THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Pôle poitevin de recherche pour l'ingénieur en mécanique, matériaux et énergétique - PPRIMME (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie en matériaux, mécanique, énergétique et aéronautique - SIMMEA (Poitiers)
Secteur de recherche : Mécanique des milieux fluides

Présentée par :
Gilles Tissot

Réduction de modèle et contrôle d'écoulements

Directeur(s) de Thèse :
Bernd R. Noack, Laurent Cordier

Soutenue le 02 octobre 2014 devant le jury

Jury :

Président	**Azeddine Kourta**	Professeur des Universités, Polytech'Orléans
Rapporteur	**Angelo Iollo**	Professeur des Universités, Université de Bordeaux
Rapporteur	**Peter Schmid**	Professor, Imperial College London
Membre	**Bernd R. Noack**	Directeur de recherche CNRS, Université de Poitiers
Membre	**Laurent Cordier**	Chargé de recherche CNRS, Université de Poitiers
Membre	**Denis Sipp**	Maître de recherche, ONERA, Meudon
Membre	**Étienne Mémin**	Directeur de recherche, INRIA de Rennes
Membre	**Lionel Mathelin**	Chargé de recherche CNRS, Université d'Orsay

Pour citer cette thèse :
Gilles Tissot. *Réduction de modèle et contrôle d'écoulements* [En ligne]. Thèse Mécanique des milieux fluides. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

(Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École Doctorale : Sciences et Ingénierie en
Mécanique, Matériaux, Energétique et Aéronautique

Secteur de Recherche : MÉCANIQUE DES MILIEUX FLUIDES

Présentée par

Gilles Tissot

Réduction de modèle et contrôle d'écoulements

Directeur de thèse : **M. Bernd R. Noack**

Co-directeur : **M. Laurent Cordier**

Soutenue le 2 octobre 2014
Devant la Commission d'Examen

JURY

A. Iollo	Professeur, IMB, Bordeaux	Rapporteur
P. Schmid	Professeur, Imperial College, Londres	Rapporteur
A. Kourta	Professeur, PRISME, Orléans	Examinateur
L. Mathelin	Chargé de recherche CNRS, LIMSI, Orsay	Examinateur
E. Mémin	Directeur de recherche, INRIA, Rennes	Examinateur
D. Sipp	Maître de recherche, ONERA, Meudon	Examinateur
L. Cordier	Chargé de recherche CNRS, PPRIME, Poitiers	Co-directeur de thèse
B. R. Noack	Directeur de recherche, PPRIME, Poitiers	Directeur de thèse

Remerciements

Lors de ces quelques années de thèse, le regard est très souvent porté soit vers l'avenir, ou soit dans le guidon. Le moment est venu de s'arrêter un moment, de regarder en arrière et de voir que pendant cette thèse, un certain nombre de personnes étaient présentes par leur soutien et leurs conseils. Il est temps pour moi de les remercier.

Pour commencer, je souhaite remercier les membres du jury d'être venus examiner ma thèse. Je remercie en particulier les rapporteurs, Peter Schmid et Angelo Iollo d'avoir rapporté le manuscrit, et j'espère qu'ils n'ont pas été aussi perplexes que les deux gaulois de la figure 1 devant le schéma d'organisation du manuscrit. Je remercie également Azeddine Kourta d'avoir présidé le jury et Lionel Mathelin, Étienne Mémin et Denis Sipp pour leurs questions pertinentes lors de la soutenance.

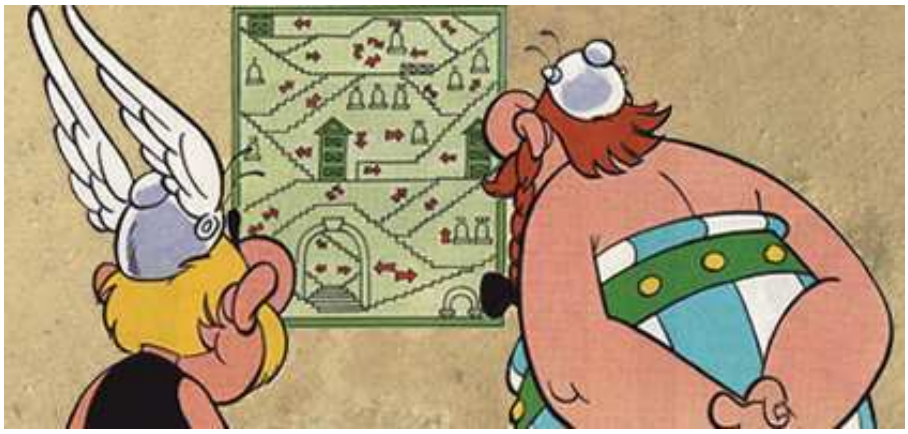


Figure 1 – Deux irréductibles gaulois devant la figure 4 « Schéma de l'organisation du manuscrit ». D'après *Les 12 travaux d'Astérix*, René Goscinny et Albert Uderzo (1976).

Remerciements

Le travail de thèse est bien évidemment impossible sans encadrants, et je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse. Vielen Dank Bernd für die interessante Gespräche und für viele Male fragen mich wenn ich ein JFM geschrieben will. Un grand merci à Laurent, qui a su à la fois être très présent pour cadrer et orienter les réflexions et à la fois laisser l'espace pour tester de nouvelles idées et approfondir certains résultats. J'ai pu développer la rigueur, la réactivité, l'escargot (schéma de rédaction) et la curiosité. J'estime avoir été particulièrement bien encadré dans ma thèse et je souhaite à tout thésard d'être soutenu de la même manière.

Je tiens à remercier mantenant les personnes que j'ai pu côtoyer au quotidien. En arrivant au CEAT, la salle des doctorants était déjà bien animée. Maxime K., Rémy et André, formaient le trio « bruit de jet casseurs de souffleries » (surtout André pour la casse si j'ai bien compris). Pendant ce temps, Guillaume, qui m'avait bien aidé pendant mon stage de numéricien, racontait le Brésil, les kalachnikovs, le carnaval, la samba et les plumes. Je vais bientôt vérifier cela. On pouvait entendre de temps à autre un « Alferez ! ! Cluster ! ! » ou un « Bing ! » de Cyrille ou d'autres. Merci à Alessandro pour nous tenir au courant des crash aériens en temps réel (ma poutain c'est pas énoorme !). Merci à Maxime L. R. pour les discussions diverses et variées, de science ou autre. Côté ENSMA, il y a aussi du monde, que j'ai pu perturber entre deux TD. Merci à Diogo pour des discussions scientifiques poussées qu'on a pu avoir, et un très grand merci pour tes conseils sur le Brésil. Pardon à Yujun et Faisal de vous avoir empêché de travailler à maintes reprises. Merci à Laurent B. pour tes conseils pour stabiliser une barre dans sa position d'équilibre instable. Il y a également ceux que je n'ai pas cités mais que je remercie : Vincent, Vladimir, Faruck, Franck, Guy, Rémi, Quang Linh, Menqui, Selene, Eurika, Cécile ... et j'en oublie. Je les remercie tous pour leur bonne humeur

Au CEAT, un moment important sont les réunions de site hebdomadaires. Je remercie Stève, Alex, Anton, Patrick, André et Rémy pour le mot d'excuses (figure 2). Merci à Redouane, Romain B., Thomas, Romain T., Stéphanie, Nadia pour leur bonne humeur à la cantine et au café.

Je tiens à dédier quelques lignes à ceux du CEAT qui nous ont quittés bien trop tôt. Je pense à Pierre, qui, j'estime, m'a mis le pied à l'étrier de l'école d'ingénieur vers le monde de la recherche, à Carine qui était toujours extrèmement souriante, et à Joël qui avait toujours les remarques pertinentes.

En dehors du contexte du travail, un certain nombre de personnes étaient également très présentes. Je souhaite remercier les « biologistes ». Tif, Lise, Romain pour les sorties vélo, Jessica, Victorien, Margot, Clothilde pour m'avoir laissé monter 1.5 fois sur Queyras, Seb, Gaël.

Je tiens également à remercier ma famille. Ils ont été patients malgré mon indisponibilité

Figure 2 – Mot d'excuses.

pendant ces quelques années et m'ont toujours soutenu.

Pour finir, je dis un grand merci à celle que j'aime. Je la remercie pour avoir fait de l'appartement une serre voire une jungle et pour m'avoir fait découvrir des légumes inconnus (je n'ai pas dit bons), de m'avoir fait monté sur le fameux cheval, de m'expliquer ce qu'est une alpha-protéobactérie endosymbiotique à gram négatif... Mais plus que tout, elle m'a soutenu dans les moments plus difficiles, et engueulé quand il le fallait (et aussi quand il ne le fallait pas). Je t'aime Myriam.

Remerciements

Table des matières

Introduction générale **1**

I Contrôle d'écoulement par modèles réduits **15**

1 Contrôle optimal, non-linéaire et linéaire **17**

1.1 Contrôle optimal 18

1.1.1 Formulation du problème 19

1.1.2 Méthodes de résolution 21

1.1.3 Implémentation pratique et horizon temporel 21

1.2 Contrôle linéaire pour un système descripteur 24

1.2.1 Contrôle LQR 24

1.2.2 Contrôle LQG 26

1.2.3 Contrôle robuste 29

1.3 Vers le contrôle faiblement non-linéaire 30

1.4 Synthèse 32

2 Réduction de modèle pour le contrôle d'écoulement **33**

2.1 Réduction de modèle par projection 34

2.1.1 Projection de Petrov-Galerkin 34

2.1.2 Cas des équations de Navier-Stokes 36

2.1.3 Conditions aux limites et terme de pression 37

2.2 Choix de la base de projection 38

2.2.1 Modes globaux 40
2.2.2 Balanced Truncation 41
2.2.3 Proper Orthogonal Decomposition 44
2.2.4 Dynamic Mode Decomposition 49
2.3 Synthèse 50

3 Amélioration de la précision des modèles réduits 51
3.1 Sources d'imprécisions 52
3.1.1 Effet de troncature 52
3.1.2 Modélisation et calcul numérique 57
3.2 Améliorations des modèles POD-Galerkin 57
3.2.1 Modèle de viscosité 58
3.2.2 Rajout d'une contrainte énergétique 59
3.2.3 Méthodes de régularisation 62
3.2.4 Méthodes d'identification 62
3.3 Synthèse 65

4 Robustesse des modèles réduits à la variation d'un paramètre 67
4.1 Influence des réalisations 68
4.2 Interpolation de bases 70
4.3 Sensibilité des modes 70
4.4 Algorithmes POD adaptatifs à région de confiance 72
4.5 Synthèse du chapitre et de la partie 74

II Dynamic Mode Decomposition et réduction de modèle 77

5 Dynamic Mode Decomposition 79
5.1 Opérateur de Koopman 80
5.2 DMD et approximation des modes de Koopman 82
5.2.1 Algorithme de la matrice Compagnon 83
5.2.2 Algorithme SVD 85
5.3 Propriétés de la DMD 86
5.3.1 Existence et unicité 87
5.3.2 Systèmes linéaires 87
5.3.3 Solutions périodiques 88

5.3.4 Soustraction de la moyenne 89
5.4 Considérations pratiques 90
5.4.1 Choix du jeu de données 90
5.4.2 Coefficients de la matrice Compagnon 92
5.4.3 Détermination des coefficients temporels 93
5.5 Application à des données PIV d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre . 94
5.6 Synthèse 103

6 Détermination d'une base réduite basée sur les modes DMD 105
6.1 Sélection des modes issus de l'algorithme DMD classique 106
6.2 Sensibilité des modes DMD à un paramètre 108
6.3 Optimized DMD 110
6.4 Chronos-Koopman 112
6.5 Applications 113
6.5.1 Bases de données 113
6.5.2 Sélection des modes 115
6.5.3 Analyse de sensibilité 118
6.5.4 Optimized DMD 119
6.5.5 Chronos-Koopman 125
6.6 Synthèse 126

7 Modèles réduits basés sur les modes DMD 129
7.1 Propriété de propagation temporelle 129
7.2 Projection de Petrov-Galerkin 133
7.3 Synthèse 136

III Identification de modèle par assimilation de données 4D-Var 139

8 Assimilation de données 4D-Var 141
8.1 Introduction 142
8.2 Formalisme général 143
8.3 Principales variantes 146
8.3.1 Paramètres de contrôle 146
8.3.2 Espace de résolution 148
8.3.3 Versions adaptatives 148

8.4 Exemple de l'équation de convection/diffusion 149
8.4.1 Modèle dynamique 149
8.4.2 4D-Var 150
8.4.3 POD 4D-Var 152
8.4.4 POD 4D-Var adaptative 154
8.4.5 Bilan 155
8.4.6 Conclusions 157
8.5 Synthèse 157

9 Identification de modèles réduits par assimilation de données 159
9.1 Application aux modèles réduits POD 160
9.1.1 Données numériques 160
9.1.2 Données expérimentales 164
9.2 Application à un modèle réduit DMD 168
9.3 Synthèse 173

IV Contrôle d'écoulement en interaction fluide-structure 175

10 Introduction du terme de contrôle dans le modèle dynamique 177
10.1 Force volumique 179
10.2 Conditions aux limites Dirichlet/Neumann 179
10.2.1 Intégration par parties 180
10.2.2 Fonction de contrôle 181
10.2.3 Introduction d'une contrainte au modèle réduit 182
10.3 Modèle réduit pour l'interaction fluide-structure 183
10.4 Méthodes pour imposer une contrainte 186
10.4.1 Méthode tau 186
10.4.2 Problème d'optimisation sous contrainte 187
10.5 Applications 190
10.5.1 Équation de Ginzburg-Landau 191
10.5.2 Cylindre en rotation 194
10.5.3 Cylindre en oscillation verticale 198
10.6 Synthèse 201

11 Contrôle en boucle fermée par un modèle réduit POD contraint **203**

11.1 Stabilisation d'écoulement par modèle réduit POD contraint par multiplicateurs de Lagrange . . . 204

11.2 Applications . . . 206

11.2.1 Équation de Ginzburg-Landau . . . 206

11.2.2 Cylindre en rotation . . . 211

11.2.3 Cylindre en oscillation verticale . . . 214

11.3 Synthèse . . . 217

Conclusion et perspectives **220**

Annexes **230**

A Compléments relatifs à la Partie I **233**

A.1 Linéarisation autour d'un état quelconque . . . 233

A.2 Résolution de l'équation de Riccati généralisée . . . 234

B Compléments relatifs à la Partie II **237**

B.1 Vecteurs propres de Ritz de A . . . 237

B.2 Lien entre DMD classique et DMD par SVD . . . 237

B.3 Sensibilité de la matrice Compagnon . . . 238

B.4 Modes adjoints DMD . . . 239

B.5 Optimized DMD . . . 240

B.6 Modèles réduits basés sur des modes DMD pour les données numériques en régime transitoire . . . 241

C Compléments relatifs à la Partie IV **245**

C.1 Contrainte dans l'espace de dimension réduite . . . 245

C.2 Intégration du système dynamique contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange . . . 245

C.3 Mise à jour de la contrainte dans le sous-espace de projection . . . 247

Références bibliographiques 249

Nomenclature 274

Liste des figures 275

Liste des tableaux 285

Résumé 288

Introduction générale

Contrôle d'écoulement

L'amélioration des performances d'un système aérodynamique par contrôle d'écoulement est un enjeu majeur dans de nombreux domaines, en particulier celui des transports, que ce soit aéronautique, routier ou ferroviaire. En effet, réduire les efforts de traînée d'un véhicule, donc la consommation, minimiser les vibrations induites par interaction fluide-structure ou le bruit aéro-acoustique, maîtriser les transferts thermiques ou le mélange d'espèces sont autant d'objectifs qui nécessitent la capacité de manipuler les écoulements. Pour maximiser nos chances d'aboutir, nous aimerions aller au delà d'une manipulation aveugle, souvent inefficace, et développer plutôt un contrôle d'écoulement au sens du mot « commande » employé classiquement en automatique et en théorie du contrôle.

Devant l'importance de ces enjeux, rien d'étonnant que de nombreuses études ont déjà eu lieu, démontrant qu'il était possible expérimentalement d'avoir une autorité suffisante sur un écoulement et être ainsi capable d'optimiser les conditions de fonctionnement. Les premières tentatives remontent à Prandtl (1935), qui, à partir de considérations physiques, a montré qu'il était possible de retarder le décollement de couche limite par soufflage, ou encore de manière plus efficace par aspiration, rendant possible la diminution de la traînée d'un corps épais ou l'augmentation de la portance d'un profil. Depuis, de nombreuses autres stratégies de contrôle ont été testées. A titre d'illustration, nous pouvons citer la réduction de traînée d'un écoulement de culot réalisée expérimentalement par contrôle en boucle fermée (Pastoor *et al.*, 2008). Les recherches dans le domaine ont également abouti à des retombées industrielles ; nous pouvons donner l'exemple du système de contrôle actif « BLC » (Boundary Layer Control System) implanté sur le F-104 Lockheed. Ce système de soufflage installé sur le bord de fuite des volets permet d'augmenter la portance et ainsi autorise des vitesses d'approche et d'atterrissage plus basses.

Pour des raisons d'efficacité énergétique (rapport dépense/gain), nous aimerions qu'une action de faible amplitude provoque une modification importante de certaines propriétés de l'écoulement. En effet, les écoulements montrent parfois une grande réceptivité à une action de faible amplitude, que ce soit via des mécanismes linéaires (Dergham *et al.*, 2013), ou non linéaires (Jung *et al.*, 1992). Quand les phénomènes physiques sont suffisamment bien compris, nous souhaiterions pouvoir les exploiter et orienter nos développements vers ces phénomènes sensibles à de petites perturbations. Cette démarche phénoménologique n'est pas toujours la plus simple car en fonction de l'écoulement visé ou de l'objectif à atteindre, les mécanismes peuvent être différents. Nous pouvons ainsi chercher à modifier la position d'un décollement, retarder une transition vers la turbulence ou exciter des fréquences naturelles de couches cisaillées. Devant

la diversité des approches possibles et des configurations potentielles, la question de déterminer la meilleure stratégie de contrôle pour atteindre un objectif fixé dans une configuration donnée est extrêmement délicate.

Pour tenter de répondre à cette question, une démarche consiste à définir dans un premier temps les différents ingrédients du contrôle, c'est-à-dire la configuration d'écoulement, l'objectif à atteindre, la manière de contrôler et d'observer le système. Il sera alors temps de déterminer quelle est la meilleure loi de commande permettant d'atteindre cet objectif ? A ce stade, les outils de l'automatique et de la théorie du contrôle (Bewley, 2012), s'appuyant ou non sur un modèle de l'écoulement, viennent alors en renfort des connaissances fines en mécanique des fluides pour aboutir à la définition d'un contrôle efficace.

Structure du problème

Différents ingrédients sont nécessaires pour définir correctement un problème de contrôle (Gad-el Hak *et al.*, 1998). En effet, il est nécessaire de définir : i) l'objectif visé, ii) les méthodes pour agir sur le système, iii) les moyens mis en œuvre pour éventuellement l'observer et iv) l'ensemble des contraintes subies par le système.

Objectif : Comme nous l'avons déjà évoqué, un contrôle est appliqué pour atteindre un objectif donné, par exemple réduire la traînée ou le niveau de bruit. Pour aller au delà de la phénoménologie physique, cet objectif doit être formulé mathématiquement sous la forme d'une *fonctionnelle objectif* ou *fonctionnelle coût*. Or, la plupart du temps, l'application du contrôle a également un coût. Afin de le diminuer, il est indispensable de pénaliser un contrôle trop important, soit pour des raisons de ratio dépense/gain, soit pour des limitations physiques ou technologiques, soit finalement pour régulariser mathématiquement le problème.

Par ailleurs, le choix de la fonctionnelle coût n'est pas toujours aussi immédiat qu'il avait été imaginé. Prenons l'exemple de la réduction de traînée. Si nous souhaitons minimiser cette quantité, nous pouvons de manière naïve considérer pour fonctionnelle coût directement la traînée. Or, par des considérations physiques, nous savons que la traînée est reliée à l'énergie cinétique turbulente de l'écoulement. Pour cette raison, il peut donc être pertinent de s'intéresser également à l'énergie. Dans le cas d'un canal turbulent (El Shrif, 2008; Bewley *et al.*, 2001), il a été observé que minimiser l'énergie cinétique turbulente conduit à un problème plus régulier, et au final à un contrôle plus efficace, donc à une traînée inférieure. Dans ce cas, le contrôle a été déterminé pour minimiser une des causes

de l'objectif visé et non l'objectif lui-même.

En jouant sur la définition de la fonctionnelle coût, différents objectifs peuvent donc être considérés comme optimiser une grandeur aérodynamique (portance, traînée, longueur de recirculation, ...), modifier un champ moyen ou un tenseur de Reynolds, maximiser un transfert énergétique, retarder une transition vers la turbulence, maximiser l'effet d'une perturbation, stabiliser un état stationnaire, et cela sans oublier de pénaliser le contrôle ou une autre grandeur indésirable comme un bruit extérieur dans le cadre du contrôle robuste $\mathcal{H}_\infty$.

Actionneur : Le contrôle est imposé au système physique via un *actionneur*, qui joue donc un rôle central. L'actionneur va permettre de modifier l'état du système afin qu'il passe d'un état naturel vers un état, considéré comme meilleur selon l'objectif formulé. Il est important que l'actionneur soit correctement choisi de sorte que l'état du système puisse être modifié au mieux. Au delà de la seule autorité de l'actionneur, nous abordons ici la notion de contrôlabilité (Burl, 1998) qui est nécessaire pour un contrôle efficace.

Différents types de contrôle peuvent être envisagés. Nous allons différencier le contrôle actif du contrôle passif selon qu'il y ait introduction ou non d'énergie dans le système. Pour le contrôle actif, le contrôle en boucle ouverte est caractérisé par une action faite en aveugle de l'état du système, tandis que le contrôle en boucle fermée prend en compte en temps réel un certain nombre d'observations du système. Les méthodes de type *extremum seeking* (Krstić et Wang, 2000; Maury *et al.*, 2012) ou *slope seeking* (King *et al.*, 2006) sont à mi-chemin car le contrôle est modifié de manière optimale et quasi-statique en boucle ouverte, en fonction d'une observation.

La position et le type des actionneurs peuvent être définis en fonction de contraintes technologiques, de considérations physiques ou mathématiques (Chen et Rowley, 2011). Il est effectivement intéressant de placer les actionneurs dans des zones de l'écoulement sensibles aux perturbations comme les couches de cisaillement. Des calculs de sensibilité (Marquet *et al.*, 2008) peuvent être effectués pour trouver la position optimale des actionneurs et des capteurs.

Capteur : Dans le cas spécifique du contrôle en boucle fermée, non seulement nous disposons d'actionneurs, mais nous disposons également de *capteurs* dont nous allons utiliser les mesures pour évaluer la réponse du système et aider à déterminer le contrôle. Deux difficultés apparaissent. La première est que ces observations ne sont pas complètes. D'une part, toutes les variables ne sont pas observées, et d'autre part, l'observation est éparse

dans l'espace et dans le temps. Il convient donc de placer les capteurs à un endroit où la mesure est représentative de l'état du système. La capacité de déterminer l'état complet du système connaissant les mesures, définit la notion d'observabilité (Burl, 1998). De la même manière que pour les actionneurs, un calcul de sensibilité peut mettre en évidence la position optimale de ces capteurs. La seconde difficulté est que ces capteurs ne sont pas forcément parfaits et peuvent donc être bruités. Ces deux difficultés conduisent à un problème d'estimation consistant à évaluer au mieux l'état actuel du système connaissant des observations, l'état estimé au pas de temps précédent et le contrôle. De la qualité de cette estimation, dépendra la qualité du contrôle qui en résulte.

Contraintes : Les variables d'état sont contraintes à respecter les équations représentatives de la physique considérée. En contrôle d'écoulement, le système est par définition l'écoulement et les équations de Navier-Stokes sont souvent considérées. La version compressible ou incompressible, couplée ou non avec une autre physique comme la thermique ou l'interaction avec une structure solide peuvent être envisagées. Un modèle dynamique, décrivant de manière plus ou moins précise l'évolution de ces variables d'état, sera considéré comme une contrainte. La section suivante est dédiée à l'importance de ce modèle dynamique pour définir la stratégie de contrôle.

Tous ces ingrédients étant définis, nous sommes en mesure de rechercher la meilleure loi de commande, ou de manière plus générale les meilleurs *paramètres de contrôle*, de telle sorte que l'objectif fixé soit atteint.

Importance d'un modèle dynamique

Afin de concevoir une stratégie de contrôle la plus efficace possible, la connaissance d'un modèle dynamique suffisamment représentatif du système à contrôler est particulièrement utile. Son niveau de complexité peut évidemment varier en fonction du type de contrôle que nous souhaitons effectuer et des ressources à disposition. Le classement des différentes méthodes de modélisation est réalisé schématiquement sur la figure 3 en fonction du nombre de degrés de liberté impliqué dans le modèle et de son niveau de précision.

Pour décrire l'évolution d'un écoulement incompressible, le plus naturel est de considérer les champs de vitesse et de pression. Le modèle d'équation aux dérivées partielles (EDP) le plus représentatif que l'on connaisse pour ces quantités est les équations de Navier-Stokes. Afin de travailler en dimension finie, il est courant de discrétiser les champs considérés sur une grille spatiale, en utilisant une base éléments finis ou spectrale par exemple. Dans la plupart des cas,

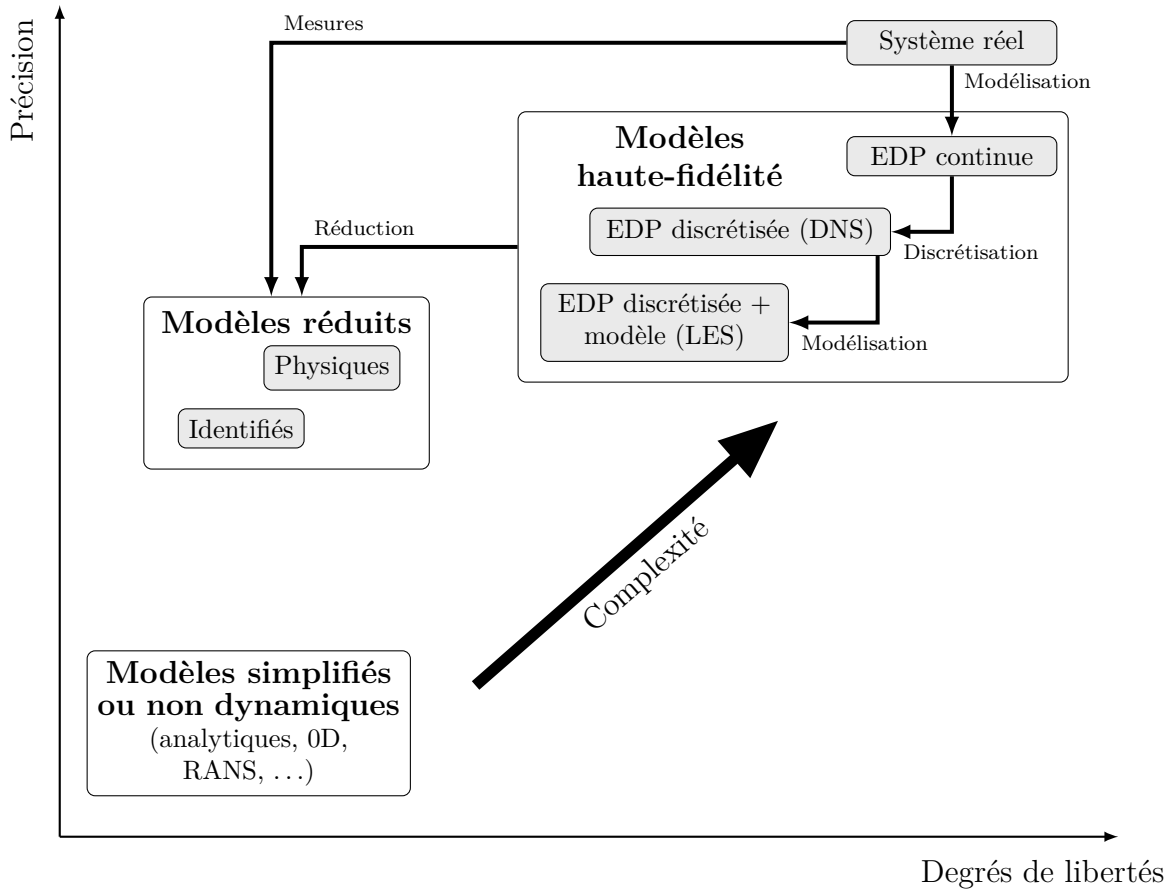


Figure 3 – Représentation schématique des différentes familles de modèles en fonction du nombre de degrés de libertés et de la précision impliqués.

le coût numérique de résolution du modèle résultant est trop important pour être utilisé pour des applications de contrôle. Ce constat est identique, même après une étape de modélisation des petites échelles de la turbulence faite en LES (*Large Eddy Simulation*) (Lesieur et Métais, 1996). Pour obtenir un modèle numérique moins coûteux à résoudre, une méthode consiste à s'appuyer sur la connaissance d'un ensemble de réalisations de l'écoulement, générées par un modèle haute-fidélité ou par des mesures du système réel. Ainsi, nous cherchons *a posteriori* à construire une base de représentation qui soit adaptée à l'écoulement considéré. Le modèle devient alors moins polyvalent, et peut-être moins précis, mais nous gagnons énormément en nombre de degrés de liberté. Nous venons de décrire les modèles réduits basés sur les principes fondamentaux de la physique (voir figure 3), classe que nous considérerons largement dans ce manuscrit. Une autre démarche consiste à s'intéresser uniquement au caractère entrée/sortie du système. Les coefficients de ce modèle peuvent alors être identifiés via des techniques AR-

MAX (*Auto Regressive Moving Average with eXternal inputs*) (Hervé *et al.*, 2012), la Méthode d'Identification Modale (Videcoq *et al.*, 2012) ou des réseaux de neurones (Specht, 1990). Ces modèles réduits issus d'identification sont également représentés sur la figure 3.

Parfois, les contraintes d'utilisation des modèles conduisent aux développements de modèles dynamiques très simplifiés comme c'est le cas pour les modélisations 0D-1D (Martin, 2010) ou mènent à la détermination de grandeurs moyennes comme en simulation RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) (Speziale, 1995). Ce type de modèles limite considérablement la physique prise en compte. De plus, l'accès à des grandeurs moyennes rompt le caractère dynamique du modèle et limite l'étude à l'optimisation d'écoulement (Labroquere *et al.*, 2013). Finalement, le modèle dynamique peut complètement disparaître dans des contrôles qualifiés de « classiques » par Bewley (2012) comme les régulateurs PID (Proportionnel Intégral Dérivé), pour lequel on ne considère plus qu'un lien direct entre les mesures et l'action avec des coefficients à ajuster de manière *ad-hoc*.

D'un côté, l'absence de modèle dynamique peut mener à un contrôle efficace mais qui restera sous-optimal en raison de la méconnaissance de ce que l'on cherche à contrôler. D'un autre côté, résoudre les équations de Navier-Stokes en temps réel n'est pas concevable, du moins avec les capacités de calcul actuelles (Moore, 1965). Quelles que soient les capacités de calcul disponibles, un compromis est donc à faire entre représentativité du modèle et rapidité de résolution de celui-ci. En effet, un certain degré d'approximation peut être accepté car la connaissance totale du système n'est pas toujours nécessaire afin de déterminer un contrôle efficace.

Cherchant à exploiter au maximum les informations provenant de la physique du système à contrôler (les équations de Navier-Stokes dans notre cas), nous considérerons dans ce manuscrit les modèles réduits basés sur des techniques de projection (Antoulas *et al.*, 2001). Ce type de modèle est souvent le plus approprié en matière de compromis entre représentativité et rapidité. Ces modèles sont en concurrence avec les méthodes d'identification qui peuvent prendre l'avantage lorsque la connaissance de la physique devient limitée ou difficile à modéliser comme dans le cas des systèmes amplificateurs de bruit (Juillet *et al.*, 2013) : couches de mélange, jets ou marches descendantes. Par la suite, nous traiterons également des méthodes d'identifications, en particulier de l'assimilation de données, qui est une manière de prendre en compte à la fois des données provenant d'un modèle basé sur la physique et des mesures externes, bruitées ou non.

Notons ici que tous les modèles, et de manière encore plus marquée les modèles réduits, sont adaptés à un objectif. Nous montrerons plus tard que leur construction, plus précisément le sous-espace de représentation, pourra être choisi en fonction de ce que nous souhaitons faire du modèle. La réduction de modèle de type *goal-oriented* (Bui-Thanh *et al.*, 2007), l'*Optimal*

Mode Decomposition (Goulart *et al.*, 2012) et l'*Optimized DMD* (Chen *et al.*, 2012) en sont les exemples les plus flagrants car dans ces approches, le modèle est construit explicitement à partir d'un critère à minimiser.

Difficultés liées au contrôle des écoulements turbulents

Le contrôle des écoulements turbulents reste encore aujourd'hui un défi, et cela pour différentes raisons. Par rapport au contrôle d'un système mécanique simple, classiquement rencontré dans des problèmes d'automatique et de théorie du contrôle, le système considéré est ici un fluide, régi par les équations de Navier-Stokes. La structure de ces équations est spécifique par différents aspects. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles, non-linéaire où la pression joue un rôle particulier. En outre, il n'est pas toujours immédiat selon le contrôle envisagé d'introduire de manière explicite celui-ci dans le modèle. Ces spécificités ont des conséquences sur la modélisation et sur le comportement même de la solution.

Pour commencer, puisque nous traitons d'une équation aux dérivées partielles, le système considéré est défini de manière continue en espace et en temps et est donc en théorie de dimension infinie. En turbulence, le nombre de degrés de libertés qui va intervenir dans la dynamique du système est très important, typiquement de l'ordre de 10^{12} pour des configurations réalistes. Lors de la conception du contrôle, une étape importante de modélisation est donc nécessaire afin de représenter la dynamique en dimension finie.

Par ailleurs, les équations de Navier-Stokes étant non-linéaires, le comportement du système dépend de son état, ce qui peut engendrer des difficultés de modélisation. En ce qui concerne le contrôle, cela implique que dans le meilleur des cas, la loi de commande devrait également évoluer avec l'état du système. Nous verrons que dans ce manuscrit, nous nous contenterons comme dans la grande majorité de la littérature d'appliquer des stratégies de contrôle linéaire, consistant à supposer que le système reste dans un état proche de celui pour lequel le contrôle a été conçu. Côté modélisation, le terme non-linéaire peut être responsable d'une divergence en temps fini des modèles réduits de type Galerkin. Notons ici que l'existence et la régularité d'une solution en temps infinie des équations de Navier-Stokes n'a pas encore été démontrée (Fefferman, 2000). L'énergie du système étant finie, celui-ci ne diverge pas en pratique. Cependant, après projection sur une base de dimension finie, il arrive que le système dynamique simplifié n'hérite pas des propriétés de stabilité du système original. De manière plus physique, les non-linéarités sont également responsables de la cascade énergétique de la turbulence des grandes échelles vers les petites et donc du nombre élevé de structures en interaction forte qui

sont réparties sur un large éventail d'échelles.

En outre, les écoulements turbulents sont des systèmes sensibles aux conditions initiales. Cet aspect est lié au comportement non-linéaire, et l'exemple le plus commun est celui de la météorologie, phénomène piloté par des écoulements. En effet, les modèles de météorologie ont une grande sensibilité aux conditions initiales. Pour un niveau d'incertitude donné, il existe donc un temps fini, dit horizon de prédictibilité, au-delà duquel il est impossible de prédire l'état du système. C'est précisément pour cette raison que des méthodes d'assimilation de données sont utilisées pour optimiser la condition initiale à incorporer au modèle de telle sorte que celui-ci corresponde le mieux possible aux observations d'hier et d'aujourd'hui, et puisse ensuite prédire le temps du lendemain. Le caractère imprédictible des écoulements turbulents est donc une difficulté intrinsèque supplémentaire pour le contrôle. En effet, plus le modèle sera capable de prédire l'état futur du système sur un horizon lointain, et plus l'action du contrôle sera efficace.

Le terme non-linéaire n'est pas la seule difficulté dans la structure des équations de Navier-Stokes. Dans le cas du problème de Stokes, qui est valable pour les écoulements rampants c'est à dire fortement visqueux, il y a également la difficulté due au terme de pression. En effet, ce dernier a un rôle particulier car il intervient dans l'équation de conservation de quantité de mouvement et non pas dans l'équation de conservation de la masse. Autrement dit, il n'y a pas de terme de dérivée temporelle de la pression, ce qui rend plus délicate sa prise en compte dans le modèle. Nous rediscuterons de cet aspect au chapitre 10 où nous montrerons que la pression peut être vue comme un multiplicateur de Lagrange qui assure la contrainte de divergence nulle du champ de vitesse.

Finalement, la gestion de la complexité au niveau du modèle passe d'une part par une modélisation multi-échelles mais aussi par le traitement de géométries complexes. Le cas particulier des écoulements en présence de parois mobiles est difficile en raison des problèmes à la fois mathématiques et numériques rencontrés lors de la phase de réduction de modèle. De manière générale, l'introduction fidèle du contrôle dans le modèle réduit, et la capacité de rendre le modèle robuste à des modifications de ce contrôle sont des étapes de modélisation nécessaires pour pouvoir concevoir un contrôle efficace.

Contribution de la thèse et organisation du manuscrit

Deux parcours de lecture sont offerts dans ce manuscrit. Le lecteur peut opter pour une lecture linéaire, ou adopter une lecture sélective basée sur une certaine hiérarchisation des différentes

parties. Pour l'aider, l'organisation du manuscrit est schématisée sur la figure 4. La première partie donne une vue d'ensemble du contrôle d'écoulement par réduction de modèle, en décrivant les éléments constitutifs nécessaires au développement d'une stratégie de contrôle. Les trois autres parties traitent de différents aspects du problème, comme : i) la détermination d'une base réduite et d'un modèle réduit à partir de modes issus de la Dynamic Mode Decomposition (partie II), ii) de l'utilisation de l'assimilation 4D-Var pour identifier un modèle dynamique (partie III), iii) du contrôle par modèle réduit de configurations d'écoulement en interaction fluide/structure (partie IV).

Ce manuscrit est constitué, outre ce chapitre introductif et la conclusion générale, de 4 parties (11 chapitres principaux) et 3 annexes. Il est organisé de la manière suivante :

La **première partie** est dédiée à une vue d'ensemble des méthodes utilisées en contrôle d'écoulement par modèles réduits. Nous commencerons par présenter les méthodes classiques de détermination d'une loi de commande, basées sur un problème d'optimisation et sur l'existence d'un modèle dynamique. Le contrôle optimal sera d'abord détaillé puis nous particularisons la présentation pour le cas du contrôle linéaire des systèmes descripteurs. Nous finirons par une discussion des limites de l'application des techniques de contrôle linéaire lorsque l'hypothèse de linéarité est remise en cause. Ces méthodes nécessitant un modèle dynamique représentatif de l'écoulement, le chapitre 2 détaillera comment obtenir un modèle réduit via une méthode de projection de type Petrov-Galerkin. Nous montrerons ensuite que la représentativité des modèles réduits issus de projection dépend essentiellement de la base réduite retenue pour la projection, et nous présenterons alors différentes décompositions utilisables. Au chapitre 3, nous discuterons de l'importance d'améliorer la précision des modèles réduits issus de projection de Galerkin. En effet, en raison de la forte diminution du nombre de degrés de libertés liée à la projection, une erreur importante de troncature est souvent réalisée en négligeant l'effet de modes non pris en compte. Nous présenterons alors différentes méthodes possibles pour compenser la troncature, comme l'ajout d'un modèle de viscosité, l'application d'une contrainte énergétique sur le modèle réduit, l'utilisation de méthodes de régularisation ou d'identification de modèles. Enfin au chapitre 4, nous traiterons de la robustesse des modèles réduits à la variation des paramètres de contrôle. Nous discuterons d'abord de l'influence des réalisations de la base de données sur la base réduite puis évoquerons la possibilité d'interpoler des bases pré-existantes. Pour terminer, nous introduirons la sensibilité des modes et aborderons les algorithmes adaptatifs à région de confiance.

Dans la **deuxième partie**, une attention particulière sera apportée à la *Dynamic Mode Decomposition* (DMD), récemment introduite par Schmid (2010), et qui approxime les vecteurs propres d'un opérateur linéaire représentatif de la dynamique d'un ensemble de réalisations de l'écoulement. En particulier, nous verrons comment exploiter les propriétés de cette décomposition pour développer un modèle réduit d'écoulement. Le chapitre 5 présentera de manière détaillée la décomposition DMD, ainsi que ses propriétés, puis le chapitre 6 discutera de la détermination d'une base réduite basée sur la DMD. Finalement, le chapitre 7 décrira différentes manières de construire un modèle réduit en utilisant les propriétés de la DMD.

La **troisième partie** traite de l'amélioration des modèles réduits par l'utilisation de techniques d'identification. Au chapitre 8, nous montrerons qu'en combinant des informations provenant d'un modèle dynamique, d'observations et de connaissances *a priori*, la méthode d'assimilation de données variationnelle 4D-Var permet d'identifier tout ou partie des paramètres d'un modèle. Les modèles réduits étant sensibles aux conditions initiales, nous verrons que la recherche de manière optimale de conditions initiales et de paramètres du modèle peut permettre de rendre le modèle assimilé représentatif du système original. Au chapitre 9, un lien sera alors réalisé avec la partie II, en appliquant l'assimilation de données variationnelle à un modèle réduit déterminé par projection sur les modes DMD.

Dans la **dernière partie**, nous développerons une stratégie de contrôle linéaire dans un contexte d'interaction fluide/structure. Au chapitre 10, nous nous intéresserons d'abord à l'introduction du terme de contrôle dans les équations du modèle réduit. Nous verrons alors que l'ajout d'une contrainte dans le modèle permet non seulement d'introduire de manière explicite le contrôle dans le modèle, mais aussi de modéliser le mouvement de solides immergés dans un milieu fluide. Finalement, au chapitre 11, nous couplerons les modèles dynamiques développés au chapitre précédent à une méthode de contrôle de type LQR afin de stabiliser des écoulements de sillage pour des cylindres en rotation sur eux-mêmes ou en mouvement d'oscillation verticale.

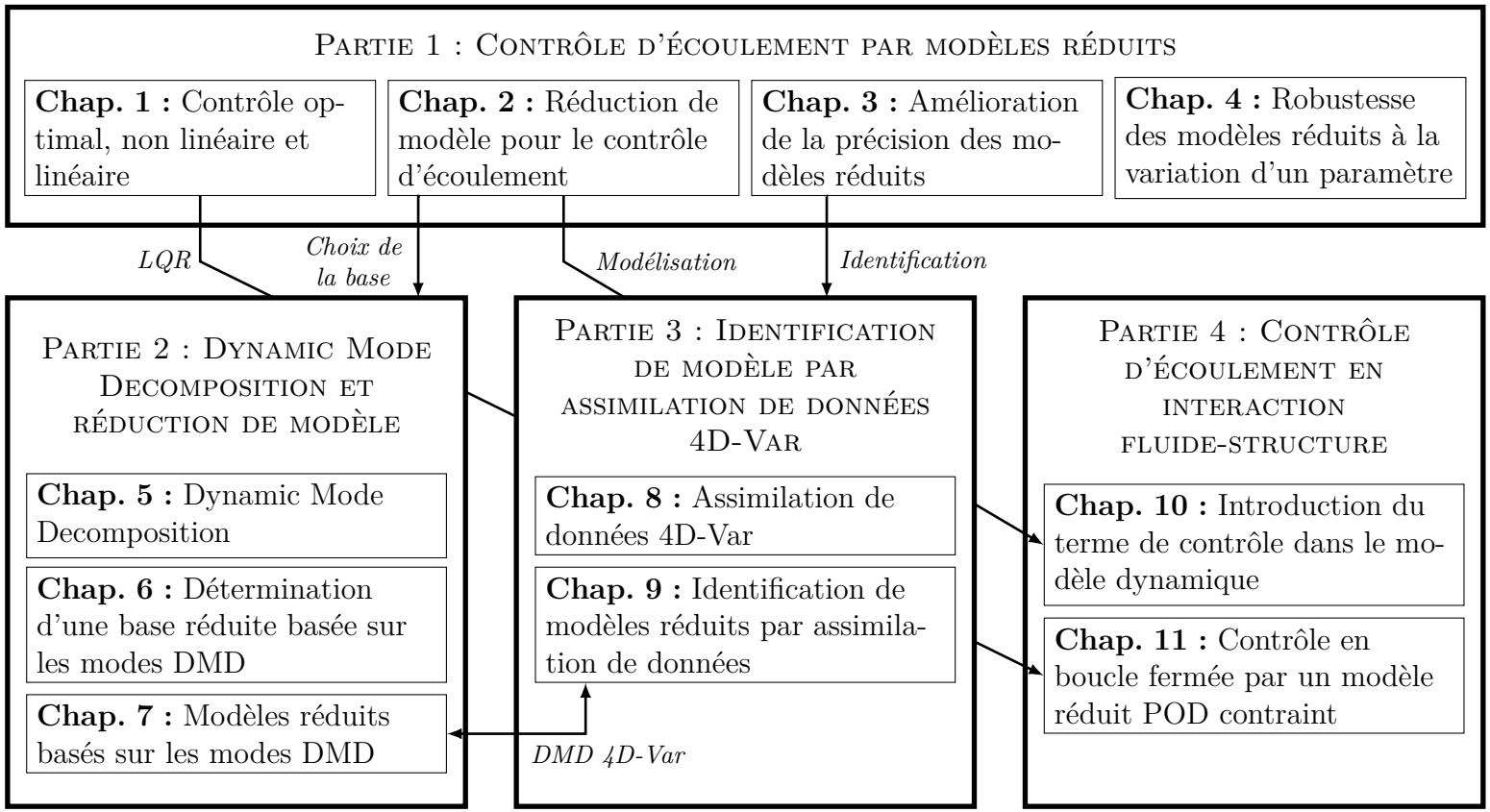


Figure 4 – Schéma de l'organisation du manuscrit.

Première partie

Contrôle d'écoulement par modèles réduits

Chapitre 1

Contrôle optimal, non-linéaire et linéaire

Table des matières

1.1 Contrôle optimal **18**

1.1.1 Formulation du problème 19

1.1.2 Méthodes de résolution 21

1.1.3 Implémentation pratique et horizon temporel 21

1.2 Contrôle linéaire pour un système descripteur **24**

1.2.1 Contrôle LQR 24

1.2.2 Contrôle LQG 26

1.2.3 Contrôle robuste 29

1.3 Vers le contrôle faiblement non-linéaire **30**

1.4 Synthèse **32**

Afin de contrôler efficacement un système mécanique quelconque, dans notre cas un écoulement, il convient de définir la loi de commande à imposer aux actionneurs. Cette loi est calculée par le *contrôleur*, de sorte que lorsque cela est possible, l'objectif soit atteint. Pour être physiquement réaliste, la détermination de la loi de commande doit reposer sur les mesures réalisées par les capteurs. Dans ce chapitre, nous présentons des méthodes de contrôle, qualifiées de « modernes » par Bewley et Liu (1998), provenant de la théorie du contrôle optimal. Ces

méthodes reposent sur l'existence d'un modèle dynamique du système, et sur une recherche du contrôle comme solution d'un problème d'optimisation sous contrainte. Dans un premier temps, nous introduirons le contrôle optimal dans un cadre général c'est-à-dire pour un système dynamique quelconque (voir section 1.1), puis nous particulariserons en considérant le cas du contrôle linéaire (section 1.2), très utilisé car plus simple à mettre en œuvre. Finalement, nous présenterons à la section 1.3, que lorsque les non linéarités du système restent limitées, il est possible d'introduire une méthode de contrôle généralisant par morceau le contrôle linéaire.

1.1 Contrôle optimal

La théorie du contrôle optimal (Gunzburger, 2003; Cordier, 2011) consiste à formuler la recherche du meilleur contrôle possible comme un problème d'optimisation sous contrainte. Connaissant l'état du système $\boldsymbol{z}$, et un modèle dynamique $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = 0$, le contrôleur détermine le contrôle $\boldsymbol{c}$ qui minimise une certaine fonctionnelle coût $\mathcal{J}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})$. La figure 1.1 représente le schéma bloc correspondant.

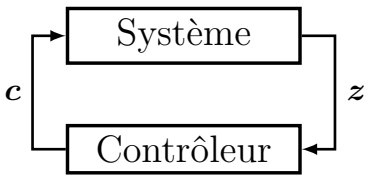


Figure 1.1 – Schéma bloc représentant le système contrôlé.

Le contrôle optimal est donc recherché comme la solution d'un problème d'optimisation sous contrainte. Dans cette formulation, $\mathcal{J}$ représente l'objectif que l'on souhaite minimiser comme la traînée ou l'énergie cinétique turbulente, par exemple, et $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = 0$ correspond à l'équation de contrainte c'est-à-dire au modèle dynamique que le système doit respecter, ainsi qu'éventuellement à certaines conditions initiales ou conditions aux limites.

La fonction de coût $\mathcal{J}$ peut également contenir un terme de pénalisation qui prend en compte le coût du contrôle. Elle peut ainsi être mise sous la forme $\mathcal{J} = \mathcal{J}_o + \alpha \mathcal{J}_c$, où $\mathcal{J}_o$ représente l'objectif à atteindre, tandis que le coefficient α ($\alpha \geq 0$), appelé paramètre de pénalisation, permet de donner plus ou moins de poids au coût du contrôle $\mathcal{J}_c$.

1.1.1 Formulation du problème

Dans le problème de contrôle optimal, on cherche à trouver $\boldsymbol{z}$ et $\boldsymbol{c}$ de telle sorte que l'on

$$\begin{cases} \text{minimise} & \mathcal{J}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) \\ \text{sous la contrainte} & \mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Ce type de problème d'optimisation sous contrainte peut être transformé en problème d'optimisation sans contrainte en introduisant une nouvelle fonctionnelle $\mathcal{L}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\lambda})$ appelée *Lagrangienne*, ainsi qu'une variable supplémentaire $\boldsymbol{\lambda}$ appelée *variable adjointe* ou *multiplicateur de Lagrange*. Le problème (1.1) revient à trouver $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\lambda})$ tel que l'on minimise

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{\lambda}, \mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}))_{\Omega \times T} \tag{1.2}$$

où $(\cdot, \cdot)_{\Omega \times T}$ est un produit scalaire défini de manière générale en espace et en temps. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{J}$ atteignent leur minimum pour la même valeur de $\boldsymbol{c}$ car $\boldsymbol{\nabla}\mathcal{J} = \boldsymbol{\nabla}\mathcal{L}$ dans l'ensemble des solutions respectant la contrainte $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = 0$. Le minimum est atteint lorsque les gradients relatifs à chaque variable s'annulent c'est-à-dire $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{L} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{L} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L} = 0$[1]. On va ainsi déterminer le gradient de $\mathcal{L}$ dans chacune des directions.

1.1.1.1 Dérivée dans la direction $\delta\boldsymbol{\lambda}$

Le gradient de $\mathcal{L}$ dans la direction $\delta\boldsymbol{\lambda}$ donne

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L}, \delta\boldsymbol{\lambda})_{\Omega \times T} &= -\left(\delta\boldsymbol{\lambda}, \mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})\right)_{\Omega \times T} = 0 \quad \forall\, \delta\boldsymbol{\lambda} \\ &\Rightarrow \boxed{\mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = 0}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Par conséquent, lorsque le Lagrangien atteint son extremum, la contrainte est respectée. La solution du problème de contrôle optimal est solution du système dynamique. On peut calculer $\boldsymbol{z}(t)$ par intégration temporelle du modèle dynamique pour la valeur de $\boldsymbol{c}$ trouvée.

[1] On définit le gradient de $\mathcal{L}$ par rapport à la variable quelconque ξ tel que $(\boldsymbol{\nabla}_{\xi}\mathcal{L}, \delta\xi) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathcal{L}(\xi + \epsilon\delta\xi) - \mathcal{L}(\xi)}{\epsilon}$ quelle que soit $\delta\xi$ la variation de ξ.

1.1.1.2 Dérivée dans la direction $\delta \boldsymbol{z}$

En définissant[2] au préalable A^* l'opérateur adjoint de A et $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{z}}$ l'opérateur tangent linéaire[3], on obtient :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{L}, \delta\boldsymbol{z})_{\Omega\times T} &= (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{J}, \delta\boldsymbol{z})_{\Omega\times T} - \left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{z}}\delta\boldsymbol{z}\right)_{\Omega\times T} \\
&= \left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{J} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^* \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{z}\right)_{\Omega\times T} = 0 \quad \forall\, \delta\boldsymbol{z} \\
&\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^* \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{J}}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

On trouve ainsi l'équation adjointe qui s'intègre en temps rétrograde et donne accès à $\boldsymbol{\lambda}(t)$. On remarque en observant (1.5) qu'il est nécessaire de connaître $\boldsymbol{z}(t)$ pour intégrer l'équation adjointe.

1.1.1.3 Dérivée dans la direction $\delta \boldsymbol{c}$

Finalement, en annulant le gradient de $\mathcal{L}$ dans la direction du contrôle, on a :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{L}, \delta\boldsymbol{c})_{\Omega\times T} &= (\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{J}, \delta\boldsymbol{c})_{\Omega\times T} - \left(\boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{c}}\delta\boldsymbol{c}\right)_{\Omega\times T} \\
&= \left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{J} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{c}}\right)^* \boldsymbol{\lambda}, \delta\boldsymbol{c}\right)_{\Omega\times T} = 0 \quad \forall\, \delta\boldsymbol{c} \\
&\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{J} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{c}}\right)^* \boldsymbol{\lambda}}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Cette dernière condition nous donne le gradient de $\mathcal{J}$ par rapport au paramètre de contrôle, ce qui permet de mettre à jour ce dernier dans une résolution itérative.

[2]Soit $\mathcal{D}$ un espace quelconque muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, l'adjoint A^* associé à A est tel que $\forall x, y \in \mathcal{D}, (Ax, y) = (x, A^*y)$.

[3]L'opérateur tangent linéaire de $\mathcal{F}$ est défini comme :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{z}}\delta\boldsymbol{z} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathcal{F}(\boldsymbol{z} + \epsilon\delta\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) - \mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c})}{\epsilon}. \tag{1.4}$$

1.1.2 Méthodes de résolution

Le système (1.3), (1.5), (1.6) d'équations aux dérivées partielles couplées est appelé *système optimal*. Ce système peut être résolu de manière directe par méthode dite « one shot » (Galletti *et al.*, 2007), en utilisant éventuellement une méthode de Newton qui converge rapidement dans le cas d'un système non-linéaire. En raison du grand nombre de degrés de libertés des problèmes généralement considérés et de la limitation en mémoire qui y est associé, le système optimal est couramment résolu de manière itérative en suivant l'algorithme 1.

Algorithme 1 : Résolution itérative du problème direct/adjoint associé au contrôle optimal.

Initialisation $n := 0$; $\boldsymbol{c}^{(n)} := \boldsymbol{c}_0$;
tant que *pas de convergence sur* $\boldsymbol{c}^{(n)}$ **faire**
Résolution du système dynamique (1.3) avec $\boldsymbol{c}^{(n)}$:

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{z}^{(n)}, \boldsymbol{c}^{(n)}) = 0 \quad \Rightarrow \text{ détermination de } \boldsymbol{z}^{(n)}(t);$$

Résolution du problème adjoint (1.5) en temps rétrograde :

$$\left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)^*\right]^{(n)} \boldsymbol{\lambda}^{(n)} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}} \mathcal{J}^{(n)} \quad \Rightarrow \text{ détermination de } \boldsymbol{\lambda}^{(n)}(t);$$

Calcul de $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \mathcal{J}^{(n)} = \left[\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{c}}\right)^*\right]^{(n)} \boldsymbol{\lambda}^{(n)}$;
Mise à jour de $\boldsymbol{c}^{(n+1)}$ fonction de $\boldsymbol{c}^{(n)}$ et $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \mathcal{J}^{(n)}$ en suivant un algorithme de descente de type quasi-Newton au choix ;
$n := n + 1$;

Il est intéressant de noter que tout le long de cet algorithme, les équations directes et adjointes sont respectées, donc $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}} \mathcal{L} = 0$ et l'optimisation par méthode de gradient se fait le long de la direction $\delta \boldsymbol{c}$. L'optimisation est donc réalisée dans l'espace contraint à respecter les équations directe et adjointe. Sur la figure 1.2, l'axe $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}$ représente la direction des contraintes qui sont imposées à chaque itération de sorte que $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}} \mathcal{L}^{(n)} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}} \mathcal{L}^{(n)} = 0$. Le gradient $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}} \mathcal{J}^{(n)}$ est ensuite déterminé, ce qui permet de mettre à jour les paramètres de contrôle symbolisés par l'axe $\boldsymbol{c}$ et ainsi d'évoluer dans le sous-espace respectant la contrainte $\mathcal{F}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = 0$.

1.1.3 Implémentation pratique et horizon temporel

Le problème de contrôle optimal repose d'une part sur une fonctionnelle coût qui est une quantité intégrale sur une certaine fenêtre temporelle, et d'autre part sur un modèle dynamique

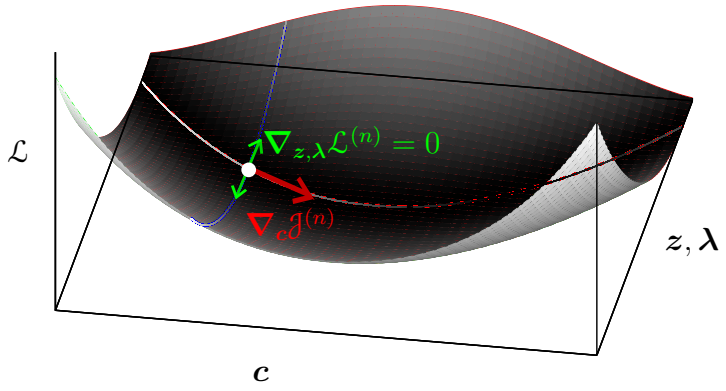


Figure 1.2 – Schéma représentant une minimisation sous contrainte résolue par méthode directe/adjointe dans le cas de la fonction de Rosenbrock. L'axe $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}$ (ligne bleue) symbolise la direction des contraintes. Le gradient selon cet axe est d'abord imposé à 0 : $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{L} = 0$. $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{J}^{(n)}$ est ensuite calculé, puis le paramètre de contrôle est mis à jour selon la direction $\boldsymbol{c}$. La trajectoire (pointillés rouges) de l'ensemble des points respectant la contrainte est ainsi suivie pendant la minimisation.

représentatif du système. Cela implique, pour de bonnes performances du contrôle, que cette fenêtre soit incluse dans un horizon de prédictibilité pour lequel le modèle est capable de prédire l'état du système. Tel un joueur d'échec qui sera d'autant meilleur qu'il pourra anticiper un grand nombre de coups de son adversaire à l'avance, il est primordial pour une bonne performance du contrôle optimal de prédire correctement l'état futur du système sur un horizon temporel suffisamment long. En raison du coût numérique de l'intégration direct/adjoint liée au contrôle optimal, une implémentation pratique envisageable, consisterait donc, comme schématisé sur la figure 1.3, à résoudre le problème d'optimisation sur des horizons temporels modérés, à appliquer le contrôle, puis à recommencer une nouvelle phase d'optimisation. Cette stratégie a été utilisée par exemple dans Bewley *et al.* (2001) et dans Cordier et El Shrif (2011). Une fois le contrôle optimal déterminé sur un des horizons temporels, il est possible d'appliquer ce contrôle optimal sur un temps plus court (noté ΔT sur le schéma) et de recommencer une nouvelle optimisation avant la fin de l'horizon temporel sur lequel le contrôle est disponible. En effet, par analogie avec le joueur d'échecs, réintroduire de manière anticipée un nouveau problème d'optimisation traduit une meilleure capacité à s'adapter à un coup inattendu de l'adversaire, ou dans notre cas à une erreur de modélisation.

Pour qu'une telle implémentation soit envisageable, il est indispensable que le modèle soit suffisamment rapide à intégrer en temps pour qu'il ait la capacité de prédire l'état futur du système sur l'horizon temporel d'optimisation. Pour cette raison, nous verrons au chapitre 2 que le développement de modèles réduits est indispensable.

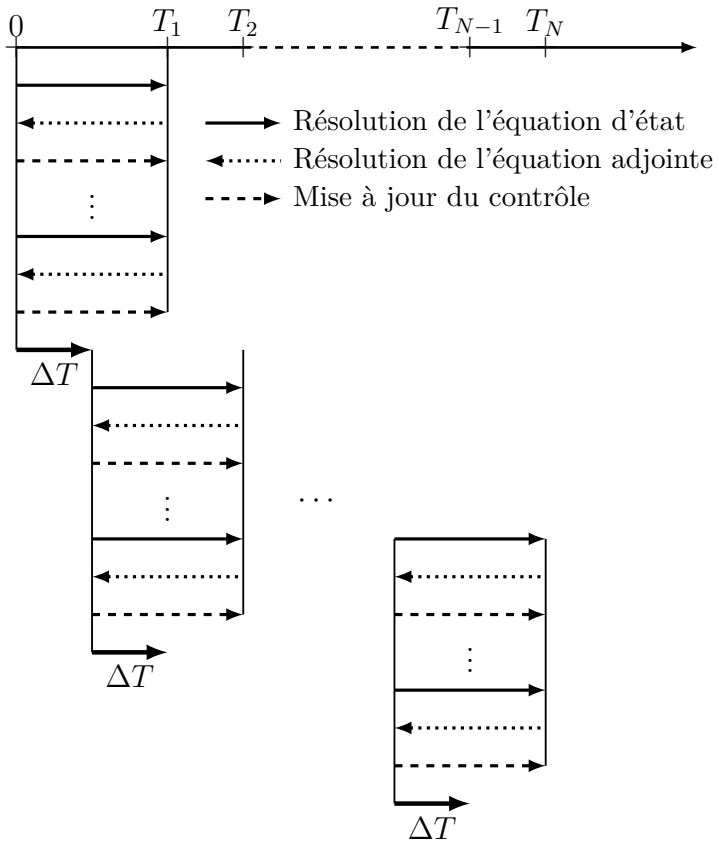


Figure 1.3 – Schéma représentant la résolution du problème de contrôle optimal pour un système dépendant du temps.

1.2 Contrôle linéaire pour un système descripteur

En termes de performances pures, le contrôle optimal tel que présenté à la section 1.1 paraît la méthode à privilégier. Cependant, la résolution itérative qui lui est associé reste dans la plupart des cas hors de portée d'applications pratiques. En effet, la résolution itérative du système direct/adjoint est inenvisageable en temps réel pour un système quelconque, et reste délicate numériquement si la simulation est trop coûteuse. Une manière d'aborder le problème consiste alors à linéariser le modèle dynamique. C'est l'approche qui est présentée dans cette section.

Pour un écoulement, les équations de Navier-Stokes linéarisées autour de l'état cible donnent un système qui peut s'écrire sous la forme d'un *système descripteur* :

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c}, \tag{1.7}$$

où E est une matrice non-inversible en raison du terme de pression (Raymond, 2007). Lorsque l'objectif est près d'être atteint, l'état du modèle se trouve proche de l'état cible pour lequel le modèle a été linéarisé. Il existe alors une région de confiance pour laquelle le modèle linéarisé se comporte comme le modèle d'origine et donc pour laquelle le contrôle est quasi-optimal. Ainsi, on fait l'hypothèse qu'une loi de commande développée pour un système linéarisé, continue à être efficace dans une certaine plage d'états pour le système non linéaire.

Dans ce chapitre, nous traiterons du contrôle linéaire (Trentelman *et al.*, 2001; Kim et Bewley, 2007) dans le cas d'un système descripteur (Takaba et Katayama, 1998). Nous considérerons d'abord (section 1.2.1) le problème LQR qui est le problème de contrôle optimal pour un modèle dynamique linéaire et une fonctionnelle coût quadratique. En supposant ensuite que l'état du système n'est pas connu de manière parfaite mais est observé de manière incomplète et bruitée, une étape d'estimation sera ajoutée pour aboutir au contrôle LQG (section 1.2.2). Finalement, le contrôle $\mathcal{H}_\infty$ prendra en compte un système soumis à des perturbations dont on souhaiterait minimiser les effets (section 1.2.3).

1.2.1 Contrôle LQR

Le problème LQR (*Linear Quadratic Regulator*), également appelé contrôle sur $\mathcal{H}_2$, est un problème de contrôle optimal particulier lorsque le modèle dynamique est linéaire, du type :

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c}, \tag{1.8}$$

et lorsque la fonctionnelle coût est quadratique

$$\mathcal{J}^{\mathrm{LQR}}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{c}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|F\boldsymbol{z}(t)\|^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{c}(t)\|_R^2\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$

où F et R sont respectivement des matrices qui définissent l'objectif à minimiser et pénalisent le contrôle $\boldsymbol{c}$ via le produit scalaire associé à la norme $\|\cdot\|_R^2 = (R\cdot,\cdot)_\Omega$, avec R symétrique et définie positive.

L'état utilisé pour la linéarisation est naturellement déterminant, et il faudra l'adapter en fonction de l'objectif à atteindre. La première idée consiste à linéariser le système autour de l'état stationnaire, encore appelé point fixe. Dans ce cas là, le contrôle LQR est parfaitement adapté à un objectif de stabilisation d'un état stationnaire (Ravindran, 2007). L'avantage de ce type de contrôle est que lorsque l'objectif est proche d'être atteint, la valeur du contrôle devient également très faible, ce qui permet de minimiser le coût du contrôle en régime établi (contrôle évanescent). Si la stabilisation d'un point fixe n'est pas l'objectif envisagé, il est alors possible de linéariser autour d'un état quelconque, comme cela est détaillé à la section A.1.

Dans le cadre du problème LQR, on recherche un contrôle en retour d'état c'est-à-dire à déterminer une matrice de gain K, fonction du temps, telle que $\boldsymbol{c} = K\boldsymbol{z}$. L'état du système est supposé parfaitement connu.

Le système optimal devient :

$$\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c} \\ -E^*\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}}{\mathrm{d}t} = A^*\boldsymbol{\lambda} + F^*F\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{c} = -R^{-1}B^*\boldsymbol{\lambda}. \end{cases} \tag{1.10}$$

Puisque que l'on recherche une relation linéaire entre $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{z}$, et que la condition d'optimalité est donnée par $\boldsymbol{c} = -R^{-1}B^*\boldsymbol{\lambda}$, on va supposer également une relation linéaire entre le multiplicateur de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ et l'état $\boldsymbol{z}$ (Burl, 1998). Après introduction de $X(t)$ tel que $\boldsymbol{\lambda}(t) = X(t)E\boldsymbol{z}(t)$, le problème LQR revient à déterminer la matrice $X(t)$ auto-adjointe comme solution d'une *équation algébrique de Riccati généralisée* donnée par :

$$-E^*\dot{X}E = A^*XE + E^*XA - E^*XBR^{-1}B^*XE + FF^*. \tag{1.11}$$

Lorsque l'horizon temporel de résolution $T \to \infty$, on peut considérer la solution stationnaire de (1.11), soit :

$$A^*XE + E^*XA - E^*XBR^{-1}B^*XE + FF^* = 0. \tag{1.12}$$

Dans ce cas, le gain K n'est plus fonction du temps, ce qui simplifie grandement l'application de la méthode.

La résolution de 1.12 est détaillée à la section A.2. En utilisant (1.10), on trouve finalement que le gain de feedback linéaire optimal est :

$$K = -R^{-1}B^{*}XE. \tag{1.13}$$

Lorsque le problème est de grande dimension, la résolution de l'équation de Riccati peut être difficile, en particulier en raison de l'occupation mémoire. L'utilisation d'un modèle de faible dimension peut alors se révéler utile afin de trouver le gain de feedback à moindre coût. Cependant, la matrice de gain K est alors déterminée pour stabiliser le modèle réduit et il n'y a donc pas de garantie qu'elle permette de stabiliser également le système haute-fidélité. Il sera donc important d'avoir un modèle réduit qui se comporte comme le modèle haute-fidélité afin d'approximer de manière convenable le gain de feedback optimal.

Au chapitre 2, nous verrons que lorsque le sous-espace de projection appartient à l'ensemble des solutions à divergence nulle, les modèles réduits construits par projection perdent leur forme de système descripteur pour devenir un système dynamique ordinaire. Cependant, au chapitre 10, l'ajout du terme de contrôle engendrera à nouveau un système descripteur, d'où l'intérêt par la suite de conserver cette expression générale.

Le contrôle LQR est donc intéressant dans la mesure où le gain recherché est constant et calculé hors ligne, ce qui simplifie considérablement les opérations que le contrôleur doit effectuer en ligne. Notons que le contrôle LQR présuppose que l'état du système est parfaitement connu. Pour des systèmes mécaniques simples comme un pendule inversé par exemple, cette hypothèse peut encore être justifiée. Cependant, dans un écoulement, et a fortiori en régime turbulent, seules des mesures incomplètes, potentiellement bruitées, sont disponibles. Nous allons voir maintenant que le contrôle LQG permet de remédier à cela en ajoutant une étape d'estimation.

1.2.2 Contrôle LQG

Le contrôle LQG (*Linear Quadratic Gaussian*) est également un problème de contrôle optimal linéaire. Cependant, par rapport au contrôle LQR, ce problème prend également en compte que le système est observé via des mesures incomplètes et bruitées. La méthode consiste à ajouter une étape d'estimation sur $\mathcal{H}_2$ qui sera effectuée en ligne selon le schéma donné sur la figure 1.4. Dans cette section, l'estimation LQG sera présentée d'un point de vue purement déterministe.

L'étape d'estimation utilise le modèle dynamique, les observations ainsi que la valeur du

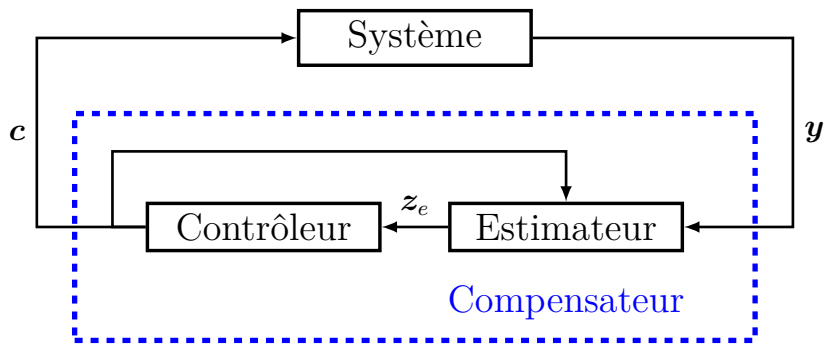


Figure 1.4 – Schéma bloc représentant le système contrôlé avec une étape d'estimation.

contrôle pour estimer l'état du système. L'ensemble estimateur/contrôleur est appelé *compensateur*. En contrôle LQG, un principe de séparation est valide (Burl, 1998) permettant d'appliquer le contrôle LQR, déterminé indépendamment, directement à l'estimé de l'état du système $\boldsymbol{z}_e$, soit :

$$\boldsymbol{c} = K\boldsymbol{z}_e. \tag{1.14}$$

Puisque les observations sont incomplètes, on introduit le vecteur d'observations $\boldsymbol{y}$ et l'opérateur d'observation associé H. Le système linéaire est alors réécrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} = H\boldsymbol{z}. \end{cases} \tag{1.15}$$

Puique le modèle et les observations sont incertains, l'état réel $\boldsymbol{z}$ du système n'est pas connu. On se propose donc d'utiliser un estimateur qui est un modèle intégrant la solution estimée $\boldsymbol{z}_e$ en ligne via :

$$\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}_e}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z}_e + B\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{y} = H\boldsymbol{z}_e + \boldsymbol{e}_o, \end{cases} \tag{1.16}$$

où $\boldsymbol{e}_o$ est l'erreur d'observation. Cette erreur, qui peut être déterminée de manière explicite ($\boldsymbol{e}_o = \boldsymbol{y} - H\boldsymbol{z}_e$), contient à la fois l'erreur d'estimation et l'erreur réelle de mesure. Ces deux erreurs sont impossibles à dissocier par le contrôleur. La différence d'évolution entre le système réel et le modèle est représentée par $\boldsymbol{d}$, l'erreur du modèle. De la même manière, on a à la fois une partie due aux erreurs de modélisation et une partie due à l'estimation. Le but du contrôle LQG est de modéliser $\boldsymbol{d}$ connaissant la mesure $\boldsymbol{y}$ de sorte que l'estimation $\boldsymbol{z}_e$ corresponde au mieux à l'état réel du système $\boldsymbol{z}$. Puisque nous conservons un formalisme linéaire, $\boldsymbol{d}$ est supposé

en lien linéaire avec $\boldsymbol{e}_o$. On peut alors modéliser $\boldsymbol{d}$ par un filtre de Kalman :

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}_e}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z}_e + B\boldsymbol{c} + L(\boldsymbol{y} - H\boldsymbol{z}_e), \tag{1.17}$$

dont le gain constant L est trouvé de manière optimale. Ce gain corrige l'état prédit par le modèle grâce aux observations. L'objectif du problème LQG est de trouver le gain L de telle sorte que l'erreur d'estimation soit minimale :

$$\mathcal{J}^{\mathrm{LQG}}(\boldsymbol{z}_e, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{d}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|H\boldsymbol{z}_e - \boldsymbol{y}\|^2_{R_e^{-1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{d}\|^2_{Q_e^{-1}}\,\mathrm{d}t. \tag{1.18}$$

R_e et Q_e représentent les matrices de covariance associées aux erreurs d'observation et aux erreurs du modèle. Comme précédemment à la section 1.2.1, on utilise la norme $\|\cdot\|^2_A = (A\cdot,\cdot)_\Omega$. Ces matrices attribuent plus ou moins de confiance au modèle et aux observations.

En pratique, on effectue un changement de variable en introduisant le vecteur d'erreur $\boldsymbol{e}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}_e(t)$, avec $\boldsymbol{z}$ supposé être régi par le système (1.15), ce qui revient à minimiser :

$$\mathcal{J}^{\mathrm{LQG}}(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{d}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|H\boldsymbol{e}\|^2_{R_e^{-1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{d}\|^2_{Q_e^{-1}}\,\mathrm{d}t \tag{1.19}$$

sous la contrainte :

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{e} - \boldsymbol{d}. \tag{1.20}$$

La résolution de ce problème d'optimisation conduit au système adjoint :

$$\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{e} + Q_e\boldsymbol{\lambda}_e \\ -E^*\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\lambda}_e}{\mathrm{d}t} = A^*\boldsymbol{\lambda}_e - H^*R_e^{-1}H\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{d} = -Q_e\boldsymbol{\lambda}_e. \end{cases} \tag{1.21}$$

Procédons comme à la section 1.2.1 et considérons à nouveau le cas de l'horizon infini *i.e.* $T \to \infty$. Pour les mêmes raisons que précédemment (Burl, 1998), on postule l'existence d'un lien linéaire entre $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{\lambda}_e$ sous la forme $\boldsymbol{e} = X_eE^*\boldsymbol{\lambda}_e$. Cela revient à chercher X_e comme solution d'une équation de Riccati généralisée, soit :

$$AX_eE^* + EX_eA^* - EX_eH^*R_e^{-1}HX_eE^* + Q_e = 0. \tag{1.22}$$

Finalement, en annulant la dérivée du Lagrangien dans la direction $\boldsymbol{e}_o$, on en déduit l'ex-

pression du gain :

$$L = EX_e H^* R_e^{-1}. \tag{1.23}$$

Puisque le modèle dynamique est utilisé par l'estimateur, il est important que ce modèle soit rapide à intégrer en temps, tout en restant représentatif du comportement du système. L'utilisation de modèles réduits dynamiques peut donc encore jouer un rôle important dans la réussite d'une stratégie de contrôle.

1.2.3 Contrôle robuste

Dans un certain nombre de cas, le contrôle optimal de type LQR/LQG présenté dans les sections précédentes peut s'avérer insuffisant car l'amplification des perturbations par le système n'est pas décrite correctement. A titre d'illustration, citons le cas des systèmes linéaires, même stables au temps long, qui amplifient fortement les perturbations par un mécanisme de croissance transitoire (Schmid, 2007; Trefethen *et al.*, 1993). Par conséquent, il peut être utile de prendre en compte ces perturbations dans la conception du contrôle afin de rendre le système contrôlé robuste à ces perturbations. Pour cela, nous allons envisager le contrôle linéaire dit $\mathcal{H}_\infty$ (Green et Limebeer, 2012). Le schéma bloc du système contrôlé est présenté sur la figure 1.5.

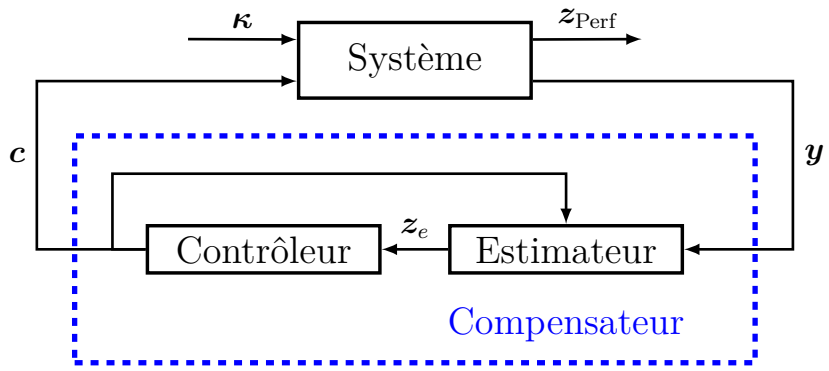


Figure 1.5 – Schéma bloc représentant le système contrôlé dans un formalisme $\mathcal{H}_\infty$.

Dans cette approche, le bruit $\boldsymbol{\kappa}$ est considéré comme une entrée du système. Sur ce schéma, $\boldsymbol{z}_{\text{Perf}} = \|F\boldsymbol{z}\|^2$ correspond à la variable de performance du système, fonction de l'état $\boldsymbol{z}$. Le système (1.15) reste inchangé. En revanche, on souhaiterait que le système soit moins sensible à des perturbations $\boldsymbol{\kappa}$, et que l'amplification de la pire des perturbations soit inférieure à une valeur γ donnée. De manière formelle, cela correspond à dire que la norme infinie de la fonction de transfert entre la perturbation et l'état du système $T_{\boldsymbol{z}\kappa}$ est inférieure à γ, soit $\|T_{\boldsymbol{z}\kappa}\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{x}} \dfrac{\|T_{\boldsymbol{z}\kappa}\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} < \gamma$.

La résolution d'un problème en norme infinie n'est pas aisée et aboutit à un problème de point selle. En effet, la minimisation de l'objectif pur pour la pire des perturbations est un problème d'optimisation multi-objectif dont les intérêts sont non-coopératifs. Cette résolution revient à minimiser la fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}^{\mathcal{H}_\infty}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{c}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|F\boldsymbol{z}(t)\| \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{c}(t)\|_R^2 \,\mathrm{d}t - \frac{\gamma}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{\kappa}\|_{Q_r^{-1}}^2 \,\mathrm{d}t. \tag{1.24}$$

On montre (Zhou *et al.*, 1996) que la résolution mène à deux équations de Riccati généralisées, l'une pour le contrôleur :

$$A^*X^\infty E + E^*X^\infty A - E^*X^\infty(BR^{-1}B^* - \frac{1}{\gamma^2}Q_rQ_r^*)X^\infty E + FF^* = 0, \tag{1.25}$$

et l'autre pour l'estimateur :

$$AX_e^\infty E^* + EX_e^\infty A^* - EX_e^\infty(H^*R_e^{-1}H - \frac{1}{\gamma^2}FF^*)X_e^\infty E^* + Q_e = 0. \tag{1.26}$$

Pour le contrôle robuste, les gains sont $K_\infty = -R^{-1}B^*X^\infty E$ et $L_\infty = EX_e^\infty H^*R_e^{-1}$.

Pour qu'une solution existe, il faut que $BR^{-1}B^* - \frac{1}{\gamma^2}Q_rQ_r^*$ et $H^*R_e^{-1}H - \frac{1}{\gamma^2}FF^*$ soient des matrices définies positives. Ce caractère défini positif étant fonction de γ, il existe une valeur γ_0 minimal pour qu'une solution existe. Cette valeur γ_0 peut être trouvée par une procédure du type essai/erreur. Il est à noter que dans le formalisme $\mathcal{H}_\infty$, contrairement au problème LQG où l'estimateur et le contrôleur sont découplés, le contrôle dépend du niveau de bruit et l'estimation dépend de la mesure de performance.

L'effet d'un contrôle de type $\mathcal{H}_\infty$ par rapport à un contrôle de type $\mathcal{H}_2$ est décrit par Lauga et Bewley (2004) dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau. Le contrôle $\mathcal{H}_\infty$ a en particulier un effet sur les valeurs propres du système contrôlé et diminue significativement $\|T_{\boldsymbol{z}\boldsymbol{\kappa}}\|_\infty^2$. Son effet principal est de surévaluer la valeur du contrôle afin d'amortir l'influence des perturbations les plus « dangereuses » pour le système.

1.3 Vers le contrôle faiblement non-linéaire

Le contrôle linéaire présenté à la section 1.2 est largement utilisé en raison de sa simplicité d'application et de son formalisme bien connu. Cependant, l'hypothèse de linéarité peut être limitante, dans le cas de dynamique fortement non-linéaire ou de changement important de l'état

du système lors de l'application du contrôle. Dans ces cas, il peut devenir indispensable de se diriger vers des méthodes de contrôle intermédiaires entre la résolution coûteuse du système direct/adjoint liée au contrôle optimal (section 1.1) et le contrôle linéaire trop simplifié. Il existe un certain nombre de méthodes de contrôle non-linéaires (Bruzelius, 2004; Poussot-Vassal *et al.*, 2007) qui se basent sur des techniques de contrôle linéaires. On peut citer les méthodes de type ordonnancement de gain (*gain scheduling*) qui consistent à construire des contrôles linéaires pour différents points de linéarisation, puis, soit à interpoler ces contrôleurs, soit à basculer d'un contrôle à l'autre lors de l'évolution de l'état du système (Mathelin *et al.*, 2010).

Une approche continue, appelée contrôle LPV (*Linear Parameter-Varying*) consiste (Atam *et al.*, 2014) à définir un système et un compensateur sous une forme linéaire mais avec des coefficients qui varient en fonction d'un paramètre ρ pouvant lui même dépendre de l'état du système $\boldsymbol{z}$, du contrôle $\boldsymbol{c}$ et/ou du temps t, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A(\rho)\boldsymbol{z} + B(\rho)\boldsymbol{c}. \tag{1.27}$$

Il s'agit alors de considérer à chaque instant le système linéarisé sur le sous-espace tangent à l'évolution non-linéaire du système. Ce paramètre doit être soit une quantité mesurable, soit connue *a priori*. La loi de commande est déterminée en résolvant une inégalité linéaire matricielle (*Linear Matrix Inequality*) (Boyd, 1994) paramétrée par ρ. Ce problème peut être résolu de manière approchée en considérant un développement fini par interpolation de $A(\rho) = \sum_{i=1}^{p} \rho_i A_i$ telle que $\sum_{i=1}^{p} \rho_i = 1$ (Aleksić-Roeßner *et al.*, 2014).

Ces approches reposant sur des hypothèses de quasi linéarité locale sont elles aussi limitées à certaines classes de problème. Lorsqu'elles ne peuvent pas être mises en œuvre, l'approche la plus générale, mais la plus coûteuse, est la résolution directe du problème de contrôle optimal, comme cela a été effectuée par El Shrif (2008) dans le cas d'un écoulement de canal en régime turbulent. L'utilisation de modèles réduits est alors souvent nécessaire afin de rendre envisageable la résolution du problème d'optimisation associé.

Toutes ces approches, qui reposent sur l'utilisation d'un modèle dynamique, nécessitent que ce modèle soit suffisamment robuste au changement du paramètre de contrôle. Cette question est à mettre en perspective avec les techniques présentées au chapitre 4 pour améliorer la robustesse d'un modèle aux modifications d'un paramètre de contrôle.

1.4 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons vu que la conception d'un contrôle efficace peut être mise sous la forme d'un problème d'optimisation de telle sorte que l'on trouve la meilleure loi de contrôle possible en accord avec un objectif. Grâce à un modèle prédictif de l'évolution de l'état du système, la résolution « one shot » ou itérative d'un système optimal permet d'appliquer le meilleur contrôle possible. De manière simplifiée, donc plus facilement applicable, la linéarisation du modèle va supposer que l'opérateur dynamique sera le même quel que soit l'état du système et quel que soit le contrôle, ce qui va permettre la recherche d'un gain de feedback constant plus facile à mettre en œuvre. L'utilisation d'un estimateur permettra de prendre en compte que nous ne disposons que d'observations partielles et bruitées. Le contrôle peut également être rendu robuste à des imperfections du modèle, considérées comme des perturbations extérieures. Finalement, des recherches actives sont encore en cours en théorie du contrôle pour obtenir des méthodes de contrôle efficaces lorsque l'hypothèse de linéarité n'est plus valide.

Toutes les méthodes présentées dans ce chapitre reposent sur l'existence d'un modèle dynamique représentatif de l'écoulement. Ces approches dites « model-based » permettent souvent d'obtenir des contrôles plus efficaces mais la contrepartie est un effort de modélisation qui peut être considérable. Ce modèle doit être, d'une part, suffisamment précis pour que le contrôle soit bien adapté au système considéré et être, d'autre part, de dimension suffisamment réduite pour pouvoir être appliqué en temps réel. En effet, la résolution directe des équations de Navier-Stokes est rarement concevable de manière itérative dans une boucle d'optimisation et l'est encore moins en temps réel. De plus, même dans le cas d'un contrôle linéaire, la résolution d'une équation de Riccati généralisée peut devenir limitante pour des problèmes de grande dimension, malgré l'existence d'algorithmes efficaces (Badía *et al.*, 2006; Benner *et al.*, 2008; Benner et Saak, 2010). C'est pourquoi le développement de modèles réduits (voir chapitre 2) qui soient précis, stables (chapitre 3), robustes à des modifications de l'état du système ou du paramètre de contrôle (chapitre 4) et qui prennent correctement en compte le contrôle (chapitre 10) est indispensable pour concevoir un contrôle d'écoulement efficace.

Chapitre 2

Réduction de modèle pour le contrôle d'écoulement

Table des matières

2.1 Réduction de modèle par projection **34**

2.1.1 Projection de Petrov-Galerkin 34

2.1.2 Cas des équations de Navier-Stokes 36

2.1.3 Conditions aux limites et terme de pression 37

2.2 Choix de la base de projection **38**

2.2.1 Modes globaux 40

2.2.2 Balanced Truncation 41

2.2.3 Proper Orthogonal Decomposition 44

2.2.4 Dynamic Mode Decomposition 49

2.3 Synthèse **50**

Pour concevoir un contrôle d'écoulement efficace, il est nécessaire d'avoir un modèle à la fois rapide à intégrer en temps et suffisamment représentatif de l'écoulement étudié. Les systèmes fluides ayant la plupart du temps une dynamique relativement complexe, l'information des lois fondamentales de la physique paraît essentielle dans une démarche fine de modélisation. Dans

ce manuscrit, nous considérerons essentiellement des modèles dits *basés sur la physique*, c'est-à-dire fondés sur ces lois fondamentales. Pour cela, nous utiliserons les lois de conservation de la masse, quantité de mouvement et éventuellement de l'énergie dans le cas d'un écoulement compressible ou couplé avec des transferts thermiques.

Les systèmes auxquels nous nous intéressons en mécanique des fluides relevant de la mécanique des milieux continus, ils seront définis de manière continue en espace et en temps sur $\Omega \times [0, T]$. Les équations de conservation les régissant seront donc écrites sous forme d'un problème $(\mathcal{P})$ constitué par un système d'équation aux dérivées partielles (EDP) du type $\mathcal{D}(\boldsymbol{u}) = 0$, où $\boldsymbol{u}$ est ici la variable d'état, plus des conditions aux limites. Par la suite, nous considérerons principalement les équations de Navier-Stokes. La résolution de $(\mathcal{P})$ consiste à trouver $\boldsymbol{u}$ dans un espace de fonctions de dimension infinie ou, de manière pratique, comme une approximation numérique d'ordre élevé. Cet ordre est souvent supérieur à 10^6 pour un écoulement turbulent, ce qui nécessite des coûts de calcul et de stockage mémoire élevés. Pour rendre le modèle exploitable dans des applications de type contrôle ou optimisation, l'utilisation de modèles réduits est nécessaire. Le cas particulier des méthodes de réduction de modèle par projection consiste à projeter les équations aux dérivées partielles intervenant dans $(\mathcal{P})$ sur une base de fonctions de faible dimension. Dans ce chapitre, nous rappellerons d'abord comment construire un modèle réduit par projection de Petrov-Galerkin (section 2.1), puis nous considérerons à la section 2.2 différentes bases couramment utilisées pour la réduction de modèle.

2.1 Réduction de modèle par projection

2.1.1 Projection de Petrov-Galerkin

Cette technique de réduction de modèle consiste à trouver une solution approchée $\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\text{Gal}}]}$ de $(\mathcal{P})$ dans un sous-espace $\mathcal{S}$ de dimension réduite N_{Gal}. Soit $\Phi = \{\boldsymbol{\Phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{N_{\text{Gal}}}\}$ avec $\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) \in \Omega$ une base de $\mathcal{S}$, un choix approprié doit être fait pour Φ afin de limiter les erreurs de projection. L'idée des méthodes de réduction dites *a posteriori* est d'utiliser une solution provenant d'un modèle haute-fidélité ou d'une expérience pour construire une base qui sera capable de représenter au mieux la solution. Nous présenterons à la section 2.2 différentes manières d'extraire de données des modes représentatifs du système. De manière générale, nous verrons que toute réalisation pourra être approximée sous forme séparable, soit :

$$\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\text{Gal}}]}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} a_j(t)\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \;\; t \in [0, T]. \tag{2.1}$$

Dans cette décomposition, un état de base noté $\boldsymbol{u}^b$ est introduit. Ce vecteur est choisi au cas par cas de telle manière que la décomposition (2.1) soit la plus adaptée à la situation. En choisissant $\boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) = \bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ où $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})$ correspond au champ moyen, la base Φ sera alors représentative du champ fluctuant. En introduisant le produit scalaire adéquat, on pourra alors remonter aisément à l'énergie cinétique turbulente de l'écoulement. Dans d'autres situations, il peut être judicieux d'utiliser le champ stationnaire $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$, point fixe de $(\mathcal{P})$, comme état de base. En effet, il sera alors possible pour des amplitudes faibles des coefficients de projection $a_j(t)$ de linéariser le modèle réduit autour de $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$, ce qui permettra d'appliquer les techniques de contrôle linéaire vues à la section 1.2. Notons que dans les développements rencontrés dans Noack *et al.* (2003), cet état de base est directement introduit dans la sommation sur les modes $\boldsymbol{\Phi}_j$ comme un mode 0 de coefficient de projection $a_0(t) \equiv 1$.

