



MÉMOIRE DE STAGE

Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Poitiers.

Présenté par

Clément Chesseboeuf

Dans le cadre du Master
Mathématiques Fondamentales et Appliquées.

– Sujet :

Recalage d'images médicales.

– Maîtres de stage :

Mme Hermine BIERMÉ,
M. Julien DAMBRINE.

Résumé

Dans ce document, nous présentons le stage que nous avons effectué au laboratoire de Mathématiques et Application de l'Université de Poitiers dans le cadre de la dernière année du Master IMMT-MFA. Notre attention se porte sur des problèmes d'imagerie médicale. Ce mémoire retrace le parcours que nous avons suivi.

Table des matières

1	Introduction, problèmes et objectifs	3
1.1	Introduction	3
1.2	Définition du problème.	3
2	Recueil de notions mathématiques en lien avec le problème.	5
2.1	Notations	5
2.2	Espaces de Sobolev	6
2.3	Espaces de Hilbert à noyau reproduisant.	10
2.4	RKHS invariant par translation et représentation spectrale.	12
2.5	Interprétation avec l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$	15
3	Modélisations des déformations élastiques.	17
3.1	Lemmes de contrôles	19
3.2	Continuité de l'application flot.	20
3.3	Groupe des déformations élastiques.	26
3.4	Définition Hilbertienne du problème d'appariement.	28
4	Utilisation des espaces de Hilbert à noyau reproduisant.	30
4.1	RKHS de champs de vecteurs.	30
4.2	Etude des noyaux, invariance par transformation rigide.	32
4.3	Principe de réduction.	33
5	Construction du terme d'attache aux données .	37
5.1	Norme de RKHS sur l'espace $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$	37
5.2	Appariement de mesures.	39
5.3	Consistance	39
6	Conclusion	42
7	Remerciements	42
8	Annexe	43

1 Introduction, problèmes et objectifs

1.1 Introduction

Lors de ce stage, effectué sous la direction de Mme Hermine Biermé et M. Julien Dambrine, nous nous sommes intéressés à des thèmes d'imagerie issus de la radiologie. Plus particulièrement, nous avons étudié le problème du recalage d'images médicales que nous pouvons résumer de la manière suivante : Nous disposons de deux images O_1 et O_2 (scanner, IRM...) représentant le cerveau d'un patient X . Ces images peuvent différer de différentes manières, par exemple, elles peuvent avoir été acquises à des temps différents ou selon des modalités différentes. Nous faisons l'hypothèse que O_1 et O_2 sont liées par une tranformation mathématique. L'objectif est alors de rechercher cette transformation par calcul numérique.

Un tel problème, si nous voulons le résoudre mathématiquement, nécessite de définir correctement les objets d'études que sont, les images d'une part, les transformations d'autre part. C'est là toute la difficulté, car si nous pouvons répondre assez rapidement à la question "qu'est-ce qu'une image?", la plupart des définitions ne se prêtent pas à la résolution mathématiques du problème. Dans la plupart des cas nous utilisons des moyens détournés. Par exemple, partant d'une image donnée, nous pouvons extraire un ensemble de courbes ou de points (segmentation) et utiliser ces courbes comme matière première. Nous pouvons également envisager les choses de manière différentes et travailler directement sur les histogrammes couleurs des images (critère de Woods [5]). La plupart des techniques que nous avons rencontrées s'appliquent bien à des cas particuliers. Cependant, nous aimerions une méthode qui soit à la fois solide d'un point de vue mathématiques et applicable à une multitude de situations.

Nous avons trouver cette méthode dans les travaux de M.Joan Alexis Glaunès, Maître de Conférence à l'Université Paris Descartes. La majeure partie du stage a donc été consacrée à la lecture et à la compréhension des travaux rapportés dans la thèse de M.Glaunès [1] :

"Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique."

L'un des objectifs de ce mémoire est de faire ressortir l'ingéniosité de la méthode, en présentant et en démontrant les points clefs. Nous consacrons aussi une section à l'étude des notions mathématiques utilisées (RKHS, espaces de Sobolev). Le lecteur qui souhaite en savoir plus sur ce sujet est invité à se rapporter à la thèse [1]. Il va sans dire que nous remercions l'auteur de ce texte et lui témoignons toute notre admiration pour les travaux effectués.

Commençons par définir le problème tel qu'il est envisagé dans [1].

1.2 Définition du problème.

La méthode que nous allons présentée, bien qu'adaptée à nos problèmes d'imagerie, s'inscrit dans le cadre plus vaste de **l'appariement d'objets géométriques par l'intermédiaire de difféomorphismes** (transformations élastiques).

Pour O_1 et O_2 deux objets (points, images, courbes ...), nous souhaitons modéliser les tranformations qui nous permettent de passer de O_1 à O_2 . Par la suite, nous allons disposer d'un groupe de difféomorphismes de $\mathbb{R}^d$ modélisant ces déformations. Nous introduirons une distance d_V sur ce groupe, qui va nous renseigner sur l'effort à fournir pour telle ou telle tranformation. En résumé, nous allons suivre la feuille de route suivante :

- Construire un espace mathématiques E contenant les objets d'étude.
- Construire un espace $\mathcal{A}_V$ contenant l'ensemble des déformations admissibles, section 3.

- Construire une action $(\Phi, O) \rightarrow \Phi \cdot O$ de $\mathcal{A}_v$ sur les objets, section 5.
- Construire une distance d_E sur E , mesurant la similarité entre les objets, section 5.

Nous posons alors $A(\phi_1^v) = d_E(\phi_1^v \cdot 0_1, 0_2)$ et on cherche à minimiser sur $\mathcal{A}_V$ la fonctionnelle suivante :

$$J(\Phi) = \lambda d_v(id, \Phi) + A(\phi) \quad (pA).$$

Cette suite d'instructions, bien que sous-jacente à toutes les constructions qui vont suivre, ne sera pas entièrement respectée. Dans la pratique, nous allons opérer une multitude de réductions qui vont nous amener à un problème de minimisation dans un espace de Hilbert. La qualité de la méthode réside dans cette opération : nous transformons un problème vaguement défini (pA) , en un problème bien posé. Qui plus est, nous obtenons un problème hilbertien, son étude est donc assez agréable. A titre informatif, voici le véritable problème d'optimisation que nous allons obtenir :

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|^2 dt + A(\Phi_1^v) \quad v \in V \quad (PA).$$

Nous savons que ces problèmes se prêtent bien à une résolution numérique. Ce caractère sera renforcé par l'utilisation des espaces de Hilbert à noyau reproduisant (RKHS), section 4.

2 Recueil de notions mathématiques en lien avec le problème.

Cette section contient une partie des définitions, propositions..., qu'il est nécessaire de connaître pour aborder la suite de ce mémoire. Nous y avons inclus une description sommaire de certains espaces de Sobolev, l'introduction des RKHS, une utilisation de l'intéressant théorème de Bochner.

2.1 Notations

- Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on dit que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ est un multi-indice de taille d . On utilisera la notation : $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.
- Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ alors $\mathbf{x}^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$.
- Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice avec $|\alpha| \leq p$. Alors on note $D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}} u$.
- L'espace $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ est l'espace des applications continues de $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ qui s'annule à l'infini. C'est un espace de Banach pour la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Si $m = 1$ on le notera simplement $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.
- Nous notons $\mathcal{C}_0^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$, l'espace des applications $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^p$ telles que f , ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p , s'annulent à l'infini. C'est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{p,\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ |f(x)| + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq p} |D^\alpha f(x)| \right\} \quad (1)$$

où les α sont des multi-indices de $\mathbb{N}^d$.

- Nous utiliserons souvent la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à valeurs complexes :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\xi \cdot \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2)$$

Cette opération est linéaire, envoie L^1 sur l'espace des applications continues s'annulant à l'infini. Elle sera parfois notée $\mathcal{F}$.

- Nous rencontrerons aussi la transformation de Fourier L^2 , notée également $\widehat{f}$ et pour laquelle il n'existe pas toujours de formule explicite. Dans tous les cas, si $\widehat{f}$ est intégrable, on pourra écrire la formule d'inversion "explicite" :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\xi \cdot \mathbf{x}) \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad (3)$$

opération que nous noterons parfois $\mathcal{F}^{-1}$.

Nous définissons maintenant des espaces qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire.

Définition 1. (Espace de Hilbert admissible) Nous dirons qu'un espace de Hilbert $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle_V)$ de champs de vecteurs $(\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d)$ est admissible, s'il s'injecte continûment dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,\infty})$. Si c'est le cas, il existe une constante positive C_V telle que :

$$\|v\|_{1,\infty} \leq C_V \|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

2.2 Espaces de Sobolev

Nous trouvons des exemples d'espaces de Hilbert admissibles parmi les espaces de Sobolev. Ces espaces, mélangeant des propriétés de régularité et d'intégrabilité, sont appréciés de ceux qui s'intéressent aux équations aux dérivées partielles. Nous allons donner quelques résultats, parmi les plus connus, concernant ces espaces. Ils nous seront utiles dans la suite du document.

En effet, à chaque fois que nous aurons besoin d'exemples précis, nous allons utiliser un espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$. Nous commençons par donner la définition classique des espaces de Sobolev, puis nous donnons une autre définition (par la transformée de Fourier) qui nous permet de démontrer nos résultats plus facilement.

Remarque 1. Les fonctions que nous allons considérer sont définies sur $\mathbb{R}^d$ tout entier et pas sur Ω , un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. Cette propriété simplifie nettement la théorie.

Définition 2. L'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$ est défini de la manière suivante :

$$H^1(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^d), 1 \leq i \leq d \right\}. \quad (4)$$

Les dérivées sont à prendre au sens des distributions. Nous munissons cette espace de la norme

$$\|u\|_{H^1} = \left(\sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^d} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad (5)$$

qui est issue du produit scalaire

$$\langle u | v \rangle_{H^1} = \sum_{i=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Nous pouvons augmenter la régularité de l'espace en exigeant que les dérivées partielles d'ordre supérieur soient également dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d), |\alpha| \leq m \right\}. \quad (7)$$

la norme naturelle est alors :

$$\|u\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

issue du produit scalaire :

$$\langle u | v \rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha u(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (9)$$

Ces espaces sont tous des espaces de Hilbert, nous admettons ce résultat.

Comme les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^d$ et comme les espaces de Sobolev mélangent régularité et intégrabilité, la transformée de Fourier est un outil adapté à leur étude. Nous allons voir que nous pouvons définir les espaces de Sobolev en utilisant cette transformée.

