	337046	-372312	2236410	114.929	-1.81548	1.7972	103.152
0.5	4297820	352935	-431046	2480990	134.693	-2.57257	2.91157	107.154

P_{entrée} = 11bars, omega = 7510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1950180	372440	-372440	1950180	99.1542	-1.76109	1.76109	99.1542
0.1	2034550	373652	-374398	1977370	99.7211	-1.75909	1.76215	99.3098
0.2	2318030	376819	-380449	2067980	101.546	-1.76889	1.76943	99.8985
0.3	2770980	381503	-394813	2224160	105.518	-1.83818	1.84606	100.972
0.4	3387090	390029	-432579	2428300	115.814	-2.14443	2.28845	103.177
0.5	5197980	412847	-509934	2765450	139.602	-3.36353	4.51805	107.642

P_{entrée} = 13bars, omega = 2510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1505840	162744	-162744	1505840	129.734	-0.894967	0.894967	129.734
0.1	1554070	162693	-162690	1523520	129.662	-0.887218	0.880007	129.662
0.2	1675670	162760	-163218	1566790	130.088	-0.872371	0.841728	129.69
0.3	1777980	163175	-165840	1622980	132.144	-0.870828	0.791233	130.029
0.4	1746290	165014	-174468	1662140	139.121	-0.916887	0.759273	131.187
0.5	1767570	168616	-193987	1688150	149.422	-1.07858	0.831993	128.145
0.6	2310580	177114	-239386	1735250	182.873	-1.48195	1.13073	132.45

P_{entrée} = 13bars, omega = 3510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1516880	226907	-226907	1516880	129.246	-1.24531	1.24531	129.246
0.1	1572540	226896	-226925	1536440	129.241	-1.23362	1.2254	129.197
0.2	1743780	227107	-227801	1593900	129.749	-1.21623	1.17501	129.265
0.3	1926680	227833	-231702	1676070	131.957	-1.21645	1.11244	129.655
0.4	2001760	230461	-243875	1752550	139.003	-1.28159	1.08231	130.865
0.5	2206160	235444	-271093	1824140	149.276	-1.50044	1.22772	127.843
0.6	3406040	248248	-331020	1965020	181.694	-2.11341	1.73112	132.152

P_{entrée} = 13bars, omega = 4510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1511880	290053	-290053	1511880	128.715	-1.5836	1.5836	128.715
0.1	1590070	290179	-290174	1537000	128.784	-1.57129	1.55984	128.7
0.2	1825950	290547	-291386	1618560	129.332	-1.55506	1.50117	128.789
0.3	2108240	291669	-296688	1734940	131.689	-1.55839	1.43463	129.221
0.4	2336680	295146	-312556	1860340	138.836	-1.64188	1.42377	130.485
0.5	2776530	303290	-351103	1987100	156.192	-1.94619	1.64038	133.572
0.6	4793050	320056	-421615	2255340	181.726	-2.82209	2.62571	131.901

P_{entrée} = 13bars, omega = 5510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1473950	354094	-354094	1473950	128.342	-1.91092	1.91092	128.342
0.1	1606010	354344	-354062	1520060	128.366	-1.90757	1.88641	128.321
0.2	1919180	354774	-355482	1636880	128.887	-1.89654	1.82461	128.373
0.3	2315530	356335	-362248	1795490	131.38	-1.90474	1.76407	128.816
0.4	2731870	360721	-381898	1979410	138.672	-2.00399	1.79606	130.121
0.5	3467840	371050	-430419	2186660	156.809	-2.41589	2.20855	133.312
0.6	6444380	395776	-515755	2596630	184.44	-3.70817	4.20577	131.856