Après avoir choisi la base de représentation pour l'espace $\mathcal{S}$, la méthode de projection de Petrov-Galerkin (Bui-Thanh *et al.*, 2008, par exemple) consiste à effectuer la projection de $(\mathcal{P})$ sur un ensemble de *fonctions test* $\boldsymbol{\Psi}_i$. Après introduction de l'approximation (2.1), on aboutit à :

$$\left(\boldsymbol{\Psi}_i, \mathcal{D}\left(\boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} a_j(t)\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x})\right)\right)_\Omega = 0 \quad i = 1, \cdots, N_{\mathrm{Gal}}, \tag{2.2}$$

où $(\cdot,\cdot)_\Omega$ représente un produit scalaire défini dans l'espace. L'intérêt du système (2.2) est que la dimension N_{Gal} de la nouvelle inconnue $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{N_{\mathrm{Gal}}})^T$ est beaucoup plus petite que celle de l'espace avant projection.

La définition du produit scalaire est déterminante dans la phase de modélisation, en particulier lorsque plusieurs variables physiques inhomogènes cohabitent dans le vecteur $\boldsymbol{u}$. Une bonne manière de faire est de définir un produit scalaire tel que $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\Omega$ représente une énergie. Un exemple est celui des écoulements compressibles où la vitesse et une variable thermodynamique (comme la pression) sont nécessaires pour représenter la solution[1]. Dans ce cas, Rowley *et al.* (2004) a introduit un produit scalaire modifié de telle manière que la norme associée représente soit une enthalpie totale, soit une énergie totale massique.

En général, on se contente de considérer $\boldsymbol{\Psi}_i = \boldsymbol{\Phi}_i$, ce qui correspond à une *projection de Galerkin*. Dans de nombreuses situations, y compris dans le cas des équations de Navier-Stokes, l'ordre de dérivation temporelle considéré dans $(\mathcal{P})$ est égal à 1. L'équation aux dérivées ordinaires (2.2) a la structure d'un système dynamique d'ordre N_{Gal}, appelé *modèle réduit*, et

[1]Pour un écoulement incompressible, la pression peut être déduite du champ de vitesse à une constante près en résolvant une équation de Poisson.

peut s'écrire formellement :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{c}(t)) \tag{2.3}$$

où $\boldsymbol{g}$ est un terme dépendant d'un paramètre de contrôle $\boldsymbol{c}$ tel que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}(t), 0) = 0$. Ce terme peut apparaître de différentes manières selon que le contrôle soit modélisé par une force volumique, une condition aux limites ou la mise en mouvement d'une paroi. Le chapitre 10 sera dédié à la prise en compte du terme de contrôle dans le modèle. Jusqu'à ce chapitre, nous nous focaliserons sur la modélisation dynamique de l'écoulement et considérerons $\boldsymbol{g} = 0$, soit le système :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)). \tag{2.4}$$

A ce stade, notons que si $(\mathcal{P})$ contient des termes non-linéaires alors le modèle réduit héritera de cette caractéristique. Numériquement, les termes apparaissant dans le terme de droite de (2.4) peuvent être coûteux à obtenir. En effet, dans le cas d'une non-linéarité quadratique comme celui du terme de convection de l'équation de Navier-Stokes, on obtient N_{Gal}^3 termes à calculer. De manière générale, un terme non-linéaire quelquonque ne peut pas toujours être explicité par dévelopement polynomial. La DEIM (*Discrete Empirical Interpolation Method*) introduite par Chaturantabut et Sorensen (2010) permettra de contourner ce problème en approximant le terme non-linéaire sur une base réduite servant de base d'interpolation. Il suffira donc d'évaluer le terme non-linéaire sur un nombre fini de points qui pourront être choisis grâce à l'algorithme DEIM ou de manière optimale (Nguyen *et al.*, 2008).

2.1.2 Cas des équations de Navier-Stokes

Dans ce manuscrit, centré sur le contrôle d'écoulement, nous utiliserons pour lois fondamentales de la physique les équations de Navier-Stokes incompressibles bidimensionnelles, soit, sous forme adimensionnée :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u} \tag{2.5a}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{2.5b}$$

où $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = (u(\boldsymbol{x}, t), v(\boldsymbol{x}, t))^T$ et $p(\boldsymbol{x}, t)$, définis sur $\Omega \times [0, T]$, représentent la vitesse et la pression respectivement. L'équation (2.5a) traduit la conservation de la quantité de mouvement, et (2.5b) représente la conservation de la masse, ce qui revient à imposer une solution à divergence nulle. Dans (2.5a), Re est le nombre de Reynolds, $\boldsymbol{\nabla}$ est l'opérateur nabla et $\boldsymbol{\Delta}$ est l'opérateur

laplacien.

En choisissant les modes $\boldsymbol{\Phi}_j$ et $\boldsymbol{\Psi}_i$ à divergence nulle (ce choix sera expliqué à la section 2.1.3), nous obtenons, après projection de Petrov-Galerkin de (2.5) sur N_{Gal} modes $\boldsymbol{\Phi}_j$ parallèlement à $\boldsymbol{\Psi}_i$, le système dynamique suivant :

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} M_{ij} \frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}(t) = C_i + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} L_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Gal}}} Q_{ijk} a_j(t) a_k(t) \quad i \in [1, \cdots, N_{\text{Gal}}] \tag{2.6}$$

avec

$$\begin{cases} M_{ij} = (\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j)_\Omega \,, \\ C_i = \left(\boldsymbol{\Psi}_i, -(\boldsymbol{u}^b \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^b + \dfrac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u}^b - \boldsymbol{\nabla} p\right)_\Omega \,, \\ L_{ij} = \left(\boldsymbol{\Psi}_i, -(\boldsymbol{u}^b \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\Phi}_j - (\boldsymbol{\Phi}_j \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^b + \dfrac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Phi}_j\right)_\Omega \,, \\ Q_{ijk} = (\boldsymbol{\Psi}_i, -(\boldsymbol{\Phi}_j \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\Phi}_k)_\Omega \,. \end{cases} \tag{2.7}$$

Afin d'éviter l'inversion de la matrice M pour intégrer en temps le modèle (2.6), les fonctions tests peuvent être choisies de sorte qu'elles forment une base adjointe à Φ c'est-à-dire que $M_{ij} = (\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j)_\Omega = \delta_{ij}$ où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker. Dans le cas d'une projection de Galerkin pour laquelle nous avons $\boldsymbol{\Psi}_i = \boldsymbol{\Phi}_i$, choisir une base orthonormale Φ s'avèrera plus simple que ce soit pour l'intégration temporelle ou pour la projection d'un champ quelconque sur Φ.

2.1.3 Conditions aux limites et terme de pression

Les équations du modèle réduit (2.6) et (2.7) ne tiennent pas compte explicitement des conditions aux limites du problème. Dans de nombreuses situations, l'écoulement considéré est représenté aux bords du domaine par des conditions aux limites homogènes de Dirichlet ou de Neumann. Si chacun des vecteurs de la base Φ respecte ces conditions aux limites, alors la solution reconstruite $\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\text{Gal}}]}$ héritera de cette propriété par combinaison linéaire. De manière plus générale, si tous les modes $\boldsymbol{\Phi}_j$ respectent une contrainte quelconque pouvant s'écrire de manière linéaire, alors $\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\text{Gal}}]}$ respectera également cette contrainte. Nous verrons au chapitre 10 comment procéder dans le cas de conditions aux limites inhomogènes ou de contraintes non respectées par la base de projection.

Un exemple de contrainte implicite est celle de divergence nulle, respectée par $\boldsymbol{u}$ d'après (2.5b). Puisque tous les modes $\boldsymbol{\Phi}_j$ ont été choisis tels que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Phi}_j = 0$, l'approximation héritera implicitement de cette propriété et l'équation de conservation de masse ne sera plus nécessaire

dans le modèle réduit (2.6). A ce stade, il est intéressant de faire le lien avec le terme de pression. En effet, celui-ci peut être vu comme un multiplicateur de Lagrange, permettant d'assurer la contrainte de divergence nulle. Or, si les modes $\boldsymbol{\Psi}_i$ sont aussi à divergence nulle, alors le terme de pression est éliminé et se ramène à une intégrale sur le bord. Pour le montrer, prenons comme produit scalaire spatial l'intégrale sur le domaine. Après intégration par parties, on obtient :

$$(\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\nabla} p)_\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \boldsymbol{\nabla} p \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} p \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}l - \int_\Omega p \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\Psi}_i \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} p \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}l. \tag{2.8}$$

Ce terme s'annule dans certains cas particuliers comme celui des conditions de paroi, d'entrée ou de sortie si p est imposé à 0, ainsi que pour des conditions de périodicité ou de glissement. Dans les autres cas, ce terme est non nul (Noack *et al.*, 2005), en particulier pour des conditions de sortie n'imposant pas la valeur de la pression.

Ce terme de pression peut engendrer des difficultés dans la projection de Galerkin. En effet, il n'est pas représenté par la même base que le champ de vitesse et, dans le cas de données expérimentales, il peut même ne pas être connu. Différentes méthodes ont été proposées pour prendre en compte ce terme. Noack *et al.* (2005) par exemple ont développé une équation de Poisson pour la pression sur la base de projection. Par linéarité, ils ont trouvé N_{Gal}^3 coefficients quadratiques supplémentaires associés chacun à la résolution d'une équation de Poisson. Galletti *et al.* (2004) et Bergmann *et al.* (2009) ont choisi de représenter la pression sur une base étendue (Borée, 2003), c'est-à-dire de trouver les modes spatiaux pour la pression de telle sorte que les modes temporels $a_i(t)$ soient les mêmes que pour la vitesse. Il en résulte une modélisation du terme de pression par des termes linéaires dans la projection de Galerkin. Finalement, l'utilisation de l'équation de vorticité (Galbraith et Abdallah, 2011) permet de représenter la dynamique de l'écoulement en s'affranchissant complètement du terme de pression.

En ce qui concerne les résultats présentés dans ce manuscrit, nous négligerons ce terme en considérant que sa contribution est faible. Nous montrerons que cette simplification conduit à des résultats souvent acceptables. Lorsque ce ne sera pas le cas, nous verrons que l'utilisation de méthodes d'identification permettra de corriger cette erreur.

2.2 Choix de la base de projection

L'objectif de la projection de Galerkin étant de représenter de manière précise la dynamique du système à contrôler par un nombre minimal de modes, il est évident que le choix de la base joue un rôle déterminant. Ce choix, qui n'est évidemment pas unique, est lié à un objectif que l'on se donne à atteindre, ou plus précisément à ce que l'on considère comme essentiel à modéliser. De

manière générale, cette base peut être obtenue comme solution d'un problème d'optimisation (Bui-Thanh *et al.*, 2007) visant à atteindre un objectif donné.

Dans la discussion, nous allons distinguer deux types de bases : les bases données *a priori* et les bases obtenues *a posteriori*. Les bases *a priori* pourront être constituées de fonctions mathématiques connues (polynômes de Fourier ou Tchebychev par exemple), ou déterminées par enrichissement au cours de l'intégration du modèle et cela jusqu'à ce que la solution soit suffisamment bien représentée au sens d'un certain critère. On peut citer à titre d'exemple la méthode de réduction *a priori* (APR) développée par Ryckelynck (2005) et la Proper Generalized Decomposition (PGD) utilisée récemment par Dumon (2011). Puisque ce type de méthodes n'utilise pas de réalisations issues d'un modèle haute-fidélité, il est alors nécessaire d'utiliser des algorithmes itératifs pour obtenir les éléments de la base. Au contraire, les méthodes *a posteriori* vont utiliser des réalisations issues d'un modèle haute-fidélité (simulation numérique) ou d'une expérience pour construire la base de projection. Les avantages de ces méthodes sont de ne pas se restreindre à des modèles linéaires et de pouvoir utiliser des informations provenant d'expériences.

Dans ce mémoire, nous prenons pour hypothèse que les bases *a posteriori* sont capables de représenter l'écoulement considéré avec un nombre de modes plus limité que pour les bases *a priori*. Cette efficacité de représentation en termes de nombre de modes se traduira en général par un manque de robustesse à la variation des paramètres de contrôle des modèles réduits ainsi développés. En effet, nous pouvons nous attendre à ce que les modèles réduits que nous développons ne soient capables de représenter que des écoulements, proches en dynamique de l'espace engendré par la base de projection, c'est à dire de l'écoulement original utilisé pour déterminer la base. Une attention particulière devra donc être apportée à l'ensemble des réalisations utilisées pour déterminer la base *a posteriori* de telle manière que ces réalisations soient représentatives du maximum d'états possibles que pourra rencontrer le modèle lors de l'application du contrôle. L'amélioration de la robustesse d'un modèle réduit à des variations d'un paramètre nécessite souvent un traitement particulier. Nous aborderons ce problème au chapitre 4.

Dans cette section, nous présentons différentes approches fréquemment utilisées en contrôle d'écoulement pour la réduction de modèle. Nous commençons par les méthodes reposant sur l'existence d'un modèle dynamique linéaire, puis nous considérons celles reposant sur des réalisations de l'écoulement. A la section 2.2.1, nous décrivons d'abord les *modes globaux* qui correspondent aux vecteurs propres de l'opérateur linéaire ou linéarisé associé au système. Ces modes sont particulièrement intéressants pour représenter la croissance linéaire des instabilités se développant sur un état de base. Puisque nous développons des modèles réduits essentielle-

ment pour faire du contrôle, nous verrons à la section 2.2.2 la troncature en modes équilibrés ou *Balanced Truncation* (BT), qui est particulièrement bien adaptée au cas d'un modèle linéaire décrit par ses entrées/sorties. Par définition, cette méthode permet d'extraire les modes de l'écoulement qui sont à la fois le plus contrôlable et le plus observable (voir par exemple Burl, 1998, pour la définition de la contrôlabilité et de l'observabilité). Cette approche n'a pas été utilisée dans ce manuscrit mais elle est importante à mentionner dans le cadre du contrôle linéaire. L'hypothèse de linéarité étant limitante dans de nombreux cas, nous considérons par la suite les méthodes basées sur des réalisations de l'écoulement. La décomposition orthogonale aux valeurs propres, ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD), est actuellement la méthode la plus répandue dans la littérature pour développer des modèles réduits en mécanique des fluides. Cela s'explique principalement par le fait que, par construction (voir section 2.2.3), cette méthode extrait de réalisations de l'écoulement la base orthonormale qui maximise la représentation de son contenu énergétique. Finalement, nous présentons à la section 2.2.4 la *Dynamic Mode Decomposition* (DMD), récemment introduite par Schmid (2010). Cette méthode détermine les éléments propres de l'opérateur linéaire permettant de passer d'une réalisation à la suivante dans une série temporelle. Cette dernière méthode fait l'objet de la partie II.

2.2.1 Modes globaux

Les modes globaux (Åkervik *et al.*, 2007; Dergham, 2011) sont les éléments propres de l'opérateur dynamique du système linéarisé autour d'un état stationnaire. Les modes associés aux valeurs propres à partie réelle positive sont les modes instables. Chaque mode est caractérisé par une fréquence propre et un taux de croissance que l'on peut déterminer à partir de la valeur propre. Ces modes sont particulièrement adaptés à la description de la croissance des instabilités dans un écoulement. Par ailleurs, ils peuvent être exploités pour former une base de dimension réduite.

Considérons $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$ et p^{St}, une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes. En introduisant dans (2.5) des petites perturbations $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et $\tilde{p}$ autour de $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$ et p^{St}, soit $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} + \tilde{\boldsymbol{u}}$ et $p = p^{\mathrm{St}} + \tilde{p}$, nous obtenons après simplifications le modèle linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\tilde{\boldsymbol{u}} + (\tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} = -\boldsymbol{\nabla}\tilde{p} + \dfrac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\tilde{\boldsymbol{u}}, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{u}} = 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

Après regroupement des variables discrétisées en espace dans le vecteur $\boldsymbol{q} = (\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p})^T$, le

problème (2.9) peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$E\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t} = A\boldsymbol{q}, \qquad \text{avec} \quad E = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

En écrivant les petites perturbations sous la forme $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})e^{\lambda t}$, on obtient un problème aux valeurs propres généralisé :

$$A\boldsymbol{\Phi} = \lambda E\boldsymbol{\Phi}. \tag{2.11}$$

La partie réelle de λ représente le taux de croissance, tandis que la partie imaginaire donne la fréquence associée au mode $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})$. Si le taux de croissance d'un mode est positif, il s'agit d'un mode qui sera naturellement amplifié et donc d'un mode instable.

D'un point de vue pratique, la difficulté est la résolution d'un problème aux valeurs propres généralisé de très grande taille. Pour peu que l'on soit capable de stocker la matrice A en mémoire, des algorithmes itératifs de type Arnoldi peuvent être utilisés, associés à une stratégie de type shift-invert (Saad, 1992; Golub et Ye, 2000) en raison de la non-inversibilité de E.

2.2.2 Balanced Truncation

Dans une démarche de contrôle, et plus précisément dans une stratégie de contrôle en boucle fermée, la prise en compte des entrées/sorties du système peut être intéressante pour la modélisation. En effet, lorsque l'on cherche à déterminer la loi de commande à imposer aux actionneurs connaissant des informations provenant de capteurs, un certain nombre d'états du système sont inutiles. C'est le cas en particulier de tous les états du système que les actionneurs ne sont pas capables de modifier. De la même manière, tous les états du système que les capteurs ne sont pas capables de détecter sont tout aussi inutiles pour le contrôle. Ces deux notions sont liées à la contrôlabilité et à l'observabilité du système. Une définition rigoureuse de ces concepts, fondamentaux pour le contrôle, peut être trouvée dans Burl (1998). Les états associés sont dits contrôlables et observables, respectivement.

La méthode de troncature équilibrée ou *Balanced Truncation* (BT) extrait les modes qui sont à la fois les plus contrôlables et les plus observables. Cette méthode a été introduite par Moore (1981) et s'applique à un système dynamique linéaire stable, invariant en temps, du type :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y} = C\boldsymbol{z}, \end{cases} \tag{2.12}$$

où $\boldsymbol{z}$ est l'état du système, $\boldsymbol{c}$ le paramètre de contrôle et $\boldsymbol{y}$ le vecteur d'observation. Connaissant la condition initiale $\boldsymbol{z}_0$ et l'entrée $\boldsymbol{c}(t)$, ce type de modèle a l'avantage d'admettre une solution exacte (Zhou *et al.*, 1996) donnée par :

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}(t) = e^{At}\boldsymbol{z}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\boldsymbol{c}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ \boldsymbol{y}(t) = C\boldsymbol{z}(t). \end{cases} \tag{2.13}$$

Afin de caractériser la capacité du contrôle à modifier l'état $\boldsymbol{z}$, on regarde la réponse impulsionnelle, du système c'est-à-dire la solution obtenue pour $\boldsymbol{c}(t) = \delta(0)$ et une condition initiale nulle $\boldsymbol{z}_0 = 0$, soit :

$$\boldsymbol{z}_{\mathrm{Imp}}(t) = e^{At}B. \tag{2.14}$$

Pour quantifier cette réponse, on définit le grammien de contrôlabilité comme la matrice symétrique

$$W_c(t) = \int_0^t \boldsymbol{z}_{\mathrm{Imp}}(t)\boldsymbol{z}^*_{\mathrm{Imp}}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t e^{At}BB^*e^{A^*t}\,\mathrm{d}t \tag{2.15}$$

où * représente l'opérateur adjoint. Par définition (Zhou *et al.*, 1996), le couple (A, B) est dit contrôlable si pour toute condition initiale $\boldsymbol{z}_0$, pour toute valeur finale $\boldsymbol{z}_f$, et pour tout temps final t_f, il existe un contrôle $\boldsymbol{c}(t)$ tel que $\boldsymbol{z}(t_f) = \boldsymbol{z}_f$. Cette condition est vérifiée si et seulement si W_c est définie positive pour tout $t > 0$.

En imposant maintenant un contrôle nul et une condition initiale égale à 1, on obtient pour observation :

$$\boldsymbol{y}(t) = Ce^{At}. \tag{2.16}$$

De la même manière que précédemment, on peut alors définir le grammien d'observabilité comme étant

$$W_o(t) = \int_0^t \boldsymbol{y}^*(t)\boldsymbol{y}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t e^{A^*t}C^*Ce^{At}\,\mathrm{d}t. \tag{2.17}$$

Le couple (C, A) est dit observable (Zhou *et al.*, 1996) si pour un temps t_1 donné, la condition initiale $\boldsymbol{z}_0$ peut être déterminée à partir de l'histoire du contrôle $\boldsymbol{c}(t)$ et des observations $\boldsymbol{y}(t)$ pour $t \in [0, t_1]$. Cette condition est vérifiée si et seulement si W_o est définie positive pour tout $t > 0$.

En pratique, pour des modèles dynamiques de dimension raisonnable, les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité peuvent être déterminés numériquement comme solutions des

équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{cases} AW_c + W_cA^* + BB^* = 0 \\ A^*W_o + W_oA + C^*C = 0. \end{cases} \tag{2.18}$$

Le principe de la balanced truncation est la détermination d'une base de telle sorte que les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité soient équilibrés c'est-à-dire égaux et donnés par une matrice diagonale. On recherche donc une matrice de passage T telle que

$$T^{-1}W_c\left(T^{-1}\right)^* = T^*W_oT = \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_N \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

où les coefficients σ_i sont des réels positifs, triés par valeur décroissante, et appelés valeurs singulières de Hankel. En fonction de la vitesse de décroissance de ces valeurs singulières, un plus ou moins grand nombre de modes pourra être conservé pour décrire la dynamique du système. Une manière de déterminer les valeurs singulières de Hankel est de calculer les vecteurs propres et valeurs propres de $W_cW_o = T\Sigma^2T^{-1}$.

Les applications restent limitées à des systèmes dynamiques linéaires stables dont on connait de manière explicite les matrices A, B et C. Dans le cas d'un système dynamique instable, si les équations de Lyapunov (2.18) admettent une solution, les grammiens peuvent alors malgré tout être définis comme solutions de (2.18). Si ce n'est pas le cas, le lecteur pourra se référer à Zhou *et al.* (1999).

Dans le cas d'un système dynamique linéaire de dimension élevée, Rowley (2005) a introduit une méthode basée sur des réalisations permettant d'approximer les modes issus de balanced truncation sans avoir à résoudre les équations de Lyapunov (2.18). Cette méthode consiste à effectuer une décomposition POD sur des réalisations correspondant aux réponses impulsionnelles des équations directe et adjointe du problème. La résolution d'équations adjointes pose des difficultés, en particulier dans le cas d'expériences. Dans ce cas, il peut être intéressant d'utiliser la technique dénommée ERA (Eigensystem Realization Algorithm) (Ma *et al.*, 2011) qui permet d'identifier un modèle réduit linéaire équilibré uniquement à partir de réalisations du système direct.

La balanced truncation permet donc de prendre en compte le caractère entrée/sortie du système, tandis que les modes globaux se concentrent sur l'état interne du système, supposé pleinement observable. Dans un tout autre contexte, la balanced truncation peut aussi être utilisée pour mieux représenter un système amplificateur de bruit, comme cela a été effectué

par Farrell et Ioannou (2001) en considérant le bruit du modèle comme une entrée, et ainsi équilibrer la base de projection entre les perturbations les plus amplifiées et la réponse principale du système.

2.2.3 Proper Orthogonal Decomposition

Les méthodes présentées dans les sections précédentes supposent la connaissance d'un opérateur dynamique linéaire (ou linéarisé) régissant le système. Or, cet opérateur n'est en général pas linéaire, peut ne pas être connu et est de toute manière de très grande dimension en mécanique des fluides. Pour ces raisons, on s'oriente maintenant vers la détermination d'une base à partir d'un ensemble de réalisations du système. En pratique, ces réalisations pourront autant provenir d'une simulation numérique que de mesures expérimentales.

La décomposition orthogonale aux valeurs propres ou *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) est une technique d'analyse de données qui permet de représenter un système de dimension élevée par un modèle de dimension faible. La POD consiste à déterminer par combinaison linéaire de réalisations une base orthonormale de faible dimension qui soit représentative des réalisations les plus présentes statistiquement dans un ensemble de données. Ce processus de construction linéaire ne présage pas de la linéarité du phénomène étudié. La POD pourra être appliquée sur tout type de dynamique, et les modes POD pourront être utilisés dans une projection de Galerkin (voir section 2.1) pour construire un modèle dynamique de dimension réduite de l'écoulement.

La POD a été introduite en mécanique des fluides par Lumley (1967) pour identifier des structures cohérentes au sein des écoulements turbulents. Cette méthode est connue dans d'autres domaines scientifiques sous le nom de décomposition de Karhunen-Loève ou d'analyse en composante principale (ACP ou PCA en anglais) (Jolliffe, 2005). Ses liens avec la décomposition en valeurs singulières (SVD) sont étroits comme cela a été montré dans Cordier (2008). Le principe commun de toutes ces approches est de chercher à extraire l'information dominante des données en identifiant les directions principales de représentation par un problème aux valeurs propres.

2.2.3.1 Quelques définitions

L'objectif étant d'extraire la partie la plus énergétique de l'écoulement, définissons l'énergie via un produit scalaire spatial donné par $E(t) = \frac{1}{2}\|\cdot\|_\Omega^2 = \frac{1}{2}(\cdot,\cdot)_\Omega$. La définition précise de ce produit scalaire dépend du problème particulier considéré.

Dans le cas d'un écoulement incompressible, l'énergie cinétique turbulente est définie par :

$$E_{\text{TKE}}(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u'^2(\boldsymbol{x},t) + v'^2(\boldsymbol{x},t)\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t)\right)_\Omega. \tag{2.20}$$

Lorsque la POD est appliqué sur le champ fluctuant, le produit scalaire adéquat pour représenter l'énergie cinétique turbulente est donc bien le produit scalaire standard dans $L^2(\Omega)$.

Dans le cas d'écoulements compressibles, Rowley *et al.* (2004) ont défini le produit scalaire suivant :

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)_\Omega = \int_\Omega \left(u_1u_2 + v_1v_2 + \frac{2\xi}{\gamma_L - 1}c_1c_2\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{2.21}$$

où $\boldsymbol{u} = (u, v, c)^T$, avec c la vitesse locale du son, et où γ_L est le coefficient de Laplace du gaz parfait. Le coefficient ξ permet alors à la norme $\frac{1}{2}\|\cdot\|_\Omega^2$ de représenter soit une enthalpie totale ($\xi = 1$), soit une énergie totale massique ($\xi = 1/\gamma_L$).

Enfin, en suivant des considérations plus mathématiques que physiques, Iollo *et al.* (2000) ont introduit un produit scalaire défini dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, soit :

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)_\Omega = \int_\Omega \left(\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{u}_2 + \epsilon \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}_2\right)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.22}$$

Comme on pouvait s'y attendre, ce produit scalaire a montré un effet stabilisant sur le modèle réduit.

Le choix du produit scalaire permet donc d'unifier différentes variantes dans un même formalisme général. Il sera donc possible de jouer sur la définition du produit scalaire pour introduire des considérations physiques dans la décomposition, ou pour améliorer la régularisation du problème (voir section 3.2.3).

De même, soient deux variables temporelles $p(t)$ et $q(t)$ quelconques, nous allons définir un produit scalaire temporel par :

$$(p(t), q(t))_T = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.23}$$

pour des variables continues, et par

$$(p(t), q(t))_T = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} p(t_i)q(t_i), \tag{2.24}$$

pour des variables discrètes.

La POD reposant sur une approche statistique, nous aurons également besoin par la suite d'un opérateur de moyenne. Tout d'abord, introduisons un opérateur de moyenne temporelle

$\langle\cdot\rangle_T$, défini pour des variables continues par

$$\langle p(t)\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.25}$$

et pour des variables discrètes par

$$\langle p(t)\rangle_T = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} p(t_i). \tag{2.26}$$

Finalement, introduisons un opérateur de moyenne spatiale défini par :

$$\langle\cdot\rangle_\Omega = \int_\Omega \cdot\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{2.27}$$

2.2.3.2 Equation de Fredholm

Soit $\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_1), \cdots, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_{N_t})\}$, un ensemble de N_t réalisations à N_c composantes $\{u^i\}_{i=1}^{N_c}$, l'objectif de la POD est de représenter $\mathcal{U}$ sur une base orthonormale de dimension N_{Gal} qui minimise l'erreur de projection au sens de la norme choisie. Dit autrement, l'objectif est d'obtenir la meilleure approximation au sens de la norme choisie des données de $\mathcal{U}$, soit :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_i) \simeq \boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\mathrm{Gal}}]}(\boldsymbol{x}, t_i) = \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} a_j(t_i)\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega,\ \forall i \in [1, \cdots, N_t] \tag{2.28}$$

où $a_j(t_i)$ sont des coefficients de projection à déterminer. De manière plus mathématique, la POD est équivalente à déterminer la base $\Phi = \{\boldsymbol{\Phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{N_{\mathrm{Gal}}}\}$, telle que l'on maximise :

$$\frac{\left\langle (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}))_\Omega^2 \right\rangle_T}{\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x})\|_\Omega^2}, \tag{2.29}$$

sous la contrainte :

$$(\boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j)_\Omega = \delta_{ij}. \tag{2.30}$$

De manière géométrique, le problème est donc équivalent à rechercher la direction « la plus alignée en moyenne » avec les données définissant $\mathcal{U}$. La figure 2.1 représente de manière schématique les premiers modes POD alignés avec les directions principales d'un ensemble de réalisations.

Les modes issus de ce problème d'optimisation représentent la structuration la plus probable de l'écoulement, ce que l'on peut interpréter en termes de structures cohérentes. La résolution

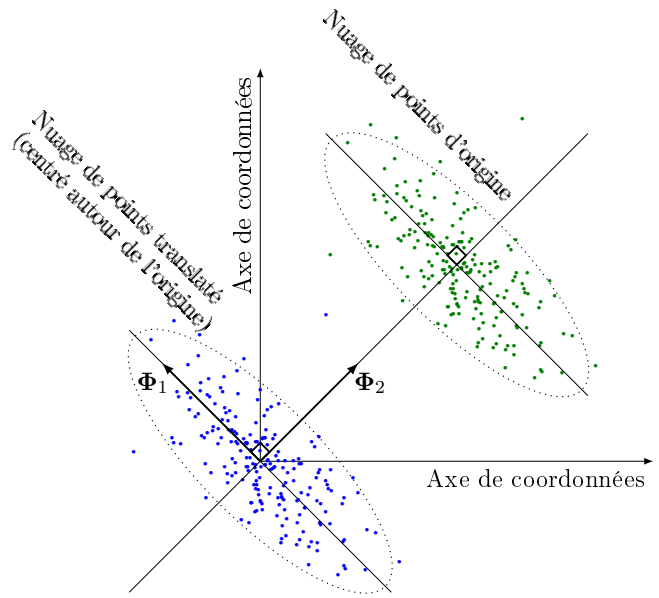


Figure 2.1 – Représentation schématique de la POD. Les premiers modes POD $\mathbf{\Phi}_1$ et $\mathbf{\Phi}_2$ sont alignés avec les directions principales d'un ensemble de réalisations définissant $\mathcal{U}$.

du problème d'optimisation sous contrainte (2.29) peut être faite de différentes manières. Une méthode consiste à suivre le formalisme traditionnellement utilisé en turbulence et à introduire le tenseur des corrélations spatiales en deux points :

$$R^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') = \left\langle u^i(\boldsymbol{x}, t) u^j(\boldsymbol{x}', t) \right\rangle_T . \tag{2.31}$$

Introduisons l'opérateur $\mathcal{R}$ tel que

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) = \sum_{j=1}^{N_c} \int_\Omega R^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') \Phi^i(\boldsymbol{x}') \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}'. \tag{2.32}$$

Il est alors possible de montrer (voir Cordier, 2008, par exemple) que :

$$\left\langle (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}), \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}))_\Omega^2 \right\rangle_T = (\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})), \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}))_\Omega . \tag{2.33}$$

Le problème de maximisation (2.29) peut donc être réécrit comme l'équation intégrale aux valeurs propres suivante :

$$\mathcal{R}(\mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x})) = \lambda \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}), \tag{2.34}$$

soit encore comme une équation intégrale de Fredholm :

$$\sum_{j=1}^{N_c} \int_\Omega R^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}')\Phi^j(\boldsymbol{x}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}' = \lambda\Phi^i(\boldsymbol{x}). \tag{2.35}$$

Finalement, l'opérateur $\mathcal{R}$ étant symétrique, défini positif, (2.35) admet un ensemble de solutions et ses modes sont orthonormaux.

2.2.3.3 Implémentation : méthode classique ou méthode des snapshots

Il existe principalement deux approches POD. La première dite *POD classique* consiste à calculer la matrice de corrélation R sur un nombre fini de points d'espace, puis à calculer ses éléments propres afin de déterminer la base Φ. Cette technique est efficace lorsque le nombre de données en espace est faible comparé au nombre de données en temps. C'est le cas que l'on rencontre généralement pour des données expérimentales.

Dans le cas de données numériques, ou provenant de mesures de type PIV, on se trouve dans la situation inverse, c'est à dire que la résolution spatiale est largement supérieure à la résolution temporelle. Dans ce cas, l'approche appropriée est appelée *méthode des snapshots*. C'est elle que nous allons utiliser dans nos travaux.

La méthode des « snapshots » consiste à effectuer une moyenne spatiale et à calculer les corrélations temporelles des données. L'opérateur de corrélation temporelle est défini par :

$$C_{ik} = \frac{1}{N_t}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_i), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_k)\right)_\Omega. \tag{2.36}$$

En développant R_{ij} dans l'équation de Fredholm, puis en remplaçant $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ par son expression sous forme séparée, nous obtenons après quelques développements l'expression suivante :

$$\frac{1}{N_t}\sum_{k=1}^{N_t}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_i), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t_k)\right)_\Omega a_j(t_k) = \lambda_j a_j(t_i). \tag{2.37}$$

Pour trouver les coefficients temporels, il suffit alors de résoudre le problème aux valeurs propres :

$$C\boldsymbol{V}_j = \lambda_j \boldsymbol{V}_j \tag{2.38}$$

où $\boldsymbol{V}_j = (a_j(t_1), \cdots, a_j(t_{N_t}))^T$. Ces coefficients temporels vérifient par construction la relation suivante :

$$\frac{1}{T}\int_0^T a_i(t)a_j(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_j\delta_{ij}. \tag{2.39}$$

Les modes temporels sont donc également orthogonaux au sens du produit scalaire temporel et la valeurs propre λ_j représente l'énergie moyenne $\bar{E}_j$ associée au mode j. En effet, on a :

$$\bar{E} = \frac{1}{T}\int_0^T (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_\Omega \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{i=1}^{N_t}\sum_{j=1}^{N_t} (\boldsymbol{\Phi}_i a_i, \boldsymbol{\Phi}_j a_j)_\Omega \,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{N_t} \frac{1}{T}\int_0^T a_j^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{N_t} \lambda_j. \tag{2.40}$$

Finalement, on peut calculer les modes spatiaux comme :

$$(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t), a_j(t))_T = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} (\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x}) a_i(t), a_j(t))_T = \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x})\lambda_j$$

soit encore

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T\lambda_j}\int_0^T \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) a_j(t) \,\mathrm{d}t. \tag{2.41}$$

2.2.4 Dynamic Mode Decomposition

A la section précédente, nous avons montré que la POD était optimale au sens de la représentation énergétique de l'écoulement. Ce caractère d'optimalité peut être intéressant pour comprendre certains phénomènes physiques. Cependant, en termes de modélisation dynamique et *a fortiori* pour le contrôle, il est plus pertinent de représenter la dynamique de l'écoulement que son énergie. De ce point de vue là, les modes globaux et la balanced truncation sont intéressants car ils représentent l'opérateur de dynamique du système. Cependant, l'une comme l'autre de ces méthodes ne peut être utilisée que dans le cas d'un modèle linéaire. Il est donc nécessaire d'avoir une nouvelle décomposition, représentative de la dynamique du système, et pouvant être utilisée pour des systèmes non linéaires.

En 2010, Schmid a introduit une méthode appelée Dynamic Mode Decomposition (DMD) liée intrinsèquement à la dynamique du système. Cette méthode, basée uniquement sur des réalisations de l'écoulement, détermine les éléments propres de l'opérateur linéaire permettant de passer d'une réalisation à l'autre dans une série temporelle. L'approche étant basée sur des réalisations de l'écoulement, elle s'affranchit comme la POD de l'hypothèse de linéarité de la dynamique sous-jacente.

La DMD fait l'objet de la partie II de ce manuscrit. L'objectif est d'aller au delà de l'analyse de données pour voir si il est possible de l'utiliser comme technique de réduction de modèle.

2.3 Synthèse

Le contrôle d'écoulement nécessite un modèle dynamique de faible dimension, que ce soit hors ligne pour déterminer la loi de commande optimale, ou en ligne pour effectuer une estimation de l'état du système lors de l'acquisition des mesures. Dans le contexte des modèles basés sur la physique, il convient donc de déterminer une base de faible dimension pertinente par rapport à l'objectif afin de déterminer les équations du modèle réduit. Dans ce chapitre, nous avons montré qu'en fonction de ce que l'on souhaite représenter et des informations à disposition, le choix de la base peut varier. En effet, nous pouvons envisager différents objectifs. Nous pouvons être intéressés par la croissance des instabilités, par la partie la plus contrôlable et la plus observable de l'écoulement, par la partie la plus énergétique ou par la dynamique du système. La base peut également être construite à partir de différentes informations. On peut soit utiliser un opérateur linéarisé dont on va déterminer une approximation de faible dimension, soit utiliser un ensemble de réalisations pour construire la base par combinaisons linéaires. Par la suite, nous considérons les méthodes basées sur des réalisations de l'écoulement car elles permettent de s'affranchir de l'hypothèse de linéarité et d'utiliser des données expérimentales.

Nous verrons au chapitre 3 que malgré le choix judicieux de la base, la représentation de faible dimension peut mener à un modèle imprécis qu'il faudra améliorer.

Chapitre 3

Amélioration de la précision des modèles réduits

Table des matières

3.1 Sources d'imprécisions **52**

3.1.1 Effet de troncature 52

3.1.2 Modélisation et calcul numérique 57

3.2 Améliorations des modèles POD-Galerkin **57**

3.2.1 Modèle de viscosité 58

3.2.2 Rajout d'une contrainte énergétique 59

3.2.3 Méthodes de régularisation 62

3.2.4 Méthodes d'identification 62

3.3 Synthèse **65**

Au chapitre 2, nous avons présenté la méthode de réduction de modèle par projection de Petrov-Galerkin. Nous avons alors montré que la réduction du nombre de degrés de libertés liée à cette approche, en faisait un bon candidat pour des applications en contrôle d'écoulement. Cependant, dans de nombreuses situations pratiques, les modèles réduits issus de projection de Galerkin se révèlent imprécis pour une représentation à long, voire à moyen terme. Par ailleurs, des problèmes d'instabilité numérique, et même des phénomènes de divergence en temps fini, sont couramment observés sur ce type de modèle.

Dans ce chapitre, nous indiquerons les sources possibles de ces imprécisions (section 3.1), puis nous décrirons (section 3.2) les solutions envisagées dans la littérature. Pour cela, nous commencerons par ajouter un terme de viscosité artificielle aux équations du modèle réduit (section 3.2.1). Par la suite, nous testerons une approche consistant à imposer par contraintes le niveau énergétique du modèle (section 3.2.2). A la section 3.2.3, nous décrirons des méthodes de régularisation. Enfin, nous présenterons (section 3.2.4) des techniques d'identification de paramètres utilisées dans la littérature pour améliorer les modèles issus de projection. Ce dernier point nous conduira à l'introduction du problème d'assimilation de données qui est développé de manière détaillée dans la partie III.

3.1 Sources d'imprécisions

Afin d'améliorer le modèle, il faut avant tout identifier les sources possibles des imprécisions. Par la suite, nous distinguerons les erreurs dues aux effets de troncature, de celles dues à la construction du modèle.

3.1.1 Effet de troncature

Par définition, la création d'un modèle réduit consiste à construire un modèle dynamique d'ordre plus faible que le modèle haute-fidélité, tout en conservant au maximum sa représentativité, sa dynamique et ses propriétés de stabilité. Cette réduction importante de dimension est la source principale des risques d'échec liés à l'utilisation des modèles réduits. Pour expliquer cela, des effets différents peuvent être avancés.

Approximation de dimension réduite : La réduction de modèle par méthode de Petrov-Galerkin repose sur la détermination d'une base de faible dimension représentant au mieux l'état du système selon un certain critère. En principe[1], plus le nombre de modes conservé est important, et plus le sous-espace de représentation s'approche de celui d'origine. On commet alors moins d'erreurs de projection, mais cela s'accompagne d'une augmentation de l'ordre du modèle. Pour évaluer *a priori* cette erreur, il suffit de tracer les valeurs propres POD cumulées sous forme normalisée en fonction du nombre de modes conservés. Ce critère, souvent appelé *Relative Information Content*, est défini par $\mathrm{RIC}(N_{\mathrm{Gal}}) = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} \lambda_i / \sum_{i=1}^{N_t} \lambda_i$. Cette valeur représente le pourcentage d'énergie cinétique turbulente des données originales pris en compte par le

[1]Nous verrons cependant que ce n'est pas toujours le cas, en particulier lorsque la base n'est pas orthonormale. Ce problème sera mis en évidence au chapitre 6 lorsque nous traiterons du choix des modes DMD.

modèle de dimension N_{Gal}. Ce critère est représenté sur la figure 3.1 dans le cas de données PIV provenant d'un écoulement autour d'un cylindre à $Re = 13000$ présentées dans la section 5.5. Nous constatons que dans ce cas 44 (respectivement 111) modes POD représentent 90% (resp. 95%) de l'énergie cinétique turbulente de l'écoulement. Cette convergence énergétique, qui est directement liée à la convergence du sous-espace de représentation vers celui d'origine, est plus ou moins lente en fonction des données utilisées pour déterminer les modes. Dans la majorité des cas, ce critère énergétique est maîtrisé, et une diminution de l'erreur de projection est assurée en augmentant le nombre de modes.

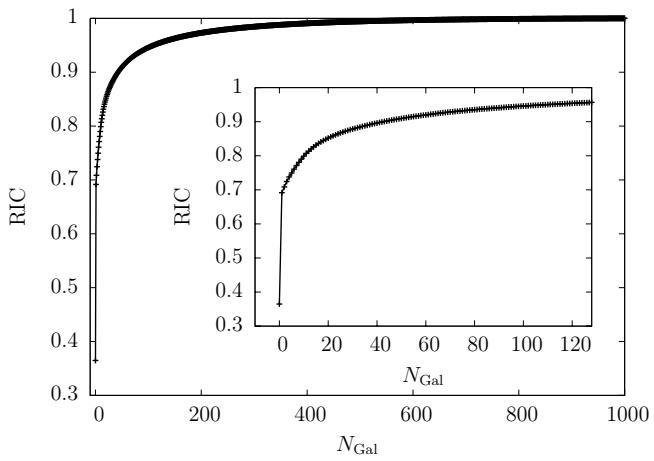


Figure 3.1 – Critère RIC dans le cas de données PIV provenant d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre à $Re = 13000$. $N_t = 1000$ réalisations ont été utilisées pour appliquer la *Snapshot POD*.

Notons qu'il convient cependant d'être prudent quant à l'interprétation de ce rapport car il dépend également des réalisations. En effet, si l'espace engendré par les réalisations est fortement modifié en ajoutant des réalisations supplémentaires alors il faudra bien garder à l'esprit que ce rapport énergétique est relatif à la quantité d'information présente dans les réalisations et non à l'espace exploré par le système sur un temps infiniment long. A qualité de représentation égale, le pourcentage énergétique capturé par N_{Gal} modes POD est généralement plus faible si le nombre de réalisations N_t est important.

Dynamique du système : L'erreur de représentation du sous-espace de dimension réduite n'est pas la seule possible en matière de modélisation. En effet, nous cherchons à construire un modèle dynamique qui soit représentatif de l'écoulement original lorsque ce modèle est utilisé pour décrire la dynamique temporelle. Supposons que l'écoulement se trouve dans un état proche de l'ensemble des réalisations qui ont servi à la construction du modèle. Cet état étant connu, nous pouvons le projeter sur le sous-espace de dimension réduite. Nous souhaiterions

alors qu'en partant de cet état projeté, le modèle dynamique puisse prédire, au pas de temps suivant, un état contenu également dans ce sous-espace, qui soit le plus proche possible de celui que l'on obtiendrait en projetant l'état de l'écoulement réel au même instant. Cette procédure de comparaison est schématisée sur la figure 3.2. Si à chaque instant, le comportement du modèle est suffisamment similaire à l'écoulement d'origine, on peut alors espérer qu'au temps long du système le contenu fréquentiel et la densité de probabilité[2] des composantes du modèle soient respectés, permettant de considérer que la dynamique de l'écoulement est correctement décrite par le modèle. Notons ici que la dynamique de l'écoulement d'origine peut être bien décrite, malgré une piètre reconstruction énergétique, au même titre que l'on peut représenter fidèlement l'espace d'origine et avoir tout de même un modèle réduit qui ne se comporte pas comme prévu.

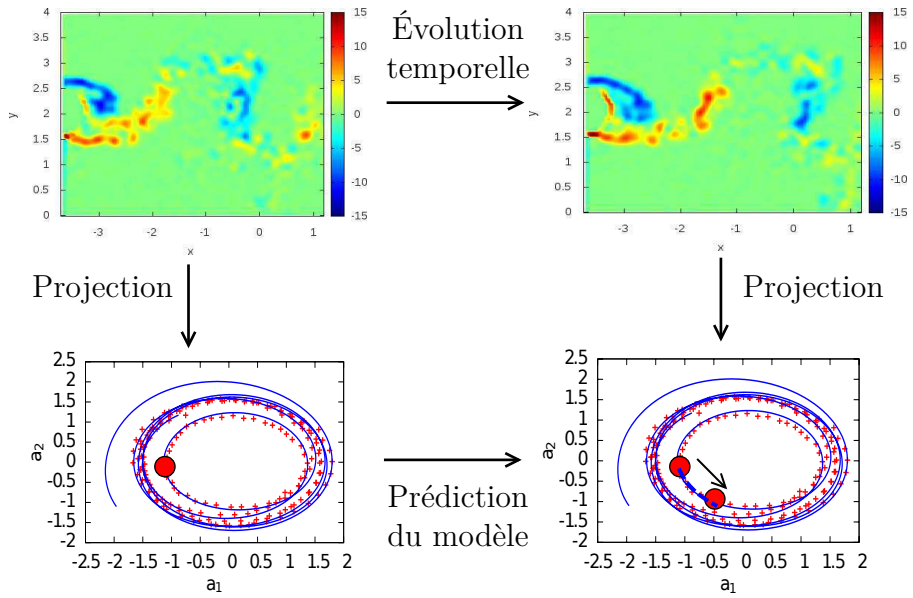


Figure 3.2 – Schéma d'un modèle réduit représentant correctement la dynamique d'un système.

Dans tout système dynamique issu d'une projection de Petrov-Galerkin, nous pouvons séparer dans le terme de droite, une partie résolue dépendant uniquement des modes conservés dans la projection et une autre dite de résidu dépendant également des modes non retenus ; ce

[2]De manière instantanée, la dynamique issue du modèle réduit peut ne pas correspondre aux données de référence en raison de lentes divergences ou d'apparition d'évènements très sensibles aux conditions initiales. Cela ne signifie pas nécessairement que le modèle réduit ne représente pas une évolution possible de la dynamique d'un écoulement. Il serait certainement pertinent de délaisser la description temporelle d'une dynamique au profit de la description de la densité de probabilité d'un ensemble de trajectoires comme cela est fait de manière traditionnelle en physique statistique (Kaiser *et al.*, 2013, par exemple).

que nous pouvons écrire de manière formelle sous la forme (Couplet *et al.*, 2003) :

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = f_i^{\text{Résolu}}(\boldsymbol{a}) + f_i^{\text{Résidu}}(\boldsymbol{u}). \tag{3.1}$$

Tout l'art de la réduction de modèle est de minimiser l'effet du terme de troncature $f_i^{\text{Résidu}}$. Cette tâche est particulièrement ardue dans le cas des écoulements turbulents car ceux-ci sont caractérisés par un facteur d'échelles important entre les structures les plus grandes et les plus petites présentes dans l'écoulement. Par ailleurs, toutes ces échelles sont en interactions fortes et échangent de l'énergie, en particulier par des mécanismes non-linéaires. Or, la contribution énergétique des grandes structures est plus importante que celle des petites. Les modes POD étant triés par contenu énergétique, les grandes structures sont donc représentées globalement par les premiers modes POD, tandis que les petites structures sont décrites par des modes d'ordres élevés. Lors de la réduction de modèle, la troncature sur les modes négligera de manière inévitable la partie de la dynamique correspondant à l'interaction avec les modes pris en compte. Puisque les modes ainsi négligés sont associés à de petites structures, et que ces dernières participent activement à la dissipation visqueuse, l'erreur de troncature provoque fréquemment une accumulation d'énergie dans le modèle. Ce phénomène est semblable à celui rencontré en Simulation des Grandes Échelles (SGE). Nous y reviendrons à la section 3.2.1 où nous introduirons un modèle de viscosité tourbillonnaire.

Comme nous le verrons par la suite, ces effets indésirables peuvent être limitées : i) soit par construction en choisissant correctement la base de projection, ii) soit par modélisation en rajoutant des termes ayant un effet similaire au résidu de troncature mais ne dépendant que de la partie résolue des modes, ou iii) soit en utilisant des techniques d'identification.

Stabilité du modèle : Le modèle réduit peut également ne pas hériter des propriétés de stabilité du système haute-fidélité dont il est issu. En effet, il est fréquemment observé un phénomène de divergence des modèles réduits issus de projection de Galerkin (Cordier *et al.*, 2010, 2013), en particulier lorsque le nombre de modes devient important. En raison de la présence de termes quadratiques, cette divergence peut même se produire en temps fini (Csikja et Tóth, 2007). Afin de se convaincre de cette possibilité, considérons une équation différentielle quadratique simple :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \quad \text{avec} \quad x(0) = x_0. \tag{3.2}$$

La solution analytique de (3.2) est donnée par :

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t}. \tag{3.3}$$

On obtient alors que x tend vers l'infini quand t tend vers $1/x_0$ avec $x_0 > 0$. Cet exemple simple montre que la présence de termes quadratiques peut conduire à des divergences brutales en temps fini, contrairement à des termes linéaires qui engendrent au pire une croissance exponentielle.

La figure 3.3 illustre ce phénomène dans le cas d'un modèle réduit POD construit par projection de Galerkin dans le cas d'un écoulement de couche de mélange (Cordier *et al.*, 2013). Cette figure représente l'énergie instantanée décrite par le modèle POD, soit $E(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} a_j^2(t)$ pour $N_{\text{Gal}} = 40$, en comparaison avec celle obtenue directement par projection des réalisations sur la base POD.

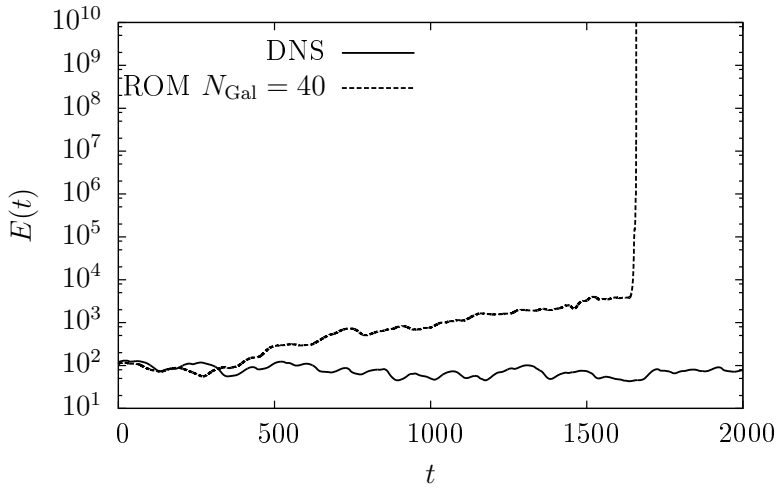


Figure 3.3 – Énergie du modèle réduit issu de projection de Galerkin sur 40 modes POD (pointillés) comparée à l'énergie déterminée par projection des réalisations originales sur la même base POD (ligne continue). Données provenant d'une simulation de couche de mélange à $Re_{\delta_\omega} = 500$ où δ_ω est l'épaisseur de vorticité (Cordier *et al.*, 2013).

Nous pouvons observer jusqu'à $t = 1600$ une croissance exponentielle associée à une accumulation d'énergie probablement due à une erreur de troncature, puis une divergence brutale en temps fini. Notons ici que plus le nombre de modes utilisés pour la projection de Galerkin est important, et plus la représentation est fidèle. Cependant, cette amélioration de précision est obtenue au détriment des propriétés de stabilité du modèle. Un compromis entre stabilité et précision du modèle est donc souvent à envisager.

3.1.2 Modélisation et calcul numérique

La diminution de l'ordre des modèles réduits, et l'effet de troncature qui lui est associé, sont probablement la source principale de l'échec des modèles réduits issus de projection de Galerkin. A cela, nous pouvons ajouter des inconnues de modélisation et des erreurs de calcul numérique qui vont s'additionner aux erreurs provoquées par la réduction d'ordre.

Prise en compte du terme de pression : Comme nous l'avons déjà évoqué à la section 2.1.3, le terme de pression nécessite un traitement particulier si ce dernier ne s'annule pas en raison de la contrainte de divergence nulle et de la présence de conditions aux limites adéquates. Les méthodes pour prendre en compte ce terme ou s'en affranchir ont alors été détaillés.

Cas des mesures PIV : Il est fréquent d'utiliser des données de type 2D-2C pour un écoulement pleinement tridimensionnel. Le manque d'information lié à la composante hors plan de l'écoulement engendre des erreurs lors de la projection de Galerkin[3]. En effet, on néglige d'une part la contribution transversale de la quantité de mouvement, mais surtout la divergence calculée de manière bidimensionnelle n'est pas nulle.

Calcul des gradients : Lors de la projection de Galerkin, nous avons besoin d'évaluer les gradients et laplaciens des modes POD spatiaux. Ces gradients, calculés généralement par différences finies, sont sensibles au bruit et à l'utilisation d'une grille trop grossière. Dans le cas de données numériques, il convient si possible, de calculer les gradients de manière cohérente avec ceux déterminés dans le code de calcul. Concernant les termes en laplacien, il est possible de s'en affranchir en effectuant une intégration par parties sur le terme visqueux. Par conséquent, seuls les gradients des modes interviennent, et un terme frontière apparait.

3.2 Améliorations des modèles POD-Galerkin

De nombreuses sources d'imprécision existant pour les modèles réduits, il est nécessaire de les améliorer pour qu'ils représentent mieux l'écoulement original. Nous proposerons d'abord (section 3.2.1) de modéliser l'effet des modes non retenus dans la troncature par un terme de viscosité. Par la suite, nous testerons une approche consistant à imposer par contraintes le niveau énergétique du modèle réduit (section 3.2.2). A la section 3.2.3, nous aborderons des

[3]Le phénomène est le même dans le cas de post-traitement de mesures PIV 2D-2C.

méthodes de régularisation du modèle réduit fondées sur des considérations mathématiques de filtrage. Enfin, nous décrirons à la section 3.2.4 des techniques d'identification de paramètres.

3.2.1 Modèle de viscosité

Puisque les modes non pris en compte peuvent avoir un effet non négligeable sur la dynamique des modes représentés, il peut être intéressant de le modéliser. Pour un écoulement turbulent, une cascade énergétique entre les modes POD a été mise en évidence par Couplet *et al.* (2003), cascade similaire à celle connue dans l'espace de Fourier. Cette observation conforte l'idée d'un transfert énergétique des premiers modes POD associés aux grandes structures vers les modes élevés associés aux petites structures. Cette similarité de comportement permet d'imaginer de transposer le formalisme de fermeture utilisé en Simulation des Grandes Échelles à un modèle réduit POD Galerkin.

Le fait de négliger l'influence des modes d'ordre élevé provoque une accumulation d'énergie du modèle. Pour prévenir ce phénomène, la modélisation la plus courante est d'ajouter une viscosité tourbillonnaire artificielle. Cette viscosité a pour but de dissiper le surplus d'énergie en assurant son drainage. A partir de cette idée, de nombreuses méthodes ont émergés.

Puisque les effets de viscosité sont inclus dans les termes linéaires du modèle, Cazemier *et al.* (1998) ont introduit un terme linéaire supplémentaire H_i de la manière suivante :

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = C_i + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} L_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} Q_{ijk} a_j(t) a_k(t) + H_i a_i(t). \tag{3.4}$$

En écrivant que la variation moyenne du niveau énergétique de chaque mode doit être nulle en moyenne sur une durée T, on obtient :

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}a_i^2}{\mathrm{d}t} \right\rangle_T = \left\langle 2a_i \frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} \right\rangle_T = 0 \tag{3.5}$$

d'où

$$\begin{aligned} &L_{ii}\lambda_i + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} Q_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle_T + H_i \lambda_i = 0 \quad \text{ou encore} \\ &H_i = -L_{ii} - \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} Q_{ijk} \langle a_i a_j a_k \rangle_T. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Le terme triadique $\langle a_i a_j a_k \rangle_T$ peut être calculé de manière *a posteriori* en utilisant directement les résultats issus de la POD. Notons que des grandeurs statistiques de ce type peuvent être déterminées connaissant une densité de probabilité *a priori*, densité que l'on pourra corriger

via un principe de maximum d'entropie (Noack et Niven, 2012).

Les modélisations utilisées en simulation des grandes échelles peuvent également être transposées directement aux modèles réduits. Sirisup et Karniadakis (2004) ont utilisé une méthode de type *Spectral Vanishing Viscosity* sur le modèle réduit d'un écoulement autour d'un cylindre, tandis que Wang *et al.* (2012) ont comparé différentes méthodes de fermeture tels que les modèles de *mixing-length*, de Smagorinsky, la méthode *Variational Multiscale* et le modèle *Dynamic Subgrid Scale*.

Le terme de viscosité tourbillonnaire peut également être trouvé de manière optimale de telle sorte que le modèle réduit corresponde au mieux aux réalisations utilisées pour la POD, comme cela a été réalisé précédemment par Bergmann (2004). Ce terme de viscosité peut alors dépendre de l'indice du mode et être constant ou fonction du temps.

3.2.2 Rajout d'une contrainte énergétique

Afin d'éviter l'accumulation énergétique liée à la troncature dans l'espace POD, nous allons rajouter au modèle réduit une contrainte énergétique. De cette manière, parmi l'ensemble des solutions possibles du modèle réduit, nous allons chercher à déterminer celle associée à un certain niveau énergétique. La démarche consistant à rajouter des contraintes à un modèle dynamique étant très générale, elle sera décrite en détail au chapitre 10. Dans cette section, nous limiterons la description au minimum et traiterons uniquement le cas de la conservation énergétique.

Par la suite, nous considérons que l'écoulement à modéliser suit une loi de cascade énergétique directe c'est-à-dire des modes POD d'ordre faible vers les modes d'ordre élevé. Puisque la majorité des transferts énergétiques se fait en moyenne entre modes d'indices proches (Couplet *et al.*, 2003), nous allons contraindre les modes d'ordre élevé à partir d'un indice de troncature N_{Cut} à conserver un niveau énergétique de référence E_0. Le problème revient alors à :

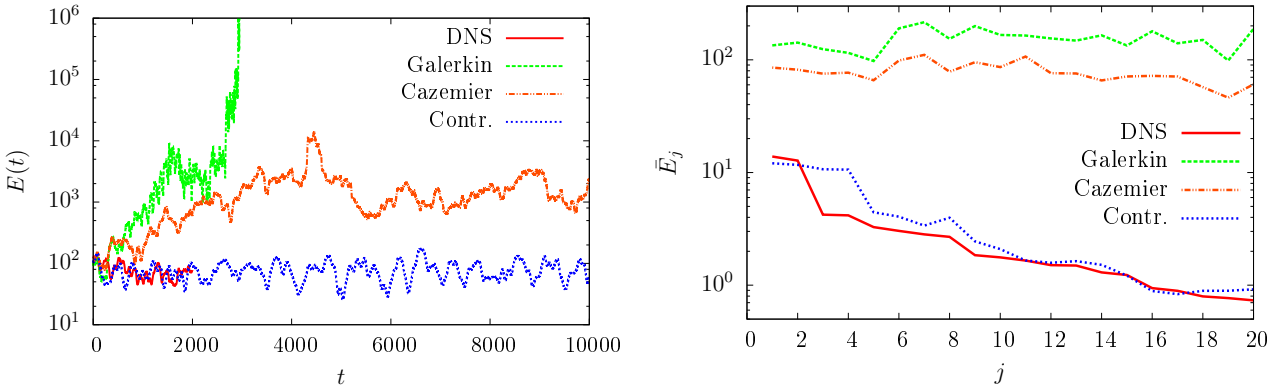
$$\begin{cases} \text{Résoudre :} & \dfrac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = C_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} L_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Gal}}} Q_{ijk} a_j(t) a_k(t) \\ \text{sous la contrainte :} & \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=N_{\text{Cut}}+1}^{N_{\text{Gal}}} a_j^2(t) = E_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

La contrainte peut être imposée de manière faible via une méthode de pénalisation. Cette méthode, présentée à la section 10.4.2.1, revient à ajouter un terme non-linéaire au modèle. Dans cette application, une contrainte faible a été choisie car il a été observé que l'énergie du modèle fluctue au cours du temps. Le terme non linéaire supplémentaire peut être vu comme

un terme de fermeture qui régule l'énergie du modèle. Le modèle contraint a la forme suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = C_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} L_{ij}a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} Q_{ijk}a_j(t)a_k(t) & \text{si } i \leq N_{\mathrm{Cut}} \\ \dfrac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = C_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} L_{ij}a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}}\sum_{k=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} Q_{ijk}a_j(t)a_k(t) - \alpha_{\mathrm{Pen}}a_i(t)\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=N_{\mathrm{Cut}}+1}^{N_{\mathrm{Gal}}} a_j^2(t) - E_0\right) & \text{si } i > N_{\mathrm{Cut}}. \end{cases} \tag{3.8}$$

α_{Pen} est un paramètre de pénalisation qui permet selon sa valeur d'imposer la contrainte énergétique plus ou moins fortement.



(a) Énergie instantanée.

(b) Énergie par mode.

Figure 3.4 – Comparaison de l'énergie décrite par des modèles réduits issus de projection de Galerkin sur 20 modes POD pour différents modèles de fermeture avec l'énergie déterminée par projection des réalisations originales sur la même base POD. DNS : énergie des modes propres temporels POD ; Galerkin : modèle issu de projection de Galerkin sans fermeture ; Cazemier : modèle de fermeture de Cazemier ; Contr. : modèle de fermeture avec contrainte énergétique pour $\alpha_{\mathrm{Pen}} = 10^{-2}$ et $N_{\mathrm{Cut}} = 15$. Données provenant d'une simulation de couche de mélange à $Re_{\delta_\omega} = 500$ où δ_ω est l'épaisseur de vorticité (Cordier *et al.*, 2013).

La figure 3.4 représente les évolutions temporelles de l'énergie décrites par des modèles réduits issus de projection de Galerkin et munis de différents modèles de fermeture, ainsi que la solution obtenue directement par POD. $E(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} a_j^2(t)$ représente l'énergie instantanée de tout le système, tandis que $\bar{E}_j = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_0^T a_j^2(t)\,\mathrm{d}t$ représente l'énergie moyenne associée au mode j. Dans cette application, E_0 est calculé comme le niveau énergétique moyen des modes POD d'ordre compris entre $N_{\mathrm{Cut}} + 1$ et N_{Gal} pour $N_{\mathrm{Cut}} = 15$. Pour le modèle issu directement de projection de Galerkin, une divergence brutale se produit vers $t = 2500$. En appliquant le modèle de Cazemier (3.6), l'accumulation d'énergie est moins importante et le modèle ne diverge

plus. Finalement, le modèle de fermeture basé sur la contrainte énergétique permet de maintenir le niveau d'énergie à une valeur approximativement constante et comparable avec la solution obtenue directement par POD. Pour $\alpha_{\text{Pen}} = 10^{-2}$, le modèle n'est pas trop fortement contraint et le niveau énergétique est correctement décrit. Cette valeur du coefficient de pénalisation peut également être déterminée par la méthode *L-curve* (Hansen, 1992; Cordier *et al.*, 2010).

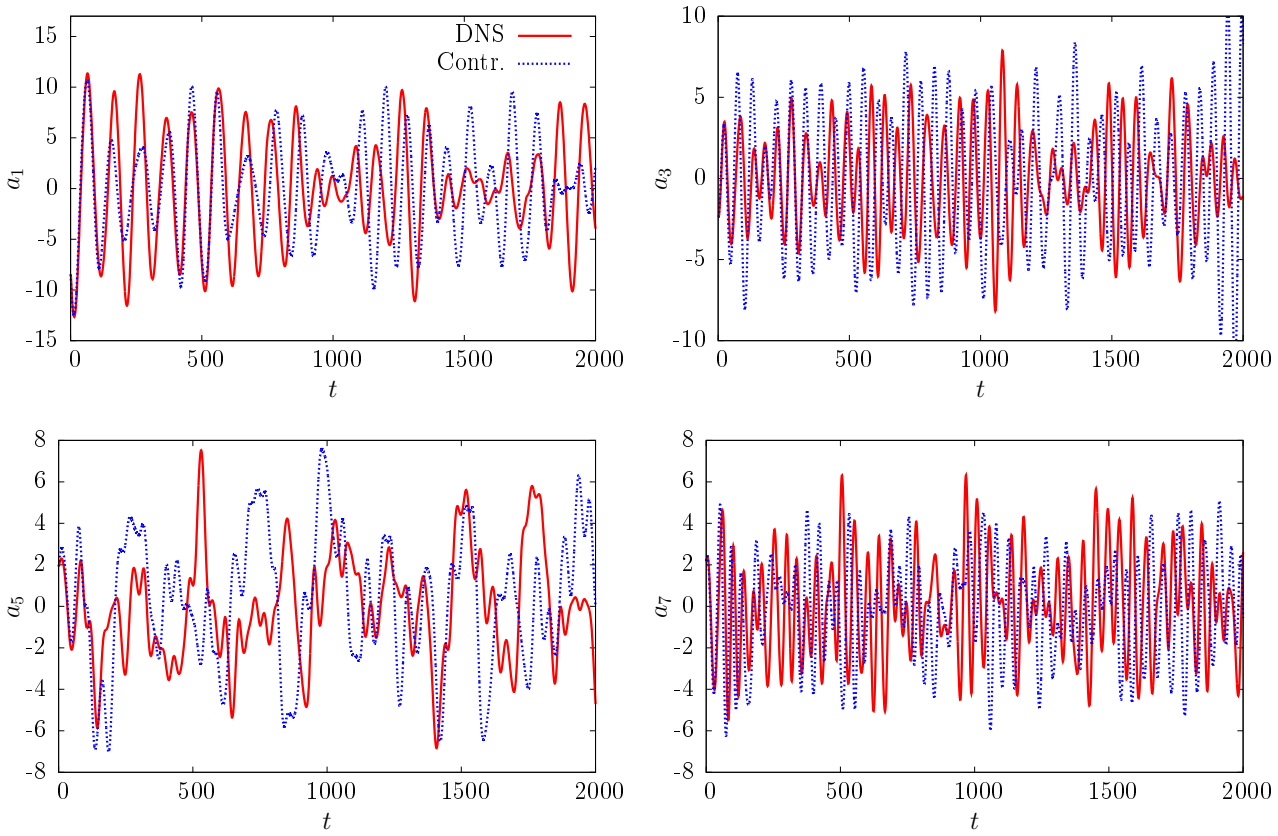


Figure 3.5 – Comparaison des coefficients temporels POD obtenus par un modèle réduit issu de projection de Galerkin avec les coefficients directement obtenus par POD. Le modèle réduit est développé avec 20 modes POD et repose sur un modèle de fermeture avec contrainte énergétique ($\alpha_{\text{Pen}} = 10^{-2}$ et $N_{\text{Cut}} = 15$). Données provenant d'une simulation de couche de mélange à $Re_{\delta_\omega} = 500$ où δ_ω est l'épaisseur de vorticité (Cordier *et al.*, 2013).

Les coefficients temporels du modèle contraint sont comparés avec les fonctions temporelles POD sur la figure 3.5. A court terme, un bon accord est observé, puis le modèle s'écarte de la référence. Cependant, à long terme, le comportement général du modèle reste similaire à celui du système d'origine.

Le rajout d'une contrainte au modèle réduit semble être un outil puissant pour déterminer un modèle de fermeture. Un des intérêts d'ajouter une contrainte est que le formalisme reste

général, permettant ainsi de s'adapter à différents cas pouvant être rencontrés. Toutefois, le choix de cette contrainte est déterminant afin que le modèle de fermeture soit le plus réaliste possible.

3.2.3 Méthodes de régularisation

Le manque de stabilité des modèles réduits Galerkin peut également être amélioré via une régularisation par filtrage. La régularisation α, développée dans le cas de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky par Sabetghadam et Jafarpour (2012), consiste à imposer un filtrage spatial en appliquant l'opérateur de Helmholtz aux modes POD. Le modèle reste ainsi fidèle aux réalisations sur un temps plus long. Ce filtrage permet d'une part de rendre le modèle réduit robuste à des imprécisions du calcul des coefficients, et d'autre part de filtrer les échanges énergétiques avec des modes qui possèdent des nombres d'onde élevés.

En suivant une toute autre démarche, Iollo *et al.* (2000) ont utilisé la norme H^1 pour déterminer les modes POD. L'utilisation du produit scalaire de l'espace de Sobolev a conduit à un problème plus régulier et a amélioré la capacité du modèle réduit à représenter les réalisations. On peut noter ici le lien entre une régularisation par un opérateur de Helmholtz et le produit scalaire standard dans $H^1(\Omega)$ (Protas et Liao, 2008). En effet, le produit scalaire dans $H^1(\Omega)$ de deux variables $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ est défini par :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{H^1} &= \frac{1}{1+\alpha^2}\left((\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{L^2} + \alpha^2(\boldsymbol{\nabla p},\boldsymbol{\nabla q})_{L^2}\right) = \frac{1}{1+\alpha^2}\left((\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})_{L^2} - \alpha^2(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\Delta q})_{L^2}\right)\\ &= \left(\boldsymbol{p}, \frac{1}{1+\alpha^2}(1-\alpha^2\boldsymbol{\Delta})\boldsymbol{q}\right)_{L^2}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Utiliser le produit scalaire dans H^1 revient donc à appliquer l'opérateur de Helmholtz à un des vecteurs.

Des considérations mathématiques permettent ainsi de régulariser le modèle et éventuellement de lui conférer de meilleures propriétés de stabilité. Ce type de technique peut également être utilisé pour accélérer la convergence d'un problème d'optimisation par utilisation du gradient de Sobolev comme dans Protas *et al.* (2004).

3.2.4 Méthodes d'identification

L'ajout d'un terme de viscosité ou l'utilisation d'une méthode de régularisation peut parfois ne pas être suffisant en raison d'une troncature trop sévère ou d'une méconnaissance importante du système considéré. En général, ces difficultés sont plus importantes dans le cas d'utilisation de

données expérimentales. A ce stade, des méthodes d'identification de modèle peuvent prendre le relais. Ces méthodes consistent à déterminer les coefficients du modèle ou certains de ses paramètres de telle manière que celui-ci se comporte après identification comme un ensemble d'observations connues par ailleurs. Un des objectifs est d'utiliser ce modèle identifié pour prédire la dynamique du système au delà de l'intervalle temporel utilisé pour l'identification.

De nombreux modèles dynamiques sont issus d'un processus d'identification, tels que les modèles ARX (*Auto Regressive model with eXternal inputs*), ARMAX (*Auto Regressive Moving Average with eXternal inputs*) ou les réseaux de neurones. Tous ces modèles ont en commun de prendre en compte de manière transparente le caractère entrée-sortie du système sans introduire d'équation basée sur la physique pour les construire.

Dans ce manuscrit, le point de vue est de conserver la structure du modèle issue de projection de Galerkin pour réaliser l'identification. Notre approche consiste donc à ne pas trop s'éloigner de considérations physiques en conservant pour cela la structure du modèle issu de projection de Galerkin, puis à identifier tout ou partie de ses coefficients afin d'améliorer les performances du modèle.

3.2.4.1 Calibration de modèle

Le problème d'identification ou encore de calibration consiste à réduire au maximum l'écart entre les sorties du modèle et un ensemble d'observations. Pour cela, nous pouvons poser l'identification sous la forme d'un problème d'optimisation (Couplet *et al.*, 2005; Weller *et al.*, 2009; Cordier *et al.*, 2010), l'objectif étant de trouver les paramètres du modèle de telle sorte que l'erreur de modélisation soit minimale.

La structure du modèle (2.4) issu de projection de Galerkin sur les équations de Navier-Stokes est de la forme constante, linéaire, quadratique et sa sortie est exprimée dans le sous-espace POD. Les coefficients de ce modèle étant supposés inconnus, nous les plaçons dans un vecteur $\boldsymbol{c} = (C_i, L_{ij}, Q_{ijk})^T$. Comme cela a été développé dans Cordier *et al.* (2010) et Couplet *et al.* (2005), l'erreur de modélisation peut être définie de différentes manières. Les définitions les plus couramment utilisées sont :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^{(1)}(\boldsymbol{c}, t) &= \boldsymbol{a}^P(t) - \boldsymbol{a}^R(t), \\
\boldsymbol{e}^{(2)}(\boldsymbol{c}, t) &= \boldsymbol{a}^P(t) - \boldsymbol{a}^P(0) - \int_0^t \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}^P(\tau))\mathrm{d}\tau, \\
\boldsymbol{e}^{(3)}(\boldsymbol{c}, t) &= \dot{\boldsymbol{a}}^P(t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}^P(t)),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

où $\boldsymbol{a}^P$ représente la projection des réalisations sur la base POD et $\boldsymbol{a}^R$ la sortie du modèle.

En outre, un terme de régularisation peut également être explicité pour prévenir un écart trop important des coefficients $\boldsymbol{c}$ à une valeur $\boldsymbol{c}^b$ connue *a priori* (par projection de Galerkin, par exemple). Finalement, nous cherchons à déterminer $\boldsymbol{c}$ qui minimise la fonctionnelle :

$$\mathcal{J}^{(i)}(\boldsymbol{c}) = \left\langle \|\boldsymbol{e}^{(i)}(\boldsymbol{c}, t)\|^2 \right\rangle_T + \alpha_{\text{Reg}} \|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^b\|^2, \tag{3.11}$$

où α_{Reg} est un paramètre de régularisation permettant de donner plus ou moins d'importance à la solution *a priori*.

Ce problème d'optimisation se ramène en général à un système linéaire de la forme $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ (Cordier *et al.*, 2010, pour tous les développements). Afin de régulariser le problème, ce système peut être résolu en utilisant une décomposition SVD ou de manière itérative par méthode adjointe (Lehmann *et al.*, 2007).

3.2.4.2 Vers une utilisation conjointe des méthodes de projection et d'identification

Dans la méthode de calibration décrite à la section 3.2.4.1, les fonctions propres temporelles POD jouent le rôle d'observations des réalisations originales du système lors de l'étape d'identification de modèle. Parallèlement à cela, le modèle utilisé pour l'identification possède la même structure que celui issu de projection de Galerkin, le terme de régularisation permettant de donner un poids plus ou moins important aux coefficients déterminés par projection. En résumé, nous sommes ici en train de combiner des informations provenant de la physique en utilisant un modèle dynamique et des coefficients issus de projection de Galerkin, à d'autres provenant d'observations. D'un côté, l'utilisation isolée d'un modèle issu de projection de Galerkin n'est souvent pas satisfaisante pour les raisons décrites précédemment. De l'autre, une identification seule, basée sur un jeu de réalisations donné, n'est surement pas suffisant pour construire un modèle prédictif représentatif d'une physique complexe. Une illustration de ce constat est la divergence en temps de modèles identifiés sans terme de régularisation dans Cordier *et al.* (2010).

Formuler l'identification de modèle comme un problème d'optimisation basé sur la minimisation de la fonctionnelle coût (3.11) permet de traduire son caractère multi-objectifs. En effet, nous souhaitons que le modèle dynamique corresponde correctement aux observations tout en étant pas trop différent du modèle donné *a priori*. Le paramètre de régularisation α_{Reg} permet de donner plus ou moins d'importance aux observations ou aux coefficients issus de projection de Galerkin. Cependant, il n'est pas toujours évident d'avoir une idée *a priori* de la valeur de ce paramètre. Une méthode consiste à le déterminer *a posteriori* par régularisation de Tikhonov

(Hansen, 1992).

La combinaison d'informations inhomogènes telle que nous l'avons décrite correspond à un problème d'*assimilation de données*. Les approches stochastiques (Sciacchitano *et al.*, 2012; Leroux *et al.*, 2011) se différencient des méthodes déterministes variationnelles qui consistent à résoudre un problème d'optimisation. Lorsque le modèle à identifier est dépendant du temps, cette méthode, dénommée 4D-Var (Navon, 2009), consiste à trouver les meilleurs paramètres du modèle mais aussi la meilleure condition initiale pour lesquels la dynamique du modèle identifié correspond aux observations. Nous développerons cette méthode dans la partie III. La méthode d'identification de modèle présentée à la section 3.2.4.1 peut ainsi être considérée comme un cas particulier d'assimilation de données exprimé dans le sous-espace POD. Elle se différencie cependant de l'approche 4D-Var par le fait que la condition initiale optimale n'est pas recherchée.

Nous étudierons en détail à la partie III l'utilisation de l'assimilation de données 4D-Var comme méthode d'identification d'un modèle réduit POD.

3.3 Synthèse

La réduction de modèle permet en principe d'avoir un modèle dynamique qui soit suffisamment représentatif de l'écoulement original, tout en étant assez rapide pour donner accès à des applications de type contrôle d'écoulement. La simplification de dynamique liée à la troncature est malheureusement obtenue en contrepartie de problèmes d'imprécisions et de stabilité des modèles réduits. Pour palier ces difficultés, différentes sortes d'améliorations sont envisagées. Il existe d'un côté les améliorations *a priori*, telles que l'ajout d'une viscosité tourbillonnaire, d'une procédure de régularisation ou d'un terme de contrainte, qui reposent sur des considérations mathématiques ou physiques, et de l'autre, les améliorations *a posteriori*, comme les méthodes d'identification, qui s'appuient sur des informations provenant du modèle haute-fidélité. Ces améliorations permettent de rendre les modèles réduits utilisables en pratique. Dès lors que l'on est capable de reproduire la dynamique d'origine de l'écoulement par un modèle réduit, les étapes suivantes consistent à : i) introduire les paramètres de contrôle de manière explicite dans le modèle (cet aspect sera traité au chapitre 10), ii) utiliser le modèle pour résoudre un problème d'optimisation c'est-à-dire à faire varier les paramètres de contrôle du modèle. Cependant, il n'existe aucune garantie que le modèle réduit construit pour une valeur donnée du paramètre de contrôle continue à être représentatif de la dynamique du système pour une autre valeur du paramètre de contrôle. La question de la robustesse des modèles réduits à la variation des

paramètres de contrôle est donc soulevée. Des éléments de réponse sont apportés au chapitre 4.

Chapitre 4

Robustesse des modèles réduits à la variation d'un paramètre

Table des matières

4.1 Influence des réalisations **68**

4.2 Interpolation de bases **70**

4.3 Sensibilité des modes **70**

4.4 Algorithmes POD adaptatifs à région de confiance **72**

4.5 Synthèse du chapitre et de la partie **74**

Aux chapitres 2 et 3, nous avons présenté les différentes méthodes pouvant être utilisées pour développer un modèle réduit dynamique de l'écoulement, et nous avons discuté les approches permettant d'améliorer la précision des modèles réduits. Or, par définition, l'application du contrôle va modifier l'état du système. Afin de conserver une stratégie de contrôle basée sur des modèles, il est donc nécessaire que le modèle soit capable de prendre en compte ces modifications. Pour cela, il faut qu'il soit suffisamment robuste à ces changements de dynamique provoqués par l'évolution des paramètres de contrôle. Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la robustesse à la variation d'un paramètre de l'écoulement, ce paramètre pouvant être un paramètre de contrôle, ou de manière plus générale, un paramètre quelconque comme un nombre de Reynolds ou un nombre de Mach. Pour simplifier, ce paramètre sera noté μ par

la suite.

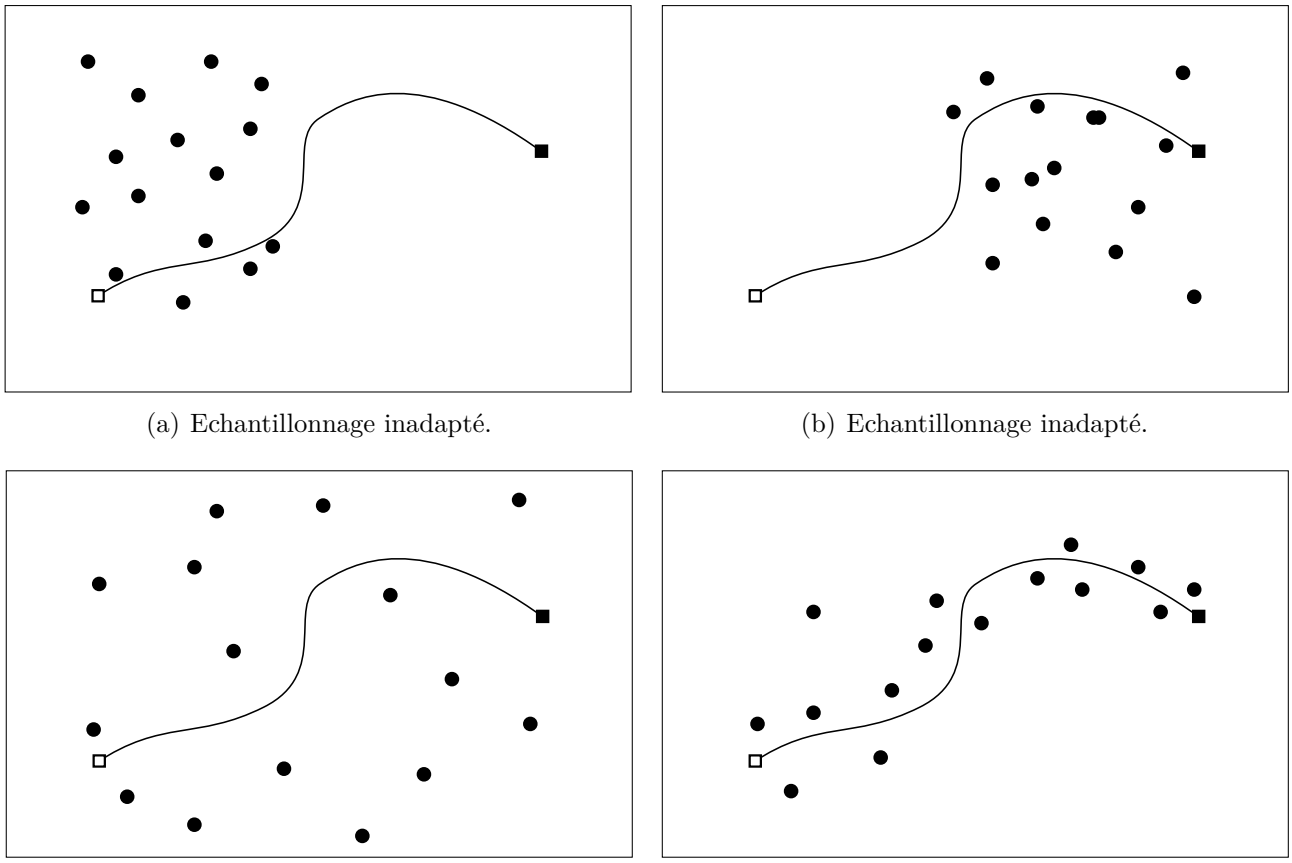
Pour des écoulements de complexité réaliste, la base de projection est généralement déterminée à partir d'un ensemble de réalisations du système (voir section 2.2). Pour que l'état modifié par le contrôle puisse être représenté correctement par la base de projection, une stratégie consiste à explorer de manière globale l'espace des paramètres. Pour cela, nous pouvons agir en amont de la détermination de la base sur les réalisations utilisées pour l'extraire (section 4.1), ou en aval de la détermination en réalisant des interpolations de base (section 4.2). Une deuxième stratégie est d'agir localement dans l'espace des paramètres de contrôle, en exploitant les informations de sensibilité des modes à la variation des paramètres (section 4.3). Cette information de sensibilité permettra soit d'enrichir la base, soit de la modifier par extrapolation. Enfin, une dernière stratégie est d'utiliser un algorithme adaptatif à région de confiance (section 4.4) qui consiste à mettre à jour de manière régulière et automatique le modèle réduit lorsqu'il ne permet plus de représenter de manière correcte la variation de dynamique introduite par le contrôle.

4.1 Influence des réalisations

Comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 2 en présentant les méthodes de réduction de modèle, la diminution du nombre de degrés de libertés nécessaire pour représenter une dynamique donnée s'accompagne généralement d'une perte de robustesse à la variation des paramètres. En effet, un modèle réduit obtenu par projection à partir d'un ensemble de réalisations de l'écoulement ne pourra *a priori* représenter que des solutions appartenant au sous-espace engendré par ces réalisations. Admettons par exemple que nous développions un modèle réduit à partir de réalisations représentant un écoulement non contrôlé, et que sous l'action du contrôle, la dynamique évolue fortement. Dans ces conditions, le modèle réduit initial ne sera en général pas capable de représenter ce changement, même si il est très fidèle à l'écoulement non contrôlé.

Cet exemple illustre le fait que les réalisations doivent être choisies de manière à explorer globalement l'espace des paramètres de contrôle afin d'être en mesure de représenter correctement un maximum d'états pour lesquels le modèle est conçu. Il sera par exemple utile que l'ensemble des réalisations utilisées pour déterminer la base contienne des réalisations de l'écoulement non contrôlé, de l'écoulement actionné avec différentes lois de forçage, et de l'écoulement proche de l'objectif pour lequel le contrôle est conçu. La sélection de ces réalisations est donc formellement équivalente à un problème d'échantillonnage optimal dans l'espace des paramètres de contrôle (Burkardt *et al.*, 2006; Kaiser *et al.*, 2013).

La figure 4.1 représente de manière schématique les différents types d'échantillonnage possible dans l'espace des paramètres de contrôle, l'un étant adapté à la prise en compte de la variation des paramètres de contrôle dans le modèle (figure 4.1(d)), les autres ne l'étant pas (figures 4.1(a)-4.1(c)).



(a) Echantillonnage inadapté.

(b) Echantillonnage inadapté.

(c) Echantillonnage inadapté.

(d) Echantillonnage idéal.

Figure 4.1 – Représentation schématique d'un problème d'optimisation dans l'espace des paramètres de contrôle. —— chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation, • réalisation utilisée pour la base de données. D'après Bergmann (2004).

Une manière de rendre le modèle plus robuste à la variation d'un paramètre est de déterminer la base de projection à partir de réalisations obtenues pour différentes valeurs de ce paramètre. Le modèle réduit deviendra alors plus robuste mais cela s'accompagnera souvent d'une perte de précision du modèle pour une valeur donnée du paramètre de contrôle, ainsi que d'une diminution de la vitesse de résolution car le nombre de modes sera alors plus important.

Lombardi (2010) a étudié l'effet d'une sélection de réalisations obtenues pour plusieurs nombres de Reynolds sur l'erreur du modèle réduit POD utilisé à d'autres valeurs de nombre

de Reynolds et a proposé différentes méthodes d'échantillonnage. Afin de prendre en compte l'effet du nombre de Reynolds dans les erreurs de modélisation liées à la projection de Galerkin, Akkari *et al.* (2013) ont introduit un terme de majoration d'erreur fonction du nombre de Reynolds.

En conclusion, la robustesse des modèles réduits est donc dépendante du sous-espace engendré par la base de projection. Par ailleurs, cette robustesse peut être améliorée par un échantillonnage adéquat dans l'espace des paramètres.

4.2 Interpolation de bases

La stratégie d'enrichissement de l'ensemble des réalisations proposée à la section précédente peut s'opposer au souhait d'utiliser pour chaque valeur du paramètre μ considéré un modèle réduit de dimension minimale. Au lieu d'augmenter le nombre de réalisations avant détermination de la base de projection, une autre méthode consiste à adapter la base à la valeur du paramètre. Nous pouvons donc imaginer de déterminer au préalable des bases pour différentes valeurs de μ, puis d'utiliser en pratique une base interpolée comme cela a été fait dans Lehmann *et al.* (2005) ou Morzyński *et al.* (2007). Afin de maintenir l'orthonormalité de la base, il est également possible d'utiliser des techniques d'interpolation de base sur une variété respectant la contrainte d'orthonormalité (Amsallem *et al.*, 2009). Si la base n'est pas importante en soit mais que seul le sous-espace engendré par la base est important, alors des interpolations sur la variété de Grassmann seront plutôt utilisées.