Proposition 1. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, l'espace $H^m(\mathbb{R}^d)$ peut aussi être défini de la manière suivante :

$$H^m(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}. \quad (10)$$

On le munit d'une norme équivalente à celle donnée par la formule 8

$$\|u\|_{H^m} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (11)$$

En fait, avec cette méthode, nous pouvons définir $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel s , ce sont les espaces de Sobolev fractionnaires. Pour démontrer que ces deux définitions sont équivalentes, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 1. Pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ et tout $m \in \mathbb{N}$, il existe deux constantes positives $C_1(m, d)$ et $C_2(m, d)$ telles que :

$$\begin{aligned} C_1(m, d)(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^m &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq m} \left(\prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} \right) \\ &\leq C_2(m, d)(1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^m \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par rappeler une inégalité de convexité valable pour tout $1 \leq p, q \leq \infty$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$

$$(|x_1|^p + \dots + |x_d|^p)^{1/p} \leq d^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})} (|x_1|^q + \dots + |x_d|^q)^{1/q}. \quad (12)$$

Nous utilisons une première fois cette inégalité avec $\mathbf{x} = (1, \xi_1^2, \dots, \xi_d^2)$, $p = 1, q = m$ et nous obtenons :

$$(d+1)^{1-m} (1 + \xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^m \leq 1 + \xi_1^{2m} + \dots + \xi_d^{2m} \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d : |\alpha| \leq m} \left(\prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} \right).$$

Ainsi, la constante $C_1(m, d) = (d+1)^{1-m}$ convient. Pour l'autre inégalité, nous introduisons

$$|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2)^{1/2}$$

et $\tilde{\xi}_k = \frac{\xi_k}{|\xi|}$. Il faut alors montrer que le quotient :

$$\frac{\sum_{\alpha: |\alpha| \leq m} |\xi|^{2(|\alpha| - m)} \left(\prod_{i=1}^d |\tilde{\xi}_i|^{2\alpha_i} \right)}{|\xi|^{-2m} + (|\tilde{\xi}_1|^{2m} + \dots + |\tilde{\xi}_d|^{2m})},$$

est borné pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$. Si $|\xi| \leq 1$ il est borné. Si $|\xi| > 1$, nous remarquons que

$$(|\tilde{\xi}_1|^{2m} + \dots + |\tilde{\xi}_d|^{2m}) \geq d^{1-m} (|\tilde{\xi}_1|^2 + \dots + |\tilde{\xi}_d|^2)^m = d^{1-m}.$$

Ainsi, le quotient est majoré par la constante $d^{m-1} \left(\sum_{\alpha: |\alpha| \leq m} 1 \right)$. □

Passons maintenant à la démonstration de la proposition 1.

Démonstration. Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $|\alpha| \leq m$. Alors le théorème de Plancherel nous assure que $\mathcal{F}(D^\alpha u) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. D'autre part, au sens des distributions, on a toujours $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}$ et donc $i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nous utilisons alors l'égalité de Parseval et le lemme précédent pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u(x)|^2 dx &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq C_1(m, d) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Considérons maintenant $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tel que $(1 + |\xi|^2)^{m/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Toujours d'après le lemme, $\prod_{i=1}^d |\xi_i|^{\alpha_i} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq m$. En utilisant à nouveau le lemme, le fait que $\mathcal{F}(D^\alpha u) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{u}$ et la formule de Parseval, on obtient :

$$\begin{aligned} C_2(m, d) \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi &\geq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{i=1}^d |\xi_i|^{2\alpha_i} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. $\square$

La proposition suivante (ou plutôt sa démonstration) illustre le fait que la transformée de Fourier est très utile pour l'étude des espaces de Sobolev.

Proposition 2. *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Nous rappelons les injections suivantes :

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow[\text{continue}]{i} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow[\text{continue}]{i} H^s(\mathbb{R}^d).$$

En outre, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, il suffit donc de montrer le résultat pour $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut trouver une suite $(\varphi_n)_n$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers $(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}$ pour la norme L^2 . Par définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, les fonctions $\psi_n := (1 + |\xi|^2)^{-s/2} \varphi_n$ sont encore dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Comme la transformée de Fourier est un homéomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, nous pouvons trouver une suite $(u_n)_n$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{u_n} = \psi_n$ pour tout n . On a alors :

$$\|u_n - u\|_{H^s} \leq C \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} (\widehat{u_n} - \widehat{u})\|_{L^2} = C \|\varphi_n - (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{u}\|_{L^2},$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. $\square$

Nous donnons maintenant un théorème d'injection qui nous dit que les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$ pour s assez grand, forment une classe d'espaces de Hilbert admissibles.

Théorème 1. (de Morrey) *Si s est tel que $s > \frac{d}{2} + k$ alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $(\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{k, \infty})$.*

Démonstration. Nous commençons par faire la démonstration pour $k = 0$. Il s'agit de montrer que pour $s > d/2$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. Soit $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, alors, en utilisant Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{s/2} |\widehat{u}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{-s/2} d\xi \\ &\leq \|u\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées polaires $(r, \sigma) \in [0, +\infty[\times S_{d-1}$, si nous notons $d\Gamma$ la mesure surfacique de la sphère nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} = \int_{S_{d-1}} \int_0^{+\infty} \frac{r^{d-1} dr d\Gamma}{(1 + r^2)^s} < \infty,$$

car $s > d/2$, donc $2s - (d - 1) > 1$. La transformée de Fourier définit donc une application linéaire continue de $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{H^s})$ dans $(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^1})$. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, nous la prolongeons continûment à $H^s(\mathbb{R}^d)$ tout entier. Or, on sait que si $\widehat{u} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors une version de u est donnée par :

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\mathbf{x} \cdot \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Ceci entraîne déjà que toute fonction de $H^s(\mathbb{R}^d)$ admet une version continue car :

$$|u(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\exp(i(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \cdot \xi) - \exp(i\mathbf{x} \cdot \xi)| |\widehat{u}(\xi)| d\xi,$$

et par convergence dominée, le terme de droite tend vers 0 quand $\mathbf{h}$ tend vers 0. D'autre part, en réutilisant les formules précédentes, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$:

$$|u(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{u}(\xi)| d\xi \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\xi}{(1 + |\xi|^2)^s} \right)^{1/2} \|u\|_{H^s}.$$

Ce qui prouve que $\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{H^s}$. Il reste à démontrer la propriété d'annulation à l'infini. Or, comme $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, pour tout $\epsilon > 0$ nous trouvons une fonction u_ϵ telle que

$$\|u_\epsilon - u\|_\infty \leq C\|u_\epsilon - u\|_{H^s} \leq \epsilon,$$

si nous prenons $\mathbf{x}$ de norme assez grande pour vérifier $\mathbf{x} \notin \text{supp}(u_\epsilon)$ on a alors $|u(\mathbf{x})| \leq \epsilon$ et donc $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$. Nous avons donc démontré la proposition pour $k = 0$. Pour le cas général, il faut remarquer que :

$$u \in H^s(\mathbb{R}^d) \implies D^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^d),$$

et que $s - |\alpha| > d/2$, si $|\alpha| \leq k$. □

Avec ce théorème, nous avons montré tout ce dont nous avons besoin pour la suite.

2.3 Espaces de Hilbert à noyau reproduisant.

Commençons cette section par une définition :

Définition 3. (RKHS) Soit S un ensemble quelconque. Un espace de Hilbert à noyau reproduisant sur S est un espace V , constitué de fonctions $S \rightarrow \mathbb{R}$, muni d'une structure hilbertienne $\langle \cdot | \cdot \rangle_V$ et dont le dual topologique contient toutes les fonctionnelles d'évaluation δ_x pour $x \in S$.

Comme nous allons le constater dans la suite, La notion de RKHS est omniprésente dans ce mémoire. Cependant, nous allons utiliser ces espaces dans le cadre de champs de vecteurs $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ce qui nous amènera à introduire de nombreuses notations. L'objectif de cette section est d'introduire les RKHS dans le cadre simplifié des fonctions à valeurs scalaire.

Remarque 2. Dans la définition que nous venons de donner, nous aurions pu dire que $(V, \|\cdot\|_V)$ s'injecte continûment dans l'espace $\mathbb{R}^S$ muni de la topologie de la convergence simple. Nous remarquons alors que si deux fonctions sont proches dans V elle sont également proche "point par point".

Si $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle_V)$ est un RKHS sur S , alors il est caractérisé par une fonction $k_V : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$. En effet, l'isomorphisme du théorème de Riesz-Fréchet nous dit que pour tout $x \in S$ il existe une fonction $k_x \in V$ telle que pour tout $f \in V$,

$$\langle k_x | f \rangle_V = f(x).$$

Nous posons $k_V(x, \cdot) = k_x$ et k_V est appelé le noyau reproduisant de V . Ce noyau vérifie plusieurs propriétés intéressantes :

- Proposition 3.**
- i) k_V est unique.
 - ii) Il est symétrique : $k_V(x, y) = k_V(y, x)$, $\forall x, y \in S$.
 - iii) $\sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j k_V(x_i, x_j) \geq 0$, où les x_i sont dans S et les λ_i sont des scalaires.
 - iv) (Reproduction) $\langle k_V(x, \cdot) | k_V(y, \cdot) \rangle_V = k_V(x, y)$.

Le point iii) nous dit que si k_V est de la forme $k_V(x, y) = k(y - x)$ pour une certaine fonction $k : S \rightarrow \mathbb{R}$, alors k est une fonction de type positif, c'est pourquoi nous dirons parfois que k_V est un noyau de type positif. Le théorème qui vient est pratique et se démontre rapidement.

Théorème 2. Soit V un RKHS et k_V son noyau, alors l'espace vectoriel $V_0 = \text{Vect}\{k_V(x, \cdot) \mid x \in S\}$ est dense dans V .

Démonstration. V étant un espace de Hilbert, il suffit de montrer que l'orthogonal de l'espace vectoriel V_0 est réduit à 0. Or, si $h \in V_0^\perp$ et si nous utilisons la propriété de reproduction, il est clair que h est la fonction nulle. $\square$

Enfin, nous terminons par un théorème très important pour la suite.

Théorème 3. Soit $k_V : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, de type positif. Alors il existe un unique RKHS dont k_V est le noyau reproduisant.

Démonstration. Soit $V_0 = \text{Vect}\{k_V(x, \cdot) \mid x \in S\}$. Nous définissons une opération bilinéaire et symétrique sur V_0 en posant

$$\langle k_V(x, \cdot) | k_V(y, \cdot) \rangle_{V_0} = k_V(x, y) \quad \forall x, y \in S, \quad (13)$$

et en propageant cette expression à V_0 par linéarité. Cette expression définit bien un produit scalaire. La propriété de séparabilité vient du fait que pour tout $f \in V_0$ et $x \in S$ on a $f(x) = \langle k_V(x, \cdot) | f \rangle_{V_0}$. Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons $|f(x)| \leq \sqrt{k(x, x)} \|f\|_{V_0}$. Par conséquent,

$$\langle f | f \rangle_{V_0} = 0 \implies f = 0.$$

Ainsi, V_0 muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien dont nous allons réaliser la complétion fonctionnelle.