P_{entrée}=13 bars, omega= 6510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1425900	416946	-416943	1425890	128.323	-2.22662	2.22662	128.323
0.1	1614670	416965	-416145	1492280	128.097	-2.2331	2.19745	128.201
0.2	2021190	417259	-417361	1650150	128.48	-2.23305	2.13509	128.132
0.3	2547040	419209	-425505	1858120	131.07	-2.24969	2.09086	128.532
0.4	3172520	424565	-449342	2108400	138.596	-2.36842	2.19376	129.852
0.5	4252940	437570	-510104	2407750	158.149	-2.91602	2.95607	133.186
0.6	8363890	479926	-613062	2980380	192.353	-4.95906	7.47337	132.229

P_{entrée}= 13bars, omega= 7510.1rad/s

Excentricité	Kxx(N/m)	Kxy(N/m)	Kyx(N/m)	Kyy(N/m)	Cxx(Ns/m)	Cxy(Ns/m)	Cyx(Ns/m)	Cyy(Ns/m)
0	1392340	483020	-483020	1392350	128.663	-2.5523	2.5523	128.663
0.1	1613720	482564	-481202	1468840	128.156	-2.56207	2.515	128.44
0.2	2126550	482444	-481454	1662700	128.255	-2.57903	2.4498	128.194
0.3	2802440	484769	-490597	1924940	130.87	-2.611	2.43248	128.493
0.4	3650030	491071	-519177	2248330	138.769	-2.75481	2.64599	129.806
0.5	5103310	507753	-595804	2647350	160.762	-3.50396	3.99919	133.353
0.6	10986900	614953	-639559	3414070	199.079	-6.90722	13.1004	133.566

Références

- [1] Shapiro, W., Hamm, R., "Seal technology for liquid oxygen (LOX) turbopumps", NASA CR-174888, MTI85TR20, 1985.
- [2] Flitney, R.K., Nau, B.S., Reddy, D., "The seal user's handbook", BHRA The Fluid Engineering Centre, 1984.
- [3] Flitney, R. "Seal and sealing handbook", Elsevier Ltd. 2007.
- [4] Alan O. Lebeck, "Principles and design of mechanical face seals", John Wiley & Sons Inc., 1991.
- [5] Shapiro, W., Lee, C., "Advanced Helium purge seals for liquid Oxygen (LOX) turbopumps", NASA CR-182105, 1989.
- [6] Shemeld, D. E., "A history of development in rotordynamics – A manufacturer's perspective", Dresser Industries Inc., Olean, New York 14760, 1987.
- [7] www.carbosystem.com (12/2010)
- [8] Booser, E.R., "Handbook of lubrication, Volume II: Theory and design", CRC Press LLC, 1983.
- [9] Shapiro, W., Lee, C., Jones, H., "Analyse and design of gas-lubricated, sectored, floating ring seal", Transaction of the ASME, 87-Trib-55, 1987.
- [10] William, A.G., "Materials for tribology", Elsevier, 1992.
- [11] www.grc.nasa.gov/WWW/RT/RT1994/AerospaceTechnology/Spacepropulsiontech.html
- [12] Proctor, M.P., Kumar, A., Delgado, I.R., "High speed, high temperature finger seal test result", NASA/TM—2002-211589, 2002.
- [13] "Advanced seal technology", AVIO, ESA TRP Contract No. 12.211/97/NL/FG, 2005.
- [14] Suzuki, M., Nosaka, M., Kamijo, K., Kikuchi, M., "Research and development of a rotating-shaft seal for a liquid hydrogen turbopump", STLE Tribology Transactions, 42(3), 162-169, 1986.
- [15] Oike, M., Nosaka, M., Kamijo, K., Kikuchi, M., Watanabe, Y., "Experimental study on high pressure gas seals for a liquid oxygen turbopump", STLE Tribology Transactions, 31(1), 91-97, 1987.
- [16] Kirk, R.G., Miller, W.H., "The influence of high pressure oil seals on turbo-rotor stability", ASLE transactions, No.1, pp.14-24, 1979.
- [17] San Andrés, L., "High pressure floating ring oil seals – Effects on Rotordynamics", Lecture note. (<http://repository.tamu.edu/handle/1969.1/93197>)