4.3 Sensibilité des modes

La modification de la dynamique du système par le contrôle est parfois modérée. Dans ces cas, une amélioration locale du modèle dans l'espace des paramètres est alors envisageable. Une manière d'améliorer la robustesse d'un modèle réduit POD à la modification d'un paramètre μ est d'introduire la sensibilité des modes POD à ce paramètre. Nous allons présenter d'abord comment déterminer la sensibilité des modes POD, puis comment introduire cette information dans une démarche de réduction de modèle.

Calcul de sensibilité : Soit le problème aux valeurs propres (2.38) donné par :

$$C\boldsymbol{V}_i = \lambda_i \boldsymbol{V}_i \tag{4.1}$$

et $\boldsymbol{\Phi}_i$, le $i^{\text{ème}}$ mode spatial POD, nous cherchons à déterminer $\dfrac{\partial \lambda_i}{\partial \mu}$ et $\dfrac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial \mu}$ respectivement les sensibilités de λ_i et $\boldsymbol{\Phi}_i$ par rapport à μ. Pour cela, nous rappelons que la matrice de corrélation temporelle C est définie par $\frac{1}{N_t} U^* U$ dans le cas du produit scalaire temporel discret (2.24), où U est la matrice des réalisations utilisées pour appliquer la POD, soit $U = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_{N_t})$. Supposons que la matrice de sensibilité des réalisations $\dfrac{\partial U}{\partial \mu}$ soit connue, il est alors possible de démontrer (Amsallem, 2010; Fox et Kapoor, 1968) que :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu} = \frac{\boldsymbol{V}_i^* \dfrac{\partial C}{\partial \mu} \boldsymbol{V}_i}{\boldsymbol{V}_i^* \boldsymbol{V}_i} = \frac{1}{N_t \lambda_i} \boldsymbol{V}_i^* \frac{\partial C}{\partial \mu} \boldsymbol{V}_i \tag{4.2}$$

où $\dfrac{\partial C}{\partial \mu} = \dfrac{1}{N_t} \left(\boldsymbol{U}^* \dfrac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \mu} + \dfrac{\partial \boldsymbol{U}^*}{\partial \mu} \boldsymbol{U} \right)$.

La matrice C étant symétrique, ses vecteurs propres forment une base complète de $\mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ et nous pouvons donc écrire $\dfrac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \mu}$ de la manière suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}_i}{\partial \mu} = \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} m_{ij} \boldsymbol{V}_j. \tag{4.3}$$

Les coefficients m_{ij} sont déterminés dans Fox et Kapoor (1968). On obtient :

$$\begin{cases} m_{ij} = \dfrac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)\, N_t \lambda_i} \boldsymbol{V}_j^* \dfrac{\partial C}{\partial \mu} \boldsymbol{V}_i, \quad \text{si} \quad i \neq j \\ m_{jj} = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Finalement, la dérivée de $\boldsymbol{\Phi}_i$ donne :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial \mu} = \frac{1}{N_t \lambda_i} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \mu} \boldsymbol{V}_i + \frac{1}{N_t \lambda_i} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{V}_i}{\partial \mu} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mu} \boldsymbol{\Phi}_i. \tag{4.5}$$

Un exemple de calcul de sensibilité de modes POD par rapport à la variation du nombre de Reynolds est donné dans Hay *et al.* (2009). De la même manière que nous avons déterminé la sensibilité des éléments propres POD par rapport à μ, nous avons évalué à la section 6.2 la sensibilité des modes DMD (voir chapitre 5). Ces informations de sensibilité peuvent maintenant être exploitées pour améliorer le modèle réduit par enrichissement ou extrapolation de la base de projection.

Base enrichie : Les sensibilités des modes POD n'engendrant pas le même espace que les modes POD eux-mêmes, elles peuvent être utilisées pour enrichir la base de projection. Nous pouvons ainsi introduire une base étendue définie par :

$$\Phi_{\text{Enr}} = \{\mathbf{\Phi}_1, \cdots, \mathbf{\Phi}_{N_{\text{Gal}}}; \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial \mu}, \cdots, \frac{\partial \mathbf{\Phi}_{N_{\text{Gal}}}}{\partial \mu}\}.$$

Cette procédure permet d'enrichir le sous-espace de projection, et ainsi de pouvoir représenter certains états apparaissant lorsque le paramètre de contrôle est modifié. Hay *et al.* (2009) ont montré que cette méthode permettait de rendre localement robuste le modèle réduit à une modification du paramètre de contrôle. Cette amélioration de la robustesse est en revanche contrebalancée par une augmentation de l'ordre du modèle.

Base extrapolée : Une autre manière de tenir compte des sensibilités est de modifier la base en l'extrapolant par développement de Taylor pour une valeur de μ quelconque proche du point de linéarisation μ_0. On obtient alors :

$$\mathbf{\Phi}_i(\boldsymbol{x}; \mu) = \mathbf{\Phi}_i(\boldsymbol{x}; \mu_0) + (\mu - \mu_0)\frac{\partial \mathbf{\Phi}_i}{\partial \mu}(\boldsymbol{x}; \mu_0) + \mathcal{O}\left(\Delta\mu^2\right), \tag{4.6}$$

où $\Delta\mu = \mu - \mu_0$. Cette méthode d'extrapolation génère une base, non orthonormale, mais de meilleure représentativité pour le paramètre μ considéré.

En conclusion, les techniques d'enrichissement et d'extrapolation permettent d'améliorer la robustesse locale du modèle et contribuent à augmenter la région de validité du modèle dans l'espace des paramètres.

4.4 Algorithmes POD adaptatifs à région de confiance

Pour que le modèle POD reste représentatif de la dynamique du système au cours de la résolution du problème d'optimisation, il serait nécessaire de pouvoir le mettre à jour de manière régulière lorsqu'il n'est plus suffisamment représentatif de la dynamique modifiée. De manière idéale, nous souhaiterions que la mise à jour se fasse de manière automatique sans que l'utilisateur intervienne pour indiquer la perte de représentativité du modèle réduit. Ce type de mécanisme est possible en utilisant une méthode d'optimisation, dite à région de confiance (Bergmann et Cordier, 2008; Fahl, 2000; Coleman et Li, 1996). A chaque itéré k de l'optimisation, une région de l'espace des paramètres de contrôle définie par son rayon $\Delta^{(k)}$ est introduite, région sur laquelle le modèle réduit courant est supposé décrire l'écoulement (voir figure 4.2).

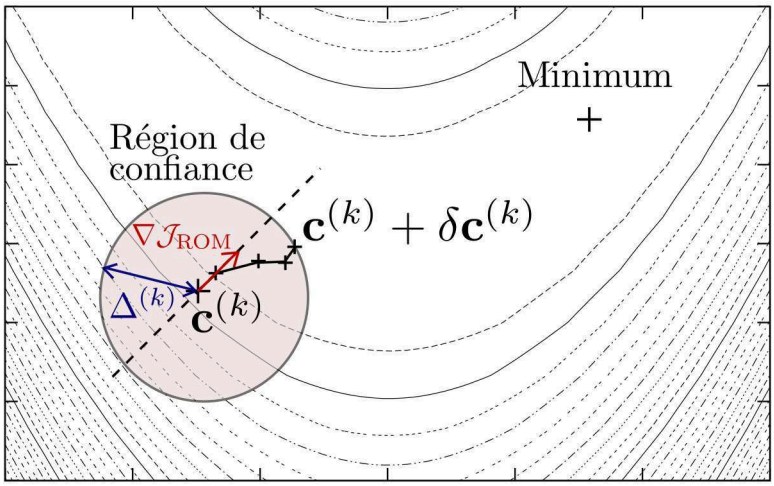


Figure 4.2 – Schéma représentatif de l'algorithme à région de confiance.

Le problème d'optimisation est alors résolu sur cette région de confiance en utilisant comme modèle dynamique le modèle réduit courant. La résolution aboutit à la détermination de $\delta\boldsymbol{c}^{(k)}$, variation à imposer au paramètre de contrôle courant $\boldsymbol{c}^{(k)}$ pour déterminer la valeur du paramètre de contrôle à l'itéré suivant. A ce stade, il est alors possible de déterminer un critère de performance défini par :

$$\rho_{\mathrm{Perf}}^{(k)} = \frac{\mathcal{J}_{\mathrm{HF}}(\boldsymbol{c}^{(k)} + \delta\boldsymbol{c}^{(k)}) - \mathcal{J}_{\mathrm{HF}}(\boldsymbol{c}^{(k)})}{\mathcal{J}_{\mathrm{ROM}}(\boldsymbol{c}^{(k)} + \delta\boldsymbol{c}^{(k)}) - \mathcal{J}_{\mathrm{ROM}}(\boldsymbol{c}^{(k)})}. \tag{4.7}$$

Ce critère traduit comment se comporte le modèle réduit par rapport au modèle haute-fidélité pour prédire la variation de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$. Si le critère de performance est jugé bon alors on valide la variation $\delta\boldsymbol{c}^{(k)}$ et on augmente le rayon de confiance $\Delta^{(k)}$ à l'itéré suivant. Si la performance du modèle réduit est jugée moyenne alors on valide $\delta\boldsymbol{c}^{(k)}$ et on diminue faiblement la valeur de $\Delta^{(k)}$. Enfin, si la performance du modèle réduit est jugée mauvaise alors on rejette le pas $\delta\boldsymbol{c}^{(k)}$ et on diminue fortement la valeur de $\Delta^{(k)}$. L'algorithme d'optimisation à région de confiance correspond à l'algorithme 2.

Un algorithme à région de confiance permet de résoudre de manière précise des problèmes d'optimisation en utilisant principalement un modèle réduit. Comparé à une résolution basée sur un modèle haute-fidélité, le coût de calcul reste intéressant en raison du nombre réduit de calculs haute-fidélité nécessaires en général pour converger. Un modèle réduit suffisamment précis et robuste permettra de converger avec peu de mises à jour du modèle. Comme nous le verrons à la section 8.3.3.1, ce type d'algorithme peut également être utilisé pour résoudre des problèmes d'assimilation de données (Tissot *et al.*, 2011) à coût réduit.

Algorithme 2 : Algorithme adaptatif à « région de confiance ».

Initialisation *Convergence :=Faux* ; $k := 0$; $\boldsymbol{c}^{(k)} := \boldsymbol{c}_0$; $\Delta^{(k)} := \Delta_0 > 0$;
tant que *Convergence=Faux* **faire**
  1 : Résolution du modèle « haute-fidélité » pour $\boldsymbol{c}^{(k)}$;
  Création du modèle réduit (2.4) ;
  2 : Résolution du problème d'optimisation sous contrainte que $\|\delta \boldsymbol{c}^{(k)}\| \leq \Delta^{(k)}$;
  3 : Calcul de $\rho_{\text{Perf}}^{(k)}$;
  suivant $\rho_{Perf}^{(k)}$ **faire**
    cas où *performance bonne* ; Itéré accepté :=Vrai ; augmentation forte $\Delta^{(k)}$;
    cas où *performance moyenne* ; Itéré accepté :=Vrai ; diminution faible $\Delta^{(k)}$;
    cas où *performance mauvaise* ; Itéré accepté :=Faux ; diminution forte $\Delta^{(k)}$;
  si *Itéré accepté* **alors** $\boldsymbol{c}^{(k+1)} := \boldsymbol{c}^{(k)} + \delta \boldsymbol{c}^{(k)}$;
  sinon $\boldsymbol{c}^{(k+1)} := \boldsymbol{c}^{(k)}$; retour à **2**;
  Test de convergence ;
  $k := k + 1$;

4.5 Synthèse du chapitre et de la partie

Rendre un modèle réduit robuste à des modifications d'un paramètre de contrôle est déterminant lors de leur utilisation dans la résolution d'un problème d'optimisation ou dans un contexte de contrôle. En effet, les modèles réduits manquent souvent de robustesse lorsqu'ils sont utilisés pour des valeurs de paramètre très différentes de celle utilisée pour le déterminer. Toutefois, la robustesse peut être améliorée en ajoutant des réalisations dans l'ensemble de donnée utilisé pour calculer la base de projection, ou via l'ajout d'informations de sensibilité. Dans les deux cas, l'amélioration de la robustesse du modèle se fera alors en contrepartie d'une augmentation de son ordre. Une autre stratégie consiste à maintenir l'ordre du modèle et à mettre à jour de manière régulière la base au cours de la résolution du problème d'optimisation. Pour cela, il est possible d'utiliser des interpolations/extrapolations de bases existantes, ou de mettre en œuvre un algorithme à région de confiance.

Dans cette partie, nous avons montré que l'utilisation d'un modèle dynamique fondé sur la physique était importante afin de concevoir une stratégie de contrôle efficace. Les contraintes de détermination des modèles réduits sont très fortes car pour le contrôle on attend d'eux qu'ils soient rapides à intégrer en temps, suffisamment précis, mais aussi robustes à la variation des paramètres. Par ailleurs, nous avons vu qu'en fonction de la physique en jeu et de la stratégie de contrôle, un choix judicieux de base de projection devait être effectué car il n'est pas équivalent

de chercher à représenter la partie la plus énergétique, les instabilités du système ou la partie la plus contrôlable et observable. Afin d'améliorer la précision des modèles réduits, nous avons montré qu'un modèle de fermeture ou une étape d'identification combinant si nécessaire la connaissance d'un modèle et des réalisations devait être envisagé. Finalement, en terme de contrôle, la notion de robustesse du modèle est à la fois la plus délicate à prendre en compte mais également la plus importante. Tous ces choix font que la réduction de modèle peut être considérée comme une discipline à part entière, et que l'étape de modélisation est centrale dans une démarche de contrôle d'écoulement.

Deuxième partie

Dynamic Mode Decomposition et réduction de modèle

Chapitre 5

Dynamic Mode Decomposition

Table des matières

5.1 Opérateur de Koopman **80**

5.2 DMD et approximation des modes de Koopman **82**

5.2.1 Algorithme de la matrice Compagnon 83

5.2.2 Algorithme SVD 85

5.3 Propriétés de la DMD **86**

5.3.1 Existence et unicité 87

5.3.2 Systèmes linéaires 87

5.3.3 Solutions périodiques 88

5.3.4 Soustraction de la moyenne 89

5.4 Considérations pratiques **90**

5.4.1 Choix du jeu de données 90

5.4.2 Coefficients de la matrice Compagnon 92

5.4.3 Détermination des coefficients temporels 93

5.5 Application à des données PIV d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre **94**

5.6 Synthèse **103**

Au chapitre 2, nous avons montré que les modèles réduits construits par projection étaient liées de manière intrinsèque aux bases utilisées dans la projection de Petrov-Galerkin. Les performances en termes de précision (chapitre 3) et de robustesse à la variation des paramètres (chapitre 4) étant alors des conséquences directes de ces choix. Or, à chacune des bases discutées à la section 2.2, est associé un objectif particulier. En effet, les modes globaux représentent la croissance des instabilités de la dynamique non contrôlée du système, tandis que la Balanced Truncation permet dans une démarche de contrôle d'extraire les modes qui sont à la fois les plus observable et les plus contrôlable. En outre, ces deux approches ont un champ d'application limité à une dynamique linéarisée d'une part, et il est nécessaire de déterminer les opérateurs linéaires de dynamique d'autre part. Basée sur des réalisations de l'écoulement, la POD ne souffre pas de ces limitations, ce qui en fait l'approche la plus couramment utilisée en réduction de modèle. En revanche, la POD représente par définition la partie la plus énergétique de l'écoulement, ce qui n'est pas nécessairement toujours en lien avec la partie la plus importante d'un point de vue de la description de la dynamique. Dans cette partie, nous traiterons d'une méthode alternative, nommée « Dynamic Mode Decomposition » (DMD), qui a été récemment introduite par Schmid (2010).

Ce chapitre est consacré à la présentation détaillée de la DMD. Pour commencer (section 5.1), nous introduirons l'opérateur de Koopman dont les éléments propres peuvent être approximés via un algorithme DMD décrit à la section 5.2. A la section 5.3, nous présenterons ensuite les propriétés principales de la DMD, puis détaillerons des considérations pratiques relatives à l'application de la méthode (section 5.4). Finalement, à la section 5.5, nous appliquerons la DMD à des données expérimentales de type PIV d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre. Les chapitres 6 et 7 traiteront de l'utilisation de la DMD dans une démarche de réduction de modèle.

5.1 Opérateur de Koopman

L'intérêt des méthodes basées uniquement sur des réalisations de l'écoulement est de ne pas présupposer que la dynamique sous-jacente soit linéaire, permettant ainsi de les appliquer à tout type de dynamique et de configuration. Dans ce cadre, la DMD a pour objectif de caractériser la dynamique du système via la détermination des éléments propres de l'*opérateur de Koopman* (Koopman, 1931; Mezić, 2013), opérateur linéaire de dimension infinie caractéristique de la dynamique.

Afin de définir l'opérateur de Koopman, considérons[1] le système dynamique non-linéaire $\boldsymbol{f} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ donné par :

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) \tag{5.1}$$

où $\boldsymbol{x}_k$ est l'état du système au temps t_k, et où $\mathcal{M}$ est l'espace d'état. Introduisons également $g : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ observable à valeur scalaire.

L'opérateur de Koopman $U_{\boldsymbol{f}}$ est un opérateur linéaire de dimension infinie qui associe à une observable g quelconque, une nouvelle observable $U_{\boldsymbol{f}} g$ représentant g à l'itéré suivant engendré par $\boldsymbol{f}$. Par définition, nous avons :

$$U_{\boldsymbol{f}} g(\boldsymbol{x}_k) = g(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)) = g \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = g(\boldsymbol{x}_{k+1}). \tag{5.2}$$

L'opérateur de Koopman est donc associé à $\boldsymbol{f}$, c'est à dire à la dynamique du système, et non à g, ce qui fait que l'observable peut être quelconque. Par ailleurs, l'opérateur est linéaire c'est-à-dire que pour deux observables g_1 et g_2, ainsi que deux réels α_1 et α_2, nous pouvons montrer que $U_{\boldsymbol{f}}(\alpha_1 g_1(\boldsymbol{x}_k) + \alpha_2 g_2(\boldsymbol{x}_k)) = \alpha_1 U_{\boldsymbol{f}} g_1(\boldsymbol{x}_k) + \alpha_2 U_{\boldsymbol{f}} g_2(\boldsymbol{x}_k)$. L'opérateur de Koopman associé à $\boldsymbol{f}$ est également appelé opérateur de composition. Bien que le système dynamique $\boldsymbol{f}$ soit non-linéaire et défini dans un espace $\mathcal{M}$ de dimension fini, l'opérateur de Koopman $U_{\boldsymbol{f}}$ est linéaire et de dimension infinie.

Les fonctions propres[2] ϕ_j et valeurs propres λ_j de l'opérateur de Koopman sont définies de la manière suivante :

$$U_{\boldsymbol{f}}\, \phi_j(\boldsymbol{x}_k) = \lambda_j \phi_j(\boldsymbol{x}_k). \tag{5.3}$$

Dans le cas de l'étude de la dynamique d'un écoulement, nous sommes intéressés par étendre le formalisme précédent à une observable vectorielle $\boldsymbol{g} : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^p$. En supposant[3] que les fonctions propres de $U_{\boldsymbol{f}}$ engendrent $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k)$ alors nous pouvons écrire que :

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_j(\boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{k}_j. \tag{5.4}$$

Les vecteurs $\boldsymbol{k}_j$ sont appelés *modes de Koopman* associés à la valeur propre λ_j et à l'observable $\boldsymbol{g}$. Les modes de Koopman, ainsi que les valeurs propres λ_j correspondantes, permettront

[1] Dans cette description, nous avons retenu la version discrétisée en temps car elle est plus en correspondance avec l'analyse de réalisations d'écoulements. Une version équivalente en temps continu peut être développée en considérant le système $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_c(\boldsymbol{x})$.

[2] Notons que les fonctions propres ϕ_j sont bien des observables particulières associées à $\boldsymbol{f}$.

[3] Si ce n'est pas le cas, nous pouvons décomposer $U_{\boldsymbol{f}}$ en une partie régulière et une partie singulière comme dans Mezić (2005).

de caractériser la dynamique non-linéaire du système. En utilisant la définition (5.2) de l'opérateur de Koopman, une propriété de récursivité apparait :

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k) = \sum_{j=1}^{+\infty} \phi_j(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{k}_j = \sum_{j=1}^{+\infty} U_{\boldsymbol{f}}^{k-1}\phi_j(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{k}_j = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^{k-1}\phi_j(\boldsymbol{x}_1)\boldsymbol{k}_j. \tag{5.5}$$

L'observable vectorielle $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_k)$ est projetée sur les fonctions propres de l'opérateur de Koopman, indiquant via les modes de Koopman $\boldsymbol{k}_j$, la contribution de chaque composante de la dynamique linéaire sur l'observable, ainsi que la structure spatiale associée. Cette expression met en évidence le fonctionnement de l'opérateur de Koopman. Si ses éléments propres sont connus, nous pouvons alors écrire une observable vectorielle quelconque comme une combinaison linéaire de fonctions propres évalués dans l'état initial de la dynamique décrit par l'opérateur $\boldsymbol{f}$. La non linéarité éventuelle de $\boldsymbol{f}$ est alors prise en compte par un développement infini de termes.

A part dans des cas spécifiques construits de manière *ad-hoc* (Bagheri, 2013), les modes de Koopman ne sont pas connus. Nous allons donc chercher, grâce à la DMD, à les approximer connaissant des réalisations, prises comme observables vectorielles.

5.2 DMD et approximation des modes de Koopman

L'objectif de la section est de montrer que l'on peut approximer les modes de Koopman $\boldsymbol{k}_j$ (voir section 5.1) connaissant uniquement un ensemble de réalisations prises comme observables.

On suppose que les données sont représentées sous la forme d'une séquence de réalisations, contenues dans une matrice V_1^N définie par

$$V_1^N = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_N) \in \mathbb{R}^{N_x \times N} \tag{5.6}$$

où $\boldsymbol{v}_j$ est la j-ème réalisation. Dans (5.6), l'indice 1 et l'exposant N indiquent respectivement le premier et le dernier élément de la séquence. De plus, dans le formalisme DMD, on suppose que les réalisations sont séparées temporellement par un pas de temps constant[4] Δt.

L'algorithme DMD est fondé sur deux hypothèses. La première est qu'il existe un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ qui permet l'avancement en temps d'une réalisation à l'autre. Puisque V_1^N est de

[4]Cette contrainte peut être relâchée en modifiant légèrement le formalisme (Guéniat *et al.*, 2013; Tu *et al.*, 2013a).

dimension finie, cet opérateur s'écrit sous la forme d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ tel que

$$\boldsymbol{v}_{j+1} = A\boldsymbol{v}_j, \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots, N-1. \tag{5.7}$$

Par conséquent, le sous-espace engendré par les données

$$V_1^N = \left(\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_1, \cdots, A^{N-1}\boldsymbol{v}_1\right) \tag{5.8}$$

correspond au N-ième sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_N(A, \boldsymbol{v}_1)$ généré par A à partir de $\boldsymbol{v}_1$ (Ipsen et Meyer, 1998).

Le but de l'algorithme DMD est de déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A, mais sans déterminer A. La DMD peut ainsi être interprétée comme une extension de l'algorithme classique d'Arnoldi utilisé pour calculer les éléments propres d'un problème de grande dimension (Bagheri, 2010). Dans l'algorithme d'Arnoldi, la connaissance de A est nécessaire pour déterminer une base orthonormale du sous-espace de projection de la procédure de Rayleigh-Ritz. Dans l'algorithme DMD, la base du sous-espace de projection est déterminée en considérant que seules les réalisations obtenues par avancement en temps sont disponibles. La matrice A n'est plus nécessaire mais la contrepartie est un mauvais conditionnement de la procédure (voir section 5.4.1).

Puisque nous sommes en particulier intéressés par les valeurs propres de A, le problème revient à chercher le spectre d'une matrice similaire à la projection de Galerkin de A sur $\mathcal{K}_N(A, \boldsymbol{v}_1)$. La méthode d'approximation des éléments propres de A n'est donc pas unique. Par la suite, deux méthodes sont présentées. La première, qui est principalement utilisée en pratique dans ce manuscrit, utilise une matrice Compagnon pour avoir accès aux éléments propres de A (voir section 5.2.1). La seconde utilise une régularisation SVD afin d'avoir un problème mieux conditionné (voir section 5.2.2). Cette dernière méthode sera utilisée à la section 6.4 pour une application particulière de la DMD.

5.2.1 Algorithme de la matrice Compagnon

Lorsque le nombre de réalisations de la séquence V_1^N augmente, il est raisonnable de supposer qu'à partir d'un certain nombre de réalisations, le système est passé par suffisamment d'états pour que les $\boldsymbol{v}_j$ deviennent linéairement dépendants. La seconde hypothèse est donc de considérer que le N-ième itéré s'écrit comme combinaison linéaire des précédents c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{v}_N = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_{N-1}\boldsymbol{v}_{N-1} + \boldsymbol{r} = V_1^{N-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{r} \tag{5.9}$$

où $\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}}^T = (c_1, c_2, \cdots, c_{N-1})^T$ et $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{N_x}$ est le vecteur résidu. D'après Ruhe (1984), nous pouvons écrire :

$$AV_1^{N-1} = V_2^N = V_1^{N-1}C_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_{N-1}^T \tag{5.10}$$

où $\boldsymbol{e}_j$ est le j-ème vecteur unitaire Euclidien de taille $(N-1)$ et C_{C} une matrice Compagnon définie par :

$$C_{\mathrm{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \tag{5.11}$$

La matrice Compagnon est uniquement définie par les coefficients c_j. Les éléments propres de C_{C} sont donc aussi uniquement dépendants de c_j. En effet, dès que ces coefficients sont connus, le polynôme caractéristique de la transposée de C_{C} peut être calculé :

$$P_{C_{\mathrm{C}}^T}(\lambda) = \lambda^{N-1} - \sum_{j=1}^{N-1} c_j \lambda^{j-1}. \tag{5.12}$$

Or, les valeurs propres d'une matrice et celles de sa transposée étant identiques, nous pourrons donc en déduire les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice Compagnon C_{C}. Nous verrons à la section 5.4.2 les différentes manières d'évaluer ces coefficients.

Soit $(\boldsymbol{y}_j, \lambda_j)$ les j-èmes éléments propres de C_{C}, il peut être aisément prouvé (voir Annexe B.1) que $\left(\boldsymbol{\Phi}_j = V_1^{N-1}\boldsymbol{y}_j, \lambda_j\right)$ sont approximativement les éléments propres de A, appelés vecteurs propres et valeurs propres de Ritz. La valeur du résidu $\boldsymbol{r}$ est une bonne mesure de l'approximation, c'est-à-dire du succès de l'algorithme DMD. Nous verrons à la section 5.3.2 que les valeurs propres de Ritz peuvent être utilisées pour déterminer la fréquence et le taux de croissance du processus linéaire.

Quelques remarques sont à présent appropriées. Il n'y a pas d'étape de normalisation dans l'algorithme. Les vecteurs propres de Ritz sont donc connus à une constante multiplicative près. Nous verrons au prochain paragraphe que ce facteur d'échelle sera déterminé en exploitant des propriétés de la matrice Compagnon. De plus, contrairement aux modes POD, les vecteurs propres de Ritz ne sont pas orthonormaux. La détermination des coefficients temporels $\nu_{j,k}$ demandera donc un effort supplémentaire. Différentes stratégies envisageables seront présentées dans la section 5.4.3.

5.2.1.1 Éléments propres de la matrice Compagnon

Sous réserve que les valeurs propres $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$ de la matrice Compagnon soient distinctes deux à deux, il peut être démontré (Rowley *et al.*, 2009) que C_{C} est diagonalisable, soit $C_{\mathrm{C}} = T^{-1}\Lambda T$ où T est la matrice de Vandermonde définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-2} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_{N-1} & \lambda_{N-1}^2 & \cdots & \lambda_{N-1}^{N-2} \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

et $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \cdots, \lambda_{N-1})$. Les vecteurs propres de C_{C} sont donc connus analytiquement uniquement à partir des valeurs propres λ_j. La matrice $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{N-1})$ des vecteurs propres de Ritz est donnée par

$$\widetilde{\Phi} = V_1^{N-1} T^{-1} \in \mathbb{R}^{N_x \times (N-1)}. \tag{5.14}$$

Puisque T est inversible, (5.14) s'écrit $V_1^{N-1} = \widetilde{\Phi} T$ ou alors

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j \quad k = 1, \cdots, N-1. \tag{5.15}$$

De plus, on peut déduire de $V_2^N = V_1^{N-1} C_{\mathrm{C}} + \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_{N-1}^T$ que

$$\boldsymbol{v}_N = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j^{N-1} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j + \boldsymbol{r} \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{r} \perp \mathrm{vect}\,(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{N-1})\,. \tag{5.16}$$

Dans l'algorithme DMD, les vecteurs propres $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j$ sont appelés modes DMD et les valeurs propres λ_j, valeurs propres DMD.

5.2.2 Algorithme SVD

La relation (5.10) traduit le fait que l'opérateur linéaire A permet d'avancer en temps chaque réalisation de manière exacte, à l'exception de la dernière réalisation pour laquelle il existe un résidu. Le rôle de la dernière réalisation n'est donc pas le même que celui des précédentes. Le résultat de la DMD est par conséquent sensible à un bruit ou à des incertitudes sur la dernière réalisation. Une variante proposée par Schmid (2010) consiste à effectuer une régularisation par SVD des données. Dans ce cas, le résidu du processus linéaire est distribué sur toutes les

réalisations et pas uniquement sur la dernière. Le problème initial revient alors à chercher une matrice pleine $\widetilde{C}_{\mathrm{C}}$ telle que :

$$AV_1^{N-1} = V_2^N = V_1^{N-1}\widetilde{C}_{\mathrm{C}} + \widetilde{R} \tag{5.17}$$

de sorte que la norme de Frobenius $\|\widetilde{R}\|_F$ soit petite. Insistons sur le fait que cette approche implique que les réalisations reconstruites par DMD diffèrent alors des réalisations de la base de données.

En réalisant une décomposition SVD de $V_1^{N-1} = U\Sigma W^*$, on obtient :

$$AV_1^{N-1} = AU\Sigma W^* = V_2^N. \tag{5.18}$$

Le problème (5.17) est alors reformulé en définissant $\widetilde{S}$, matrice similaire à $\widetilde{C}_{\mathrm{C}}$, par :

$$\widetilde{S} = U^* V_2^N W \Sigma^{\mathrm{MP}} \approx U^* AU, \tag{5.19}$$

où Σ^{MP} est la matrice pseudo inverse de Moore-Penrose de Σ.

En cas de troncature SVD, cette dernière expression permet de travailler avec une matrice $\widetilde{S}$ de faible dimension, contrairement à la dimension de $\widetilde{C}_{\mathrm{C}}$ fixée à N. $\widetilde{S}$ et les modes DMD sont reliés de manière similaire au cas de l'algorithme classique DMD (voir démontration à l'Annexe B.2), soit :

Si $(\boldsymbol{y}_j^{SVD}, \lambda_j^{SVD})$ *sont les éléments propres de* $\widetilde{S}$*, alors* $(\boldsymbol{\Phi}_j^{SVD} = U\boldsymbol{y}_j^{SVD}, \lambda_j^{SVD})$ *sont une approximation des éléments propres de* A*.*

Cet algorithme présente l'avantage d'être plus robuste à du bruit ou à des incertitudes sur les données car le résidu est réparti sur l'ensemble des réalisations. De plus, l'utilisation de la pseudo-inverse de Σ permet d'éviter d'éventuels problèmes de mauvais conditionnement dû à des réalisations pouvant s'écrire comme combinaison linéaire d'autres. Enfin, avec cet algorithme, nous pouvons également considérer le cas où $N > N_x$ qui est par définition mal conditionné.

5.3 Propriétés de la DMD

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés de la DMD. Nous commençons par rappeler des résultats d'existence et d'unicité de la DMD (section 5.3.1). Dans la section 5.3.2, nous considérons le cas du système linéaire et montrons comment les valeurs propres de Ritz

peuvent être utilisées pour évaluer la fréquence et le taux de croissance des modes DMD. Dans la section 5.3.3, nous discutons du cas des données périodiques. Pour terminer, puisqu'il est courant dans de nombreuses applications de soustraire la moyenne des réalisations avant de déterminer les modes de l'écoulement, nous discutons de ce cas à la section 5.3.4.

5.3.1 Existence et unicité

L'algorithme DMD présenté à la section 5.2.1.1 montre par construction que pour un jeu de données $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^{N}$, il existe $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$ et $\{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j\}_{j=1}^{N-1}$ tels que (5.15) et (5.16) soient satisfaites, sous réserve que $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$ soient distincts. En termes d'analyse de Koopman, λ_j et $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j$ sont respectivement les valeurs propres et modes de Koopman du processus dynamique pour l'observable $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^{N-1}$.

En ce qui concerne le résultat d'unicité, Chen *et al.* (2012) ont récemment prouvé pour l'algorithme de la matrice Compagnon, que $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$ et $\{\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j\}_{j=1}^{N-1}$ dans (5.15) et (5.16) sont uniques à un ré-ordonnancement près sur l'indice j si et seulement si $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont linéairement indépendants et donc si $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont distincts.

5.3.2 Systèmes linéaires

Si le système dynamique est linéaire, les valeurs propres des modes de Koopman correspondent au spectre de l'opérateur linéaire discret en temps. L'écriture sous forme séparée de l'état du système de manière discrète en temps pour un instant quelconque $k = 1, \cdots, N-1$ pour les vecteurs propres de Ritz donne :

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N-1} \boldsymbol{\Phi}_j \nu_{j,k}. \tag{5.20}$$

En utilisant l'hypothèse (5.7), il peut être immédiatement montré que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{k+1} &= A\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N-1} A\boldsymbol{\Phi}_j \nu_{j,k} = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j \boldsymbol{\Phi}_j \nu_{j,k} \\ &= A^k \boldsymbol{v}_1 = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j^k \boldsymbol{\Phi}_j \nu_{j,1}. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Les valeurs propres DMD $\{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$ imposent donc le taux de croissance et la fréquence de chaque mode DMD. Pour faire le lien avec les modes de stabilité linéaire, on est intéressé dans ce problème par les valeurs propres de la matrice continue en temps associée à la matrice en temps discret A de l'application linéaire. Il peut être montré (Bagheri, 2010) que le taux de

croissance σ_j et la pulsation ω_j associés sont donnés par :

$$\sigma_j = \ln\left(|\lambda_j|\right)/\Delta t \quad \text{et} \quad \omega_j = \arg\left(\lambda_j\right)/\Delta t. \tag{5.22}$$

On peut déduire de cette discussion l'élément le plus marquant entre la POD et la DMD, qui est qu'un mode DMD donné contient uniquement une fréquence tandis qu'un mode POD contient en général un spectre continu. Une dernière remarque est qu'on peut voir qu'à partir des vecteurs propres et valeurs propres de Ritz, (5.21) peut être utilisé pour reconstruire les réalisations originales dès que $\nu_{j,1}$ est connu. Cette expression sera utilisée à la section 5.5 pour reconstruire les données. Finalement, en comparant (5.21) avec (5.15), on peut en conclure que $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j = \boldsymbol{\Phi}_j \nu_{j,1}$. $\nu_{j,1}$ est donc le facteur d'échelle qui lie les vecteurs propres de la matrice Compagnon C_{C} aux vecteurs propres de Ritz obtenus par l'algorithme DMD présenté dans la section 5.2.

5.3.3 Solutions périodiques

Supposons à présent que le jeu de réalisations V_1^{N-1} constitue une solution périodique du système dynamique, tel que $\boldsymbol{v}_{k+N-1} = \boldsymbol{v}_k$ pour tout k. En particulier, on a $\boldsymbol{v}_N = \boldsymbol{v}_1$, ce qui suggère que les coefficients de la matrice Compagnon C_{C} sont égaux à $c_1 = 1$ et $c_j = 0$ pour $j = 2, \cdots, N-1$.

A partir de (5.12), on en déduit directement que

$$P_{C_{\mathrm{C}}^T}(\lambda) = \lambda^{N-1} - 1.$$

Les valeurs propres de Ritz sont donc les $(N-1)$-ièmes racines de l'unité, c'est-à-dire

$$\lambda_j = \exp\left(2\imath\pi \frac{j-1}{N-1}\right) \quad \text{avec} \quad j = 1, \cdots, N-1. \tag{5.23}$$

Ces valeurs sont indépendantes des données. Elles peuvent être déterminées dès que N est connu. En injectant ce résultat dans (5.15) et (5.16), on obtient :

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N-1} \exp\left(2\imath\pi \frac{(j-1)(k-1)}{N-1}\right) \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j \quad \text{pour} \quad k = 1, \cdots, N. \tag{5.24}$$

Cette relation montre que pour les solutions périodiques, les modes DMD $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j$ correspondent à la transformée de Fourier discrète des données. Les taux de croissance des modes DMD sont donc nuls et les fréquences équiréparties. Dans ce cas, la matrice de Vandermonde (5.13) est

exactement la matrice de la transformée de Fourier discrète (DFT). Ici, la démonstration est basée sur l'algorithme de la matrice Compagnon. Notons qu'elle peut être effectuée directement à partir des modes de Koopman (Rowley *et al.*, 2009).

5.3.4 Soustraction de la moyenne

Comme cela est classiquement fait en POD, on considère le cas où la DMD est appliquée à des données dont on a retranché la moyenne. Pour définir cette moyenne, deux possibilités existent. La première consiste à définir la moyenne d'ensemble des $N-1$ premières réalisations contenues dans V_1^N. Ce choix mène vers une matrice singulière (Chen *et al.*, 2012) et par conséquent (section 5.3.1) à une décomposition DMD non unique. Le bon choix est de définir la moyenne des données comme $\langle \boldsymbol{v} \rangle_N = \dfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{v}_j$.

A ce niveau, un nouveau jeu de données $V'^N_1 = (\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_N)$ est introduit où $\boldsymbol{v}'_j = \boldsymbol{v}_j - \langle \boldsymbol{v} \rangle_N$ pour $j = 1, \cdots, N$. Il peut être facilement montré que si la matrice V_1^N est inversible, il en est de même pour V'^N_1. Sous réserve que les valeurs propres de Ritz soient distinctes deux à deux, les résultats de la section (5.3.1) montrent que la décomposition DMD existe et est unique.

Par définition de la moyenne, on a $\boldsymbol{v}'_N = -\sum_{j=1}^{N-1} \boldsymbol{v}'_j$. Cette relation montre que pour l'algorithme de la matrice Compagnon, les coefficients de la matrice C_{C} sont $c_j = -1$ pour $j = 1, \cdots, N-1$.

A partir de (5.12), le polynôme caractéristique associé à C_{C}^T est maintenant déterminé par :

$$P_{C_{\mathrm{C}}^T}(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda^j = \frac{1-\lambda^N}{1-\lambda}. \tag{5.25}$$

Dans ce cas, les valeurs propres de Ritz sont les N-ièmes racines de l'unité, excepté 1, c'est-à-dire :

$$\lambda_j = \exp\left(\imath 2\pi \frac{j}{N}\right) \quad \text{avec} \quad j = 1, \cdots, N-1. \tag{5.26}$$

En suivant le même raisonnement qu'à la section (5.3.3), on en conclut que la DMD est exactement équivalente à la transformée de Fourier discrète des données (Chen *et al.*, 2012). Contrairement aux données périodiques, cette relation est un effet de l'algorithme de la matrice Compagnon et ne semble pas à notre connaissance être imposée pour l'algorithme SVD ou démontrée sur les modes de Koopman.

5.4 Considérations pratiques

Dans cette section, seront abordés des considérations pratiques nécessaires à l'application de la version matrice Compagnon de l'algorithme DMD (voir section 5.2.1). Puisque la DMD est une méthode d'analyse s'appuyant sur des données, les caractéristiques du jeu de données utilisé (valeur du pas de temps, nombre d'échantillons) sont déterminantes. Ces points seront abordés à la section 5.4.1. Une fois que le jeu de données est choisi, l'ingrédient suivant est la méthode numérique utilisée pour déterminer les coefficients de la matrice Compagnon C_{C}. Différentes approches seront présentées dans la section 5.4.2. Finalement, une fois les modes DMD connus, on voudrait reconstruire la dynamique temporelle originale. Pour cela, nous avons besoin de déterminer les coefficients temporels $\nu_{j,k}$ associés au mode j à l'instant t_k. Différentes méthodes de projection obliques seront discutées dans la section 5.4.3.

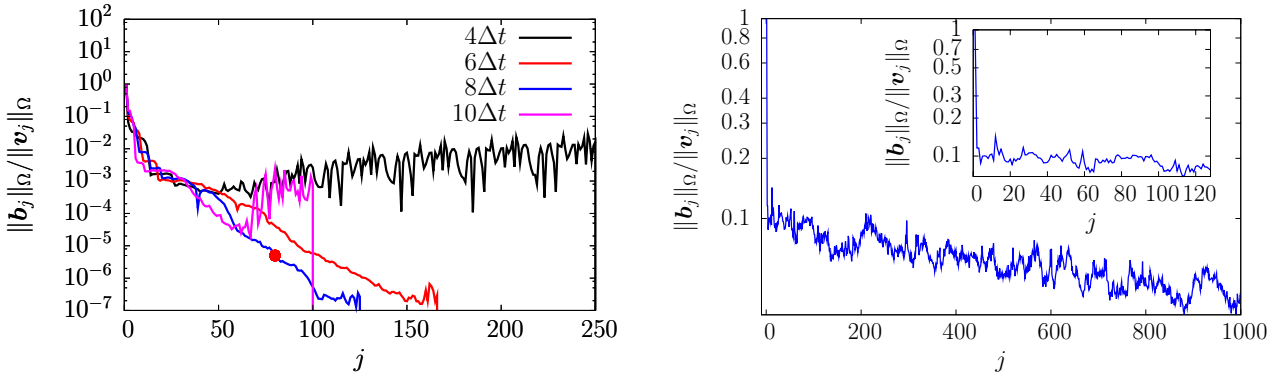
5.4.1 Choix du jeu de données

Dans le formalisme original introduit par Schmid (2010), la DMD extrait des modes dynamiques qui peuvent être interprétés comme une généralisation des modes globaux de stabilité lorsque l'écoulement est linéarisé et comme une approximation linéaire de la dynamique pour des écoulements non linéaires. Quel que soit le régime d'écoulement considéré, un paramètre important est donc la valeur du pas de temps constant Δt entre deux réalisations successives. Naturellement, pour que la DMD extraie une dynamique pertinente, l'écoulement doit être échantillonné à une fréquence suffisamment élevée. Cependant, si cette fréquence est trop importante, les réalisations auront alors tendance à être corrélées en temps et les modes DMD ne seront plus uniques d'après les résultats de la section 5.3.1. L'interprétation des valeurs et vecteurs propres de Ritz en terme de stabilité globale est donc sujette à une bonne connaissance *a priori* des processus physiques étudiés pour choisir correctement la valeur de Δt.

Le choix du nombre N de réalisations contenus dans V_1^N est aussi sujet à discussions. En effet, pour que la DMD soit unique, les $N-1$ premières réalisations doivent être linéairement indépendantes (section 5.3.1) et la N-ième réalisation devrait être écrite comme combinaison linéaire des précédentes (hypothèse décrite par (5.9)). Cependant, pour la plupart des données physiques, la fin de la dépendance linéaire n'est pas soudaine. Une manière de vérifier la dépendance linéaire des réalisations est d'effectuer une procédure de Gram-Schmidt. A un itéré intermédiaire, le résidu de la procédure de Gram-Schmidt est donné par :

$$\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{v}_j - \sum_{l=1}^{j-1} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{b}_l)_\Omega \, \boldsymbol{b}_l \quad \text{pour} \quad j = 1, \cdots, N. \tag{5.27}$$

L'évolution avec j du rapport $\|\boldsymbol{b}_j\|_\Omega/\|\boldsymbol{v}_j\|_\Omega$ donne une bonne indication de la perte d'indépendance linéaire lorsqu'une nouvelle réalisation est ajoutée au jeu de données. La figure 5.1(a) correspond à la décroissance du résidu en fonction de l'indice de la réalisation ajoutée pour des données numériques d'un écoulement autour d'un cylindre à $Re = 200$ en régime permanent utilisées au chapitre 6. La figure 5.1(b) représente la même décroissance pour des données expérimentales utilisées dans la section 5.5.



(a) Données numériques $Re = 200$.

(b) Données PIV d'un cylindre en régime turbulent.

Figure 5.1 – Évolution de la norme du résidu de la procédure de Gram-Schmidt avec l'indice de la réalisation.

Dans le cas des données numériques, nous avons choisi de tester l'influence de la valeur du pas de temps entre réalisations, en considérant une réalisation sur 4, sur 6, sur 8 et sur 10, respectivement. On observe qu'un pas de temps trop faible ($4\Delta t$, représenté en noir) mène rapidement à une réaugmentation du résidu, signe de mauvais conditionnement de la matrice des données lié à des réalisations trop colinéaires. On trouve également que $8\Delta t$ (en bleu) semble un pas de temps optimal pour lequel la décroissance du résidu est la plus rapide. Ce choix correspond à minimiser la redondance des réalisations tout en maintenant une bonne représentativité. L'expérience montre que lorsque la valeur du résidu est inférieure à 10^{-5}, les modes adjoints (voir section 5.4.3.2) commencent à ne plus être bi-orthogonaux avec les modes directs, ce qui traduit également un mauvais conditionnement du système. Par conséquent, on choisira un nombre de réalisations égal à 81, symbolisé par le point rouge sur la figure 5.1(a).

Dans le cas de données expérimentales, la décroissance de $\|\boldsymbol{b}_j\|_\Omega/\|\boldsymbol{v}_j\|_\Omega$ est plutôt lente, ce qui indique que le choix du nombre de réalisations pour effectuer la DMD n'est pas évident. Par conséquent, la convergence de l'algorithme DMD ne sera pas assuré et les modes DMD pourront ne pas être physiquement pertinents. Une manière de vérifier la procédure DMD, est de déterminer *a posteriori* la valeur du résidu $\boldsymbol{r}$ défini en (5.9).

Pour terminer, notons que l'algorithme SVD peut contribuer à corriger ces problèmes de mauvais conditionnement par régularisation. Dans ce cas, la quantification du résidu peut également donner une idée de la qualité du résultat.

5.4.2 Coefficients de la matrice Compagnon

Jusqu'ici, l'algorithme DMD a été décrit (section 5.2), mais en omettant de décrire la manière de trouver les coefficients c_j de la matrice Compagnon C_{C}. L'objectif de cette section est de présenter différentes méthodes qui peuvent être considérées. Par définition (voir (5.9)), les coefficients c_j sont solutions du problème de minimisation suivant :

$$\min_{c_j} \|\boldsymbol{r}\|_\Omega^2 = \min_{c_j} \|V_1^{N-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{v}_N\|_\Omega^2. \tag{5.28}$$

Il est important de noter que la norme $\|\boldsymbol{r}\|_\Omega$ définie en (5.28) peut être choisie de telle sorte à représenter une énergie, exactement comme en POD (voir section 2.2.3). Cette norme est associée à un produit scalaire que l'on va évaluer de manière discrète $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})_\Omega = \boldsymbol{a}^T M_p \boldsymbol{b}$.

Pour déterminer $\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}}$, il est possible en pratique :

1. d'effectuer[5] une factorisation QR de V_1^{N-1}, on a donc

$$\boldsymbol{v}_N = V_1^{N-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} = QR\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} = R^{-1}Q^*\boldsymbol{v}_N,$$

   Q^* étant la matrice transposée-conjuguée de Q ;

2. d'effectuer une décomposition SVD[6] de $L_p^T V_1^{N-1}$ où L_p tel que $M_p = L_p L_p^T$ est la factorisation de Cholesky[7] de M_p, soit

$$L_p^T \boldsymbol{v}_N = L_p^T V_1^{N-1}\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} = U\Sigma W^*\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} \quad \text{d'où} \quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} = W\Sigma^{-1}U^* L_p^T \boldsymbol{v}_N;$$

[5] Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\Omega$ apparait naturellement dans l'algorithme de factorisation QR car cette factorisation utilise une procédure de Gram-Schmidt qui peut être implémentée comme dans (5.27).

[6] Cette approche est en lien direct avec l'algorithme SVD (section 5.2.2) pour $M_p = \mathbb{I}$, où une décomposition SVD est également appliquée sur V_1^{N-1}. En revanche, dans l'algorithme SVD, toutes les données V_2^N sont utilisées (on a montré que $\widetilde{C}_{\mathrm{C}} = W\Sigma^{\mathrm{MP}}U^*V_2^N$) alors qu'ici seul $\boldsymbol{v}_N$ est conservé.

[7] L_p est triangulaire inférieure et M_p doit être définie positive, ce qui est le cas pour un produit scalaire hermitien.

3. de prendre le produit scalaire de (5.9) avec $\boldsymbol{v}_j$ pour $j = 1, \cdots, N-1$. On obtient

$$(\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_j)_\Omega = \sum_{j=1}^{N-1} (\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_j)_\Omega \, c_j.$$

En introduisant la matrice de corrélation $K \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1}$ telle que $K_{ij} = (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j)_\Omega$ et $\boldsymbol{w} = ((\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_1)_\Omega, \cdots, (\boldsymbol{v}_N, \boldsymbol{v}_{N-1})_\Omega)^T$, on aboutit au système linéaire suivant :

$$\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}} = K^{-1}\boldsymbol{w}. \tag{5.29}$$

Ces trois méthodes nécessitent une inversion matricielle qui ne peut être réalisée avec succès que si les réalisations $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1}^{N-1}$ sont linéairement indépendantes. On retrouve donc ici le résultat d'unicité présenté dans la section 5.3.1.

5.4.3 Détermination des coefficients temporels

Les équations (5.20) et (5.21) peuvent être utilisées pour reconstruire la dynamique temporelle des réalisations originales à partir des valeurs et vecteurs propres de Ritz. Cependant, les coefficients temporels $\nu_{j,k}$ doivent d'abord être connus à tous les instants $k = 1, \cdots, N$ ou au moins au premier instant $k = 1$. En effet, par identification de (5.20) et (5.21), il peut être déduit immédiatement que :

$$\nu_{j,k+1} = \lambda_j^k \nu_{j,1}, \quad \text{pour} \quad k = 1, \cdots, N-1. \tag{5.30}$$

Puisque les fonctions propres de Ritz ne sont pas orthonormales, deux méthodes de projection sont ici proposées pour déterminer $\nu_{j,k}$.

5.4.3.1 Matrice de Gram

Une première idée est d'effectuer une projection orthogonale et d'utiliser la matrice de Gram G de $\Phi = (\boldsymbol{\Phi}_1, \cdots, \boldsymbol{\Phi}_{N-1})$ dont les éléments sont donnés par $G_{ij} = (\boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j)_\Omega$. En effectuant le produit scalaire de (5.20) avec $\boldsymbol{\Phi}_j$, $j = 1, \cdots, N-1$, on obtient le système linéaire d'équations $G\,\boldsymbol{\nu}_k = \boldsymbol{z}_k$ pour $k = 1, \cdots, N$ où $\boldsymbol{\nu}_k = (\nu_{1,k}, \cdots, \nu_{N-1,k})^T$ et $\boldsymbol{z}_k = ((\boldsymbol{\Phi}_1, \boldsymbol{v}_k)_\Omega, \cdots, (\boldsymbol{\Phi}_{N-1}, \boldsymbol{v}_k)_\Omega)^T$. Cette relation peut être écrite dans le cas du produit scalaire canonique de la manière suivante :

$$\nu = G^{-1}\Phi^* V_1^N, \tag{5.31}$$

où ν est la matrice qui contient les vecteurs $\boldsymbol{\nu}_k$. Pour utiliser (5.31), la matrice G doit être bien conditionnée. Si une implémentation performante n'est pas réalisée alors cette méthode peut être limitée par l'occupation mémoire pour des problèmes de grande taille.

5.4.3.2 Base adjointe

Une autre solution est de rechercher des modes adjoints $\boldsymbol{\Psi}_i$ de $\boldsymbol{\Phi}_j$. En effet, si les modes adjoints sont connus, alors la détermination des coefficients $\nu_{i,k}$ est directe :

$$\nu_{i,k} = \sum_{j=1}^{N-1} \underbrace{(\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{\Phi}_j)_\Omega}_{\delta_{ij}} \nu_{i,k} = (\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{v}_k)_\Omega \,. \tag{5.32}$$

Par définition, $\boldsymbol{\Psi}_i$ est solution du problème aux valeurs propres adjoint :

$$A^* \boldsymbol{\Psi}_i = \bar{\lambda}_i \boldsymbol{\Psi}_i. \tag{5.33}$$

Il peut alors être démontré (voir Annexe B.4) que $(\boldsymbol{z}_i = (V_1^{N-1})^* \boldsymbol{\Psi}_i, \bar{\lambda}_i)$ sont approximativement les éléments propres de C_{C}^*. Puisque V_1^{N-1} est en général une matrice rectangulaire, on peut utiliser une décomposition SVD[8] de V_1^{N-1} (pseudo-inverse de Moore-Penrose) pour trouver que :

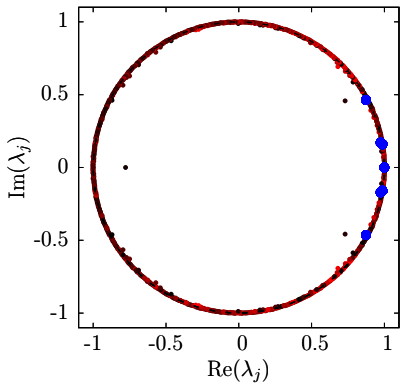
$$\boldsymbol{\Psi}_i = U \Sigma^{-1} W^* \boldsymbol{z}_i.$$

5.5 Application à des données PIV d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre

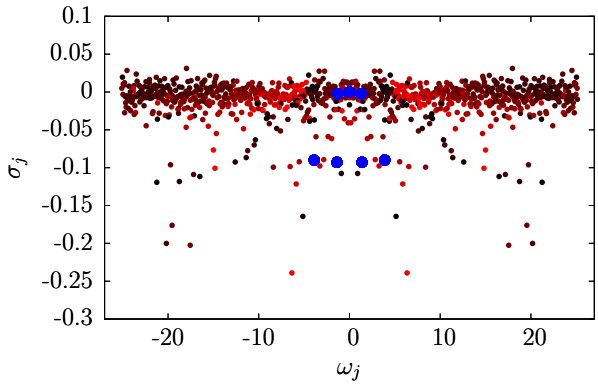
L'algorithme DMD basé sur la matrice Compagnon a été appliqué sur des données obtenues par mesures PIV 2D-2C d'un sillage turbulent de cylindre (Benard *et al.*, 2010) correspondant à un écoulement en régime sous-critique ($Re = DU_\infty/\nu_{\mathrm{Kin}} = 13000$ où $D = 40\,\mathrm{mm}$ est le diamètre du cylindre et $U_\infty = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ est la vitesse amont de l'écoulement). La base de données contient $N_{\mathrm{Snap}} = 1001$ réalisations échantillonnées à une fréquence égale à $f_{\mathrm{Snap}} = 1\,\mathrm{kHz}$, ce qui correspond à un horizon temporel $T = 125$ en temps adimensionné par U et D, soit approximativement à 25 périodes de lâcher tourbillonnaire. D'après la discussion de la section 5.4.1, la DMD est appliquée sur l'ensemble des réalisations (voir figure 5.1) sans soustraction

[8] Si le produit scalaire canonique n'est pas utilisé alors une autre méthode détaillée à la section 5.4.2 peut être employée.

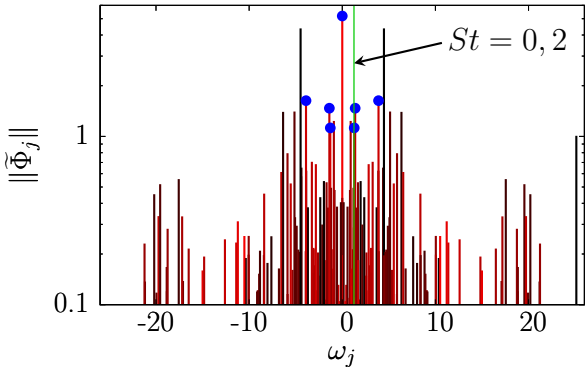
de la moyenne. Ici, les coefficients $\boldsymbol{c}_{\mathrm{C}}$ ont été calculés en utilisant (5.29) en inversant la matrice de corrélation K.



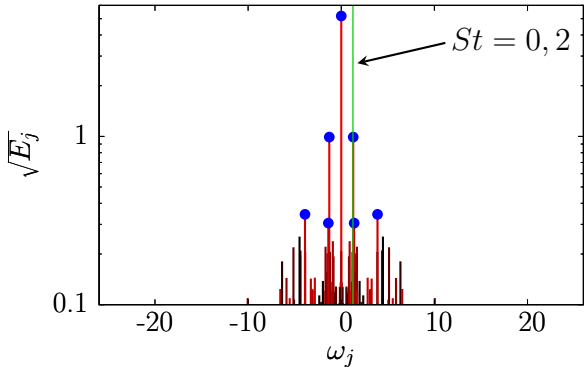
(a) Valeurs propres de Ritz λ_j dans le plan complexe, colorées par la norme du mode.



(b) Spectre DMD de l'opérateur dynamique continu en temps. Les points sont colorés par la norme du mode DMD.



(c) Amplitude des modes DMD à chaque pulsation ω_j. La pulsation correspondant à la fréquence théorique de lâcher tourbillonnaire ($St = 0,2$) est mise en évidence par la ligne verte. Les barres sont colorées par le taux de croissance.



(d) Contribution énergétique des modes DMD à chaque pulsation ω_j. La pulsation correspondant à la fréquence théorique de lâcher tourbillonnaire ($St = 0,2$) est mise en évidence par la ligne verte. Les barres sont colorées par le taux de croissance.

Figure 5.2 – Résultats de la DMD pour l'écoulement autour d'un cylindre. Les 7 modes les plus énergétiques sont représentées par un point bleu.

La figure 5.2(a) montre que les valeurs propres se situent approximativement autour du cercle unité, ce qui indique que les réalisations se répartissent à proximité d'un attracteur. Le taux de croissance de chaque mode DMD σ_j est tracé en fonction de sa pulsation ω_j sur la figure 5.2(b). Les données étant à valeurs réelles, le spectre est symétrique par rapport à l'axe imaginaire $\omega_j = 0$. En effet, dans ce cas particulier, les valeurs propres et les vecteurs propres associés sont réels ou complexes conjugués. A ce niveau, les vecteurs propres de Ritz sont disponibles pour développer un modèle réduit. Cependant, il reste à décider lesquels de

ces modes doivent être gardés dans la base de réduction. Au chapitre 6, nous discuterons des critères envisageables pour choisir les modes les plus pertinents. La norme $\|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\|$ des modes est tracée sur la figure 5.2(c) en fonction de la pulsation. La pulsation correspondant à la fréquence d'oscillation théorique à $St = fD/U = 0,2$ (Zdravkovich, 1997) est indiquée sur la figure. On constate que la fréquence d'oscillation de Von Kármán n'émerge pas réellement du spectre. Cela s'explique par l'existence de modes de forte amplitude mais qui peuvent être fortement amortis. Pour cette raison, nous avons également tracé sur la figure 5.2(d) un critère de contenu énergétique qui fait émerger clairement le mode associé à la fréquence $St = 0,2$. Ce critère énergétique, dénommé $E_j = \|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\|^2 \frac{e^{2\sigma_j T}-1}{2\sigma_j T}$ sera présenté en détail au chapitre 6.

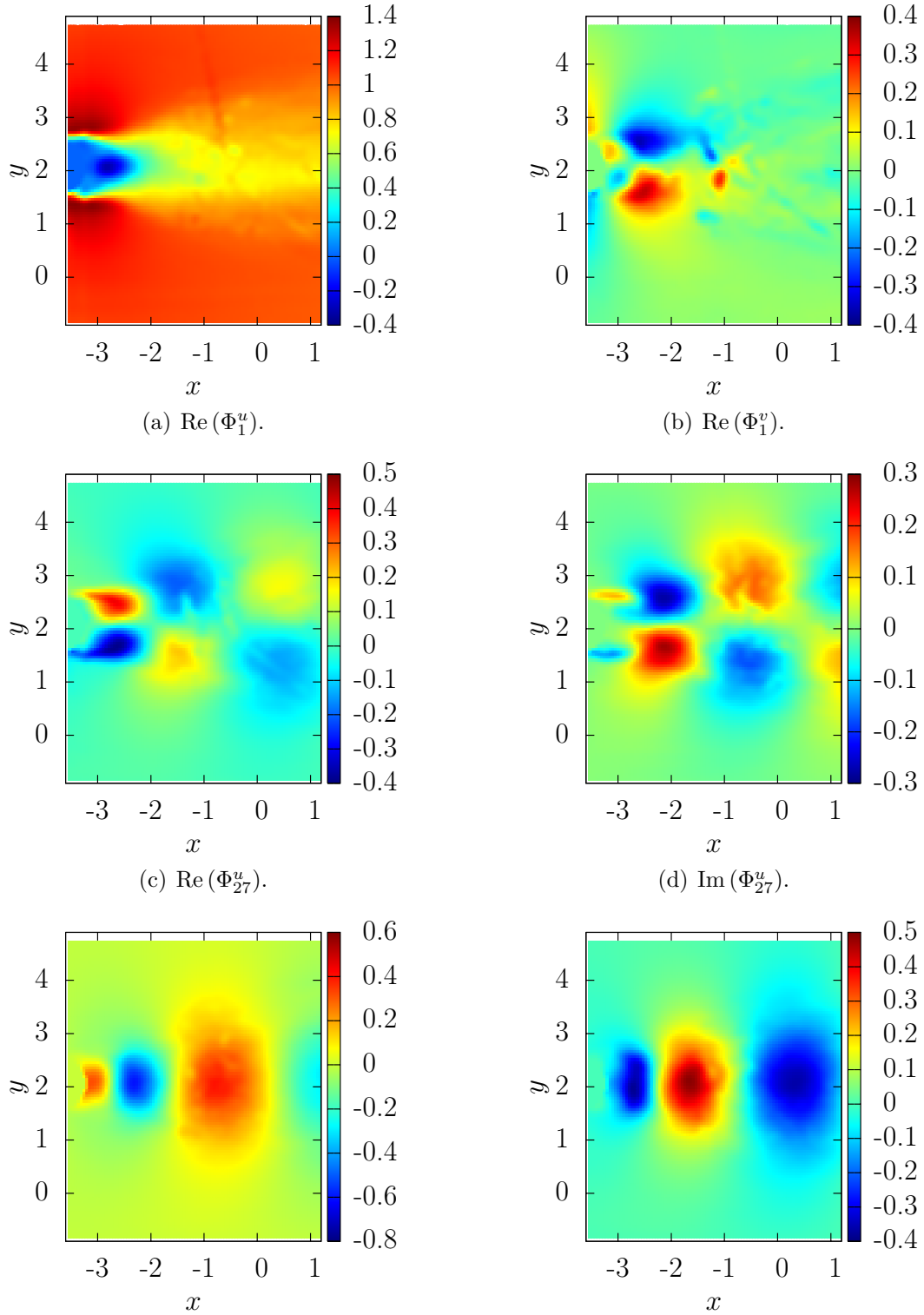
La figure 5.2(d) met clairement en évidence que 7 modes (1, 27, 696, 79, 979, 29, 982) sont les plus énergétiques par rapport au critère E_j. Les composantes longitudinale et verticale de ces modes sont représentées sur les figures 5.3 à 5.5, les coordonnées spatiales (x, y) étant adimensionnées par le diamètre D du cylindre. Leurs composantes temporelles sont tracées sur la figure 5.6.

Le mode 1 (figures 5.3(a) et 5.3(b)) correspond au champ moyen, sa fréquence est nulle et son amplitude temporelle pratiquement constante (voir figure 5.6). Les modes complexes conjugués 27 et 696 (figures 5.3(c) à 5.3(f)) oscillent à $St = 0,2$ (voir figure 5.2(c)) qui est précisément la fréquence d'oscillation fondamentale de l'écoulement de sillage à ce régime. Les modes 79, 979, 29 et 982 semblent associés à des structures plus petites (figures 5.4(a) à 5.5(d)) et à une dynamique temporelle rapidement amortie (figure 5.6). Les modes 696, 979 et 982 ne sont pas représentés pour des raisons de symétrie.

Les trois méthodes proposées en section 5.4.3 pour déterminer les coefficients temporels avec respectivement la matrice de Gram (5.31), les modes adjoints (5.32) et la multiplication de $\nu_{j,1}$ par les valeurs propres de Ritz (voir (5.30)) ont été comparées et donnent exactement les mêmes résultats. Seule la projection sur les modes adjoints a donc été tracée sur la figure 5.6. Connaissant $\nu_{j,1}$, il a été vérifié *a posteriori* que $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j = \mathbf{\Phi}_j \nu_{j,1}$.

Dans le but d'évaluer la possibilité de créer un modèle réduit à partir de modes DMD, différentes reconstructions de $\boldsymbol{v}_5$ ont été effectuées (voir figures 5.7 et 5.8).

La figure 5.7(a) correspond aux composantes longitudinale et verticale de la reconstruction de $\boldsymbol{v}_5$ en utilisant tous les modes DMD. Un très bon accord est obtenu en comparant la reconstruction aux champs originaux. L'erreur en norme L^2 est de l'ordre de $0,02\%$. En se basant sur le critère énergétique E_j pour réduire judicieusement le nombre de modes gardés dans la reconstruction, la tendance est de ne décrire plus que les grandes échelles de l'écoulement. Lorsque tous les modes ayant un niveau énergétique E_j supérieur à $0,05$ sont conservés, ce qui correspond à 242 modes, une reconstruction bruitée est réalisée, l'erreur étant alors de $21,6\%$

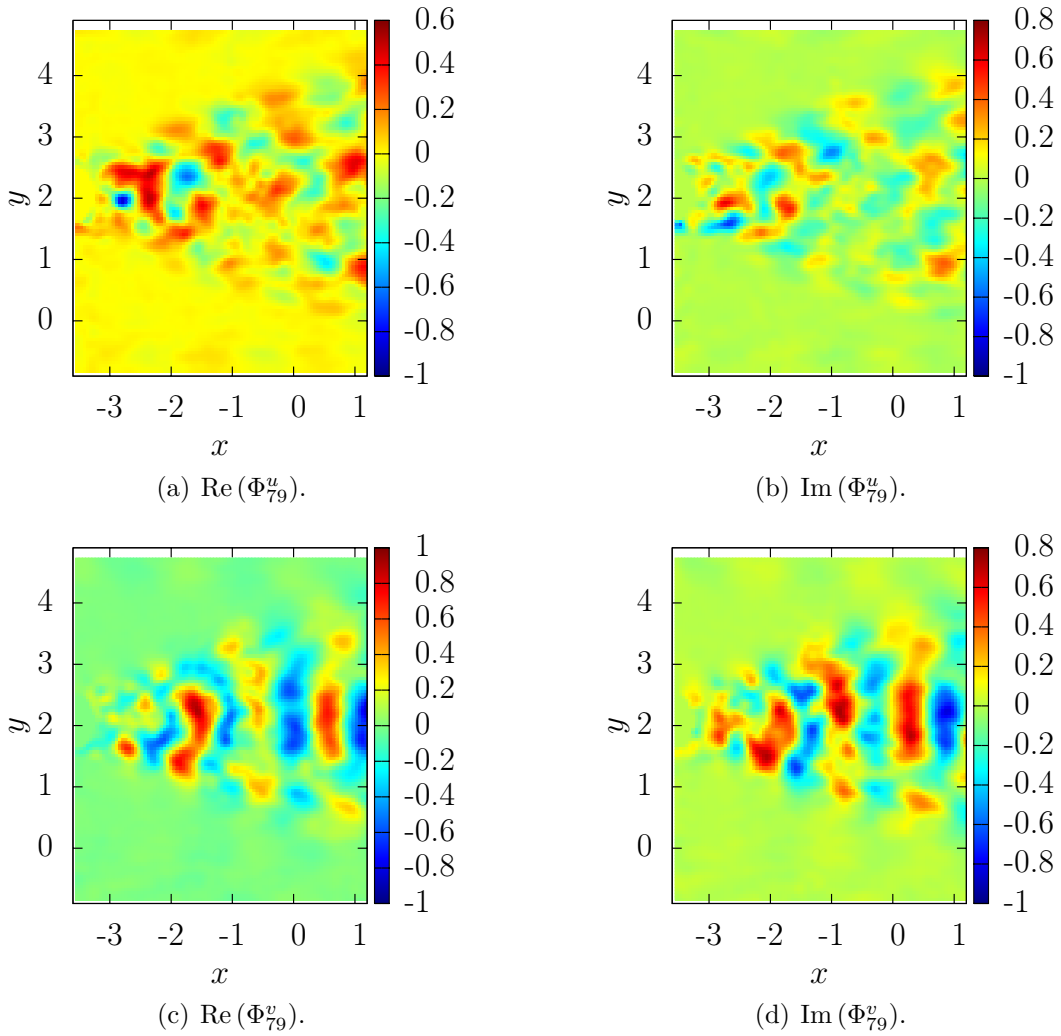


(a) $\mathrm{Re}\,(\Phi_1^u)$. (b) $\mathrm{Re}\,(\Phi_1^v)$.

(c) $\mathrm{Re}\,(\Phi_{27}^u)$. (d) $\mathrm{Im}\,(\Phi_{27}^u)$.

(e) $\mathrm{Re}\,(\Phi_{27}^v)$. (f) $\mathrm{Im}\,(\Phi_{27}^v)$.

Figure 5.3 – Vecteurs propres de Ritz 1 et 27.



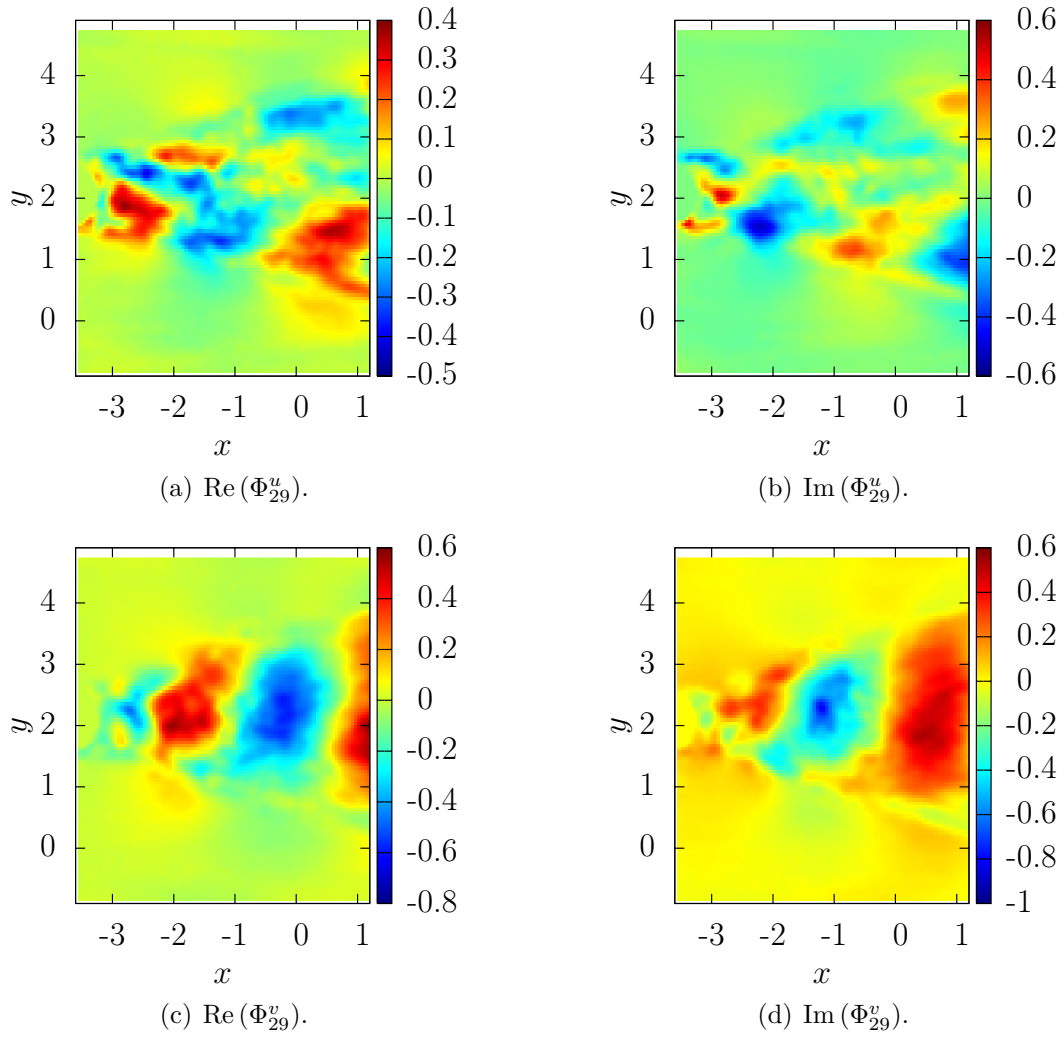
(a) $\mathrm{Re}\,(\Phi^u_{79})$.

(b) $\mathrm{Im}\,(\Phi^u_{79})$.

(c) $\mathrm{Re}\,(\Phi^v_{79})$.

(d) $\mathrm{Im}\,(\Phi^v_{79})$.

Figure 5.4 – Vecteur propre de Ritz 79.



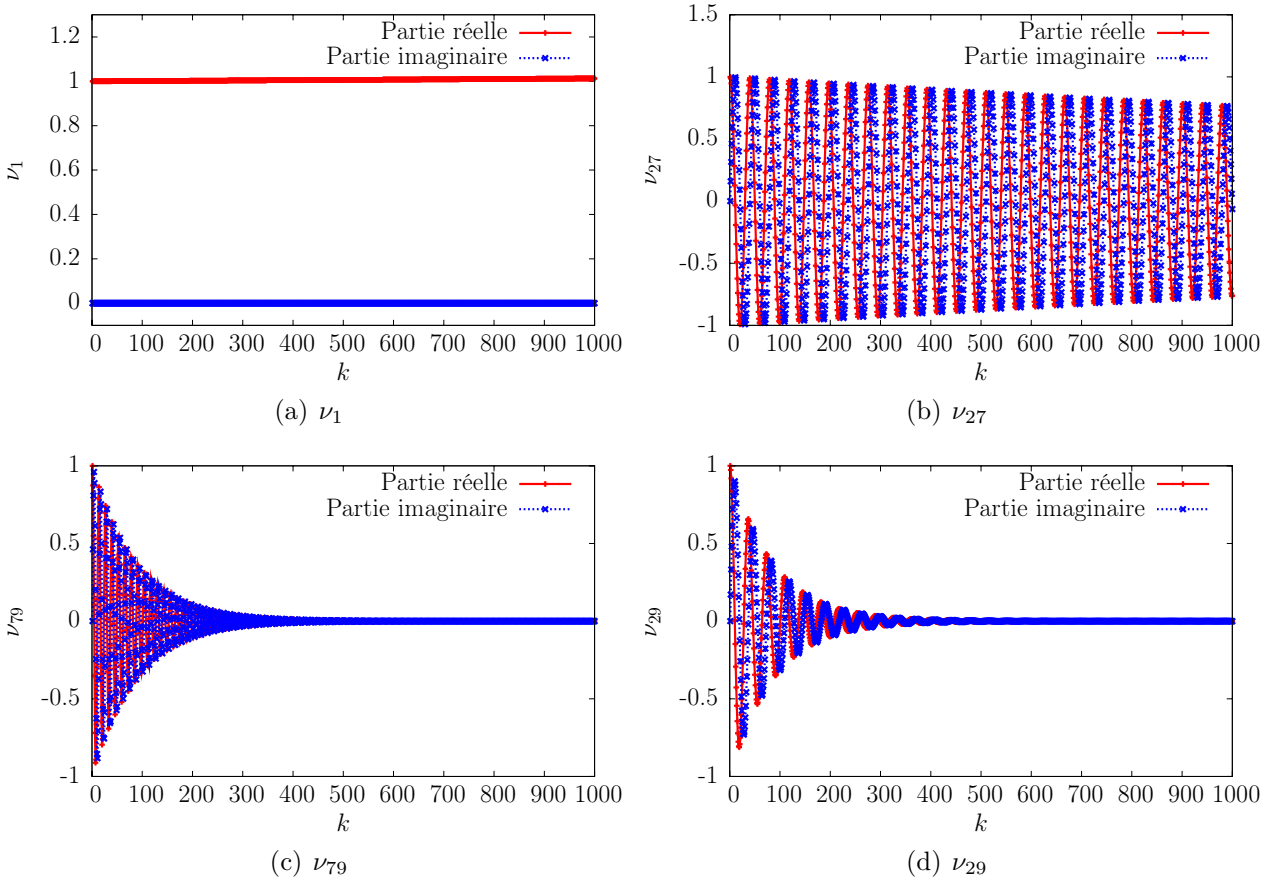
(a) $\mathrm{Re}\,(\Phi^u_{29})$.

(b) $\mathrm{Im}\,(\Phi^u_{29})$.

(c) $\mathrm{Re}\,(\Phi^v_{29})$.

(d) $\mathrm{Im}\,(\Phi^v_{29})$.

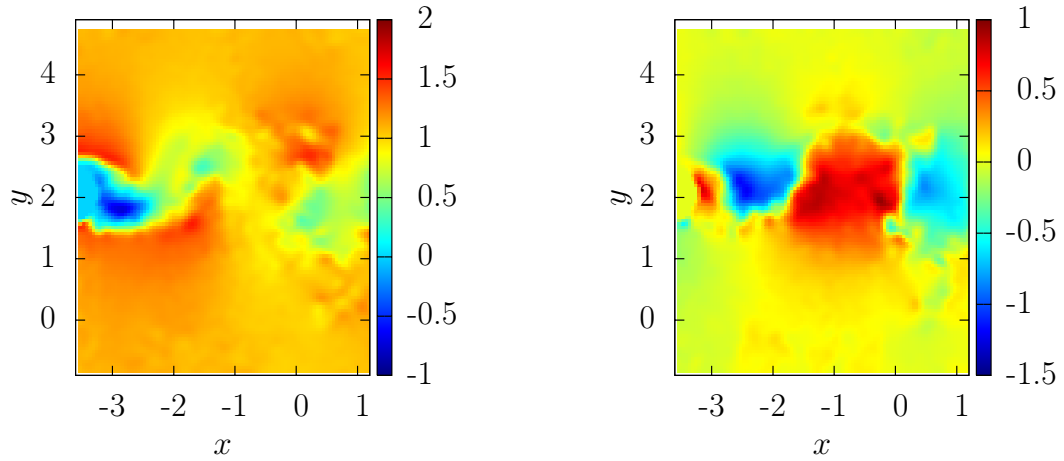
Figure 5.5 – Vecteur propre de Ritz 29.



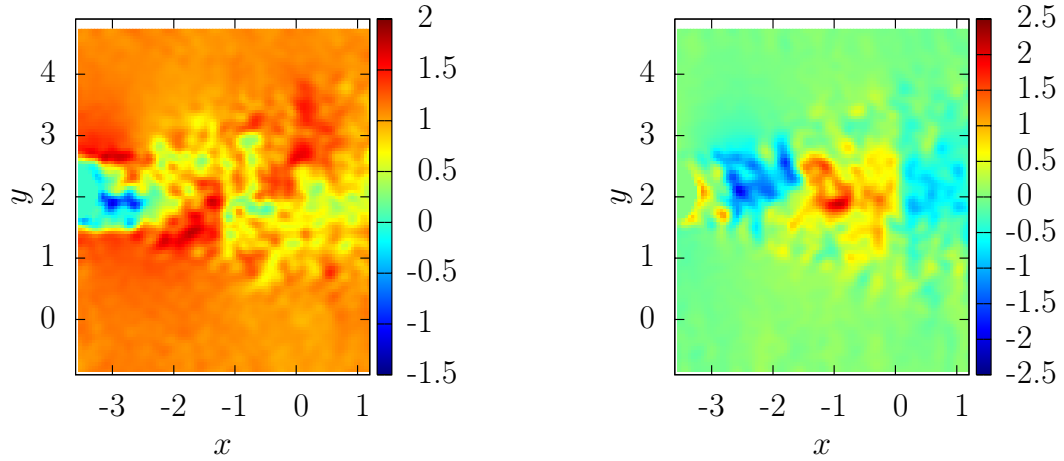
(a) ν_1 (b) ν_{27}

(c) ν_{79} (d) ν_{29}

Figure 5.6 – Coefficients temporels des modes DMD 1, 27, 79 et 29. Partie réelle (rouge) et partie imaginaire (bleu).

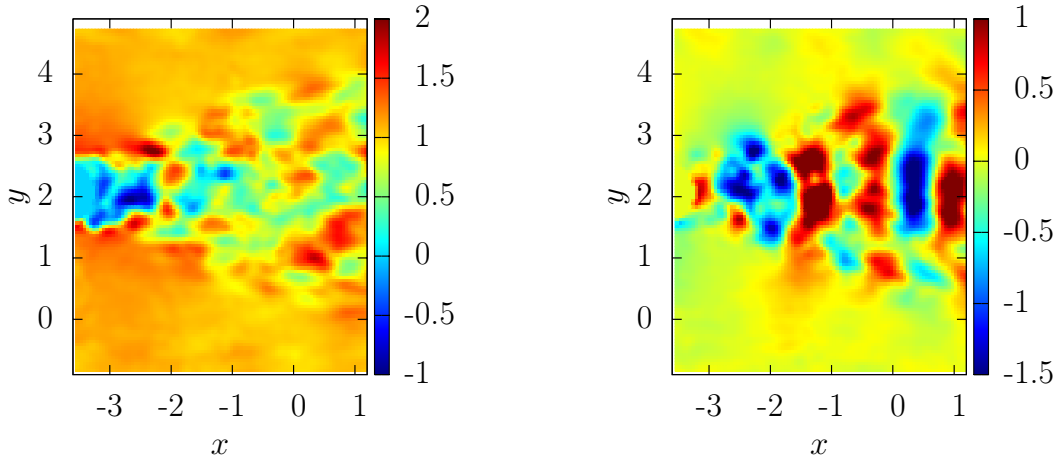


(a) Estimation de u et v avec tous les modes. Erreur $0,02\%$.

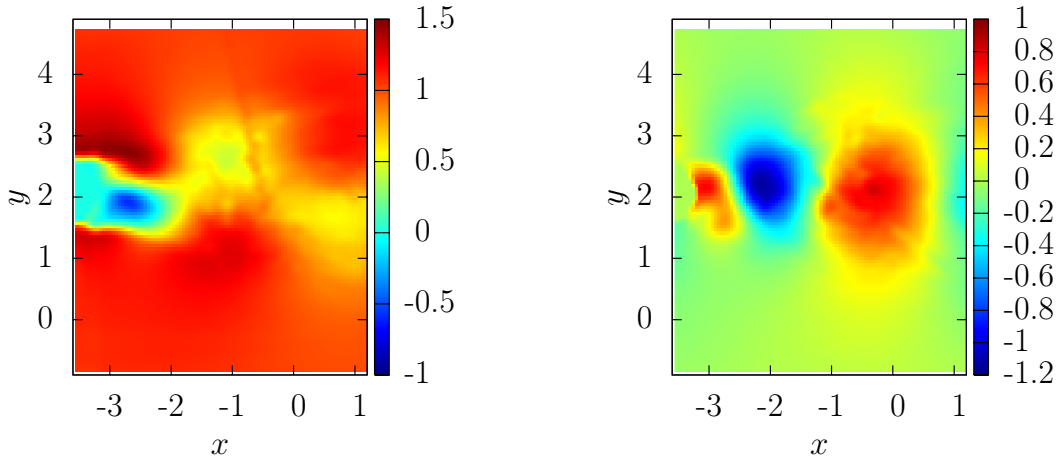


(b) Estimation de u et v avec tous les modes ayant un niveau énergétique supérieur à $0,05$ soit 242 modes. Erreur $21,6\%$.

Figure 5.7 – Reconstructions de la composante longitudinale u et verticale v de $\boldsymbol{v}_5$ avec tous les modes (a) et tous les modes ayant un niveau énergétique supérieur à $0,05$ (b).



(a) Estimation de u et v avec les 7 modes les plus énergétiques. Erreur $45,6\%$.



(b) Estimation de u et v avec les 3 modes les plus énergétiques. Erreur $29,7\%$.

Figure 5.8 – Reconstructions de la composante longitudinale u et verticale v de $\boldsymbol{v}_5$ avec les 7 modes les plus énergétiques (a) et les 3 modes les plus énergétiques (b).

(voir figure 5.7(b)). Lorsque uniquement les modes 1, 27 et 696 sont utilisés pour la reconstruction (Figure 5.8(b)), l'erreur L^2 est de $29,7\%$. Cette approximation d'ordre très bas est très simplifiée et tient compte uniquement de l'oscillation tourbillonnaire représentée par un couple de modes complexes-conjugués en oscillation. Notons qu'en raison de la non orthogonalité des modes DMD, l'erreur L^2 n'est pas monotone avec le nombre de modes, contrairement aux modes POD, pour lesquels c'est le cas par définition. En effet, lorsque 7 modes sont conservés (1, 27, 696, 79, 979 ,29 ,982), l'erreur L^2 croit à $45,6\%$ (voir figure 5.8(a)). Nous avons effectivement vu que les modes 79, 979, 29 et 982 par exemple ont une pertinence limitée. En conclusion, dans une démarche de réduction de modèle, il est donc important de faire attention à la sélection des modes sous peine d'obtenir de fortes erreurs de reconstruction.

5.6 Synthèse

La DMD est une méthode qui est capable d'extraire des informations dynamiques à partir de données empiriques obtenues soit numériquement, soit expérimentalement. Sans connaissance explicite de l'opérateur dynamique associé, elle détermine le taux de croissance, la fréquence et la structure spatiale d'un modèle linéaire approché. Ces modes peuvent être vus comme une généralisation des modes globaux de stabilité obtenus pour un système linéarisé. L'opérateur de Koopman a tout d'abord été présenté, ainsi que deux versions de l'algorithme DMD permettant d'approximer les éléments propres de cet opérateur. En outre, les principales propriétés des modes DMD ont été présentées, en particulier le lien existant entre les modes de DMD et de Fourier pour des données pour lesquelles la moyenne a été déduite avant l'analyse. L'algorithme DMD a été appliqué sur des données expérimentales PIV d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre.

Nous décrirons par la suite comment utiliser cette décomposition dans une démarche de réduction de modèle. D'abord, nous verrons plus précisément comment extraire une base de faible dimension pertinente (chapitre 6), puis comment utiliser cette base dans une démarche de réduction de modèle (chapitre 7).

Chapitre 6

Détermination d'une base réduite basée sur les modes DMD

Table des matières

6.1 Sélection des modes issus de l'algorithme DMD classique 106

6.2 Sensibilité des modes DMD à un paramètre 108

6.3 Optimized DMD 110

6.4 Chronos-Koopman 112

6.5 Applications 113

6.5.1 Bases de données 113

6.5.2 Sélection des modes 115

6.5.3 Analyse de sensibilité 118

6.5.4 Optimized DMD 119

6.5.5 Chronos-Koopman 125

6.6 Synthèse 126

Au chapitre 5, nous avons présenté les principes et objectifs de la DMD, indiqué ses principales propriétés et appliqué la méthode à une base de données expérimentales correspondant à l'écoulement turbulent autour d'un cylindre. A ce stade, l'utilisation de la DMD est

limitée à l'analyse physique permettant d'améliorer la compréhension des phénomènes dynamiques mis en jeu. En effet, nous avons montré d'une part comment déterminer la matrice $\widetilde{\Phi} = \left(\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_1, \cdots, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{N-1}\right)$ des vecteurs propres de Ritz, et d'autre part (voir (5.15)) que ces vecteurs forment une base pour l'ensemble des réalisations $\boldsymbol{v}_k$ comprises dans la base de données. En termes de réduction de modèle, nous devons aller une étape plus loin, en sélectionnant les modes DMD permettant d'obtenir une description réduite de l'écoulement. Toute méthode de réduction de modèle dépendant de manière intrinsèque d'un objectif donné (voir chapitre 2), nous allons présenter dans ce chapitre trois stratégies différentes. La première consiste à appliquer l'algorithme DMD de la manière présentée au chapitre 5, puis de sélectionner dans le spectre des vecteurs de Ritz les modes adaptés à une description réduite. Nous discuterons à la section 6.1 différents critères de sélection des modes car il n'existe pas contrairement à la POD de critère évident. Nous verrons à la section 6.2 que ce choix peut éventuellement être conforté ou affiné grâce à une analyse de sensibilité des modes DMD. Une deuxième stratégie consiste à rechercher de manière optimale une approximation réduite des réalisations de la base de données telle que l'erreur de reconstruction soit minimisée pour un nombre de modes $N_o < N$ donné. Cette méthode, proposée récemment par Chen *et al.* (2012) et dénommée *optimized DMD*, est présentée à la section 6.3. Finalement, la DMD étant un algorithme qui approxime les modes de Koopman pour une observable vectorielle quelconque, rien n'empêche d'appliquer la DMD sur les premières fonctions propres POD temporelles. Cette approche, introduite par Cammilleri *et al.* (2013) et nommée *Chronos-Koopman*, est à la base d'une troisième stratégie qui est présentée à la section 6.4. Pour terminer, nous testerons l'ensemble de ces stratégies sur différentes bases de données numériques et expérimentales à la section 6.5.

6.1 Sélection des modes issus de l'algorithme DMD classique

Pour toutes les techniques de réduction de modèle basées sur une méthode de projection, une phase capitale consiste après détermination des modes à déterminer le sous-espace de projection représentant au mieux la physique du système pour le problème considéré. En *balanced truncation* et en POD, la sélection des modes est immédiate car ces derniers sont triés via leurs valeurs singulières de Hankel et leurs valeurs propres (énergie en général) respectivement. Pour les modes globaux issus de la stabilité linéaire, ceux-ci sont classés via la partie réelle des valeurs propres (taux d'amplification) du mode le plus stable (valeur négative) au mode le plus instable (valeur positive). En fonction du rôle à jouer par le modèle réduit, compréhension

des mécanismes physiques ou contrôle d'écoulement, la sélection des modes globaux peut être différente. Dans le cas du contrôle en boucle fermée, cette sélection est discutée dans Ehrenstein *et al.* (2011) et Barbagallo *et al.* (2011) où des critères spécifiques sont introduits.