Nous notons $\mathcal{C}_{V_0}$ l'espace vectoriel des suites de Cauchy de $(V_0, \|\cdot\|_{V_0})$. Si $\mathbf{f} = (f_n)_n$ est dans $\mathcal{C}_{V_0}$ on sait que $(\|f_n\|_{V_0})_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle est convergente. Nous introduisons une notation pour sa limite :

$$q(\mathbf{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{V_0} < \infty.$$

La fonctionnelle q définit une semi-norme sur $\mathcal{C}_{V_0}$. Nous allons donc travailler avec le séparé de $\mathcal{C}_{V_0}$ pour cette semi-norme. Soit $\mathcal{C}_{V_0}^0$ le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}_{V_0}$ défini par :

$$\mathcal{C}_{V_0}^0 = \{\mathbf{f} \in \mathcal{C}_{V_0} \mid q(\mathbf{f}) = 0\}.$$

Nous définissons l'espace vectoriel quotient $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}} = \mathcal{C}_{V_0} / \mathcal{C}_{V_0}^0$. Avec ce quotient, deux suites de Cauchy $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont dans une même classe d'équivalence si leur différence tend vers 0. Sur cette espace, q définit une norme et nous admettons qu'on a construit un espace de Banach. De plus, nous avons une injection canonique de V_0 dans $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$. En effet, pour $f \in V_0$, on représente f dans $\mathcal{C}_{V_0}$ par la suite constante $\mathbf{f} = (f, f, f, \dots)$ et nous prenons $\hat{\mathbf{f}}$, la classe d'équivalence de cette suite dans $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$ (ie : la classe des suites qui tendent vers f). Ainsi, l'application

$$i : (V_0, \|\cdot\|_{V_0}) \rightarrow (\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}, q),$$

qui à f associe $\hat{\mathbf{f}}$ définit est une injection isométrique de V_0 dans $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$. De plus, cette injection est dense. En effet, soit $\hat{\mathbf{u}} \in \widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$, on prend $\mathbf{f} = (f_n)_n$ dans la classe d'équivalence de $\hat{\mathbf{u}}$. Nous définissons une suite dans $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$ en posant $\mathbf{f}_n = i(f_n)$ (ie : pour tout n , $\mathbf{f}_n$ est la classe d'équivalence de la suite constante égale à f_n). Par définition de q , nous obtenons le résultat car :

$$\begin{aligned} q(\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f}_n) &= q((u_p)_p - f_n) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \|u_p - f_n\|_{V_0}, \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Nous définissons maintenant un produit scalaire sur $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$. Pour $\hat{\mathbf{f}}$ et $\hat{\mathbf{g}}$ dans $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$, on prend des représentants $\hat{f} = (f_n)_n \in \hat{\mathbf{f}}$ et $\hat{g} = (g_n)_n \in \hat{\mathbf{g}}$ et on pose :

$$\langle \hat{\mathbf{g}} | \hat{\mathbf{f}} \rangle_{\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n | g_n \rangle_{V_0}. \quad (14)$$

Nous devons vérifier que c'est bien défini. Comme $\mathbb{R}$ est complet, il suffit de montrer que $u_n = \langle f_n | g_n \rangle_{V_0}$ est de Cauchy, or

$$\begin{aligned} |\langle f_{n+p} | g_{n+p} \rangle_{V_0} - \langle f_n | g_n \rangle_{V_0}| &= |\langle f_{n+p} | g_{n+p} \rangle_{V_0} - \langle f_{n+p} | g_n \rangle_{V_0} + \langle f_{n+p} | g_n \rangle_{V_0} - \langle f_n | g_n \rangle_{V_0}| \\ &\leq |\langle f_{n+p} | g_{n+p} - g_n \rangle_{V_0}| + |\langle f_{n+p} - f_n | g_n \rangle_{V_0}|, \end{aligned}$$

ce qui nous donne la conclusion avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De la même manière, nous pouvons montrer que le produit scalaire défini par (14) ne dépend pas du choix des représentants. Enfin, remarquons que la norme définie sur $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$ est issue du produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}}$, l'espace vectoriel $(\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}})$ est donc un espace de Hilbert.

Nous montrons maintenant que $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$ s'identifie à un espace de fonctions qui contient V_0 . Dans un premier temps, il faut remarquer que toute suite de Cauchy dans V_0 converge simplement. En effet, si $\mathbf{f} = (f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans V_0 on a toujours :

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \sqrt{k_V(x, x)} \|f_m - f_n\|_{V_0}.$$

Ainsi on peut noter l_f la limite simple de $\mathbf{f} = (f_n)_n$. Toujours avec la même méthode, on vérifie que deux suites de Cauchy dans une même classe d'équivalence ont la même limite simple. Réciproquement, nous devons montrer que deux suites de Cauchy ayant la même limite simple sont dans la même classe d'équivalence. Pour cela, il suffit de montrer que si (f_n) est une suite de Cauchy dans V_0 qui converge simplement vers 0, alors elle tend vers 0 dans V_0 . Remarquons qu'une telle suite converge faiblement vers 0 dans V_0 car toutes les formes linéaires sont des combinaisons linéaires d'évaluations ponctuelles dans V_0 . Ensuite, comme $(f_n)_n$ est de Cauchy, on a pour $\epsilon > 0$:

$$\|f_n\|_{V_0}^2 - 2 \langle f_p, f_n \rangle_{V_0} \leq \|f_p - f_n\|_{V_0}^2 \leq \epsilon.$$

De plus, par convergence faible, $\langle f_p | f_n \rangle_{V_0}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi, $(f_n)_n$ tend vers 0 dans V_0 .

En conclusion, si on pose V l'ensemble des limites simples de suites de Cauchy de V_0 , alors on peut voir V comme une représentation fonctionnelle de l'espace de Hilbert $(\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}})$. Il est clair que V_0 est dans V (en particulier tout les $k_V(x, \cdot)$). Enfin, utilisons le produit scalaire de $\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}$ pour définir un produit scalaire sur V , prenons $f \in V$, et $x \in S$. f correspond à une unique classe de suite de Cauchy $\hat{\mathbf{f}}$ dont les éléments convergent simplement vers f , alors :

$$\langle f | k_V(x, \cdot) \rangle_V = \langle \hat{\mathbf{f}} | k_V(x, \cdot) \rangle_{\widehat{\mathcal{C}_{V_0}}} = \lim \langle f_n | k_V(x, \cdot) \rangle_{V_0} = \lim f_n(x) = f(x).$$

V est donc une RKHS de noyau k_V . Dorénavant, nous utiliserons toujours la représentation V .

Montrons l'unicité. Si $\tilde{V}$ est un autre RKHS de noyau k_V . Comme $\tilde{V}$ contient tous les $k_V(x, \cdot)$, il contient V_0 . De plus, les produits scalaires de V et $\tilde{V}$ coïncident de V_0 . Une suite de Cauchy dans V_0 a même limite dans V et $\tilde{V}$ car la suite converge aussi simplement. Par conséquent, V est un sous-espace fermé de $\tilde{V}$. Soit $f \in \tilde{V}$, orthogonal à V , alors f est orthogonal à tous les $k_V(x, \cdot)$ donc f est nulle et nous avons le résultat. $\square$

Remarque 3. Pour construire un RKHS, il suffit donc de choisir un noyau symétrique, de type positif. De plus, pour obtenir un tel noyau, il nous suffit de considérer une fonction (réelle) k de type positif et de poser $k_V(x, y) = k(y - x)$. Nous utiliserons très souvent cette construction, nous souhaitons alors en savoir davantage sur le résultat obtenu. Sous certaines hypothèses, Le théorème de Bochner nous permet d'obtenir une caractérisation agréable de l'espace V .

2.4 RKHS invariant par translation et représentation spectrale.

Ici, nous nous plaçons dans le cas où $S = \mathbb{R}^d$ pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $k_V(x, y) = k(y - x)$ pour une certaine fonction k de type positif. Dans ce cas, nous pouvons mettre à profit le théorème de Bochner. Ce théorème, utilisé dans plusieurs branches des mathématiques, caractérise les fonctions de type positif comme transformées de Fourier de certaines mesures.

Théorème 4. (Bochner) Soit $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, alors k est de type positif si et seulement si il existe une mesure borélienne positive et bornée μ telle que $k = \hat{\mu}$. C'est-à-dire :

$$k(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(ix \cdot \xi) d\mu(\xi), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (15)$$

De plus, si k est continue en 0 et $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ alors la mesure μ admet $\hat{k}/(2\pi)^d$ pour densité :

$$k(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(ix \cdot \xi) \hat{k}(\xi) d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (16)$$

Avant de démontrer ce résultat, nous rappelons quelques propriétés des fonctions de type positif :

Proposition 4. Soient $k, \varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de type positif. Alors :

- i) Elles sont positives en 0.
- ii) Elles sont bornées (par leur valeur en 0).
- iii) Leur produit est une fonction de type positif.
- iv) Soient f et g deux fonctions à valeurs complexes, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(y)} k(x-y) dx dy \geq 0 \quad \text{dès que c'est défini.}$$

Rappelons aussi que pour $\sigma > 0$, la fonction gaussienne $h_\sigma(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^d} \exp(-\frac{\|x\|_2^2}{2\sigma^2})$ est une unité approchée de $\mathbb{R}^d$. De plus, nous obtenons une unité approchée de $\mathbb{R}^{2d}$ en prenant $h_\sigma(x)h_\sigma(y)$.

Démonstration. Commençons par le cas où k est dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Nous savons que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(y)} k(x-y) dx dy \quad (17)$$

est définie et prend une valeur positive. Or, si on utilise la convolution et l'identité de Parseval avec $g = f$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{f(y)} k(x-y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{k * f(x)} f(x) dx, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{k * f}(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{k}(\xi)} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(\xi) |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est donc toujours positive, pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Considérons maintenant la fonction h_σ défini plus haut. Nous savons que $\sqrt{h_\sigma} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que la transformée de Fourier est une bijection sur cet espace. Par conséquent, pour tout $\sigma > 0$ nous trouvons une fonction $g_\sigma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g_\sigma} = \sqrt{h_\sigma}$. En reprenant nos calculs avec $f = g_\sigma$ on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(\xi) h_\sigma(\xi) d\xi \geq 0, \quad \forall \sigma > 0.$$

Comme h_σ est une unité approchée et comme $\widehat{k}$ est continue bornée, alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(\xi) h_\sigma(\xi) d\xi = h_\sigma * \widehat{k}(0) \rightarrow \widehat{k}(0), \quad \text{quand } \sigma \rightarrow 0,$$

et donc $\hat{k}(0) \geq 0$. Nous remarquons maintenant que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, la fonction $\exp(-i \langle t | \cdot \rangle)k$ est aussi de type positif et L^1 . Nous avons donc encore $\mathcal{F}(\exp(-i \langle t | \cdot \rangle)k)(0) = \hat{k}(t) \geq 0$. Ainsi, pour toute fonction k de type positif et L^1 alors $\hat{k}$ est positive. Reste à montrer que $\hat{k}$ est intégrable et on aura terminé pour le cas L^1 .

Remarquons que pour

$$h_\sigma(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^d} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{2\sigma^2}\right),$$

alors

$$\widehat{h_\sigma}(\xi) = \exp\left(-\frac{\sigma^2\|\xi\|_2^2}{2}\right).$$

Donc $|\widehat{h_\sigma}(\xi)|^2$ tend vers 1 quand σ tend vers 0 et uniformément sur tout compact. On a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k(x-y)h_\sigma(x)h_\sigma(y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(\xi)|\widehat{h_\sigma}(\xi)|^2 d\xi.$$

Si nous faisons tendre σ vers 0, le terme de gauche tend vers $k(0)$ car $h_\sigma(x)h_\sigma(y)$ est une unité approchée. Le terme de droite tend vers $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(\xi)d\xi$ par convergence monotone. Ainsi, $\widehat{k}$ est intégrable, elle a donc toutes les propriétés d'une densité et k est bien la transformée de Fourier de la mesure correspondant à $\widehat{k}$.