- [18] Semanate, J., San Andrés, L., "Analysis of multi-land high pressure oil seals", *STLE Tribol. Tran.*, 36, pp 661-669, 1993.
- [19] Ha, T. W. , Lee, Y. B., Kim, C. H., "Leakage and rotordynamic analysis of a high pressure floating ring seal in the turbo pump unit of a liquid rocket engine", *Tribol. Int.* 35, pp153–161, 2002.
- [20] Semanate, J., San Andrés, L., "Thermal analysis of locked multi-ring oil seals", *Tribol. Int.*, 27, pp 197-206, 1994.
- [21] Baheti, S., Kirk, R., "Finite element thermo-hydrodynamic solution of a circumferentially grooved floating oil ring seal", *STLE Tribol. Tran.*, 38, pp 86-96, 1995.
- [22] Childs, D.W., Rodriguez, L.E., Cullotta, V., Ghasem, A.A., Graviss, M., "Rotordynamic coefficients and static (equilibrium loci and leakage) characteristics for short, laminar flow annular seals", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 128, 2006.
- [23] Baheti, S., Kirk, R., "Thermo-hydrodynamic solution of floating ring seals for high pressure compressors using the finite element method", *STLE Tribol. Tran.* 37, pp 336-346, 1994.
- [24] Lee, Y.B., Kim, K.W., Kim, C.H., Ahn, K.M., Lee, S.C., "Study on the experiment of the floating ring seal with bump foil for high pressure turbopump", *Journal of the KSTLE*, Vol.22, No.2, pp. 105-111, April 2006.
- [25] Kim, K.W., Chung, J.T., Kim, C.H., Lee, Y.B., "Theoretical research of static characteristics of bump floating ring seal", *Journal of the KSTLE*, Vol.24, No.3, pp. 140-146, June 2008.
- [26] Kirk, R.G., "Transient response of floating ring liquid seals", *Journal of Tribology*, 1988.
- [27] Shapiro, W., "Users' Manual for Computer Code DYSEAL - Dynamic Response of Seals", NASA /CR—2003-212368, 2005.
- [28] Constantinescu, V.N., "Laminar Viscous Flow", Springer –Verlag, 1995.
- [29] Launder, B.E., Leschziner, M., "Flow in Finite-Width, Thrust Bearings Including Inertial Effects", *Transaction of the ASME Journal of Lubrication Technology*, 100, 330- 338, 1978.
- [30] Childs, D.W., "Turbomachinery Rotordynamics: Phenomena, Modeling and Analysis", Wiley Interscience, New York, 1993.
- [31] Hirs, G. G., "A Bulk-Flow Theory for Turbulence in Lubricant Films," *ASME J. Lubr. Technol.*, 95, pp. 137-146, 1973.
- [32] Childs, D.W., "Dynamique analysis of turbulent annular seals based on Hirs' lubrication equation", *Jour. of Lubr. Tech.*, Vol. 105, pp. 429-436, 1983.
- [33] San Andrés, L., "Analysis of variable fluid properties, turbulent annular seals", *ASME Jour. of Trib.*, vol. 113, pp. 694-702, 1991.
- [34] San Andrés, L., "Thermohydrodynamic analysis of fluid film bearings for cryogenic applications", *Jour. of Propulsion and Power*, vol.11, pp. 964-972, 1995.