Dans le cas de la DMD, le critère de sélection des modes n'est pas non plus évident car cette méthode ne repose pas directement sur un problème d'optimisation comme c'est le cas pour la *balanced truncation* et la POD. En revanche, les modes DMD possèdent les mêmes caractéristiques que les modes globaux : le comportement temporel de chaque mode est caractérisé par un taux de croissance et une pulsation (ou fréquence), et le comportement spatial par une amplitude. Nous avons donc ainsi trois critères pouvant être utilisés pour sélectionner les modes DMD selon l'objectif du modèle. Comme pour la transformée de Fourier discrète, avec laquelle la DMD est équivalente dans le cas de données périodiques ou à moyenne nulle (voir section 5.3), la fréquence des modes peut être utilisée pour sélectionner certains pics dans le spectre et donc des fréquences dominantes de l'écoulement. Pour des données en équilibre statistique c'est-à-dire situées sur un attracteur de l'écoulement, les valeurs propres des modes DMD se trouvent en proximité du cercle unité. Dans ce cas, leur taux de croissance est nul et l'amplitude des modes sera alors importante pour leur sélection. Dans le cas de systèmes linéaires, la DMD peut être utilisée pour approximer *a posteriori* les modes globaux et ainsi capturer la croissance d'instabilités. Dans ce cas, le taux de croissance sera alors le critère le plus pertinent. Enfin, pour des données issues d'une dynamique en régime transitoire, la DMD doit pouvoir capturer la croissance/décroissance des modes et la croissance transitoire liée à la non normalité des opérateurs (Schmid, 2007). A la section 6.5, nous illustrerons sur des exemples les informations qui peuvent être extraites de la DMD et qui peuvent être utilisées pour la sélection des modes. Pour conclure, nous ne donnerons pas de critère universel de sélection car celle-ci dépend d'une part des données et d'autre part de ce qui est considéré comme le « plus important » pour l'utilisation du modèle réduit. Cependant, nous donnerons des quantités objectives qui peuvent être utiles pour la sélection des modes.

A la section 5.3.2, nous avons montré que chaque mode DMD j est associé à un taux de croissance σ_j et à une pulsation ω_j. En introduisant l'équivalence entre le temps continu (t) et le temps discret ($t_k = (k-1)\Delta t$), nous avons $\nu_{j,k} = \nu_j(t_k) = \lambda_j^{t_k/\Delta t}$ d'où :

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j^{k-1} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j = \sum_{j=1}^{N-1} e^{(\sigma_j + \imath\omega_j)t_k} \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j \quad \text{avec} \quad \sigma_j = \frac{\log(|\lambda_j|)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \omega_j = \frac{\arg(\lambda_j)}{\Delta t}. \tag{6.1}$$

Ces propriétés découlent directement de l'hypothèse (5.7) à la base de la DMD. A la section 7.1, nous verrons les conséquences sur le développement d'un modèle réduit.

Dans le cadre de la sélection de modes, la norme des modes DMD $\|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\|$ peut être source de confusion car il arrive que des modes possèdent une amplitude importante tout en étant fortement amortis. Ces modes, caractéristiques de la dynamique au temps court de l'écoulement, contribuent donc assez peu à la description dynamique. Pour s'affranchir de ces difficultés, un critère liant amplitude du mode et taux de croissance est nécessaire. On peut citer à titre d'illustration Tu *et al.* (2013b) qui ont tracé pour cette raison la quantité $|\lambda_j|^{N-1}\|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\|$ en fonction de la fréquence associée à chaque mode afin d'identifier les fréquences dominantes de l'écoulement. Par la suite, un critère basé sur la contribution énergétique de chaque composante est proposé :

$$E_j = \frac{1}{T}\int_0^T \|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j \lambda_j^{t/\Delta t}\|^2 \,\mathrm{d}t = \|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\|^2 \,\frac{e^{2\sigma_j T}-1}{2\sigma_j T}. \tag{6.2}$$

Ce critère est intéressant car il prend en compte à la fois l'énergie du mode et son taux d'amplification. Ainsi, il contribue à donner une idée plus précise du poids de chaque mode j dans la solution complète. Ce critère est équivalent à celui proposé par Neumaier et Schneider (2001) dans le contexte de modèles auto-régressifs où la variance de chaque composante modale est utilisée comme critère.

Notons que si nous sommons E_j pour $j = 1, \cdots, N-1$, nous n'obtenons pas l'énergie de l'écoulement car les modes DMD sont non orthogonaux. On peut également remarquer que E_j n'est pas défini pour $\sigma_j = 0$, c'est à dire pour un mode ni amorti ni amplifié. En passant à la limite, on trouve que $\lim_{\sigma_j \to 0} E_j = \|\widetilde{\mathbf{\Phi}}_j\|^2$, ce qui justifie *a posteriori* le facteur d'échelle choisi. Au chapitre 5, ce critère a permis d'extraire de données PIV correspondant à un écoulement autour d'un cylindre la fréquence caractéristique d'oscillation de von Kármán.

Afin d'affiner éventuellement le choix des modes réalisé sur le critère énergétique E_j, nous présentons à la section suivante comment réaliser une analyse de sensibilité des modes DMD.

6.2 Sensibilité des modes DMD à un paramètre

En théorie, pour affiner la sélection des modes, nous aimerions pouvoir utiliser les informations de sensibilité en privilégiant dans le modèle les modes DMD sensibles à la variation d'un paramètre car ils peuvent être porteurs de la physique du système. Or, en pratique, il n'est pas très facile de faire la part des choses entre les modes dont la sensibilité élevée est provoquée par des bruits numériques ou expérimentaux, de ceux dont la forte sensibilité traduit une variation de la physique. En effet, si un petit changement des conditions de génération de la base de données par exemple, affecte de manière importante un mode alors il ne sera pas simple de savoir si ce mode est parasite car non représentatif de structures souvent présentes

dans l'écoulement, ou si ce mode joue un rôle particulier en terme de changement de dynamique ou de contrôle. De même, les informations de sensibilité pourraient être utilisées comme dans Hay *et al.* (2009) pour extrapoler ou enrichir la base de projection.

De manière analogue aux développements faits à la section 4.3, introduisons un paramètre μ, représentatif du système, et pouvant être des conditions opératrices ou de manière étendue un paramètre de contrôle. L'objectif de la section est de déterminer la sensibilité des modes DMD à la variation du paramètre μ. Pour cela, considérons que $\dfrac{\partial V_1^{N-1}}{\partial \mu}$, la sensibilité des réalisations contenues dans la base de données, est connue. Pour des données issues de simulation numérique, cette matrice de sensibilité peut facilement être trouvée par différences finies en réalisant deux calculs pour lesquels seule la valeur du paramètre μ est légèrement modifiée. L'objectif est de déterminer la sensibilité des modes DMD $\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j$ et de leur valeur propre λ_j à la variation de μ.

Par dérivation de (5.14) et en considérant la dérivée de l'inverse d'une matrice donnée en (B.19), nous obtenons immédiatement (Amsallem, 2010; Hay *et al.*, 2009) :

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}}{\partial \mu} = \frac{\partial V_1^{N-1}}{\partial \mu} T^{-1} - \frac{\partial T^{-1}}{\partial \mu} V_1^{N-1} = \frac{\partial V_1^{N-1}}{\partial \mu} T^{-1} - V_1^{N-1} T^{-1} \frac{\partial T}{\partial \mu} T^{-1}, \tag{6.3}$$

avec

$$\frac{\partial T}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \mu} & 2\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \mu}\lambda_1 & \cdots & (N-2)\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial \mu}\lambda_1^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dfrac{\partial \lambda_{N-1}}{\partial \mu} & 2\dfrac{\partial \lambda_{N-1}}{\partial \mu}\lambda_{N-1} & \cdots & (N-2)\dfrac{\partial \lambda_{N-1}}{\partial \mu}\lambda_{N-1}^{N-3} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N-1\times N-1}, \tag{6.4}$$

où λ_j $(j = 1, \cdots, N-1)$ sont les valeurs propres de la matrice Compagnon C_{C}.

Par ailleurs, puisque $\boldsymbol{y}_j$ est le vecteur propre de C_{C} associé à λ_j, nous pouvons montrer que (Amsallem, 2010; Hay *et al.*, 2009) :

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \mu} = \frac{\boldsymbol{y}_j^* \dfrac{\partial C_{\mathrm{C}}}{\partial \mu} \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{y}_j^* \boldsymbol{y}_j} \tag{6.5}$$

où * représente l'opérateur transposé-conjugué et où

$$\frac{\partial C_{\mathrm{C}}}{\partial \mu} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial c_1}{\partial \mu} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial c_{N-1}}{\partial \mu} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}. \tag{6.6}$$

Le calcul de $\dfrac{\partial c_j}{\partial \mu}$ est détaillé à la section B.3.
Nous verrons à la section 6.5.3 un exemple de calculs de sensibilité pour les modes DMD.

6.3 Optimized DMD

Par l'algorithme de DMD classique, la sélection des modes n'est pas évidente. En effet, la non orthogonalité des modes DMD peut faire croître fortement l'erreur de projection, conduisant ainsi à une augmentation de l'ordre du modèle. C'est le résultat que nous avons obtenu au chapitre 5 lorsque nous avons cherché à reconstruire les données initiales avec un nombre réduit de modes DMD (voir figures 5.7 et 5.8). En outre, le résidu défini dans l'algorithme DMD classique dépend uniquement de la dernière réalisation de la base de données, car la matrice Compagnon C_{C} est entièrement déterminée par ses coefficients $c_k, (k = 1, \cdots, N-1)$ c'est à dire par la dernière réalisation $\boldsymbol{v}_N$. Par conséquent, les résultats de DMD sont plus sensibles aux variations de $\boldsymbol{v}_N$ (niveau de bruit, par exemple) qu'aux variations des autres réalisations. Pour lever ces difficultés, nous allons utiliser l'*optimized DMD*, méthode récemment proposée par Chen *et al.* (2012). Cette approche consiste à déterminer une base réduite de dimension donnée comme solution d'un problème d'optimisation visant à conserver la représentation donnée par (6.7) tout en minimisant l'erreur de reconstruction. Cette décomposition est similaire à d'autres méthodes de réduction reposant sur la recherche d'une base comme solution d'un problème d'optimisation. Citons pour les plus récentes : l'*optimal mode decomposition* (Goulart *et al.*, 2012), et la *sparse DMD* (Jovanović *et al.*, 2012) où la base est fonction de l'objectif fixé.

Par la suite, nous commençons par décrire la méthode d'optimized DMD telle que présentée dans Chen *et al.* (2012). Nous présentons ensuite une amélioration de l'algorithme, consistant à calculer de manière analytique le gradient de la fonctionnelle coût, ce qui permettra d'utiliser des algorithmes de descente dans la résolution.

Soit $N_o < N$, le nombre de modes que nous recherchons, l'optimized DMD consiste à déterminer $\{\hat{\lambda}_j\}_{j=1}^{N_o}$, nombres complexes, et les vecteurs $\{\hat{\boldsymbol{\Phi}}_j\}_{j=1}^{N_o}$ tels que :

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N_o} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_j \hat{\lambda}_j^{k-1} + \hat{\boldsymbol{r}}_k = \hat{\boldsymbol{v}}_k + \hat{\boldsymbol{r}}_k \quad k = 1, \cdots, N, \tag{6.7}$$

et

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{N} \|\hat{\boldsymbol{r}}_k\|_2^2 \quad \text{soit minimal.}$$

En général, la résolution de ce problème d'optimisation est très coûteuse. Or, nous pou-

vons montrer ici que si les valeurs propres $\hat{\lambda}_j$ sont connues, alors la meilleure base $\hat{\Phi} = \left(\hat{\boldsymbol{\Phi}}_1, \cdots, \hat{\boldsymbol{\Phi}}_{N-1}\right)$ que l'on puisse trouver en termes de résidu, peut être calculée par pseudo-inverse de Moore-Penrose. Nous allons donc nous restreindre à la recherche des valeurs propres, ce qui réduit considérablement le nombre de paramètres à déterminer.

En notant $\hat{R}$, la matrice contenant les vecteurs de résidu $\hat{\boldsymbol{r}}_k$, nous pouvons écrire (6.7) sous forme matricielle, soit :

$$V_1^N = \hat{\Phi} T + \hat{R} = \hat{V}_1^N + \hat{R} \tag{6.8}$$

où la k-ième colonne de V_1^N contient $\boldsymbol{v}_k$, et où T est la matrice de Vandermonde de dimension $N_o \times N$ associée aux $\hat{\lambda}_j$.

Parmi tous les choix de $\hat{\Phi}$ possibles, celui qui minimise le résidu Γ est donné par :

$$\hat{\Phi} = V_1^N T^{\text{MP}} \tag{6.9}$$

où $T^{\text{MP}} = T^*(TT^*)^{-1}$ est la pseudo-inverse de Moore-Penrose de T. Par conséquent, le résidu Γ peut encore être écrit (voir détails dans la section B.5) comme :

$$\Gamma = \|\hat{R}\|_F^2 = \|V_1^N\|_F^2 - \|V_1^N T^{\text{MP}} T\|_F^2, \tag{6.10}$$

où $\|\cdot\|_F$ représente la norme de Frobenius.

Dans Chen *et al.* (2012), une technique particulière d'optimisation globale est utilisée pour calculer les modes d'optimized DMD. L'avantage principal de l'optimisation globale est de rechercher le minimum global d'une fonction de coût (ici Γ). Malheureusement, cette classe de méthode est aussi très coûteuse en temps de calcul car elle nécessite un grand nombre d'évaluations de la fonction de coût pour converger (Auger *et al.*, 2009). Dans ce manuscrit, nous avons amélioré l'algorithme proposé par Chen *et al.* (2012) en utilisant une méthode de descente basée sur le gradient. Pour cela, nous avons calculé de manière analytique (voir section B.5) le gradient de la fonction de coût Γ par rapport à la variation des valeurs propres $\hat{\lambda}_j$. Le gradient est formellement donné par :

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \hat{\lambda}_j} = -\text{tr}\left(V_1^{N*} V_1^N \frac{\partial (T^{\text{MP}} T)}{\partial \hat{\lambda}_j}\right), \tag{6.11}$$

où tr représente la trace d'une matrice. Connaissant une expression analytique du gradient, des algorithmes efficaces de minimisation de type quasi-Newton peuvent être utilisés. Pour une puissance de calcul donnée, nous pourrons donc ainsi augmenter le nombre de modes à déterminer. En pratique, la méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) est utilisée

(Gilbert et Lemaréchal, 2009).

L'optimized DMD est une méthode de détermination d'une base réduite permettant de décrire une dynamique temporelle linéaire de manière optimale par rapport à l'erreur de reconstruction. Pour le prix de la résolution numérique d'un problème d'optimisation, nous obtenons une base réduite qui possède de bonnes propriétés de représentativité dynamique. L'optimized DMD sera testé à la section 6.5 sur des configurations tests.

6.4 Chronos-Koopman

Au chapitre 5, nous avons montré que l'algorithme DMD approxime les éléments propres de l'opérateur de Koopman pour un ensemble d'observable $\boldsymbol{g}$ quelconque. Par conséquent, rien n'empêche de faire l'analyse DMD en considérant des observations incomplètes, ou des observations exprimées dans une base de dimension réduite. Il est donc envisageable d'appliquer la DMD aux N_{Gal} premières fonctions propres temporelles POD, prises comme observables. C'est précisément la méthode introduite récemment par Cammilleri *et al.* (2013). Les modes temporels POD étant également appelés « chronos », les auteurs ont décidé de dénommer leur procédure par analyse spectrale de « Chronos-Koopman ». Le fait d'appliquer la DMD aux modes temporels POD va permettre d'identifier un processus linéaire d'avancement en temps des fonctions temporelles POD.

Supposons que la décomposition POD soit appliquée sur la base de données V_1^{N-1}. En conservant dans l'analyse uniquement les N_{Gal} premiers modes, nous pouvons construire la matrice d'observation définie par :

$$O_1^{N-1} = \begin{pmatrix} a_1(t_1) & \cdots & a_1(t_{N-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N_{\text{Gal}}}(t_1) & \cdots & a_{N_{\text{Gal}}}(t_{N-1}) \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

ainsi que la matrice O_2^N contenant les observations aux instants compris entre t_2 et t_N.

En appliquant l'algorithme DMD classique aux matrices O_1^{N-1} et O_2^N, nous obtenons un problème surdéterminé. En effet, en supposant les N_{Gal} premières observations linéairement indépendantes, celles-ci forment une base complète de $\mathbb{R}^{N_{\text{Gal}}}$, entraînant que les observations $\boldsymbol{a}(t_{N_{\text{Gal}}+i})$ peuvent alors être exprimées comme combinaison linéaire des observations précédentes. Pour cette raison, nous utilisons la procédure introduite par Schmid (2010) (voir section 5.2.2) qui consiste à effectuer une régularisation par SVD des données. Pour cela, appliquons

la décomposition SVD[1] sur $O_1^{N-1} = U\Sigma W^*$, et définissons $\widetilde{S} = U^* O_2^N W \Sigma^{\text{MP}}$. On rappelle alors que si $(\boldsymbol{y}_j^K, \lambda_j^K)$ sont éléments propres de $\widetilde{S}$, alors $(\boldsymbol{\Phi}_j^K = U\boldsymbol{y}_j^K, \lambda_j^K)$ représentent une approximation des éléments propres de A.

En adaptant les notations utilisées pour (5.15), nous pouvons alors utiliser les éléments propres de A pour déterminer $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$, approximation de $\boldsymbol{a}(t)$, sous la forme :

$$\tilde{a}_i(t_k) = \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} \left(\lambda_j^K\right)^{k-1} \boldsymbol{\Phi}_j^K(i). \tag{6.13}$$

Nous en déduisons que la procédure de Chronos-Koopman permet de faire une double décomposition des données : selon les modes POD (variable i) et selon les modes DMD (variable j). Nous pouvons ainsi analyser les fréquences présentes dans chaque mode POD.

Dans le cas d'une SVD tronquée, la méthode de Chronos-Koopman est en lien direct avec la procédure DMD basée sur la SVD. En effet, effectuer une SVD sur V_1^{N-1} revient, au produit scalaire près, à effectuer une décomposition POD sur ces mêmes données. Ne conserver que les N_{Gal} premiers modes POD comme observables est donc équivalent à tronquer la SVD dans l'algorithme de la section 5.2.2.

La formulation Chronos-Koopman permet d'effectuer une double décomposition en modes POD et en fréquences. En effet, la POD permet d'abord d'extraire une base de représentation réduite des données, puis la DMD permet d'identifier un système linéaire d'ordre N_{Gal} correspondant au mieux aux données exprimées dans le sous-espace POD. Nous discuterons au chapitre 7 de quelle manière la procédure de Chronos-Koopman peut être utilisée dans une démarche de réduction de modèle.

6.5 Applications

6.5.1 Bases de données

Pour tester les différentes méthodes de détermination d'une base réduite basée sur les modes DMD, plusieurs bases de données ont été utilisées : deux numériques et une expérimentale sur une configuration commune, l'écoulement autour d'un cylindre. Cette configuration est un cas test couramment utilisé dans la communauté du contrôle d'écoulement (Gillies, 1998; Bergmann, 2004; Morzyński *et al.*, 2007) en raison de la présence d'un état stationnaire instable

[1] Dans le cas particulier des fonctions temporelles POD, O_1^{N-1} est une matrice orthogonale. On a donc $U = \mathbb{I}$ et Σ, une matrice diagonale contenant $\sqrt{\lambda_i^{\text{POD}}(N-1)}$, avec λ_i^{POD} la i-ème valeur propre POD. On montre alors que $\widetilde{S} = O_2^N O_1^{N-1^*} \Sigma^{-2}$.

et d'un cycle limite apparaissant via une bifurcation de Hopf pour un nombre de Reynolds d'environ 47. En dépit de sa relative simplicité, ce cas test a une dynamique non linéaire suffisamment riche pour être un cas d'étude pertinent pour le contrôle d'écoulement. Par la suite, toutes les longueurs sont adimensionnées par le diamètre du cylindre.

Pour commencer, deux simulations numériques d'écoulements à $Re = 200$ ont été réalisées en utilisant le solveur éléments finis Comsol Multiphysics 4.3. Pour les simulations, une grille 2D non structurée de 45155 éléments a été employée, ainsi qu'un schéma implicite d'intégration temporelle de type BDF[2] avec pas de temps adaptatif. Les données ont ensuite été échantillonnées à pas de temps constant $\Delta t = 0,1$ et extrapolées sur une grille cartésienne 150×100 de dimension $[-10 : 20] \times [-10 : 10]$. Finalement, une vitesse nulle a été imposée à l'intérieur du cylindre.

Pour tester la capacité de la DMD à capturer différents types de dynamique, une première base de données a été générée en régime permanent, tandis qu'une seconde représente un transitoire de l'état stationnaire vers le cycle limite. Toutes les simulations numériques ont été réalisées avec pour condition initiale l'état stationnaire de l'écoulement déterminé par Comsol. Pour les données en régime permanent, 300 pas de temps ont été nécessaires pour établir l'écoulement avant de sauvegarder les réalisations. Pour les données en régime transitoire, nous avons attendu 50 pas de temps avant d'enregistrer la première réalisation de la base de données afin de capturer de manière perceptible les modifications de l'écoulement.

A la section 5.4.1, nous avons discuté de considérations pratiques concernant les choix du pas de temps Δt et du nombre de réalisations N les mieux adaptés à l'analyse DMD. Nous avons alors montré sur des exemples numériques que plus la norme du résidu relatif $\|\boldsymbol{b}_j\|_\Omega / \|\boldsymbol{v}_j\|_\Omega$ provenant de la procédure de Gram-Schmidt était faible, sans descendre toutefois au dessous de 10^{-5}, et plus la base de données était adaptée à l'analyse DMD. Pour le régime permanent, nous avons donc sélectionné $N = 81$ réalisations espacées de $\Delta t = 0,8$ (une réalisation sur 8 ; $T = 64$), ce qui correspond à 10 périodes de lâcher tourbillonnaire, tandis que pour le régime transitoire $N = 41$ réalisations avec $\Delta t = 0,6$ (une réalisation sur 6 ; $T = 24$) ont été sauvegardées. Dans le cas de la dynamique transitoire, la fin de la croissance linéaire après $4,5$ périodes de lâcher tourbillonnaire limite le nombre de réalisations pouvant être enregistrées. La fenêtre temporelle utilisée pour les données transitoires est indiquée sur la courbe de coefficient de portance C_z fonction du temps représentée sur la figure 6.1.

Finalement, afin d'évaluer le comportement des méthodes présentées dans ce chapitre lorsque les données augmentent en complexité et en niveau d'incertitude, nous considérons à nouveau

[2] *Backward Differentiation Formula*

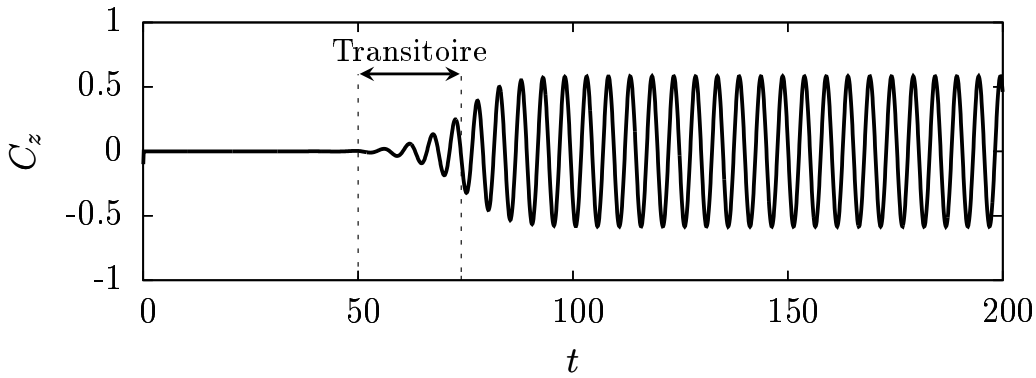


Figure 6.1 – Evolution temporelle du coefficient de portance C_z pour la simulation de l'écoulement autour du cylindre à $Re = 200$. En pointillés : fenêtre temporelle utilisée pour les données en régime transitoire.

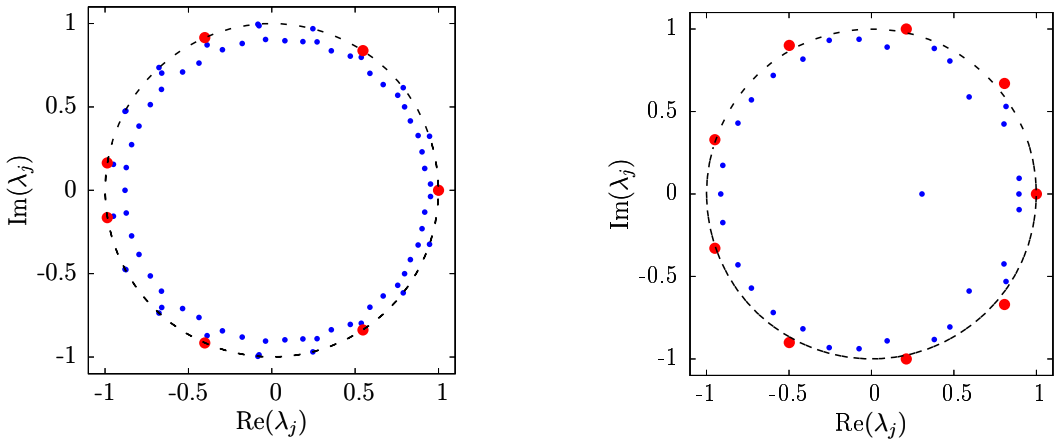
la base de données expérimentale de l'écoulement autour d'un cylindre à $Re = 13000$ présentée à la section 5.5.

6.5.2 Sélection des modes

A la section 5.5, lors de la première application de la DMD, nous avons vu que la sélection des modes pouvait être difficile et que l'utilisation du critère énergétique E_j défini en (6.2) pouvait mettre en évidence la fréquence d'oscillation de von Kármán. Dans cette section, nous allons tester les critères de sélection des modes discutés à la section 6.1 dans le cas plus cadré des données numériques. Nous allons voir que le choix du critère de sélection dépend des données et du phénomène que l'on souhaite mettre en évidence.

L'algorithme DMD classique est appliqué sur les deux bases de données numériques. La figure 6.2 représente les valeurs propres de Ritz dans le plan complexe. Les taux de croissances correspondants sont tracés en fonction de la pulsation sur la figure 6.3. Enfin, le contenu énergétique E_j défini par (6.2) est tracé sur la figure 6.4 en fonction de la pulsation.

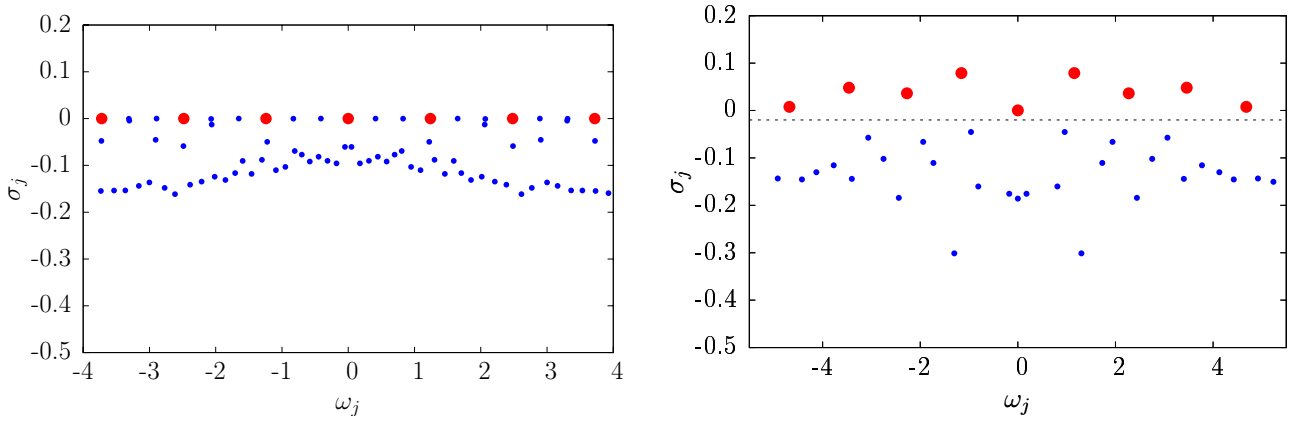
Sur la figure 6.2(a), nous constatons qu'en régime permanent, un sous ensemble de valeurs propres se trouvent très proches du cercle unité, tandis que les autres se trouvent clairement à l'intérieur et sont donc fortement amortis. Cela montre que lorsque l'algorithme DMD est bien conditionné par un choix adéquat des paramètres de la base de données, et que l'écoulement est en régime parfaitement établi, alors la dynamique peut être représentée avec un nombre limité de modes DMD dont le taux de croissance est proche d'être nul (voir figure 6.3(a)). En outre, les valeurs propres situées à l'intérieur du cercle unité sont associées à des modes de faibles amplitudes (figure 6.4(a)), ce qui conforte l'idée qu'ils peuvent ne pas être pris en compte dans



(a) Régime permanent. Les modes sélectionnés en fonction du critère énergétique E_j sont représentés en rouge, les autres en bleu.

(b) Régime transitoire. Les modes sélectionnés en fonction du taux de croissance σ_j sont représentés en rouge, les autres en bleu.

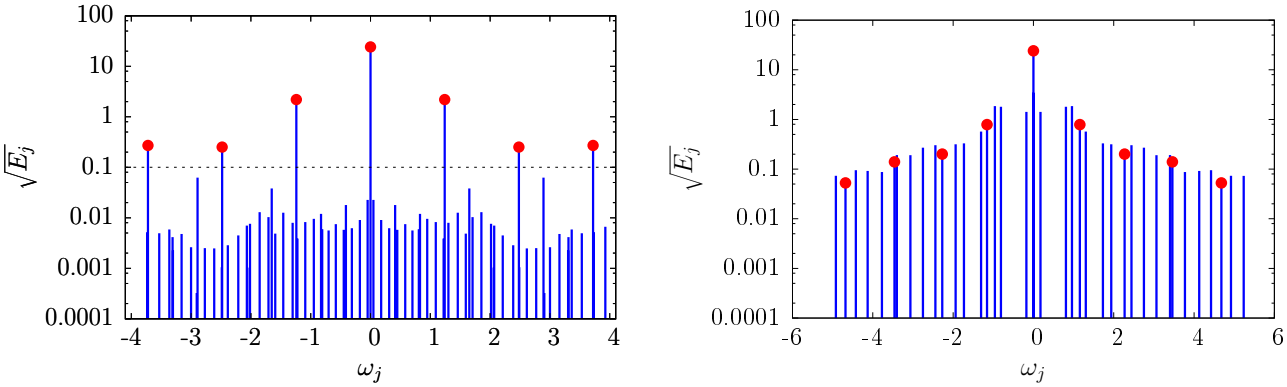
Figure 6.2 – Représentation des valeurs propres de Ritz dans le plan complexe.



(a) Régime permanent. Les modes sélectionnés en fonction du critère énergétique E_j sont représentés en rouge, les autres en bleu.

(b) Régime transitoire. Les modes sélectionnés en fonction du taux de croissance σ_j sont représentés en rouge, les autres en bleu.

Figure 6.3 – Représentation du taux de croissance σ_j en fonction de la pulsation ω_j.



(a) Régime permanent. Les modes sélectionnés en fonction du critère énergétique E_j sont représentés en rouge, les autres en bleu.

(b) Régime transitoire. Les modes sélectionnés en fonction du taux de croissance σ_j sont représentés en rouge, les autres en bleu.

Figure 6.4 – Représentation du critère énergétique E_j de chaque mode DMD en fonction de la pulsation ω_j.

la modélisation. Cette séparation au niveau des valeurs propres ne se retrouve pas dans les données expérimentales (voir figure 5.2(b)).

En régime transitoire, le comportement est globalement similaire (figure 6.2(b)), sauf qu'il existe des modes dont les valeurs propres correspondantes ont un module supérieur à 1. Ces modes sont amplifiés comme le montre leur taux de croissance représenté sur la figure 6.3(b). La capacité de la DMD à capturer une dynamique transitoire est due à la possibilité d'avoir ces modes amplifiés.

En régime permanent, des pics sont clairement identifiés sur le contenu énergétique (figure 6.4(a)). Tous les modes possédant le plus fort contenu énergétique (points rouges) sont très proches du cercle unité (figure 6.2(a)) ce qui montre que leur dynamique temporelle est quasi sinusoïdale. Ce résultat confirme par ailleurs ceux obtenus avec les vecteurs propres de Ritz indiquant qu'en régime permanent les modes importants se trouvent près du cercle unité. Ces résultats montrent que pour capturer la dynamique du sillage du cylindre en régime permanent, 7 modes DMD sont nécessaires. Finalement, l'importance du critère énergétique pour la sélection des modes vient confirmer *a posterori* son utilisation pour les données expérimentales du chapitre 5.

Dans le cas du régime transitoire, l'énergie est partagée de manière beaucoup plus uniforme entre les modes (figure 6.4(b)). Le critère énergétique ne constitue donc plus un bon critère de sélection. En revanche, le taux de croissance va permettre de sélectionner les modes importants pour la dynamique (figure 6.3(b)) car seuls 9 modes ont un taux de croissance positif. Pour capturer la transition de l'état stationnaire vers le régime établi gouverné par des allées de Von

Kármán, ces modes de taux de croissance positifs approximeront les modes globaux, et nous pourrons négliger dans la modélisation les modes amortis.

Ces résultats illustrent qu'en fonction du contenu dynamique des données et des phénomènes que nous souhaitons représenter dans le sous-espace DMD, le critère de sélection des modes peut varier. En régime permanent, les modes sélectionnés par taux de croissance ou par niveau énergétique se situent sur le cercle unité, indiquant que le contenu énergétique est un critère de sélection adapté. En régime transitoire, la répartition énergétique des modes est plus uniforme, et il est donc préférable d'utiliser le taux de croissance pour sélectionner les modes importants pour la description dynamique.

6.5.3 Analyse de sensibilité

Afin d'évaluer la sensibilité des modes DMD à la variation d'un paramètre (voir section 6.2), nous avons considéré la base de données numérique à $Re = 200$ en régime permanent. Pour déterminer la sensibilité des réalisations à la variation du nombre de Reynolds, nous avons alors réalisé à partir de la même condition initiale deux simulations supplémentaires, la première pour un nombre de Reynolds égal à 199 (noté Re^-), et la seconde pour 201 (noté Re^+). Par différences finies, nous avons pu estimer la sensibilité des réalisations à la variation du nombre de Reynolds. Le calcul de sensibilité des modes DMD a été effectué d'une part, en suivant la démarche expliquée à la section 6.2, et d'autre part, en effectuant une décomposition DMD pour Re^+ et Re^-, puis en calculant la sensibilité des modes DMD par différences finies.

Si le nombre de réalisations contenu dans la base de données est le même que celui utilisé à la section 6.5.2 ($N = 81$) alors il est nécessaire de réaliser un réordonnancement des modes DMD entre ceux calculés à Re^- et à Re^+. Ce changement de numérotation traduit le fait que les modes DMD sont très sensibles à la modification du nombre de Reynolds pour $Re \simeq 200$. Ce réordonancement rend difficile l'interprétation des modes évalués par différences finis et donc la validation de la démarche. Pour cette raison, nous avons choisi de réduire le nombre de réalisations à $N = 20$, qui est approximativement égal au nombre de modes présents sur le cercle unité sur la figure 6.2(a).

La figure 6.5 représente dans le plan complexe les valeurs propres DMD calculées à $Re = 200$ pour $N = 20$. Nous avons reporté sur cette figure les sensibilités des modes DMD calculées par (6.5) et directement par différences finies. Pour des questions de lisibilité, un facteur d'échelle égal à 700 a été employé. Un bon accord entre les deux méthodes peut être observé.

Dans une démarche d'analyse physique, le calcul des sensibilités permet d'identifier les modes sensibles à une modification du nombre de Reynolds, afin de déterminer si ils ont tendance

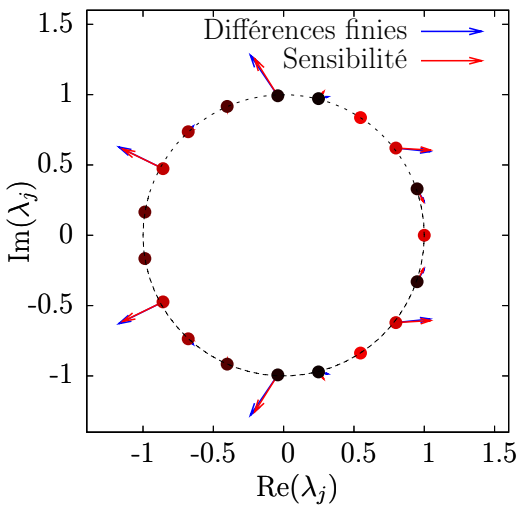


Figure 6.5 – Sensibilité des valeurs propres DMD à la variation du nombre de Reynolds pour le régime permanent. Les points sont colorés par le logarithme du contenu énergétique du mode associé. La sensibilité est calculée par différences finies (flèches bleues) et via (6.5) (flèches rouges).

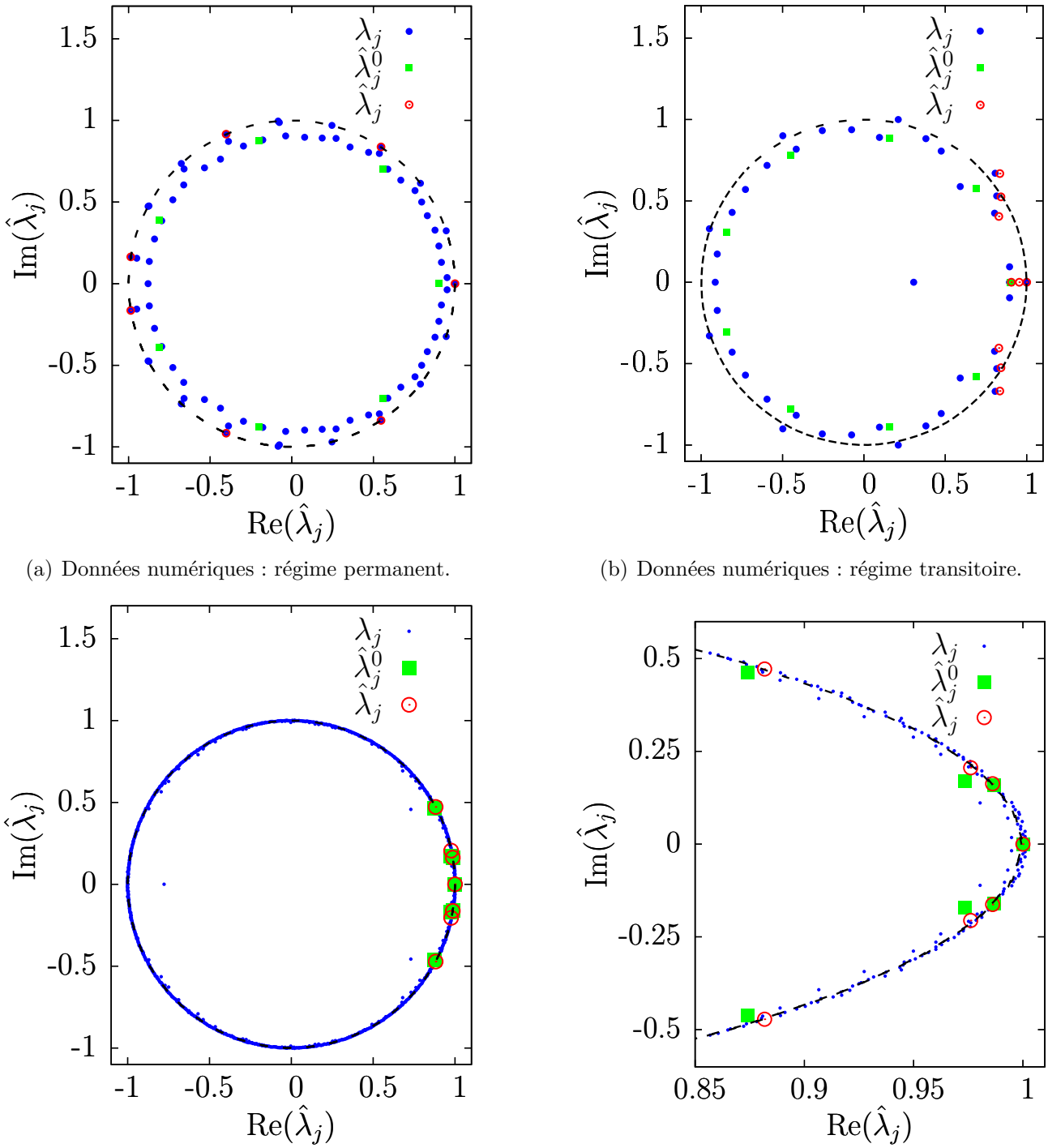
à être plus ou moins amplifiés et d'évaluer l'éventuelle modification de fréquence. En outre, l'analyse de sensibilité peut être utile pour affiner une sélection de modes ou modifier une base de projection.

6.5.4 Optimized DMD

Dans l'algorithme classique DMD décrit au chapitre 5, rien ne prouve que le résidu de l'approximation (5.15) soit minimal. Par ailleurs, l'algorithme est par construction sensible à la dernière réalisation de la base de données. Pour ces raisons, nous avons décrit à la section 6.3 l'optimized DMD, récemment introduit dans Chen *et al.* (2012), qui permet d'approximer des réalisations de l'écoulement d'une manière similaire à la DMD, tout en garantissant un résidu minimal. Dans cette section, nous allons tester l'optimized DMD pour les deux bases de données numériques à $Re = 200$, ainsi que pour la base de données expérimentales. Dans le cas des données numériques, nous allons rechercher les mêmes nombres de modes d'optimized DMD que ceux déterminés à la section 6.5.2, soit $N_o = 7$ pour le régime permanent, et $N_o = 9$ pour le régime transitoire. De même, pour les données expérimentales, nous allons considérer pour N_o le nombre de modes DMD sélectionné à la section 5.5, soit 7.

La figure 6.6 représente les valeurs propres de Ritz obtenues par l'algorithme DMD (λ_j), les valeurs initiales ($\hat{\lambda}_j^0$) et le résultat de l'optimized DMD ($\hat{\lambda}_j$) pour les trois bases de données.

Pour les données numériques, les conditions initiales $\hat{\lambda}_j^0$ de $\hat{\lambda}_j$ sont choisies arbitrairement



(a) Données numériques : régime permanent.

(b) Données numériques : régime transitoire.

(c) Données expérimentales.

(d) Données expérimentales (zoom).

Figure 6.6 – Comparaison des valeurs propres DMD obtenues par : l'algorithme classique (λ_j, en bleu), l'optimized DMD ($\hat{\lambda}_j$, en rouge) avec pour condition initiale ($\hat{\lambda}_j^0$, en vert).

comme les racines N_o-ièmes de l'unité multipliées par $0,9$, tandis que pour les données expérimentales les conditions initiales correspondent aux modes ayant le plus grand contenu énergétique E_j. L'optimized DMD étant résolu via une méthode de gradient, il est nécessaire de tester l'influence du choix de la condition initiale $\hat{\lambda}_j^0$ sur le résultat à convergence. Nous avons remarqué que pour les données numériques l'algorithme est relativement robuste à la variation de la condition initiale, et cela même en la faisant varier de manière importante. Pour les données expérimentales, la robustesse est beaucoup moins forte d'où le choix judicieux de la condition initiale.

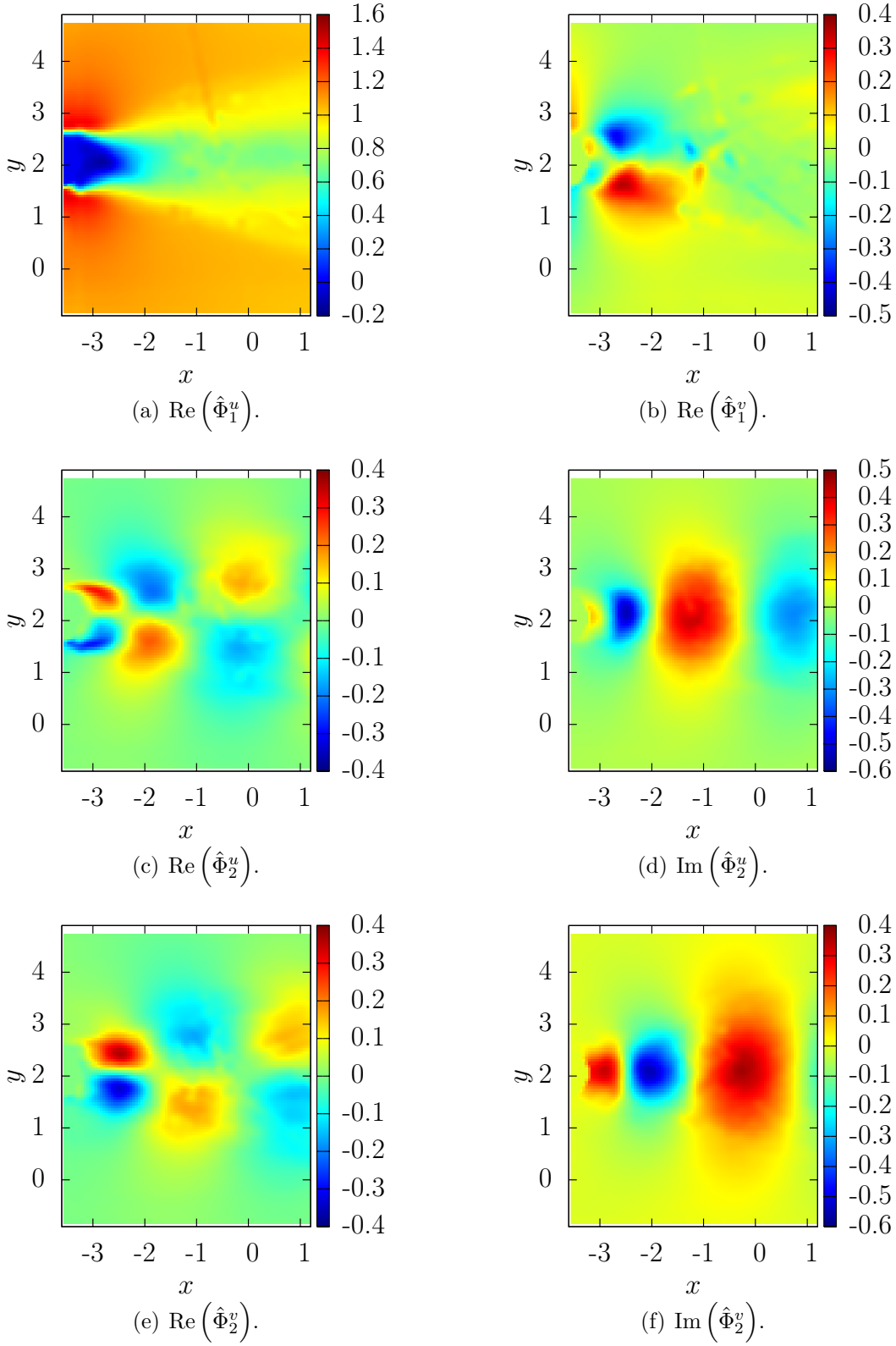
Pour les données numériques en régime permanent, nous constatons que l'optimized DMD retrouve les modes DMD qui ont la plus forte contribution énergétique. Cela signifie que dans ce cas, la sélection des modes par contribution énergétique est pertinente en termes de reconstruction et que l'algorithme DMD est déjà optimal. L'optimized DMD est alors inutile car il ne vient que confirmer le choix des modes.

Pour les données numériques en régime transitoire et les données expérimentales, les valeurs propres déterminées par optimized DMD sont proches des modes de plus fort contenu énergétique mais elles ne correspondent pas exactement. Cela signifie que le critère énergétique défini en (6.2) est lié à la minimisation du résidu ciblé par optimized DMD, mais qu'il existe encore des différences significatives entre modes DMD et modes optimized DMD.

Les figures 6.7 et 6.8 représentent les modes optimized DMD 1, 2, et 4 respectivement, obtenus pour les données expérimentales. Les différences de structure spatiale avec les modes DMD les plus énergétiques sont minimes. Nous avons ensuite testé la capacité de l'optimized DMD à déterminer des modes pertinents pour une représentation réduite des réalisations de la base de données. Pour cela, nous avons tracé sur la figure 6.9 la reconstruction de la réalisation $\boldsymbol{v}_5$ obtenue par (6.7) avec 7 modes optimized DMD. Une erreur de $15,6\%$ en norme L^2 est alors commise. Cette valeur est à comparer avec celle trouvée à la section 5.5 où une erreur de reconstruction de $45,6\%$ avait été trouvée pour le même type de reconstruction réalisée cette fois avec les 7 modes les plus énergétiques (voir figure 5.8(a), rappelée figure 6.9(b)).

Il est important de noter que la reconstruction réalisée précédemment en utilisant (6.7) ne correspond pas à la projection de la réalisation sur la base $\hat{\Phi}$. En effet, en considérant $a_i^{\text{Proj}}(t)$ les coefficients de projection, nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_k &= \sum_{i=1}^{N_o} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i \hat{\lambda}_i^{k-1} + \boldsymbol{r}_k = \hat{\boldsymbol{v}}_k + \hat{\boldsymbol{r}}_k \\ &= \sum_{i=1}^{N_o} \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i a_i^{\text{Proj}}(t_k) + \tilde{\boldsymbol{r}}_k = \boldsymbol{v}_k^{\text{Proj}} + \boldsymbol{r}_k^{\text{Proj}} \end{aligned} \tag{6.14}$$



(a) Re $\left(\hat{\Phi}_1^u\right)$.

(b) Re $\left(\hat{\Phi}_1^v\right)$.

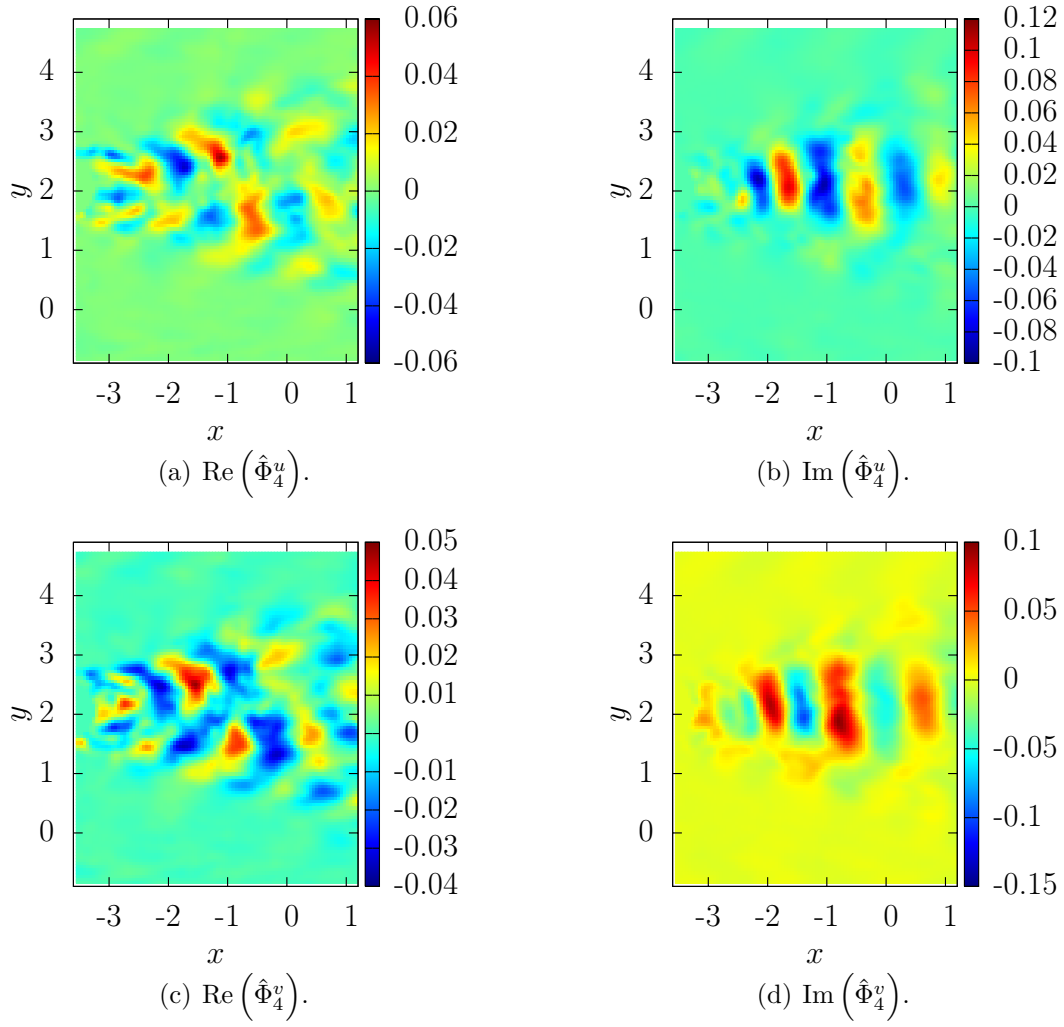
(c) Re $\left(\hat{\Phi}_2^u\right)$.

(d) Im $\left(\hat{\Phi}_2^u\right)$.

(e) Re $\left(\hat{\Phi}_2^v\right)$.

(f) Im $\left(\hat{\Phi}_2^v\right)$.

Figure 6.7 – Modes optimized DMD 1 et 2 pour les données expérimentales.



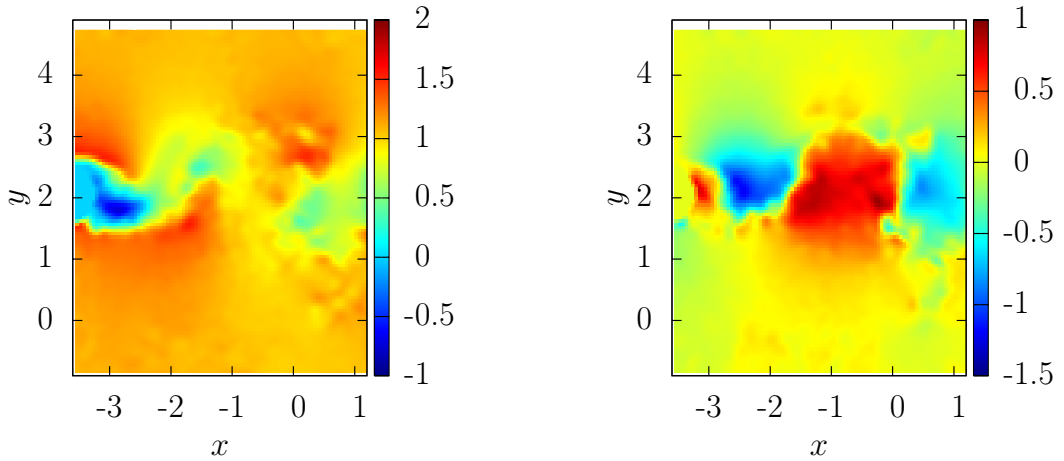
(a) Re $\left(\hat{\Phi}_4^u\right)$.

(b) Im $\left(\hat{\Phi}_4^u\right)$.

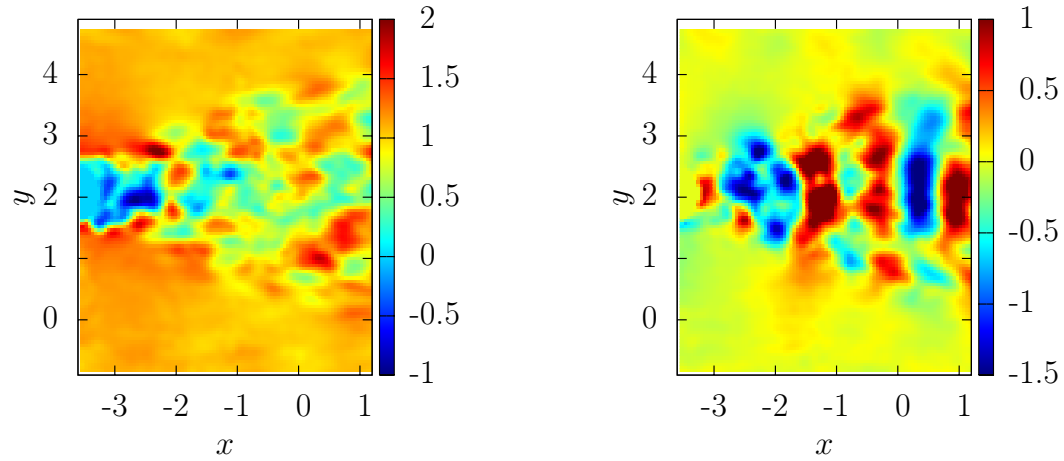
(c) Re $\left(\hat{\Phi}_4^v\right)$.

(d) Im $\left(\hat{\Phi}_4^v\right)$.

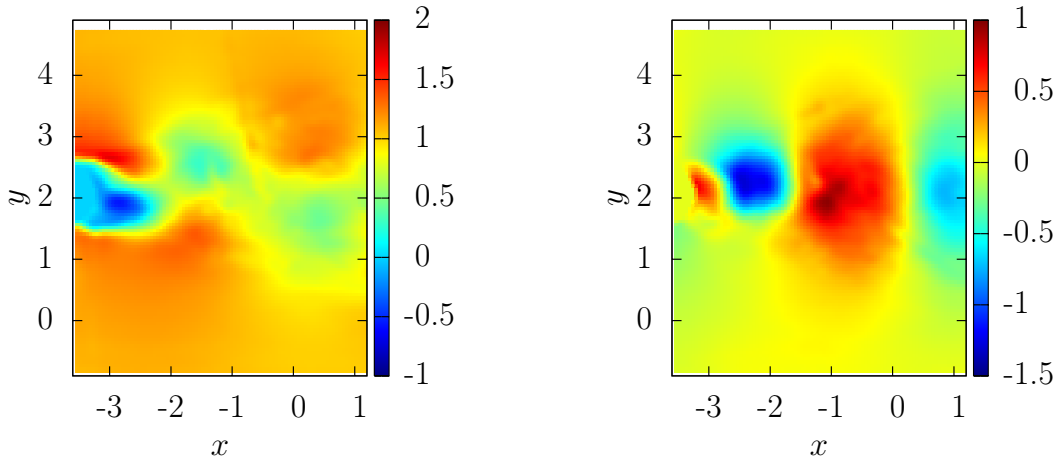
Figure 6.8 – Mode optimized DMD 4 pour les données expérimentales.



(a) Champ original de u et v.



(b) Estimation de u et v avec les 7 modes DMD « classiques » les plus énergétiques. Erreur $45,6\%$ en norme L^2.



(c) Estimation de u et v avec les 7 modes optimized DMD. Erreur $15,6\%$ en norme L^2.

Figure 6.9 – Reconstructions des composantes longitudinale u (à gauche) et verticale v (à droite) de la réalisation $\boldsymbol{v}_5$ avec 7 modes DMD « classiques » et 7 modes optimized DMD comparés à la réalisation d'origine.

avec $\|\boldsymbol{r}_k^{\text{Proj}}\| \leq \|\hat{\boldsymbol{r}}_k\|$. L'optimized DMD peut être vue comme la minimisation du résidu sous la contrainte[3] d'une dynamique linéaire.

L'optimized DMD est une méthode qui peut être utilisée pour améliorer la représentativité de la base réduite DMD, tout en conservant une bonne description dynamique. Nous avons vu que dans le cas de données numériques la procédure était relativement robuste au changement de la condition initiale. En outre, l'approximation sur les modes d'optimized DMD est en général meilleure que sur les modes DMD, et nous évitons ainsi de sélectionner les modes, ce qui reste délicat en DMD. Toutefois, l'optimized DMD repose sur la résolution d'un problème d'optimisation qui peut être coûteux selon les cas.

6.5.5 Chronos-Koopman

La méthode de Chronos-Koopman présentée à la section 6.4 consiste essentiellement à appliquer l'algorithme DMD basé sur la SVD à une matrice d'observation contenant les fonctions propres POD temporelles. Le rapport entre le nombre de réalisations N utilisé dans la décomposition POD et le nombre de modes N_{Gal} conservé va déterminer le niveau de surdétermination du problème, et donc indirectement le niveau de filtrage lors de la régularisation SVD.

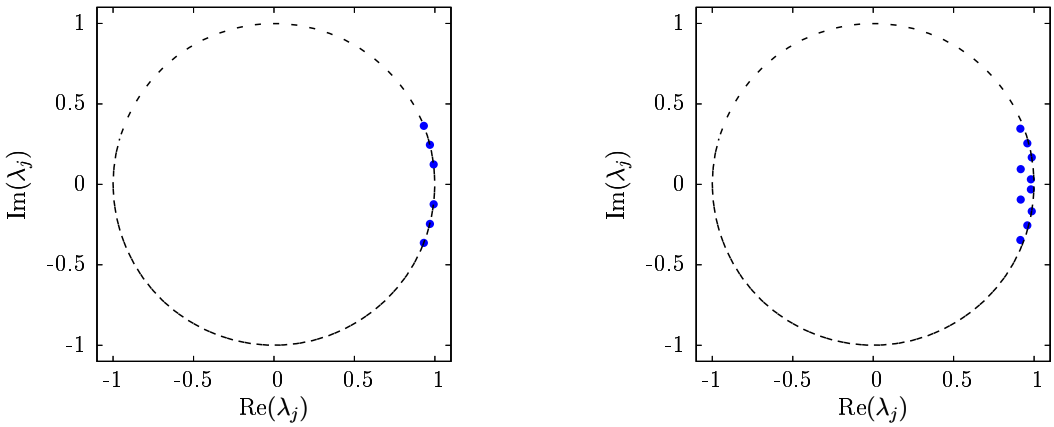
Dans cette section, nous allons tester la méthode de Chronos-Koopman sur les données numériques en régime permanent et sur les données expérimentales. Pour les données numériques, la POD est tout d'abord appliquée sur $N_{\text{Snap}} = 1000$ échantillons pour créer les fonctions propres temporelles POD, considérées comme observables. La moitié[4] de ces observations, soit $N = 500$ échantillons est considérée pour effectuer l'analyse spectrale de Chronos-Koopman sur $N_{\text{Gal}} = 6$ modes POD qui représentent $99,9\%$ de l'énergie de l'écoulement. Pour les données expérimentales, le nombre d'échantillons pour effectuer la POD est de $N_{\text{Snap}} = 1001$, le nombre d'échantillons retenus pour l'analyse de Chronos-Koopman est $N = 100$, et le nombre de modes POD conservés est $N_{\text{Gal}} = 10$, ce qui mène à un niveau de surdétermination raisonnable.

La figure 6.10 représente les valeurs propres issues de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman pour les deux bases de données. Nous constatons que les valeurs propres sont situées sur le cercle unité et sont associées à des basses fréquences. Ce résultat est attendu car le fait de conserver dans l'analyse uniquement les premiers modes POD et d'utiliser une procédure d'inversion par SVD, provoquent un filtrage temporel.

L'analyse spectrale de Chronos-Koopman permet d'effectuer une double décomposition des réalisations contenues dans la base de données, la première selon un axe lié aux modes POD,

[3] Cette contrainte est relâchée lors de la projection sur $\hat{\Phi}$, d'où l'inégalité $\|\boldsymbol{r}_k^{\text{Proj}}\| \leq \|\hat{\boldsymbol{r}}_k\|$.

[4] L'autre moitié de la base de données sera utilisée pour tester la capacité du modèle à représenter un ensemble de réalisations non pris en compte dans le modèle.



(a) Données numériques : régime permanent.

(b) Données expérimentales.

Figure 6.10 – Valeurs propres λ_j^K issues de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman. Pour les données numériques, les paramètres de l'analyse sont $N = 500$ et $N_{\text{Gal}} = 6$, tandis que pour les données expérimentales les paramètres sont $N = 100$ et $N_{\text{Gal}} = 10$.

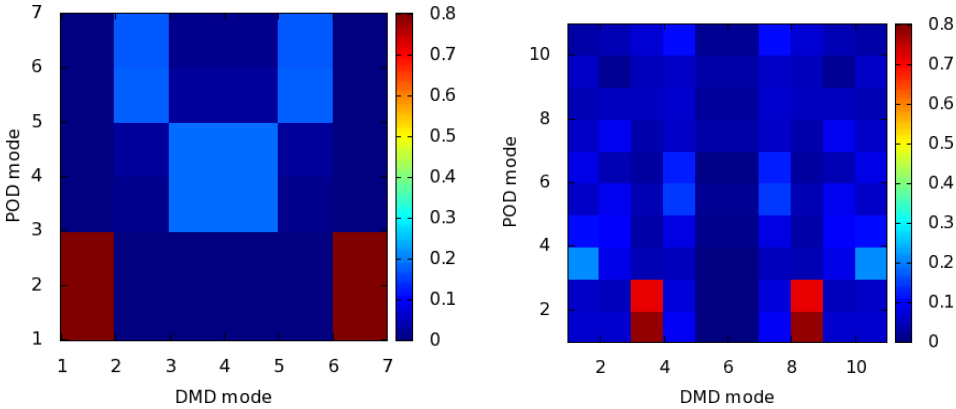
et la seconde selon un axe fréquentiel lié à la DMD. La figure 6.11 représente l'amplitude des modes issus de Chronos-Koopman ($\|\mathbf{\Phi}_j^K(i)\|$) en fonction de l'indice du mode POD (i) et du mode DMD (j). Nous constatons que du fait de leur comportement à tendance sinusoïdale, les deux premiers modes POD sont essentiellement associés à deux modes DMD complexes conjugués.

Au chapitre 7, nous utiliserons cette décomposition pour identifier un système linéaire reproduisant la dynamique temporelle des premiers modes POD.

6.6 Synthèse

Dans ce chapitre, différentes stratégies ont été discutées pour déterminer une base réduite basée sur les modes DMD. Nous avons d'abord présenté l'algorithme DMD sous forme classique, puis nous avons décrit comment évaluer la sensibilité des modes DMD à la variation d'un paramètre quelconque. Par la suite, nous avons introduit l'optimized DMD qui permet d'obtenir un résidu minimal, puis nous avons terminé avec la méthode de Chronos-Koopman qui revient à décomposer en modes POD, et en modes DMD, les réalisations contenues dans la base de données.

Pour la sélection des modes, nous avons mis en évidence un critère énergétique intéressant. En pratique, ce critère est à utiliser de manière conjointe avec les informations issues du comportement fréquentiel et de la variation des taux de croissance associés à chacun des modes.



(a) Données numériques : régime permanent.

(b) Données expérimentales.

Figure 6.11 – Amplitudes des modes propres $\mathbf{\Phi}_j^K(i)$ issus de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman. i et j représentent l'indice du mode POD et du mode DMD, respectivement. Pour les données numériques, les paramètres de l'analyse sont $N = 500$ et $N_{\text{Gal}} = 6$, tandis que pour les données expérimentales les paramètres sont $N = 100$ et $N_{\text{Gal}} = 10$.

Nous nous sommes également intéressés à l'algorithme d'optimized DMD introduit par Chen *et al.* (2012), que nous avons amélioré en déterminant de manière analytique le gradient de la fonctionnelle coût, ce qui a permis l'utilisation d'algorithmes de type quasi-Newton.

Toutes ces méthodes ont été testées sur des données numériques et expérimentales correspondant à l'écoulement autour d'un cylindre. Nous verrons au chapitre 7 comment exploiter ces bases réduites et les propriétés de la DMD pour développer un modèle réduit représentatif de la dynamique du système.

Chapitre 7

Modèles réduits basés sur les modes DMD

Table des matières

7.1 Propriété de propagation temporelle **129**

7.2 Projection de Petrov-Galerkin **133**

7.3 Synthèse **136**

Aux chapitres 5 et 6, nous avons montré que pour l'algorithme DMD classique, l'optimized DMD et l'analyse spectrale de Chronos-Koopman, l'hypothèse faite sur la représentation des réalisations par une dynamique linéaire menait à la détermination d'une base de représentation, ainsi qu'à l'introduction d'un propagateur temporel à valeurs discrètes. Dans ce chapitre, nous évaluerons la possibilité de construire un modèle réduit basé sur les modes DMD. A la section 7.1, la propriété de propagation linéaire sera tout d'abord exploitée, puis un modèle réduit sera construit par projection de Petrov-Galerkin (section 7.2). Chacune de ces approches étant importante en termes de modélisation, nous discuterons à la section 7.3 la possibilité de leur utilisation conjointe, ce qui nous amènera naturellement à introduire les méthodes d'assimilation de données en partie III.

7.1 Propriété de propagation temporelle

Par définition (chapitre 5), la DMD identifie un opérateur linéaire qui représente au mieux une séquence de réalisations contenues dans une base de données. Une des conséquences directes est

que chaque mode DMD contient une fréquence unique. Pour toutes les méthodes présentées aux chapitres 5 et 6, l'effet de l'opérateur linéaire sur l'avancement en temps peut s'écrire comme :

$$\boldsymbol{v}_k = \sum_{j=1}^{N_{\text{DMD}}} \lambda_j^{k-1} \boldsymbol{\Phi}_j \quad \text{pour} \quad k = 1, \cdots, N \tag{7.1}$$

où N_{DMD} est le nombre de modes DMD relatif à chacune des méthodes. Pour avancer d'un pas de temps, il suffit donc de multiplier la contribution de chaque mode intervenant dans la décomposition (7.1) par la valeur propre complexe correspondante.

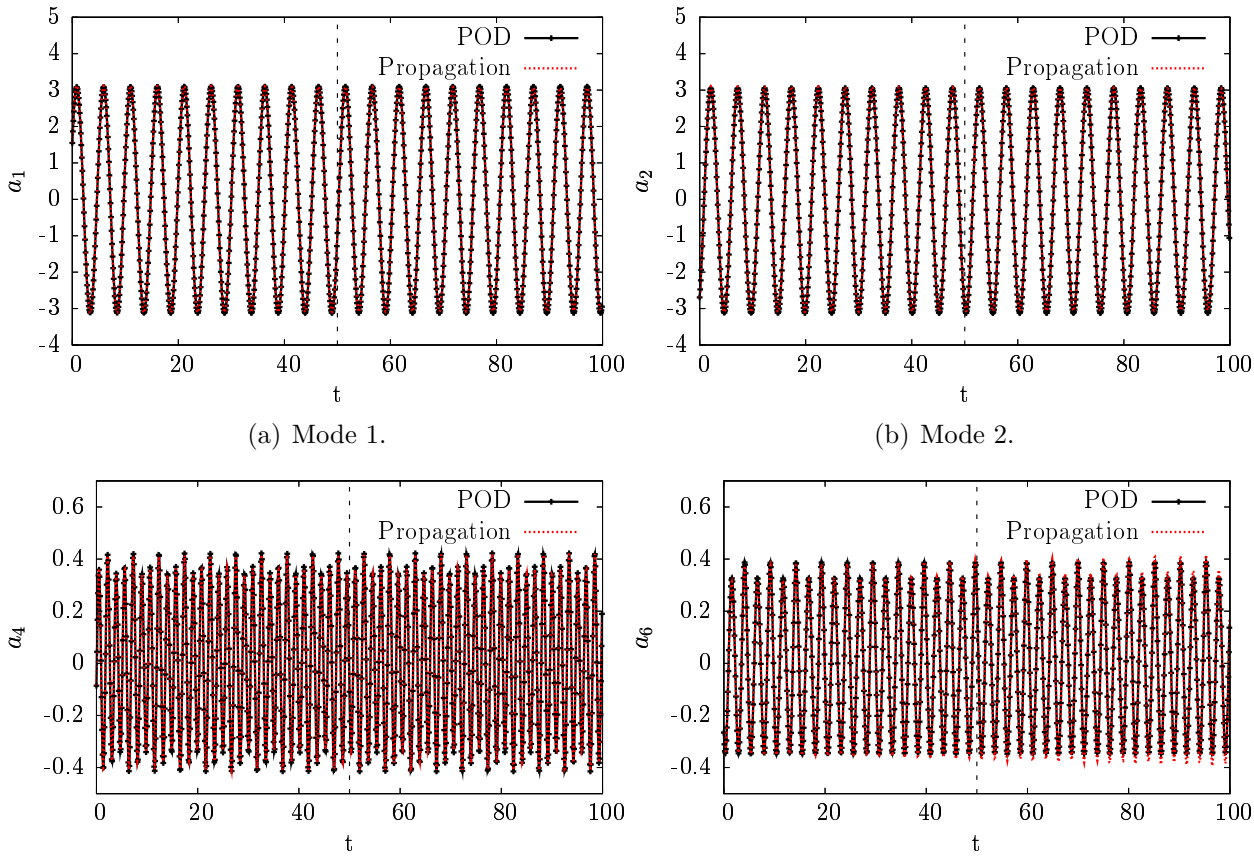
Si l'hypothèse de l'existence de l'opérateur dynamique linéaire A, défini en (5.7), correspond à une réalité physique[1] (systèmes linéaires, ou faiblement non-linéaires, ainsi que pour des données évoluant sur un cycle limite), alors il est justifié de propager la solution en temps en utilisant cet opérateur. En représentation réduite, nous avons vu au chapitre 6 que l'approximation du comportement dynamique du système dans le sous-espace DMD pouvait être pertinente si la base $\boldsymbol{\Phi}_j$ avait été choisie correctement. Le propagateur dépend donc fortement des données pour lesquelles la DMD a été appliquée, en particulier de la validité de l'hypothèse de linéarité, du régime considéré et des réalisations envisagées pour appliquer la DMD.

A priori, toutes les méthodes présentées au chapitre 6 peuvent être utilisées pour évaluer l'utilisation de la propriété de propagation temporelle à représenter et prédire la dynamique du système. Nous avons toutefois choisi d'utiliser l'approche de Chronos-Koopman qui consiste à appliquer la version SVD de l'algorithme classique DMD aux N_{Gal} premières fonctions propres temporelles POD. En effet, dans cette approche, il n'y a pas à discuter de la sélection des modes définissant le sous-espace d'approximation, ce qui permet de se focaliser sur l'aspect prédiction temporelle via un processus autorégressif.

Pour commencer, nous avons considéré les données numériques en régime permanent. Dans ce cas, les 6 premiers modes POD (voir figure 7.1) représentent $99,9\%$ du contenu énergétique de l'écoulement. L'analyse spectrale de Chronos-Koopman est effectuée sur les 500 premières réalisations de la base de données, les autres réalisations étant utilisées pour valider la prédiction. La dynamique temporelle prédite par le modèle de Chronos-Koopman est également représentée sur la figure 7.1. Nous trouvons qu'une reconstruction linéaire faite sur 6 modes permet de représenter parfaitement l'évolution des premiers modes POD sur la fenêtre temporelle d'analyse, ainsi que sur les 500 pas de temps suivant. Ces bons résultats sont largement

[1] La linéarité des données peut être contrôlée soit en appliquant le principe de superposition, soit en utilisant des tests statistiques comme le test de Tsay (Tsay, 1989) qui existe également en version multivariée (Harvill et Ray, 1999). On peut imaginer ainsi déterminer les zones de l'écoulement où l'hypothèse d'approximation linéaire est vérifiée afin de restreindre l'application de la DMD à cette zone.

expliqués par le fait que la base de données correspond à une dynamique de cycle limite.



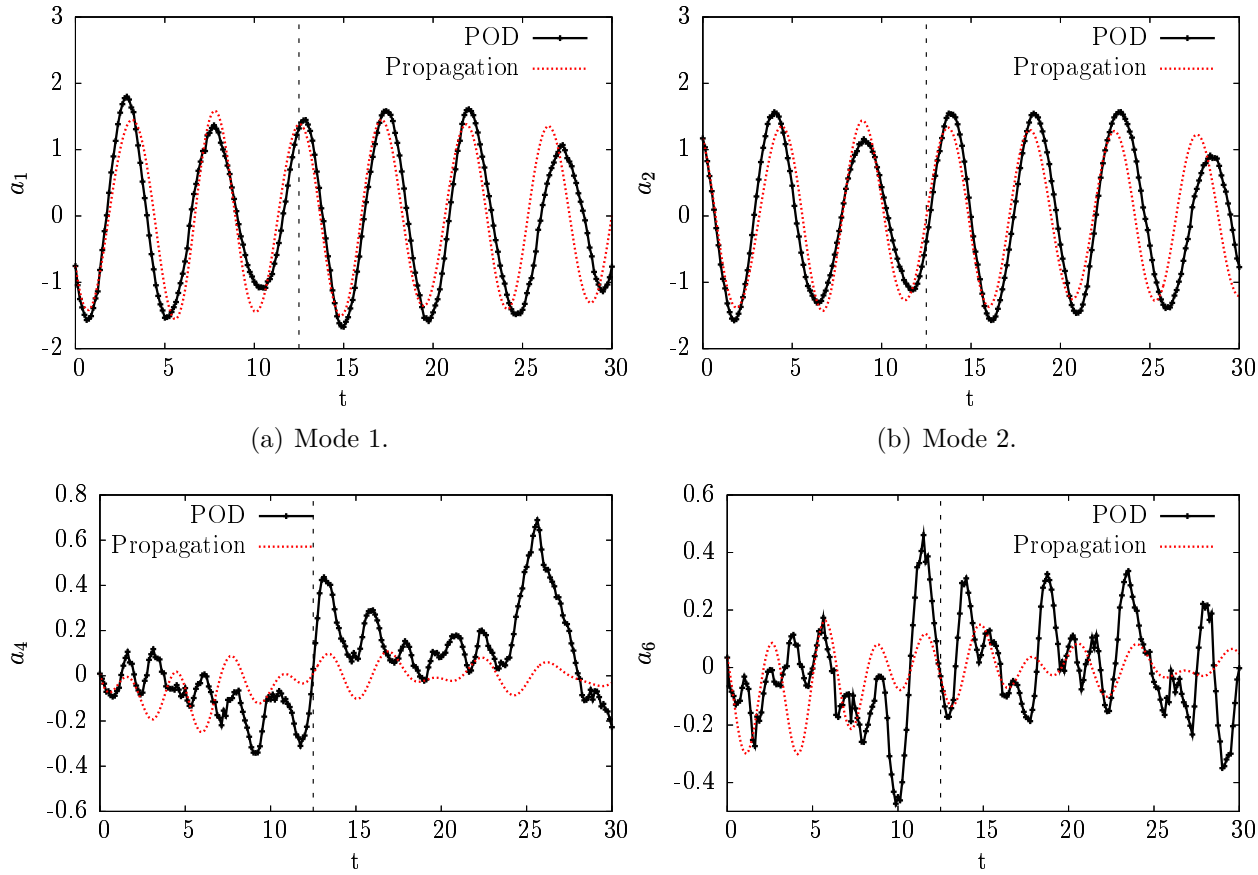
(a) Mode 1. (b) Mode 2.

(c) Mode 4. (d) Mode 6.

Figure 7.1 – Comparaisons des fonctions propres temporelles POD (noir) aux prédictions faites par les modes issus de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman (rouge) pour les données numériques en régime permanent. La méthode de Chronos-Koopman est appliquée pour $N_{\text{Gal}} = 6$ et $N = 500$ soit jusqu'au trait vertical pointillé. Les autres réalisations contenues dans la base de données sont utilisées pour tester la prédiction.

Le cas des données numériques étant relativement bien cadré, nous pouvons maintenant considérer celui des données expérimentales. Nous réalisons alors la même analyse spectrale de Chronos-Koopman pour les 10 premiers modes POD (79% d'énergie capturée) et les 100 premières réalisations de la base de données. On trouve que le modèle de Chronos-Koopman se comporte correctement pour les deux premiers modes POD représentatifs du lâcher tourbillonnaire de von Kármán (voir figure 7.2). En revanche, le comportement du modèle est beaucoup moins fidèle pour les modes élevés. Pour les données expérimentales, l'hypothèse de linéarité est probablement à remettre en cause. Pour ce type de dynamique, la construction d'un modèle réduit basé sur les modes DMD sera donc plus délicate et il faudra recourir à d'autres équations

de contraintes pour suivre la dynamique.



(a) Mode 1.

(b) Mode 2.

(c) Mode 4.

(d) Mode 6.

Figure 7.2 – Comparaisons des fonctions propres temporelles POD (noir) aux prédictions faites par les modes issus de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman (rouge) pour les données expérimentales. La méthode de Chronos-Koopman est appliquée pour $N_{\text{Gal}} = 10$ et $N = 100$ soit jusqu'au trait vertical pointillé. Les autres réalisations contenues dans la base de données sont utilisées pour tester la prédiction.

Pour terminer, nous avons également considéré l'effet de la modélisation linéaire sur une dynamique en régime transitoire. Les résultats sont reportés à la section B.6. Pour les données numériques en régime transitoire, nous avons plutôt utilisé comme base réduite les modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Sans surprise (voir figure B.2), le modèle de propagation linéaire représente bien la croissance des instabilités mais est incapable de capturer le phénomène de saturation non-linéaire. Cet exemple permet également de montrer les limites d'une modélisation linéaire.

Dans cette section, nous avons montré que l'identification d'un système linéaire à l'aide d'un modèle DMD pouvait être intéressante en termes de modélisation dynamique. En effet, le

propagateur linéaire ainsi identifié représente correctement la dynamique du système lorsque les réalisations contenues dans la base de données se comportent de manière linéaire. En revanche, si ce n'est pas le cas, comme pour les données expérimentales ou celles en régime transitoire, alors cette représentation, que l'on peut qualifier de purement *cinématique*, peut ne pas être suffisante. Dans cette première approche, nous avons complètement oublié les équations de premier principe (équations de Navier-Stokes, ici) qui gouvernent l'évolution du système. Pour cette raison, nous étudierons à la section suivante l'utilisation d'une projection de Petrov-Galerkin sur une base composée de modes DMD.

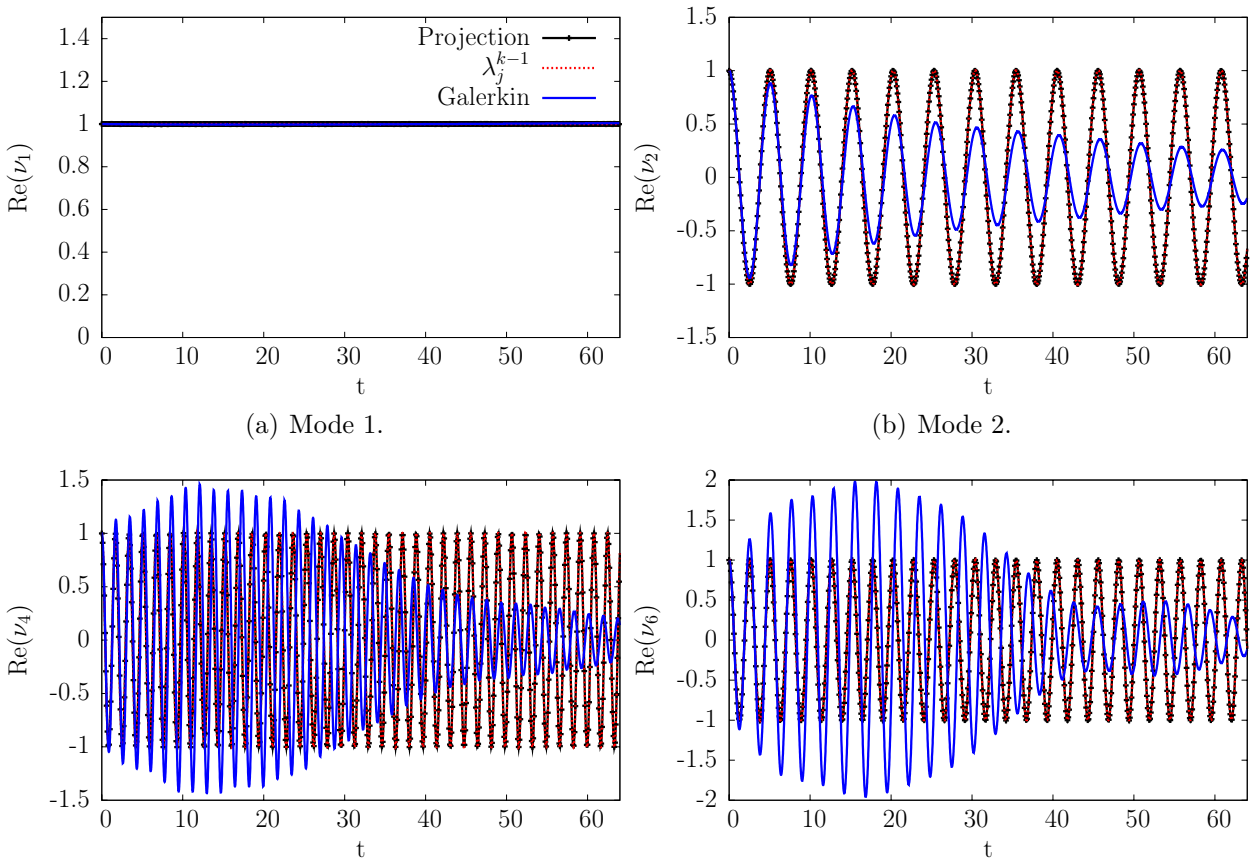
7.2 Projection de Petrov-Galerkin

L'objectif de cette section est de construire par projection de Petrov-Galerkin (voir chapitre 2) un modèle réduit dynamique utilisant les modes DMD tels que déterminés au chapitre 6. En principe, les fonctions test $\mathbf{\Psi}_i$ peuvent être choisies comme les modes DMD adjoints définis à la section 5.4.3.2. Cependant, si par construction ces modes sont bien adjoints à la base DMD, certains de ceux-ci ont une structuration spatiale à petite échelle qui peut les laisser considérer comme des modes parasites[2] purement numériques. Pour cette raison, nous considérerons $\mathbf{\Psi}_i = \mathbf{\Phi}_i$ et effectuerons une projection de Galerkin. Les modes DMD n'étant pas orthonormaux, nous devrons inverser une matrice de masse M_{ij} pendant l'intégration du modèle réduit. En pratique, cette inversion ne pose pas de problème particulier du fait de la faible dimension et du choix judicieux des modes[3]. En outre, ce choix de fonctions test permet d'effectuer la projection de Galerkin dans le cas de modes optimized DMD, pour lesquels les modes adjoints ne sont pas disponibles.

Afin de tester la capacité des modes DMD à être utilisés dans une projection de Galerkin, nous allons commencer par la base de données numériques en régime permanent. La figure 7.3 représente les coefficients temporels obtenus par DMD et comme solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Cette figure montre que le modèle Galerkin ne reproduit pas de manière satisfaisante l'amplitude des coefficients temporels. Toutefois, il semble que le comportement fréquentiel soit bien repré-

[2]En effet, les modes adjoints $\mathbf{\Psi}_i$ sont bi-orthonormaux aux éléments de la base Φ complète. C'est à dire que $(\mathbf{\Psi}_i, \mathbf{\Phi}_j) = \delta_{ij}$ pour tous les indices j, y compris ceux des modes DMD « parasites », alors que pour effectuer une projection de Petrov-Galerkin, cette propriété de bi-orthonormalité est seulement nécessaire pour les modes sélectionnés. C'est pourquoi nous nous orientons par la suite vers l'inversion d'une matrice de Gram de faible dimension.

[3]Un choix judicieux de modes entraîne une base dont les vecteurs ne sont pas trop colinéaires ce qui favorise le conditionnement de la matrice de masse M.



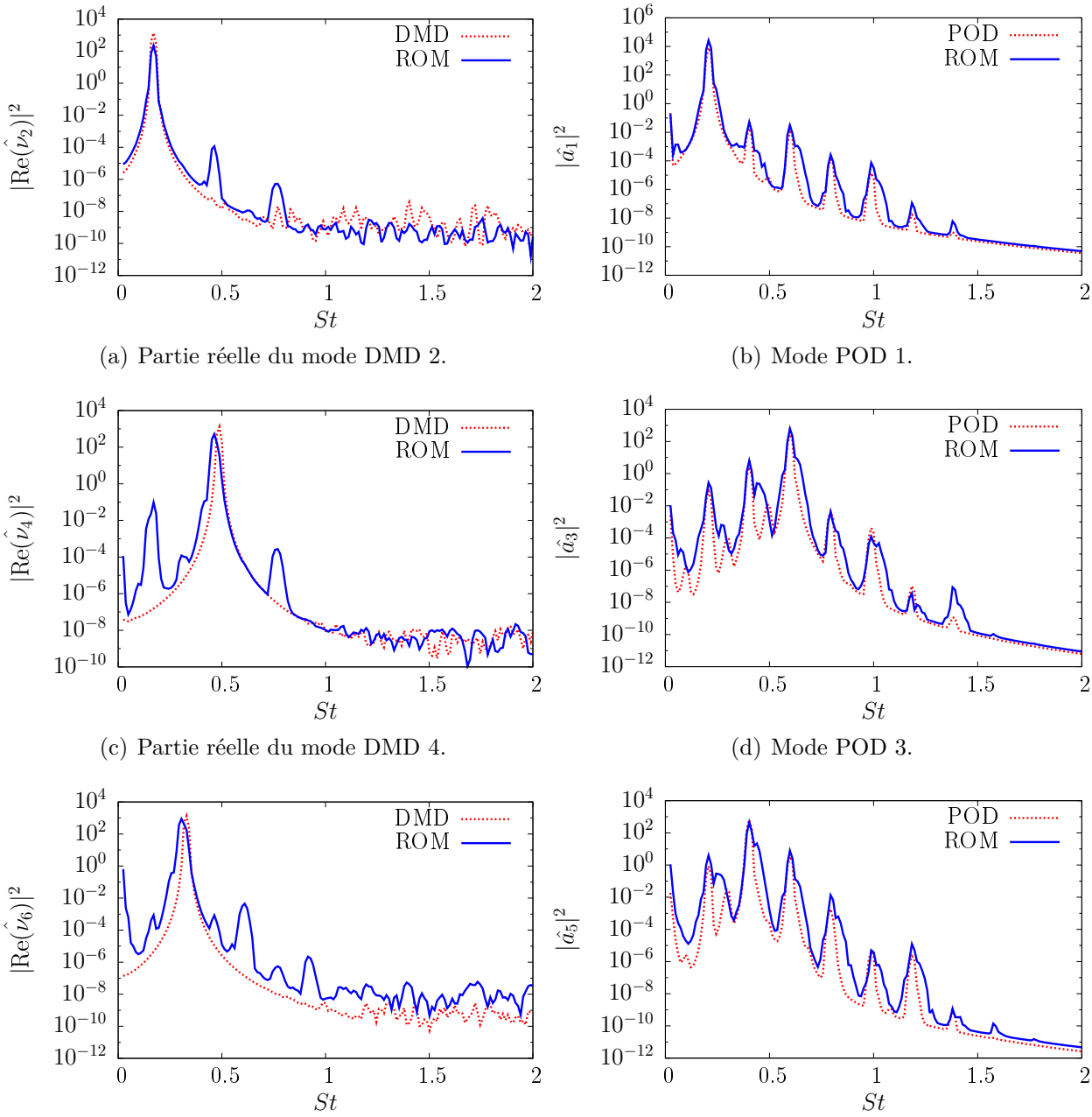
(a) Mode 1. (b) Mode 2.