Si k n'est pas intégrable, Nous allons montrer que k est limite simple d'une suite de fonctions qui sont des transformées de Fourier de mesure positive bornée. Comme k est supposée continue en 0, nous pourrions alors conclure avec le théorème de Levy. Il suffit de prendre les fonctions $\widehat{h_\sigma}k$. En effet, cette fonction est de type positif en tant que produit de deux fonctions de type positif. De plus, $\widehat{h_\sigma}k$ est intégrable comme produit d'une fonction intégrable et d'une fonction bornée. Ainsi, avec ce que nous avons démontré précédemment, pour tout $\sigma > 0$, $\widehat{h_\sigma}k = \widehat{\mu_\sigma}$ où μ_σ est une mesure positive bornée. Finalement, comme $\widehat{h_\sigma}k$ converge simplement vers k (continue en 0), le théorème de Levy nous donne la conclusion. $\square$

Nous retiendrons du théorème de Bochner que si k est de type positif, intégrable et continue en 0, alors $\widehat{k}$ est une densité et k est la transformée de Fourier de la mesure associée à $\widehat{k}$.

Ajoutons une hypothèse supplémentaire au théorème de Bochner. Nous supposons toujours que k est de type positif, intégrable et continue en 0 et si on exige en plus que $\widehat{k}$ soit strictement positive. Nous introduisons un nouvel espace de Hilbert qui est un espace L^2 à poids.

Définition 4. Soit μ la mesure définie par $d\mu(\xi) = \frac{d\xi}{(2\pi)^d \widehat{k}(\xi)}$. Alors on définit un espace de Hilbert, en considérant $L^2(\mu) := L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}, \mu)$.

Sous ces hypothèses, la proposition suivante décrit l'espace $L^2(\mu)$ comme une "représentation spectrale" du RKHS associé à k .

Proposition 5. Si k est une fonction de type positif, continue en 0 et intégrable. Si de plus, $\widehat{k}$ est strictement positive. Alors le RKHS V associé au noyau $k_V(x, y) = k(y - x)$ est de la forme :

$$V = \left\{ f \in L^2 \mid \|f\|_V^2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \widehat{k}(\xi)^{-1} d\xi < \infty \right\}. \quad (18)$$

En résumé, la transformée de Fourier est une isométrie entre V et $L^2(\mu)$. Avant de démontrer cette proposition, nous pouvons déjà faire plusieurs remarques.

Proposition 6. *Les éléments de V sont bien des fonctions.*

Démonstration. En effet, les éléments de $L^2(\mu)$ sont dans $L^2 \cap L^1$. Pour le voir, on remarque que $\widehat{k} \in L^2(\mu)$ car elle est positive et intégrable (Bochner). Ainsi, si $f \in L^2(\mu)$, on a

$$\|f\|_{L^1} = \left\langle f \mid \widehat{k} \right\rangle_{L^2(\mu)} < \infty,$$

et donc $f \in L^1$. De plus, $\widehat{k}$ est bornée par une certaine constante positive c . Donc, $\frac{1}{\widehat{k}} \geq \frac{1}{c}$. Ce qui implique :

$$\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 \widehat{k}(\xi)^{-1} d\xi < \infty.$$

Finalement, $L^2(\mu) \subset L^1 \cap L^2$ et si $f \in V$ alors $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})$ où $\mathcal{F}^{-1}$ coïncide avec la formule d'inversion "explicite". □

Remarque 4. *On peut aussi remarquer que l'information qui nous est donnée par la norme $\|f\|_V$ fait intervenir l'inverse de $\widehat{k}$. Nous savons que cette fonction décroît d'autant plus vite que k est régulière. Ainsi, si nous prenons k très régulière, la norme $\|f\|_V$ va pénaliser toute les fonctions f qui ne le sont pas suffisamment.*

Passons à la preuve de cette proposition.

Démonstration. $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert car isométrique à $L^2(\mu)$, et nous avons vu que ses éléments peuvent être considérés comme des fonctions. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, les $k_V(x, \cdot) = k(\cdot - x)$ sont dans V . En effet, comme $\mathcal{F}(k(\cdot - x))(\xi) = \exp(ix \cdot \xi) \widehat{k}(\xi)$:

$$\|k(\cdot - x)\|_V = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(\xi) d\xi < \infty.$$

De plus, pour tout $f \in V$ on a

$$\begin{aligned} \langle f \mid k(x, \cdot) \rangle_V &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \exp(ix \cdot \xi) \widehat{k}(\xi) \widehat{k}(\xi)^{-1} d\xi, \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) \exp(ix \cdot \xi) d\xi, \\ &= f(x), \end{aligned}$$

en utilisant le théorème d'inversion. C'est donc l'unique RKHS de noyau k_V . □

2.5 Interprétation avec l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$

Considérons l'espace de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$. Comme nous l'avons vu, cet espace s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. En particulier, c'est un RKHS. Rappelons la description "spectrale" de cet espace :

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\},$$

avec la norme :

$$\|u\|_{H^1} := \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Cette définition est du même type que celle que nous venons de voir. Ainsi, $H^1(\mathbb{R})$ est un RKHS de noyau $\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{(1+|\xi|^2)} \right)$. Nous pouvons en fait donner une autre interprétation du noyau de $H^1(\mathbb{R})$, comme fonction de Green de l'opérateur $-\Delta + Id$. En effet, comme H^1 est un RKHS, pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe $k(x, \cdot) \in H^1$ tel que $\langle k(x, \cdot) | g \rangle_{H^1} = g(x)$ pour tout $g \in H^1$. Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $k(x, \cdot)$ est l'unique solution (au sens des distributions) de l'équation $(-\Delta + Id)f = \delta_x$ dans H^1 . En effet, soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $\langle k(x, \cdot) | \varphi \rangle_{H^1} = \varphi(x)$ et

$$\begin{aligned} \langle k(x, \cdot) | \varphi \rangle_{H^1} &= \langle k(x, \cdot) | \varphi \rangle_{L^2} + \left\langle k(x, \cdot)' | \varphi' \right\rangle_{L^2} \\ &= \langle k(x, \cdot) | \varphi \rangle_{L^2} - \left\langle k(x, \cdot)'' | \varphi' \right\rangle_{L^2} \\ &= \langle (-\Delta + Id)k(x, \cdot) | \varphi \rangle_{L^2} = \varphi(x). \end{aligned}$$

L'unicité découle de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$.

Comme le produit scalaire sur H^1 est invariant par translation, les $k(x, \cdot)$ sont du type $\tilde{k}(\cdot - x)$ pour une certaine fonction $\tilde{k}$. De plus, nous venons de voir que $\tilde{k}$ est solution de $(-\Delta + Id)f = \delta_0$. Maintenant, si on utilise la transformée de Fourier sur les distributions tempérées on a :

$$\mathcal{F}((-\Delta + Id)f) = (1 + \xi^2)\hat{f}$$

et $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$. Nous retrouvons que $\tilde{k}$ est la transformée de Fourier inverse de $\frac{1}{(1+\xi^2)}$.

3 Modélisations des déformations élastiques.

La création du groupe de difféomorphismes $\mathcal{A}_V$, modélisant les transformations admissibles (section 1.2), va passer par l'utilisation d'un théorème du type Cauchy-Lipschitz. Dans la suite, nous considérons un espace de Hilbert admissible $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle_V)$. Comme nous l'avons déjà vue, V peut être identifier à un espace de Sobolev. Les éléments de V sont assez réguliers pour la variable $x \in \mathbb{R}^d$. Nous ajoutons une variable temporelle en exigeant cette fois-ci un minimum de régularité :

Définition 5. On définit l'espace $L_V^1 = L^1([0, 1], V)$ qui contient les classes d'équivalence de fonctions $t \rightarrow v_t$ de $[0, 1]$ dans V telles que

$$\|v\|_{L_V^1} = \int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty.$$

Nous définissons L_V^2 de la même manière mais en mettant un carré dans l'intégrale et une racine à l'extérieur. Remarquons que L_V^1 est un espace de Banach et que L_V^2 est un espace de Hilbert. De plus, $\|v\|_{L_V^1} \leq \|v\|_{L_V^2}$.

Nous pouvons maintenant commencer notre construction. Elle repose sur le théorème suivant.

Théorème 5. Soit $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t, \cdot)$ est lipschitzienne de rapport $K_t > 0$ avec $\int_0^1 K_t dt < \infty$. De plus, on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ telle que $\int_0^1 |f(t, x_0)| dt < \infty$. Alors, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique application $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ solution de l'équation intégrale

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(r, y(r)) dr. \quad (19)$$

Donnons une démonstration de ce théorème. Cela va nous permettre de mieux comprendre les propriétés des objets obtenus.

Démonstration. Pour $0 < s < t < 1$, considérons l'espace de fonction $\mathcal{C}_{st} = \mathcal{C}([s, t], \mathbb{R}^d)$ que nous munissons la norme de la convergence uniforme, afin d'obtenir un espace de Banach. Pour $y \in \mathbb{R}^d$, $\gamma \in \mathcal{C}_{st}$ et $u \in [s, t]$, nous définissons une nouvelle fonction $T_y \gamma$ de la manière suivante :

$$T_y \gamma(u) = y + \int_s^u f(r, \gamma(r)) dr.$$

$T_y \gamma$ est bien définie car d'après nos hypothèses :

$$\int_s^u |f(r, \gamma(r))| dr \leq \int_s^u |f(r, \gamma(r)) - f(r, x_0)| + |f(r, x_0)| dr \leq (\|\gamma\|_\infty + |x_0|) \int_s^u K_r dr + \int_s^u |f(r, x_0)| dr < \infty.$$

De la même manière on obtient que $|T_y \gamma(u_1) - T_y \gamma(u_2)| \leq (\|\gamma\|_\infty + |x_0|) \int_{u_1}^{u_2} K_r dr + \int_{u_1}^{u_2} |f(r, x_0)| dr$ quantité qui tend vers 0 quand u_2 tend vers u_1 . Ainsi, $T_y \gamma$ est une application continue et pour tout $y \in \mathbb{R}^d$ on a trouvé une application $T_y : \mathcal{C}_{st} \rightarrow \mathcal{C}_{st}$. Reste à montrer qu'on peut choisir s et t assez proche pour que T_y soit contractante. Nous pourrions alors utiliser le théorème du point fixe entre espace métrique complets. Pour γ et $\eta \in \mathcal{C}_{st}$ on a l'inégalité suivante :

$$\|T_y \gamma - T_y \eta\|_\infty \leq \int_s^t |f(r, \gamma(r)) - f(r, \eta(r))| dr \leq \|\gamma - \eta\|_\infty \int_s^t K_r dr.$$

Ainsi, T_y est lipschitzienne de rapport $\int_s^t K_r dr$ et on peut trouver $\delta > 0$ tel que cette quantité soit strictement inférieure à 1 pour $|s - t| \leq \delta$. De plus, ce choix peut être fait indépendamment de $y \in \mathbb{R}^d$.