- [35] San Andrés, L., Childs, D., “Angled injection –hydrostatic bearings, analysis and comparisons to test results”, ASME Journal of Tribology, Vol. 119, 1, pp. 179-187, 1997.
- [36] Yang, Z., San Andrés, L., Childs, D.W., “Thermal effects in cryogenic liquid annular seals- Part I: Theory and approximate solution. Part II: Numerical solution and results”, ASME Jour. of Trib., vol. 115, pp. 267-284, 1993.
- [37] Arauz, G.L., San Andrés, L., “Analysis of two phase flow in cryogenic damper seals. Part I: Theoretical model”, ASME Journal of Tribology, Vol. 120, pp. 221-227, 1998.
- [38] Arauz, G.L., San Andrés, L., “Analysis of two phase flow in cryogenic damper seals. Part 2: Model validation and predictions”, ASME Journal of Tribology, Vol. 120, pp. 228-233, 1998.
- [39] Arghir, M., Frêne, J., “A Triangle Based Finite Volume Method for the Integration of Lubrication’s Incompressible Bulk Flow Equations”, ASME Journal of Tribology, 123(1), pp. 118-124, 2001.
- [40] Arghir, M., Frêne, J., "Forces and Moments Due to Misalignment Vibrations in Annular Liquid Seals Using The Averaged Navier-Stokes Equations", ASME Journal of Tribology, 119(2), pp. 279-290, 1997.
- [41] Arghir, M., Frêne, J., "Rotordynamic Coefficients of Circumferentially-Grooved Liquid Seals Using the Averaged Navier-Stokes Equations", ASME Journal of Tribology, 119(3), pp. 556-567, 1997.
- [42] Arghir, M., Frêne, J., "A Quasi 2D-Method for the Rotordynamic Analysis of Centred Labyrinth Seals", ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 121(1), pp. 144-152, 1999.
- [43] Arghir, M., Frêne, J., "Numerical solution of lubrication's compressible bulk flow equations. Applications to Annular Gas Seal Analysis", 2001-GT-117
- [44] Arghir, M., Frêne, J., “A bulk-flow analysis of static and dynamic characteristics of eccentric circumferentially-grooved liquid annular seals”, ASME Journal of Tribology, 126(2), pp 316-326, 2004.
- [45] Helene, M., Arghir, M., Frêne, J., “Combined Navier-Stokes and bulk-flow analysis of hybrid bearings: radial and angled injection”, ASME Journal of Tribology, Vol. 127(2), pp. 557-567, 2005.
- [46] Arghir, M., Defaye, C., Frêne, J., “The Lomakin Effect In Annular Gas Seals Under Choked Flow Conditions”, ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 129(4), pp. 1028-1034, 2007.
- [47] Schlichting, H., "Boundary Layer Theory, 7th Edition", McGraw-Hill, Inc, 1978.
- [48] Massey, B.S., “Mechanics of Fluids”, 4th Edition, Van Nostrand Rheinhold Co., New York, 1979.