(c) Mode 4. (d) Mode 6.

Figure 7.3 – Comparaisons des coefficients temporels obtenus par DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. La projection des réalisations sur les modes DMD est tracée en noire. Cas des données numériques en régime permanent.

senté. Pour confirmer cette impression, nous avons décidé de réaliser une étude spectrale des coefficients temporels provenant de DMD. La colonne gauche de la figure 7.4 représente les densités spectrales d'énergie correspondantes. Comme c'était attendu, nous trouvons que chaque mode DMD ne possède qu'une seule fréquence. Par ailleurs, ces résultats viennent confirmer que le modèle Galerkin est capable de reproduire de manière précise les fréquences dominantes présentes dans la base de données.

Pour aller plus loin, nous avons décidé de comparer le comportement fréquentiel issu de l'analyse DMD avec celui que l'on aurait obtenu à partir de la POD. Afin que les comparaisons ne dépendent pas du nombre de modes considérés, nous avons développé un modèle réduit POD par projection sur les 6 premiers modes POD, le champ moyen ayant été retranché avant d'appliquer la décomposition POD. Puisque la base réduite DMD précédente contenait 7 modes,



(a) Partie réelle du mode DMD 2.

(b) Mode POD 1.

(c) Partie réelle du mode DMD 4.

(d) Mode POD 3.

(e) Partie réelle du mode DMD 6.

(f) Mode POD 5.

Figure 7.4 – Spectres des coefficients temporels. Sur la colonne de gauche, les coefficients sont obtenus par DMD (en rouge) et comme solutions (en bleu) du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Sur la colonne de droite, les coefficients sont obtenus par POD (en rouge) et comme solutions (en bleu) du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 6 premiers modes POD. Cas des données numériques en régime permanent.

dont le champ moyen, nous pouvons considérer que les deux bases ont la même dimension. Les résultats d'analyse spectrale relatifs à la POD sont représentés sur la colonne droite de la figure 7.4. Pour les modes DMD, nous avions remarqué que chaque mode était mono-fréquentiel, soit $St = 0,2$ (mode 2), $St = 0,4$ (mode 6) et $St = 0,6$ (mode 4). Nous constatons que ces différentes fréquences sont présentes dans les modes POD, à l'exception du mode POD 1 qui ne contient que la fréquence $St = 0,2$. En outre, nous observons que comme ce fut le cas pour le modèle basé sur la DMD, le modèle issu de projection de Galerkin sur les modes POD est capable de prédire ces pics de manière précise.

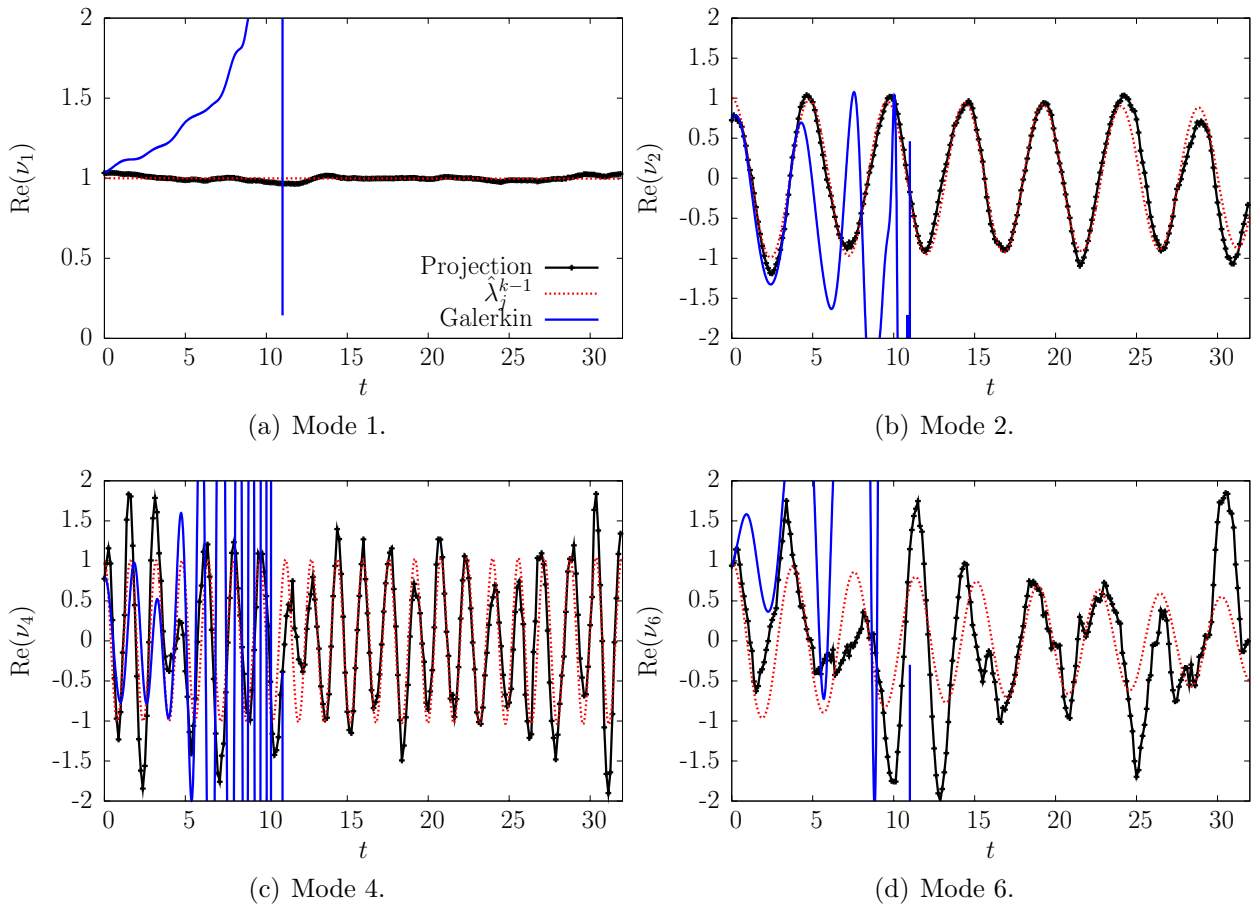
Nous avons également testé la projection de Galerkin sur les modes DMD pour les données numériques en régime transitoire. Les résultats sont reportés à la section B.6. Deux types de modèle réduit ont été testés, le premier utilise les modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2 (voir figure B.1) alors que le second utilise les modes optimized DMD déterminés à la section 6.5.4 (voir figure B.3). Dans les deux cas, le comportement des modèles est correct dans les premiers instants puis les modèles s'écartent rapidement de la base de données. Finalement, nous avons également testé (figure 7.5) la projection de Galerkin sur les modes optimized DMD pour les données expérimentales ($N_o = 7$). De la même manière, le comportement à long terme n'est pas satisfaisant.

La projection de Galerkin sur les modes DMD est capable de reproduire les fréquences dominantes de l'écoulement pour des données numériques en régime permanent. En revanche, pour des dynamiques plus complexes comme dans le cas du régime transitoire ou des données expérimentales, le comportement à long terme n'est pas correct. La projection de Galerkin à elle seule n'est pas entièrement satisfaisante. Il est donc nécessaire de modifier notre approche afin d'améliorer la représentativité du modèle réduit.

7.3 Synthèse

Comparée aux autres bases réduites, la DMD possède deux qualités. Premièrement, les modes temporels ne contiennent qu'une fréquence, ce qui peut permettre dans l'approximation réduite de ne retenir que les fréquences pertinentes d'un point de vue physique. Deuxièmement, il est possible par définition d'extraire un opérateur linéaire permettant l'avancement en temps de la solution. En revanche, la base DMD n'est ni orthonormale, ni optimale en contenu énergétique.

Ce chapitre a clairement mis en évidence que l'utilisation de la propriété de propagation temporelle issue de la DMD, ainsi qu'un modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les modes DMD n'étaient pas suffisants par eux mêmes pour décrire des dynamiques complexes.



(a) Mode 1. (b) Mode 2.

(c) Mode 4. (d) Mode 6.

Figure 7.5 – Comparaisons des coefficients temporels obtenus par optimized DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes optimized DMD déterminés à la section 6.5.4. La projection des réalisations sur les modes DMD est tracée en noire. Cas des données expérimentales.

Cela s'explique aisément car, d'un côté, l'utilisation d'un modèle linéaire identifié est discutable, hormis pour certains cas particuliers de dynamique, et, de l'autre côté, ne tenir compte que de l'espace de projection pour créer un modèle quadratique de type Galerkin néglige complètement les propriétés dynamiques de la base en question.

Pour aller plus loin dans l'utilisation de la DMD pour la réduction de modèle, nous aimerions conserver la forme constante-linéaire-quadratique du modèle associée à la projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur la base DMD et les propriétés de dynamique linéaire issues de la DMD. Cela revient à chercher à combiner des informations inhomogènes pour construire un modèle dynamique exploitant toutes ces informations. Pour cela, l'outil idéal est l'assimilation de données, qui est le sujet de la partie III. Au chapitre 8, nous présentons de manière générique l'assimilation de données, que nous utilisons au chapitre 9 comme une méthode d'identification de systèmes dynamiques. En particulier, nous montrerons à la section 9.2 que nous pourrons employer l'assimilation de données pour combiner le modèle DMD issu de projection de Galerkin avec la propriété de propagation, de telle manière à obtenir un modèle prédictif pour les données numériques et expérimentales.

Troisième partie

Identification de modèle par assimilation de données 4D-Var

Chapitre 8

Assimilation de données 4D-Var

Table des matières

8.1 Introduction **142**

8.2 Formalisme général **143**

8.3 Principales variantes **146**

8.3.1 Paramètres de contrôle 146

8.3.2 Espace de résolution 148

8.3.3 Versions adaptatives 148

8.4 Exemple de l'équation de convection/diffusion **149**

8.4.1 Modèle dynamique 149

8.4.2 4D-Var 150

8.4.3 POD 4D-Var 152

8.4.4 POD 4D-Var adaptative 154

8.4.5 Bilan 155

8.4.6 Conclusions 157

8.5 Synthèse **157**

8.1 Introduction

L'assimilation de données est une méthode générique qui combine des observations hétérogènes avec le principe dynamique qui régit le système observé pour estimer au mieux certaines quantités physiques. Partant d'une solution *d'ébauche* (*background*) et d'observations imparfaites, une estimation optimale de l'état « vrai » du système est déterminée (voir figure 8.1). Cette estimation prend en compte les incertitudes statistiques relatives à chacune des observations. L'assimilation de données est aujourd'hui utilisée de manière routinière en météorologie et en océanographie pour combiner des images satellites, des observations *in situ* et un modèle dynamique, afin d'établir des prévisions météorologiques (Navon, 2009; Titaud *et al.*, 2010). Puisque la prévision numérique de la météorologie est essentiellement un problème de recherche de condition initiale, le but de l'assimilation est dans ce cas de trouver la meilleure condition initiale du modèle numérique qui minimise les erreurs d'observation. L'assimilation de données a un large spectre d'applications et est par exemple utilisée en traitement d'images pour restaurer des vidéos ou faire de la détection dynamique de contour en utilisant un modèle dynamique pour assurer la continuité temporelle (Papadakis, 2007). En mécanique des fluides, l'assimilation de données a été récemment introduite pour estimer des quantités (Papadakis, 2007) et prédire leur évolution temporelle (Artana *et al.*, 2012). Deux approches existent principalement en assimilation de données : l'estimation stochastique qui repose sur des considérations probabilistes (filtre de Kalman par exemple), et l'assimilation de données variationnelle, qui est utilisée dans ce manuscrit, où l'estimation est trouvée comme solution d'un problème d'optimisation. Lorsque les observations sont réparties dans le temps, cette approche est appelée assimilation de données variationnelle à quatre dimensions ou *4D-Var*.

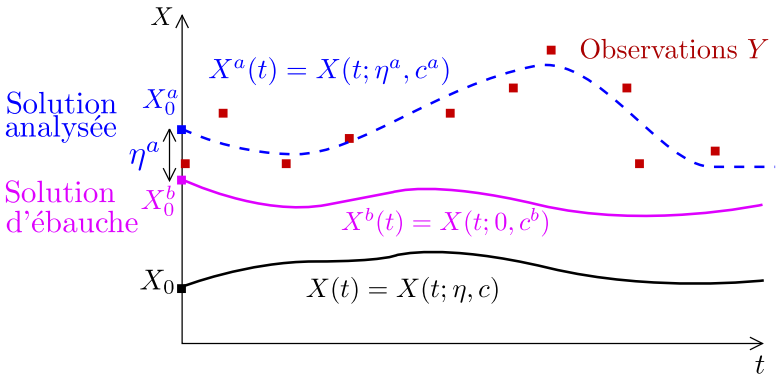


Figure 8.1 – Représentation schématique de l'assimilation 4D-Var.

Différents éléments du modèle, tels que la condition initiale, certains de ses paramètres ou un bruit externe représentant une erreur de modélisation, peuvent être utilisés comme paramètres

de contrôle pour le problème d'optimisation. La fonctionnelle coût correspondante est construite comme la somme des erreurs d'observation, qui mesurent la différence entre les observations et la sortie du modèle identifié, et différentes erreurs d'ébauche qui pénalisent la variation entre les grandeurs d'ébauche et les valeurs estimées. En pratique, ces différents termes peuvent être pondérés en fonction de leur niveau respectif de confiance, niveau pouvant être évalué par une connaissance fine du problème.

La solution de ce problème d'optimisation sous contraintes est calculée grâce à un algorithme itératif de descente où le gradient de la fonctionnelle coût par rapport aux paramètres de contrôle est trouvée par la résolution d'un problème adjoint. Or, il est connu que la solution d'un système optimal est coûteuse à obtenir, car elle est basée sur une méthode itérative et sur l'intégration en temps rétrograde de l'équation adjointe. La résolution du système optimal dans un espace de faible dimension, comme le sous-espace POD, permet de rendre envisageable ce type d'approche (D'Adamo *et al.*, 2007). Par ailleurs, afin d'améliorer les performances de l'algorithme, les différentes sources d'information sont souvent mises à jour de manière adaptative au cours de la résolution. De même, il est également possible de mettre à jour la solution d'ébauche ou les positions d'observation. Enfin, l'utilisation de méthodes à région de confiance (Bergmann et Cordier, 2008) permet de faire face à un manque de robustesse du modèle réduit en générant de manière régulière au cours de la résolution un nouveau modèle dynamique.

A titre d'exemple, nous étudierons d'abord le cas d'une équation de convection-diffusion monodimensionnelle, avant d'utiliser au chapitre 9 la méthode 4D-Var pour identifier un modèle réduit.

8.2 Formalisme général

Soient $\boldsymbol{X}$ la variable d'état du système et $\mathbb{M}$ l'opérateur dynamique non-linéaire régissant l'état, l'évolution temporelle de $\boldsymbol{X}$ est donnée par le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial t}(t) + \mathbb{M}(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{c}) = 0 \\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0^b + \boldsymbol{\eta} \end{cases} \tag{8.1}$$

où $\boldsymbol{X}_0^b$ est une condition initiale connue *a priori*, $\boldsymbol{\eta}$ une perturbation de la condition initiale et $\boldsymbol{c}$ un jeu de coefficients du modèle.

L'assimilation de données, dite à *contraintes dynamiques fortes* (voir section 8.3 pour l'explication de la dénomination), consiste à déterminer les paramètres de contrôle ($\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{c}$), ainsi que la solution $\boldsymbol{X}(t)$ du système dynamique (8.1) tels que l'état $\boldsymbol{X}$ soit le « plus proche » possible à

la fois des observations $\boldsymbol{Y}$ et des termes de régularisation correspondant aux termes *d'ébauche*. Le but est donc de trouver les paramètres de contrôle $(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c})$ qui minimisent la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ définie comme :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{Y}(t) - \mathbb{H}(\boldsymbol{X}(t; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}))\|^2_{\mathcal{R}^{-1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{\mathcal{B}^{-1}} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^b\|^2_{\mathcal{C}^{-1}} \tag{8.2}$$

sous la contrainte de (8.1). L'opérateur non-linéaire $\mathbb{H}$, dénommé opérateur d'observation, permet de passer de l'espace des états à l'espace des observations. $\mathcal{R}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des tenseurs de covariance de l'espace des observations, des états et des paramètres de contrôle. Ils sont associés respectivement aux observations, aux conditions initiales et aux paramètres de contrôle. Les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{R}^{-1}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{B}^{-1}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{-1}}$ sont respectivement les normes issues des produits scalaires $(\mathcal{R}^{-1}\cdot, \cdot)$, $(\mathcal{B}^{-1}\cdot, \cdot)$ et $(\mathcal{C}^{-1}\cdot, \cdot)$. Le rôle de ces tenseurs de covariance est d'attribuer un niveau plus ou moins important de confiance aux observations et aux termes d'ébauche. Ces tenseurs ont un rôle central pour combiner des sources d'information inhomogènes en assimilation de données. Une covariance importante (respectivement faible) entraînera une contribution faible (respectivement forte) du terme associé dans la fonctionnelle $\mathcal{J}$. Les tenseurs de covariance peuvent être choisis en se basant sur une connaissance *a priori* du système. Dans ce manuscrit, ils sont simplement définis comme des matrices diagonales. Les paramètres de contrôle optimaux $(\boldsymbol{\eta}^a, \boldsymbol{c}^a)$ sont appelés *solution analysée*. La dynamique analysée associée $\boldsymbol{X}^a(t)$ est la meilleure estimation de l'état du système, solution de (8.1), au sens du critère (8.2). Le couple $(0, \boldsymbol{c}^b)$ correspond à la solution *d'ébauche* du problème. L'assimilation de données est représentée schématiquement sur la figure 8.1.

La minimisation de $\mathcal{J}$ est effectuée en utilisant un algorithme de quasi-Newton avec mise à jour BFGS (Gilbert et Lemaréchal, 2009). Afin de déterminer la direction de descente, les gradients de la fonctionnelle par rapport aux deux variables de contrôle $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{c}$ doivent d'abord être évaluées. L'utilisation de différences finies pour déterminer ces gradients n'est pas réaliste lorsque la dimension des variables d'état est trop importante. Une solution élégante est d'introduire la *formulation adjointe* du problème. Nous verrons bientôt que la détermination du gradient de $\mathcal{J}$ par rapport aux variables de contrôle correspond donc à l'intégration directe du système dynamique (8.1) suivie par l'intégration en temps rétrograde d'une équation adjointe à déterminer.

En assimilation de données variationnelle, la dynamique analysée est déterminée comme solution d'un problème de minimisation sous contraintes donné par (8.1) et (8.2). Une manière classique pour résoudre ce type de problème d'optimisation sous contraintes (Gunzburger, 1997)

est d'introduire une fonctionnelle de Lagrange $\mathcal{L}$ définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{c}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}\right) = \mathcal{J}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{\eta}) - \int_0^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}(t)}{\partial t} + \mathbb{M}\left(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{c}\right), \boldsymbol{\lambda}(t)\right)_\Omega \mathrm{d}t \\ - \left(\boldsymbol{X}(0) - \boldsymbol{X}_0^b - \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}\right)_\Omega\end{aligned} \tag{8.3}$$

où $\boldsymbol{\lambda}(t)$ et $\boldsymbol{\mu}$ sont deux multiplicateurs de Lagrange introduits pour imposer les contraintes données par (8.1). Lorsque le minimum de $\mathcal{J}$ est atteint, $\boldsymbol{\nabla}\mathcal{J} = \boldsymbol{\nabla}\mathcal{L} = 0$.

Annuler la dérivée première de $\mathcal{L}$ par rapport à $\boldsymbol{X}$ mène à l'équation adjointe :

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t}(t) + \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^* \boldsymbol{\lambda}(t) = \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^* \mathcal{R}^{-1}\left(\mathbb{H}(\boldsymbol{X}(t)) - \boldsymbol{Y}(t)\right), \tag{8.4}$$

où $\dfrac{\partial \mathbb{M}}{\partial \boldsymbol{X}}$ et $\dfrac{\partial \mathbb{H}}{\partial \boldsymbol{X}}$ sont respectivement les opérateurs tangents linéaires[1] de $\mathbb{M}$ et $\mathbb{H}$, et $\left(\dfrac{\partial \mathbb{M}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^*$ et $\left(\dfrac{\partial \mathbb{H}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^*$ leurs opérateurs adjoints[2]. L'équation adjointe (8.4) est définie en temps rétrograde avec la condition terminale $\boldsymbol{\lambda}(T) = 0$.

Annuler la dérivée première de $\mathcal{L}$ par rapport aux paramètres de contrôle $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{\eta}$ mène aux conditions d'optimalité :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{c}} = -\displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \boldsymbol{c}}\right)^* \boldsymbol{\lambda}(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{C}^{-1}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^b), \\ \dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\lambda}(0) + \mathcal{B}^{-1}\boldsymbol{\eta}. \end{cases} \tag{8.5}$$

Ces conditions d'optimalité peuvent être évaluées pour déterminer le gradient de $\mathcal{J}$ dès que les multiplicateurs de Lagrange sont connus, c'est à dire dès que l'équation adjointe (8.4) est résolue.

[1] L'opérateur tangent linéaire de A est la dérivée directionnelle ou dérivée de Gâteaux de A dans la direction $\delta\boldsymbol{X}$ définie par :

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{X}}(\boldsymbol{X})\delta\boldsymbol{X} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{A(\boldsymbol{X} + \epsilon\delta\boldsymbol{X}) - A(\boldsymbol{X})}{\epsilon} \quad \forall \delta\boldsymbol{X}.$$

[2] Soit $\mathcal{D}$ un espace quelconque muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)$, l'adjoint A^* associé à A est tel que $\forall x, y \in \mathcal{D}, (Ax, y) = (x, A^*y)$.

8.3 Principales variantes

Le formalisme 4D-Var, présenté à la section 8.2, est générique de nombreuses situations rencontrées en mécanique des fluides, et dans bien d'autres domaines. En effet, l'approche 4D-Var permet d'estimer des quantités bruitées, ou manquantes, à l'aide d'un modèle dynamique connu par ailleurs. Ces données peuvent être manquantes temporellement, spatialement ou en raison d'une variable non observée. Cette approche a par exemple été utilisée par Gronskis *et al.* (2013) et Sciacchitano *et al.* (2012) pour combiner des données PIV et des résultats numériques afin de reconstruire des données absentes dues à la présence d'ombre dans un champ PIV. Avoir à disposition un modèle prédictif optimisé pour certaines observations permet par ailleurs de prédire l'état futur du système, comme c'est le cas en météorologie, en océanographie (Daget, 2008) ou en prévision de crues (Honnorat, 2007). La palette d'applications est d'autant plus importante, qu'il existe un certain nombre de variantes, au niveau des paramètres de contrôle recherchés, de l'espace de représentation ou des implémentations adaptatives permettant de mettre à jour des informations au cours de l'assimilation de données.

8.3.1 Paramètres de contrôle

Une des premières questions que l'on se pose lorsque l'on cherche à formuler un problème d'estimation sous la forme d'une approche 4D-Var consiste à sélectionner les paramètres du modèle qui vont jouer le rôle de paramètre de contrôle. Parmi l'ensemble des paramètres mal connus, nous aurons plutôt tendance à retenir ceux dont le coefficient de sensibilité est a priori élevé pour la physique du problème à l'étude. De ce point de vue là, la condition initiale $\boldsymbol{\eta}$ est un bon candidat, que ce soit en météorologie ou de manière générale pour les systèmes chaotiques (Lorenz, 1963; Protas et Liao, 2008), car une faible variation de la condition initiale engendre une forte différence de l'état du système au bout d'un temps fini. De même, le paramètre de contrôle $\boldsymbol{c}$ pourra être utilisé pour représenter tout ou partie des paramètres d'un modèle dynamique quelconque. Nous allons présenter maintenant les principales variantes rencontrées dans la littérature concernant le choix du paramètre de contrôle.

8.3.1.1 Contrainte dynamique faible

Dans le formalisme, qualifié d'assimilation sous contraintes dynamiques fortes, présenté à la section 8.2, nous recherchons l'état analysé comme solution exacte du modèle mais en se donnant la possibilité d'optimiser les paramètres $\boldsymbol{c}$ du modèle. Si nous ne souhaitons pas modifier le modèle, nous pouvons alors relâcher cette contrainte et introduire un bruit $\boldsymbol{w}(t)$, supposé

gaussien, que nous allons déterminer de manière optimale. Le modèle dynamique devient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{X}(t)}{\partial t} + \mathbb{M}(\boldsymbol{X}(t)) = \boldsymbol{w}(t) \\ \boldsymbol{X}(0) = \boldsymbol{X}_0^b + \boldsymbol{\eta}. \end{cases} \tag{8.6}$$

Dans ce cas, les paramètres de contrôle de l'assimilation de données sont $\boldsymbol{w}(t)$ et $\boldsymbol{\eta}$ et la fonctionnelle coût à minimiser s'écrit :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{Y}(t) - \mathbb{H}(\boldsymbol{X}(t))\|^2_{\mathcal{R}^{-1}}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\eta}\|^2_{\mathcal{B}^{-1}} + \frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{w}(t)\|^2_{\mathcal{W}^{-1}}\,\mathrm{d}t, \tag{8.7}$$

où $\mathcal{W}$ est la matrice de covariance de $\boldsymbol{w}(t)$. Notons que d'un point de vue formel, l'assimilation de données sous *contraintes dynamiques faibles* est un cas particulier du problème à contraintes dynamiques fortes, mais que cette approche se démarque du cas général par la manière de considérer les paramètres de contrôle.

Pour résoudre le problème d'optimisation sous contrainte associé à cette nouvelle formulation, la même procédure que celle décrite à la section 8.2 est suivie. Pour cela, nous introduisons d'abord un lagrangien, défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\boldsymbol{X}(t), \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\mu}\right) = \mathcal{J}(\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\eta}) &- \int_0^T \left(\frac{\partial \boldsymbol{X}(t)}{\partial t} + \mathbb{M}\left(\boldsymbol{X}(t)\right) - \boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right)_\Omega \mathrm{d}t \\ &- \left(\boldsymbol{X}(0) - \boldsymbol{X}_0^b - \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}\right)_\Omega. \end{aligned} \tag{8.8}$$

La dérivée première de $\mathcal{L}$ par rapport à $\boldsymbol{X}(t)$ donne la même équation adjointe que pour la contrainte dynamique forte, c'est-à-dire

$$-\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t}(t) + \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^* \boldsymbol{\lambda}(t) = \left(\frac{\partial \mathbb{H}}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^* \mathcal{R}^{-1}\left(\mathbb{H}(\boldsymbol{X}(t)) - \boldsymbol{Y}(t)\right), \tag{8.9}$$

avec la condition terminale $\boldsymbol{\lambda}(T) = 0$. Finalement, la dérivée première de $\mathcal{L}$ par rapport aux paramètres de contrôle donne la condition d'optimalité suivante :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{w}}(t) = \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathcal{W}^{-1}\boldsymbol{w}(t), \\ \dfrac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\lambda}(0) + \mathcal{B}^{-1}\boldsymbol{\eta}. \end{cases} \tag{8.10}$$

Dans cette formulation, l'incertitude $\boldsymbol{w}(t)$ est déterminée lors du processus d'optimisation et définie pour un horizon temporel T donné. Cela signifie que l'approche 4D-Var à contraintes

dynamique faibles ne permet pas de prédire l'état du système au delà de l'intervalle temporel d'assimilation. En revanche, cette méthode est parfaitement adaptée à l'estimation de données bruitées et incomplètes.

8.3.1.2 Autres variantes

D'autres paramètres de contrôle peuvent être envisagés. Dans Gronskis *et al.* (2013), les auteurs ont déterminés comme paramètre de contrôle les conditions initiales et conditions aux limites en entrée de domaine de telle manière que la simulation numérique ainsi modifiée corresponde à des données PIV.

L'introduction d'une condition terminale peut également être effectuée (détails dans Papadakis, 2007). Cette condition terminale peut être utilisée comme dans Gustafsson et Protas (2010) en inversant la flèche du temps dans le modèle, afin de déterminer la meilleure condition terminale permettant d'intégrer en temps croissant le modèle direct dans un but prédictif. Cette approche permet d'éviter qu'un modèle très sensible à la condition initiale ne contienne plus, à la fin de la fenêtre d'assimilation, l'information contenue dans la condition initiale. De cette manière, le caractère prédictif du modèle est maintenu sur un intervalle de temps plus important.

8.3.2 Espace de résolution

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de ce manuscrit, tout modèle dynamique est associé à un espace de représentation donné, cet espace pouvant être de dimension élevée afin de conserver un bon niveau d'approximation du modèle haute-fidélité que l'on étudie, ou de faible dimension pour obtenir des résolutions rapides. Par extension, le problème d'assimilation de données peut donc être résolu dans le sous-espace POD comme cela a déjà été réalisé à plusieurs reprises (Daescu et Navon, 2007; Robert *et al.*, 2005; Chen, 2011). La résolution dans un sous-espace de petite dimension peut permettre de résoudre de manière itérative des problèmes d'assimilation de données dans des configurations complexes, comme celles rencontrées en météorologie ou dans le cas des équations de Navier-Stokes.

8.3.3 Versions adaptatives

Au cours de la résolution du problème d'assimilation de données, il se peut que les informations utilisées au départ ne soient plus adaptées au nouvel état du système. Afin d'améliorer les performances de l'assimilation, le modèle et les observations (les termes d'ébauche n'étant pas

adaptables par définition) peuvent donc être mis à jour au fur et à mesure de la résolution. C'est ce que nous allons discuter maintenant.

8.3.3.1 4D-Var adaptative à région de confiance

Au chapitre 4, nous avons montré que la rapidité d'intégration numérique des modèles réduits s'accompagnait en général d'un manque de robustesse du modèle à la variation de ses paramètres. Lorsque les paramètres de contrôle changent au cours de la résolution du système optimal, il se peut que le modèle réduit ne soit plus capable de représenter correctement la dynamique du système. Il convient donc de manière régulière au fur et à mesure de la résolution de mettre à jour le modèle réduit en réalisant au besoin une simulation du modèle haute-fidélité, afin de reconstruire un modèle réduit adapté aux nouveaux paramètres de contrôle. Ces opérations peuvent s'effectuer de manière automatique grâce à un algorithme à région de confiance (Chen, 2011; Tissot *et al.*, 2011) présenté à la section 4.4. Cette méthode permet d'obtenir un bon compromis entre rapidité de l'algorithme liée au modèle réduit et bonne représentativité de celui-ci grâce aux informations issues de simulations haute-fidélité.

8.3.3.2 Observations adaptatives

Les résultats de l'assimilation de données sont fortement dépendants de l'observation. Une recherche optimale des instants d'observation, potentiellement variables au cours du processus itératif, peut être envisagée afin de réduire les observations nécessaires à une bonne estimation. En effet, ces observations peuvent être coûteuses à obtenir et à assimiler dans des systèmes réels comme c'est le cas pour la prévision météorologique. La position optimale des points d'observation peut également évoluer lorsque les paramètres d'assimilation évoluent. Daescu et Navon (2004) ont introduit le gradient de la fonctionnelle coût par rapport aux observations, qui permet de définir un champ de sensibilité, indiquant où les observations seront les plus pertinentes à l'itéré suivant.

8.4 Exemple de l'équation de convection/diffusion

8.4.1 Modèle dynamique

Afin d'illustrer les idées présentées précédemment dans ce chapitre, nous allons appliquer la procédure 4D-Var à une équation scalaire monodimensionnelle de convection/diffusion possédant

un terme source (Dimitriu *et al.*, 2010), soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = p_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + p_2 \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \text{avec} \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ \psi(x,0) = \psi(1-x), \end{cases} \tag{8.11}$$

où p_1 et p_2 sont deux paramètres à valeurs réelles d'advection et de diffusion et $f(x,t) = (-x^2+(1+2p_1)x+2p_2-p_1)e^t$. Cette expression de $f(x,t)$ est choisie de telle sorte que la solution exacte soit représentable par un mode unique en forme de parabole croissant exponentiellement en temps :

$$\psi_{\text{Exact}}(x,t) = x(1-x)e^t. \tag{8.12}$$

8.4.2 4D-Var

Par la suite, nous considérons une approche dite d'*expériences jumelles* (Drifi et Herlin, 2011), traditionnellement utilisée en assimilation de données pour tester les performances d'un algorithme. Cette approche consiste à obtenir une solution « vraie » du système provenant d'une solution analytique ou d'une assimilation de données effectuée de manière préliminaire avec des observations considérées comme parfaites. Dans un second temps, des observations modifiées sont générées artificiellement en bruitant et en sous échantillonnant les observations parfaites. A ce stade, l'assimilation 4D-Var peut être effectuée, la solution analysée pouvant être comparée à la solution « vraie » afin d'évaluer les performances de l'estimation.

Connaissant certaines observations du système ψ_{Obs} et une solution d'ébauche ψ^b, l'objectif est de déterminer la condition initiale ψ_0^a, où $\psi_0(x) = \psi(x, t=0)$, qui minimise la fonctionnelle coût donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\psi_0) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_o^2}\int_0^T \int_\Omega \left(\psi_{\text{Obs}}(x,t) - \mathbb{H}\left(\psi(x,t;\psi_0),t\right)\right)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_b^2}\int_\Omega \left(\psi_0(x) - \psi^b(x)\right)^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8.13}$$

Pour simplifier, nous considérons que $\mathcal{B} = \text{diag}(\sigma_b^2)$ et $\mathcal{R} = \text{diag}(\sigma_o^2)$ où σ_b^2 et σ_o^2 sont respectivement les variances d'erreur d'ébauche et d'observation.

Puisque la solution exacte est connue, les observations et la solution d'ébauche sont déterminées en perturbant ψ_{Exact} via un bruit Gaussien, soit

$$\begin{aligned} \psi_{\text{Obs}}(x,t) &= \psi_{\text{Exact}}(x,t) + \mathcal{N}(0,\sigma_0), \\ \psi^b(x) &= \psi_{\text{Exact}}(x,0) + \mathcal{N}(0,\sigma_b). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Dans nos tests numériques, nous considérons $p_1 = 1$, $p_2 = 0,0001$, $\Omega = [0,1]$, $T = 1$, $\sigma_b = 0,05$ et $\sigma_o = 0,1$. L'équation (8.11) est résolue via un schéma de Mac-Cormack modifié, consistant à alterner, à chaque pas de temps, le décentrage à droite et à gauche des phases de prédiction et de correction afin de rendre en moyenne ce schéma symétrique en espace. Pour l'intégration numérique, nous avons choisi une discrétisation régulière en espace et en temps. Par ailleurs, le nombre de pas de temps est $N_t = 72$ et $N_x = 30$ points sont utilisés pour la discrétisation spatiale. Enfin, nous avons fait le choix de définir l'opérateur d'observation $\mathbb{H}$ de telle manière qu'un point sur deux en temps et en espace soit observé, définissant ainsi $N_x^o = 36$ points d'observations en espace et $N_t^o = 15$ points d'observation en temps.

Afin de comparer les performances des différentes méthodes d'assimilation de données, nous allons quantifier les solutions analysées par deux types d'erreurs RMS (*Root Mean Square*) : la première, définie dans l'espace des observations est dite totale, et donnée par :

$$\mathrm{RMS}_{\mathrm{Totale}} = \sqrt{\frac{1}{N_x^o N_t^o} \sum_{i=1}^{N_x^o} \sum_{j=1}^{N_t^o} (\psi(x_i^o, t_j^o; \psi_0^a) - \psi_{\mathrm{Exact}}(x_i^o, t_j^o))}, \tag{8.15}$$

où x_i^o et t_j^o sont les points et instants d'observation, et la seconde, définie dans l'espace des paramètres de contrôle est dite initale, et donnée par :

$$\mathrm{RMS}_{\mathrm{Initiale}} = \sqrt{\frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} (\psi_0^a(x_i) - \psi_{\mathrm{Exact}}(x_i, 0))}. \tag{8.16}$$

Ces valeurs seront reportées dans la table 8.1.

La figure 8.2 représente la solution exacte, les observations, le terme d'ébauche et le résultat de la méthode 4D-Var. Dans ce cas, la condition initiale optimale, encore appelée état analysé, est très proche de l'ébauche, et la solution finale correspond approximativement à la solution exacte. L'estimation est plutôt correcte. Cette méthode donne donc des résultats satisfaisants. Notons cependant que l'équation monodimensionnelle de convection/diffusion considérée dans cet exemple est peu coûteuse à intégrer numériquement. Une approche similaire dans un cas où l'équation de Navier-Stokes serait considéré pour modèle dynamique est beaucoup plus coûteuse en temps de calcul. Il est donc nécessaire de trouver une méthode de réduction de modèle pour résoudre ce type de problème 4D-Var pour des configurations réalistes.

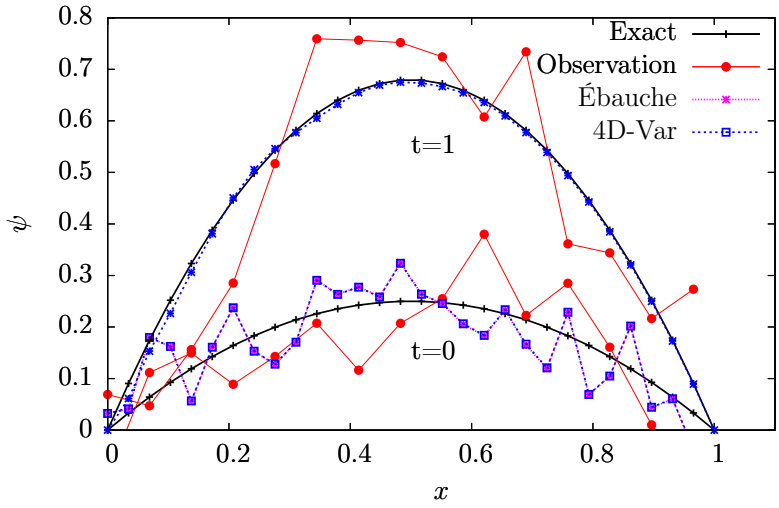


Figure 8.2 – Résultat de l'assimilation de données variationnelle (bleu), solution exacte (noir), ébauche (rose) et état observé (rouge).

8.4.3 POD 4D-Var

Pour diminuer les temps de calcul, une solution consiste à approximer la solution du modèle numérique initial dans un sous-espace de dimension réduite. Idéalement, ce sous-espace devrait contenir l'essentiel – dans un sens à définir – des informations contenues dans le modèle de départ. Un choix possible est de considérer le sous-espace engendré par les modes issus de la POD (voir section 2.2.3). Après résolution du modèle « haute-fidélité » (8.11), pour une condition initiale donnée, on peut imaginer effectuer la décomposition suivante :

$$\psi(x,t) = \bar{\psi}(x) + \sum_{j=1}^{N_t} a_j(t)\Phi_j(x) \tag{8.17}$$

où $\bar{\psi}$ est la moyenne d'ensemble de ψ, Φ_j sont les modes spatiaux POD et a_j les modes temporels correspondants. La réduction de modèle se fait alors en conservant parmi les N_t modes obtenus par POD uniquement les N_{Gal} premiers modes, avec si possible $N_{\text{Gal}} \ll N_t$. Pour justifier cette troncature, l'optimalité énergétique des modes POD est utilisée (Cordier, 2008).

Via une projection de Galerkin du modèle (8.11) sur les modes POD spatiaux Φ_i, on obtient le système dynamique suivant :

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t}(t) = C_i + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} L_{ij}a_j(t) \quad i = 1, \cdots, N_{\text{Gal}} \tag{8.18}$$

avec

$$C_i = \left(\Phi_i, p_2 \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + f\right)_\Omega \quad \text{et} \quad L_{ij} = \left(\Phi_i, p_2 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\right)_\Omega \tag{8.19}$$

où $(\cdot,\cdot)_\Omega$ représente le produit scalaire euclidien sur Ω. Afin de sélectionner le nombre de modes POD N_{Gal} à conserver, définissons RIC comme l'énergie contenue dans les N_{Gal} premiers modes POD, soit $\text{RIC}(N_{\text{Gal}}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Gal}}} \lambda_i / \sum_{j=1}^{N_t} \lambda_j$ où λ_j est la $j^{\text{ème}}$ valeur propre POD, et RIC_{Min} comme la valeur minimale souhaitée, fixée ici à $0,995$. Dans notre cas, ce critère indique de conserver les $N_{\text{Gal}} = 5$ premiers modes POD.

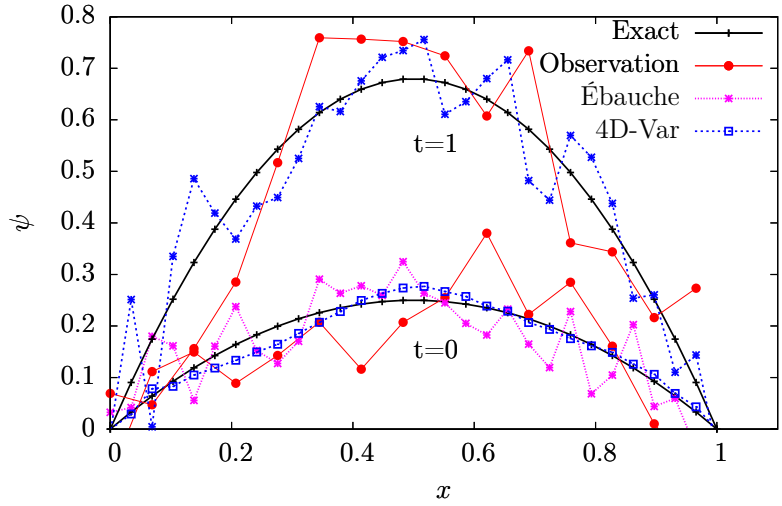


Figure 8.3 – Résultat de l'assimilation de données variationnelle dans le sous-espace POD (bleu), solution exacte (noir), ébauche (rose) et état observé (rouge).

En effectuant l'assimilation variationnelle de données sur le modèle POD donné par le système dynamique (8.18), on obtient les résultats de la figure 8.3. L'état analysé de la condition initiale est légèrement plus proche de la solution exacte que dans le cas précédent mais la variation RMS totale des résultats calculée sur l'ensemble de la fenêtre d'assimilation reste mauvaise (voir le tableau comparatif 8.1). La troncature du modèle réduit POD engendre un système dynamique plus instable et donc plus sensible à des perturbations de la condition initiale, ce qui oblige la condition initiale à être proche de l'état vrai sous peine d'erreurs importantes[3].

Par ailleurs, la décomposition POD a été effectuée à partir de la solution du modèle « haute-fidélité », obtenue pour une condition initiale donnée. La recherche de l'état analysé est ensuite

[3]Notons qu'après projection dans le sous-espace POD, le problème d'optimisation n'est plus le même, et il n'y a donc aucune garantie que la solution obtenue avec le modèle réduit soit valable pour le modèle haute-fidélité.

effectuée dans ce sous-espace POD. Or, d'une part, la meilleure solution ne se trouve pas forcément dans ce sous-espace, et d'autre part, lorsque la condition initiale évolue de manière trop importante, le modèle n'est plus adapté à représenter le nouvel état, ce qui entraîne une augmentation des erreurs de troncature. A ce stade, il peut être intéressant de mettre à jour de manière régulière le modèle réduit.

8.4.4 POD 4D-Var adaptative

Pour lutter contre la mauvaise fidélité du modèle réduit lorsque le paramètre de contrôle varie, nous pouvons chercher à réactualiser la base POD de manière itérative. En effet, au cours de la résolution du problème d'optimisation, nous sommes amenés à connaître la solution du modèle « haute-fidélité » pour des conditions initiales différentes de celle utilisée initialement pour déterminer le premier ensemble de modes POD. Ces nouvelles réalisations peuvent donc être exploitées pour déterminer une nouvelle base POD. La première méthode adaptative qui vient alors à l'esprit est donnée par l'algorithme 3. Dans cet algorithme, rien n'empêche de déterminer à un itéré donné, une condition initiale trop éloignée de celle utilisée pour générer la base POD, c'est à dire d'utiliser le modèle réduit en dehors de son domaine de validité.

Algorithme 3 : Algorithme adaptatif « classique ».

Initialisation *Convergence :=Faux* ; $k := 0$; $\psi_0^{(k)} := \psi_0^{\text{Initial}}$;
tant que *Convergence=Faux* **faire**
- Résolution du modèle « haute-fidélité » pour $\psi_0^{(k)}$;
- Décomposition POD ;
- Trouver N_{Gal} tel que $\text{RIC}(N_{\text{Gal}}) > \text{RIC}_{\text{Min}}$;
- Création du système dynamique (8.18) ;
- Résolution du problème 4D-Var $\Rightarrow \psi_0^{(k+1)}$;
- Test de convergence ;
- $k := k + 1$;

Pour cette raison, nous allons également tester une méthode d'optimisation à région de confiance (voir section 4.4) qui permet de manière rigoureuse de modifier le modèle réduit uniquement lorsque c'est nécessaire. Pour cela, définissons pour chaque itération k de l'algorithme, $\delta\psi_0^{(k)}$ la correction à apporter à $\psi_0^{(k)}$ pour déterminer la solution à l'itéré successif. Pour respecter le domaine de validité du modèle réduit, il est nécessaire que la distance $\|\delta\psi_0^{(k)}\|$ soit inférieure à $\Delta^{(k)}$ le rayon de confiance du modèle. La valeur de $\Delta^{(k)}$ est réactualisée au cours de la procédure adaptative en utilisant un critère, dit de performance, qui évalue comment se comporte le modèle réduit par rapport au modèle « haute-fidélité » en termes de représentativité

de la variation de la fonctionnelle coût. Ce critère est défini par :

$$\rho_{\text{Perf}}^{(k)} = \frac{\mathcal{J}_{\text{HF}}\left(\psi_0^{(k)} + \delta\psi_0^{(k)}\right) - \mathcal{J}_{\text{HF}}\left(\psi_0^{(k)}\right)}{\mathcal{J}_{\text{ROM}}\left(\psi_0^{(k)} + \delta\psi_0^{(k)}\right) - \mathcal{J}_{\text{ROM}}\left(\psi_0^{(k)}\right)}$$

où $\mathcal{J}_{\text{HF}}$ et $\mathcal{J}_{\text{ROM}}$ sont les fonctionnelles coût $\mathcal{J}$ respectivement déterminées à partir du modèle « haute-fidélité » (8.11) et du modèle réduit (8.18). L'algorithme d'optimisation à région de confiance est donné par l'algorithme 4.

Algorithme 4 : Algorithme adaptatif à « région de confiance ».

Initialisation *Convergence :=Faux* ; $k := 0$; $\psi_0^{(k)} := \psi_0^{\text{Initial}}$; $\Delta^{(k)} := \Delta^{\text{Initial}} > 0$;
tant que *Convergence=Faux* **faire**
- **1** : Résolution du modèle « haute-fidélité » pour $\psi_0^{(k)}$;
  Décomposition POD ;
  Trouver N_{Gal} tel que $\text{RIC}(N_{\text{Gal}}) > \text{RIC}_{\text{Min}}$;
  Création du système dynamique (8.18) ;
- **2** : Résolution du problème 4D-Var sous contrainte que $\|\delta\psi_0^{(k)}\| \leq \Delta^{(k)}$;
- **3** : Calcul de $\rho_{\text{Perf}}^{(k)}$;
  suivant $\rho_{Perf}^{(k)}$ **faire**
  - **cas où** $\rho_{Perf}^{(k)} \geq 0,75$; Itéré accepté :=Vrai ; $\Delta^{(k+1)} := 2\Delta^{(k)}$;
  - **cas où** $0,25 \geq \rho_{Perf}^{(k)} < 0,75$; Itéré accepté :=Vrai ; $\Delta^{(k+1)} := 0,75\Delta^{(k)}$;
  - **cas où** $\rho_{Perf}^{(k)} < 0,25$; Itéré accepté :=Faux ; $\Delta^{(k+1)} := 0,25\Delta^{(k)}$;
  si *Itéré accepté* **alors** $\psi_0^{(k+1)} := \psi_0^{(k)} + \delta\psi_0^{(k)}$;
  sinon $\psi_0^{(k+1)} := \psi_0^{(k)}$; retour à **2**;
  Test de convergence ;
  $k := k + 1$;

La figure 8.4 montre les résultats issus de l'algorithme adaptatif « classique » d'assimilation variationnelle 4D-Var. L'état analysé est très proche de la solution exacte. Cette méthode permet de trouver une estimation de l'état du système de manière relativement précise malgré les données manquantes et bruitées. Les résultats issus de l'algorithme à région de confiance ne sont pas montrés car, dans le cas simple considéré ici, ils donnent des résultats similaires.

8.4.5 Bilan

Le tableau 8.1 compare les différentes méthodes d'assimilation de données considérées précédemment en termes de temps de calcul, de nombre d'itérations nécessaire pour la convergence, de RMS totale et de RMS initiale.

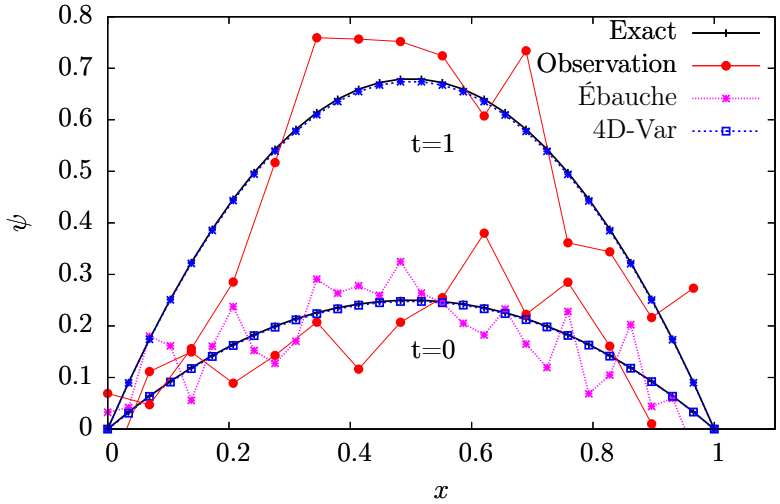


Figure 8.4 – Résultats issus de l'algorithme adaptatif « classique ». Assimilation de données variationnelle (bleu), solution exacte (noir), ébauche (rose) et état observé (rouge).

	Temps CPU	Nombre d'itérations	RMS initiale	RMS totale
4D-Var	39,1	4	0,054	0,025
POD 4D-Var	20,0	12	0,017	0,036
POD 4D-Var adaptative	44,4	35	0,002	0,002
POD 4D-Var à région de confiance	31,3	20	0,011	0,005

Tableau 8.1 – Performances des différentes méthodes d'assimilation de données considérées.

Comme nous l'avons déjà expliqué, l'erreur issue de l'algorithme POD 4D-Var reste importante après assimilation car le modèle réduit utilisé ne permet pas de représenter l'évolution dynamique du système lorsque la condition initiale change au cours de la résolution du problème. La procédure POD 4D-Var adaptative présente de très bons résultats, mais au prix d'un coût de calcul légèrement plus important que pour la 4D-Var. Finalement, l'approche basée sur un algorithme à région de confiance présente un bon compromis entre POD 4D-Var et POD 4D-Var adaptative que ce soit au niveau du temps de calcul, ou au niveau de l'erreur de résolution. En effet, le calcul du critère de performance permet d'évaluer de manière régulière comment se comporte le modèle réduit par rapport au modèle haute-fidélité et évite ainsi de continuer à utiliser un modèle réduit ne représentant plus la dynamique du système.

8.4.6 Conclusions

Une méthode d'assimilation variationnelle de données de type 4D-Var a été utilisée, dans le cas d'une équation monodimensionnelle de convection/diffusion, pour estimer à partir d'observations manquantes et bruitées, ainsi que d'une ébauche, la condition initiale permettant de reconstruire de manière optimale la dynamique du système. Des procédures adaptatives POD ont été employées afin de résoudre de manière plus rapide ce problème 4D-Var. Pour le premier algorithme adaptatif, la réactualisation de la base POD se fait de manière plutôt heuristique, alors que dans le second cas, une méthode d'optimisation à région de confiance a été utilisée. La comparaison des résultats issus de ces différentes méthodes nous a donné une idée du cadre d'utilisation de chacune selon le problème auquel nous sommes confrontés. La version adaptative et la version à région de confiance sont de bons compromis entre rapidité et précision de la solution. Elles sont en effet plus rapides qu'une résolution 4D-Var dans l'espace haute-fidélité et permettent de palier le manque de robustesse des modèles réduits couramment utilisés. La perspective directe est d'utiliser ce type d'approche pour identifier la dynamique du système en vue du contrôle.

8.5 Synthèse

La méthode d'assimilation variationnelle 4D-Var permet de combiner des informations provenant d'un modèle dynamique, d'observations bruitées et incomplètes, et d'une connaissance *a priori* de l'état du système, pour estimer tout ou partie des paramètres d'un modèle. Ce formalisme, développé initialement dans le cadre de la météorologie, est générique et peut s'appliquer dans de nombreuses situations, en particulier grâce à la flexibilité de la formulation via un

choix judicieux des paramètres de contrôle et de l'espace d'état (haute-fidélité ou sous-espace de faible dimension). Les modèles réduits utilisés pour accélérer la résolution, étant souvent peu robustes aux variations des paramètres de contrôle, des versions adaptatives peuvent être mises en œuvre. De même, les performances peuvent être améliorées en sélectionnant les observations les plus pertinentes. Finalement, la méthode 4D-Var a été testée sur un modèle monodimensionnel de convection-diffusion montrant que la résolution du problème d'optimisation pouvait être accélérée dans un sous-espace POD, et que l'utilisation de méthodes adaptatives à région de confiance permettait un bon compromis entre vitesse et précision de la résolution. Nous verrons au chapitre 9 que la méthode 4D-Var peut être utilisée pour identifier la dynamique de modèles réduits.

Chapitre 9

Identification de modèles réduits par assimilation de données

Table des matières

9.1 Application aux modèles réduits POD 160

9.1.1 Données numériques 160

9.1.2 Données expérimentales 164

9.2 Application à un modèle réduit DMD 168

9.3 Synthèse 173

Au chapitre 7, deux approches ont été proposées pour développer un modèle réduit basé sur les modes DMD. La première repose sur l'exploitation du propagateur temporelle intrinsèque à la DMD. La seconde consiste à développer le modèle réduit par projection de Galerkin sur les modes DMD. Nous avons mis en évidence qu'aucune de ces approches ne permettait de reproduire correctement la dynamique du système pour des configurations suffisamment réalistes. Afin d'améliorer le comportement de ces modèles, une stratégie est d'utiliser un ensemble de réalisations de l'écoulement pour corriger certains paramètres du modèle, de telle sorte que sa dynamique corresponde à celle des données. Cette stratégie est précisément celle de l'assimilation de données que nous avons présenté de manière générique au chapitre 8.

Dans ce chapitre, nous appliquerons l'assimilation 4D-Var pour identifier des modèles réduits POD (section 9.1), puis DMD (section 9.2). Au chapitre 8, le modèle réduit était utilisé

pour accélérer la résolution du problème 4D-Var. Dans ce chapitre, nous cherchons à appliquer l'assimilation de données directement à des modèles réduits car l'objectif est d'utiliser ces modèles pour le contrôle d'écoulement.

9.1 Application aux modèles réduits POD

Dans le cas d'une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur une base réduite quelconque, le système dynamique est donné par (2.6). La résolution du problème d'assimilation de données dans le sous-espace POD consiste à choisir $\boldsymbol{a}^R(t)$, le résultat de l'intégration du système dynamique, comme variable d'état $\boldsymbol{X}$. Le système dynamique sert de modèle $\mathbb{M}$, et les fonctions propres temporelles POD $\boldsymbol{a}^P(t)$ sont considérées comme les observations $\boldsymbol{Y}$. Les coefficients C_i, L_{ij} et Q_{ijk} du modèle dynamique sont les paramètres du modèle $\boldsymbol{c}$ introduits dans l'assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte (voir section 8.2). Concernant les variables d'ébauche, la condition initiale correspond aux réalisations $\boldsymbol{a}^P(0)$, et les coefficients d'ébauche du modèle $\boldsymbol{c}^b$ peuvent être déterminés par projection de Galerkin ou par une calibration préliminaire (Cordier *et al.*, 2010).

9.1.1 Données numériques

9.1.1.1 Assimilation 4D-Var

L'assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte est appliquée à un écoulement incompressible bidimensionnel autour d'un cylindre à $Re = 200$. Dans cette section, la base de données est obtenue par un code éléments finis (code DNS ICARE, IMFT/ université de Toulouse, voir Favier, 2007). Cette base de données contient $N_t = 200$ réalisations bidimensionnelles du champ de vitesse, pris sur une période $T = 12$ correspondant à plus de deux périodes de lâchers tourbillonnaires ($T_{\text{VS}} = 5$). Puisque l'assimilation 4D-Var est réalisée sur un modèle réduit POD et en prenant comme observations les fonctions propres POD temporelles $a_i^P(t)$, la décomposition POD est d'abord appliquée à la base de données. Les six premiers modes POD sont dans ce cas suffisants pour représenter $99,9\%$ du contenu énergétique de l'écoulement (voir Cordier *et al.*, 2010, pour plus de détails sur la procédure et sur les résultats POD) indiquant que $N_{\text{Gal}} = 6$ devrait être suffisant pour l'ordre du modèle réduit POD (2.6).

L'assimilation de données à contrainte dynamique forte décrite à la section 8.2 est à présent appliquée. La condition initiale d'ébauche est $a_i^P(t = 0)$, les coefficients d'ébauche pour C_i, L_{ij} et Q_{ijk} étant pris égaux à zéro. Ces valeurs d'ébauche sont également utilisées pour initialiser les

coefficients du système dynamique au début de la procédure itérative de résolution. Finalement, les matrices de covariance sont choisies diagonales telles que $\mathcal{R}^{-1} = \mathbb{I}$ et $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{C}^{-1} = \sigma^2\mathbb{I}$ où $\mathbb{I}$ est la matrice identité. La valeur du paramètre de régularisation σ^2 est déterminée par méthode L-curve (Hansen, 1992). Dans cette application, nous avons considéré $\sigma^2 = 10^{-5}$.

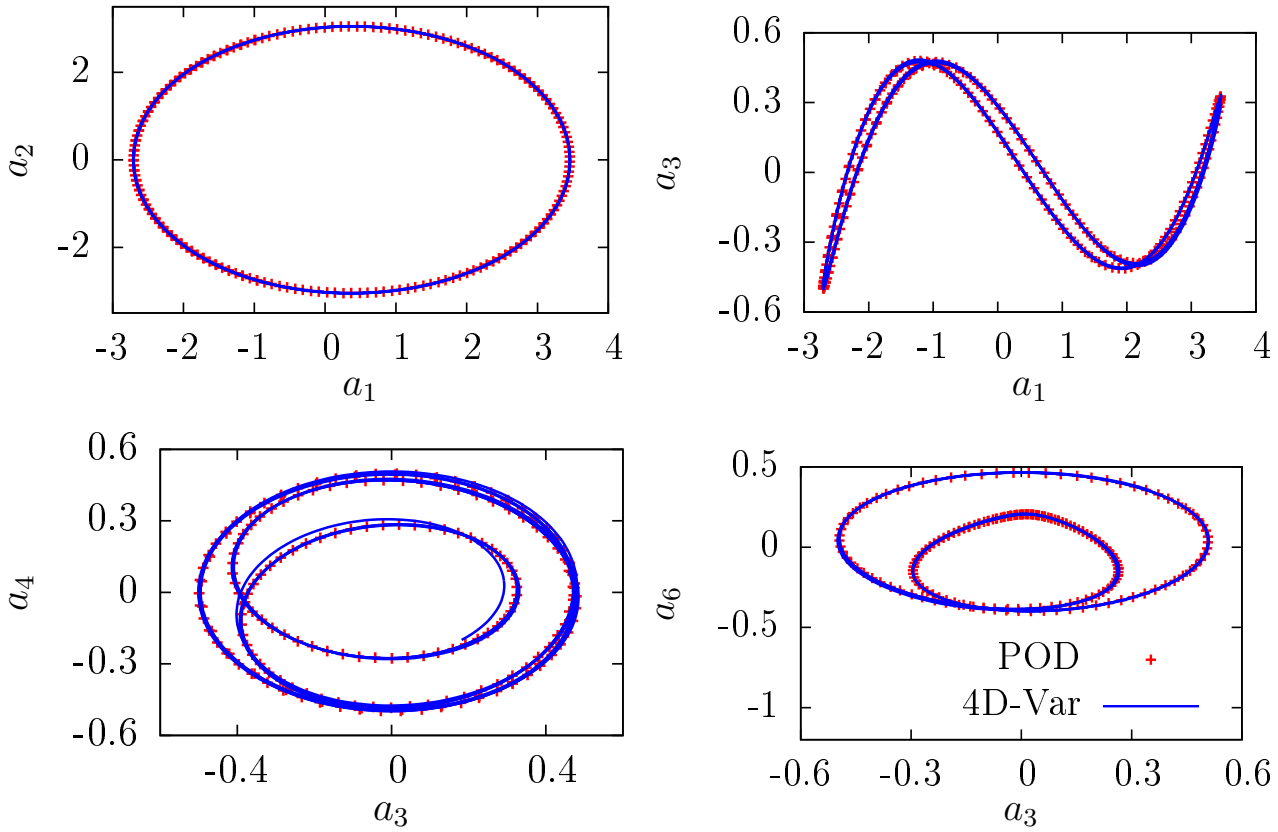


Figure 9.1 – Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Des observations parfaites sont considérées.

La figure 9.1 représente les résultats d'assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte pour la base de données numériques lorsque les observations sont supposées parfaites. L'assimilation 4D-Var a été effectuée en utilisant une fenêtre temporelle d'assimilation de 200 pas de temps, puis le modèle dynamique analysé a par la suite été intégré en temps sur 400 pas de temps (fenêtre de prédiction), pour étudier le caractère prédictif du modèle assimilé. Un très bon accord est obtenu entre les observations et la dynamique analysée. De plus, le modèle analysé est capable de prédire correctement la dynamique au delà du double de la période d'assimilation.

9.1.1.2 Expériences jumelles

Afin de tester la procédure d'assimilation de données, une approche d'*expériences jumelles* a été réalisée de manière similaire à celle effectuée à la section 8.4.2. La dynamique analysée obtenue précédemment avec les observations parfaites (voir figure 9.1) est à présent considérée comme état « vrai » pour les expériences jumelles. Les observations $a_i^P(t)$ sont artificiellement bruitées en ajoutant un bruit gaussien défini par $\mathcal{X}/\sigma_i$ où $\mathcal{X} \simeq \mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ avec $\sigma_t = 0,2$ et $\sigma_i = 2[\frac{i+1}{2}]$ où $[x]$ retourne l'entier le plus proche de x. Cet état bruité est pris comme observations pour les expériences jumelles. L'assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte est appliquée en considérant ici[1] $\sigma^2 = 10^{-2}$.

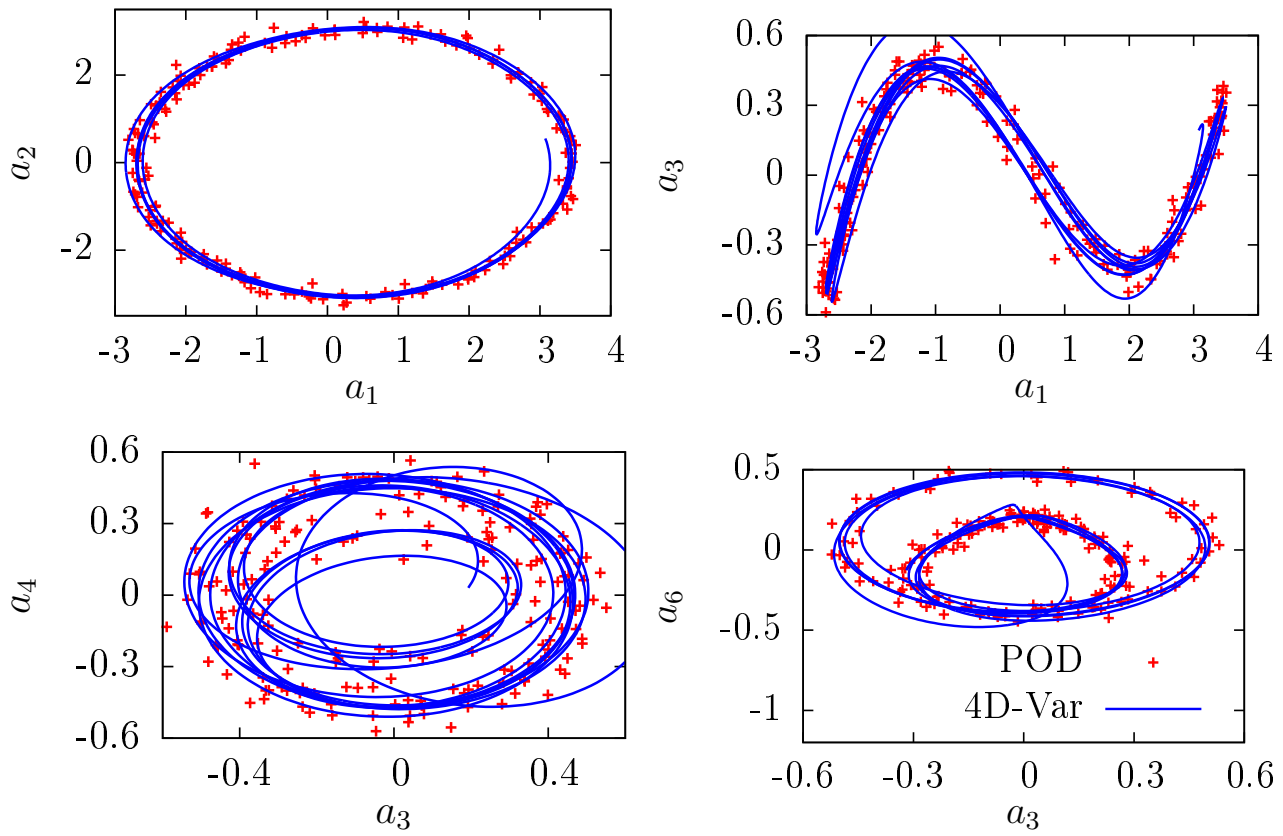


Figure 9.2 – Résultats d'assimilation 4D-Var en expériences jumelles pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Des observations bruitées sont considérées.

La figure 9.2 représente les résultats d'expériences jumelles pour les données numériques. Malgré les observations bruitées utilisées pour l'assimilation 4D-Var, la dynamique analysée est en bon accord avec l'état « vrai » attendu. De plus, la dynamique prédite correspond au bon

[1]Le paramètre de régularisation est à nouveau déterminée par la méthode L-curve.

attracteur du système. Afin de comparer différentes procédures d'assimilation, nous pouvons introduire l'erreur $e(t)$ définie par :

$$e(t) = \sqrt{\frac{\|\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{a}^{\text{Vrai}}(t)\|^2}{\frac{1}{T}\int_0^T \|\boldsymbol{a}^{\text{Vrai}}(t)\|^2 \mathrm{d}t}}, \tag{9.1}$$

où $\boldsymbol{a}(t)$ représente soit l'état analysé, pour évaluer une erreur d'assimilation, soit les fonctions propres POD $\boldsymbol{a}^P(t)$, pour déterminer une erreur d'observation[2]. La figure 9.3 montre l'évolution temporelle de l'erreur (9.1) pour différentes procédures d'assimilation dont les expériences jumelles. Le niveau minimum d'erreur qui peut être obtenu correspond au cas des observations parfaites (figure 9.1). Cette valeur de référence, représentée sur la figure 9.3, est comparée à la valeur obtenue pour les observations bruitées. Comme prévu, l'état analysé par assimilation 4D-Var a une erreur systématiquement inférieure aux observations bruitées dans la fenêtre temporelle d'assimilation. De plus, cette erreur ne croit pas fortement dans la fenêtre de prédiction, ce qui signifie que la prédictibilité de la dynamique analysée est satisfaisante.

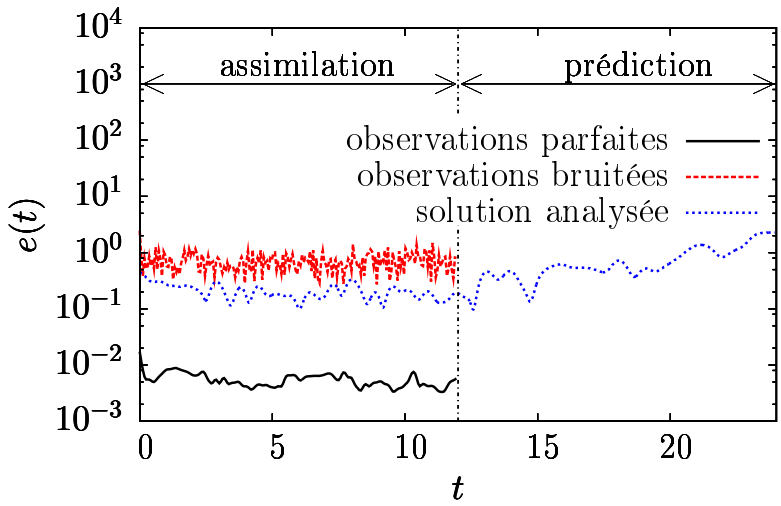


Figure 9.3 – Évolution temporelle de l'erreur pour différentes applications de l'assimilation 4D-Var pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Comparaison entre le cas des observations parfaites et des expériences jumelles.

[2]Dans notre cas, les variables d'état et d'observations coïncident. Nous avons donc pour opérateur d'observation l'identité.

9.1.1.3 Sensibilité de la condition initiale

En théorie des systèmes dynamiques, le rôle joué par la condition initiale pour capturer correctement la dynamique à long terme est bien connu. Cela explique qu'en prévision météorologique, et dans de nombreux autres domaines d'application de l'assimilation de données, les paramètres de contrôle sont habituellement la condition initiale du système dynamique (Navon, 2009). Nous aimerions vérifier si la situation est la même dans nos applications.

Dans le cas de l'assimilation 4D-Var avec observations parfaites, nous avons trouvé que l'ordre de grandeur de la perturbation de la condition initiale $\boldsymbol{\eta}$ était égale à $0,1\%$ de l'amplitude des modes. La question est de savoir si une faible modification de l'amplitude de la condition initiale a une forte influence sur la dynamique. Si c'est le cas, cela signifie que la dynamique du système est sensible à la condition initiale et que par conséquent il s'agit d'un paramètre intéressant à optimiser. Pour répondre à cela, les coefficients C_i, L_{ij} et Q_{ijk} trouvés par assimilation 4D-Var avec observations parfaites sont utilisés pour intégrer le système dynamique en imposant $\boldsymbol{\eta} = 0$. Le résultat de l'intégration temporelle est représenté sur la figure 9.4. Nous constatons sur la figure 9.5 que l'erreur croit exponentiellement jusqu'à atteindre des valeurs très élevées indiquant que le modèle s'écarte significativement de l'état de référence. Le taux de croissance de l'erreur est alors largement supérieur à celui observé dans la zone de prédiction des expériences jumelles (environ une décade en 6 temps adimensionnés contre une décade en 11 temps adimensionnés). En conclusion, pour $\boldsymbol{\eta} = 0$, nous observons une perte de prédictibilité du système dynamique assimilé.

Ces résultats mettent clairement en évidence que les modèles réduits développés sont sensibles à la condition initiale. Par conséquent, une bonne connaissance de ce paramètre est déterminante afin d'utiliser les modèles réduits dans un but prédictif.

9.1.2 Données expérimentales

A la section précédente, nous avons évalué les performances de l'approche 4D-Var pour un écoulement de sillage simulé numériquement. Dans cette section, nous appliquons l'assimilation de données à des mesures expérimentales de type PIV 2D-2C d'un écoulement de sillage en régime turbulent ($Re_D = DU_\infty/\nu_{\text{Kin}} = 13000$). Les mêmes données (Benard *et al.*, 2010) ont été utilisées à la section 5.5 pour appliquer l'analyse DMD. La base de données contient $N_t = 1000$ réalisations échantillonnées à une fréquence égale à $f_s = 1\,\text{k}\,\text{Hz}$ sur environ 25 périodes de lâchers tourbillonnaires. Une décomposition orthogonale aux valeurs propres a d'abord été effectuée sur la base de données. Pour décrire l'écoulement, une troncature sur les 12 premiers modes POD, soit $80,7\%$ de l'énergie cinétique turbulente, est réalisée.

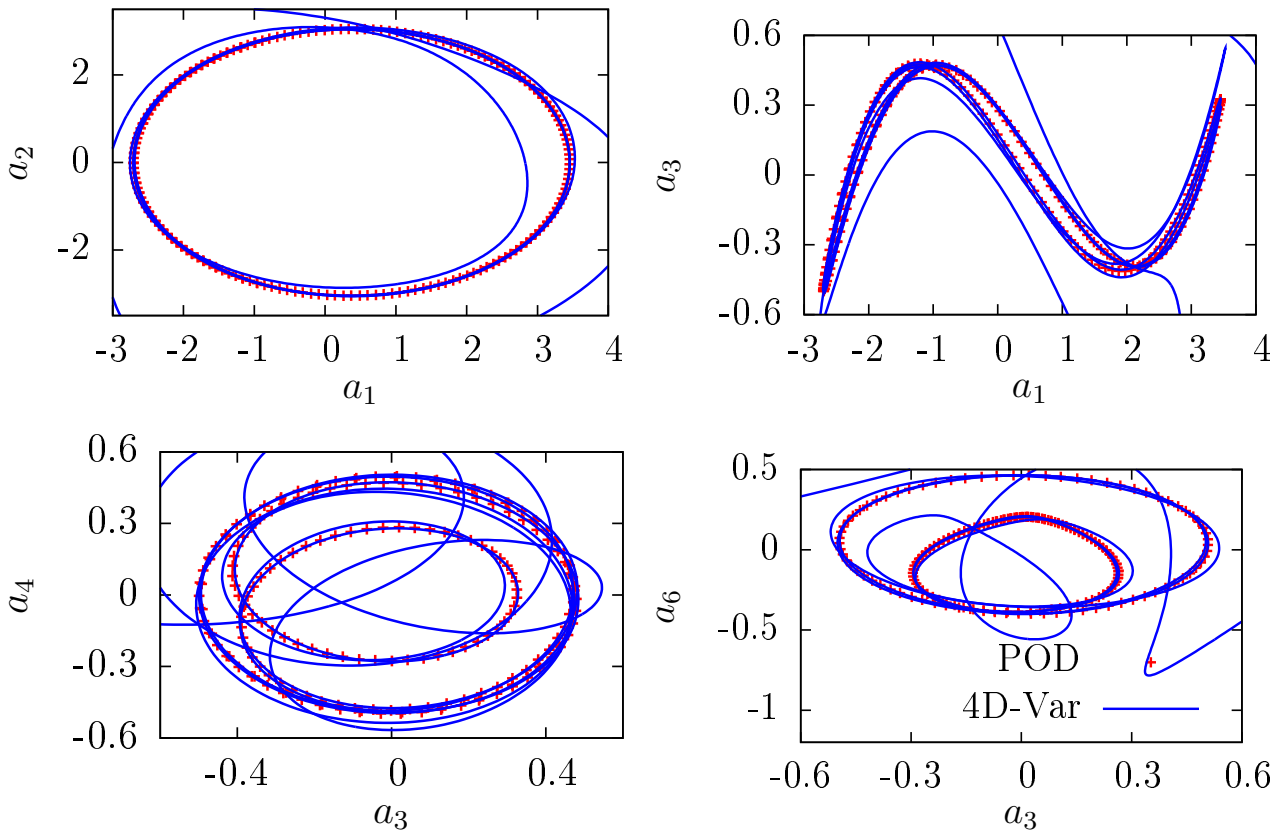


Figure 9.4 – Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Le système dynamique est intégré en temps avec les coefficients déterminés par assimilation 4D-Var avec observations parfaites et en imposant $\boldsymbol{\eta} = 0$.

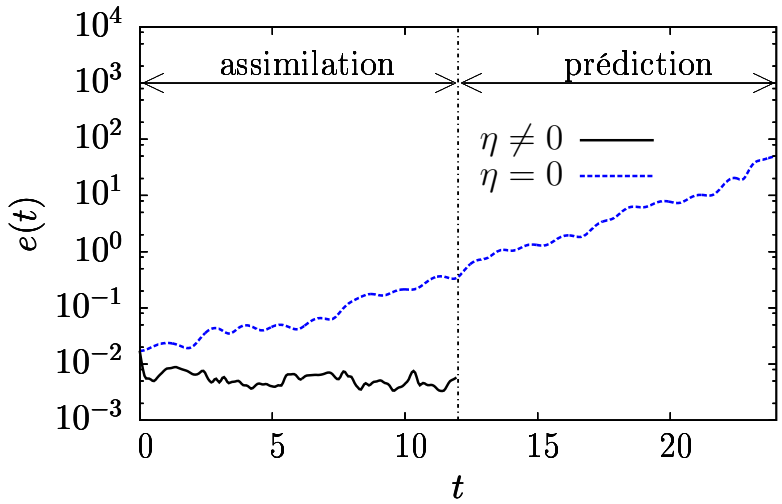
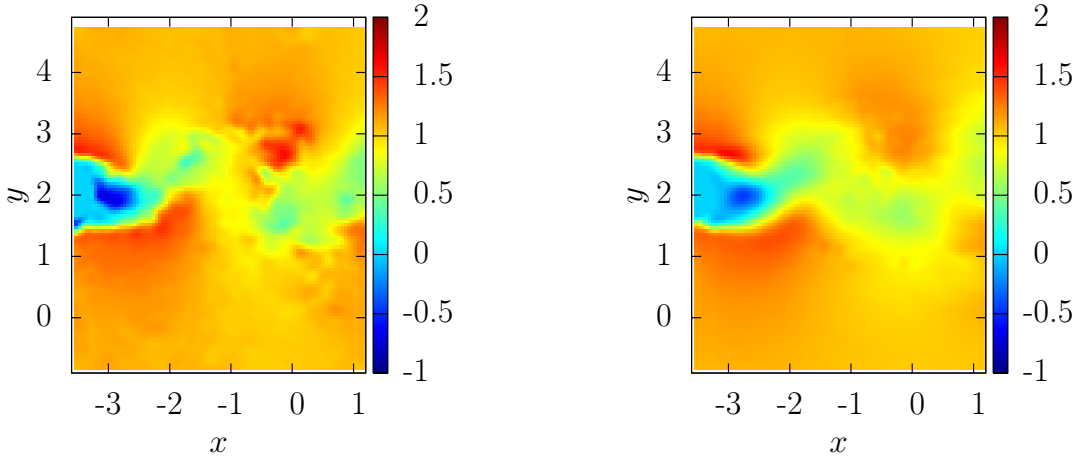


Figure 9.5 – Évolution temporelle de l'erreur commise en intégrant en temps le système dynamique avec les coefficients déterminés par assimilation 4D-Var avec observations parfaites pour $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ et $\boldsymbol{\eta} = 0$. Cas des données numériques de l'écoulement de sillage.



(a) Champ original.

(b) Approximation sur les 12 premiers modes POD.

Figure 9.6 – Comparaison d'une réalisation de vitesse longitudinale normalisée par la vitesse amont de référence provenant de la base expérimentale avec son approximation réduite sur modes POD.

La figure 9.6 montre une réalisation de vitesse longitudinale issue de la base de données expérimentale et son approximation sur les 12 premiers modes POD. L'essentiel du champ est bien représenté et seules les petites échelles sont manquantes.

9.1.2.1 Assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte

Une assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte est alors appliquée aux 125 premiers pas de temps de la base de données. Comparé au cas de la section 9.1.1, le nombre de lâchers tourbillonnaires est comparable, mais la dynamique est largement plus complexe. En outre, les données PIV sont incomplètes car elles correspondent à une description 2D d'un phénomène physique pleinement tridimensionnel. Les observations sont donc bruitées et incomplètes, typiquement une situation où l'assimilation de données devrait aider à reconstruire de manière optimale l'état de l'écoulement. Comme à la section 9.1.1, un modèle réduit POD construit cette fois avec 12 modes sert de modèle dynamique pour l'assimilation de données.

De manière similaire au cas des données numériques, la condition initiale d'ébauche est prise comme $a_i^P(t = 0)$. Concernant les coefficients d'ébauche du modèle, leurs valeurs sont déterminées par la projection de Galerkin. Finalement, le terme d'ébauche étant plus justifié que dans le cas des données numériques, les matrices de covariance sont choisies telles que $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{C}^{-1} = \mathbb{I}$.

Les résultats de l'assimilation de données à contrainte dynamique forte sont représentés sur la figure 9.7 en comparaison avec les fonctions propres temporelles POD. L'assimilation 4D-Var

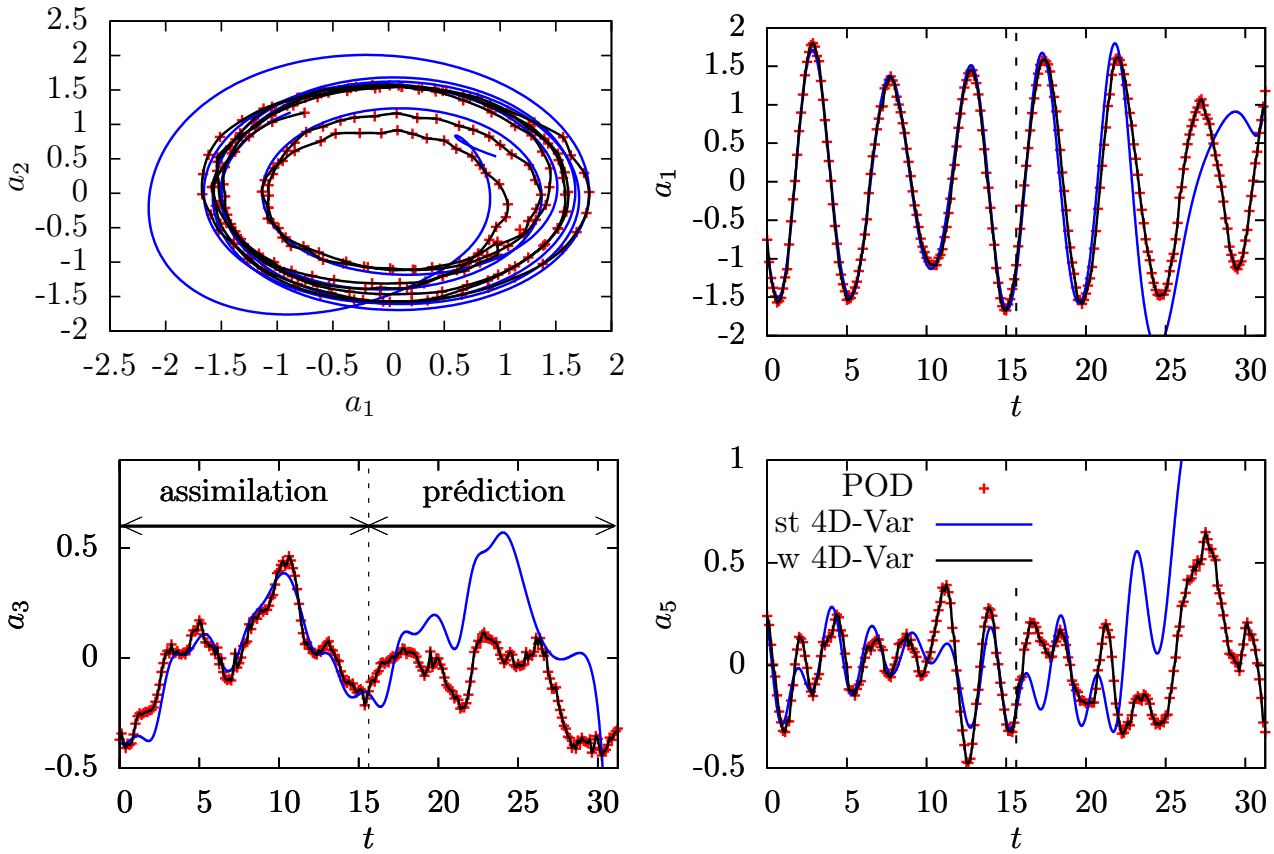


Figure 9.7 – Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données expérimentales de l'écoulement de sillage. Comparaison entre les résultats obtenus par contrainte dynamique forte (st) et faible (w). L'assimilation 4D-Var est réalisée jusqu'à $t \simeq 15$, la prédiction étant réalisée pour $t \gtrsim 15$ c'est-à-dire au delà de la ligne pointillée verticale.

est réalisée jusqu'à $t \simeq 15$. Au delà, le système dynamique analysé est utilisé en prédiction. Concernant les deux premiers modes, la dynamique est bien reproduite sur la fenêtre d'assimilation et correctement prédite sur la fenêtre de prédiction pour environ une période et demi de lâcher tourbillonnaire. Toutefois, au delà de $t = 23$, le modèle s'écarte de l'écoulement de référence. La capacité du modèle à représenter l'écoulement dans la fenêtre d'assimilation est donc satisfaisante. Concernant la prédiction, le modèle est capable d'effectuer une prédiction correcte à courts termes, mais rapidement, la prédictibilité du modèle est perdue. Cela peut s'expliquer principalement par deux raisons : i) les erreurs de troncature du modèle réduit POD sont plus importantes que ce qui avait été initialement imaginé à travers le contenu énergétique, ce qui finit par provoquer des erreurs de représentation dynamique, ii) l'observation est 2D tandis que l'écoulement est pleinement 3D. Ainsi, nous négligeons toutes les contributions transversales lors de la projection de Galerkin, ce qui engendre des erreurs. La section

suivante va permettre de voir si la formulation 4D-Var à contrainte dynamique faible améliore l'estimation de l'écoulement.

9.1.2.2 Assimilation 4D-Var à contrainte dynamique faible

Pour réaliser l'assimilation 4D-Var à contrainte dynamique faible, nous considérons les paramètres d'ébauche (condition initiale et coefficients du modèle) obtenus comme solutions du problème d'assimilation 4D-Var à contrainte dynamique forte traité à la section précédente. La contrainte dynamique faible consiste à relâcher la contrainte dynamique du modèle en introduisant une erreur de modélisation $\boldsymbol{w}(t)$ qui sera déterminée de manière optimale (voir section 8.3.1.1). L'assimilation de données est faite sur 250 pas de temps ($T = [0, 31]$). Le pas de temps du modèle est pris 10 fois plus petit que le pas de temps d'observation, ce qui permet d'estimer l'état entre les observations. En outre, les valeurs des matrices de covariance sont prises telles que $\mathcal{R}^{-1} = \mathbb{I}$ et $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{C}^{-1} = \sigma^2\mathbb{I}$ avec $\sigma = 10^{-3}$. La solution analysée est représentée en noir sur la figure 9.7.

L'estimation obtenue par contrainte dynamique faible est meilleure dans la fenêtre d'estimation. Cependant, il faut garder à l'esprit que le bruit additionnel $\boldsymbol{w}(t)$ est défini uniquement dans la fenêtre d'assimilation, ce qui rend impossible l'utilisation de la solution analysée dans un but prédictif.

9.2 Application à un modèle réduit DMD

Au chapitre 6, nous avons montré qu'il était possible de déterminer une base réduite basée sur les modes DMD. De manière naturelle, nous aimerions exploiter cette base pour construire un modèle réduit, d'autant plus que les propriétés de propagation temporelle issues de la DMD peuvent être intéressantes pour le modèle qui en résulte. Nous avons également montré au chapitre 7 que deux types de modèles réduits peuvent être obtenus à partir de ces bases.

Le premier type correspond à une propagation linéaire de la condition initiale projetée sur la base issue de DMD qui permet de propager un modèle linéaire identifié à partir des données. Ce modèle exploite les propriétés de la DMD mais ne tient absolument pas compte du fait que l'écoulement respecte les équations de Navier-Stokes. Ce modèle peut donc être qualifiée de purement cinématique. Un deuxième type consiste à effectuer une projection de Galerkin sur la base DMD et ainsi tenir compte du premier principe régissant le système. Le modèle Galerkin ainsi développé n'utilise pas le fait que la base est issue de l'identification d'un système linéaire et donc ne prend pas en compte ses propriétés de propagation.