Par conséquent, pour tout $0 < s < t < 1$ tels que $|s - t| \leq \delta$ alors pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, T_y est une application contractante de $\mathcal{C}_{st}$ dans $\mathcal{C}_{st}$, elle admet donc un unique point fixe. Ensuite, l'unicité étant établi sur de petits segments, on découpe l'intervalle $[0, 1]$ en segments de tailles strictement inférieures à δ . Partant d'une condition initiale au temps 0, nous pouvons construire de proche en proche une solution à l'équation 19. $\square$

Plusieurs remarques à propos de ce théorème :

Si nous faisons varier la condition initiale y dans $\mathbb{R}^d$, alors pour tout temps $t \in [0, 1]$ nous obtenons une fonction de la variable spatiale que nous allons noter $y(t, \cdot)$ ou encore y_t . Nous allons voir que $y(t, \cdot)$ est régulière par rapport à cette variable. Autre fait remarquable, ces applications sont inversibles. En effet, il faut remarquer que le théorème 5 peut être démontré dans l'autre sens (on n'impose plus une condition initiale mais une condition finale). Pour cela, nous travaillons toujours avec les espaces $\mathcal{C}_{st} = \mathcal{C}([s, t], \mathbb{R}^d)$ mais nous utilisons plutôt les applications $\tilde{T}_y : \mathcal{C}_{st} \rightarrow \mathcal{C}_{st}$ définies par

$$\tilde{T}_y \gamma(u) = y + \int_u^t f(r, \gamma(r)) dr \quad u \in [s, t]$$

Nous montrons de la même manière qu'elles sont contractantes pour t à proximité de s . De proche en proche, on construit une courbe sur tout l'intervalle $[0, 1]$ en fixant cette fois la condition au temps $t = 1$. Finalement, Nous pouvons construire une solution unique, quel que soit le temps ou la condition est fixée. C'est-à-dire que pour tout couple $(s, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^d$ il existe un unique élément de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^d)$ solution de l'équation

$$y(t) = x + \int_s^t f(r, y(r)) dr, \quad t \in [0, 1]. \quad (20)$$

Nous notons cette solution $y_t^s(x)$ (sa valeur au temps t). Si nous réalisons la composition $y_t^s \circ y_s(x)$, nous obtenons la valeur au temps t de l'unique courbe qui vaut $y_s(x)$ au temps s . Par unicité, c'est forcément $y_t(x)$ et donc $y_t^s \circ y_s = y_t$. Par suite, $y_0^s \circ y_s = Id$.

Nous pouvons illustrer rapidement le fait que les courbes ne se coupent pas. En effets, si la fonction f est donnée par un système linéaire du type : $f(t, x) = A_t x + B_t$ où $A_t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $B_t \in \mathbb{R}^d$ alors la conclusion du théorème est valable dès que $\int_0^1 |A_t| + |B_t| dt < \infty$. Nous disposons donc de beaucoup d'exemples.

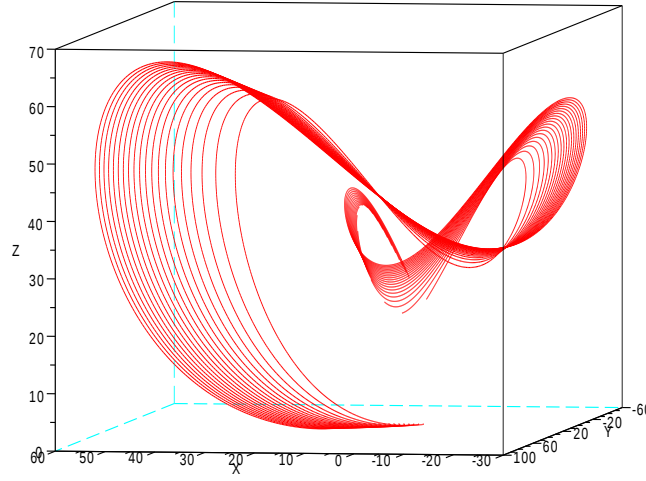


FIGURE 1 – Illustration du principe d'unicité, avec un système du type "attracteur de Lorentz".

Pour voir le script permettant d'obtenir cette figure, le lecteur peut se reporter à l'annexe A.

Maintenant, nous allons voir que ce résultat est toujours valable si l'on prend f dans un espace de Hilbert admissible.

Théorème 6. Soit $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle_V)$ un espace de Hilbert admissible, alors pour tout $v \in L_V^1$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique application continue $t \rightarrow \Phi_t^v(x)$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^d$, solution de l'équation intégrale :

$$\Phi_t^v(x) = x + \int_0^t v_r \circ (\Phi_r^v(x)) dr.$$

De plus, l'application $x \rightarrow \Phi_t^v(x)$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ est un homéomorphisme.

En effet, si v appartient à L_V^1 alors pour tout $t \in [0, 1]$, v_t est un élément de V . Comme V s'injecte continûment dans $(\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{1,\infty})$, on peut prendre $\|v_t\|_{1,\infty}$ pour jouer le rôle de K_t . De plus, $\|v_t\|_{1,\infty} \leq \|v_t\|_V$ et $\int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty$ par définition. Nous avons donc rempli toutes les conditions. Le fait que les applications soient inversibles découle de la discussion précédente.

Nous réalisons maintenant l'analyse des objets que nous venons de générer par cette méthode. Dans un premier temps, le lemme de Gronwall nous permet d'obtenir trois types de contrôles (en temps, en espace, et vis-à-vis des champs de vecteurs). Ensuite, nous allons étudier les propriétés de l'application "flot" qui à un élément v de L_V^1 associe une famille d'homéomorphismes $(\Phi_t^v)_{t \in [0,1]}$. Finalement, nous montrons que tous ces homéomorphismes sont des difféomorphismes de classe C^1 .

3.1 Lemmes de contrôles

Commençons par rappeler le lemme de Gronwall, dont les applications vont survenir à une fréquence remarquable.

Lemme 2. Soient f et g deux fonctions positives mesurables définies sur $[0, 1]$. Soit $c > 0$ une constante. On suppose que pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$f(t) \leq c + \int_0^t f(s)g(s)ds.$$

Alors,

$$f(t) \leq c \exp \left(\int_0^t g(s)ds \right).$$

Grâce à ce lemme nous obtenons les contrôles suivants :

Lemme 3. (Contrôle en temps) Pour tout $v \in L_V^1$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $0 \leq s < t \leq 1$:

$$|\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| \leq \int_s^t \|v_r\|_\infty dr.$$

Lemme 4. (Contrôle en espace) Pour tout $v \in L_V^1$, $t \in [0, 1]$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$|\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| \leq |x - y| \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds \right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} |\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| &\leq |x - y| + \int_0^t |v_s(\phi_s^v(x)) - v_s(\phi_s^v(y))| ds, \\ &\leq |x - y| + \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |\phi_s^v(x) - \phi_s^v(y)| ds. \end{aligned}$$

Il reste donc à appliquer le lemme de Gronwall. □

Lemme 5. (Contrôle vis-à-vis du champ) Pour tout $u, v \in L_V^1$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in [0, 1]$, on a

$$|\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| \leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds \right). \quad (21)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} |\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^v(x)) ds \right|, \\ &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| + \int_0^t |v_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^v(x))| ds, \\ &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| + \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |\phi_s^u(x) - \phi_s^v(x)| ds. \end{aligned}$$

et nous appliquons encore le lemme de Gronwall. □

3.2 Continuité de l'application flot.

D'un point de vue intuitif, nous allons rechercher une "bonne" transformation parmi l'ensemble des homéomorphismes dont nous disposons. Dans la pratique, nous travaillons plutôt sur l'espace des champs V . Il est donc primordial que l'application qui lie ces deux ensembles possède de bonnes propriétés. La fonctionnelle en question est l'application flot, qui à un élément de L_V^1 associe la famille d'homéomorphismes $(\Phi_t^v)_{t \in [0,1]}$ (qui sont en fait différentiables). Dans un premier temps, nous allons décrire plus précisément son espace d'arrivée, mettre une métrique sur cet espace, et démontrer un résultat de continuité vis-à-vis de cette métrique. Plus tard, nous montrerons un résultat plus fort de faible continuité vis-à-vis de la norme L_V^2 .

Définition 6. On appelle $\mathcal{A}_{id}$ l'espace des homéomorphismes ϕ de $\mathbb{R}^d$ tels que $\phi - id$ soit borné. Nous munissons cet espace de la métrique suivante :

$$d(\phi, \psi) = \|\phi - \psi\|_\infty + \|\phi^{-1} - \psi^{-1}\|_\infty.$$

Proposition 7. $(\mathcal{A}_{id}, d)$ est un espace métrique complet.

Démonstration. Remarquons que pour tout $\phi \in \mathcal{A}_{id}$ alors $\phi - id \in (\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$ qui est un espace de Banach.

Soit (ϕ_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{A}_{id}$ et $\epsilon > 0$. Par définition de la métrique d on a :

$$\|(\phi_n - id) - (\phi_m - id)\|_\infty = \|\phi_n - \phi_m\|_\infty \leq \epsilon$$

pour m et n assez grands. Alors, $(\phi_n - id)_n$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. Par conséquent, il existe $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\phi_n - id)_n = \phi, \quad \text{pour la norme de la convergence uniforme.}$$

Par simple réécriture, nous obtenons que (ϕ_n) converge uniformément vers $\tilde{\phi} = \phi + id$ qui est une application continue et dont la différence avec l'identité est bornée.

De la même manière, nous obtenons que (ϕ_n^{-1}) converge uniformément vers un élément $\tilde{\psi}$ vérifiant les mêmes propriétés. Reste à montrer que $(\tilde{\phi})^{-1} = \tilde{\psi}$ pour pouvoir affirmer que $\tilde{\phi} \in \mathcal{A}_{id}$ et que (ϕ_n) converge vers $\tilde{\phi}$ pour la métrique d . Or, par convergence uniforme, nous savons que $\phi_n \circ \phi_n^{-1}(x) = x$ converge vers $\tilde{\phi} \circ \tilde{\psi}(x)$. Donc $(\tilde{\phi})^{-1} = \tilde{\psi}$ ce qui achève la démonstration. $\square$

Finalement, nous introduisons l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathcal{A}_{id})$ des applications continues $t \rightarrow \phi_t$ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{A}_{id}$ que nous munissons de sa métrique naturelle :

$$D(\phi, \psi) = \sup_{t \in [0, 1]} d(\phi_t, \psi_t).$$

$(\mathcal{C}([0, 1], \mathcal{A}_{id}), D)$ est alors un espace complet.

Proposition 8. L'application $\Phi : v \rightarrow (\phi_t^v)_{t \in [0, 1]}$ est continue de L_V^1 dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathcal{A}_{id})$, lipschitzienne sur toutes parties bornées. De plus, comme L_V^2 s'injecte continûment dans L_V^1 le résultat est valable pour $\Phi : L_V^2 \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{A}_{id})$.