- [49] Zirkelback, N., San Andrés, L., “Bulk - Flow Model for the Transition to Turbulence Regime in Annular Seals”, Tribology Transactions, No. 39, Vol. 4, pp. 835-842, 1996.
- [50] Tonon, D., “Thèse bague flottante: choix des variables d'états thermodynamiques et du type de modèle diphasique à introduire dans Phares”, FLTT 900/08, 2008.
- [51] Tonon, D., “Modélisation de l'écoulement de fluide réel monophasique dans un joint annulaire centré en régime permanent ”, FLTT n° 577/08, 2008.
- [52] Yang, Z., San Andrés, L., Childs, D.W., “Thermal Effects in Cryogenic Liquid Annular Seals – Part I: Theory and Approximate Solution”, Transaction of the ASME Journal of Tribology, Vol. 115, pp. 267-276, 1993.
- [53] Tonon, D., “ Modélisation simplifiée de l'ensemble du dump vulcain 1 en présence de fuites ”, note FLTC n° 1010/04, 2004.
- [54] Hughes, W.F., Winowich, N.S., Birchak, M.J., Kennedy, W.C., “Phase change in liquid face seals”, Transactions of the ASME, Vol. 100, pp.74-80, 1978.
- [55] Beatty, P.A., Hughes, W.F., “Turbulent two-phase flow in annular seals”, ASLE transactions, 30, 1987.
- [56] Beatty, P.A., Hughes, W.F., “Stratified two-phase flow in annular seals”, Journal of Tribology, 1990.
- [57] Yasuna, J.A., Hughes, W.F., “A continuous boiling model for face seals”, Transactions of the ASME, Vol. 112, pp.266-274, 1990.
- [58] Hendricks, R.C., “Straight cylindrical seals for high performance turbomachinery”, NASA TP-1850, 1987.
- [59] McAdam, W.H., Woods, W.K., and Heroman, L.C., "Vaporisation inside horizontal tubes-II-benzene-oil mixtures", ASME Trans., Vol.64, 1942.
- [60] Tonon, D., "Relations thermodynamiques pour un fluide divariant en variable d'état (pression, enthalpie) et (pression, température), et création d'une version de joint-annulaire.f en (pression, enthalpie)". FLTT n° 2083/09, 2009.
- [61] Mathur, S.R., Murthy, J.Y., “A Pressure – Based Method for Unstructured Meshes”, Numerical Heat Transfer, Part B, 31, pp. 195-215, 1997.
- [62] Rhie, C.M., Chow, W.L., «A Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Isolated Airfoil with Trailing Edge Separation», AIAA Journal, 21, pp. 1525-1532, 1983.
- [63] Majumdar, S., “Role of Underrelaxation on Momentum Interpolation for Calculation of Flow With Nonstaggered Grids”, Numerical Heat Transfer, 13, pp. 125-132, 1988.
- [64] Karki, K.C., Patankar, S.V., «Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations», AIAA Journal, 27, pp. 1167-1174, 1989.
- [65] Candel, S., “Mécanique des fluides”, Dunod Université, 1990.

- [66] Frêne, J., Nicolas, D., Degueurce, B., Berthe, D., Godet, M., "Lubrification hydrodynamique. Paliers et Butées", Editions Eyrolles, 1990.
- [67] Nadian, B., "A unified tribological model for different regimes of lubrication and rub/impact phenomena in rotor dynamics", Departement of Mechanical and Aerospace Engineering, Ph.D Dissertation, Case Western Reserve University, January 1995.
- [68] Hironaka, S., "Boundary Lubrication and Lubricants", Three Bond Technical News, July 1984.
- [69] Brunetière, N., "Les garnitures mécaniques. Etude théorique et expérimentale", Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Poitiers, 2010.
- [70] Petrov, E.P., Ewins, D.J., "Generic friction models for time-domain variation analysis of bladed disks", Journal of Turbomachinery, vol. 126, n°1, pp. 184-192, 2004.
- [71] Nayfeh, A.H., Balachandran, B., "Applied nonlinear dynamics", John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [72] Faik, S., Witteman, H., "Modeling of impact dynamics: A literature survey", International ADAMS user conference, 2000.
- [73] Falcon, E., Laroche, C., Fauve, S., Coste, C., "Behavior of one elastic ball bouncing repeatedly off the ground", The European Physical Journal B, Vol.3, pp. 45-57, 1998.
- [74] Johnson, K.L., "Contact Mechanics", Cambridge University Press, 1985.
- [75] Kraker, D., Crooijmans, M.T.M., Campen, D.H.V., "The dynamics of rotor with rubbing", C284/88, ImechE, 1988.
- [76] Wilkes, J.C., Dyck, B.J., Childs, D.W., Phillips, S.G., "The numerical and experimental characteristics of multi-mode dry-friction whip and whirl", Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, vol. 132, n°5, 2010.
- [77] Hunt, K.H., Crossley, F.R., "Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact", ASME J. Appl. Mech., 42, pp. 440, 1975.