Nous avons donc à disposition deux types d'informations que nous aimerions incorporer au mieux dans un modèle unique. Le formalisme de l'assimilation de données est parfaitement adapté à remplir cette tâche. L'assimilation 4D-Var est ici résolue dans le sous-espace DMD, avec pour variable d'état $\nu_i(t)$, $i = 1, \cdots, N_o$. Le modèle dynamique est donné par le système constant-linéaire-quadratique, les observations étant la propriété de propagation temporelle λ_i^{k-1} où λ_i est la i-ème valeur propre DMD de la base réduite. Les paramètres de contrôle du modèle sont les coefficients constants, linéaires et quadratiques $\boldsymbol{c} = \{C_i, L_{ij}, Q_{ijk}\}$. Les paramètres d'ébauche sont déterminés par projection de Galerkin[3]. Finalement, la fonctionnelle coût est donnée par :

$$\mathcal{J}^{\mathrm{DMD}}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_o} \left(\nu_i(t_k; \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{c})) - \lambda_i^{k-1} \right)^2 + \frac{\sigma_\eta}{2} \|\boldsymbol{\eta}\|^2 + \frac{\sigma_c}{2} \|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}^b\|^2, \tag{9.2}$$

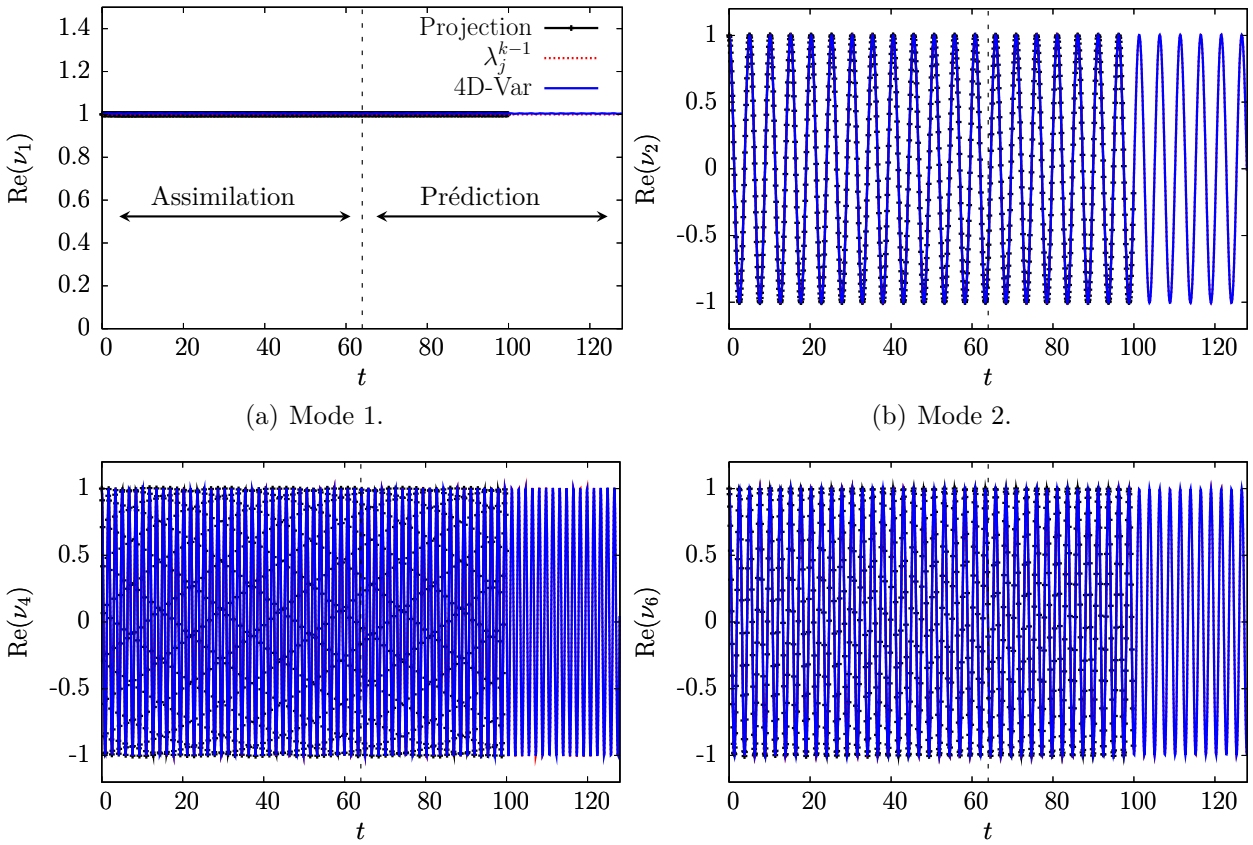
où les paramètres de régularisation σ_η et σ_c donnent plus ou moins de poids à la solution d'ébauche. La condition initiale et les coefficients du modèle seront modifiés de sorte que la dynamique du modèle réduit soit en accord avec la propriété de propagation temporelle issue de la DMD sous les contraintes du système dynamique déterminé par projection de Galerkin.

Dans un premier temps, l'assimilation 4D-Var est appliquée aux données numériques en régime permanent présentées à la section 6.5.1 afin d'améliorer le modèle réduit Galerkin fondé sur les 7 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Dans ce cas, les paramètres de régularisation sont $\sigma_\eta = \sigma_c = 1$. Les résultats sont représentés sur la figure 9.8. Nous observons un très bon accord entre l'état assimilé, la projection des réalisations sur la base DMD et la propriété de propagation.

Par la suite, les données numériques en régime transitoire ont été considérées. Les résultats sont reportés à la section B.6. La propagation temporelle linéaire et la projection des réalisations sur la base DMD différant après la fenêtre temporelle de calcul des modes DMD, nous avons choisi dans ce cas de prendre comme observation la projection des réalisations sur la base DMD. Le modèle issu de 4D-Var est alors capable de représenter la croissance transitoire et la saturation non-linéaire en amplitude, montrant ainsi de meilleures performances que le modèle de propagation linéaire.

Finalement, nous allons tester l'assimilation 4D-Var sur les données expérimentales. Au chapitre 6, nous avons montré que l'optimized DMD permettait de déterminer une base ayant de bonnes propriétés dynamiques tout en offrant des erreurs de reconstruction acceptables. Par ailleurs, à la section 7.2, nous avons vu que le modèle réduit obtenu par projection de Galerkin

[3]La matrice de masse étant indépendante du temps, elle est inversée une fois pour toute et multipliée à gauche du membre de droite afin que le modèle soit cohérent avec le formalisme 4D-Var.



(a) Mode 1.

(b) Mode 2.

(c) Mode 4.

(d) Mode 6.

Figure 9.8 – Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques en régime permanent. Le modèle dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les modes DMD. L'assimilation est effectuée jusqu'au trait vertical pointillé. La projection des réalisations sur la base DMD est représentée en noir, la relation de propagation temporelle en rouge, et les résultats du modèle assimilé en bleu.

sur la base optimized DMD présentait un comportement intéressant à court terme mais était inutilisable en pratique car trop imprécis à long terme. Nous nous proposons donc d'appliquer l'assimilation 4D-Var dans le sous-espace construit sur les 7 modes optimized DMD. Les observations correspondent à la dynamique linéaire propagée $\hat{\lambda}_i^{k-1}$. Les paramètres d'ébauche sont $\boldsymbol{\eta} = 0$ pour la condition initiale et les coefficients issus de projection de Galerkin pour $\boldsymbol{c} = \{C_i, L_{ij}, Q_{ijk}\}$. En outre, nous considérons pour paramètres de régularisation $\sigma_\eta = \sigma_c = 1$.

La figure 9.9 représente les résultats d'assimilation de données. Il est à noter que contrairement à des modes DMD « classiques », la projection des réalisations sur les modes d'optimized DMD ne correspond pas à la dynamique propagée en raison de la représentation de dimension réduite et de la présence dans le formalisme d'un résidu sur chaque pas de temps. L'assimilation 4D-Var a été effectuée jusqu'à la ligne pointillée verticale, soit $t = 32$ (256 pas de temps). La capacité du modèle analysé à prédire la dynamique du système est montrée sur une fenêtre temporelle égale à trois fois la durée de la fenêtre d'assimilation.

Pour la dynamique à long terme, la solution analysée est en meilleur accord avec la projection des réalisations sur les modes d'optimized DMD que la propagation linéaire des modes temporels d'optimized DMD. Ce résultat montre l'importance d'utiliser un modèle non linéaire et d'incorporer des informations venant des équations du premier principe en pénalisant un trop fort écart aux coefficients d'ébauche. Afin de quantifier cela, la figure 9.10 montre l'erreur relative associée à un champ quelconque $\boldsymbol{v}_i^{\text{Approx}}$ défini par :

$$e_{\text{Rel}}(t_i) = \frac{\|\boldsymbol{v}_i^{\text{Approx}} - \boldsymbol{v}_i\|_\Omega}{\|\boldsymbol{v}_i\|_\Omega}, \tag{9.3}$$

$\boldsymbol{v}_i^{\text{Approx}}$ pouvant être la projection sur les 7 modes DMD optimisés, la reconstruction de la dynamique linéaire propagée ou la reconstruction de la dynamique analysée par 4D-Var.

L'erreur minimale que le modèle est capable de commettre est l'erreur de projection. Nous pouvons voir que l'erreur de la dynamique linéaire propagée est proche de l'erreur de projection dans la fenêtre d'assimilation, et que cette erreur croit pendant la phase de prédiction. L'assimilation de données 4D-Var est capable de créer un modèle qui a une erreur de prédiction à long terme significativement plus faible que le modèle de propagation linéaire, ce qui montre l'intérêt d'utiliser un modèle non linéaire basé sur la physique.

Pour montrer l'intérêt d'utiliser une stratégie d'assimilation de données 4D-Var basée sur des modes DMD et non sur des modes POD (voir section 9.1), nous avons effectué la même[4] procédure d'assimilation de données que précédemment, mais en utilisant une base POD. Les

[4]Pour cette comparaison, nous avons utilisé les mêmes données, le même horizon temporel, le même nombre de modes ($N_{\text{Gal}} = 7$) et les mêmes valeurs pour les paramètres de régularisation ($\sigma_\eta = \sigma_c = 1$).

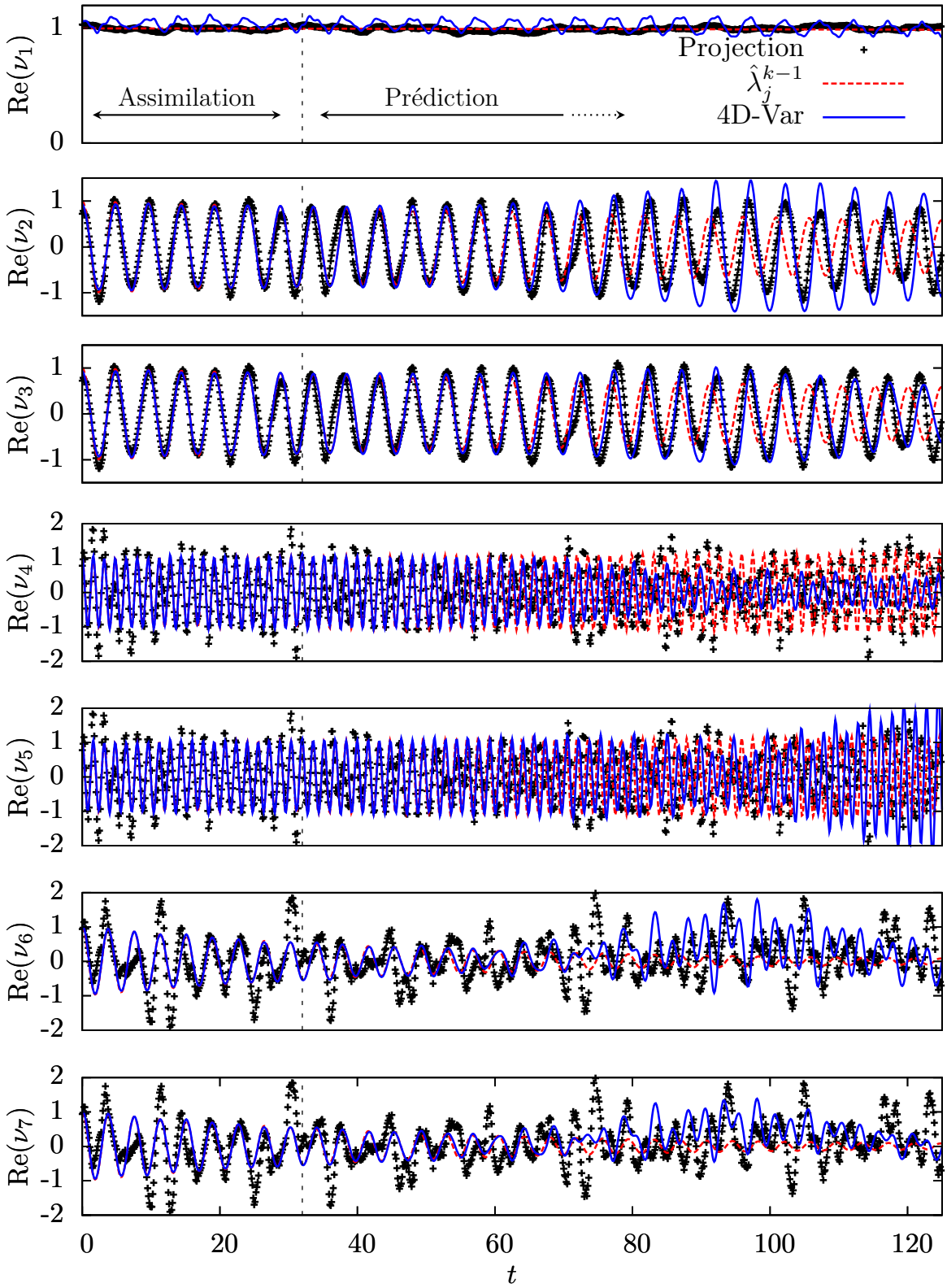


Figure 9.9 – Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données expérimentales. Le modèle dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les modes optimized DMD. L'assimilation est effectuée jusqu'au trait vertical pointillé. La projection des réalisations sur la base optimized DMD est représentée en noir, la relation de propagation temporelle en rouge, et les résultats du modèle assimilé en bleu.

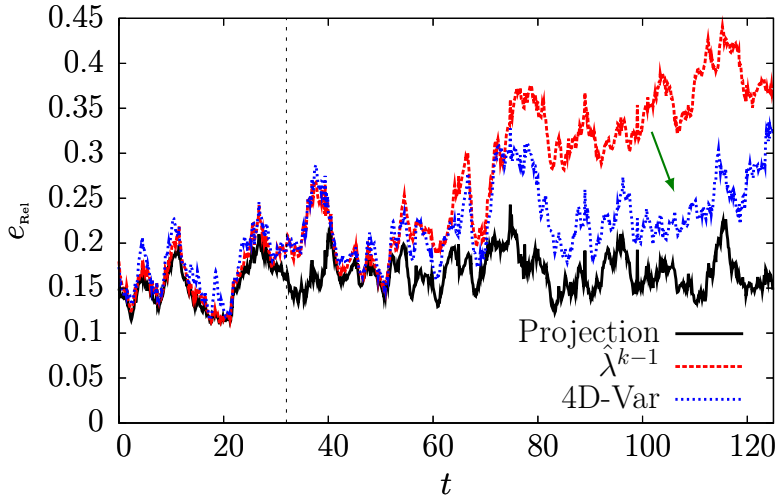


Figure 9.10 – Erreur relative instantanée de la projection sur les 7 modes DMD optimisés (noir), de la reconstruction de la dynamique linéaire propagée (rouge) et de la reconstruction de la dynamique analysée par 4D-Var (bleu). La flèche verte représente la baisse de l'erreur quand l'assimilation 4D-Var est utilisée par rapport à la propagation linéaire. La ligne verticale pointillée correspond à la fin de l'horizon temporel d'assimilation et le début de la fenêtre de prédiction.

erreurs de projection et de reconstruction obtenues par assimilation 4D-Var sont représentées sur la figure 9.11 en utilisant la base optimized DMD et la base POD.

Comme nous l'attendions, l'optimalité de la base POD fait que l'erreur de reconstruction est plus faible dans la fenêtre d'assimilation. Cependant, cette différence est beaucoup moins marquée dans la fenêtre de prédiction. Le modèle POD 4D-Var est extrêmement précis dans la fenêtre d'assimilation mais diverge très vite pendant la prédiction, ce qui ne le rend utile que pour des prédictions à temps court. Au contraire, l'assimilation 4D-Var basée sur les modes optimized DMD est moins précise dans la fenêtre d'assimilation, essentiellement due au fait que les observations considérées sont la propagation linéaire et non la projection des réalisations sur la base optimized DMD. Cependant, ce modèle montre un très bon comportement de prédiction à long terme.

9.3 Synthèse

L'assimilation de données permet de combiner des informations provenant d'un modèle, d'observations et une connaissance *a priori* du système. En cela, elle peut être utilisée comme une méthode d'identification pour améliorer les performances d'un modèle réduit. Dans ce chapitre, nous avons d'abord pu évaluer les performances de l'assimilation de données via des expériences

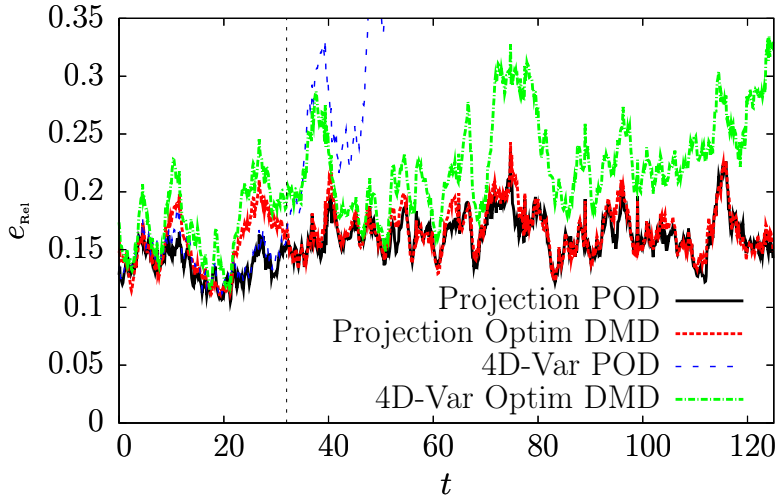


Figure 9.11 – Comparaison entre les erreurs relatives instantanées de projections et de reconstruction des dynamiques analysées en utilisant soit la base POD, soit la base optimized DMD.

jumelles réalisées sur des données numériques représentées dans le sous-espace POD. Nous avons ensuite vu que le modèle solution du problème d'assimilation pouvait avoir un caractère prédictif à court terme dans le cas de données obtenues par PIV pour un écoulement autour d'un cylindre.

Par assimilation 4D-Var, nous avons également pu construire des modèles réduits basés sur des modes DMD. Dans le cas de données numériques, les modes DMD étaient issus d'une procédure de sélection alors que dans le cas de données expérimentales, les modes étaient déterminés par optimized DMD. Grâce au choix judicieux d'utiliser une base évaluée par optimized DMD, ce dernier modèle a révélé de bonnes performances et une bonne stabilité assurant à la fois un bon comportement en termes de représentativité et de dynamique.

Quatrième partie

Contrôle d'écoulement en interaction fluide-structure

Chapitre 10

Introduction du terme de contrôle dans le modèle dynamique

Table des matières

10.1 Force volumique **179**

10.2 Conditions aux limites Dirichlet/Neumann **179**

10.2.1 Intégration par parties 180

10.2.2 Fonction de contrôle 181

10.2.3 Introduction d'une contrainte au modèle réduit 182

10.3 Modèle réduit pour l'interaction fluide-structure **183**

10.4 Méthodes pour imposer une contrainte **186**

10.4.1 Méthode tau 186

10.4.2 Problème d'optimisation sous contrainte 187

10.5 Applications **190**

10.5.1 Équation de Ginzburg-Landau 191

10.5.2 Cylindre en rotation 194

10.5.3 Cylindre en oscillation verticale 198

10.6 Synthèse **201**

Au chapitre 3, nous avons présenté les méthodes traditionnellement utilisées pour améliorer la précision des modèles réduits pour des paramètres de contrôle donnés. Au chapitre 4, nous avons abordé l'aspect de robustesse des modèles réduits à la variation des paramètres de contrôle de l'écoulement. Dans ce chapitre, nous allons traiter de l'introduction du terme de contrôle dans le modèle réduit. Pour cela, nous devons considérer le terme de contrôle à imposer au système comme une entrée externe du modèle, ce qui va permettre d'utiliser les méthodes de contrôle présentées au chapitre 1.

Par la suite, nous supposerons le modèle suffisamment robuste à des modifications du paramètre de contrôle pour être utilisable dans ce contexte (voir chapitre 4). La discussion des différentes méthodes d'imposition du contrôle dans le modèle dynamique sera organisée autour de considérations physiques liées aux méthodes pouvant être utilisées en pratique pour introduire des perturbations contrôlées dans une configuration expérimentale. Nous commencerons par le cas le plus simple, celui d'un contrôle agissant sous la forme d'une force volumique dans le domaine (section 10.1). Nous verrons qu'un terme supplémentaire apparait alors naturellement après projection de Galerkin. Par la suite, nous considérerons le cas majoritaire où le contrôle provient de l'extérieur du domaine et est modélisé par une condition aux limites (section 10.2). Nous verrons alors que le terme de contrôle peut être pris en compte soit via une intégration par parties, soit par l'introduction d'une fonction de contrôle, ou soit par l'imposition d'une contrainte supplémentaire. Nous considérerons alors le cas probablement le plus difficile à prendre en compte, celui où le contrôle se manifeste par le mouvement du domaine (section 10.3). Dans ce cas, l'hypothèse consistant à rechercher la solution sous forme séparée devient contestable et nous verrons que l'ajout d'une contrainte supplémentaire permettra également de prendre en compte ce type de situations. L'ajout d'une contrainte supplémentaire jouant souvent un rôle essentiel en modélisation[1], nous détaillerons à la section 10.4 les principales méthodes pouvant être utilisées pour imposer des conditions aux limites, soit la méthode tau, la méthode de pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Finalement, nous présenterons à la section 10.5 des applications de contrôle pour des configurations de complexité croissante. Nous commencerons par une équation monodimensionnelle de Ginzburg-Landau, continuerons avec un écoulement autour d'un cylindre en rotation, puis terminerons avec un cylindre en oscillation verticale.

[1] Ajouter une contrainte au modèle réduit peut être utilisable au delà du cas des conditions aux limites. On peut imaginer utiliser ce type d'approche par exemple pour imposer aux modèles réduits obtenus par projection de Galerkin que l'énergie se conserve (voir section 3.2.2).

10.1 Force volumique

L'effet d'un certain nombre d'actionneurs, comme les actionneurs plasma (Rizzetta *et al.*, 2008) ou les *vortex generators* (Törnblom et Johansson, 2007), peut être représenté par une force volumique $\boldsymbol{F}$. Cela se traduit par un terme supplémentaire dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, soit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \frac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta u} + \boldsymbol{F}. \tag{10.1}$$

La projection de Galerkin (voir section 2.1.2) devient alors :

$$\sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} M_{ij} \frac{\mathrm{d}a_j}{\mathrm{d}t}(t) = C_i + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} L_{ij} a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{Gal}}} Q_{ijk} a_j(t) a_k(t) + F_i \quad i \in [1, \cdots, N_{\text{Gal}}] \tag{10.2}$$

avec $F_i = (\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{F})_\Omega$, les autres coefficients étant inchangés par rapport à (2.7). Dans ce cas, l'ajout du contrôle est donc immédiat.

10.2 Conditions aux limites Dirichlet/Neumann

Dans la majorité des cas pratiques, les perturbations que l'on va apporter au fluide proviennent de l'extérieur du domaine et seront donc modélisées par des conditions aux limites. Ces conditions aux limites évolueront au cours du temps et seront de ce fait qualifiées *d'inhomogènes*. Un soufflage/aspiration ou une température imposée seront modélisés par une condition aux limites de Dirichlet, c'est-à-dire que la valeur de la solution sera imposée. En revanche, un flux de chaleur sera modélisé par une condition aux limites de Neumann, correspondant à l'imposition des gradients de la solution. Des conditions aux limites combinées existent également. Citons la condition aux limites de Robin qui est une combinaison linéaire des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann et la condition aux limites dynamique qui est une relation linéaire entre les dérivées temporelles et spatiales de la variable d'état. Par extension, ces cas pourront être traités de la même manière. Différentes méthodes permettent de prendre en compte dans le modèle réduit ces conditions aux limites. Nous décrirons l'utilisation d'une intégration par parties faisant apparaître des termes de frontière (section 10.2.1), la méthode de la fonction de contrôle (section 10.2.2) et finalement l'introduction d'une contrainte supplémentaire au modèle (section 10.2.3).

10.2.1 Intégration par parties

Lorsque les modèles réduits sont construits sur des techniques de projection, le système dynamique est obtenu par projection de Galerkin des équations d'état gouvernant le système physique sur un ensemble de fonctions tests. Après intégration par parties, le terme de frontière peut alors apparaître dans le modèle. A titre d'illustration, prenons le cas d'une équation monodimensionnelle de convection à la vitesse c sur le domaine $\Omega = [0, L_x]$, soit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial t} + c\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \psi(0,t) = \psi_0(t), \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial x}(L_x, t) = 0. \end{cases} \tag{10.3}$$

La projection de Galerkin sur des modes $\Phi_i(x)$ mène à l'expression

$$\left(\Phi_i, c\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_\Omega = \int_0^{L_x} \Phi_i(x) c \frac{\partial \psi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x$$

qui peut être modifiée par intégration par parties sous la forme :

$$\left(\Phi_i, c\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_\Omega = [c\Phi_i(x)\psi(x,t)]_0^{L_x} - \int_0^{L_x} c\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\psi(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Après projection, on obtient donc le système dynamique linéaire suivant :

$$\frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} L_{ij} a_j + F_i(t) \tag{10.4}$$

où

$$L_{ij} = \int_0^{L_x} c\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}(x)\Phi_j(x)\,\mathrm{d}x - c\Phi_i(L_x)\Phi_j(L_x) \quad \text{et} \quad F_i(t) = c\Phi_i(0)\psi_0(t).$$

La condition aux limites de Dirichlet en $x = 0$ est donc prise en compte explicitement dans le modèle et peut ainsi être utilisée comme un terme de contrôle. La condition de Neumann en $x = L_x$ est, quant à elle, implicitement respectée si toutes les fonctions tests Φ_i la vérifient.

A ce point, un certain nombre de remarques générales sont à faire. Pour commencer, la solution de (10.3) obtenue à partir de (10.4) n'est pas contrainte à respecter de manière forte les conditions aux limites. Par ailleurs, dans le cas d'équations aux dérivées partielles plus complexes, un traitement spécifique est à faire pour chaque terme, et cela se fera de manière plus ou moins naturelle (Cordier *et al.*, 2012). Des dérivées spatiales d'ordre 1 permettront de

faire apparaître naturellement des conditions aux limites de Dirichlet, tandis que des dérivées d'ordre 2, comme en élasticité, permettront de faire apparaître préférentiellement des conditions de Neumann (Placzek, 2009). La présence de termes non-linéaires peut également rendre plus difficile le calcul de l'intégration par parties. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, une intégration par parties sur le terme de pression a déjà été présentée à la section 2.1.3. On a vu que cela permettait de n'avoir qu'une intégrale de frontière en raison de la divergence nulle des fonctions tests. L'intégration par parties du terme visqueux permet également de réduire d'un ordre la dérivation des modes POD et ainsi de diminuer les erreurs numériques. Le terme non-linéaire quant à lui pouvant s'écrire sous forme conservative $(\frac{\partial u^i u^j}{\partial x_i})$, l'application du théorème de la divergence ne pose pas de problème.

L'utilisation d'intégrations par parties est intéressante pour faire apparaître le contrôle de manière explicite dans le modèle réduit. Cependant, nous ne l'utiliserons pas au chapitre 11 car cette méthode ne permet pas d'imposer de manière exacte les conditions aux limites et sa mise en œuvre est fortement dépendante de l'équation considérée.

10.2.2 Fonction de contrôle

La méthode la plus répandue pour imposer des conditions aux limites inhomogènes à un modèle réduit, est d'utiliser la méthode de la fonction de contrôle (Graham *et al.*, 1999a,b). Cette approche consiste à réaliser un relèvement des conditions aux limites inhomogènes afin de se ramener à un problème aux conditions aux limites homogènes. Pour cela, la technique consiste à définir un mode d'action $\boldsymbol{u}^c(\boldsymbol{x})$, appelé *fonction de contrôle*, qui décrira l'évolution spatiale de la solution dans la zone contrôlée. La fonction temporelle $\gamma(t)$ associée à ce mode sera l'entrée du système. Cette méthode peut être utilisée en éléments finis (Fix *et al.*, 1983) et est commune en réduction de modèle (Gunzburger *et al.*, 2007; Bergmann et Cordier, 2008). La décomposition modale est donc appliquée sur le résidu $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) - \gamma(t)\boldsymbol{u}^c(\boldsymbol{x})$ qui possède ainsi des conditions aux limites homogènes. On a donc :

$$\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\mathrm{Gal}}]}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) + \gamma(t)\boldsymbol{u}^c(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} a_i(t)\boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x}). \tag{10.5}$$

Les modes $\boldsymbol{\Phi}_i$ respectent donc des conditions aux limites homogènes et par linéarité, $\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\mathrm{Gal}}]}$ est contraint à respecter la condition aux limites attendue.

Dans cette approche, la fonction de contrôle est un choix qui doit être réalisé convenablement via des considérations mathématiques ou physiques. L'objectif est que la fonction s'approche au mieux de l'effet du contrôle là où il est appliqué dans l'écoulement. Si la condition aux limites

inhomogène n'est pas représentable par un mode unique variant au cours du temps, plusieurs fonctions de contrôle peuvent être ajoutées sans perte de généralité (Kasnakoğlu, 2007).

La projection de Galerkin utilisant cette décomposition fera apparaître explicitement des termes fonctions de $\gamma(t)$, en particulier des termes quadratiques dans le cas des équations de Navier-Stokes (Bergmann et Cordier, 2008).

10.2.3 Introduction d'une contrainte au modèle réduit

Dans les méthodes présentées précédemment, les conditions aux limites ne sont pas respectées exactement. Par ailleurs, la méthode de la fonction de contrôle pose la difficulté du choix du terme $\boldsymbol{u}^c$. Pour ces raisons, nous choisissons ici de considérer les conditions aux limites comme des contraintes supplémentaires à imposer au modèle comme cela a été présenté par Kalashnikova et Barone (2012) ou dans Placzek (2009). Les avantages sont d'une part qu'il n'y a aucun choix à faire au niveau de la fonction de contrôle, et d'autre part que les contraintes ne sont pas forcément des conditions aux limites, l'approche pouvant être généralisée à toute contrainte non-linéaire. Nous verrons à la section 10.3 que cela peut être utilisé par exemple dans le cas de domaines mobiles pour imposer les déplacements. Un autre exemple est celui présenté à la section 3.2.2 où la contrainte est alors un niveau énergétique à imposer au modèle réduit dans une démarche de fermeture des équations réduites.

Considérons un ensemble de N_c contraintes linéaires scalaires exprimées sous forme faible dans l'espace $\Omega \times [0, T]$ par :

$$(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{u}^{\text{Cible}}(\boldsymbol{x}, t))_\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad i \in [1, \cdots, N_c] \tag{10.6}$$

où les fonctions test $\boldsymbol{B}_i$ sont introduites pour imposer que $\boldsymbol{u}$ soit égal à $\boldsymbol{u}^{\text{Cible}}$. De cette manière, la contrainte peut être distribuée dans l'espace, localisée en un point si $\boldsymbol{B}_i$ est la fonction de Dirac, ou concentrée sur une frontière. Si par ailleurs ces fonctions tests sont dépendantes du temps alors elles peuvent également représenter un domaine mobile (voir de manière détaillée à la section 10.3). Ce formalisme couvre donc un large éventail de cas[2].

L'équation (10.6) peut être exprimée dans le sous-espace de dimension réduite engendré par la décomposition modale sur la base des fonctions $\boldsymbol{\Phi}_i$, soit :

$$\left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\text{Gal}}]}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{u}^{\text{Cible}}(\boldsymbol{x}, t)\right)_\Omega = 0 \quad \text{pour} \quad i \in [1, \cdots, N_c]. \tag{10.7}$$

[2]Cette méthode peut être généralisée sans difficulté au cas des contraintes non-linéaires (voir section 10.4.2). Un exemple d'application de contrainte non-linéaire est celui de la section 3.2.2 où une contrainte de niveau énergétique est considérée : $\frac{1}{2}\sum_{j=N_{\text{Cut}}+1}^{N_{\text{Gal}}} a_j^2(t) = E_0$.

Cette équation peut se ramener à la forme matricielle suivante (voir section C.1) :

$$\mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t) \tag{10.8}$$

avec $\mathcal{G}(t) \in \mathbb{R}^{N_c \times N_{\text{Gal}}}$ et où $\boldsymbol{h}$ est un vecteur de dimension N_c dépendant du temps. Le système dynamique issu de projection de Galerkin doit donc être résolu sous la contrainte (10.8), soit :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) \\ \mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t). \end{cases} \tag{10.9}$$

Ce système est évidemment surdéterminé ($N_{\text{Gal}}+N_c$ équations pour N_{Gal} degrés de liberté). Nous verrons à la section 10.4 différentes méthodes pour le résoudre comme la méthode tau (section 10.4.1) ou en formulant le problème comme un problème d'optimisation sous contraintes (section 10.4.2). Avant cela, on va voir (section 10.3) comment utiliser ce formalisme pour représenter par un modèle réduit une configuration d'écoulement en interaction fluide-structure.

10.3 Modèle réduit pour l'interaction fluide-structure

Utiliser la réduction de modèle pour le contrôle d'écoulement devient un défi numérique lorsque le domaine est mobile. A titre d'illustration, citons les cas du déplacement d'une membrane, du contrôle par un volet mobile ou de la présence dans le système de pistons. Pour tous les cas d'interaction fluide-structure où le contrôle correspond au mouvement du domaine, il est difficile d'envisager l'utilisation de techniques d'optimisation reposant sur l'utilisation d'un modèle haute-fidélité car les coûts numériques seraient prohibitifs. Malheureusement, les techniques classiques de réduction de modèle comme la POD ne peuvent pas être utilisées sans modifications spécifiques car elles n'ont pas été développées pour prendre en compte ce type de difficultés. En effet, l'hypothèse de séparation de variables faite en (2.1) n'est plus acceptable car les modes spatiaux devraient également évoluer au cours du temps en raison du mouvement du domaine. Liberge et Hamdouni (2010) ont étudié le cas d'un modèle réduit POD pour un écoulement en domaine mobile. Une approche aux frontières immergées dénommée *méthode des domaines fictifs* qui avait été introduite par Glowinski *et al.* (1999) et Patankar *et al.* (2000) a alors été utilisée. Cette approche consiste à appliquer la contrainte de rigidité au modèle haute-fidélité via des multiplicateurs de Lagrange. Par ailleurs, l'utilisation d'une fonction caractéristique permet de localiser la contrainte dans le domaine rigide. Ce système contraint est ensuite projeté sur une base POD pour construire le modèle réduit. Finalement, afin d'éviter la

dépendance temporelle des coefficients du modèle, la fonction caractéristique du domaine rigide et les multiplicateurs de Lagrange sont également projetés sur une base POD.

Dans cette section, nous nous focalisons sur la prise en compte du mouvement du domaine, le couplage avec le mouvement de la structure pouvant en découler naturellement. Pour construire un modèle réduit POD d'écoulement lorsqu'un domaine mobile est présent, la démarche consiste à d'abord construire des fonctions propres POD à partir de snapshots définis sur l'ensemble du domaine (solide et fluide). Par la suite, un modèle réduit dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur cette base POD. Pour ajouter l'information du mouvement de corps rigide, une contrainte est finalement appliquée au modèle réduit en suivant l'approche présentée à la section 10.2.3. Cette approche diffère de la procédure suivie par Liberge et Hamdouni (2010) car dans notre cas la contrainte est imposée après projection de Galerkin au niveau du modèle réduit. Ce choix donne une plus grande flexibilité car on s'affranchit ainsi du modèle haute-fidélité. Il devient alors possible d'utiliser un code de calcul en « boîte noire » ou d'appliquer cette approche à des données PIV. En contrepartie de cette flexibilité, nous perdons la consistance numérique due à la méconnaissance du modèle haute-fidélité.

Considérons $\Omega(t)$ un domaine spatial constitué d'un domaine fluide $\Omega_f(t)$ et d'un corps immergé $\Omega_s(t)$ tel que $\Omega_f(t) \cap \Omega_s(t) = \emptyset$. Le principe de la méthode des domaines fictifs est de considérer le domaine spatial dans son entier comme un fluide, et de traiter le domaine solide comme un fluide particulier soumis à une contrainte supplémentaire. Cette approche est très similaire à celle utilisée dans la méthode de pénalisation utilisée en particulier par Bergmann et Iollo (2011). On appelle $(\boldsymbol{u}_f, p_f)$ et $(\boldsymbol{u}_s, p_s)$ les champs de vitesse et de pression dans Ω_f et Ω_s. La mise en place d'un formalisme unique dans le domaine Ω se fait via l'introduction d'une fonction caractéristique $\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x}, t)$ telle que :

$$\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boldsymbol{x} \in \Omega_s(t), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10.10}$$

Cette fonction caractéristique[3] est transportée à la vitesse du solide, soit :

$$\frac{\partial \mathbb{I}_s}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{\nabla})\, \mathbb{I}_s = 0. \tag{10.11}$$

Il devient alors possible d'introduire les champs de vitesse $\boldsymbol{u}$ et de pression p définis dans

[3]De manière équivalente, il serait possible d'utiliser une fonction level-set (Sethian, 1999) donnant la distance signée d'un point par rapport à la frontière $\partial\Omega_s$.

tout Ω comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) &= \mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{x},t) + (1-\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{u}_f(\boldsymbol{x},t) \\ p(\boldsymbol{x},t) &= \mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)p_s(\boldsymbol{x},t) + (1-\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t))p_f(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{10.12}$$

Finalement, le système d'équations à respecter est défini par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{\nabla} p + \dfrac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega(t) \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega(t) \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \begin{pmatrix} u_{\Omega_s}(\boldsymbol{x},t) \\ v_{\Omega_s}(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_s(t), \end{cases} \tag{10.13}$$

où $(u_{\Omega_s}, v_{\Omega_s})^T$ est le champ de vitesse à l'intérieur du solide. De manière générale, ce solide pourra être soumis à des mouvements de translation, de rotation et de déformation.

Le problème étant maintenant formulé dans l'espace haute-fidélité, effectuons une étape de réduction de modèle. Pour cela, considérons une séquence de réalisations de l'écoulement correspondant au mouvement du corps solide en définissant le champ de vitesse dans tout Ω. La projection de Galerkin classique des équations (10.13) sur les N_{Gal} premiers modes POD donne un système dynamique constant-linéaire-quadratique défini par (2.6). A ce stade, tout le domaine spatial est considéré comme fluide et il reste à imposer la contrainte du mouvement solide. Dans le sous-espace POD, l'équation de contrainte liée au solide s'écrit :

$$\boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} a_j(t)\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} u_{\Omega_s}(\boldsymbol{x},t) \\ v_{\Omega_s}(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_s(t). \tag{10.14}$$

Cette contrainte est ensuite formulée de manière faible comme en (10.7), via un jeu de fonctions test $\boldsymbol{B}_i$ s'annulant dans Ω_f. Le système contraint à résoudre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t}(t) = C_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} L_{ij}a_j(t) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}}\sum_{k=1}^{N_{\text{Gal}}} Q_{ijk}a_j(t)a_k(t) \\ \mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t) \end{cases} \tag{10.15}$$

avec

$$\mathcal{G}_{ij}(t) = (\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}))_\Omega \quad \text{et} \quad h_i(t) = \left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \begin{pmatrix} u_{\Omega_s}(\boldsymbol{x},t) \\ v_{\Omega_s}(\boldsymbol{x},t) \end{pmatrix} - \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x})\right)_\Omega. \tag{10.16}$$

Les composantes de $\mathcal{G}(t)$ et $\boldsymbol{h}(t)$ peuvent être calculés hors ligne si ils sont connus à l'avance, ou en raison du coût élevé de leur évaluation, ils peuvent être approximés en suivant la méthode utilisée par Liberge et Hamdouni (2010) (voir les détails en annexe C.3). Le système (10.15) peut être résolu par les différentes méthodes que nous présenterons à la section 10.4 c'est-à-dire la méthode tau, la méthode des pénalités ou la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

10.4 Méthodes pour imposer une contrainte

L'imposition de contraintes est un problème souvent rencontré en mécanique des fluides, et cela bien au delà du cas des modèles réduits. En effet, par construction, les équations de Navier-Stokes en régime incompressible correspondent à une équation de conservation de la quantité de mouvement sous contrainte d'une solution à divergence nulle. Dans ce cas, la pression est parfois considérée comme un multiplicateur de Lagrange permettant d'imposer l'équation de continuité (Azaïez *et al.*, 2011).

Par la suite, nous présenterons trois méthodes numériques permettant d'imposer une contrainte à un modèle dynamique. Ces méthodes sont couramment utilisées pour imposer des conditions aux limites, considérées comme une contrainte supplémentaire. La première appelée *méthode tau* (section 10.4.1) provient des méthodes spectrales (Boyd, 2001) tandis que les deux autres, la *méthode des pénalités* et la méthode des *multiplicateurs de Lagrange* (section 10.4.2), sont plutôt courantes en éléments finis.

10.4.1 Méthode tau

Les méthodes spectrales (Gottlieb et Orszag, 1993; Boyd, 2001) partagent de nombreuses similitudes avec la réduction de modèle par POD telle que présentée à la section 2.1. En effet, de la même manière qu'en POD, une projection de Petrov-Galerkin est la base de la détermination d'un modèle dynamique, une des différences principales étant que dans un cas (méthode spectrale) les fonctions de base sont connues *a priori*, tandis que dans l'autre (POD) elles le sont *a posteriori*.

La méthode tau a été introduite en méthodes spectrales par Lanczos (Ortiz, 1969) pour imposer des conditions aux limites. Lorsque les fonctions de base ne vérifient pas les conditions aux limites du problème, le modèle dynamique obtenu par Petrov-Galerkin est surdéterminé. La méthode tau consiste alors à remplacer les N_c dernières équations du système Petrov-Galerkin par les contraintes. Les derniers modes spectraux étant considérés comme peu importants d'un point de vue dynamique, ce qui est également le cas pour les derniers modes POD en raison de

l'optimalité énergétique, ce sont les derniers modes qui ne sont pas pris en compte. Le système contraint (10.9) devient alors :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t}(t) = f_i(\boldsymbol{a}(t)) \quad i = 1, \cdots, N_{\mathrm{Gal}} - N_c \\ \mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t). \end{cases} \tag{10.17}$$

Ce problème est maintenant bien posé car le nombre d'inconnus et d'équations sont les mêmes. Le système (10.17) pouvant s'écrire sous la forme $E\dot{\boldsymbol{z}} = A(\boldsymbol{z}) + B\boldsymbol{c}$ avec E non-inversible, il correspond à un *système descripteur*. Pour intégrer numériquement ce type de système, plusieurs méthodes peuvent être utilisées comme une technique d'élimination ou un schéma implicite en temps. En pratique, si le pas de temps n'est pas trop petit[4], l'utilisation d'un schéma implicite en temps peut être suffisante. C'est l'approche que nous avons retenue.

10.4.2 Problème d'optimisation sous contrainte

Le modèle (10.9) étant surdéterminé, nous allons rechercher sa solution sous la forme d'un problème de minimisation sous contrainte (Singh et Singh, 2009). On recherche $\boldsymbol{a}_{\mathrm{Sol}}(t)$ comme solution du problème :

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{Sol}}(t) = \underset{\boldsymbol{a}(t)}{\operatorname{argmin}}\ \mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t)) \quad \text{sous la contrainte} \quad \mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t), \tag{10.18}$$

où $\mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t))$ est défini à une constante près par son gradient par rapport à la variation $\delta\boldsymbol{a}$ de $\boldsymbol{a}$:

$$\Big(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}(t)}\mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t)), \delta\boldsymbol{a}(t)\Big)_T = \int_0^T \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)), \delta\boldsymbol{a}(t)\right)_E \mathrm{d}t. \tag{10.19}$$

$(\cdot,\cdot)_E$ est le produit scalaire utilisé. Afin de généraliser les développements, nous allons considérer par la suite une contrainte non-linéaire donnée par :

$$\mathcal{G}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{a}, t) = 0. \tag{10.20}$$

[4]En effet, dans le cas d'un système descripteur linéaire $E\dot{\boldsymbol{z}} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c}$, l'utilisation d'un schéma implicite en temps mène à l'inversion de la matrice $E - \Delta t A$. Cette matrice est inversible mais elle devient mal conditionnée lorsque le pas de temps Δt devient petit.

L'opérateur tangent linéaire de $\mathcal{G}_{\text{NL}}$, noté $\dfrac{\partial \mathcal{G}_{\text{NL}}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)$, est défini par :

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{\text{NL}}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\delta\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a} + \epsilon\delta\boldsymbol{a}, t) - \mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a}, t)}{\epsilon}. \tag{10.21}$$

Le modèle (10.9) est ainsi reformulé comme un problème d'optimisation sous contrainte :

$$\begin{cases} \text{minimiser} & \mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t)) \\ \text{sous la contrainte} & \mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a}, t) = 0. \end{cases} \tag{10.22}$$

Ce problème peut être résolu de différentes manières. On présentera la méthode des pénalités et des multiplicateurs de Lagrange qui imposent respectivement la contrainte de manière approchée (faible) et de manière exacte (forte). Ces deux méthodes consistent à transformer un problème d'optimisation sous contrainte en un problème d'optimisation sans contrainte.

10.4.2.1 Méthode des pénalités

La méthode des pénalités (Babuška, 1973b; Kalashnikova et Barone, 2012) consiste à ajouter à la fonctionnelle $\mathcal{J}$ introduite précédemment un terme de pénalisation lié à la norme de la contrainte. On définit donc $\mathcal{J}_{\text{Pen}}(\boldsymbol{a}(t))$ par :

$$\mathcal{J}_{\text{Pen}}(\boldsymbol{a}(t)) = \mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t)) + \frac{\alpha_{\text{Pen}}}{2} \int_0^T \|\mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a}, t)\|_E^2 \, \mathrm{d}t, \tag{10.23}$$

où α_{Pen} est un paramètre libre qui impose plus ou moins fortement la contrainte. Ce paramètre peut être choisi *a posteriori* de telle sorte qu'un bon compromis soit trouvé entre stabilité du modèle et imposition de la contrainte. Au minimum de $\mathcal{J}_{\text{Pen}}$, son gradient est nul, soit :

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}(t)}\mathcal{J}_{\text{Pen}}(\boldsymbol{a}(t)), \delta\boldsymbol{a}(t)\right)_T &= \left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}(t)}\mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t)), \delta\boldsymbol{a}(t)\right)_T + \alpha_{\text{Pen}} \int_0^T \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{\text{NL}}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\delta\boldsymbol{a}(t), \mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a}, t)\right)_E \mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) + \alpha_{\text{Pen}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{\text{NL}}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\right)^* \mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a}, t), \delta\boldsymbol{a}(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= 0 \quad \forall \delta\boldsymbol{a}(t), \end{aligned} \tag{10.24}$$

où $\mathcal{A}^*$ est l'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$. Le minimum de $\mathcal{J}_{\text{Pen}}$ est atteint pour :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) - \alpha_{\text{Pen}} \left(\frac{\partial \mathcal{G}_{\text{NL}}}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\right)^* \mathcal{G}_{\text{NL}}(\boldsymbol{a}, t). \tag{10.25}$$

Dans le cas de la contrainte linéaire $\mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t)$, cette équation devient :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) - \alpha_{\mathrm{Pen}}\mathcal{G}^*(t)\left(\mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) - \boldsymbol{h}(t)\right). \tag{10.26}$$

L'application de la méthode des pénalités revient à ajouter un terme au modèle dynamique. Cette méthode est donc facile à implémenter car elle ne requière pas de variable supplémentaire. Toutefois, la contrainte n'est pas appliquée de manière exacte et le paramètre α_{Pen} doit être choisi de sorte que la contrainte soit bien imposée et que le modèle numérique reste stable.

10.4.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

Une autre manière courante de résoudre un problème d'optimisation sous contrainte (Babuška, 1973a; Gunzburger et Hou, 1992) est d'introduire une variable supplémentaire $\boldsymbol{\lambda}(t)$ appelée multiplicateur de Lagrange ou variable adjointe et de définir le lagrangien $\mathcal{L}$ tel que

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \mathcal{J}(\boldsymbol{a}(t)) - \int_0^T \left(\mathcal{G}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{a}, t), \boldsymbol{\lambda}(t)\right)_E \mathrm{d}t. \tag{10.27}$$

L'objectif est alors de déterminer $\boldsymbol{a}(t)$ et $\boldsymbol{\lambda}(t)$ tels que $\boldsymbol{\nabla}\mathcal{L} = \boldsymbol{\nabla}\mathcal{J} = 0$, soit :

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{a}(t)}\mathcal{L}, \delta\boldsymbol{a}(t)\right)_T &= \int_0^T \left[\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)), \delta\boldsymbol{a}(t)\right)_E - \left(\delta\boldsymbol{a}(t), \left(\frac{\partial\mathcal{G}_{\mathrm{NL}}}{\partial\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\right)^* \boldsymbol{\lambda}(t)\right)_E\right] \mathrm{d}t = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) + \left(\frac{\partial\mathcal{G}_{\mathrm{NL}}}{\partial\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\right)^* \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \forall t \in [0, T]\end{aligned} \tag{10.28}$$

et

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}(t)}\mathcal{L}, \delta\boldsymbol{\lambda}(t)\right)_T &= \int_0^T \left(\mathcal{G}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{a}, t), \delta\boldsymbol{\lambda}(t)\right)_E \mathrm{d}t = 0 \\ &\Rightarrow \mathcal{G}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{a}, t) = 0 \quad \forall t \in [0, T].\end{aligned} \tag{10.29}$$

Lorsque le minimum de la fonctionnelle coût $\mathcal{J}$ est atteint, on a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) + \left(\dfrac{\partial\mathcal{G}_{\mathrm{NL}}}{\partial\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}, t)\right)^* \boldsymbol{\lambda}(t), \\ \mathcal{G}_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{a}, t) = 0. \end{cases} \tag{10.30}$$

Lorsque l'équation de contrainte est linéaire comme dans (10.15), le système d'équations

(10.30) devient :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}(t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) + \mathcal{G}^*(t)\boldsymbol{\lambda}(t), \\ \mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}(t). \end{cases} \tag{10.31}$$

Comme pour la méthode tau, le système (10.31) rentre dans la classe des systèmes descripteurs, mais en raison de la symétrie[5] entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$, un plus grand nombre de méthodes de résolution sont référencées dans la littérature. On peut citer :

- l'algorithme d'Uzawa (Bacuta, 2006; Azaïez *et al.*, 2011) qui consiste à mettre à jour de manière itérative $\boldsymbol{\lambda}$ et $\boldsymbol{a}$ jusqu'à convergence ;

- les techniques d'élimination[6] souvent utilisées en élément finis où les multiplicateurs de Lagrange sont éliminées par projection du système dynamique le long de fonctions incluses dans le noyau de $\mathcal{G}$ (Kunoth, 1995) ;

- les méthodes de projection (Brown *et al.*, 2001) qui consistent à définir des pas fractionnaires de prédiction de l'état, que l'on corrige ensuite en le projetant sur la variété respectant la contrainte. C'est ce type de méthode d'intégration temporelle que nous utilisons dans ce manuscrit. Les détails sont donnés à la section C.2.

10.5 Applications

Dans cette section, différentes applications seront présentées en augmentant de manière progressive la complexité. Tout d'abord, nous chercherons à imposer par différentes méthodes une condition aux limites de Dirichlet pour l'équation de Ginzburg-Landau (section 10.5.1). Puis, nous considérerons le contrôle par rotation de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire pour lequel nous chercherons à imposer le mouvement de rotation par une contrainte (section 10.5.2). Enfin, nous étudierons le cas du cylindre circulaire en oscillation verticale pour lequel il n'y a plus invariance du domaine solide au cours du temps (section 10.5.3).

[5]En effet, en écrivant le système (10.31) avec la variable étendue $(\boldsymbol{a}(t)\ \boldsymbol{\lambda}(t))^T$, soit :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t)) \\ -\boldsymbol{h}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{G}^*(t) \\ \mathcal{G}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{pmatrix}, \tag{10.32}$$

une symétrie par bloc apparaît entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$.

[6]Cette approche est similaire à l'élimination du terme de pression dans les équations de Navier-Stokes dans le formalisme en vorticité.

10.5.1 Équation de Ginzburg-Landau

Pour commencer à tester les méthodes d'imposition des conditions aux limites sur un modèle réduit POD, nous avons choisi l'équation de Ginzburg-Landau. Ce choix présente un bon compromis entre simplicité et représentativité physique. En effet, l'équation de Ginzburg-Landau est une équation aux dérivées partielles 1D linéaire qui est connue (Bagheri *et al.*, 2009) pour reproduire qualitativement le comportement d'un écoulement se développant spatialement comme celui du sillage derrière un cylindre (Roussopoulos et Monkewitz, 1996).

L'équation de Ginzburg-Landau est une équation de convection-diffusion-amplification, avec parfois un terme cubique de saturation (Chen et Rowley, 2011). Par la suite, nous ne considérerons que la forme linéaire (Lauga et Bewley, 2003), soit :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \psi}{\partial t} + c\frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu(x)\psi + \nu\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad x \in [0 : L_x] \ ; \ t \in [0 : T], \\ &\psi(0,t) = \psi_{\text{BC}}(t) \ ; \ \frac{\partial \psi}{\partial x}(L_x, t) = 0 \ ; \ \psi(x,0) = \psi_{\text{IC}}(x). \end{aligned} \tag{10.33}$$

Les valeurs numériques des coefficients sont les mêmes que dans Lauga et Bewley (2003) c'est-à-dire $c = 6$, $\nu = 1 - 10\imath$, $\mu(x) = \mu_0 - [\xi(x - x_t)]^2$ avec $\xi = 0,01$. μ_0 joue le rôle du nombre de Reynolds pour un écoulement de sillage. μ_c est la valeur critique de μ_0 au delà de laquelle le système devient absolument instable. Nous prendrons $\mu_0 = 1,2\mu_c$ et choisirons[7] $x_t = 47 + 0,1\imath$ de telle manière que $x = 0$ corresponde à la position optimale de placement des actionneurs trouvée dans Lauga et Bewley (2003). Pour réaliser les simulations numériques, nous avons choisi un domaine spatial de dimension $L_x = 150$ avec un maillage de $N_x = 75$ points, et un horizon temporel égal à $T = 50$ pour $N_t = 1000$ pas de temps. La condition initiale ψ_{IC} est le résultat de l'intégration temporelle du modèle pendant 800 pas de temps à partir de la condition initiale $\psi(x, -800) = 0,1\sin(k_0 x)$ avec $k_0 = 10\pi/L_x$. La condition aux limites de Dirichlet en $x = 0$ est donnée par $\psi_{\text{BC}}(t) = 0,1\sin(0,4\pi t)$. L'intégration en temps se fait par un schéma de Mac-Cormack (Gottlieb et Turkel, 1976), décentré alternativement à gauche et à droite pendant une phase de prédiction et de correction. La solution correspondante sera notée HF pour « haute-fidélité ».

L'étape suivante consiste à construire un modèle réduit POD de l'équation de Ginzburg-Landau. Pour cela, la POD est d'abord appliquée sans soustraction du champ moyen sur un ensemble de réalisations résultant de l'intégration temporelle de (10.33). Un premier modèle réduit, noté par la suite MR^{I}, est alors construit par projection de Galerkin en conservant

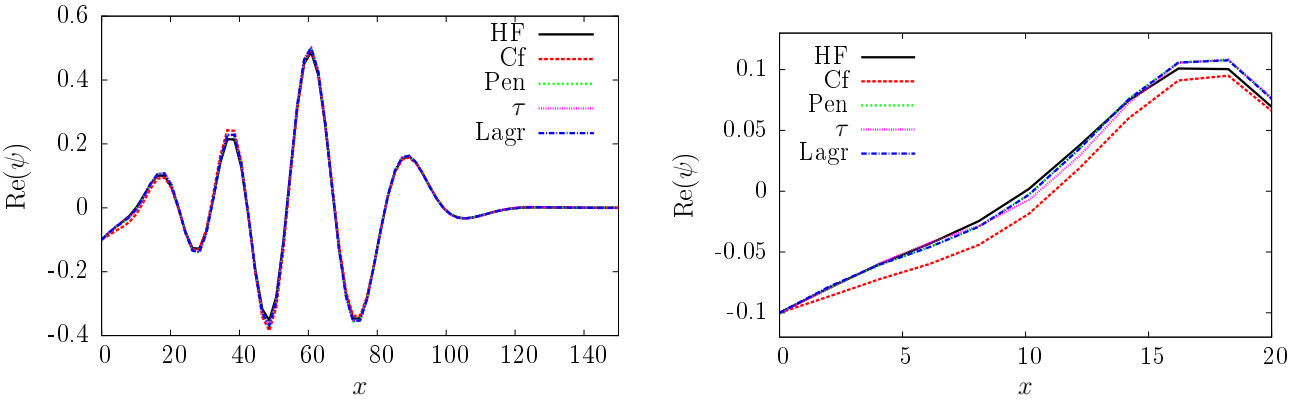
[7] La partie imaginaire de x_t permet d'ajouter une constante $\xi\,\text{Im}(x_t)^2$ à $\mu(x)$ et ainsi définir une zone spatiale dans laquelle les perturbations seront amplifiées.

les $N_{\text{Gal}} = 20$ premiers modes POD. A ce stade, nous cherchons à imposer la condition aux limites de Dirichlet via les différentes méthodes détaillées dans les sections 10.2 et 10.4. Les intégrations numériques de MR^{I}, réalisées sans imposer la condition aux limites et en effectuant une intégration par parties, conduisent toutes les deux à la divergence. La méthode de la fonction de contrôle présentée à la section 10.2 est ensuite considérée. Arbitrairement, nous définissons cette fonction de contrôle comme $\psi_c(x) = \exp(-\alpha_{\text{Cf}} x/L_x)$ où $\alpha_{\text{Cf}} = 50$. La POD est alors appliquée sur les réalisations $\psi_{\text{HF}}(x) - \psi_c(x)\psi_{\text{BC}}(t)$ et un second modèle réduit POD, noté MR^{II}, est déterminé. Les solutions issues de MR^{II} seront notées avec l'indice Cf. Nous décidons maintenant d'utiliser les méthodes présentées à la section 10.4 et revenons pour cela au modèle réduit MR^{I}. La contrainte de condition aux limites est alors ajoutée à ce modèle successivement par méthode tau (indice τ), par méthode des pénalités avec $\alpha_{\text{Pen}} = 100$ (indice Pen) et par méthode des multiplicateurs de Lagrange (indice Lagr). Pour l'intégration temporelle des modèles réduits, différentes méthodes numériques ont été adoptées. Pour les modèles issus de l'application des méthodes de fonction de contrôle et de pénalisation qui sont du type $\dot{\boldsymbol{z}} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c}$, nous appliquons un schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4. Pour le modèle dynamique issu de la méthode tau, un schéma implicite BDF d'ordre 2 est utilisé. Finalement, pour le modèle issu de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous utilisons la méthode de projection d'ordre 2 présentée à l'annexe C.2 qui pourra se généraliser au cas de l'interaction fluide-structure.

La figure 10.1 représente une comparaison des solutions obtenues par les différentes méthodes à $t = 35$. En première observation, nous ne constatons pas de différences majeures entre les différentes approches. Toutes les méthodes semblent plutôt précises et sont donc potentiellement utilisables pour la prise en compte de conditions aux limites inhomogènes dans un modèle réduit. Cependant, en observant mieux, des erreurs légèrement plus importantes peuvent être détectées près de $x = 0$ pour la méthode de la fonction de contrôle (voir figure 10.1(b)).

Afin d'analyser plus finement les différences entre ces méthodes, nous avons tracé sur les figures 10.2(a) et 10.2(b) les évolutions temporelles des erreurs relatives en norme L^2 sur tout le domaine et en $x = 0$ respectivement. Nous constatons que les niveaux d'erreur globale obtenus par toutes les méthodes basées sur l'ajout d'une contrainte supplémentaire sont similaires, tandis que l'erreur associée à la méthode de la fonction de contrôle est bien plus importante, et cela malgré une intégration numérique précise à l'ordre 4. Ce comportement indique que l'imprécision liée à la méthode de la fonction de contrôle est une erreur de modélisation et non une erreur purement numérique.

Ce résultat s'explique principalement par le fait que la méthode repose sur le choix d'une fonction de contrôle dont l'influence joue surtout près de la frontière du domaine (figure 10.1) où la condition au limite est imposée. Dans le cas des méthodes basées sur l'ajout d'une contrainte,



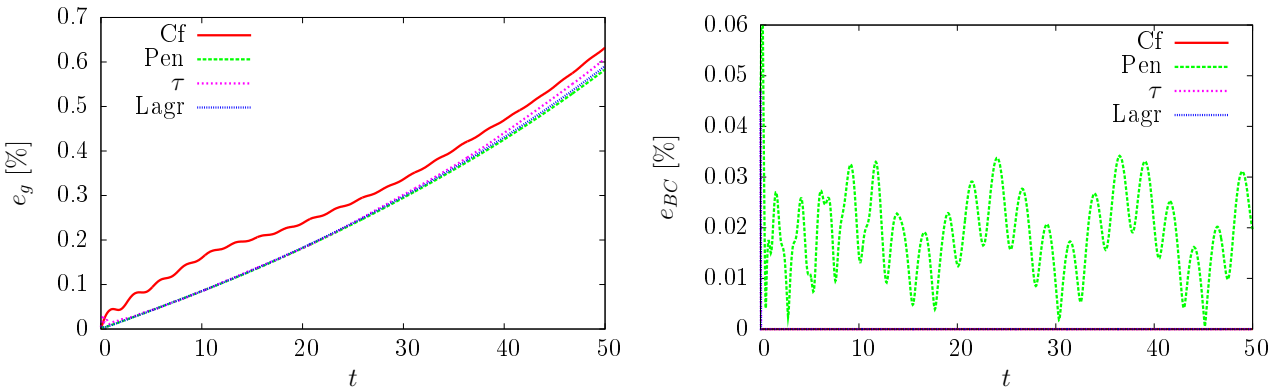
(a) Domaine complet.

(b) Zoom en $x = 0$.

Figure 10.1 – Comparaison pour l'équation de Ginzburg-Landau des solutions obtenues à $t = 35$ par : i) différences finies (solution haute-fidélité, « HF »), ii) un modèle réduit utilisant la méthode de la fonction de contrôle (« Cf »), iii) un modèle réduit contraint par pénalisation (« Pen »), iv) un modèle réduit contraint par la méthode tau (« τ »), v) un modèle réduit contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (« Lagr »).

il n'y a pas de fonction de contrôle à introduire, et donc pas de choix arbitraire. Concernant l'erreur de frontière, nous constatons que toutes les méthodes envisagées imposent de manière exacte la condition aux limites, exceptée la méthode des pénalités qui s'accompagne d'une erreur très faible mais non nulle. L'avantage principale de la méthode des pénalités est de conduire à un système dynamique explicite (10.26) qui peut s'intégrer en temps de manière très simple. A première vue, l'inconvénient serait de devoir choisir une valeur numérique au paramètre α_{Pen}. Ce paramètre représente un compromis entre précision (grande valeur de α_{Pen}) et stabilité numérique (faible valeur de α_{Pen}). Il existera donc des cas, en particulier pour les problèmes mal conditionnés, où la possibilité de pouvoir choisir de contraindre plus ou moins fortement le système via le choix du paramètre α_{Pen} sera un avantage.

Dans cette section, nous avons montré que nous pouvions construire un modèle POD représentatif de l'équation de Ginzburg-Landau avec une condition aux limites inhomogène de Dirichlet. Cette condition aux limites peut être utilisée comme paramètre de contrôle. Nous nous intéresserons donc au chapitre 11 au contrôle en boucle fermée de l'équation de Ginzburg-Landau. Nous ne retiendrons alors que la méthode des multiplicateurs de Lagrange. En effet, cette méthode est précise, impose de manière exacte la condition aux limites et ne demande aucun choix de fonction de contrôle ou de paramètre numérique.



(a) Erreur globale.

(b) Erreur en $x = 0$.

Figure 10.2 – Evolutions temporelles des erreurs relatives en norme L^2 entre la solution haute-fidélité et les solutions obtenues par : i) un modèle réduit utilisant la méthode de la fonction de contrôle (« Cf »), ii) un modèle réduit contraint par pénalisation (« Pen »), iii) un modèle réduit contraint par la méthode tau (« τ »), iv) un modèle réduit contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (« Lagr »). Les erreurs sont normalisées par $\sqrt{\int_0^T \|\psi_{\text{HF}}\|_\Omega^2 \, \mathrm{d}t}$ pour l'erreur globale et $\sqrt{\int_0^T \psi_{\text{HF}}^2(0,t) \, \mathrm{d}t}$ pour l'erreur en $x = 0$.

10.5.2 Cylindre en rotation

Dans cette section, nous augmentons le niveau de complexité par rapport à l'équation de Ginzburg-Landau et considérons l'écoulement de sillage autour d'un cylindre. Au fil des années, cette configuration est devenue un test classique en contrôle. Cet écoulement est caractérisé par une instabilité globale qui se produit pour des valeurs de nombre de Reynolds supérieures à environ 47 via une bifurcation de Hopf. L'état d'équilibre devient instable et il y a apparition d'un cycle limite qui se manifeste physiquement par la présence d'une allée tourbillonnaire de von Kármán. Puisqu'au chapitre 11, nous utiliserons une stratégie de contrôle linéaire pour stabiliser l'état stationnaire instable, nous nous plaçons juste après la bifurcation c'est-à-dire à $Re = 60$. Pour des raisons de simplicité numérique, nous adoptons pour première stratégie de contrôle la rotation du cylindre suivant son axe comme dans Bergmann *et al.* (2005); Bergmann et Cordier (2008). Cette stratégie revient à appliquer une vitesse tangentielle donnée à la paroi du cylindre. La condition aux limites de Dirichlet correspondante sera imposée par les méthodes de pénalisation et de multiplicateurs de Lagrange (voir section 10.4.2).

La figure 10.3 représente de manière schématique la configuration de l'écoulement. L'objectif de la section est de construire un modèle réduit POD respectant par contrainte la rotation tangentielle imposée au cylindre. Pour cela, un ensemble de réalisations est générée en utilisant le code éléments finis COMSOL Multiphysics 4.3. Les simulations numériques 2D sont réalisées

sur des domaines emboîtés, le premier considéré comme physique ($x \in [-3, 14]$, $y \in [-3, 3]$) étant inclus dans un domaine plus large ($x \in [-10, 30]$, $y \in [-10, 10]$) par étirement de maillage. Le cylindre de diamètre $D = 1$ est placé aux coordonnées $(0, 0)$. Le maillage de type non structuré comporte 11084 éléments P2-P1 triangulaires, correspondant à 51386 degrés de liberté. L'intégration temporelle est faite à l'aide d'un schéma implicite BDF en utilisant un pas de temps adaptatif d'ordre compris entre 2 et 4. Le nombre de Courant, Friedrichs et Lewy (CFL), basé sur la taille du plus petit élément $h_{\text{Min}} = 0,06$ et la vitesse infinie $U_\infty = 1$ est contraint à être plus petit que $1,7$. Pour les conditions aux limites, une vitesse infinie est imposée comme condition d'entrée, tandis que sur les bords latéraux une pression nulle et des efforts visqueux nuls sont imposés. Sur la frontière de sortie, un effort normal nul est considéré. Finalement, le contrôle est appliqué en imposant la vitesse tangentielle de la paroi du cylindre.

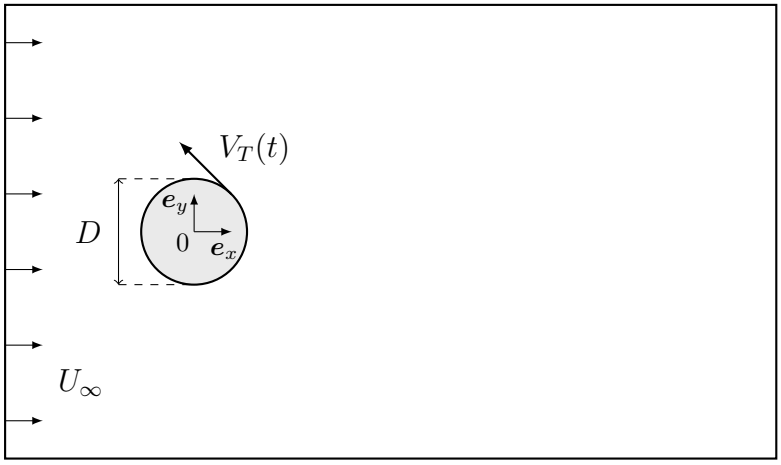


Figure 10.3 – Représentation schématique de l'écoulement de sillage autour d'un cylindre en rotation.

La vitesse tangentielle V_T^{Snap} appliquée pour générer les réalisations utilisées pour l'analyse POD est représentée sur la figure 10.4. V_T^{Snap} est choisie de telle manière que son évolution couvre *a priori* l'ensemble des états rencontrés par le système lors de la phase de contrôle (voir discussion à la section 4.1). Ici, le modèle dynamique devra être capable de représenter l'état stationnaire qui est la cible du contrôle, l'écoulement naturel c'est-à-dire non contrôlé, ainsi que la transition d'un état à l'autre. Pour cette raison, la condition initiale utilisée pour la génération des réalisations est choisie comme l'état stationnaire du système. Cet état est alors brièvement perturbé afin d'observer la croissance linéaire des instabilités. La vitesse tangentielle est ensuite de nouveau imposée à zéro jusqu'à $t \simeq 100$ afin d'enregistrer la transition et la saturation en amplitude sur une dizaine de périodes d'oscillation tourbillonnaire. Finalement, afin de pouvoir également décrire la dynamique de l'écoulement forcé, nous imposons $V_T^{\text{Snap}} = A \sin(2\pi\, St_f\, t)$

avec $A = 0,4$ et $St_f = 0,2$ jusqu'à $t = 200$. La dynamique forcée est alors échantillonnée avec un pas de temps égal à $\Delta t = 0,1$, soit 2001 réalisations.

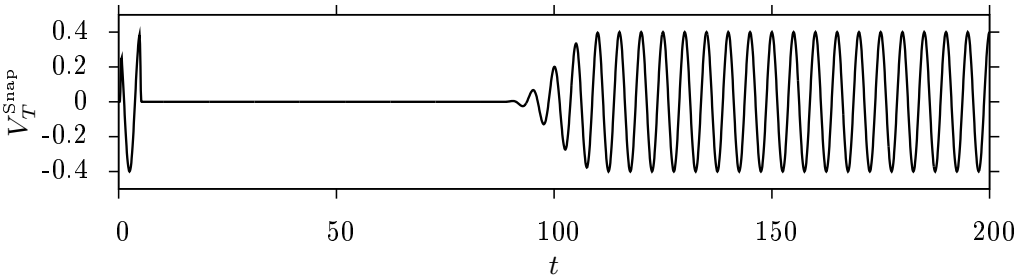


Figure 10.4 – Vitesse tangentielle à la paroi utilisée pour générer les réalisations nécessaires à l'analyse POD.

La décomposition POD est ensuite appliquée sur des champs fluctuants construits à partir de l'état stationnaire $\boldsymbol{u}^{\text{St}}$. Nous obtenons donc :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}^{\text{St}}(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{N_t} a_i^{\text{St}}(t) \boldsymbol{\Phi}_i^{\text{St}}(\boldsymbol{x}). \tag{10.34}$$

Une projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les fonctions POD $\boldsymbol{\Phi}_i^{\text{St}}$ est alors réalisée en conservant $N_{\text{Gal}} = 50$ modes. Par construction, la linéarisation du modèle dynamique ainsi obtenu autour de $\boldsymbol{a}^{\text{St}} = 0$ revient donc à linéariser le système autour de l'état stationnaire. Par ailleurs, annuler $\boldsymbol{a}^{\text{St}}$ ou minimiser sa norme revient donc à imposer $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\text{St}}$.

Soit $V_T(t)$, la vitesse tangentielle de rotation du cylindre, nous avons :

$$\int_{\partial\Omega_c} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}l = \pi D V_T(t), \tag{10.35}$$

où $\boldsymbol{t}$ est le vecteur unitaire tangentiel à la frontière du cylindre $\partial\Omega_c$. Par la suite, nous avons imposé cette équation de contrainte par méthode des pénalités et par multiplicateurs de Lagrange. Après discrétisation sur la base éléments finis et projection sur le sous-espace POD de (10.35), nous aboutissons à l'expression (10.8). Dans le cas de la rotation du cylindre, une seule équation de contrainte suffit pour imposer de manière exacte la vitesse sur tous les points de la paroi du cylindre. En effet, pour toutes les réalisations utilisées pour appliquer la POD, la vitesse tangentielle est homogène spatialement sur la paroi du cylindre. Par conséquent, les modes POD étant construits par combinaison linéaire de ces réalisations, ils hériteront également de cette propriété.

Pour la méthode des pénalités, le coefficient de pénalisation est choisi arbitrairement[8] égal

[8]La valeur numérique de ce coefficient de pénalisation correspond à un compromis entre une valeur trop

à $\alpha_{\text{Pen}} = 0,1$. Les modes temporels résultant de l'application des méthodes de pénalités et des multiplicateurs de Lagrange sont comparés aux fonctions propres temporelles POD sur la figure 10.5.

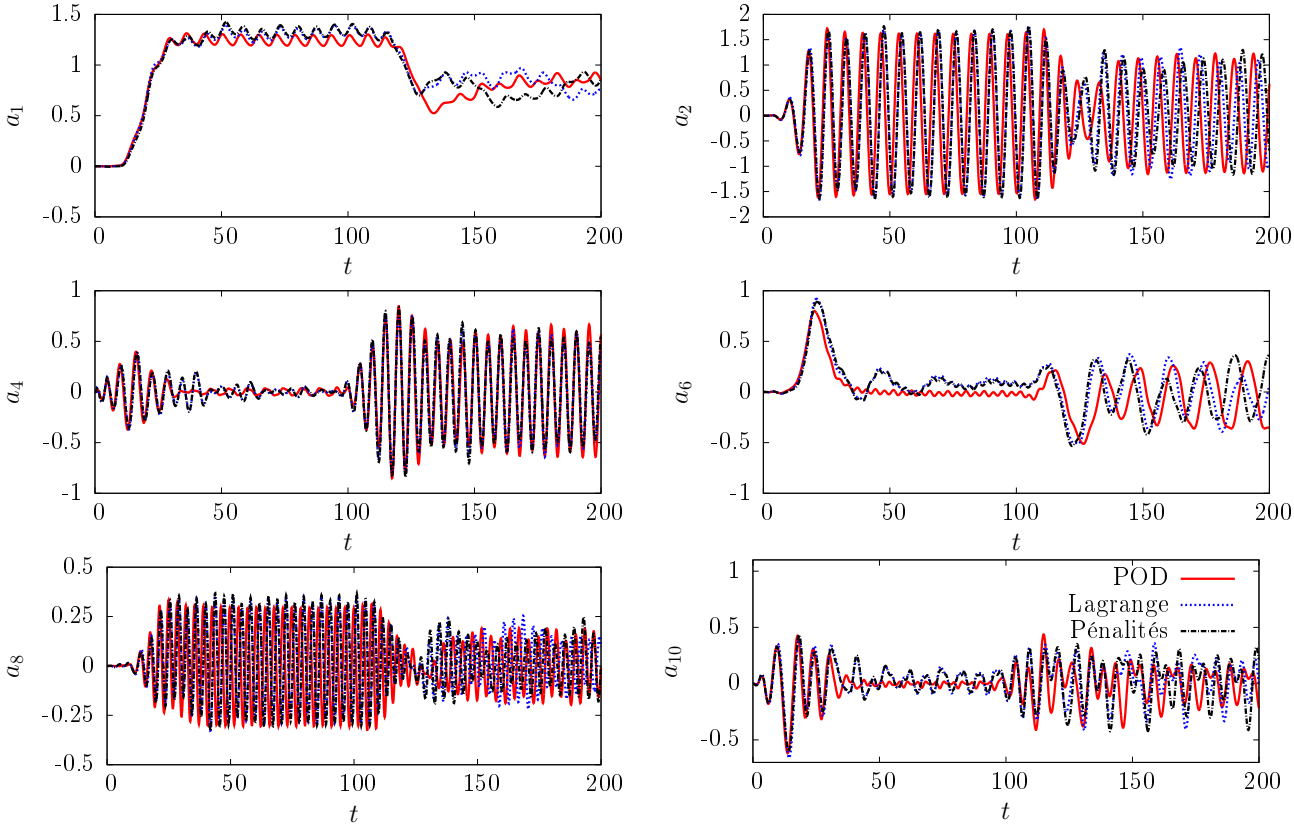


Figure 10.5 – Evolutions des coefficients temporels POD obtenus dans le cas du cylindre en rotation. Comparaison des résultats POD avec ceux issus de l'intégration temporelle du modèle réduit contraint par multiplicateurs de Lagrange et par la méthode des pénalités.

La décomposition POD ayant été appliquée sur des fluctuations construites autour de l'état stationnaire, les modes temporels sont à valeur moyenne quasi nulle, excepté le premier mode qui peut être interprété comme la différence entre le champ moyen et l'état stationnaire, soit le « shift mode » dans la terminologie de Noack *et al.* (2003). Sur l'évolution temporelle de a_1, nous observons nettement la transition de l'état stationnaire considéré pour $t = 0$ vers le régime naturel de l'écoulement matérialisé par un plateau. Nous constatons que lorsque le forçage est introduit dans l'écoulement (pour $t \simeq 100$), le système se rapproche de l'état stationnaire. Le deuxième mode, couplé au troisième (non représenté), décrit le phénomène d'oscillation tourbillonnaire. Les deux modèles réduits construits par la méthode des pénalités

faible ne permettant pas d'imposer précisément la contrainte et une valeur trop élevée introduisant des raideurs numériques dans le problème.

et par multiplicateurs de Lagrange ont un comportement similaire, très proche des réalisations utilisées dans l'analyse POD. Ces modèles capturent de manière précise la dynamique transitoire et plutôt bien l'écoulement naturel. La dynamique forcée est bien représentée mais la transition entre état naturel et forcé est moins bien décrite.

10.5.3 Cylindre en oscillation verticale

A la section précédente, nous avons montré dans le cas simplifié d'un solide en rotation dont le centre de rotation est fixé spatialement, qu'il était possible d'introduire dans les équations du modèle réduit les contraintes liées à son mouvement. Dans cette section, nous allons considérer un cas plus délicat pour lequel il sera nécessaire d'introduire un maillage spatial variant dans le temps pour prendre en compte le mouvement du solide. Comme précédemment, nous considérons le cas d'un écoulement autour d'un cylindre circulaire à $Re = 60$, mais supposons maintenant que le cylindre est soumis à un mouvement d'oscillation verticale. Dans cette section, nous allons construire le modèle réduit décrivant la contrainte du mouvement, le contrôle par méthode LQR étant effectué au chapitre 11.

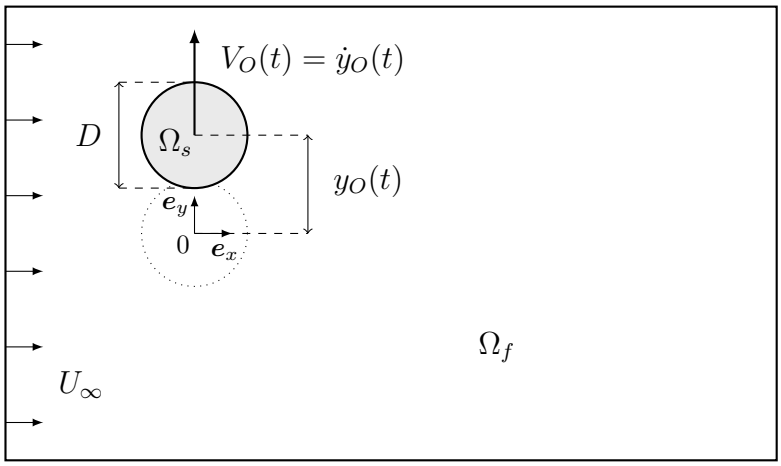


Figure 10.6 – Représentation schématique de l'écoulement de sillage autour d'un cylindre en oscillation verticale.

Afin d'appliquer la POD, un ensemble de réalisations a été généré sous COMSOL Multiphysics 4.3 en utilisant l'approche ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*) pour prendre en compte un maillage mobile. Le domaine de calcul est le même que pour le cylindre en rotation. Le maillage comporte 8936 éléments P2-P1, ce qui correspond à 5831 degrés de liberté. L'intégration temporelle est réalisée avec un schéma implicite BDF d'ordre adaptatif compris entre 2 et 4 et un pas de temps fixé à $\Delta t = 0,05$ correspondant à un nombre CFL de $0,63$. Les conditions

aux limites sont les mêmes que pour le cas du cylindre en rotation, sauf pour la vitesse à la paroi du cylindre qui est égale à la vitesse de translation verticale du cylindre. La méthode des domaines fictifs étant utilisée (voir section 10.3) pour prendre en compte l'interaction fluide-structure dans l'application de la POD, les réalisations sont interpolées sur une grille régulière du domaine physique de dimension $N_x = 935$ par $N_y = 400$, et la vitesse des points situés à l'intérieur du cylindre est mise égale à la vitesse de translation verticale du cylindre.

Le choix de la vitesse d'oscillation verticale V_O^{Snap} du cylindre utilisée pour générer les réalisations nécessaires à l'application de la POD est similaire à la stratégie adoptée pour le cylindre en rotation. Dans ce cas là, le forçage de l'écoulement se fait avec une amplitude $A = 0,1$ et une fréquence $St = 0,14$. La position instantanée du cylindre y_O^{Snap} est solution de l'équation $V_O^{\text{Snap}}(t) = \dot{y}_O^{\text{Snap}}(t)$. La figure 10.7 représente la vitesse d'oscillation verticale V_O^{Snap} et la position verticale y_O^{Snap} utilisées pour générer les réalisations nécessaires à l'analyse POD.

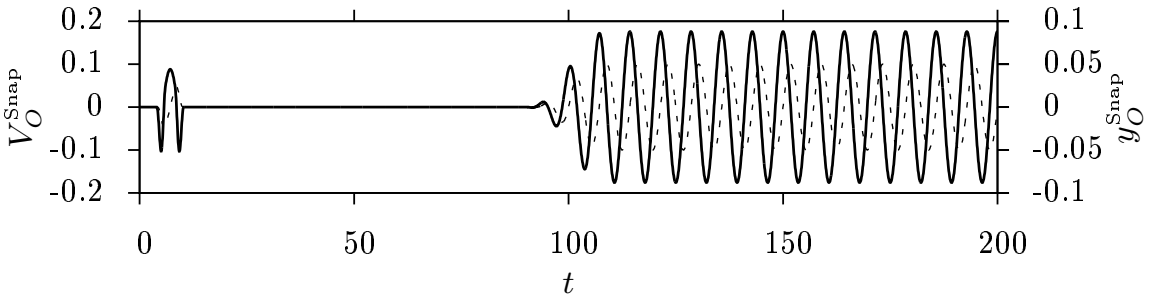


Figure 10.7 – Vitesse d'oscillation verticale (continu) et position verticale (pointillé) du cylindre utilisées pour générer les réalisations nécessaires à l'analyse POD.

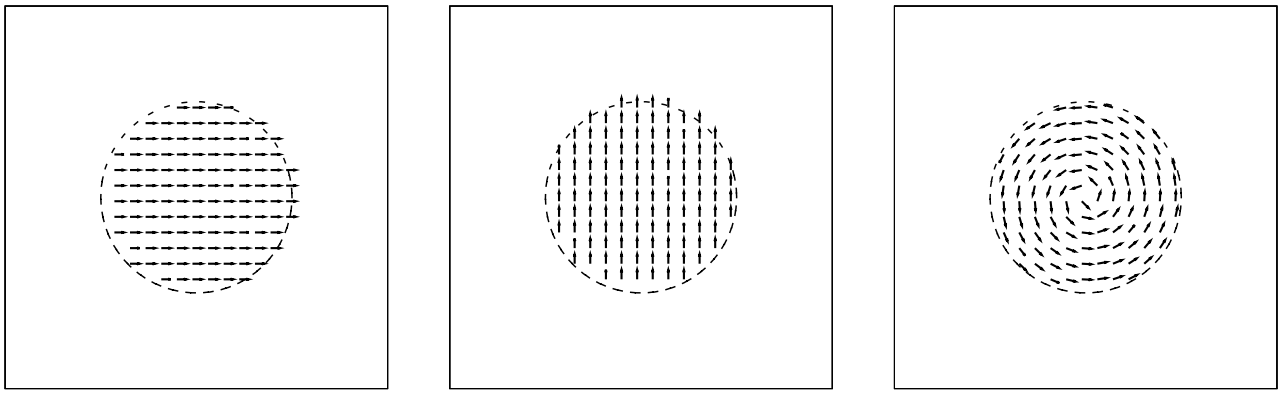
La décomposition POD est appliquée sur les réalisations interpolées. La projection de Galerkin est ensuite effectuée sur $N_{\text{Gal}} = 47$ modes, modélisant ainsi le fait que les équations de Navier-Stokes sont respectées dans tout le domaine Ω. Il reste à imposer le mouvement du cylindre comme une contrainte supplémentaire exprimée dans le sous-espace POD.

Dans le cas du cylindre en translation verticale, nous considérons trois fonctions test : deux étant associées à des contraintes scalaires de translation et une à une contrainte de rotation, de telle sorte que la vitesse moyenne dans $\Omega_s(t)$ et la rotation moyenne soient imposées. En réalité, ce choix de fonctions test est arbitraire et un autre choix est tout à fait envisageable.

Pour imposer les contraintes de mouvement, nous considérons (10.6) avec pour fonctions test :

$$\boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{V_s}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{V_s}\begin{pmatrix}0\\ \mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{V_s}\begin{pmatrix}\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\times t_x(\boldsymbol{x},t)\\ \mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\times t_y(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}, \tag{10.36}$$

où $V_s = \pi D^2/4$ est le volume du corps rigide et où (t_x, t_y) sont les coordonnées du vecteur unitaire azimutal centré à chaque instant sur le centre du cylindre[9]. Les fonctions test sont représentées sur la figure 10.8. Finalement, nous prenons $\boldsymbol{h}(t) = (u_{\Omega_s}, v_{\Omega_s}, 0)^T$, avec $(u_{\Omega_s}, v_{\Omega_s})^T$ la vitesse[10] à l'intérieur du cylindre.



(a) B1 (b) B2 (c) B3

Figure 10.8 – Fonctions test pour la contrainte de mouvement du cylindre.

Contrairement au cas du cylindre en rotation, aucune contrainte implicite n'est présente due à une relation respectée par toutes les réalisations. Un grand nombre de contraintes devrait donc être imposé. Cependant, un compromis est à trouver pour ne pas ajouter « trop » de contraintes à un modèle dynamique de dimension N_{Gal}. L'expérience a montré qu'en ajoutant uniquement deux contraintes de translation, la solution n'était pas satisfaisante. Rajouter la contrainte de rotation a significativement amélioré les résultats. Les coefficients temporels du modèle réduit sont représentés sur la figure 10.9. Les fonctions propres temporelles POD sont comparées aux solutions issues de l'intégration temporelle du modèle réduit contraint par multiplicateurs de Lagrange et par la méthode des pénalités pour $\alpha_{\text{Pen}} = 100$. La dynamique est correctement reproduite. En effet, les dynamiques des régimes transitoire et permanent sont proches de la dynamique originale, mais il subsiste quelques erreurs de représentation. Ces erreurs sont essentiellement dues au fait que la contrainte de mouvement est uniquement exprimée par 3 dimensions. Malgré ces légères imperfections, la dynamique forcée est très précise pour les deux

[9]Calculer $(\boldsymbol{B}_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}), \cdot)_\Omega$ est équivalent à intégrer la partie azimutale de la vitesse dans le solide car la projection sur un champ azimutal est une projection orthogonale et est donc autoadjointe.

$$\begin{aligned}\frac{1}{V_s}\left(\begin{pmatrix}\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\times t_x(\boldsymbol{x},t)\\ \mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\times t_y(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u(\boldsymbol{x},t)\\ v(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}\right)_\Omega &= \frac{1}{V_s}\left(\begin{pmatrix}\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\\ \mathbb{I}_s(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}u(\boldsymbol{x},t)\times t_x(\boldsymbol{x},t)\\ v(\boldsymbol{x},t)\times t_y(\boldsymbol{x},t)\end{pmatrix}\right)_\Omega\\ &= \frac{1}{V_s}\int_{\Omega_s}\left[u(\boldsymbol{x},t)\times t_x(\boldsymbol{x},t) + v(\boldsymbol{x},t)\times t_y(\boldsymbol{x},t)\right]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.\end{aligned}$$

[10]Dans le cas du cylindre en oscillation verticale, nous avons $u_{\Omega_s} = 0$ et $v_{\Omega_s} = V_O(t)$.

modèles. La contrainte ajoutée au modèle réduit est donc capable de représenter de manière suffisamment précise l'écoulement en présence de parois mobiles.