Démonstration. Nous rappelons le lemme de contrôle vis-à-vis du champ :

$$\begin{aligned} |\phi_t^u(x) - \phi_t^v(x)| &\leq \left| \int_0^t u_s(\phi_s^u(x)) - v_s(\phi_s^u(x)) ds \right| \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_\infty ds \right) \\ &\leq \int_0^t \|u_s - v_s\|_\infty ds \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_\infty ds \right). \end{aligned}$$

De plus, on a toujours l'hypothèse d'injection continue ($\|u_s\|_\infty \leq \|u_s\|_{1,\infty} \leq C_V \|u_s\|_V$). Par conséquent, $\phi_t^u - \phi_t^v$ est borné et satisfait :

$$\|\phi_t^u - \phi_t^v\|_\infty \leq C_V \|u - v\|_{L_V^1} \exp \left(C_V \|v\|_{L_V^1} \right).$$

Pour les applications inverses, nous faisons la même chose avec les champs $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ où $\tilde{u}$ est défini par

$$\tilde{u}_s = \begin{cases} -u_{t-s} & \text{si } s \leq t, \\ 0 & \text{si } s > t. \end{cases}$$

En effet, on vérifie par identification que nous avons $\phi_s^{\tilde{u}}(\phi_t^u(x)) = \phi_{t-s}^u(x)$ si $s \leq t$, avec en particulier $\phi_t^{\tilde{u}}(\phi_t^u(x)) = \phi_0^u(x) = x$. Pour cela, on pose $y(s) = \phi_{t-s}^u(x)$ (défini sur $[0, t]$) et nous essayons de retrouver l'équation de $\phi_s^{\tilde{u}}(\phi_t^u(x))$. Pour $s \in [0, t]$:

$$\begin{aligned} y(s) = \phi_{t-s}^u(x) &= x + \int_0^{t-s} u(r, \phi_r^u(x)) dr, \\ &= x + \int_0^t u(r, \phi_r^u(x)) dr - \int_{t-s}^t u(r, \phi_r^u(x)) dr, \\ &= \phi_t^u(x) + \int_{t-s}^t \tilde{u}(t-r, y(t-r)) dr, \\ &= \phi_t^u(x) + \int_0^s \tilde{u}(r, y(r)) dr. \end{aligned}$$

C'est l'équation de $\phi_s^{\tilde{u}}(\phi_t^u(x))$. Par unicité, pour $s \in [0, t]$ nous avons l'égalité $\phi_s^{\tilde{u}}(\phi_t^u(x)) = \phi_{t-s}^u(x)$ et $\tilde{u}$ est un champs qui nous permet d'obtenir l'inverse au temps t . De plus, étant donnée la forme de $\tilde{u}$, nous avons la majoration $\|\tilde{u}\|_{L_V^1} \leq \|u\|_{L_V^1}$. Remarquons que le champs $\tilde{v}$ a les mêmes propriétés que $\tilde{u}$. Par conséquent, on obtient la même majoration pour les inverses

$$\begin{aligned} \|(\phi_t^u)^{-1} - (\phi_t^v)^{-1}\|_\infty &= \|\phi_t^{\tilde{u}} - \phi_t^{\tilde{v}}\|_\infty, \\ &\leq C_V \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L_V^1} \exp(C_V \|\tilde{v}\|_{L_V^1}), \\ &\leq C_V \|u - v\|_{L_V^1} \exp(C_V \|v\|_{L_V^1}). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\|\phi_t^u - \phi_t^v\|_\infty + \|(\phi_t^u)^{-1} - (\phi_t^v)^{-1}\|_\infty \leq 2C_V \|u - v\|_{L_V^1} \exp(C_V \|v\|_{L_V^1}). \quad (22)$$

En prenant $u = 0$, les applications $\phi_t^v - Id$ sont bornées pour tout $v \in L_V^1$, ce sont donc des éléments de $\mathcal{A}_{id}$ pour tout $t \in [0, 1]$. De plus, le lemme de contrôle en temps nous donne :

$$\|\phi_t^v - \phi_s^v\|_\infty \leq C_V \int_s^t \|v_r\|_V, \quad (23)$$

et cette quantité tend vers 0 quand t tend vers s . Nous obtenons le même résultat pour $\|(\phi_t^v)^{-1} - (\phi_s^v)^{-1}\|_\infty$. L'application $t \rightarrow \phi_t^v$ de $[0, 1]$ dans $\mathcal{A}_{id}$ est donc continue. Ainsi, Φ est à valeurs dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathcal{A}_{id})$. Enfin, l'inégalité (22) nous dit qu'elle est lipschitzienne sur toutes parties bornées de L_V^1 . $\square$

Nous terminons la description de l'ensemble des transformations admissibles en démontrant qu'il s'agit bien de difféomorphismes.

Théorème 7. *Pour tout $v \in L_V^1$ et tous $t \in [0, 1]$, ϕ_t^v est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'application $t \rightarrow d_x \phi_t^v$ (où $d_x \phi_t^v$ est la différentielle de ϕ_t^v au point $x \in \mathbb{R}^d$) est une application continue, solution de l'équation intégrale :*

$$d_x \phi_t^v = Id + \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \circ d_x \phi_s^v ds. \quad (24)$$

En outre, il existe deux constantes c_1 et $\tilde{c}_1 > 0$, telles que pour tout $v \in L_V^1$,

$$\sup_{t \in [0,1]} \|d\phi_t^v\|_\infty \leq c_1 \exp\left(\tilde{c}_1 \|v\|_{L_V^1}\right). \quad (25)$$

$\|d\phi_t^v\|_\infty$ est le sup, sur tous les $x \in \mathbb{R}^d$, de la norme d'opérateur $\|d_x \phi_t^v\|_{\mathcal{L}}$.

Démonstration. Soit $x, \alpha \in \mathbb{R}^d$, avec $|\alpha| \leq 1$, considérons l'équation :

$$y(t) = \alpha + \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot y(s) ds. \quad (26)$$

Nous montrons que cette équation admet une solution unique, puis nous allons essayer d'identifier cette solution à $d_x \phi_t^v \cdot \alpha$. Ici, la fonction est linéaire en espace (ie $f(s, z) = A_s z$ avec $A_s = d_{\phi_s^v(x)} v_s$), il suffit donc de vérifier la condition d'intégrabilité. Or, V étant un espace de Hilbert admissible, nous avons cette condition car $\int_0^1 |d_{\phi_s^v(x)} v_s| dt \leq C_V \int_0^1 \|v_t\|_V dt < \infty$. L'équation 26 admet donc une unique solution. De plus, comme $|\alpha| \leq 1$, on a :

$$|y(t)| \leq 1 + C_V \int_0^t \|v_s\|_V |y(s)| ds,$$

et le lemme de Gronwall nous donne :

$$|y(t)| \leq \exp(C_V \|v\|_{L_V^1}).$$

Si nous arrivons à identifier $y(t)$ et $d_x \phi_t^v \cdot \alpha$, nous aurons la majoration recherchée (car c'est valable pour tout x, t, α). Pour cela on pose :

$$z_\epsilon(t) = y(t) - \frac{1}{\epsilon} (\phi_t^v(x + \epsilon\alpha) - \phi_t^v(x)),$$

et nous voulons montrer que $z_\epsilon(t)$ tend vers 0 avec ϵ . Utilisons l'écriture sous forme d'intégrale :

$$\begin{aligned} z_\epsilon(t) &= \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot y(s) ds - \frac{1}{\epsilon} \int_0^t (v_s \circ \phi_s^v(x + \epsilon\alpha) - v_s \circ \phi_s^v(x)) ds, \\ &= \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot z_\epsilon(s) ds + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t d_{\phi_s^v(x)} v_s \cdot (\phi_t^v(x + \epsilon\alpha) - \phi_t^v(x)) - (v_s \circ \phi_s^v(x + \epsilon\alpha) - v_s \circ \phi_s^v(x)) ds. \end{aligned}$$

Mettons cette expression de côté et considérons l'ensemble $\{\phi_t^v(x + \epsilon\alpha); t \in [0, 1]; \epsilon \in [0, \epsilon_0]\}$. C'est un compact par continuité de l'application $(t, \epsilon) \rightarrow \phi_t^v(x + \epsilon\alpha)$. Soit K l'enveloppe convexe de cet ensemble, K est convexe et compact. Pour tout $y, \tilde{y} \in K$, on a :

$$\begin{aligned} |v_t(\tilde{y}) - v_t(y) - d_y v_t(\tilde{y} - y)| &= \left| \int_0^1 (d_{y+\lambda(\tilde{y}-y)} v_t - d_y v_t) \cdot (\tilde{y} - y) d\lambda \right|, \\ &\leq m_{K,t}(|\tilde{y} - y|) |\tilde{y} - y|, \end{aligned}$$

où $m_{K,t}$ est le module de continuité de dv_t sur K :

$$m_{K,t}(r) = \max\{|d_x v_t - d_y v_t|, x, y \in K, |x - y| \leq r\}.$$

Comme $x \rightarrow d_x v_t$ est continue (hypothèse d'admissibilité), elle est uniformément continue sur K , ce qui implique que $\lim_{r \rightarrow 0} m_{K,t}(r) = 0$.

Revenons à la forme intégrale de z_ϵ et rappelons le lemme de contrôle en espace :
 Pour tout $v \in L_V^1$, $t \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$|\phi_t^v(x) - \phi_t^v(y)| \leq |x - y| \exp \left(\int_0^t \|v_r\|_{1,\infty} dr \right).$$

Ainsi, nous pouvons trouver une constante $c(v)$ telle que $|\phi_t^v(x + \epsilon\alpha) - \phi_t^v(x)| \leq \epsilon|\alpha|c(v)$. Par conséquent :

$$|z_\epsilon(t)| \leq \int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} |z_\epsilon(s)| ds + |\alpha| \int_0^1 m_{K,s}(\epsilon|\alpha|c(v)) ds.$$

Nous utilisons à nouveau le lemme de Gronwall :

$$|z_\epsilon(t)| \leq \left(|\alpha| \int_0^1 m_{K,s}(\epsilon|\alpha|c(v)) ds \right) \exp \left(\int_0^t \|v_s\|_{1,\infty} ds \right).$$

Or, par convergence dominée, comme $m_{K,s}(r) \leq 2\|v_t\|_{1,\infty}$, on a $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 m_{K,s}(r) ds = 0$ et $z_\epsilon(t)$ tend vers 0 quand ϵ tend vers 0. Donc ϕ_t^v est différentiable et $d_x \phi_t^v \cdot \alpha = y(t)$. $\square$

Nous donnons maintenant un résultat de faible continuité de l'application flot. Ce résultat est très important pour la suite de l'exposé. En effet, nous allons minimiser une fonctionnelle définie sur un espace de Hilbert. Sur ces espaces, on est souvent amené à extraire une sous-suite faiblement convergente d'une suite bornée. Pour une telle sous-suite, une application faiblement continue va conserver la convergence, ce qui n'est pas forcément le cas avec la continuité forte. Cependant, nous allons voir que pour obtenir cette continuité faible, l'espace d'arrivée doit être muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, et nous ne pourrons pas utiliser la topologie (plus fine) de la convergence uniforme globale.