Analyse des étanchéités annulaires à bague flottante

Les étanchéités annulaires à bagues flottantes permettent de réduire de manière significative les fuites dans les machines tournantes fonctionnant avec des gaz ou des fluides cryogéniques. Leur intégration dans la machine n'est pas simple car le fonctionnement correct suppose que la bague flottante soit capable de suivre les vibrations du rotor. Le travail présenté est constitué de deux parties. La première partie consiste de l'analyse du comportement statique et dynamique du joint annulaire qui constitue l'étanchéité principale. Le modèle développé est basé sur un modèle de film mince dominé par des forces d'inertie accompagné d'une forme en enthalpie totale de l'équation de l'énergie. Ce modèle permet la prise en compte du changement de phase dans les fluides cryogéniques. La réponse dynamique du joint annulaire est exprimée sous forme des coefficients dynamiques linéaires. Ces coefficients varient avec le régime de fonctionnement du joint annulaire (excentricité, pression amont/aval et vitesse de rotation) mais ne dépendent pas de la fréquence d'excitation.

La deuxième partie est dédiée à la mise au point d'un modèle dynamique. La bague flottante est soumise aux forces fluides engendrées par l'écoulement dans le joint annulaire (l'étanchéité principale), aux forces de frottement mixte entre son nez et le stator (l'étanchéité secondaire est similaire à un joint à faces radiales) et aux forces d'inertie dues à son poids propre. Le rotor joue le rôle d'une excitation externe. Un modèle approprié est développé pour chacune des ces forces. Sont développés deux modèles dynamiques. Le premier modèle est basé sur l'hypothèse que la bague flottante suit le rotor suivant un mouvement périodique de précession. Ce modèle a l'avantage de permettre une solution quasi-analytique simple et rapide mais est limité par le fait que la réponse dynamique de la bague peut être plus complexe. Le deuxième modèle est complètement non-linéaire et prend en compte les éventuels impacts entre le rotor et la bague et entre la bague et les pions anti-rotation. Le modèle montre que sous certaines conditions la trajectoire de la bague peut être quasi-périodique ou chaotique. Globalement, les résultats obtenus à la fin de la deuxième partie mettent en exergue des règles de conception à suivre pour intégrer correctement un joint annulaire à bague flottante dans une machine tournante.

Mots clés : étanchéité dynamique, joint annulaire, changement de phase, bague flottante, réponse dynamique.

Analysis of annular floating ring seals

The annular floating ring seals can significantly reduce the leakage in rotating machines operating with gas or cryogenic fluids. Their integration into the machine is not simple because the floating ring must be able to follow the vibrations of the rotor. The presented work has two parts. The first part consists of the analysis of static and dynamic behavior of the annular seal which forms the primary seal. The model developed is based on the theory of thin lubrication films dominated by inertia effects together with a total enthalpy form of the energy equation. This model can handle the phase change in cryogenic fluids. The dynamic response of the annular seal is expressed as the linear dynamic coefficients (derived for small perturbations). The dynamic coefficients vary with the operating regime of the seal ring (eccentricity, upstream / downstream pressure, rotation speed) but do not depend on the excitation frequency.

The second part is dedicated to the development of a dynamic model. The floating ring is subject to forces generated by the fluid flow in the annular (primary) seal, the mixed friction forces between its nose and the stator (the secondary seal is similar to a mechanical face seal) and the inertia forces caused by its own weight. The rotor acts as an external excitation. A suitable model is developed for each of these forces. Two dynamic models are proposed. The first model is based on the assumption that the floating ring follows the rotor according to a periodic precession motion. This model allows a simple and fast quasi-analytical solution but is limited by the fact that the dynamic response of the ring may be more complex. The second model is fully nonlinear and takes into account the possible impacts between the rotor and the ring and between the ring and the anti-rotation pins. The model shows that under certain conditions the trajectory of the ring can be quasi-periodic or chaotic. Overall, the results of the second part underline design rules for properly integrating annular floating ring seals into a rotating machine.

Keywords: dynamic sealing, annular seal, phase change, floating ring, dynamic response.