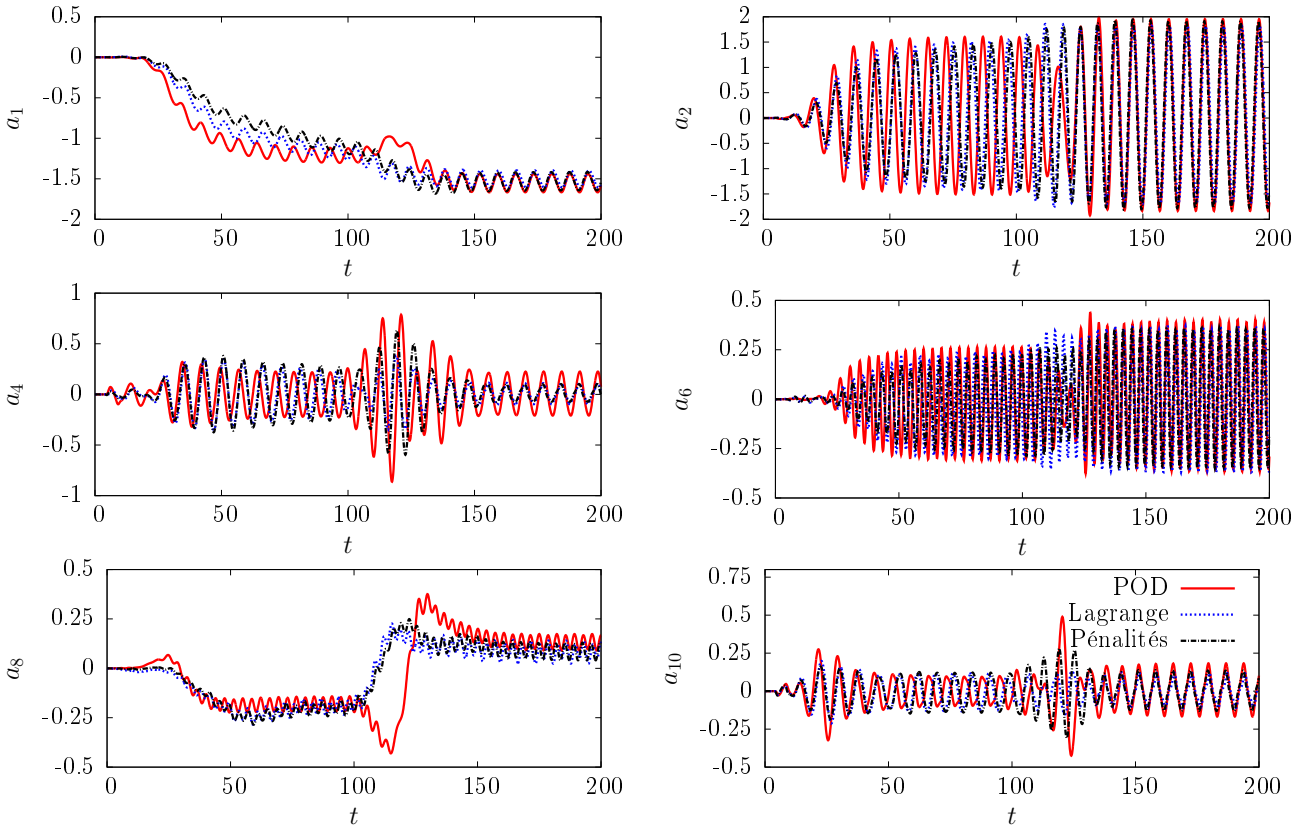


Figure 10.9 – Evolutions des coefficients temporels POD obtenus dans le cas du cylindre en oscillation verticale. Comparaison des résultats POD avec ceux issus de l'intégration temporelle du modèle réduit contraint par multiplicateurs de Lagrange et par la méthode des pénalités.

10.6 Synthèse

Pour développer une stratégie de contrôle basée sur un modèle dynamique, l'introduction du terme de contrôle dans le modèle réduit est une étape indispensable. Dans ce chapitre, nous avons vu qu'en fonction du type d'actionneurs, le contrôle peut apparaître de différentes manières. Une force volumique est prise explicitement en compte lors de la projection de Galerkin, tandis qu'un contrôle par le bord du domaine peut être intégré dans le modèle par de multiples manières. Deux méthodes classiques consistent à réaliser des intégrations par parties ou d'introduire une fonction de contrôle. Afin de s'affranchir du choix de la fonction de contrôle, une autre méthode consiste à imposer de manière précise la condition aux limites en ajoutant au modèle une contrainte. Différentes approches permettent d'imposer cette contrainte comme la

méthode tau, la méthode des pénalités ou celle des multiplicateurs de Lagrange. Ce formalisme étant général, il permettra d'imposer des contraintes arbitraires comme celles rencontrées dans le cas de domaines mobiles ou dans un problème de fermeture. Les différentes méthodes ont été comparées pour imposer une condition aux limites de Dirichlet dans le cas de l'équation de Ginzburg-Landau. Par la suite, nous avons vu qu'ajouter une contrainte permettait de prendre en compte dans un modèle réduit POD la rotation et la translation d'un cylindre dans un écoulement.

Puisqu'un modèle réduit tenant compte du paramètre de contrôle est disponible, nous pouvons envisager d'utiliser une stratégie de contrôle présentée au chapitre 1. Au chapitre 11, nous allons donc contrôler l'équation de Ginzburg-Landau et le cylindre en interaction fluide/structure en imposant le contrôle via la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Chapitre 11

Contrôle en boucle fermée par un modèle réduit POD contraint

Table des matières

11.1 Stabilisation d'écoulement par modèle réduit POD contraint par multiplicateurs de Lagrange 204

11.2 Applications 206

11.2.1 Équation de Ginzburg-Landau 206

11.2.2 Cylindre en rotation 211

11.2.3 Cylindre en oscillation verticale 214

11.3 Synthèse 217

Au chapitre 10, nous avons montré qu'il était possible de développer des modèles réduits POD pour lesquels le terme de contrôle était introduit comme une contrainte supplémentaire via la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Des modèles réduits suffisamment précis ont ainsi été déterminés pour l'équation de Ginzburg-Landau et pour deux configurations de contrôle en interaction fluide/structure : le cylindre circulaire en rotation et en oscillation verticale. Dans ce chapitre, nous allons reprendre ces mêmes configurations pour lesquelles nous allons maintenant concevoir une stratégie de contrôle basée sur les méthodes de contrôle linéaire présentées au chapitre 1.

A la section 11.1, nous précisons les grandes étapes nécessaires pour stabiliser un écoulement en utilisant une approche LQR (voir section 1.2.1) reposant sur un modèle réduit. Nous testons alors cette approche en commençant par le contrôle de l'équation de Ginzburg-Landau (voir section 11.2.1). Pour cette application, nous appliquons également le contrôle LQG vu à la section 1.2.2 en considérant que le système ne peut pas être observé de manière complète. Par la suite, nous nous intéressons au contrôle de l'écoulement de sillage par rotation du cylindre (section 11.2.2), puis par oscillation verticale (section 11.2.3). Nous verrons que des lois de contrôle, déterminées par LQR et basées sur des modèles réduits linéarisés, sont capables de stabiliser ces écoulements.

11.1 Stabilisation d'écoulement par modèle réduit POD contraint par multiplicateurs de Lagrange

Considérons que la stabilisation d'un état stationnaire est l'objectif du contrôle. Dans ce cas, l'utilisation de la théorie du contrôle linéaire vu au chapitre 1 semble tout à fait adaptée. La première étape consiste à linéariser le modèle dynamique autour de l'état stationnaire à stabiliser. Pour obtenir le modèle réduit linéarisé, deux approches sont *a priori* envisageables. En effet, nous pouvons effectuer la projection de Galerkin sur le modèle haute-fidélité linéarisé, ou linéariser le modèle réduit. En réalité, nous allons montrer que ces deux approches sont équivalentes.

Soient $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$ et p^{St}, les états stationnaires de vitesse et de pression que nous cherchons à stabiliser, ainsi que $\boldsymbol{u}'$ et p' les fluctuations correspondantes, les équations de Navier-Stokes linéarisées autour de cet état stationnaire donnent :

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} + (\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}' + (\boldsymbol{u}' \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} = -\boldsymbol{\nabla} p' + \frac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{u}'. \tag{11.1}$$

Après application de la décomposition POD à $\boldsymbol{u}'$, soit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Gal}}} a_j^{\mathrm{St}}(t)\boldsymbol{\Phi}_j^{\mathrm{St}}(\boldsymbol{x})$, et application de la projection de Galerkin sur l'équation de Navier-Stokes linéarisée, nous obtenons le modèle réduit :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}}{\mathrm{d}t}(t) = L^{\mathrm{St}}\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) \tag{11.2}$$

où

$$L_{ij}^{\mathrm{St}} = \left(\boldsymbol{\Phi}_i^{\mathrm{St}}, -(\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\Phi}_j^{\mathrm{St}} - (\boldsymbol{\Phi}_j^{\mathrm{St}} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}} + \frac{1}{Re}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\Phi}_j^{\mathrm{St}}\right)_{\Omega}, \tag{11.3}$$

en négligeant le terme de pression. L'expression (11.3) est effectivement la même que l'on aurait obtenue en négligeant les termes quadratiques d'un modèle réduit construit avec $\boldsymbol{u}^b = \boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$, le terme constant s'annulant car $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$ est une solution stationnaire.

Introduisons ensuite le terme de contrôle comme une contrainte supplémentaire prise en charge par des multiplicateurs de Lagrange (voir section 10.4.2.2). Puisque les effets non linéaires ont été négligés par linéarisation, nous supposons que la matrice des contraintes linéarisée est indépendante du temps et est égale à la valeur obtenue pour $\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$. En outre, nous considérons que le terme $\boldsymbol{h}(t)$, apparaissant au terme de droite de (10.31), est en lien linéaire avec le paramètre de contrôle $\boldsymbol{c}$. Par conséquent, l'équation de contrainte liée au contrôle s'écrit :

$$\mathcal{G}^{\mathrm{St}}\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{h}^{\mathrm{St}}\boldsymbol{c}(t). \tag{11.4}$$

En combinant (11.2) et (11.4), nous obtenons le système descripteur suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{St}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{\mathrm{St}} & (\mathcal{G}^{\mathrm{St}})^* \\ \mathcal{G}^{\mathrm{St}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{St}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{h}^{\mathrm{St}} \end{pmatrix} \boldsymbol{c}(t) \tag{11.5}$$

qui peut encore s'écrire sous la forme générique

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c}, \tag{11.6}$$

utilisée à la section 1.2 pour présenter les méthodes de contrôle linéaire.

Nous pouvons maintenant appliquer le contrôle LQR développé à la section 1.2.1. La résolution de l'équation de Riccati généralisée qui est associée au contrôle LQR est décrite à l'annexe A.2. Le gain de feedback est donné par $K = [\hat{K}\ 0]$ où le bloc de zéro est lié au multiplicateur de Lagrange. Puisque notre objectif est de contrôler le système haute-fidélité et non le modèle réduit, il faut exprimer le gain de feedback dans l'espace haute-fidélité. Nous obtenons :

$$K_\phi = \Phi\hat{K} \tag{11.7}$$

où Φ est la matrice contenant les modes de la base réduite.

Connaissant le gain de feedback, le contrôle à appliquer est déterminé par[1] :

$$\boldsymbol{c} = \left(K_\phi(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}(\boldsymbol{x})\right)_\Omega. \tag{11.8}$$

[1]En effet, nous avons : $\boldsymbol{c} = K_\phi^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}) = \hat{K}^T\Phi^T\Phi\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = \hat{K}^T\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$.

K_ϕ approxime le gain optimal qui aurait été trouvé en résolvant un problème LQR pour le problème haute-fidélité. Cependant, puisque la base réduite n'est pas complète, il n'y a aucune garantie d'optimalité du gain. Ce gain aboutira à un contrôle efficace à condition que le modèle soit suffisamment représentatif de l'écoulement.

11.2 Applications

Nous avons montré au chapitre 10 que des modèles réduits représentatifs de l'équation de Ginzburg-Landau et de l'écoulement autour d'un cylindre en interaction fluide/structure pouvaient être construits par projection de Galerkin sur la base POD en intégrant via des multiplicateurs de Lagrange le terme de contrôle considéré comme une contrainte. Dans cette section, nous allons montrer que les modèles réduits linéarisés correspondants permettent de trouver par LQR le gain linéaire optimal pour stabiliser le système.

11.2.1 Équation de Ginzburg-Landau

Dans cette section, nous allons évaluer la capacité d'un modèle réduit POD contraint par multiplicateurs de Lagrange à trouver par LQR le gain de feedback linéaire optimal pour l'équation de Ginzburg-Landau étudiée à la section 10.5.1. Après résolution du problème LQR (section 1.2.1), nous résoudrons le problème LQG (section 1.2.2) en considérant que le système est observé en un point unique du domaine.

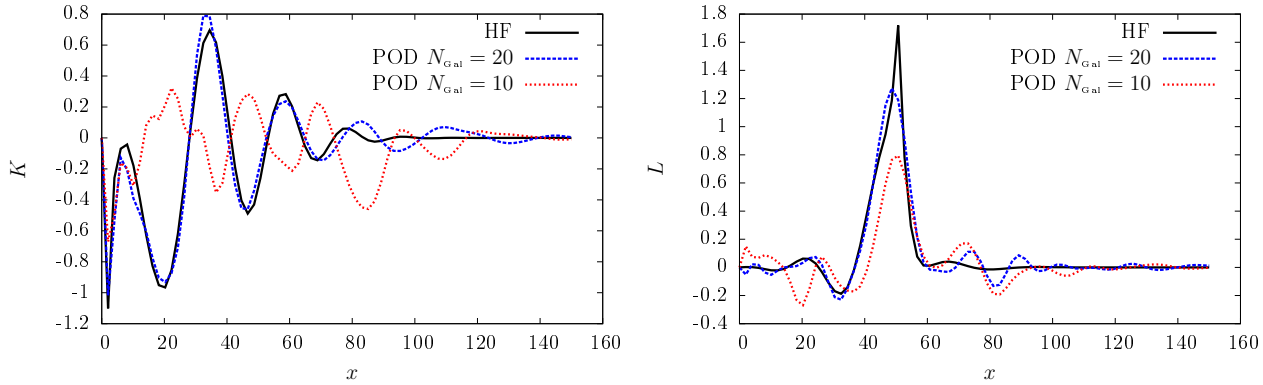
L'équation de Ginzburg-Landau étant un problème mono-dimensionnel, nous pouvons dans ce cas effectuer la résolution du problème LQR pour le modèle haute-fidélité afin d'avoir une solution de référence. Par ailleurs, le terme de contrôle étant le forçage en $x = 0$, nous aurons alors $h(t) = \psi_{\text{BC}}(t)$, ainsi que $\mathcal{G}_{11} = 1$ et $\mathcal{G}_{1i} = 0$ pour $i \in [2 : N_x]$. Nous considérons la fonctionnelle coût LQR donnée par (1.9) dans le cas où :

$$R = 1 \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.9}$$

soit :

$$\mathcal{J}^{\text{LQR}}(\psi(x,t), \psi_{\text{BC}}(t)) = \frac{1}{2}\int_0^T \|\psi(x,t)\|_\Omega^2 \,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \|\psi_{\text{BC}}(t)\|^2 \,\mathrm{d}t, \tag{11.10}$$

L'équation algébrique de Riccati généralisée en temps infini associée au système contraint est ensuite résolue. Le gain de feedback est représenté sur la figure 11.1(a). La solution de l'équation de Ginzburg-Landau correspondant à l'application de ce contrôle LQR est tracée sur



(a) Gain de feedback. (b) Gain de Kalman.

Figure 11.1 – Gains de feedback et de Kalman déterminés par résolution des problèmes LQR/LQG. « HF » : résolution dans l'espace haute-fidélité ; « POD $N_{\text{Gal}} = 20$ » : résolution par modèle réduit POD pour $N_{\text{Gal}} = 20$; « POD $N_{\text{Gal}} = 10$ » : résolution par modèle réduit POD pour $N_{\text{Gal}} = 10$.

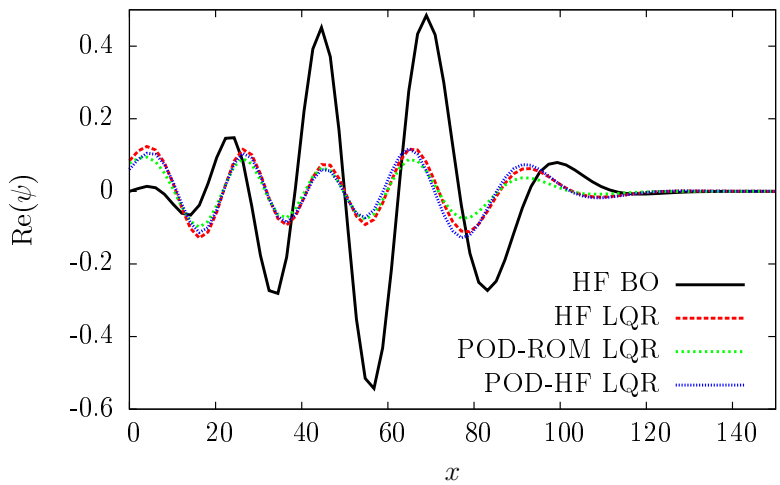


Figure 11.2 – Solutions de l'équation de Ginzburg-Landau à $t \approx 100$ pour différentes lois de contrôle. Comparaisons de solutions provenant du modèle haute-fidélité et du modèle réduit POD associé. « HF BO » : modèle haute-fidélité non contrôlé ; « HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par le gain de feedback évalué en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-ROM LQR » : modèle réduit POD contrôlé par le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD ; « POD-HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD.

la figure 11.2 pour $t \simeq 100$. Pour comparaison, nous avons représenté sur la même figure la solution sans contrôle. Nous constatons que le contrôle en boucle fermé a effectivement un effet stabilisant.

De même, nous allons maintenant résoudre le problème LQG pour le modèle haute-fidélité. Pour cela, nous supposons que les observations y_{Obs} proviennent d'un capteur unique situé à $x_{\text{Obs}} = 47$, soit la valeur correspondant à la position d'amplification maximale de l'équation de Ginzburg-Landau. A cette position, les amplitudes de la solution sont censées être suffisamment importantes pour permettre d'estimer correctement la dynamique.

Nous considérons la fonctionnelle coût LQG donnée par (1.18) pour :

$$R_e = \sigma_o \quad \text{et} \quad Q_e = \sigma_m \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.11}$$

soit :

$$\mathcal{J}^{\text{LQG}}(\psi(x,t), y_{\text{Obs}}, d(x,t)) = \frac{1}{2\sigma_o} \int_0^T \|\psi(x_{\text{Obs}}, t) - y_{\text{Obs}}\|^2 \, \mathrm{d}t + \frac{1}{2\sigma_m} \int_0^T \|d(x,t)\|_\Omega^2 \, \mathrm{d}t, \tag{11.12}$$

avec $d(x,t)$ le bruit du modèle.

Numériquement, nous avons testé deux niveaux de bruit d'observation et d'erreur : $\sigma_o = \sigma_m = 0,01$ et $\sigma_o = \sigma_m = 0,1$. La résolution de l'équation de Riccati généralisée permet de déterminer le gain de Kalman représenté sur la figure 11.1(b). Notons que puisque le rapport entre σ_o et σ_m est inchangé, les niveaux de bruit n'ont pas d'influence sur le gain de Kalman.

Pour évaluer l'efficacité des différentes stratégies de contrôle, nous avons représenté sur la figure 11.3 l'évolution en fonction du temps du critère de performance donné par $\mathcal{J}^{\text{Perf}}(t) = \frac{1}{2}\|\psi(x,t)\|_\Omega^2$. Cette figure représente pour le modèle haute-fidélité le cas non contrôlé, ainsi que les solutions obtenues par contrôle LQR et LQG pour les deux niveaux de bruit ($\sigma_o = \sigma_m = 0,01$ et $\sigma_o = \sigma_m = 0,1$). Pour le contrôle LQR, la décroissance du critère de performance est exponentielle. En outre, nous constatons que pour le contrôle LQG, l'augmentation du niveau de bruit dégrade considérablement la décroissance du critère de performance. Les plateaux que nous obtenons alors traduisent le fait qu'en raison du bruit, le contrôleur est obligé d'agir en permanence. Nous allons maintenant montrer l'effet de la réduction de modèle sur le contrôle.

Le modèle de Ginzburg-Landau étant de dimension raisonnable, les gains de feedback et de Kalman ont pu être déterminés sur le modèle haute-fidélité. Dans le cas de problèmes de grande dimension, comme c'est le cas par exemple pour les équations de Navier-Stokes, ces déterminations peuvent être plus délicates, voire impossibles. Pour cette raison, nous déterminons

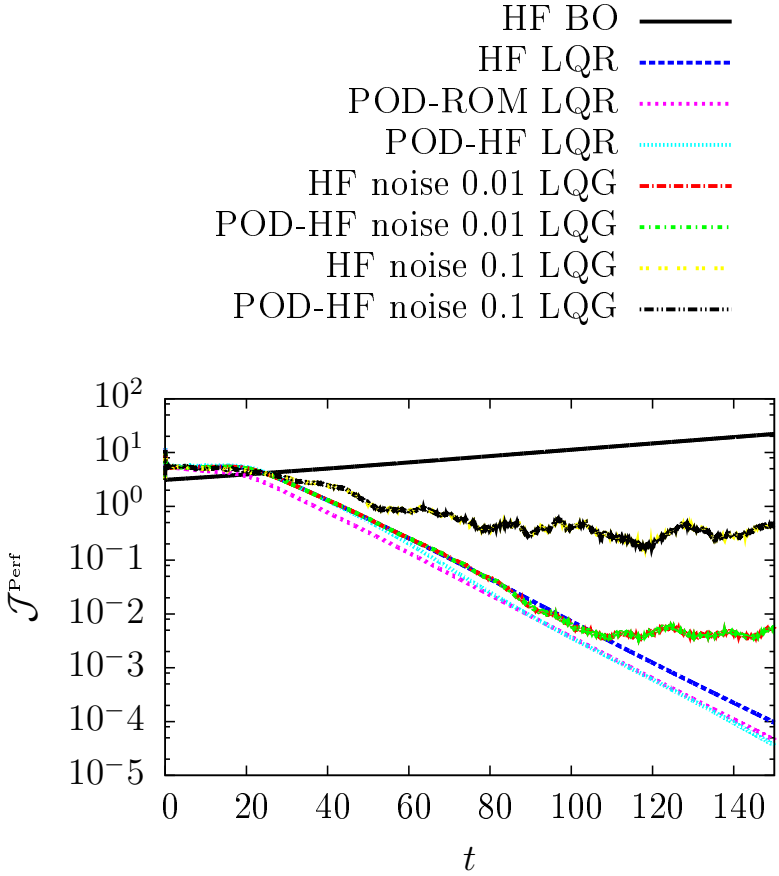


Figure 11.3 – Evolution temporelle du critère de performance $\mathcal{J}^{\text{Perf}}$. Nous comparons des solutions provenant du modèle haute-fidélité et du modèle réduit POD associé, ainsi que des solutions provenant de la résolution de problèmes LQR et LQG. « HF BO » : modèle haute-fidélité non contrôlé ; « HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQR avec le gain de feedback évalué en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-ROM LQR » : modèle réduit POD contrôlé par LQR avec le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD ; « POD-HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQR avec le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD ; « HF noise 0.01 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,01$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-HF noise 0.01 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,01$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle réduit POD ; « HF noise 0.1 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,1$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-HF noise 0.1 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,1$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle réduit POD.

maintenant les gains de feedback et de Kalman en utilisant un modèle réduit POD.

Pour déterminer la base POD, un ensemble de réalisations est déterminée en résolvant l'équation de Ginzburg-Landau pour un forçage suffisamment riche en dynamique. Pour cela, on considère $\psi_{\text{BC}}(t) = 0,1\,(\sin(\omega_0 t) + \sin(2\omega_0 t) + \sin(4\omega_0 t) + \sin(6\omega_0 t))$ avec $\omega_0 = k_0 c$ où les valeurs de k_0 et c ont été précisées à la section 10.5.1. 4000 réalisations réparties uniformément sur une fenêtre temporelle de $[0, 200]$ sont d'abord calculées. Cette base de données est ensuite sous-échantillonnée (1 sur 5) pour déterminer la base POD. Nous réalisons alors une projection de Galerkin de l'équation de Ginzburg-Landau sur la base POD, puis imposons le contrôle en $x = 0$ par la méthode des multiplicateurs de Lagrange comme à la section 10.4.2. Finalement, nous obtenons un système descripteur de la forme (11.5).

Par la suite, les gains de feedback et de Kalman sont déterminés en résolvant les équations de Riccati généralisées de dimension réduite associées à (1.12) et (1.22). Nous pouvons étudier sur la figure 11.1 l'effet du nombre de modes N_{Gal} conservés dans la troncature Galerkin sur les gains de feedback et de Kalman. Nous constatons que pour $N_{\text{Gal}} = 20$, les gains correspondent à ceux qui avaient été calculés avec le modèle haute-fidélité, tandis que pour $N_{\text{Gal}} = 10$ les résultats ne sont pas du tout satisfaisants. Puisque pour $N_{\text{Gal}} = 20$ les gains sont comparables, nous obtenons, comme c'était attendu, que les solutions (figure 11.2) et les évolutions du critère de performance (figure 11.3) sont elles aussi tout à fait comparables à celles déterminées avec le modèle haute-fidélité. Ces conclusions sont valables non seulement pour le problème LQR, mais aussi pour le problème LQG, et cela quel que soit le niveau de bruit considéré. Ces bons résultats nous engagent à développer dans les sections suivantes des stratégies de contrôle basées sur des modèles réduits.

Notons que le gain de feedback évalué en utilisant le modèle réduit est calculé pour stabiliser le modèle réduit et non le modèle haute-fidélité. Il n'existe donc aucune garantie que ce gain permette également de stabiliser le modèle haute-fidélité. Pour que cette méthode fonctionne, il faut que le modèle réduit soit représentatif du problème considéré, et que le sous-espace engendré par la base réduite soit suffisamment riche en dynamique. Le choix de la base réduite est donc déterminant. La base POD n'est évidemment pas la plus adaptée en termes de représentation du comportement entrée/sortie comparée aux modes issus de *balanced truncation* considérés par exemple par Bagheri *et al.* (2009). Pour le même niveau de précision, il est probable qu'un plus grand nombre de modes POD soit nécessaire mais l'utilisation dans notre cas de 20 modes POD reste raisonnable. Pour conclure, nous constatons sur la figure 11.3 que le critère de performance décroît de manière similaire lorsque le contrôle déterminé par LQR sur le modèle réduit est appliqué au modèle réduit ou au modèle haute-fidélité. Ce résultat valide la possibilité d'utiliser des modèles réduits contraints par multiplicateurs de Lagrange pour réaliser du contrôle en

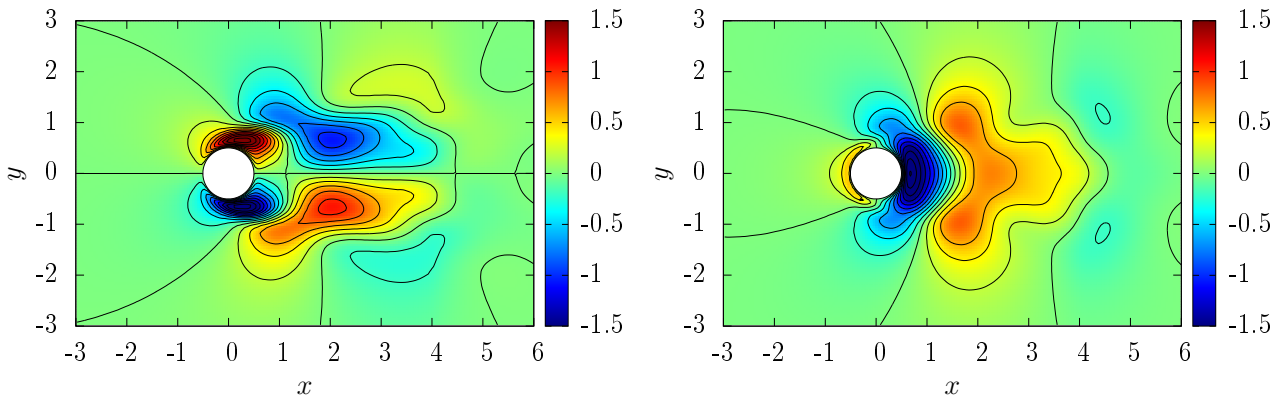
boucle fermée.

11.2.2 Cylindre en rotation

Afin de stabiliser l'écoulement de sillage par contrôle LQR, nous avons linéarisé le modèle réduit développé à la section 10.5.2 pour le cylindre en rotation. L'objectif du contrôle est de minimiser la différence entre l'état du système et l'état stationnaire c'est-à-dire de minimiser la norme de $\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t)$. Le problème LQR est résolu pour les matrices :

$$R = 100\mathbb{I} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11.13}$$

Le gain de feedback, solution de l'équation de Riccati généralisée, est représenté sur la figure 11.4. En raison de problèmes numériques, probablement engendrés par la réduction de modèle, nous avons dû régulariser le gain de feedback en prenant la partie antisymétrique de la composante longitudinale et la partie symétrique de la composante transversale. En effet, le problème physique étant symétrique par rapport à l'axe x, les modes POD devraient également l'être, et le gain de feedback devrait hériter de cette propriété. Or, si les premiers modes POD sont effectivement approximativement symétriques, ce n'est plus le cas pour les modes d'ordres élevés, ce qui entraîne une perte de symétrie pour le gain de feedback.



(a) Composante longitudinale.

(b) Composante transversale.

Figure 11.4 – Gains de feedback LQR pour le cylindre en rotation.

Par ailleurs, le gain devrait être approximativement nul dans le sillage au fur et à mesure où l'on s'éloigne du cylindre. Or, pour $x \geq 4$, nous obtenons des oscillations parasites. Cet effet était déjà clairement visible sur le gain de feedback obtenu à la section 11.2.1 pour l'équation de Ginzburg-Landau, et de manière encore plus prononcée sur le gain de Kalman évalué pour

$N_{\text{Gal}} = 20$. Pour atténuer ces effets, nous avons pondéré le gain de feedback par un facteur e^{4-x} pour $x > 4$.

La structuration spatiale du gain montre que lorsqu'un tourbillon apparait dans la partie supérieure de l'écoulement, une rotation anti-horaire est effectuée, ce qui a pour effet de ramener en arrière le point de décollement de la couche limite supérieure du cylindre. En outre, nous constatons sur la figure 11.4 que le gain a un support spatial compact. Par conséquent, le contrôle en boucle fermée ne prendra pas en compte les évènements qui se passent en amont de $x \approx -1$, ni en aval de $x \approx 4$.

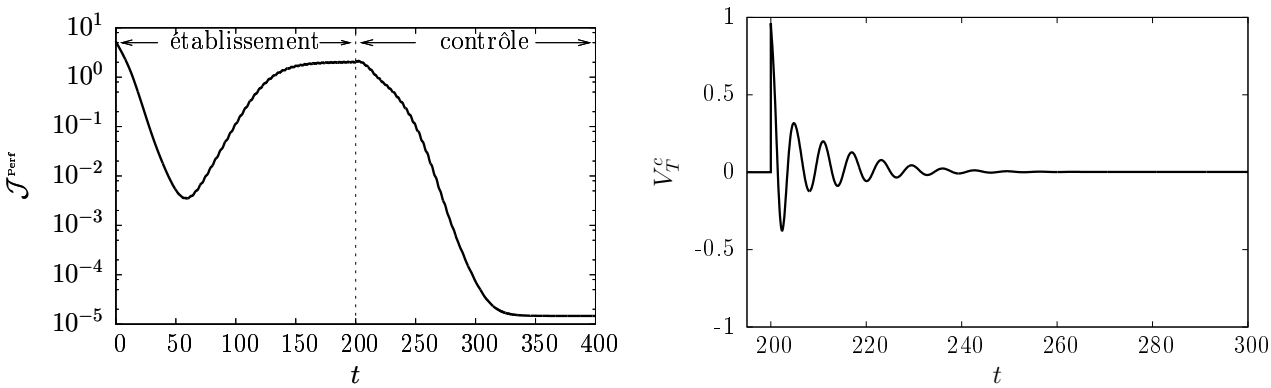
Connaissant le gain de feedback, le contrôle à appliquer est déterminé par :

$$V_T^c(t) = \left(K(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) - \boldsymbol{u}^{\text{St}}(\boldsymbol{x})\right)_\Omega . \tag{11.14}$$

Le contrôle en boucle fermée est enclenché à $t = 200$. La figure 11.5(a) représente l'évolution temporelle du critère de performance défini par :

$$\mathcal{J}^{\text{Perf}}(t) = \frac{1}{2} \left\| \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{u}^{\text{St}}(\boldsymbol{x}) \right\|_\Omega^2 . \tag{11.15}$$

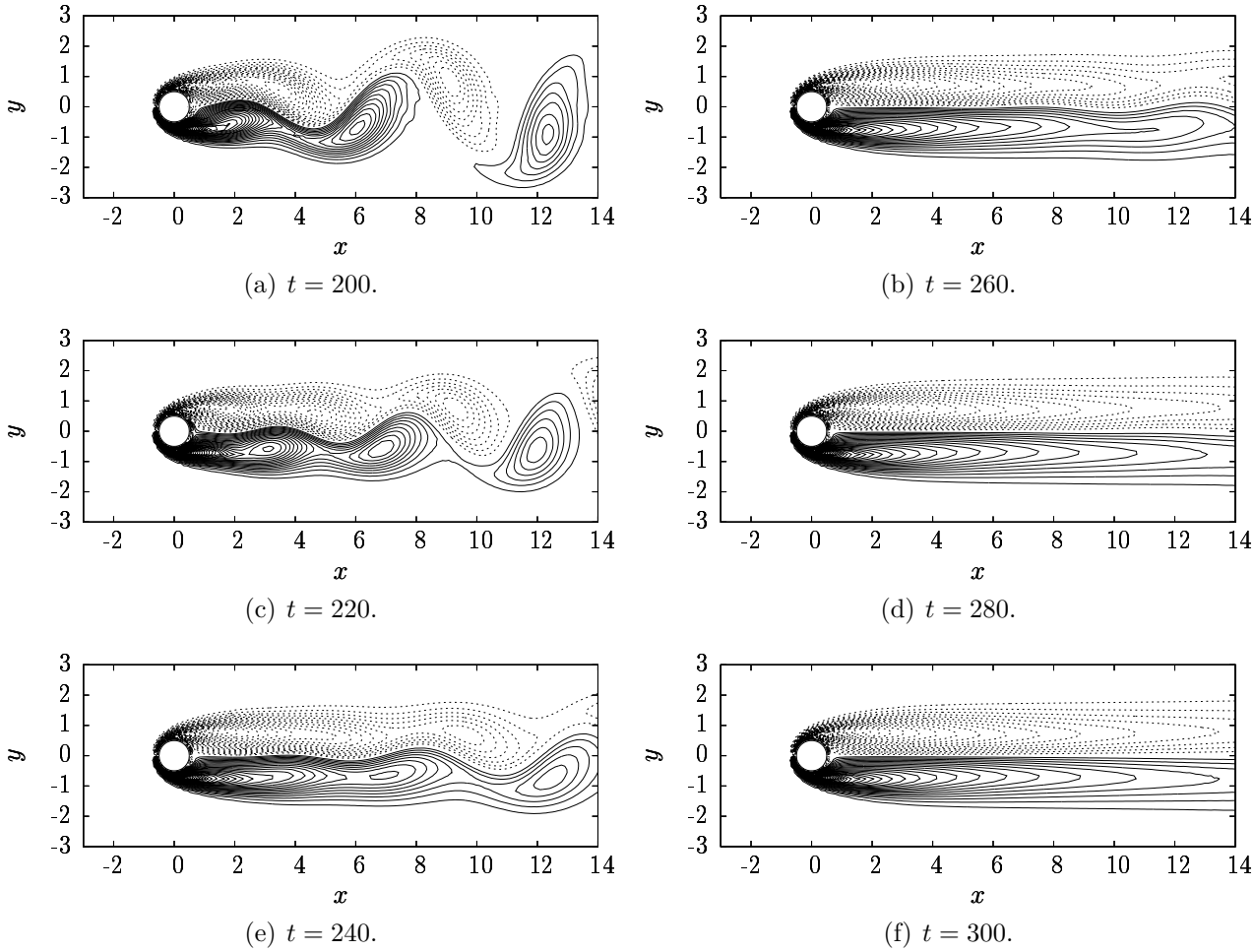
Ce critère de performance a une valeur non nulle pendant la phase d'établissement de l'écoulement. Après activation du contrôle, ce critère chute rapidement vers zéro. En outre, la vitesse tangentielle du cylindre est représentée sur la figure 11.5(b). Nous constatons une décroissance d'amplitude du contrôle jusqu'à ce que la stabilisation soit atteinte. A partir de ce moment là, l'amplitude du contrôle reste nulle. Des isovaleurs de vorticité sont représentées sur la figure 11.6 à différents instants, montrant la stabilisation de l'écoulement.



(a) Critère de performance.

(b) Vitesse tangentielle.

Figure 11.5 – Critère de performance et vitesse tangentielle de la paroi du cylindre obtenus par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR) pour le cas du cylindre en rotation.



(a) $t = 200$. (b) $t = 260$.

(c) $t = 220$. (d) $t = 280$.

(e) $t = 240$. (f) $t = 300$.

Figure 11.6 – Isovaleurs de vorticité du cylindre contrôlé en rotation par la loi déterminée par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR). Les valeurs négatives sont représentées en traits pointillés et les valeurs positives en traits continus.

Dans cette section, nous avons montré que pour le cas du contrôle de l'écoulement de sillage par rotation, un modèle réduit POD, construit en ajoutant une équation de contrainte pour le contrôle, pouvait être utilisé pour développer une stabilisation de l'écoulement par contrôle LQR.

11.2.3 Cylindre en oscillation verticale

A la section 10.5.3, nous avons montré qu'il était possible de développer un modèle réduit POD prenant en compte l'oscillation verticale du cylindre via des multiplicateurs de Lagrange. Pour cette configuration, nous souhaiterions stabiliser l'écoulement mais aussi maintenir la position du cylindre y_O autour de sa position d'équilibre. Nous ajoutons donc l'équation cinématique de déplacement du cylindre $\frac{\mathrm{d}y_O}{\mathrm{d}t} = V_O$ au système descripteur, ce qui conduit à :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} \\ y_O \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{St}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L^{\mathrm{St}} & 0 & (\mathcal{G}^{\mathrm{St}})^* \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{G}^{\mathrm{St}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) \\ y_O(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{St}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\boldsymbol{h}^{\mathrm{St}} \end{pmatrix} V_O(t) \tag{11.16}$$

où

$$(\mathcal{G}^{\mathrm{St}})_{ij} = (\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{St}}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\Phi}_j)_\Omega \quad \text{et} \quad \boldsymbol{h}^{\mathrm{St}} = (0, 1, 0)^T. \tag{11.17}$$

$\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{St}}$ correspond à la fonction test $\boldsymbol{B}_i$ évaluée pour la position neutre du cylindre c'est-à-dire $y_O = 0$.

Afin d'appliquer le formalisme LQR, nous définissons comme variable d'état $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{a}, y_O, \boldsymbol{\lambda})^T$ et nous introduisons pour fonctionnelle coût :

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{z}, V_O) = \frac{1}{2} \int_0^T \|F\boldsymbol{z}(t)\|^2 \,\mathrm{d}t + \frac{\alpha_v}{2} \int_0^T V_O^2(t) \,\mathrm{d}t \tag{11.18}$$

où le paramètre α_v pénalise de trop fortes valeurs de vitesse d'oscillation verticale. Pour (11.18), la matrice F est définie par :

$$F = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{11.19}$$

où α_r est le coefficient qui permet de pénaliser une position du cylindre trop éloignée de la position neutre.

La résolution du problème LQR donne de mauvais résultats en raison d'erreurs de linéarisation. En effet, le cas d'un cylindre en oscillation verticale est différent du cas d'un cylindre en

rotation car lorsque le contrôle s'applique, le domaine bouge et le modèle linéarisé ne permet plus de représenter correctement la dynamique car l'amplitude du contrôle est trop forte. Cela reste vrai pour un contrôle à énergie minimale car à partir d'une certaine valeur, augmenter α_v n'a plus d'effet sur le gain. Pour faire face à cette difficulté, une idée consiste à s'inspirer du contrôle $\mathcal{H}_\infty$ (Zhou *et al.*, 1996) en introduisant une erreur $\boldsymbol{\kappa}(t)$ qui s'applique au système descripteur, soit :

$$E\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c} + \boldsymbol{\kappa}(t). \tag{11.20}$$

En contrôle $\mathcal{H}_\infty$, cette erreur est considérée comme externe, l'objectif étant de rendre le contrôle robuste à des perturbations extérieures. Il en résulte alors un problème de point selle qui consiste à minimiser $\mathcal{J}$ pour la pire des perturbations plus petites qu'une valeur γ donnée, c'est-à-dire telle que la norme infinie de la fonction de transfert entre la perturbation et l'état $\|T_{\kappa z}\|_\infty$ soit inférieure à γ. Ce formalisme revient à introduire dans la fonctionnelle coût (11.18) un terme supplémentaire donné par $-\frac{\gamma}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{\kappa}(t)\|^2_{Q_r^{-1}}\,\mathrm{d}t$ où Q_r est une matrice de covariance pour l'erreur. La conséquence pratique de ce formalisme robuste est la détermination de valeurs de gain de feedback plus importantes, ce qui a pour effet de « surcontrôler » le système et donc d'amortir les perturbations.

Dans notre cas, c'est le problème inverse car l'erreur de modélisation est provoquée par le contrôle c'est-à-dire implicitement par l'état car $V_O^c = K\boldsymbol{z}$. Nous aimerions donc pénaliser des erreurs de modélisation dues à un contrôle d'amplitude trop élevée, soit pénaliser l'effet de la fonction de transfert entre l'état et la perturbation $T_{z\kappa} = T_{\kappa z}^{-1}$. Pour cela, nous définissons la fonctionnelle coût :

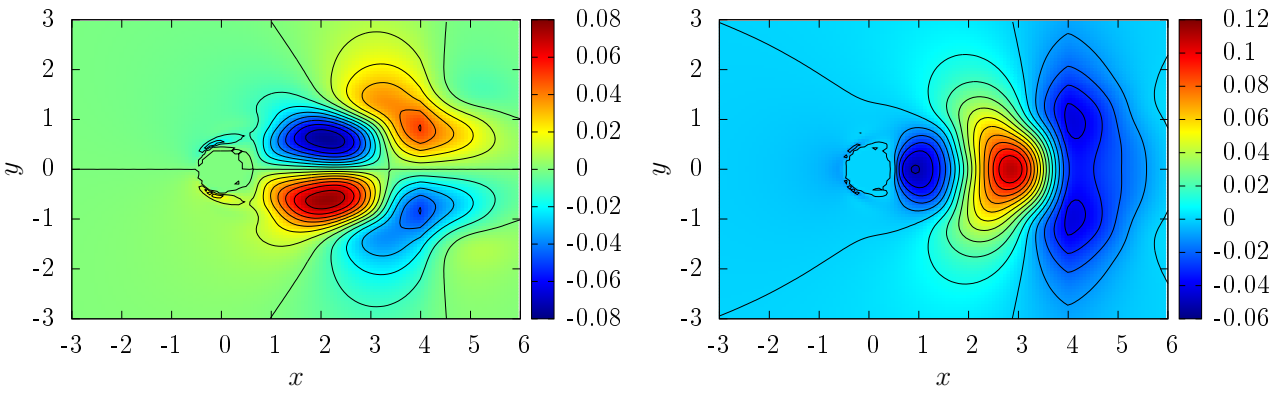
$$\mathcal{J}(\boldsymbol{z}, V_O, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2}\int_0^T \|F\boldsymbol{z}(t)\|^2\,\mathrm{d}t + \frac{\alpha_v}{2}\int_0^T V_O^2(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\gamma}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{\kappa}(t)\|^2_{Q_r^{-1}}\,\mathrm{d}t. \tag{11.21}$$

Pour que Q_r agisse uniquement sur $\boldsymbol{a}$, nous choisissons $(Q_r)_{ij} = 1$ si $i = j$ et si $j \leq N_{\mathrm{Gal}}$ et $(Q_r)_{ij} = 0$ sinon.

L'équation de Riccati généralisée (1.12) est modifiée de la manière suivante :

$$A^*XE + E^*XA - E^*X(BR^{-1}B^* + \gamma^{-2}Q_rQ_r^*)XE + FF^* = 0. \tag{11.22}$$

Cette modification a pour effet de déterminer un gain *sous-optimal* ayant globalement la même structure spatiale que le gain optimal mais de valeur plus faible. Le contrôle est donc plus faible mais l'état du système reste dans une région proche de celle pour laquelle le contrôle a été conçu, c'est-à-dire avec le cylindre en position neutre. Le gain agissant sur $\boldsymbol{z}$, il s'écrit comme $K = (K^u, K^v, K^y, 0)$.



(a) Composante longitudinale K^u.

(b) Composante transversale K^v.

Figure 11.7 – Gains de feedback sous-optimal pour le cylindre en oscillation verticale.

Les coefficients de pénalisation ont été choisis de la manière suivante. Nous avons pris $\alpha_v = 100$, ce qui est la plus grande valeur qui peut être retenue avant un mauvais conditionnement de l'équation de Riccati généralisée. Nous avons choisi[2] $\alpha_r = (\alpha_v/K^y)^2$ tel que $K^y = 1,4$ corresponde à un temps de demi-vie de la décroissance exponentielle de la position du cylindre de $0,1$ période de lâcher tourbillonnaire. Finalement, γ est pris égal à 150, ce qui engendre des amplitudes raisonnables pour le déplacement du cylindre. Les composantes longitudinale et transversale du gain de feedback sont représentées sur la figure (11.7).

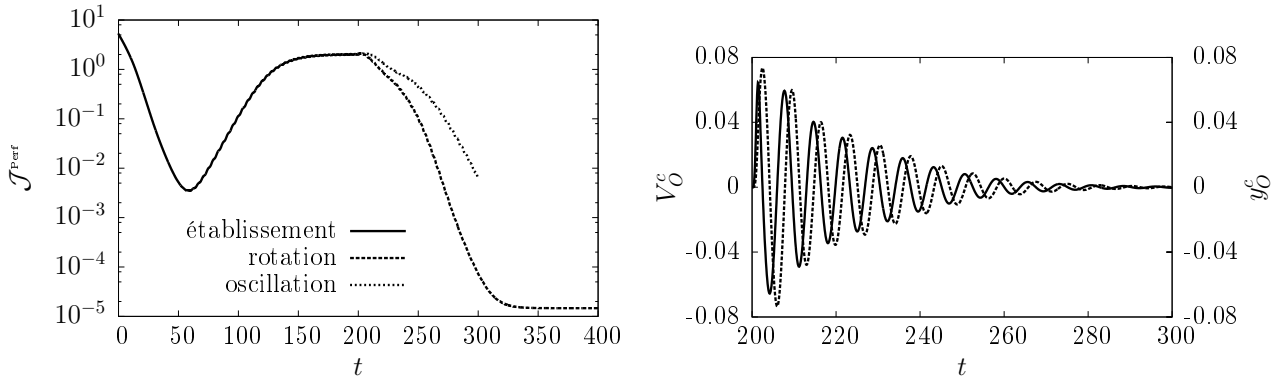
Le gain de feedback a été calculé pour $N_{\text{Gal}} = 32$ et $N_{\text{Gal}} = 47$. Pour ces deux valeurs, le gain est similaire, ce qui traduit une convergence en nombre de modes. Cependant, pour $N_{\text{Gal}} = 32$, le gain de feedback est plus lisse, ce qui le rend numériquement préférable. Notons qu'au delà de $N_{\text{Gal}} = 47$, le modèle réduit commence à être instable. Ce comportement traduit un mauvais conditionnement, couramment observé pour des modèles réduits de trop grande dimension, dont les effets sont également visibles au niveau de la solution de l'équation de Riccati généralisée. Finalement, le gain de feedback a été régularisé de la même manière que pour le cylindre en rotation (voir section 11.2.2).

La forme du gain de feedback est différente de celle obtenue pour le cylindre en rotation. A proximité du cylindre, les valeurs de gain sont beaucoup plus petites, indiquant une moindre sensibilité du contrôle à ce qui se passe dans cette zone. En outre, un tourbillon apparaissant dans la partie supérieure du sillage génère une commande de vitesse descendante du cylindre, de sorte qu'une vitesse ascendante soit induite, d'où un déplacement antihoraire des points d'arrêt et de décollement de la couche limite du cylindre. Cet effet va donc dans le même sens

[2]La relation $\alpha_r = (\alpha_v/K^y)^2$ a été observée empiriquement et a été utilisée sans démonstration uniquement pour choisir convenablement les paramètres.

que pour le contrôle du cylindre en rotation.

Les critères de performance (11.15) obtenus pour le contrôle du cylindre en rotation et en oscillation verticale sont superposés sur la figure 11.8(a). Pour les deux stratégies de contrôle, le critère de performance décroît après le déclenchement du contrôle. Pour le cylindre en oscillation verticale, le contrôle sous-optimal obtenu dans cette section donne une stabilisation plus lente mais robuste aux erreurs de modélisation. La vitesse et la position du cylindre en oscillation sont représentées sur la figure 11.8(b) montrant également la stabilisation. Les isovaleurs de vorticité sont tracées sur la figure 11.9 à différents instants montrant la convergence vers l'état stationnaire.



(a) Critère de performance.

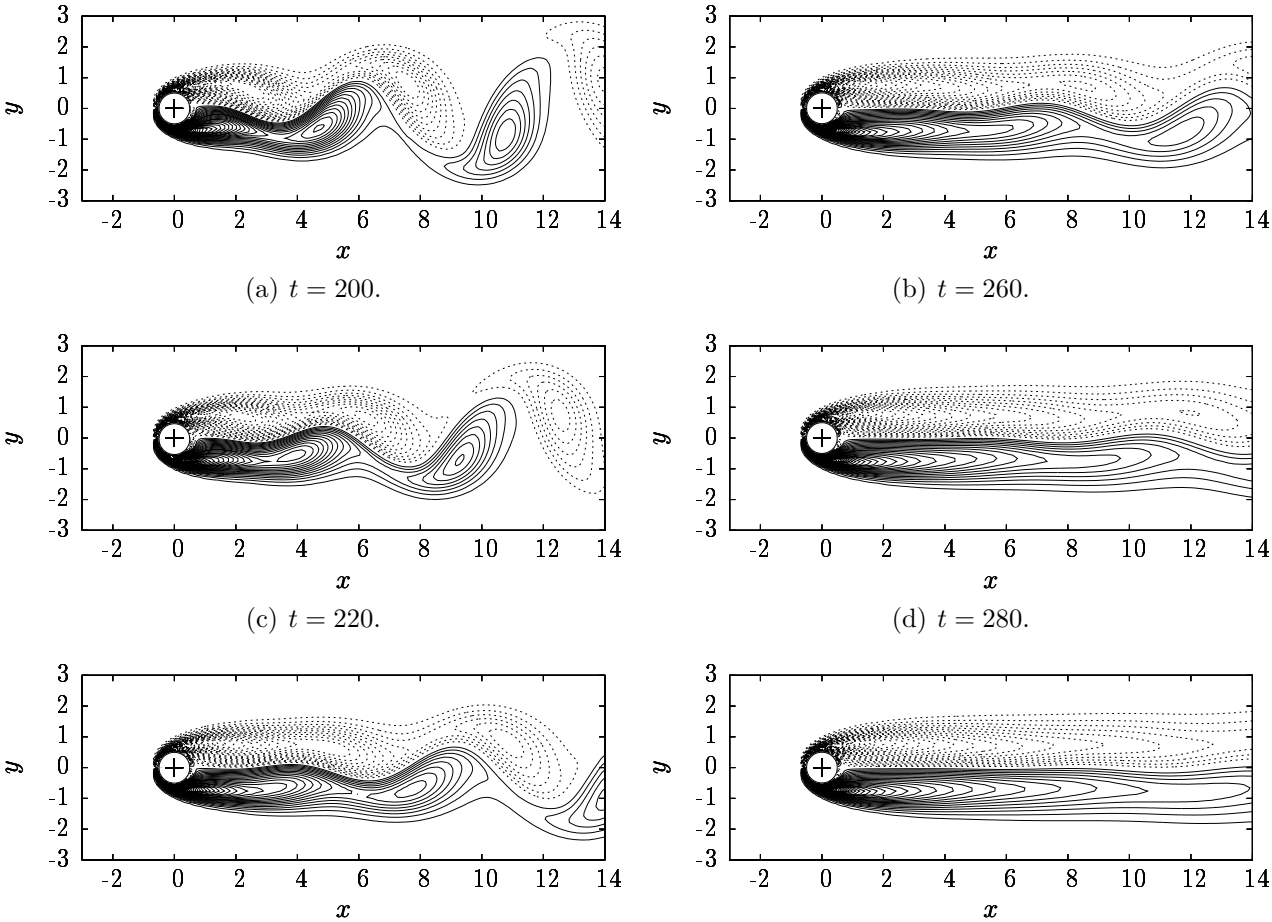
(b) Vitesse d'oscillation verticale (ligne continue) et position du cylindre (ligne pointillée).

Figure 11.8 – Critère de performance, position et vitesse d'oscillation verticale du cylindre obtenus par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR) pour le cas du cylindre en oscillation verticale.

Le modèle réduit POD développé en ajoutant une contrainte associée au contrôle permet de représenter précisément l'écoulement original et peut être utilisé dans une procédure de contrôle linéaire visant la stabilisation. Cependant, pour rendre le contrôle robuste aux erreurs de linéarisation, un gain sous-optimal a dû être déterminé en s'inspirant d'une procédure de contrôle robuste généralement utilisée pour tenir compte de perturbations extérieures.

11.3 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons utilisé des modèles issus de projection de Galerkin dont le terme de contrôle était pris en compte via des multiplicateurs de Lagrange. Nous avons montré que ce type de modèles dynamiques basés sur la physique pouvait être utilisé pour concevoir une stratégie de contrôle efficace.



(a) $t = 200$. (b) $t = 260$.

(c) $t = 220$. (d) $t = 280$.

(e) $t = 240$. (f) $t = 300$.

Figure 11.9 – Isovaleurs de vorticité du cylindre contrôlé en oscillation verticale par la loi déterminée par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR). Les valeurs négatives sont représentées en traits pointillés et les valeurs positives en traits continus.

11.11.3 Synthèse

Pour commencer, nous avons considéré l'équation linéaire monodimensionnelle de Ginzburg-Landau, ce qui nous a permis d'évaluer dans un cas simple l'effet de la réduction de modèle et de l'ajout du contrôle sur une équation aux dérivées partielles. Par la suite, le cas de l'écoulement autour d'un cylindre en rotation a montré la possibilité d'utiliser un modèle linéarisé pour contrôler un système régi par les équations de Navier-Stokes. Finalement, pour l'écoulement autour d'un cylindre en oscillation verticale, l'utilisation d'un contrôle linéaire issu de LQR était impossible en raison de la forte modification du comportement du système lorsque le cylindre se déplace dans l'écoulement. Dans ce cas, nous avons dû développer une stratégie de contrôle sous-optimal, inspiré du contrôle robuste, qui a permis de rester dans la zone de validité du modèle linéarisé.

Ces résultats montrent que l'utilisation de modèles dynamiques basés sur la physique permettent de concevoir des stratégies de contrôle efficaces, ouvrant ainsi des perspectives vers le contrôle de configurations complexes. Parallèlement, il est stratégique de s'orienter vers des méthodes de contrôle non-linéaire afin de rendre le contrôle envisageable pour des dynamiques riches, en particulier les écoulements turbulents.

Conclusion et perspectives

Conclusion

Le contrôle des écoulements turbulents est un enjeu majeur en aérodynamique, et plus largement en mécanique des fluides, car pour des raisons économiques ou sociétales les modifications apportées peuvent avoir des conséquences énormes. Or, celui-ci reste aujourd'hui un réel défi que ce soit en numérique (prise en compte de la turbulence) ou en expérimental (aspect temps réel). En effet, si de nombreux développements ont été réalisés en contrôle depuis une quinzaine d'années, les difficultés à surmonter sont encore nombreuses. La présence d'un grand nombre de degrés de libertés impliqués dans l'évolution du système rend toute modélisation dynamique délicate. De plus, les non-linéarités complexifient encore la modélisation dynamique. C'est déjà vrai pour un système non contrôlé, mais cela l'est encore plus lorsque le contrôle s'applique car celui-ci va venir modifier l'état du système. En théorie du contrôle, de nombreux experts admettent que pour contrôler un système complexe, la seule voie pertinente est l'utilisation d'un modèle dynamique. Ce modèle peut être construit sur des fonctions de réponse, du type réseau de neurones par exemple, mais également basé sur des lois issues de principes fondamentaux de la physique. C'est précisément la démarche que nous avons cherché à exploiter dans ce manuscrit. Nous avons donc travaillé dans deux directions : i) comment développer un modèle réduit suffisamment représentatif de la dynamique à partir de réalisations obtenues numériquement ou expérimentalement ? ii) comment développer une stratégie de contrôle efficace utilisant les modèles dynamiques précédemment développés ?

Dans la **première partie** de ce manuscrit, une vue d'ensemble des outils et méthodes nécessaires au contrôle d'écoulement par modèles réduits a été présentée. Nous avons commencé par détailler le contrôle optimal qui permet de déterminer pour un objectif donné les meilleurs paramètres de contrôle possibles connaissant un modèle dynamique du système. Nous avons ensuite particularisé cette approche au cas du contrôle linéaire où le modèle dynamique correspond à un système linéarisé autour d'un voisinage de l'état à contrôler, puis nous avons décrit les approches LQR et LQG pour un système descripteur. Par la suite, nous avons montré comment utiliser la méthode de Petrov-Galerkin pour développer un modèle réduit dynamique par projection des équations de Navier-Stokes sur une base de faible dimension. Les modèles réduits étant liés de manière intrinsèque au choix de la base utilisée pour la projection, nous avons discuté ce choix sous l'angle de l'objectif fixé au modèle. En effet, les modes globaux représentent la croissance des instabilités, tandis que la *balanced truncation* permet de ne conserver que la contribution la plus observable et contrôlable de l'écoulement. Pour aller au delà de la linéarité liée à ces approches, nous nous sommes alors tournés vers les méthodes de réduction

basées sur des réalisations de l'écoulement. Nous avons d'abord présenté la POD, très utilisée en mécanique des fluides, qui est optimale en termes de représentation énergétique des réalisations. Puisque la partie la plus énergétique n'est pas nécessairement la mieux adaptée pour la représentation dynamique, nous avons finalement introduit la DMD qui extrait de réalisations une information reliée à la dynamique du système.

Or, les modèles issus de projection de Petrov-Galerkin sont souvent imparfaits en raison d'une accumulation énergétique liée à la troncature. Afin d'améliorer leur précision, des modifications doivent donc être envisagées. Nous avons alors proposé successivement, l'introduction d'un terme de viscosité, le rajout d'une contrainte énergétique, l'utilisation de méthodes de régularisation mathématique, et l'emploi de méthodes d'identification de système. Pour terminer cette partie, nous avons discuté de la robustesse des modèles réduits à la variation des paramètres de contrôle, et de méthodes pouvant être utilisées pour l'améliorer. Nous avons alors discuté du choix des réalisations utilisées dans la base de données, de la possibilité d'interpoler des bases réduites précédemment déterminées, d'utiliser les informations de sensibilité aux paramètres et d'algorithmes adaptatifs à région de confiance.

La **deuxième partie** était consacrée à l'utilisation de la DMD en tant que méthode d'analyse d'écoulements et surtout à la possibilité d'employer cette décomposition comme base réduite dans une méthode de projection. Pour cela, nous avons d'abord présenté les propriétés de la DMD de manière détaillée, puis nous l'avons appliqué à des données PIV correspondant à un écoulement de sillage autour d'un cylindre. Par la suite, nous avons abordé la question de la détermination d'une base réduite basée sur les modes DMD. Nous avons d'abord montré qu'une sélection des modes DMD obtenus par l'algorithme classique était possible mais qu'elle était délicate car il n'existait aucun critère naturel de sélection. Nous avons alors introduit l'algorithme d'*optimized DMD* qui permet par définition de minimiser l'erreur de représentation de la base réduite, mais au prix de la résolution d'un problème d'optimisation. Enfin, nous avons présenté l'analyse de Chronos-Koopman qui consiste à appliquer la DMD aux fonctions propres temporelles issues de la POD et conduit à une double décomposition en modes POD et en fréquences des réalisations de l'écoulement. Ces différentes méthodes ont été comparées sur des bases de données numériques et expérimentales d'un écoulement de sillage autour d'un cylindre. Finalement, nous avons montré qu'un modèle réduit construit en exploitant la propriété de propagation temporelle liée à la DMD ou par projection de Galerkin sur les modes DMD ne permettait pas de représenter correctement la dynamique dans le cas des données expérimentales.

L'assimilation de données variationnelle 4D-Var est l'objet de la **troisième partie**. Par construction, cette approche permet de combiner des informations inhomogènes comme un

modèle, des observations, et une connaissance *a priori* de l'état du système pour estimer de manière optimale des paramètres du problème. Après avoir présenté le formalisme général et indiqué les principales variantes, nous avons testé cette approche sur une équation monodimensionnelle de convection/diffusion. Par la suite, nous avons montré que l'assimilation de données pouvait être utilisée comme une méthode d'identification pour améliorer la précision d'un modèle réduit. Pour cela, nous avons commencé par un modèle réduit POD développé à partir de données numériques puis expérimentales pour un écoulement de sillage. Nous avons ensuite utilisé le formalisme 4D-Var pour un modèle réduit optimized DMD afin de combiner les informations provenant de projection de Galerkin et celles issues du modèle de propagation temporelle liée à la DMD. Les performances de prédiction de ce dernier modèle surpasse celles d'un modèle réduit POD assimilé par 4D-Var montrant ainsi l'apport de la base optimized DMD.

La **dernière partie** concernait le développement d'une stratégie de contrôle linéaire pour des configurations d'écoulement en interaction fluide/structure. Nous avons commencé par présenter différentes méthodes pour introduire de manière explicite le terme de contrôle dans la modélisation. Nous avons successivement considéré le cas d'une force volumique, puis la prise en compte d'une condition aux limites par intégration par parties ou par introduction d'une fonction de contrôle. Nous avons ensuite montré que de manière très générale le terme de contrôle pouvait être également incorporé en ajoutant des équations de contrainte au modèle réduit. Nous avons alors indiqué comment ce formalisme général pouvait être utilisé pour construire des modèles réduits POD dans le cas de domaines mobiles. Pour montrer la faisabilité de ces approches, nous avons finalement appliqué des stratégies de contrôle linéaire pour stabiliser les solutions d'une équation de Ginzburg-Landau, de l'écoulement autour d'un cylindre circulaire contrôlé par rotation puis par oscillation verticale.

Perspectives

Comme tout travail de recherche, ce manuscrit ouvre probablement autant de pistes qu'elle ne répond à des questions. Nous avons vu que le contrôle d'écoulements par réduction de modèles est une discipline sujette à de fortes contraintes, d'une part de modélisation, et d'autre part sur la loi de commande. Ainsi, le modèle doit être à la fois rapide, représentatif d'un système complexe et robuste aux variations de paramètres. En outre, la loi de commande doit être facile à implémenter en ligne, aboutir à un contrôle efficace, et prendre en compte de

fortes variations de dynamique. Malgré les difficultés de la discipline, notre intuition nous fait envisager la possibilité d'un contrôle efficace et pousse ainsi au développement de techniques de plus en plus avancées. Au vu des sujets abordés dans ce manuscrit, des directions futures sont à envisager dans le domaine de la réduction de modèle, de l'estimation et du contrôle.

Réduction de modèle : Nous avons montré dans cette thèse que les modèles réduits sont nécessaires à des applications d'optimisation et de contrôle d'écoulement. Cependant, la réduction de modèle reste aujourd'hui une discipline à part entière dont les résultats sont fortement liés aux choix du modélisateur. De manière évidente, le choix de la base est déterminant et celui-ci est associé à ce que l'on considère comme le plus « important » à modéliser. Dans toutes les méthodes présentées, le nombre de modes utilisés est un choix, dont il pourra être intéressant de s'affranchir. La recherche de matrices de passage creuses par minimisation d'une fonctionnelle coût régularisée en norme L_1 (Jovanović *et al.*, 2012; Brunton *et al.*, 2013) est une approche permettant de sélectionner automatiquement les modes de manière parcimonieuse.

Nous avons également montré dans ce manuscrit que les modèles réduits souffrent intrinsèquement d'erreurs de troncature. Nous avons vu à la section 3.2.2 que cette fermeture pouvait être faite en ajoutant une contrainte énergétique au modèle réduit. Bien évidemment, cette contrainte énergétique n'est pas forcément la meilleure. Cela ouvre des perspectives de recherche sur le choix de cette contrainte pour un modèle de fermeture représentatif de la physique. Ce choix de contrainte pourra par exemple provenir de propriétés statistiques de la turbulence.

Comme nous l'avons évoqué au chapitre 4, le manque de robustesse des modèles réduits est un de leur principal défauts. Aller vers des stratégies adaptatives est probablement la solution, mais la mise à jour du modèle réduit ou du contrôle peut être trop coûteuse. Il va donc devenir nécessaire de développer des méthodes incrémentales permettant de mettre à jour à moindre coût un modèle réduit. Il existe par exemple des algorithmes incrémentaux de SVD (Sarwar *et al.*, 2002) permettant de mettre à jour une décomposition SVD. Concernant la mise à jour de base, celle-ci peut également se faire le long de variétés spécifiques (Amsallem, 2010).

Les méthodes de réduction de modèle et de contrôle sont fonctions du comportement du système. Au cours de ce manuscrit, le cas d'étude principal pour tester les méthodes est l'écoulement de sillage autour du cylindre. Cet écoulement spécifique a un comportement de type oscillatoire. D'autres écoulements se comportent différemment. Par exemple, les couches de mélange et les jets sont très sensibles à une gamme de perturbations qui sont amplifiées, entre autre par des mécanismes linéaires. La prise en compte dans le modèle (Dergham *et al.*, 2013; Farrell et Ioannou, 2001) et dans le contrôle (Juillet *et al.*, 2013) du caractère amplificateur et des perturbations les plus « dangereuses » est indispensable. D'autres écoulements comme les

écoulements de proche paroi (couche limite, canal) sont intrinsèquement multi-échelles[3] et sont sujets à des mécanismes d'auto entretien (Waleffe, 1995). Pour effectuer un contrôle d'écoulement efficace, ces comportements doivent également être pris en compte dans la modélisation. Or, pour ce type d'écoulement, celle-ci reste encore aujourd'hui un défi (Sayadi *et al.*, 2014).

Un message majeur de ce manuscrit est que, dans des configurations réalistes, l'utilisation seule des équations de premier principe ou la construction de modèles purement identifiés mène à des modèles pouvant être non représentatifs. Il semble donc nécessaire d'utiliser de manière conjointe des techniques d'identification et de réduction de modèle basées sur la physique. L'assimilation de données 4D-Var est un outil pour cela, et d'autres méthodes comme le filtre de Kalman (Leroux, 2012) peuvent remplir cette tâche.

Les modèles réduits peuvent être utiles bien au delà des problématiques de contrôle et d'optimisation. Un exemple est celui de la détection de liens de cause à effet. La causalité de Granger (Granger, 1969) permet d'aller au delà de simples corrélations et de s'appuyer sur un modèle dynamique pour détecter un lien de causalité entre deux variables. Supposons que nous ayons un modèle dynamique permettant de prédire le futur d'une variable, la question est de savoir si cette prédiction est améliorée en ajoutant l'information d'une seconde variable. Si c'est le cas, on dit que la deuxième variable *cause* la première au sens de Granger. Cette définition de la causalité est donc dépendante du choix des variables et des qualités de prédiction du modèle. Dans Tissot *et al.* (2014), l'utilisation de modèles optimized DMD a permis de détecter des liens de cause à effet dans des évènements provenant de la dynamique d'un écoulement de canal. Une modélisation réduite et fidèle des écoulements ouvre donc la porte à des analyses physiques fines.

Estimation : L'estimation est une étape bien souvent nécessaire dans des cas réalistes. Le problème d'estimation est étroitement[4] lié au contrôle optimal. Bien que ce problème n'était pas central dans ce manuscrit, il a été évoqué pour le contrôle LQG (section 1.2.2) et pour le problème d'assimilation de données (partie III).

La partie III est consacrée à l'utilisation de la méthode d'assimilation de données 4D-Var comme une technique d'identification. Cette méthode d'estimation peut également être utilisée pour reconstruire des données manquantes. En effet, un modèle dynamique de dimension réduite peut être utilisé pour estimer des données manquantes par assimilation de données 4D-Var et ainsi aller au delà de la LSE (*Linear Stochastic Estimation*) (Bonnet *et al.*, 1994) dans une démarche similaire à celle de Tu *et al.* (2013a).

[3]La distance à la paroi jouant le rôle d'un nombre de Reynolds.
[4]On peut montrer (Burl, 1998) que l'estimation est le problème dual du contrôle.

Pour revenir à la problématique du contrôle, l'étape d'estimation est essentielle. Au chapitre 11, nous nous sommes arrêtés au contrôle LQR de l'écoulement autour du cylindre, mais une étape d'estimation aurait tout à fait pu être introduite afin de prendre en compte les incertitudes du modèle.

Du point de vue de la méthode, l'estimateur linéaire sur $\mathcal{H}_2$ a été présenté à la section 1.2.2 mais l'étape d'estimation peut aller plus loin qu'un gain de Kalman constant. De la même manière que pour le paramètre de contrôle, des techniques d'estimation non-linéaires peuvent être employées. De plus, afin de prendre en compte les observations, des méthodes[5] efficaces de flot optique (Beauchemin et Barron, 1995) sont à développer pour le contrôle afin de pouvoir introduire en ligne dans un modèle réduit des observations de plus en plus riches.

Contrôle : Le contrôle optimal linéaire a permis dans un certain nombre de cas de contrôler des écoulements (Ravindran, 2007, chapitre 11). Ce type de contrôle suppose[6] que la dynamique du système sera la même quel que soit son état, ce qui permettra de ne pas modifier la loi de commande. Cette hypothèse reste valide proche du point de linéarisation et se dégrade si l'évolution de l'état du système est plus grande qu'une certaine région de confiance. Le contrôle linéaire peut donc échouer dans le cas d'écoulements turbulents en configuration réaliste, mais aussi dans des configurations simples où les non linéarités jouent un rôle important. Afin de repousser ces limitations, il est donc nécessaire de mettre en place conjointement des méthodes de modélisation non linéaires, de dimension réduite et robustes à de forts changements de l'état du système, ainsi que des lois de commande adaptées à ces modèles.

Un certain nombre de solutions existent et ont été évoquées à la section 1.3 afin de prendre en compte ces non linéarités. La résolution directe du problème d'optimisation lié au contrôle optimal (Cordier, 2011) peut être implémentée grâce aux méthodes de *Model Predictive Control* (MPC) (Allgower *et al.*, 2004). Lorsque ces méthodes sont trop coûteuses ou inadaptées à une implémentation en temps réel, des méthodes intermédiaires entre le contrôle linéaire et la résolution du problème de contrôle optimal peuvent être envisagées. Les méthodes d'ordonnancement de gain (Bruzelius, 2004), les techniques *Linear Parameter Varying* (LPV) (Atam *et al.*, 2014) ou les méthodes MPC/LQG (Hein, 2007) se basent sur le formalisme de contrôle linéaire et le généralisent, via une approche « tangente linéaire », en supposant à chaque instant le contrôle linéaire associé au modèle linéarisé au point courant, ou proche de ce dernier. Ces classes d'outils, seront donc privilégiées afin d'aller vers un contrôle non linéaire d'écoulement efficace.

[5]Ces méthodes sont très proches du formalisme 4D-Var.

[6]Dans notre cas, il s'agissait du déplacement du cylindre qui entrait en conflit avec la linéarisation du modèle réduit.

Finalement, pour le contrôle non-linéaire, les idées d'ajouter des contraintes supplémentaires au problème de contrôle optimal et de forcer les variables à varier le long de variétés sont à privilégier.

Annexes

Annexe A

Compléments relatifs à la Partie I

A.1 Linéarisation autour d'un état quelconque

Considérons le système non linéaire :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}_\phi}{\mathrm{d}t} = A_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{z}_\phi) + B_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{c}_\phi) \tag{A.1}$$

que nous souhaitons linéariser autour de l'état $\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}$ quelconque. Pour cela, écrivons $\boldsymbol{z}_\phi = \boldsymbol{z}_{\mathrm{L}} + \boldsymbol{z}$ où $\boldsymbol{z}$ joue le rôle de perturbation autour de l'état $\boldsymbol{z}_L$ et injectons ce développement dans (A.1). Si l'état $\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}$ est atteignable par le système, le contrôle peut également être décomposé sous cette forme, soit $\boldsymbol{c}_\phi = \boldsymbol{c}_{\mathrm{L}} + \boldsymbol{c}$ où $\boldsymbol{c}_{\mathrm{L}}$ est tel que $\mathrm{d}\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}/\mathrm{d}t = A_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}) + B_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{c}_{\mathrm{L}})$. Notons que nous avons $\boldsymbol{c}_{\mathrm{L}} = 0$ si $\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}$ correspond à l'état stationnaire. La linéarisation de ce système non linéaire autour de $\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}$ revient à écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}_\phi}{\mathrm{d}t} &= A_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{z}_\phi) + B_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{c}_\phi) \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} &= A_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}) + \left(\frac{\partial A_{\mathrm{NL}}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)_{\boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}} (\boldsymbol{z}_\phi - \boldsymbol{z}_{\mathrm{L}}) + B_{\mathrm{NL}}(\boldsymbol{c}_{\mathrm{L}}) + \left(\frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{c}}\right)_{\boldsymbol{c}_{\mathrm{L}}} (\boldsymbol{c}_\phi - \boldsymbol{c}_{\mathrm{L}}) + H.O.T. \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} &= A\boldsymbol{z} + B\boldsymbol{c} + H.O.T.,
\end{aligned} \tag{A.2}$$

avec $A = \left(\dfrac{\partial A_{\text{NL}}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)_{\boldsymbol{z}_{\text{L}}}$ et $B = \left(\dfrac{\partial B}{\partial \boldsymbol{c}}\right)_{\boldsymbol{c}_{\text{L}}}$.

Le contrôle linéaire présenté à la section 1.2 sera donc utilisé pour minimiser les perturbations $\boldsymbol{z}$ c'est-à-dire pour atteindre l'état $\boldsymbol{z}_{\text{L}}$. Nous pouvons donc exprimer le contrôle linéaire de la manière suivante :

$$\boldsymbol{c}_\phi = \boldsymbol{c}_{\text{L}} + K(\boldsymbol{z}_\phi - \boldsymbol{z}_{\text{L}}). \tag{A.3}$$

Nous voyons bien ici l'intérêt de concevoir une stratégie de contrôle visant à stabiliser un état stationnaire car dans ce cas nous avons $\boldsymbol{c}_{\text{L}} = 0$. Lorsque le contrôle est proche d'être atteint, l'énergie à introduire dans le système tend donc vers 0. Dans le cas contraire, il faut apporter en moyenne l'énergie nécessaire pour maintenir cet état hors équilibre.

A.2 Résolution de l'équation de Riccati généralisée

Différentes méthodes sont présentées dans la littérature pour résoudre une équation de Riccati généralisée de grande dimension (Badía *et al.*, 2006; Benner *et al.*, 2008; Benner et Saak, 2010). Puisque nous considérons des modèles de dimension réduite, nous avons fait le choix d'utiliser une méthode de projection, plus simple mais inadaptée pour les problèmes de grande dimension.

Pour présenter la méthode de résolution, considérons un système descripteur générique écrit sous la forme :

$$(\mathcal{S}) : \qquad \begin{pmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\text{St}}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\text{St}}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}^{\text{St}}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}^{\text{St}}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{c}(t) \tag{A.4}$$

avec $E_{11} = E_{11}^T$. Cette forme intervient lors de l'écriture des équations de Navier-Stokes linéarisées (2.9) autour d'un état stationnaire. En effet, l'opérateur divergence s'écrit $A_{12}^T = (\partial/\partial x \ \partial/\partial y)$, qui est précisément le transposé de l'opérateur gradient s'appliquant à la pression $\tilde{p}$. Cette forme apparait également lors de l'imposition d'une contrainte à un modèle réduit via un multiplicateur de Lagrange (voir section 10.4.2.2), puis après linéarisation (voir (11.5)).

L'idée principale de la méthode de résolution est d'appliquer à l'équation de Riccati généralisée le projecteur de Leray (Raymond, 2006) qui est le projecteur sur l'ensemble des solutions respectant la contrainte $A_{12}^T \boldsymbol{a}^{\text{St}} = 0$. Le système qui en découle sera noté par la suite $(\hat{\mathcal{S}})$. Le projecteur de Leray est ensuite décomposé pour effectuer un changement de variable (Heinkenschloss *et al.*, 2008) aboutissant à un système noté $(\tilde{\mathcal{S}})$. L'équation de Riccati généralisée est donc résolue dans le système projeté $(\tilde{\mathcal{S}})$ (Benner *et al.*, 2012), ce qui donne accès à un gain de

feedback stabilisant le système projeté. Il reste ensuite à revenir dans l'espace de départ.

Par analogie avec la résolution des équations de Navier-Stokes, il est possible de faire apparaitre à partir de (A.4) l'équivalent de l'équation de Poisson. Pour cela, on multiplie le bloc du haut par $A_{12}^T E_{11}^{-1}$. Après manipulation, on peut trouver le multiplicateur de Lagrange de manière explicite :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{St}}(t) = &-(A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{11} \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) \\ &-(A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{12}^T E_{11}^{-1} B_1 \boldsymbol{c}(t) \\ &+(A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} B_2 \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}t}(t).\end{aligned} \tag{A.5}$$

Le multiplicateur de Lagrange étant connu, nous allons l'éliminer en projetant le modèle dans le sous-espace contraint par $A_{12}^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = 0$. Pour cela, on introduit le projecteur de Leray défini par $\Pi = \mathbb{I} - A_{12}(A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} A_{12}^T E_{11}^{-1}$. Π est un projecteur oblique sur le noyau de $A_{12}^T E_{11}^{-1}$ le long de l'image de A_{12}. En outre, nous pouvons montrer que Π est effectivement un projecteur, que $\Pi E_{11} = E_{11} \Pi^T$ et que $A_{12}^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = 0$ équivaut à $\Pi^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$.

On décompose $\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = \Pi \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} + (\mathbb{I} - \Pi)\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$, en séparant la partie qui vérifie la contrainte homogène de la partie qui dépend de $B_2 \boldsymbol{c}(t)$. Il est facile de vérifier[1] que :

$$(\mathbb{I} - \Pi)\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = -E_{11}^{-1} A_{12} (A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} B_2 \boldsymbol{c}(t). \tag{A.6}$$

En introduisant $\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = \Pi \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} + (\mathbb{I} - \Pi)\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$ dans le bloc du haut de (A.4) et en multipliant à gauche par Π, on obtient :

$$\Pi E_{11} \Pi^T \frac{d\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t)}{dt} = \Pi A_{11} \Pi^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) + \Pi B_{12} \boldsymbol{c}(t) \tag{A.7}$$

avec

$$B_{12} = B_1 - A_{11} E_{11}^{-1} A_{12} (A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} B_2. \tag{A.8}$$

En regroupant (A.7) et (A.6), on obtient que le système projeté $(\hat{\mathcal{S}})$ est donné par :

$$(\hat{\mathcal{S}}) : \quad \begin{cases} \Pi E_{11} \Pi^T \dfrac{d\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t)}{dt} = \Pi A_{11} \Pi^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) + \Pi B_{12} \boldsymbol{c}(t) \\ (\mathbb{I} - \Pi)^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}(t) = -E_{11}^{-1} A_{12} (A_{12}^T E_{11}^{-1} A_{12})^{-1} B_2 \boldsymbol{c}(t) \end{cases} \tag{A.9}$$

Π étant un projecteur, on peut le décomposer comme $\Pi = \theta_L \theta_R^T$ de sorte que $\theta_L^T \theta_R = \mathbb{I}$. On effectue ensuite le changement de variable $\tilde{\boldsymbol{a}} = \theta_L^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$ tel que si $\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = \Pi^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$ alors $\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} = \theta_R \tilde{\boldsymbol{a}}$.

[1] Pour cela, il faut développer Π dans $(\mathbb{I} - \Pi)\boldsymbol{a}^{\mathrm{St}}$ et utiliser le fait que $A_{12}^T \boldsymbol{a}^{\mathrm{St}} + B_2 \boldsymbol{c}(t) = 0$ (contrainte dans le bloc du bas de (A.4)).

Le système $(\tilde{\mathcal{S}})$ est donc défini par :

$$(\tilde{\mathcal{S}}) : \qquad \tilde{E}\frac{d\tilde{\boldsymbol{a}}(t)}{dt} = \tilde{A}\tilde{\boldsymbol{a}}(t) + \tilde{B}\boldsymbol{c}(t) \tag{A.10}$$

avec

$$\tilde{E} = \theta_R^T E_{11}\theta_R \quad ; \quad \tilde{A} = \theta_R^T A_{11}\theta_R \quad ; \quad \tilde{B} = \theta_R^T B_{12}. \tag{A.11}$$

Finalement, il peut être montré que le gain de feedback $\hat{K} = \tilde{K}\theta_L^T$ est solution du problème LQR du système $(\hat{\mathcal{S}})$, avec $\tilde{K} = -R^{-1}\tilde{B}^T\tilde{X}\tilde{E}$ le gain de feedback et $\tilde{X}$ la solution stabilisante de l'équation de Riccati généralisée associé au système $(\tilde{\mathcal{S}})$. $K = [\hat{K}\ 0]$ est donc le gain de feedback agissant sur $(\mathcal{S})$ associé au problème LQR original.

Annexe B

Compléments relatifs à la Partie II

B.1 Vecteurs propres de Ritz de A

Soit $(\boldsymbol{y}_i, \lambda_i)$ les i-èmes éléments propre de C_{C} la matrice Compagnon, l'objectif est de démontrer que le couple $\left(\boldsymbol{\Phi}_i = V_1^{N-1}\boldsymbol{y}_i, \lambda_i\right)$ est une approximation des éléments propres de A.

Démonstration.

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{\Phi}_i - \lambda_i\boldsymbol{\Phi}_i &= AV_1^{N-1}\boldsymbol{y}_i - \lambda_i V_1^{N-1}\boldsymbol{y}_i = AV_1^{N-1}\boldsymbol{y}_i - V_1^{N-1}C_{\mathrm{C}}\boldsymbol{y}_i \\ &= \left(AV_1^{N-1} - V_1^{N-1}C_{\mathrm{C}}\right)\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_{N-1}^T\boldsymbol{y}_i \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|\boldsymbol{r}\| \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{B.1}$$

B.2 Lien entre DMD classique et DMD par SVD

En raison de l'orthonormalité de U, on a $U^*U = \mathbb{I}$ et $UU^* = P$ un projecteur orthogonal sur la base U. Partons de la définition (5.19) de $\widetilde{S}$ que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} U^*AU &\approx \widetilde{S} \\ UU^*AU &\approx U\widetilde{S} \\ AU &\approx U\widetilde{S} \end{aligned} \tag{B.2}$$

car P est un projecteur orthogonal sur U. L'équation (5.17) est donc reformulé comme :

$$\begin{aligned} AU &\approx U\widetilde{S} \\ AU\Sigma W^* &\approx U\widetilde{S}\Sigma W^* \\ AU\Sigma W^* &\approx U\Sigma W^* W\Sigma^{\text{MP}}\widetilde{S}\Sigma W^* \\ AV_1^{N-1} &\approx V_1^{N-1} W\Sigma^{\text{MP}}\widetilde{S}\Sigma W^*. \end{aligned} \tag{B.3}$$

On a donc $\widetilde{C}_{\text{C}}$ et $\widetilde{S}$ deux matrices similaires si la SVD n'est pas tronquée : $\widetilde{C}_{\text{C}} = W\Sigma^{\text{MP}}\widetilde{S}\Sigma W^*$.

Repartons de la relation $AU \approx U\widetilde{S}$ et introduisons $(\boldsymbol{y}_i^{\text{SVD}}, \lambda_i^{\text{SVD}})$ les éléments propres de $\widetilde{S}$. On obtient les relations :

$$\begin{aligned} AU\boldsymbol{y}_i^{\text{SVD}} &\approx U\widetilde{S}\boldsymbol{y}_i^{\text{SVD}} \\ AU\boldsymbol{y}_i^{\text{SVD}} &\approx \lambda_i^{\text{SVD}} U\boldsymbol{y}_i^{\text{SVD}} \\ A\boldsymbol{\Phi}_i^{\text{SVD}} &\approx \lambda_i^{\text{SVD}}\boldsymbol{\Phi}_i^{\text{SVD}}. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Φ_i^{SVD} est donc bien une approximation des éléments propres de A associés à λ_i^{SVD}.

B.3 Sensibilité de la matrice Compagnon

Pour l'analyse de sensibilité des modes DMD à un paramètre, il est nécessaire de connaitre la dérivée des coefficients c_i de la matrice Compagnon. Partons du calcul des coefficients de la matrice Compagnon par (5.29) soit $\boldsymbol{c}_{\text{C}} = K^{-1}\boldsymbol{w}$ et dérivons la. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{c}_{\text{C}}}{\partial \mu} &= K^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \mu} - K^{-1}\frac{\partial K}{\partial \mu}K^{-1}\boldsymbol{w} \\ &= K^{-1}(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \mu} - \frac{\partial K}{\partial \mu}\boldsymbol{c}_{\text{C}}), \end{aligned} \tag{B.5}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial \mu} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \mu}, \boldsymbol{v}_j\right)_\Omega + \left(\boldsymbol{v}_i, \frac{\partial \boldsymbol{v}_j}{\partial \mu}\right)_\Omega \\ \frac{\partial \boldsymbol{w}_i}{\partial \mu} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}_N}{\partial \mu}, \boldsymbol{v}_i\right)_\Omega + \left(\boldsymbol{v}_N, \frac{\partial \boldsymbol{v}_i}{\partial \mu}\right)_\Omega. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Dans ces développements, la sensibilité des réalisations est supposée connue.

B.4 Modes adjoints DMD

L'utilisation des modes DMD comme une base de dimension réduite nécessite la capacité de projeter un champ de vecteur sur cette base. Par exemple, pour déterminer le comportement temporel des données originales, ces dernières doivent être projetées sur les modes DMD. La projection des équations de Navier-Stokes sur le sous-espace réduit est un autre exemple et est une étape essentielle pour créer un système dynamique de dimension réduite. La difficulté est que les modes DMD ne sont pas orthogonaux. Par conséquent, une *projection oblique* doit être effectuée. Un moyen de faire cela est de calculer les modes adjoints $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_j$ définis tels que $(\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j) = \delta_{ij}$.

En effet, si les modes adjoints sont connus, les coefficients temporels sont déterminés directement en effectuant le produit scalaire des modes DMD adjoints associés et de la réalisation correspondante.

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_j, \boldsymbol{v}_k\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \underbrace{\left(\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_j, \widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_i\right)}_{\delta_{ij}} \nu_i(k) = \nu_j(k). \tag{B.7}$$

Par définition, $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i$ est solution du problème aux valeurs propres adjoint :

$$A^* \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i = \bar{\lambda}_i \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i. \tag{B.8}$$

Les modes DMD adjoints peuvent être calculés en résolvant le problème aux valeurs propres de l'hermitien de la matrice Compagnon. $\left(\boldsymbol{z}_i = \left(V_1^{N-1}\right)^* \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i, \bar{\lambda}_i\right)$ sont approximativement les éléments propres de C_{C}^*. En effet, quand $\|\boldsymbol{r}\| \longrightarrow 0$, prendre l'hermitien de (5.10) mène à :

$$\left(V_1^{N-1}\right)^* A^* = C_{\mathrm{C}}^* \left(V^{N-1}\right)^*. \tag{B.9}$$

En multipliant (B.9) par $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i$ et en considérant (B.8) nous avons :

$$\begin{aligned} \left(V_1^{N-1}\right)^* A^* \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i &= C_{\mathrm{C}}^* \left(V_1^{N-1}\right)^* \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i \\ &= \bar{\lambda}_i \left(V_1^{N-1}\right)^* \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i \end{aligned} \tag{B.10}$$

à condition que $\left(\boldsymbol{z}_i = \left(V_1^{N-1}\right)^* \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i, \bar{\lambda}_i\right)$ soient approximativement les éléments propres de C_{C}^*.

Puisque V_1^{N-1} n'est pas une matrice carrée, nous pouvons utiliser une décomposition SVD de V_1^{N-1} (pseudo-inverse de Moore-Penrose) pour trouver que :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i = U \Sigma^{-1} W^* \boldsymbol{z}_i. \tag{B.11}$$

En pratique, le mode DMD adjoint $\boldsymbol{\Psi}_i$ issu de la résolution du problème aux valeurs propres (B.9) est défini à une constante multiplicative près et doit être normalisé pour obtenir le mode DMD adjoint normalisé $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i$. Pour cela, il suffit de définir :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i = \frac{\boldsymbol{\Psi}_i}{\bar{\nu}_i^{\text{Norm}}} \quad \text{avec} \quad \nu_i^{\text{Norm}} = (\boldsymbol{\Psi}_i, \boldsymbol{v}_1) \tag{B.12}$$

de sorte que :

$$\left(\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_i, \boldsymbol{v}_1\right) = \nu_i(1) = \lambda_i^0 = 1. \tag{B.13}$$

B.5 Optimized DMD

Dans cette section, nous avons reporté tous les éléments nécessaires pour mettre en œuvre de manière efficace l'optimized DMD. Plus précisément, nous allons détailler comment calculer la fonctionnelle coût Γ et son gradient par rapport aux valeurs propres.