Proposition 9. *Les applications $(t, x) \rightarrow \phi_t^v(x)$ sont uniformément continues et ce, uniformément vis-à-vis du champs v sur toute partie bornée de L_V^2 (équicontinuité).*

Démonstration. D'après le lemme 4 les applications ϕ_t^v sont lipschitziennes et le rapport ne dépend que de la norme de v . Si nous fixons la variable t , on a bien équicontinuité sur toutes parties bornées de L_V^2 . Or, d'après le lemme 3 on a aussi un contrôle en temps :

$$|\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| \leq C_v \int_s^t \|v_r\|_V dr.$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\phi_t^v(x) - \phi_s^v(x)| &\leq C_v \sqrt{(t-s)} \left(\int_s^t \|v_r\|_V^2 dr \right)^{1/2}, \\ &\leq C_v \sqrt{(t-s)} \|v\|_{L_V^2}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat. $\square$

Théorème 8. *Supposons que $(v^n)_n$ converge faiblement vers v dans L_V^2 . Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^d$, $(t, x) \rightarrow \phi_t^{(v^n)}(x)$ converge vers $(t, x) \rightarrow \phi_t^v(x)$ et ce uniformément sur K et uniformément par rapport au temps. C'est-à-dire :*

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sup_{\{(t,x) \in [0,1] \times K\}} \left| \phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x) \right| = 0.$$

Démonstration. Soit $(v^n)_n$, une suite qui converge faiblement vers v dans L_V^2 . Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on utilise à nouveau le lemme de contrôle vis-à-vis du champs (lemme 5).

$$\begin{aligned} |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| &\leq \left| \int_0^t v_s^n(\phi_s^v(x)) - v_s(\phi_s^v(x)) ds \right| \exp \left(C_V \int_0^t \|v_s^n\|_V ds \right), \\ &\leq |\eta(v^n - v)| \exp \left(C_V \int_0^t \|v_s^n\|_V ds \right). \end{aligned}$$

$\eta : L_V^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, définie par $\eta(u) = \int_0^t u_s(\phi_s^v(x)) ds$, est une application linéaire continue. En effet, $|\eta(u)| \leq \int_0^t \|u_s\|_\infty ds \leq C_V \|u\|_{L_V^1} \leq C_V \|u\|_{L_V^2}$. Elle est donc aussi faiblement continue, car pour les applications linéaires, la continuité entre deux espaces de Banach munis de leur topologie faible est équivalente à la continuité entre ces mêmes espace munis de leur topologie forte (et les topologies forte et faible coïncident sur $\mathbb{R}^d$). Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta(v^n - v) = 0.$$

En outre, la convergence faible entraîne que $(v^n)_n$ est bornée dans L_V^2 et donc dans L_V^1 . Ainsi, $\exp \left(C_V \int_0^t \|v_s^n\|_V ds \right)$ est aussi bornée. Nous avons alors prouvé que pour tout $t \in [0, 1]$, $\phi_t^{v^n}$ converge simplement vers ϕ_t^v . Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, montrons que cette convergence est uniforme sur $[0, 1] \times K$.

On fixe $\epsilon > 0$. Du fait de l'équicontinuité sur toute partie bornée des applications $(t, x) \rightarrow \phi_t^v(x)$ et comme $(v^n)_n$ est une partie bornée, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\phi_t^{v^n}(x) - \phi_s^{v^n}(y)| \leq \epsilon \quad \text{dès que} \quad |x - y| + |t - s| \leq \eta.$$

C'est aussi vérifié pour le champs v . De plus, $[0, 1] \times K$ est un compact, nous pouvons donc trouver des couples (t_i, x_i) , $1 \leq i \leq N$ tels que pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times K$, il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $|t - t_i| + |x - x_i| \leq \eta$. Par inégalité triangulaire nous avons alors :

$$\begin{aligned} |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_t^v(x)| &\leq |\phi_t^{v^n}(x) - \phi_{t_i}^{v^n}(x_i)| + |\phi_{t_i}^{v^n}(x_i) - \phi_{t_i}^v(x_i)| + |\phi_{t_i}^v(x_i) - \phi_t^v(x)|, \\ &\leq 2\epsilon + |\phi_{t_i}^{v^n}(x_i) - \phi_{t_i}^v(x_i)|. \end{aligned}$$

Enfin, on utilise la convergence simple de $\phi_t^{v^n}$ pour obtenir le résultat. □

Dans l'idéal, nous aimerions avoir ce résultat avec une topologie la moins fine possible au départ (de ce point de vue la faible continuité est un "bon" résultat) et avec la topologie la plus fine à l'arrivée. Le contre-exemple suivant montre que nous ne pouvons pas exiger la convergence uniforme globale en toute généralité.

Contre-exemple :

Plaçons nous en dimension 1 et choisissons une fonction C^∞ , f , à support inclus dans $[0, 1]$. La fonction f , en tant que fonction régulière et indépendante du temps, satisfait les hypothèses du lemme 5. Nous posons alors

$$v_t^n(x) = f(x - n),$$

ce qui définit une suite dans l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}) = V$ (admissible). La norme $\|\cdot\|_{H^2(\mathbb{R})}$ est invariante par translation et donc les valeurs $\|v_t^n\|_V$ sont toutes identiques. La suite (v^n) est donc bornée dans L_V^2 . Comme nous sommes dans un Hilbert, nous pouvons extraire une sous-suite faiblement convergente.

On montre alors que parmi la suite de difféomorphismes associée à (v^n) aucune sous-suite ne peut converger uniformément (pour un temps t fixé).

Les applications $\phi_t^{v^n}$ sont égales à l'identité en dehors de $[n, n+1]$. Pour le montrer, il suffit de voir que pour x en dehors de cette intervalle, l'application constante $t \rightarrow x$ vérifie leur équation, puis on utilise l'unicité de la solution. De plus, nous avons $\phi_t^{v^n}(x) = \phi_t^{v^0}(x-n) + n$. En effet, posons $y(t) = \phi_t^{v^0}(x-n) + n$, alors,

$$y(t) = x + \int_0^t f(y(s) - n) ds.$$

On retrouve l'équation vérifiée par $\phi_t^{v^n}(x)$. Nous en concluons que pour tout $p \neq q$, $\|\phi_t^{v^p} - \phi_t^{v^q}\|_\infty$ est supérieur ou égale à 1 (on prend $x \notin [p, p+1] \cup [q, q+1]$). Aucune sous-suite ne peut converger uniformément.

3.3 Groupe des déformations élastiques.

L'objet de cette section est de décrire plus précisément l'ensemble des déformations obtenues. En particulier, nous allons montrer que nous pouvons paramétrer cet espace par des éléments de L_V^2 . Ainsi, pour la recherche d'une transformation optimale (problème de minimisation (PA)) nous pourrions travailler dans l'espace de Hilbert L_V^2 . Finalement, à la fin de cette section, nous allons écrire pour la première fois notre problème sous une forme "bien posée". Remarquons tout de suite que nous allons obtenir des réductions encore plus importantes dans les sections suivantes.

Considérons l'ensemble de tous les difféomorphismes obtenus avec des champs L_V^1 , nous notons cet ensemble $\mathcal{A}_V = \{\phi_t^v; t \in [0, 1], v \in L_V^1\}$. En fait, il suffit de prendre les difféomorphismes ϕ_1^v car $\phi_s^v = \phi_1^{\tilde{v}}$ pour $\tilde{v}_t = v_t$ si $t \leq s$ et $\tilde{v}_t = 0$ sinon. L'ensemble $\mathcal{A}_V$ a donc la forme suivante :

$$\mathcal{A}_V = \{\phi_1^v \mid v \in L_V^1\}.$$

On construit une métrique sur $\mathcal{A}_V$ qui est invariante par la loi de composition :

$$d(id, \phi) = \inf\{\|v\|_{L_V^1}; \phi_1^v = \phi\}.$$

Puis nous faisons l'extention :

$$d_V(\phi, \psi) = d(id, \psi \circ (\phi)^{-1}). \quad (27)$$

Proposition 10. $(\mathcal{A}_V, \circ)$ est un groupe et un espace métrique complet pour la distance d_V .

Démonstration. Nous démontrons la propriété de groupe et nous admettons que l'espace est complet. Pour cela, il faut montrer que pour u et v deux champs dans L_V^1 , alors $\phi_1^v \circ \phi_1^u = \phi_1^{u*v}$, où $u * v \in L_V^1$ est l'opération de concaténation :

$$u * v_t = \begin{cases} \frac{1}{2}u_{2t} & \text{si } t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}v_{2t-1} & \text{si } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

De plus, on a $(\phi_1^v)^{-1} = \phi_1^{\tilde{v}}$ où $\tilde{v}_t = -v_{1-t}$ (nous l'avons déjà montré pour la proposition 8). Pour obtenir le résultat de concaténation, nous montrons d'abord que pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi_t^u(x) = \phi_{t/2}^{u*v}(x)$ ce qui nous permettra de montrer que $\phi_t^v(\phi_1^u(x)) = \phi_{\frac{t+1}{2}}^{u*v}(x)$ et d'obtenir $\phi_1^v \circ \phi_1^u = \phi_1^{u*v}$ en prenant $t = 1$. La méthode est toujours la même, nous montrons seulement que $\phi_t^u(x) = \phi_{t/2}^{u*v}(x)$.

Posons $\tilde{y}(t) = \phi_{t/2}^{u*v}(x)$, c'est une fonction continue, définie pour tout $t \in [0, 1]$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\tilde{y}(t)$ vérifie l'équation de $\phi_t^u(x)$. Or,

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= \phi_{t/2}^{u*v}(x) = x + \int_0^{t/2} (u * v)(r, \phi_r^{u*v}(x)) dr, \\ &= x + \int_0^{t/2} (u * v)(r, \tilde{y}(2r)) dr, \\ &= x + \int_0^{t/2} \frac{1}{2} u(2r, \tilde{y}(2r)) dr, \\ &= x + \int_0^t u(r, y(r)) dr.\end{aligned}$$

Par unicité, on a bien $\tilde{y}(t) = \phi_{t/2}^{u*v}(x) = \phi_t^u(x)$. Pour les autres calculs, on utilise le même principe d'indentification. $\square$

Lemme 6. Pour tout $v \in L_V^1$, il existe $u \in L_V^2$ tel que $\phi_1^v = \phi_1^u$ et $\|u\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1}$.

Démonstration. Soit $\alpha : [0, 1] \rightarrow]0, \infty[$ intégrable, de masse égale à 1. On pose $A(t) = \int_0^t \alpha(s) ds$. A est une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même. On définit le champs u en posant $u_t = \alpha(t) v_{A(t)}$. Par changement de variable, u est un élément de L_V^1 de même norme que v . De plus, on a $\phi_1^u = \phi_1^v$. En effet,

$$\begin{aligned}\phi_{A(t)}^v(x) &= x + \int_0^{A(t)} v_s \circ \phi_s^v(x) ds, \\ &= x + \int_0^t \alpha(s) v_{A(s)} \circ \phi_{A(s)}^v(x) ds.\end{aligned}$$

Ainsi, $\phi_{A(t)}^v(x)$ vérifie l'équation intégrale de $\phi_t^u(x)$. Par unicité, on en déduit que $\phi_{A(t)}^v(x) = \phi_t^u(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$. En particulier, $\phi_1^v(x) = \phi_1^u(x)$ car $A(1) = 1$.

On prend maintenant $\epsilon > 0$ quelconque, et on essaye de construire $\alpha(t)$ tel que $\|u\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1} + \epsilon$, où u est défini de la même manière. On a toujours :

$$\|u\|_{L_V^2}^2 = \int_0^1 \alpha(s)^2 \|v_{A(s)}\|_V^2 ds = \int_0^1 \alpha(A^{-1}(s)) \|v_s\|_V^2 ds.$$

Soit $\eta > 0$, pour tout $t \in [0, 1]$ nous définissons $\beta(t) = \frac{1}{C}(\eta + \|v_t\|_V)$, avec $C = \eta + \|v\|_{L_V^1}$. On pose $B(t) = \int_0^t \beta(s) ds$. Alors B est strictement croissante avec $B(0) = 0$ et $B(1) = 1$, c'est donc une bijection. Dès lors, on peut donc trouver α tel que $A = B^{-1}$. Ainsi, $\alpha \circ A^{-1} = \frac{1}{\beta}$ et donc

$$\begin{aligned}\|u\|_{L_V^2}^2 &= \int_0^1 \frac{\|v_t\|_V^2}{\beta(t)} dt = C \int_0^1 \frac{\|v_t\|_V^2}{\eta + \|v_t\|_V} dt, \\ &\leq C \|v\|_{L_V^1} = (\eta + \|v\|_{L_V^1}) \|v\|_{L_V^1}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|u\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1} \sqrt{1 + \frac{\eta}{\|v\|_{L_V^1}}} \leq \|v\|_{L_V^1} + \frac{\eta}{2}.$$

Il suffit de choisir $\eta < \frac{\epsilon}{2}$ pour obtenir la majoration voulue.