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \|\hat{R}\|_F^2 = \|V_1^N - \hat{V}_1^N\|_F^2 \\
&= \|V_1^N - V_1^N T^{\text{MP}} T\|_F^2 = \|V_1^N(\mathbb{I} - T^{\text{MP}} T)\|_F^2 \\
&= \text{tr}(V_1^N(\mathbb{I} - T^{\text{MP}} T)(\mathbb{I} - T^{\text{MP}} T)^* V_1^{N*}) \\
&= \text{tr}(V_1^N(\mathbb{I} - T^{\text{MP}} T - (T^{\text{MP}} T)^* + T^{\text{MP}} T (T^{\text{MP}} T)^*) V_1^{N*})
\end{aligned} \tag{B.14}$$

Puisque $T^{\text{MP}} T$ est un projecteur et est autoadjoint, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \text{tr}(V_1^N(\mathbb{I} - T^{\text{MP}} T) V_1^{N*}) = \text{tr}(V_1^N(\mathbb{I} - T^{\text{MP}} T (T^{\text{MP}} T)^*) V_1^{N*}) \\
&= \text{tr}(V_1^N V_1^{N*}) - \text{tr}((V_1^N T^{\text{MP}} T)(V_1^N T^{\text{MP}} T)^*) \\
&= \|V_1^N\|_F^2 - \|V_1^N T^{\text{MP}} T\|_F^2.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Notons que la dérivée d'une multiplication de deux matrices A et B par rapport à un paramètre μ peut être exprimée de la manière suivante :

$$\frac{\partial (AB)}{\partial \mu} = \frac{\partial A}{\partial \mu} B + A \frac{\partial B}{\partial \mu}. \tag{B.16}$$

Le gradient de la fonctionnelle coût par rapport aux valeurs propres peut être déterminé de manière analytique comme :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma}{\partial \hat{\lambda}_i} &= -\frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}_i}\left(\mathrm{tr}\left(V_1^N (T^{\mathrm{MP}}T)(T^{\mathrm{MP}}T)^* V_1^{N*}\right)\right) \\ &= -\mathrm{tr}\left(V_1^N \frac{\partial (T^{\mathrm{MP}}T)}{\partial \hat{\lambda}_i} V_1^{N*}\right) \\ &= -\mathrm{tr}\left(V_1^{N*} V_1^N \frac{\partial (T^{\mathrm{MP}}T)}{\partial \hat{\lambda}_i}\right).\end{aligned} \tag{B.17}$$

Soulignons que sous cette forme, la matrice de corrélation $V_1^{N*}V_1^N$ est calculée une fois pour toutes et que seule la matrice T est mise à jour pendant la procédure de minimisation. Le gradient de la matrice T peut également être calculé analytiquement :

$$\frac{\partial T}{\partial \hat{\lambda}_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\hat{\lambda}_i & \cdots & (N-1)\hat{\lambda}_i^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.18}$$

Rappelons que pour calculer la dérivée de l'inverse d'une matrice A, nous pouvons montrer que :

$$\frac{\partial\left(AA^{-1}\right)}{\partial \mu} = \frac{\partial A}{\partial \mu}A^{-1} + A\frac{\partial A^{-1}}{\partial \mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A^{-1}}{\partial \mu} = -A^{-1}\frac{\partial A}{\partial \mu}A^{-1}. \tag{B.19}$$

Finalement, l'expression suivante montre comment calculer un terme intervenant dans (B.17) :

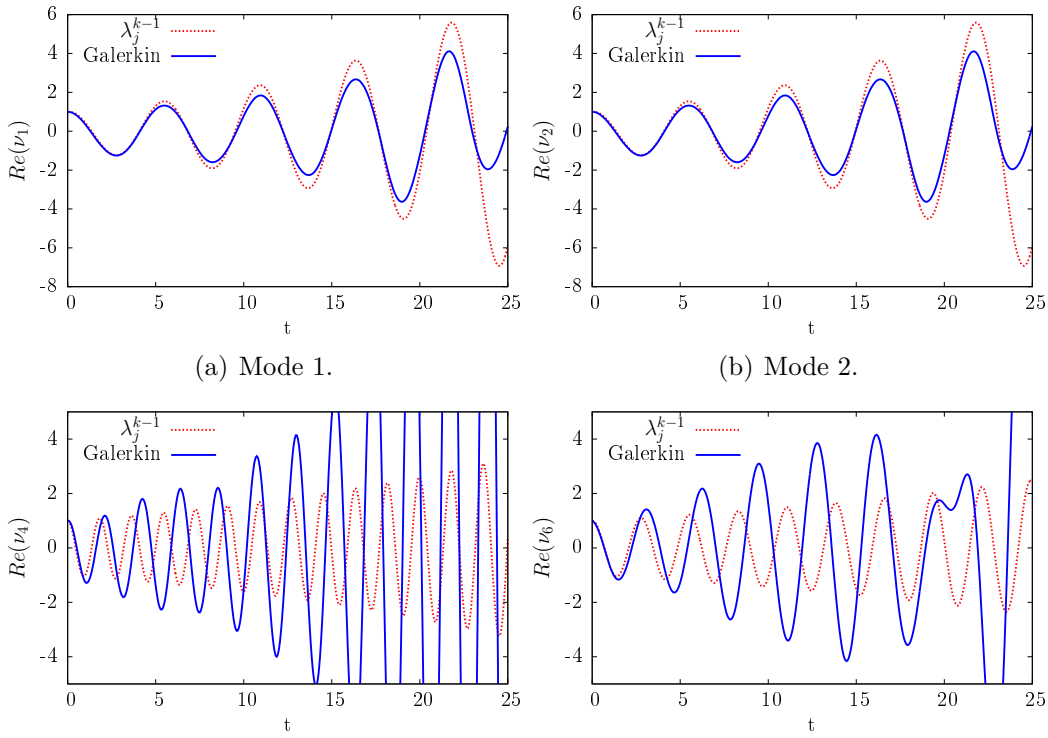
$$\frac{\partial (T^{\mathrm{MP}}T)}{\partial \hat{\lambda}_i} = \frac{\partial T^*}{\partial \hat{\lambda}_i}\left(TT^*\right)^{-1}T - T^*\left(TT^*\right)^{-1}\left(\frac{\partial T}{\partial \hat{\lambda}_i}T^* + T\frac{\partial T^*}{\partial \hat{\lambda}_i}\right)\left(TT^*\right)^{-1}T + T^*\left(TT^*\right)^{-1}\frac{\partial T}{\partial \hat{\lambda}_i}. \tag{B.20}$$

B.6 Modèles réduits basés sur des modes DMD pour les données numériques en régime transitoire

Dans cette section, nous reportons les résultats issus de modèles réduits basés sur des modes DMD et d'assimilation de données 4D-Var pour les données numériques d'écoulement de sillage

autour d'un cylindre circulaire à $Re = 200$ en régime transitoire.

Pour commencer, nous avons construit un modèle réduit par projection de Galerkin sur les modes DMD sélectionnés via leur taux d'amplification à la section 6.5.2. Les résultats sont représentés sur la figure B.1.



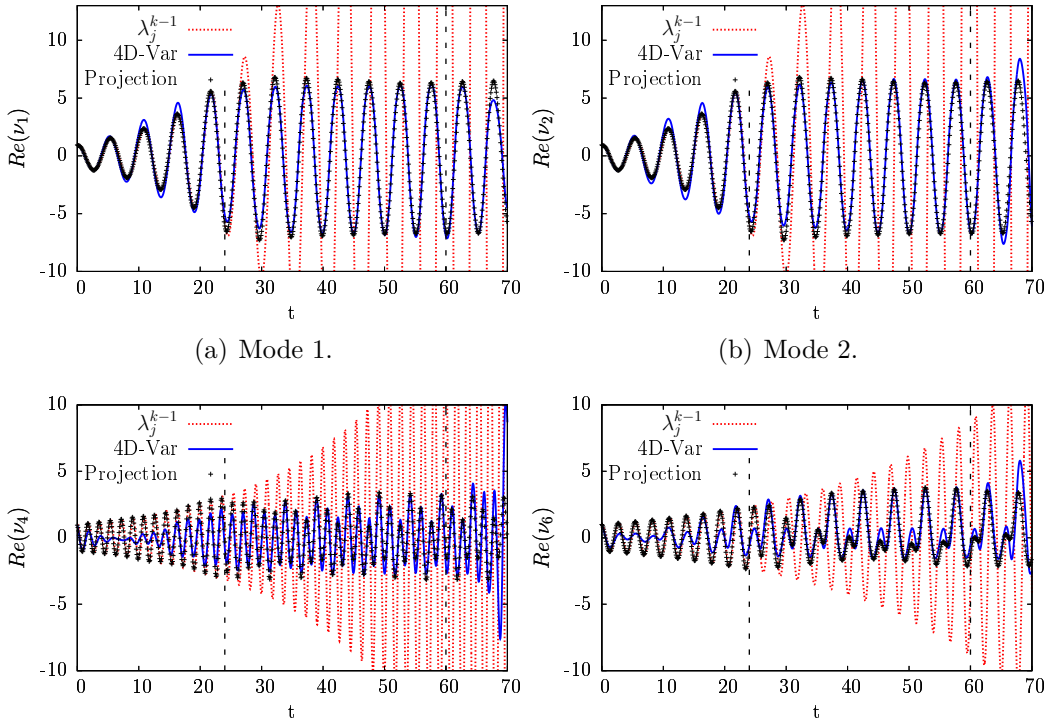
(a) Mode 1. (b) Mode 2.

(c) Mode 4. (d) Mode 6.

Figure B.1 – Comparaisons des coefficients temporels obtenus par DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 9 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Cas des données numériques en régime transitoire.

Le comportement à très court terme est correct mais le modèle s'écarte de la dynamique de référence assez rapidement. Pour améliorer cela, une assimilation de données 4D-Var (section 9.2) a été effectuée sur une fenêtre temporelle $T = [0, 60]$ plus grande que celle utilisée pour la décomposition en modes dynamiques $T = [0, 25]$. Dans ce cas particulier, les observations correspondent à la projection des réalisations sur la base DMD. La dynamique analysée est comparée sur la figure B.2 à la projection des réalisations sur la base DMD et à la propagation temporelle obtenue directement par DMD. Nous constatons que, comme prévu, la propagation temporelle ne contient pas le mécanisme de saturation par effets non-linéaires de la dynamique de l'écoulement. En revanche, le modèle Galerkin amélioré grâce à l'assimilation de données

4D-Var est capable de représenter la croissance exponentielle puis le phénomène de saturation. En outre, le comportement prédictif à court terme dans la plage $T = [60, 70]$ est bon. Ce test montre la possibilité d'utiliser la DMD pour construire un modèle non-linéaire, malgré l'identification d'un processus linéaire pour la construction de la base.

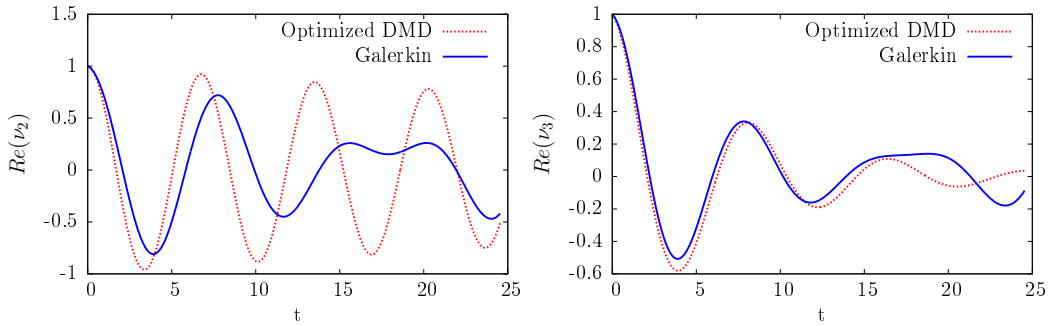


(a) Mode 1. (b) Mode 2.

(c) Mode 4. (d) Mode 6.

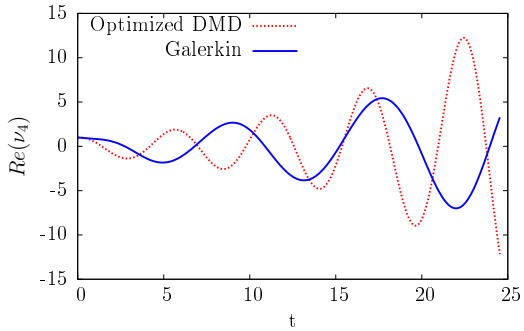
Figure B.2 – Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques en régime transitoire. Le modèle dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les modes DMD. La DMD a été effectuée sur l'horizon temporel $T = [0, 25]$, tandis que l'assimilation est effectuée sur l'horizon temporel $T = [0, 60]$ (traits verticaux pointillés). La projection des réalisations sur la base DMD est représentée en noir, la relation de propagation temporelle en rouge, et les résultats du modèle assimilé en bleu.

Finalement, nous avons développé un modèle Galerkin basé sur les modes optimized DMD (voir figure B.3). Nous constatons que pour les données numériques en régime transitoire, les performances du modèle réduit développé sur les modes optimized DMD sont comparables à celles obtenues par le modèle réduit construit sur les modes DMD sélectionnés par leur taux d'amplification.

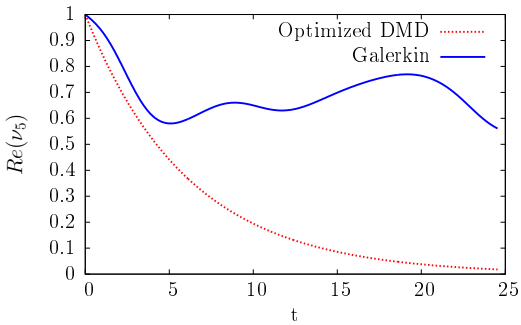


(a) Mode 2.

(b) Mode 3.



(c) Mode 4.



(d) Mode 5.

Figure B.3 – Comparaisons des coefficients temporels obtenus par optimized DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 9 modes optimized DMD déterminés à la section 6.5.4. Cas des données numériques en régime transitoire.

Annexe C

Compléments relatifs à la Partie IV

C.1 Contrainte dans l'espace de dimension réduite

Les équations de contrainte (10.6) pour $i \in [1, \cdots, N_c]$ peuvent être exprimées dans l'espace de dimension réduite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\text{Gal}}]}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}^{\text{Cible}}(\boldsymbol{x},t)\right)_\Omega &= 0 \\
\left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} a_j(t)\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^{\text{Cible}}(\boldsymbol{x},t)\right)_\Omega &= 0 \\
\sum_{j=1}^{N_{\text{Gal}}} \left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x})\right)_\Omega a_j(t) &= \left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}^{\text{Cible}}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x})\right)_\Omega \\
\mathcal{G}(t)\boldsymbol{a}(t) &= \boldsymbol{h}(t),
\end{aligned} \tag{C.1}$$

avec

$$\mathcal{G}_{ij}(t) = \left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{x})\right)_\Omega \quad \text{et} \quad h_i(t) = \left(\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{x},t), \boldsymbol{u}^{\text{Cible}}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x})\right)_\Omega . \tag{C.2}$$

C.2 Intégration du système dynamique contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange

Au premier regard l'intégration temporelle du système (10.31) ne parait pas très simple. En regardant de manière plus attentive, nous pouvons remarquer que (10.31) a la même forme

que les équations de Navier-Stokes incompressibles. En effet, on peut considérer que la pression joue le rôle d'un multiplicateur de Lagrange afin d'imposer au champ de vitesse, solution des équations de Navier-Stokes, la contrainte de divergence nulle $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$. Ce cas correspond à $\mathcal{G} = \mathrm{div}(\cdot)$ et $\mathcal{G}^* = \mathbf{grad}(\cdot)$. Devant cette similarité, des méthodes numériques semblables peuvent être employées pour une contrainte quelconque.

Chorin (1968) propose d'utiliser de manière itérative un champ auxiliaire $\boldsymbol{u}^*$ pour imposer la contrainte de divergence nulle au pas de temps $n+1$. Après avoir introduit une équation de Poisson, un paramètre de relaxation assure la convergence de la résolution itérative de l'équation pour la vitesse et de la correction de pression. Cette stratégie de résolution est appelée *méthode de projection*. Un cas particulier de cette classe de méthodes, précise à l'ordre 2, a été proposée par Bell *et al.* (1989). L'idée est d'appliquer un schéma semi-implicite du type Cranck-Nicholson, qui ne nécessite qu'un seul pas de temps intermédiaire. Les termes de l'équation sont approchés au pas de temps $n+\frac{1}{2}$ par une méthode de Godunov. Cette méthode a été généralisée par Trebotich et Colella (2001) pour le cas de contraintes dépendant du temps avec une résolution précise à l'ordre 2 des équations de Navier-Stokes incompressibles discrétisées sur un maillage mobile. La méthode qui sera présentée par la suite s'appuie sur ce schéma.

Commençons par calculer de manière explicite $\boldsymbol{a}$ au pas de temps $n+\frac{1}{2}$, soit $\boldsymbol{a}^{n+\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{a}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a}^n + \frac{\Delta t}{2}\left(\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{a}^n) + \mathcal{G}^{*n}\boldsymbol{\lambda}^{n-\frac{1}{2}}\right). \tag{C.3}$$

Nous effectuons ensuite un pas de prédiction par un schéma centré en $n+\frac{1}{2}$ en calculant :

$$\boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a}^n + \Delta t\left(\boldsymbol{f}^{n+\frac{1}{2}}(\boldsymbol{a}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{G}^{*n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\lambda}^{n-\frac{1}{2}}\right). \tag{C.4}$$

Nous allons ensuite projeter l'état prédit $\boldsymbol{a}^*$ sur l'ensemble des solutions vérifiant la contrainte au pas de temps $n+1$. Nous définissons alors le projecteur associé P^{n+1} sur l'ensemble des états respectant $\mathcal{G}^{n+1}\boldsymbol{a} = 0$, soit :

$$P^{n+1} = \mathbb{I} - \mathcal{G}^{*n+1}\left(\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{G}^{*n+1}\right)^{-1}\mathcal{G}^{n+1}. \tag{C.5}$$

Puisque

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{a}) &= \boldsymbol{a} - \mathcal{G}^*\left(\mathcal{G}\mathcal{G}^*\right)^{-1}\mathcal{G}\boldsymbol{a} \\ &= \boldsymbol{a} - \mathcal{G}^*\left(\mathcal{G}\mathcal{G}^*\right)^{-1}\boldsymbol{h} \quad \text{si et seulement si la contrainte est respectée,} \end{aligned} \tag{C.6}$$

on a alors :

$$\boldsymbol{a} = P(\boldsymbol{a}) + \mathcal{G}^*(\mathcal{G}\mathcal{G}^*)^{-1}\boldsymbol{h} \tag{C.7}$$

qui respecte la contrainte $\mathcal{G}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{h}$. Nous pouvons donc écrire l'étape de projection :

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = P^{n+1}(\boldsymbol{a}^*) + \mathcal{G}^{*n+1}\left(\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{G}^{*n+1}\right)^{-1}\boldsymbol{h}^{n+1}. \tag{C.8}$$

Nous allons donc finalement mettre à jour le multiplicateur de Lagrange et considérer que $\boldsymbol{\lambda}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda}^{n-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{\lambda}^*$. Si nous appliquons l'opérateur $\mathcal{G}(t)$ à l'équation du système dynamique (10.31), nous obtenons l'équivalent de l'équation de Poisson, soit :

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = (\mathcal{G}(t)\mathcal{G}^*(t))^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t}(t) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{G}}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{a}(t) - \mathcal{G}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}(t))\right). \tag{C.9}$$

De la même manière, en appliquant $\mathcal{G}^{n+1}$ à l'étape de prédiction (C.4), nous trouvons la mise à jour de $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda}^* = \left(\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{G}^{*n+1}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}^{n+1}}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{\Delta t}\mathcal{G}^{n+1}(\boldsymbol{a}^* - \boldsymbol{a}^n)\right). \tag{C.10}$$

En résumé :

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a}^n + \dfrac{\Delta t}{2}\left(\boldsymbol{f}^n(\boldsymbol{a}^n) + \mathcal{G}^{*n}\boldsymbol{\lambda}^{n-\frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{a}^* = \boldsymbol{a}^n + \Delta t\left(\boldsymbol{f}^{n+\frac{1}{2}}(\boldsymbol{a}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{G}^{*n+\frac{1}{2}}\boldsymbol{\lambda}^{n-\frac{1}{2}}\right) \\ \boldsymbol{a}^{n+1} = P^{n+1}(\boldsymbol{a}^*) + \mathcal{G}^{*n+1}\left(\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{G}^{*n+1}\right)^{-1}\boldsymbol{h}^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\lambda}^{n-\frac{1}{2}} + \left(\mathcal{G}^{n+1}\mathcal{G}^{*n+1}\right)^{-1}\left(\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}^{n+1}}{\mathrm{d}t} - \dfrac{1}{\Delta t}\mathcal{G}^{n+1}(\boldsymbol{a}^* - \boldsymbol{a}^n)\right). \end{cases} \tag{C.11}$$

C.3 Mise à jour de la contrainte dans le sous-espace de projection

Si un réel couplage fluide-structure est nécessaire, une représentation de faible dimension du mouvement du solide peut être indispensable, en particulier pour la fonction caractéristique $\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x}, t)$. Liberge et Hamdouni (2010) ont proposé de représenter la fonction caractéristique dans sa propre base POD d'ordre N_{Char}, soit :

$$\mathbb{I}_s(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_{\text{Char}}} b_i(t)\Phi_i^{\text{Char}}(\boldsymbol{x}). \tag{C.12}$$

Une loi de transport de la fonction caractéristique $\mathbb{I}_s$ est de plus ajoutée :

$$\frac{\partial \mathbb{I}_s}{\partial t} + \boldsymbol{u}_s \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbb{I}_s = 0. \tag{C.13}$$

Dans le cas de Liberge et Hamdouni (2010), un couplage fort[1] d'interaction fluide/structure est considéré. La vitesse de convection $\boldsymbol{u}_s$ de $\mathbb{I}_s$ est la vitesse $\boldsymbol{u}$, défini sur Ω. Sa décomposition POD donne un terme quadratique et un terme de couplage entre $a_i(t)$ et $b_i(t)$. Dans le cas du cylindre en oscillation verticale, un couplage faible est considéré la vitesse du solide rigide $\boldsymbol{u}_s = (u_{\Omega s}, v_{\Omega s})^T$ est considérée comme un paramètre de contrôle externe connu et uniforme pour des mouvements de translation, ce qui donne le modèle suivant :

$$\frac{\mathrm{d}b_i}{\mathrm{d}t} + u_{\Omega s} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Char}}} \left(\Phi_j^{\mathrm{Char}}, \frac{\partial \Phi_j^{\mathrm{Char}}}{\partial x} \right)_\Omega b_j + v_{\Omega s} \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Char}}} \left(\Phi_j^{\mathrm{Char}}, \frac{\partial \Phi_j^{\mathrm{Char}}}{\partial y} \right)_\Omega b_j = 0. \tag{C.14}$$

La contrainte peut ensuite être calculée rapidement. Par exemple, la contrainte associée à la translation horizontale représentée par $\boldsymbol{B}_1$ et h_1 peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1,i}(t) &= \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Char}}} \left(\begin{pmatrix} \Phi_j^{\mathrm{Char}}(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\Phi}_i(\boldsymbol{x}) \right)_\Omega b_j(t) \\ h_1(t) &= u_{\Omega s}(t) - \sum_{j=1}^{N_{\mathrm{Char}}} \left(\begin{pmatrix} \Phi_j^{\mathrm{Char}}(\boldsymbol{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{u}^b(\boldsymbol{x}) \right)_\Omega b_j(t). \end{aligned} \tag{C.15}$$

Cette section a montré que si nécessaire, la contrainte peut être exprimée de manière compacte et ainsi être introduite dans le calcul en ligne pour le couplage de systèmes.

[1] On parle de couplage fort en interaction fluide/structure lorsque le fluide agit sur le solide, et inversement le solide agit sur le fluide. Au contraire, on parle de couplage faible lorsque l'une des actions est négligée. Dans notre cas, uniquement l'action du solide sur le fluide est considérée.

Références bibliographiques

E. Åkervik, J. Hœpffner, U. Ehrenstein et D. S. Henningson : Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes. *Journal of Fluid Mechanics*, 579:305–314, 4 2007. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112007005496. 40

N. Akkari, A. Hamdouni, E. Liberge et M. Jazar : Quelques résultats mathématiques et numériques sur la sensibilité paramétrique de la POD. *In 11-ième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, 13-17 Mai*, 2013. 70

K. Aleksić-Roessner, R. King, O. Lehmann, G. Tadmor et M. Morzyński : On the need of nonlinear control for efficient model-based wake stabilization. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 28(1):23–49, 2014. ISSN 0935-4964. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00162-013-0299-9. 31

F. Allgower, R. Findeisen et Z. K. Nagy : Nonlinear model predictive control : From theory to application. *Journal-Chinese Institute of Chemical Engineers*, 35(3):299–316, 2004. 228

D. Amsallem : *Interpolation on manifolds of CFD-based fluid and finite element-based structural reduced-order models for on-line aeroelastic predictions.* Thèse de doctorat, Stanford University, 2010. 71, 109, 226

D. Amsallem, J. Cortial, K. Carlberg et C. Farhat : A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(9):1241–1258, 2009. 70

A. C. Antoulas, D. C. Sorensen et S. Gugercin : A survey of model reduction methods for large-scale systems. *Contemporary Mathematics*, 280:193–220, 2001. 8

G. Artana, A. Cammilleri, J. Carlier et E. Mémin : Strong and weak constraint variational assimilations for reduced order fluid flow modeling. *Journal of Computational Physics*, 231

(8):3264 – 3288, 2012. ISSN 0021-9991. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999112000319. 142

E. Atam, L. Mathelin et L. Cordier : A hybrid approach for control of a class of input-affine nonlinear systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 10(3):1207–1228, 2014. ISSN 1349-4198. URL http://www.ijicic.org/ijicic-13-01040.pdf. 31, 228

A. Auger, N. Hansen, J. M. P. Zerpa, R. Ros et M. Schoenauer : Empirical comparisons of several derivative free optimization algorithms. *In Acte du 9-ième colloque national en calcul des structures*, 2009. 111

M. Azaïez, M. Deville et E. Mund : *Éléments finis pour les fluides incompressibles*. PPUR Presses polytechniques, 2011. 186, 190

I. Babuška : The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3):179–192, 1973a. 189

I. Babuška : The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27 (122):221–228, 1973b. 188

C. Bacuta : A unified approach for Uzawa algorithms. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 44(6):2633–2649, 2006. URL http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/050630714. 190

J. M. Badía, P. Benner, R. Mayo et E. S. Quintana-Ortí : Parallel solution of large-scale and sparse generalized algebraic Riccati equations. *In Euro-Par 2006 Parallel Processing*, volume 4128 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 710–719. Springer Berlin Heidelberg, 2006. ISBN 978-3-540-37783-2. URL http://dx.doi.org/10.1007/11823285_74. 32, 234

S. Bagheri : *Analysis and control of transitional shear flows using global modes*. Thèse de doctorat, Department of Mechanics Royal Institute of Technology SE-100 44 Stockholm, Sweden, 2010. 83, 87

S. Bagheri : Koopman-mode decomposition of the cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 726:596–623, 7 2013. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112013002498. 82

S. Bagheri, D. S. Henningson, J. Hœpffner et P. J. Schmid : Input-output analysis and control design applied to a linear model of spatially developing flows. *Applied Mechanics Review*, 62(2), 2009. 191, 210

A. Barbagallo, D. Sipp et P. J. Schmid : Input-output measures for model reduction and closed-loop control : application to global modes. *Journal of Fluid Mechanics*, 685:23–53, 9 2011. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112011002710. 107

S. S. Beauchemin et J. L. Barron : The computation of optical flow. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 27(3):433–466, 1995. 228

J. B. Bell, P. Colella et H. M. Glaz : A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 85(2):257–283, 1989. 246

N. Benard, A. Debien, L. David et E. Moreau : Analyse par PIV rapide du sillage d'un cylindre manipulé par actionneurs plasmas. *In Congrès Francophone de Techniques Laser*. Vandoeuvre-lès-Nancy 14-17 septembre, 2010. 94, 164

P. Benner, H. Mena et J. Saak : On the parameter selection problem in the Newton-ADI iteration for large-scale Riccati equations. *ETNA. Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 29:136–149, 2008. URL http://eudml.org/doc/130671. 32, 234

P. Benner et J. Saak : A Galerkin-Newton-ADI method for solving large-scale algebraic Riccati equations. *Preprint SPP1253-090, DFGSPP1253*, 2010. 32, 234

P. Benner, J. Saak, M. Stoll et H. K. Weichelt : Efficient solution of large-scale saddle point systems arising in Riccati-based boundary feedback stabilization of incompressible Stokes flow. *Preprint SPP1253-130, DFGSPP1253*, 2012. 234

M. Bergmann : *Optimisation aérodynamique par réduction de modèle POD et contrôle optimal. Application au sillage laminaire d'un cylindre circulaire*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, Nancy, France, 2004. 59, 69, 113, 276

M. Bergmann, C.-H. Bruneau et A. Iollo : Enablers for robust POD models. *Journal of Computational Physics*, 228(2):516–538, 2009. ISSN 0021-9991. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910800510X. 38

M. Bergmann et L. Cordier : Optimal control of the cylinder wake in the laminar regime by trust-region methods and POD reduced-order models. *Journal of Computational Physics*, 227(16):7813–7840, 2008. 72, 143, 181, 182, 194

M. Bergmann, L. Cordier et J.-P. Brancher : Optimal rotary control of the cylinder wake using proper orthogonal decomposition reduced-order model. *Physics of Fluids*, 17(9):097101, 2005. URL http://link.aip.org/link/?PHF/17/097101/1. 194

M. Bergmann et A. Iollo : Modeling and simulation of fish like swimming. *Journal of Computational Physics*, 230(2):329–348, 2011. URL http://hal.inria.fr/inria-00546330. 184

T Bewley : *Numerical Renaissance : Simulation, Optimization, & Control*. Renaissance, Press, 2012. URL http://numerical-renaissance.com. 4, 8

T. R. Bewley et S. Liu : Optimal and robust control and estimation of linear paths to transition. *Journal of Fluid Mechanics*, 365:305–349, 5 1998. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112098001281. 17

T. R. Bewley, P. Moin et R. Temam : DNS-based predictive control of turbulence : an optimal benchmark for feedback algorithms. *Journal of Fluid Mechanics*, 447:179–225, 10 2001. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112001005821. 4, 22

J. P. Bonnet, D. R. Cole, J. Delville, M. N. Glauser et L. S. Ukeiley : Stochastic estimation and proper orthogonal decomposition : Complementary techniques for identifying structure. *Experiments in Fluids*, 17(5):307–314, 1994. ISSN 0723-4864. URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01874409. 227

J. Borée : Extended proper orthogonal decomposition : a tool to analyse correlated events in turbulent flows. *Experiments in fluids*, 35(2):188–192, 2003. ISSN 0723-4864. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00348-003-0656-3. 38

J. P. Boyd : *Chebyshev and Fourier spectral methods*. Courier Dover Publications, 2001. 186

S. P. Boyd : *Linear matrix inequalities in system and control theory, Vol. 15*. Siam, 1994. 31

D. L. Brown, R. Cortez et M. L. Minion : Accurate projection methods for the incompressible Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 168(2):464–499, 2001. 190

S. L. Brunton, J. L. Proctor et J. N. Kutz : Compressive sampling and dynamic mode decomposition. *arXiv preprint arXiv :1312.5186*, 2013. 226

F. Bruzelius : *Linear Parameter-Varying Systems an approach to gain scheduling*. Thèse de doctorat, Chalmers university of thechonoly, department of signals ans systems, Göteborg, Sweden, 2004. 31, 228

T. Bui-Thanh, K. Willcox et O. Ghattas : Model reduction for large-scale systems with high-dimensional parametric input space. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(6):3270–3288, 2008. 35

T. Bui-Thanh, K. Willcox, O. Ghattas et B. van Bloemen Waanders : Goal-oriented, model-constrained optimization for reduction of large-scale systems. *Journal of Computational Physics*, 224(2):880–896, 2007. 8, 39

J. Burkardt, M. Gunzburger et H.-C. Lee : Centroidal voronoi tessellation-based reduced-order modeling of complex systems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 28(2):459–484, 2006. 68

J. B. Burl : *Linear Optimal Control : $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ Methods*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1998. 5, 6, 25, 27, 28, 40, 41, 227

A. Cammilleri, F. Guéniat, J. Carlier, L. Pastur, E. Memin, F. Lusseyran et G. Artana : POD-spectral decomposition for fluid flow analysis and model reduction. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, pages 1–29, 2013. 106, 112

W. Cazemier, R. W. C. P. Verstappen et A. E. P. Veldman : Proper orthogonal decomposition and low-dimensional models for driven cavity flows. *Physics of fluids*, 10 (7):1685–1699, 1998. URL http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/10/7/10.1063/1.869686. 58, 269

S. Chaturantabut et D. C. Sorensen : Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 32(5):2737–2764, septembre 2010. ISSN 1064-8275. URL http://dx.doi.org/10.1137/090766498. 36

K. K. Chen et C. W. Rowley : H_2 optimal actuator and sensor placement in the linearised complex Ginzburg–Landau system. *Journal of Fluid Mechanics*, 681:241–260, 7 2011. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112011001959. 5, 191

K. K. Chen, J. H. Tu et C. W. Rowley : Variants of dynamic mode decomposition : Boundary condition, Koopman, and Fourier analyses. *Journal of Nonlinear Science*, 22(6):887–915, 2012. ISSN 0938-8974. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00332-012-9130-9. 9, 87, 89, 106, 110, 111, 119, 127

X. Chen : *4-D Var data assimilation and POD model reduction applied to geophysical dynamics models*. Thèse de doctorat, The Florida state university, 2011. 148, 149

A. J. Chorin : Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 22(104):745–762, 1968. ISSN 00255718. URL http://www.jstor.org/stable/2004575. 246

T. F. Coleman et Y. Li : An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds. *SIAM Journal on Optimisation*, 6:418–445, 1996. 72

L. Cordier : Proper orthogonal decomposition : an overview. *In Lecture series 2008-01 on post-processing of experimental and numerical Data, Von Karman Institute for Fluid Dynamics*, 2008. 44, 47, 152

L. Cordier : Flow control and constrained optimization problems. *In Reduced-Order Modelling for Flow Control*, volume 528 de *CISM Courses and Lectures*, pages 1–76. Springer Vienna, 2011. ISBN 978-3-7091-0757-7. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-7091-0758-4_1. 18, 228

L. Cordier, B. Abou El Majd et J. Favier : Calibration of POD reduced-order models using Tikhonov regularization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 63 (2):269–296, 2010. ISSN 1097-0363. URL http://dx.doi.org/10.1002/fld.2074. 55, 61, 63, 64, 160

L. Cordier et A. El Shrif : Optimal Control of Turbulent Channel Flow using an LES Reduced-Order Model. *Revue de Mécanique Appliquée et Théorique*, 2(5):487–500, 2011. 22

L. Cordier, M. Girault et D. Petit : Reduced Order Modeling by Modal Identification Method and POD-Galerkin approach of the heated circular cylinder wake in mixed convection. *Journal of Physics : Conference Series*, 395:012102, 2012. 180

L. Cordier, B. R. Noack, G. Daviller, G. Tissot, G. Lehnasch, J. Delville, M. Balajewicz et R. Niven : Identification strategies for model-based control. *Experiments in Fluids*, 54(8):1–21, 2013. ISSN 0723-4864. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00348-013-1580-9. 55, 56, 60, 61, 276

M. Couplet, C. Basdevant et P. Sagaut : Calibrated reduced-order POD-Galerkin system for fluid flow modelling. *Journal of Computational Physics*, 207(1):192–220, 2005. ISSN 0021-9991. 63

M. Couplet, P. Sagaut et C. Basdevant : Intermodal energy transfers in a proper orthogonal decomposition-Galerkin representation of a turbulent separated flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 491:275–284, 8 2003. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112003005615. 55, 58, 59

R. Csikja et J. Tóth : Blow up in polynomial differential equations. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 4(2):728–733, 2007. 55

J. D'Adamo, N. Papadakis, E. Mémin et G. Artana : Variational assimilation of POD low-order dynamical systems. *Journal of Turbulence*, 8(9):1–22, 2007. 143

D. N. Daescu et I. M. Navon : Adaptive observations in the context of 4D-Var data assimilation. *Meteorology and Atmospheric Physics*, 85(4):205–226, 2004. 149

D. N. Daescu et I. M. Navon : Efficiency of a POD-based reduced second-order adjoint model in 4D-Var data assimilation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 53(6):985–1004, 2007. 148

N. Daget : *Estimation d'ensemble des paramètres des covariances d'erreur d'ébauche dans un système d'assimilation variationnelle de données océaniques*. Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2008. 146

G. Dergham : *Reduced-order models for linear dynamics and control in aerodynamics*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2011. 40

G. Dergham, D. Sipp et J.-Ch. Robinet : Stochastic dynamics and model reduction of amplifier flows : the backward facing step flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 719:406–430, 3 2013. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112012006106. 3, 226

G. Dimitriu, N. Apreutesei et R. Ştefănescu : Numerical Simulations with Data Assimilation Using an Adaptive POD Procedure. *In Large-Scale Scientific Computing*, volume 5910 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 165–172. Springer Berlin / Heidelberg, 2010. 150

K. Drifi et I. Herlin : Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement. Rapport de recherche RR-7623, INRIA, mai 2011. 150

A. Dumon : *Réduction dimensionnelle de type PGD pour la résolution des écoulements incompressibles*. Thèse de doctorat, Université de La Rochelle, 2011. 39

U. Ehrenstein, P. Y. Passaggia et F. Gallaire : Control of a separated boundary layer : reduced-order modeling using global modes revisited. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 25(1):195–207, 2011. 107

A. El Shrif : *Contrôle optimal par simulation aux grandes echelles d'un écoulement de canal turbulent*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Lorraine, 2008. 4, 31

M. Fahl : *Trust-Region methods for flow control based on reduced order modelling*. Thèse de doctorat, Universität Trier, 2000. 72

B. F. Farrell et P. J. Ioannou : Accurate low-dimensional approximation of the linear dynamics of fluid flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 58(18):2771–2789, 2001. 44, 226

J. Favier : *Contrôle d'écoulements : approche expérimentale et modélisation de dimension réduite*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2007. 160

C. L. Fefferman : *Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation*, 2000. http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/navierstokes.pdf. 9

G. J. Fix, M. D. Gunzburger et J. S. Peterson : On finite element approximations of problems having inhomogeneous essential boundary conditions* 1. *Computers & mathematics with applications*, 9(5):687–700, 1983. 181

R. L. Fox et M. P. Kapoor : Rate of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal*, 6(12):2426–2429, 1968. 71

M. Gad-el Hak, A. Pollard et J. P. Bonnet : *Flow Control : fundamentals and practices*. 1998. 4

M. C. Galbraith et S. Abdallah : Implicit solutions of incompressible Navier-Stokes equations using the pressure gradient method. *AIAA Journal*, 49(11), 2011. 38

B. Galletti, A. Bottaro, C.-H. Bruneau et A. Iollo : Accurate model reduction of transient and forced wakes. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, 26:354–366, 2007. URL http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00262163. 21

B. Galletti, C.-H. Bruneau, L. Zannetti et A. Iollo : Low-order modelling of laminar flow regimes past a confined square cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 503:161–170, 2 2004. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112004007906. 38

J. C. Gilbert et C. Lemaréchal : The module M1QN3 – Version 3.3. *INRIA Rocquencourt & Rhone-Alpes*, 2009. 112, 144

E. A. Gillies : Low-dimensional control of the circular cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 371(1):157–178, 1998. 113

R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla et D. D. Joseph : A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 25(5):755–794, 1999. 183

G. H. Golub et Q. Ye : Inexact inverse iteration for generalized eigenvalue problems. *BIT Numerical Mathematics*, 40(4):671–684, 2000. 41

D. Gottlieb et S. A. Orszag : *Numerical analysis of spectral methods : theory and applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993. 186

D. Gottlieb et E. Turkel : Dissipative two-four methods for time-dependent problems. *Mathematics of Computation*, 30(136):703–723, 1976. 191

P. J. Goulart, A. Wynn et D. Pearson : Optimal mode decomposition for high dimensional systems. *In Decision and Control (CDC), 51st Annual Conference on*, pages 4965–4970. IEEE, 2012. 9, 110

W. R. Graham, J. Peraire et K. T. Tang : Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part 1. Open-Loop Model Development. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, 44(7):945–972, 1999a. 181

W. R. Graham, J. Peraire et K. T. Tang : Optimal Control of Vortex Shedding Using Low Order Models. Part 2 : Model-based control. *Int. J. for Numer. Meth. in Engrg.*, 44 (7):973–990, 1999b. 181

C. W. J. Granger : Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods. *Econometrica*, pages 424–438, 1969. 227

M. Green et D. J.N. Limebeer : *Linear robust control*. DoverPublications. com, 2012. 29

A. Gronskis, D. Heitz et E. Mémin : Inflow and initial conditions for direct numerical simulation based on adjoint data assimilation. *Journal of Computational Physics*, 242(0):480–497, 2013. 146, 148

F. Guéniat, L. Mathelin et L. Pastur : Snapshot-based flow analysis with arbitrary sampling. *XXIII ICTAM, 19-24 August 2012, Beijing, China*, 2013. 82

M. D. Gunzburger : Introduction into mathematical aspects of flow control and optimization. *In Lecture series 1997-05 on inverse design and optimization methods*. Von Kármán Institute for Fluid Dynamics, 1997. 144

M. D. Gunzburger : *Perspectives in flow control and optimization*, volume 5. Siam, 2003. 18

M. D. Gunzburger et S. L. Hou : Treating inhomogeneous essential boundary conditions in finite element methods and the calculation of boundary stresses. *SIAM journal on numerical analysis*, pages 390–424, 1992. 189

M. D. Gunzburger, J. S. Peterson et J. N. Shadid : Reduced-order modeling of time-dependent PDEs with multiple parameters in the boundary data. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(4-6):1030–1047, 2007. 181

J. Gustafsson et B. Protas : Regularization of the backward-in-time Kuramoto–Sivashinsky equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(2):398–406, 2010. 148

P. C. Hansen : Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *SIAM review*, 34(4):561–580, 1992. 61, 65, 161

J. L. Harvill et B. K. Ray : A note on tests for nonlinearity in a vector time series. *Biometrika*, 86(3):728–734, 1999. 130

A. Hay, J. T. Borggaard et D. Pelletier : Local improvements to reduced-order models using sensitivity analysis of the proper orthogonal decomposition. *Journal of Fluid Mechanics*, 629:41–72, 2009. ISSN 0022-1120. 71, 72, 109

S. Hein : *MPC/LQG-based optimal control of nonlinear parabolic PDEs*. Thèse de doctorat, Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik, 2007. 228

M. Heinkenschloss, D. C. Sorensen et K. Sun : Balanced truncation model reduction for a class of descriptor systems with application to the Oseen equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008. 234

A. Hervé, D. Sipp, P. J. Schmid et M. Samuelides : A physics-based approach to flow control using system identification. *Journal of Fluid Mechanics*, 702:26–58, 6 2012. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112012001127. 8

M. Honnorat : *Assimilation de données lagrangiennes pour la simulation numérique en hydraulique fluviale*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007. 146

A. Iollo, S. Lanteri et J. A. Désidéri : Stability Properties of POD–Galerkin Approximations for the Compressible Navier–Stokes Equations. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 13(6):377–396, 2000. 45, 62

I. C. F. Ipsen et C. D. Meyer : The idea behind Krylov methods. *American Mathematical Monthly*, 105(10):889–899, 1998. ISSN 0002-9890. 83

I. Jolliffe : *Principal component analysis*. Wiley Online Library, 2005. 44

M. R. Jovanović, P. J. Schmid et J. W. Nichols : Low-rank and sparse dynamic mode decomposition. *Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs*, 2012. 110, 226

F. Juillet, P. J. Schmid et P. Huerre : Control of amplifier flows using subspace identification techniques. *Journal of Fluid Mechanics*, 725:522–565, 2013. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112013001948. 8, 226

W. J. Jung, N. Mangiavacchi et R. Akhavan : Suppression of turbulence in wall-bounded flows by high-frequency spanwise oscillations. *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics (1989-1993)*, 4(8):1605–1607, 1992. 3

E. Kaiser, B. R. Noack, L. Cordier, A. Spohn, M. Segond, M. Abel, G. Daviller et R. K. Niven : Cluster-based reduced-order modelling of a mixing layer. *Submitted manuscript to Journal of Fluid Mechanics*, 2013. 54, 68

I. Kalashnikova et M. F. Barone : Efficient non-linear proper orthogonal decomposition / Galerkin reduced order models with stable penalty enforcement of boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(11):1337–1362, 2012. ISSN 1097-0207. URL http://dx.doi.org/10.1002/nme.3366. 182, 188

C. Kasnakoğlu : *Reduced order modeling, nonlinear analysis and control methods for flow control problems*. Thèse de doctorat, Ohio State University, 2007. 182

J. Kim et T. R. Bewley : A linear systems approach to flow control. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39(1):383–417, 2007. URL http://dx.doi.org/10.1146/annurev.fluid.39.050905.110153. 24

R. King, R. Becker, G. Feuerbach, L. Henning, R. Petz, W. Nitsche, O. Lemke et W. Neise : Adaptive flow control using slope seeking. *In Control and Automation, 2006. MED'06. 14th Mediterranean Conference on*, pages 1–6. IEEE, 2006. 5

B. O. Koopman : Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 17(5):315, 1931. 80

M. Krstić et H.-H. Wang : Stability of extremum seeking feedback for general nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 36(4):595–601, 2000. 5

A. Kunoth : Multilevel preconditioning-appending boundary conditions by Lagrange multipliers. *Advances in Computational Mathematics*, 4(1):145–170, 1995. 190

J. Labroquere, R. Duvigneau et E. Guilmineau : Impact of turbulence closures and numerical errors for the optimization of flow control devices. *In 21st AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*, San Diego, California, 2013. June. 8

E. Lauga et T. R. Bewley : The decay of stabilizability with Reynolds number in a linear model of spatially developing flows. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2036):2077–2095, 2003. URL http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/459/2036/2077.abstract. 191

E. Lauga et T. R. Bewley : Performance of a linear robust control strategy on a nonlinear model of spatially developing flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 512(1):343–374, 2004. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112004009711. 30

O. Lehmann, M. Luchtenburg et N. Losse : Calibration of Model Coefficients Using the Adjoint Formulation. *In Report for the First Young Ercoftac Workshop*, 2007. 64

O. Lehmann, M. Luchtenburg, B. R. Noack, R. King, M. Morzynski et G. Tadmor : Wake stabilization using POD Galerkin models with interpolated modes. *In Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 500–505. IEEE, 2005. ISBN 0780395670. 70

R. Leroux : *Inférence bayésienne pour la reconstruction d'écoulements complexes Application au profil NACA0012*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, 2012. 227

R. Leroux, L. Chatellier et L. David : Spatio-temporal reconstruction of flows around a NACA0012 airfoil using Kalman-filtered POD Galerkin LODS. *In 9th international symposium on particle image velocimetry - PIV11*, Kobe, Japan, 2011. July 21-23. 65

M. Lesieur et O. Métais : New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28(1):45–82, 1996. 7

E. Liberge et A. Hamdouni : Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (POD) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, 26(2):292–311, 2010. ISSN 0889-9746. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974609001352. 183, 184, 186, 247, 248

E. Lombardi : *Low order modelling for flow simulation, estimation and control*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux, 2010. 69

E. N. Lorenz : Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20 (2):130–141, 1963. 146

J. L. Lumley : The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric turbulence and radio wave propagation*, pages 166–178, 1967. 44

Z. Ma, S. Ahuja et C. W. Rowley : Reduced-order models for control of fluids using the eigensystem realization algorithm. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 25(1-4): 233–247, 2011. ISSN 0935-4964. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00162-010-0184-8. 43

O. Marquet, D. Sipp et L. Jacquin : Sensitivity analysis and passive control of cylinder flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 615:221–252, 11 2008. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112008003662. 5

G. Martin : *Modélisation 0D-1D de la chaîne d'air des moteurs à combustion interne dédiée au contrôle*. Thèse de doctorat, Université d'Orléans, 2010. 8

L. Mathelin, M. Abbas-Turki, L. Pastur et H. Abou-Kandil : Closed-loop fluid flow control with a reduced-order model gain-scheduling approach. *In Journée GDR-Contrôle des Décollements*, Poitiers, 2010. December 06-08. 31

R. Maury, M. Koenig, L. Cattafesta III, P. Jordan et J. Delville : Extremum-seeking control of jet noise. *International Journal of Aeroacoustics*, 11(3):459–474, 2012. 5

I. Mezić : Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions. *Nonlinear Dynamics*, 41(1-3):309–325, 2005. 81

I. Mezić : Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 45(1):357–378, 2013. URL http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev-fluid-011212-140652. 80

B. Moore : Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(1):17–32, 1981. 41

G. E. Moore : Cramming more components onto integrated circuits. *Electronics*, 38(8), 1965. 8

M. Morzyński, B. R. Noack et G. Tadmor : Global flow stability analysis and reduced order modeling for bluff-body flow control. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 45:621, 2007. 70, 113

I. M. Navon : Data assimilation for Numerical Weather Prediction : a review. *In Data Assimilation for Atmospheric, Oceanic, and Hydrologic Applications*. Springer Book, 2009. ISBN 978-3-540-71055-4. 65, 142, 164

A. Neumaier et T. Schneider : Estimation of parameters and eigenmodes of multivariate autoregressive models. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 27(1):27–57, 2001. 108

N. C. Nguyen, A. T. Patera et J. Peraire : A 'best points' interpolation method for efficient approximation of parametrized functions. *International journal for numerical methods in engineering*, 73:521–543, 2008. 36

B. R. Noack, K. Afanasiev, M. Morzynski, G. Tadmor et F. Thiele : A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 497:335–363, 11 2003. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112003006694. 35, 197

B. R. Noack et R. K. Niven : Maximum-entropy closure for a Galerkin model of an incompressible periodic wake. *Journal of Fluid Mechanics*, 700:187–213, 5 2012. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112012001255. 59

B. R. Noack, P. Papas et P. A. Monkewitz : The need for a pressure-term representation in empirical Galerkin models of incompressible shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 523:339–365, 0 2005. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112004002149. 38

E. L. Ortiz : The tau method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 6(3):480–492, 1969. 186

N. Papadakis : *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs.* Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 2007. 142, 148

M. Pastoor, L. Henning, B. R. Noack, R. King et G. Tadmor : Feedback shear layer control for bluff body drag reduction. *Journal of Fluid Mechanics*, 608:161–196, 7 2008. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112008002073. 3

N. A. Patankar, P. Singh, D. D. Joseph, R. Glowinski et T. W. Pan : A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 26(9):1509–1524, 2000. 183

A. Placzek : *Construction de modèles d'ordre réduit non-linéaires basés sur la décomposition orthogonale propre pour l'aéroélasticité.* Thèse de doctorat, Conservatoire Nationale des Arts et Métiers, 2009. 181, 182

C. Poussot-Vassal, O. Sename et L. Dugard : Contrôle robuste LPV : Application aux véhicules automobiles. *Actes des 2nd Journées Doctorales Journées Nationales MACS, JD-MACS*, 2007. 31

L. Prandtl : The mechanics of viscous fluids. *In* W. F. Durand, éditeur : *Aerodynamic theory*, volume Vol. III, pages 34–208. Springer, Berlin, 1935. 3

B. Protas, T. R. Bewley et G. Hagen : A computational framework for the regularization of adjoint analysis in multiscale PDE systems. *Journal of Computational Physics*, 195(1):49–89, 2004. 62

B. Protas et W. Liao : Adjoint-based optimization of PDEs in moving domains. *Journal of Computational Physics*, 227(4):2707–2723, 2008. 62, 146

S. S. Ravindran : Optimal boundary feedback flow stabilization by model reduction. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(25):2555–2569, 2007. 25, 228

J.-P. Raymond : Feedback boundary stabilization of the two-dimensional Navier–Stokes equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(3):790–828, mars 2006. ISSN 0363-0129. URL http://dx.doi.org/10.1137/050628726. 234

J.-P. Raymond : Feedback boundary stabilization of the three-dimensional incompressible Navier–Stokes equations. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 87(6):627–669, 2007. 24

D. P. Rizzetta, M. R. Visbal et P. E. Morgan : A high-order compact finite-difference scheme for large-eddy simulation of active flow control. *Progress in Aerospace Sciences*, 44 (6):397–426, 2008. 179

C. Robert, S. Durbiano, E. Blayo, J. Verron, J. Blum et F.-X. Le Dimet : A reduced-order strategy for 4D-Var data assimilation. *Journal of Marine Systems*, 57(1–2):70–82, 2005. 148

K. Roussopoulos et P. A. Monkewitz : Nonlinear modelling of vortex shedding control in cylinder wakes. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 97(1–3):264–273, 1996. ISSN 0167-2789. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167278996001510. 191

C. W. Rowley : Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15(03):997–1013, 2005. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127405012429. 43

C. W. Rowley, T. Colonius et R. M. Murray : Model reduction for compressible flows using POD and Galerkin projection. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 189(1-2):115–129, 2004. ISSN 0167-2789. 35, 45

C. W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter et D. S. Henningson : Spectral analysis of nonlinear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 641:115–127, 11 2009. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112009992059. 85, 89

A. Ruhe : Rational Krylov sequence methods for eigenvalue computation. *Linear Algebra and its Applications*, 58:391–405, 1984. ISSN 0024-3795. 84

D. Ryckelynck : A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366, 2005. ISSN 0021-9991. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910400289X. 39

Y. Saad : *Numerical methods for large eigenvalue problems*, volume 158. SIAM, 1992. 41

F. Sabetghadam et A. Jafarpour : α regularization of the POD-Galerkin dynamical systems of the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Applied Mathematics and Computation*, 218 (10):6012–6026, 2012. ISSN 0096-3003. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300311014299. 62

B. Sarwar, G. Karypis, J. Konstan et J. Riedl : Incremental singular value decomposition algorithms for highly scalable recommender systems. *In Fifth International Conference on Computer and Information Science*, pages 27–28. Citeseer, 2002. 226

T. Sayadi, P. J. Schmid, J. W. Nichols et P. Moin : Reduced-order representation of near-wall structures in the late transitional boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 748:278–301, 6 2014. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112014001840. 227

P. J. Schmid : Nonmodal stability theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 39(1):129–162, 2007. URL http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.fluid.38.050304.092139. 29, 107

P. J. Schmid : Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*, 656:5–28, 7 2010. ISSN 1469-7645. URL http://journals.cambridge.org/article_S0022112010001217. 12, 40, 49, 80, 85, 90, 112

A. Sciacchitano, R. P. Dwight et F. Scarano : Navier–Stokes simulations in gappy PIV data. *Experiments in Fluids*, 53(5):1421–1435, 2012. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00348-012-1366-5. 65, 146

J. A. Sethian : *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge university press, 1999. 184

I. V. Singh et A. Singh : A meshfree solution of tow-dimensional potential flow problems. *World Academy of Science, Engeneering and Technology*, (51), 2009. 187

S. Sirisup et G. E. Karniadakis : A spectral viscosity method for correcting the long-term behavior of POD models. *Journal of Compututational Physics*, 194(1):92–116, février 2004. ISSN 0021-9991. URL http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2003.08.021. 59

D. F. Specht : Probabilistic neural networks. *Neural Networks*, 3(1):109–118, 1990. 8

C. G. Speziale : *A review of Reynolds stress models for turbulent shear flows*. Citeseer, 1995. 8

K. Takaba et T. Katayama : H^2 output feedback control for descriptor systems. *Automatica*, 34(7):841–850, 1998. 24

G. Tissot, L. Cordier et B. R. Noack : Résolution d'un problème d'assimilation variationnelle 4D-VAR par des modèles réduits POD adaptatifs. *In 20ème Congrès Français de Mécanique*, Besançon, 2011. August 28-September 2. 73, 149

G. Tissot, A. Lozano-Durán, J. Jiménez, L. Cordier et B. R. Noack : Granger causality in wall-bounded turbulence. *Journal of Physics : Conference Series*, 506(1):012006, 2014. URL http://stacks.iop.org/1742-6596/506/i=1/a=012006. 227

O. Titaud, A. Vidard, I. Souopgui et F.-X. Le Dimet : Assimilation of image sequences in numerical models. *Tellus A*, 62(1):30–47, 2010. 142

O. Törnblom et A. V. Johansson : A Reynolds stress closure description of separation control with vortex generators in a plane asymmetric diffuser. *Physics of Fluids*, 19(11):115108, 2007. URL http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof2/19/11/10.1063/1.2800877. 179

D. P. Trebotich et P. Colella : A projection method for incompressible viscous flow on moving quadrilateralgrids. *Journal of Computational Physics*, 166(2):191–217, 2001. ISSN 0021-9991. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100966543. 246

L. Trefethen, A. Trefethen, S. Reddy et T. Driscoll : Hydrodynamic stability without eigenvalues. *Science*, 261(5121):578–584, 1993. 29

H. L. Trentelman, A. A. Stoorvogel et M. Hautus : *Control theory for linear systems*. Springer Verlag, 2001. 24

R. S. Tsay : Testing and modeling threshold autoregressive processes. *Journal of the American Statistical Association*, 84(405):231–240, 1989. 130

J. H. Tu, J. Griffin, A. Hart, C. W. Rowley, L. N. Cattafesta III et L. S. Ukeiley : Integration of non-time-resolved PIV and time-resolved velocity point sensors for dynamic estimation of velocity fields. *Experiments in fluids*, 54(2):1–20, 2013a. 82, 227

J. H. Tu, C. W. Rowley, D. M. Luchtenburg, S. L. Brunton et J. N. Kutz : On dynamic mode decomposition : Theory and applications. *submitted to Journal of Computational Dynamics*, 2013b. 108

E. Videcoq, M. Girault et A. Piteau : Thermal control via state feedback using a low order model built from experimental data by the modal identification method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(5-6):1679–1694, 2012. ISSN 0017-9310. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931011006600. 8

F. Waleffe : Hydrodynamic stability and turbulence : beyond transients to a self-sustaining process. *Studies in applied mathematics*, 95(3):319–343, 1995. 227

Z. Wang, I. Akhtar, J. Borggaard et T. Iliescu : Proper orthogonal decomposition closure models for turbulent flows : A numerical comparison. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 237–240(0):10–26, 2012. ISSN 0045-7825. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512001429. 59

J. Weller, E. Lombardi et A. Iollo : Robust model identification of actuated vortex wakes. *Physica D : nonlinear phenomena*, 238(4):416–427, 2009. 63

M. M. Zdravkovich : *Flow Around Circular Cylinders, vol. 1. Fundamentals*. Oxford University Press, 1997. 96

K. Zhou, J. C. Doyle et K. Glover : *Robust and optimal control*, volume 40. Prentice Hall New Jersey, 1996. 30, 42, 215

K. Zhou, G. Salomon et E. Wu : Balanced realization and model reduction for unstable systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 9(3):183–198, 1999. ISSN 1099-1239. URL http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-1239(199903)9:3<183::AID-RNC399>3.0.CO;2-E. 43

Nomenclature

Abréviations

CFL	Nombre de Courant, Friedrichs, Lewy
DMD	Dynamic Mode Decomposition
FSI	Interaction fluide-structure
LES	Large Eddy Simulation
PIV	Particle Image Velocimetry
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RMS	Root Mean Square
ROM	Reduced Order Model

Général

$\boldsymbol{x}$	Espace
$\frac{\partial \cdot}{\partial t}$	Dérivée partielle
Δt	Pas de temps
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
$\langle \cdot \rangle_\Omega$	Moyenne spatiale

$\langle \cdot \rangle_T$, $\bar{\cdot}$ Moyenne temporelle

$\mathbb{C}$ Ensemble des nombres complexes

$\mathbb{R}$ Ensemble des nombres réels

ν_{Kin} Viscosité cinématique

Ω Domaine spatial

D_0 Diamètre du cylindre

N Nombre de réalisations

N_t Nombre de réalisations temporelles

N_x Taille en espace

N_{Gal} Nombre de modes POD conservés

Re Nombre de Reynolds

St Nombre de Strouhal

T Horizon temporel

t Temps

U_∞ Vitesse à l'infini

Indices - exposants - opérateurs

$(\cdot, \cdot)_\Omega$ Produit scalaire spatial

$(\cdot, \cdot)_T$ Produit scalaire temporel

$(\cdot, \cdot)_{\Omega \times T}$ Produit scalaire spatio-temporel

$(\cdot, \cdot)_{H^1}$ Produit scalaire dans H^1

$(\cdot, \cdot)_{L^2}$ Produit scalaire dans L^2

$\boldsymbol{\nabla}$, $\boldsymbol{\Delta}$ Opérateurs gradient et laplacien

$\circ$ Opérateur de composition

$\dot{x}$ Dérivée temporelle de x

$\imath$ Nombre complexe tel que $\imath^2 = -1$

$\arg(\cdot)$ Argument d'un nombre complexe compris dans $]-\pi, \pi]$

$\exp(\cdot)$, $e^{\cdot}$ Exponentielle

$\ln(\cdot)$ Logarithme Népérien

* Adjoint

Contrôle optimal, contrôle linéaire et non-linéaire

α Paramètre de régularisation pénalisant le contrôle

$\boldsymbol{\kappa}$ Perturbations en contrôle $\mathcal{H}_\infty$

$\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\lambda}_e$ Multiplicateurs de Lagrange

$\boldsymbol{c}$ Paramètre de contrôle

$\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}_o$ Erreurs de modélisation et d'observation en contrôle LQG

$\boldsymbol{e}$ Erreur d'estimation en contrôle LQG

$\boldsymbol{z}$ État du système

$\boldsymbol{z}_0$ Condition initiale

$\boldsymbol{z}_{\text{Imp}}$ Réponse impulsionnelle

γ Paramètre indiquant l'amplitude de la pire des perturbations en contrôle $\mathcal{H}_\infty$

$\mathcal{F}$ Contrainte

$\mathcal{J}$ Fonctionnelle coût

$\mathcal{J}_c$ Pénalisation du contrôle

$\mathcal{J}_o$ Objectif pur

$\mathcal{L}$ Lagrangien

ρ Paramètre LPV

E, A, B, C, H Matrices du système linéarisé

F Matrice de l'objectif pur

K, L Gain de feedback et gain de Kalman

R, R_e, Q_e, Q_r Matrices de covariance d'erreurs

X, X_e Matrice variable de l'équation de Riccati généralisée

Réduction de modèle pour le contrôle d'écoulement

$\bar{\boldsymbol{u}}$ Champ moyen de vitesse

$\boldsymbol{\Phi}_j$ Mode j

$\boldsymbol{\Psi}_j$ Fonction test j

$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ Système dynamique réduit, partie non contrôlée et effet du contrôle

$\boldsymbol{u}$, p Champs de vitesse et de pression

$\boldsymbol{u}^b$ Champ de base utilisé pour effectuer une décomposition

$\boldsymbol{u}^{[1,\cdots,N_{\mathrm{Gal}}]}$ Approximation dans le sous-espace de projection

$\boldsymbol{u}^{\mathrm{St}}$, p^{St} Champs stationnaires de vitesse et de pression

$\boldsymbol{V}$ Vecteurs propres de la matrice de corrélation temporelle

γ_L Coefficient de Laplace du gaz parfait

λ_j Valeur propre j

$\mathcal{D}$ Équation aux dérivées partielles

$\mathcal{R}$ Opérateur de corrélation défini en (2.32)

$\mathcal{S}$ Sous-espace de projection

Φ Base réduite

$\widetilde{\boldsymbol{u}}$, $\widetilde{p}$ Perturbations de vitesse et de pression autour du champ stationnaire

A, E Matrices des équations de Navier-Stokes linéarisées pour le calcul des modes globaux

a_j Fonction temporelle j de la décomposition

C Matrice de corrélation temporelle

c Célérité locale du son

M_{ij}, C_i, L_{ij}, Q_{ijk} Coefficients de la projection de Petrov-Galerkin

R^{ij} Tenseur de corrélation spatial en deux points

T, Σ Matrice contenant les modes de *Balanced Truncation* et matrice diagonale contenant les valeurs singulières de Hankel σ_j

u^i, ϕ_j^i Composante i de $\boldsymbol{u}$ ou $\boldsymbol{\Phi}_j$

W_c, W_o Matrices de contrôlabilité et d'observabilité

Amélioration de la précision d'un modèle réduit

$\boldsymbol{a}^P$ Fonctions propres POD temporelles

$\boldsymbol{a}^R$ Coefficients temporels du modèle réduit POD

$\boldsymbol{e}^{(i)}$ Erreur à minimiser lors de la calibration

RIC Contenu d'information relatif

$E(t)$ Énergie cinétique turbulente du modèle réduit

E_0 Énergie cible pour l'ajout d'une contrainte au modèle réduit

H_i Coefficient linéaire de fermeture du modèle réduit (Cazemier *et al.*, 1998)

Robustesse des modèles réduits à la variation d'un paramètre

Δ Rayon de la région de confiance

μ Paramètre pour lequel le modèle doit être robuste

Φ_{Enr} Base enrichie

ρ^{Perf} Performance mesurant la fidélité du modèle réduit

Dynamic Mode Decomposition

Nomenclature

$(\boldsymbol{y}_j, \lambda_j)$ j-ième éléments propres de C_{C}

$(\boldsymbol{y}_j^{\mathrm{SVD}}, \lambda_j^{\mathrm{SVD}})$ Éléments propres j de $\widetilde{S}$

$\boldsymbol{\Phi}_j^{\mathrm{SVD}}$ Mode DMD j issu de l'algorithme SVD

$\boldsymbol{\Psi}_j$ Mode DMD adjoint j

$\boldsymbol{e}_j$ j-ième vecteur unitaire Euclidien de taille $N-1$

$\boldsymbol{g}$ Observable vectoriel

$\boldsymbol{k}_j$ Modes de Koopman j

$\boldsymbol{r}$ Résidu

$\boldsymbol{v}_j$ j-ième réalisation

$\boldsymbol{x}_k$ Etat complet du système à l'instant k

$\mathcal{K}_N(A, \boldsymbol{v}_1)$ Sous-espace de Krylov d'ordre N associé à l'opérateur A et au vecteur $\boldsymbol{v}_1$

$\mathcal{M}$ Espace dans lequel évolue $\boldsymbol{x}_k$

$\nu_{j,k}$ Coefficients temporels DMD

ϕ_j Fonctions propres j de $U_{\boldsymbol{f}}$

σ_j, ω_j Taux de croissance et fréquence associés au j-ième mode DMD

$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_j$ Mode DMD classique j

$\widetilde{C}_{\mathrm{C}}$, $\widetilde{S}$ Approximations de matrices similaires à la matrice Compagnon

$\widetilde{R}$ Matrice de résidus $\widetilde{\boldsymbol{r}}_k$ pour l'algorithme SVD

A Opérateur dynamique

c_j Coefficients de la matrice Compagnon

C_{C} Matrice Compagnon

G Matrice de Gramm de Φ

g Observable scalaire

K Matrice de corrélation des réalisations

M_p, L_p Respectivement matrice de masse associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\Omega$ et sa factorisation de Cholesky

$P_{C_\mathrm{C}^T}$ Polynôme caractéristique de la transposée de C_C

Q, R Décomposition QR de V_1^{N-1}

T Matrice de Vandermonde d'ordre $N-1$ associée à λ_j

U, Σ, W Décomposition SVD de V_1^{N-1}

$U_{\boldsymbol{f}}$ Opérateur de Koopman associé à $\boldsymbol{f}$

V_1^{N-1} Matrice des réalisations

Détermination d'une base réduite basée sur les modes DMD

$\boldsymbol{\Phi}_j^K$ Mode Chronos-Koopman

Γ Fonctionnelle coût de l'optimized DMD

$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_j$ Mode DMD optimisé

$\hat{\lambda}_j$ Valeur propre DMD optimisée

$\hat{\lambda}_j^0$ Condition initiale de la procédure optimized DMD

$\hat{\Phi}$ Base DMD optimisée

$\hat{R}$ Matrice de résidus $\hat{\boldsymbol{r}}_k$ pour l'optimized DMD

λ_j^K Valeur propre de Chronos-Koopman

$\nu_{j,k}$ Coefficient temporel DMD en temps discret

$\widetilde{a}_i$ Approximation DMD des modes POD temporels

E_j Contribution énergétique d'un mode DMD

O_1^{N-1} Matrice des fonctions propres temporelles POD prises comme observable dans la procédure de Chronos-Koopman

Assimilation de données 4D-Var

$\boldsymbol{\eta}$ Perturbation de la condition initiale

$\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ Multiplicateurs de Lagrange

$\boldsymbol{c}$ Coefficients du modèle

$\boldsymbol{w}$ Erreur du modèle

$\boldsymbol{X}$ Etat du système

$\boldsymbol{X}_0$ Condition initiale

$\boldsymbol{Y}$ Observation

$\cdot^a$ Variable analysée

$\cdot^b$ Variable d'ébauche

$\mathbb{H}$ Opérateur d'observation

$\mathbb{M}$ Modèle dynamique

$\mathcal{J}$ Fonctionnelle coût

$\mathcal{L}$ Lagrangien

$\mathcal{N}(0, \sigma)$ Variable aléatoire suivant une loi normale à moyenne nulle d'écart type σ

$\mathcal{R}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{W}$ Matrices de covariance

ψ Variable scalaire de l'équation monodimensionnelle

ψ_{Exact} Solution analytique de l'équation monodimensionnelle

ψ_{Obs} Observation de l'équation monodimensionnelle

σ_o, σ_b Écarts types des termes d'observation et d'ébauche

RIC_{Min} Rapport de contenu énergétique requis pour le modèle réduit

f Terme de forçage

p_1, p_2 Paramètres

Introduction du terme de contrôle dans le modèle dynamique

$(u_{\Omega_s}, v_{\Omega_s})^T$ Composantes de la vitesse du solide considérées comme vitesse cible

$\boldsymbol{B}_i$ Fonction test exprimant la contrainte sous forme faible

$\boldsymbol{F}$ Force volumique

$\boldsymbol{t} = (t_x, t_y)^T$ Vecteur tangent au cylindre

$\boldsymbol{u}^{\text{Cible}}$ Vitesse cible que le modèle doit respecter grâce à la contrainte

$\boldsymbol{u}_f$, p_f Vitesse et pression du fluide

$\boldsymbol{u}_s$, p_s Vitesse et pression du solide

$\cdot_\tau$ Solution issue de la méthode τ

$\cdot_{\text{Cf}}$ Solution issue de la méthode de la fonction de contrôle

$\cdot_{\text{HF}}$ Solution haute-fidélité

$\cdot_{\text{Lagr}}$ Solution issue de la méthode des multiplicateurs de Lagrange

$\cdot_{\text{Pen}}$ Solution issue de la méthode des pénalités

$\mathbb{I}_s$ Fonction caractéristique du solide

$\mathcal{G}$, $\boldsymbol{h}$ Matrice et membre de droite de la contrainte linéaire

$\mathcal{G}_{\text{NL}}$ Contrainte non-linéaire

μ, ν Paramètres de l'équation de Ginzburg-Landau

Ω_f, Ω_s, Ω Domaines fluide, solide et total

c Vitesse de convection de l'équation mono-dimensionnelle

e_g, e_{BC} Erreur globale, erreur à la frontière

V_O^{Snap}, V_O^{c} Vitesse de la paroi du cylindre en oscillation verticale utilisée pour la génération des réalisations et lors du contrôle

V_T^{Snap}, V_T^{c} Vitesse de la paroi du cylindre en rotation utilisée pour la génération des réalisations et lors du contrôle

y_O^{Snap}, y_O^{c} Position verticale de la paroi du cylindre en oscillation verticale utilisée pour la génération des réalisations et lors du contrôle

y_T^{Snap}, y_T^{c} Position verticale de la paroi du cylindre en rotation utilisée pour la génération des réalisations et lors du contrôle

Table des figures

1 Deux irréductibles gaulois devant la figure 4 « Schéma de l'organisation du manuscrit ». D'après *Les 12 travaux d'Astérix*, René Goscinny et Albert Uderzo (1976). i

2 Mot d'excuses. iii

3 Représentation schématique des différentes familles de modèles en fonction du nombre de degrés de libertés et de la précision impliqués. 7

4 Schéma de l'organisation du manuscrit. 13

1.1 Schéma bloc représentant le système contrôlé. 18

1.2 Schéma représentant une minimisation sous contrainte résolue par méthode directe/adjointe dans le cas de la fonction de Rosenbrock. L'axe $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}$ (ligne bleue) symbolise la direction des contraintes. Le gradient selon cet axe est d'abord imposé à 0 : $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\lambda}}\mathcal{L} = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\mathcal{L} = 0$. $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{c}}\mathcal{J}^{(n)}$ est ensuite calculé, puis le paramètre de contrôle est mis à jour selon la direction $\boldsymbol{c}$. La trajectoire (pointillés rouges) de l'ensemble des points respectant la contrainte est ainsi suivie pendant la minimisation. 22

1.3 Schéma représentant la résolution du problème de contrôle optimal pour un système dépendant du temps. 23

1.4 Schéma bloc représentant le système contrôlé avec une étape d'estimation. . . 27

1.5 Schéma bloc représentant le système contrôlé dans un formalisme $\mathcal{H}_\infty$. 29

2.1 Représentation schématique de la POD. Les premiers modes POD $\mathbf{\Phi}_1$ et $\mathbf{\Phi}_2$ sont alignés avec les directions principales d'un ensemble de réalisations définissant $\mathcal{U}$. 47

3.1 Critère RIC dans le cas de données PIV provenant d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre à $Re = 13000$. $N_t = 1000$ réalisations ont été utilisées pour appliquer la *Snapshot POD*. 53

3.2 Schéma d'un modèle réduit représentant correctement la dynamique d'un système. 54

3.3 Énergie du modèle réduit issu de projection de Galerkin sur 40 modes POD (pointillés) comparée à l'énergie déterminée par projection des réalisations originales sur la même base POD (ligne continue). Données provenant d'une simulation de couche de mélange à $Re_{\delta_\omega} = 500$ où δ_ω est l'épaisseur de vorticité (Cordier *et al.*, 2013). 56

3.4 Comparaison de l'énergie décrite par des modèles réduits issus de projection de Galerkin sur 20 modes POD pour différents modèles de fermeture avec l'énergie déterminée par projection des réalisations originales sur la même base POD. DNS : énergie des modes propres temporels POD ; Galerkin : modèle issu de projection de Galerkin sans fermeture ; Cazemier : modèle de fermeture de Cazemier ; Contr. : modèle de fermeture avec contrainte énergétique pour $\alpha_{\text{Pen}} = 10^{-2}$ et $N_{\text{Cut}} = 15$. Données provenant d'une simulation de couche de mélange à $Re_{\delta_\omega} = 500$ où δ_ω est l'épaisseur de vorticité (Cordier *et al.*, 2013). 60

3.5 Comparaison des coefficients temporels POD obtenus par un modèle réduit issu de projection de Galerkin avec les coefficients directement obtenus par POD. Le modèle réduit est développé avec 20 modes POD et repose sur un modèle de fermeture avec contrainte énergétique ($\alpha_{\text{Pen}} = 10^{-2}$ et $N_{\text{Cut}} = 15$). Données provenant d'une simulation de couche de mélange à $Re_{\delta_\omega} = 500$ où δ_ω est l'épaisseur de vorticité (Cordier *et al.*, 2013). 61

4.1 Représentation schématique d'un problème d'optimisation dans l'espace des paramètres de contrôle. —— chemin d'optimisation, conditions initiale □ et terminale ■ du processus d'optimisation, • réalisation utilisée pour la base de données. D'après Bergmann (2004). 69

4.2 Schéma représentatif de l'algorithme à région de confiance. 73

5.1 Évolution de la norme du résidu de la procédure de Gram-Schmidt avec l'indice de la réalisation. 91
5.2 Résultats de la DMD pour l'écoulement autour d'un cylindre. Les 7 modes les plus énergétiques sont représentées par un point bleu. 95
5.3 Vecteurs propres de Ritz 1 et 27. 97
5.4 Vecteur propre de Ritz 79. 98
5.5 Vecteur propre de Ritz 29. 99
5.6 Coefficients temporels des modes DMD 1, 27, 79 et 29. Partie réelle (rouge) et partie imaginaire (bleu). 100
5.7 Reconstructions de la composante longitudinale u et verticale v de $\boldsymbol{v}_5$ avec tous les modes (a) et tous les modes ayant un niveau énergétique supérieur à $0,05$ (b). 101
5.8 Reconstructions de la composante longitudinale u et verticale v de $\boldsymbol{v}_5$ avec les 7 modes les plus énergétiques (a) et les 3 modes les plus énergétiques (b). . . . 102

6.1 Evolution temporelle du coefficient de portance C_z pour la simulation de l'écoulement autour du cylindre à $Re = 200$. En pointillés : fenêtre temporelle utilisée pour les données en régime transitoire. 115
6.2 Représentation des valeurs propres de Ritz dans le plan complexe. 116
6.3 Représentation du taux de croissance σ_j en fonction de la pulsation ω_j. 116
6.4 Représentation du critère énergétique E_j de chaque mode DMD en fonction de la pulsation ω_j. 117
6.5 Sensibilité des valeurs propres DMD à la variation du nombre de Reynolds pour le régime permanent. Les points sont colorés par le logarithme du contenu énergétique du mode associé. La sensibilité est calculée par différences finies (flèches bleues) et via (6.5) (flèches rouges). 119
6.6 Comparaison des valeurs propres DMD obtenues par : l'algorithme classique (λ_j, en bleu), l'optimized DMD ($\hat{\lambda}_j$, en rouge) avec pour condition initiale ($\hat{\lambda}_j^0$, en vert). 120
6.7 Modes optimized DMD 1 et 2 pour les données expérimentales. 122
6.8 Mode optimized DMD 4 pour les données expérimentales. 123
6.9 Reconstructions des composantes longitudinale u (à gauche) et verticale v (à droite) de la réalisation $\boldsymbol{v}_5$ avec 7 modes DMD « classiques » et 7 modes optimized DMD comparés à la réalisation d'origine. 124

6.10 Valeurs propres λ_j^K issues de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman. Pour les données numériques, les paramètres de l'analyse sont $N = 500$ et $N_{\text{Gal}} = 6$, tandis que pour les données expérimentales les paramètres sont $N = 100$ et $N_{\text{Gal}} = 10$. 126

6.11 Amplitudes des modes propres $\mathbf{\Phi}_j^K(i)$ issus de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman. i et j représentent l'indice du mode POD et du mode DMD, respectivement. Pour les données numériques, les paramètres de l'analyse sont $N = 500$ et $N_{\text{Gal}} = 6$, tandis que pour les données expérimentales les paramètres sont $N = 100$ et $N_{\text{Gal}} = 10$. 127

7.1 Comparaisons des fonctions propres temporelles POD (noir) aux prédictions faites par les modes issus de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman (rouge) pour les données numériques en régime permanent. La méthode de Chronos-Koopman est appliquée pour $N_{\text{Gal}} = 6$ et $N = 500$ soit jusqu'au trait vertical pointillé. Les autres réalisations contenues dans la base de données sont utilisées pour tester la prédiction. 131

7.2 Comparaisons des fonctions propres temporelles POD (noir) aux prédictions faites par les modes issus de l'analyse spectrale de Chronos-Koopman (rouge) pour les données expérimentales. La méthode de Chronos-Koopman est appliquée pour $N_{\text{Gal}} = 10$ et $N = 100$ soit jusqu'au trait vertical pointillé. Les autres réalisations contenues dans la base de données sont utilisées pour tester la prédiction. 132

7.3 Comparaisons des coefficients temporels obtenus par DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. La projection des réalisations sur les modes DMD est tracée en noire. Cas des données numériques en régime permanent. 134

7.4 Spectres des coefficients temporels. Sur la colonne de gauche, les coefficients sont obtenus par DMD (en rouge) et comme solutions (en bleu) du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Sur la colonne de droite, les coefficients sont obtenus par POD (en rouge) et comme solutions (en bleu) du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 6 premiers modes POD. Cas des données numériques en régime permanent. 135

7.5 Comparaisons des coefficients temporels obtenus par optimized DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 7 modes optimized DMD déterminés à la section 6.5.4. La projection des réalisations sur les modes DMD est tracée en noire. Cas des données expérimentales. 137

8.1 Représentation schématique de l'assimilation 4D-Var. 142

8.2 Résultat de l'assimilation de données variationnelle (bleu), solution exacte (noir), ébauche (rose) et état observé (rouge). 152

8.3 Résultat de l'assimilation de données variationnelle dans le sous-espace POD (bleu), solution exacte (noir), ébauche (rose) et état observé (rouge). 153

8.4 Résultats issus de l'algorithme adaptatif « classique ». Assimilation de données variationnelle (bleu), solution exacte (noir), ébauche (rose) et état observé (rouge). 156

9.1 Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Des observations parfaites sont considérées. 161

9.2 Résultats d'assimilation 4D-Var en expériences jumelles pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Des observations bruitées sont considérées. 162

9.3 Évolution temporelle de l'erreur pour différentes applications de l'assimilation 4D-Var pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Comparaison entre le cas des observations parfaites et des expériences jumelles. 163

9.4 Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques de l'écoulement de sillage. Le système dynamique est intégré en temps avec les coefficients déterminés par assimilation 4D-Var avec observations parfaites et en imposant $\boldsymbol{\eta} = 0$. 165

9.5 Évolution temporelle de l'erreur commise en intégrant en temps le système dynamique avec les coefficients déterminés par assimilation 4D-Var avec observations parfaites pour $\boldsymbol{\eta} \neq 0$ et $\boldsymbol{\eta} = 0$. Cas des données numériques de l'écoulement de sillage. 165

9.6 Comparaison d'une réalisation de vitesse longitudinale normalisée par la vitesse amont de référence provenant de la base expérimentale avec son approximation réduite sur modes POD. 166

9.7 Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données expérimentales de l'écoulement de sillage. Comparaison entre les résultats obtenus par contrainte dynamique forte (st) et faible (w). L'assimilation 4D-Var est réalisée jusqu'à $t \simeq 15$, la prédiction étant réalisée pour $t \gtrsim 15$ c'est-à-dire au delà de la ligne pointillée verticale. 167

9.8 Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques en régime permanent. Le modèle dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les modes DMD. L'assimilation est effectuée jusqu'au trait vertical pointillé. La projection des réalisations sur la base DMD est représentée en noir, la relation de propagation temporelle en rouge, et les résultats du modèle assimilé en bleu. 170

9.9 Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données expérimentales. Le modèle dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les modes optimized DMD. L'assimilation est effectuée jusqu'au trait vertical pointillé. La projection des réalisations sur la base optimized DMD est représentée en noir, la relation de propagation temporelle en rouge, et les résultats du modèle assimilé en bleu. 172

9.10 Erreur relative instantanée de la projection sur les 7 modes DMD optimisés (noir), de la reconstruction de la dynamique linéaire propagée (rouge) et de la reconstruction de la dynamique analysée par 4D-Var (bleu). La flèche verte représente la baisse de l'erreur quand l'assimilation 4D-Var est utilisée par rapport à la propagation linéaire. La ligne verticale pointillée correspond à la fin de l'horizon temporel d'assimilation et le début de la fenêtre de prédiction. 173

9.11 Comparaison entre les erreurs relatives instantanées de projections et de reconstruction des dynamiques analysées en utilisant soit la base POD, soit la base optimized DMD. 174

10.1 Comparaison pour l'équation de Ginzburg-Landau des solutions obtenues à $t = 35$ par : i) différences finies (solution haute-fidélité, « HF »), ii) un modèle réduit utilisant la méthode de la fonction de contrôle (« Cf »), iii) un modèle réduit contraint par pénalisation (« Pen »), iv) un modèle réduit contraint par la méthode tau (« τ »), v) un modèle réduit contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (« Lagr »). 193

10.2 Evolutions temporelles des erreurs relatives en norme L^2 entre la solution haute-fidélité et les solutions obtenues par : i) un modèle réduit utilisant la méthode de la fonction de contrôle (« Cf »), ii) un modèle réduit contraint par pénalisation (« Pen »), iii) un modèle réduit contraint par la méthode tau (« τ »), iv) un modèle réduit contraint par la méthode des multiplicateurs de Lagrange (« Lagr »). Les erreurs sont normalisées par $\sqrt{\int_0^T \|\psi_{\text{HF}}\|_\Omega^2 \,\mathrm{d}t}$ pour l'erreur globale et $\sqrt{\int_0^T \psi_{\text{HF}}^2(0,t)\,\mathrm{d}t}$ pour l'erreur en $x = 0$. 194

10.3 Représentation schématique de l'écoulement de sillage autour d'un cylindre en rotation. 195

10.4 Vitesse tangentielle à la paroi utilisée pour générer les réalisations nécessaires à l'analyse POD. 196

10.5 Evolutions des coefficients temporels POD obtenus dans le cas du cylindre en rotation. Comparaison des résultats POD avec ceux issus de l'intégration temporelle du modèle réduit contraint par multiplicateurs de Lagrange et par la méthode des pénalités. 197

10.6 Représentation schématique de l'écoulement de sillage autour d'un cylindre en oscillation verticale. 198

10.7 Vitesse d'oscillation verticale (continu) et position verticale (pointillé) du cylindre utilisées pour générer les réalisations nécessaires à l'analyse POD. . . . 199

10.8 Fonctions test pour la contrainte de mouvement du cylindre. 200

10.9 Evolutions des coefficients temporels POD obtenus dans le cas du cylindre en oscillation verticale. Comparaison des résultats POD avec ceux issus de l'intégration temporelle du modèle réduit contraint par multiplicateurs de Lagrange et par la méthode des pénalités. 201

11.1 Gains de feedback et de Kalman déterminés par résolution des problèmes LQR/LQG. « HF » : résolution dans l'espace haute-fidélité ; « POD $N_{\text{Gal}} = 20$ » : résolution par modèle réduit POD pour $N_{\text{Gal}} = 20$; « POD $N_{\text{Gal}} = 10$ » : résolution par modèle réduit POD pour $N_{\text{Gal}} = 10$. 207

11.2 Solutions de l'équation de Ginzburg-Landau à $t \approx 100$ pour différentes lois de contrôle. Comparaisons de solutions provenant du modèle haute-fidélité et du modèle réduit POD associé. « HF BO » : modèle haute-fidélité non contrôlé ; « HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par le gain de feedback évalué en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-ROM LQR » : modèle réduit POD contrôlé par le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD ; « POD-HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD. 207

11.3 Evolution temporelle du critère de performance $\mathcal{J}^{\text{Perf}}$. Nous comparons des solutions provenant du modèle haute-fidélité et du modèle réduit POD associé, ainsi que des solutions provenant de la résolution de problèmes LQR et LQG. « HF BO » : modèle haute-fidélité non contrôlé ; « HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQR avec le gain de feedback évalué en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-ROM LQR » : modèle réduit POD contrôlé par LQR avec le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD ; « POD-HF LQR » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQR avec le gain de feedback évalué avec le modèle réduit POD ; « HF noise 0.01 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,01$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-HF noise 0.01 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,01$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle réduit POD ; « HF noise 0.1 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,1$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle haute-fidélité ; « POD-HF noise 0.1 LQG » : modèle haute-fidélité contrôlé par LQG ($\sigma_o = \sigma_m = 0,1$) avec les gains de feedback et de Kalman évalués en utilisant le modèle réduit POD. 209

11.4 Gains de feedback LQR pour le cylindre en rotation. 211

11.5 Critère de performance et vitesse tangentielle de la paroi du cylindre obtenus par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR) pour le cas du cylindre en rotation. 212

11.6 Isovaleurs de vorticité du cylindre contrôlé en rotation par la loi déterminée par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR). Les valeurs négatives sont représentées en traits pointillés et les valeurs positives en traits continus. 213

11.7 Gains de feedback sous-optimal pour le cylindre en oscillation verticale. 216

11.8 Critère de performance, position et vitesse d'oscillation verticale du cylindre obtenus par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR) pour le cas du cylindre en oscillation verticale. 217
11.9 Isovaleurs de vorticité du cylindre contrôlé en oscillation verticale par la loi déterminée par contrôle linéaire en boucle fermée (LQR). Les valeurs négatives sont représentées en traits pointillés et les valeurs positives en traits continus. 218

B.1 Comparaisons des coefficients temporels obtenus par DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 9 modes DMD sélectionnés à la section 6.5.2. Cas des données numériques en régime transitoire. 242
B.2 Résultats d'assimilation 4D-Var pour les données numériques en régime transitoire. Le modèle dynamique est déterminé par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes sur les modes DMD. La DMD a été effectuée sur l'horizon temporel $T = [0, 25]$, tandis que l'assimilation est effectuée sur l'horizon temporel $T = [0, 60]$ (traits verticaux pointillés). La projection des réalisations sur la base DMD est représentée en noir, la relation de propagation temporelle en rouge, et les résultats du modèle assimilé en bleu. 243
B.3 Comparaisons des coefficients temporels obtenus par optimized DMD (en rouge) avec ceux (en bleu) solutions du modèle réduit construit par projection de Galerkin sur les 9 modes optimized DMD déterminés à la section 6.5.4. Cas des données numériques en régime transitoire. 244

Liste des tableaux

8.1 Performances des différentes méthodes d'assimilation de données considérées. . 156

Résumé

Le contrôle d'écoulements turbulents est un enjeu majeur en aérodynamique. Cependant, la présence d'un grand nombre de degrés de libertés et d'une dynamique complexe rend délicat la modélisation dynamique de ces écoulements qui est pourtant nécessaire à la conception d'un contrôle efficace. Au cours de cette thèse, différentes directions ont été suivies afin de développer des modèles réduits dans des configurations réalistes d'écoulements et d'utiliser ces modèles pour le contrôle. Premièrement, la décomposition en modes dynamiques (DMD), et certaines de ses variantes, ont été exploitées en tant que base réduite afin d'extraire au mieux le comportement dynamique de l'écoulement. Par la suite, nous nous sommes intéressés à l'assimilation de données 4D-Var qui permet de combiner des informations inhomogènes provenant d'un modèle dynamique, d'observations et de connaissances *a priori* du système. Nous avons ainsi élaboré des modèles réduits POD et DMD d'un écoulement turbulent autour d'un cylindre à partir de données expérimentales PIV. Finalement, nous avons considéré le contrôle d'écoulement dans un contexte d'interaction fluide/structure. Après avoir montré que les mouvements de solides immergés dans le fluide pouvaient être représentés comme une contrainte supplémentaire dans le modèle réduit, nous avons stabilisé un écoulement de sillage de cylindre par oscillation verticale.

Mots clefs : Contrôle d'écoulement, réduction de modèle, décomposition en modes dynamiques, assimilation de données 4D-Var, interaction fluide-structure.

Summary

Control of turbulent flows is still today a challenge in aerodynamics. Indeed, the presence of a high number of active degrees of freedom and of a complex dynamics leads to the need of strong modelling efforts for an efficient control design. During this PhD, various directions have been followed in order to develop reduced-order models of flows in realistic situations and to use it for control. First, dynamic mode decomposition (DMD), and some of its variants, have been exploited as reduced basis for extracting at best the dynamical behaviour of the flow. Thereafter, we were interested in 4D-variational data assimilation which combines inhomogeneous informations coming from a dynamical model, observations and an *a priori* knowledge of the system. POD and DMD reduced-order models of a turbulent cylinder wake flow have been successfully derived using data assimilation of PIV measurements. Finally, we considered flow control in a fluid-structure interaction context. After showing that the immersed body motion can be represented as an additional constraint in the reduced-order model, we stabilized a cylinder wake flow by vertical oscillations.

Key words: Flow control, reduced-order modelling, dynamic mode decomposition, 4D-Var data assimilation, fluid-structure interaction.