Etant donné l'arbitraire sur ϵ , on peut choisir une suite (u^n) dans L_V^2 telle que $\phi_1^{u^n} = \phi_1^v$ pour tout n et $\|u^n\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1} + \frac{1}{n}$. Comme cette suite est bornée, on peut supposer qu'elle est faiblement convergente (quitte à extraire une sous-suite). Soit $u \in L_V^2$ la limite faible. D'après le théorème de faible continuité de l'application flot (théorème 8) $\phi_1^{u^n}$ converge vers ϕ_1^u , on a donc $\phi_1^u = \phi_1^v$. De plus, $\|u\|_{L_V^2} \leq \liminf \|u^n\|_{L_V^2} \leq \|v\|_{L_V^1}$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 11.

$$\mathcal{A}_V = \{\phi_1^v; v \in L_V^2\}.$$

Pour tout $\phi \in \mathcal{A}_V$:

$$d_V(id, \phi) = \inf \left\{ \|v\|_{L_V^2}; v \in L_V^2, \phi_1^v = \phi \right\} \quad (28)$$

Remarquons que pour ϕ et ψ dans $\mathcal{A}_V$, un élément v de L_V^2 tel que $\phi_1^v = \psi \circ (\phi)^{-1}$ s'interprète comme une courbe dans l'espace métrique $\mathcal{A}_V$, joignant ϕ et ψ . En effet, on peut définir la courbe

$$\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{A}_V,$$

telle que $\gamma(t) = \phi_t^v \circ \phi$. On a alors $\gamma(0) = \phi$, $\gamma(1) = \psi$ et γ est continue. Une géodésique entre ϕ et ψ est une courbe du même type que γ , qui joint ϕ et ψ , mais avec une énergie minimale. C'est donc un champs v de L_V^2 vérifiant toujours $\phi_1^v = \psi \circ (\phi)^{-1}$ et tel que $\|v\|_{L_V^1}$ soit minimum.

La distance d_V que nous avons construite calcul l'infimum parmi les énergies de toutes les courbes allant de ϕ à ψ . Il n'est pas évident que cette infimum soit atteint pour un élément de L_V^2 . En d'autres termes, il n'existe peut-être pas de géodésique. Le lemme qui vient répond à cette question.

Lemme 7. (Existence de géodésique dans L_V^2 .) Pour tout ϕ, ψ dans $\mathcal{A}_V$ il existe un champs $v \in L_V^2$ tel que $\phi_1^v = \psi \circ \phi^{-1}$ et $d_V(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2} = \|v\|_{L_V^1}$.

Démonstration. Avec la nouvelle définition que nous avons de la distance d_V , nous pouvons construire une suite minimisante (v^n) dans L_V^2 au sens où

$$\phi_1^{v^n} = \psi \circ \phi^{-1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|v^n\|_{L_V^2} = d_V(\phi, \psi).$$

La suite $(v^n)_n$ est bornée, nous pouvons donc supposer qu'elle est faiblement convergente. On note $v \in L_V^2$ sa limite. En utilisant la faible continuité du flot (théorème 8) on peut affirmer que $\phi_1^v = \psi \circ \phi^{-1}$. De plus,

$$\|v\|_{L_V^2} \leq \liminf \|v^n\|_{L_V^2} = d_V(\phi, \psi),$$

et donc $\|v\|_{L_V^2} = d_V(\phi, \psi)$. Enfin, par définition de d_V , on a $\|v\|_{L_V^1} \geq d_V(\phi, \psi) = \|v\|_{L_V^2}$ donc $\|v\|_{L_V^1} = \|v\|_{L_V^2}$. Comme cette situation correspond à une égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|v\|_{L_V^1}$ est constante presque partout. $\square$

3.4 Définition Hilbertienne du problème d'appariement.

Commençons par rappeler nos objectifs et le problème que nous souhaitons résoudre. Nous voulons appairer des objets O_1, O_2 à l'aide de déformations élastiques. Nous cherchons donc à construire le cadre mathématiques suivant :

- Construire un espace $\mathcal{A}_V$ contenant l'ensemble des déformations admissibles, section 3.
- Construire un espace E contenant les objets d'études, section 5.
- Définir une distance d_E sur cet espace, section 5.
- Construire une action $(\phi, O) \rightarrow \phi.O$ de $\mathcal{A}_v$ sur les objets, section 5.

Nous pouvons alors mesurer la qualité de l'appariement avec $A(\phi_1^v) = d_E(\phi_1^v \cdot O_1, O_2)$ (c'est la terme d'attache aux données). Nous cherchons à minimiser sur $\mathcal{A}_V$ le critère suivant :

$$J(\Phi) = \lambda d_V(id, \Phi) + A(\phi) \quad (pA).$$

Le théorème d'existence de géodésique nous donne alors l'équivalence :

Proposition 12. *Le problème (pA) est équivalent à la minimisation sur L_V^2 de la fonctionnelle*

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|^2 dt + A(\Phi_1^v) \quad (PA).$$

Enfin, énonçons un dernier théorème, qui nous donne une condition suffisante pour l'existence théorique d'une solution au problème (PA).

Théorème 9. *Si la fonctionnelle $A : \mathcal{A}_V \rightarrow [0, +\infty[$ est telle que $v \rightarrow A(\phi_1^v)$ est faiblement continue sur L_V^2 , alors le problème (PA) admet une solution pour tout $\lambda > 0$.*

Remarque 5. *D'après le théorème 8, la condition est vérifiée dès que A est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. Considérons une suite minimisante $(v^n)_n$ dans L_V^2 . Cette suite est bornée car $J(v^n)$ est bornée et

$$\|v^n\|_{L_V^2} = \sqrt{\frac{J(v^n) - A(\phi_1^v)}{\lambda}}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, on suppose que (v^n) converge faiblement vers une limite $v \in L_V^2$. Par faible continuité, $A(\phi_1^{v^n})$ converge vers $A(\phi_1^v)$. D'autre part, $\|v\|_{L_V^2} \leq \liminf \|v^n\|_{L_V^2}$, donc $J(v) \leq \liminf J(v^n) = \inf J$ car (v_n) est minimisante. En conclusion, $J(v) = \inf J$. $\square$

4 Utilisation des espaces de Hilbert à noyau reproduisant.

Dans cette section, nous allons mettre à profit les RKHS introduits à la section 2.3. Comme nous ne travaillons plus avec des fonctions à valeurs scalaires mais avec des champs de vecteurs, il faut adapter nos notations et aussi nos démonstrations. Cependant, les résultats que nous allons présenter sont essentiellement les mêmes que ceux de la section 2.3 et nous laisserons de côté certaines démonstrations.

La première partie de cette section a pour but d'adapter les résultats déjà connus au cas des RKHS de champs de vecteurs (on donne aussi quelques nouvelles propositions). La deuxième partie est une étude des **noyaux vectoriels positifs** invariants par translation. La troisième partie illustre, à travers le principe de réduction, les avantages que peuvent avoir les RKHS en optimisation. On remarquera en particulier le théorème d'interpolation 12.

On a déjà vu que pour construire notre groupe de déformation élastique on utilisait un espace de Hilbert V (ie : on modélise le problème dans le sens $V \rightarrow \mathcal{A}_V$). Au terme de cette section, nous verrons que la modélisation se ramène au choix d'un noyau k_V . La construction s'effectue donc dans le sens $k_V \rightarrow V \rightarrow \mathcal{A}_V$.

4.1 RKHS de champs de vecteurs.

Rappelons la définition, bien qu'elle soit inchangée :

Définition 7. Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle_H)$ un espace de Hilbert formé de fonctions $S \rightarrow \mathbb{R}^m$. H est un RKHS si les fonctionnelles d'évaluation $\delta_x : f \rightarrow f(x)$ sont continues.

Remarque 6. Ici, les fonctions sont de la forme $f = (f_1, \dots, f_n)$, pour pouvoir travailler avec des formes linéaires et utiliser le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, on doit utiliser les δ_x^α définies pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $x \in S$ par

$$\delta_x^\alpha : f \rightarrow f(x) \cdot \alpha.$$

Remarque 7. Tout espace de Hilbert admissible est un RKHS.

Définition 8. Soit $(H, \langle \cdot | \cdot \rangle_H)$ un RKHS. On note K_H l'isomorphisme du théorème de représentation de Riesz-Fréchet. Le noyau reproduisant de H est l'application $k_H : S \times S \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ telle que pour tout $x \in S$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}^m$,

$$k_H(x, \cdot)\alpha = K_H(\delta_x^\alpha).$$

On a alors la propriété dite de "reproduction",

Propriété 1. Pour toute fonction $h \in H$, $h(x) \cdot \alpha = \delta_x^\alpha(h) = \langle k_H(x, \cdot)\alpha | h \rangle_H$.

On a donc une différence au niveau de l'espace d'arrivée du noyau. ceci nous amène à la définition suivante, toujours à mettre en lien avec les fonctions de type positif.

Définition 9. (Noyau vectoriel positif.) On appelle noyau vectoriel positif de dimension m sur S , toute fonction $k : S \times S \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ vérifiant d'une part, pour tout $x, y \in S$, $k(x, y) = k^*(y, x)$, d'autre part, pour tout $x_1, \dots, x_n \in S$ et pour tout $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^m$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \cdot k(x_i, x_j) \alpha_j \geq 0.$$

Si lorsque les x_i sont tous distincts, l'expression ci-dessus est nulle si et seulement si les α_i sont tous nuls, alors le noyau est dit strictement positif.

En d'autres termes, la matrice de taille $m * n$ formée des blocs $k(x_i, x_j)$ est symétrique positive. De cette définition, il ressort qu'il va nous falloir utiliser des notations adaptées à cette propriété.

Notation 1. Soit $k : S^2 \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ un noyau vectoriel positif. Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in S^n$, on note $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ l'opérateur de $(\mathbb{R}^m)^n$ tel que pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}^m)^n$, $\beta = k(\mathbf{x}, \mathbf{y})\alpha$ est l'élément de $(\mathbb{R}^m)^n$ dont la i^e composante est donnée par

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n k(x_i, x_j)\alpha_j.$$

$k(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ sera parfois noté $k(\mathbf{x})$.

Le théorème qui suit est fondamental pour le calcul numérique. Sa démonstration est exactement la même que celle du théorème 3

Théorème 10. i) Le noyau d'un RKHS est un noyau vectoriel positif.
ii) A tout noyau vectoriel positif k sur S de dimension m , correspond un unique RKHS de fonctions $S \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Dans les lignes qui suivent, nous donnons quelques résultats importants concernant les RKHS.

Propriété 2. Pour $x, y \in S$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$ on a la propriété :

$$\langle k_H(x, \cdot)\alpha \mid k_H(y, \cdot)\beta \rangle_H = \beta \cdot k_H(x, y)\alpha.$$

Nous donnons maintenant deux résultats qui nous disent que dans un RKHS, la convergence simple et la convergence faible sont presque équivalentes.

Propriété 3. Dans un espace de Hilbert à noyau reproduisant H , la convergence faible entraîne la convergence simple.

Démonstration. En effet, si $(f_n)_n$ converge faiblement vers f , alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^m$, et $x \in S$, $\langle k_H(x, \cdot)\alpha \mid k_H(x, \cdot)\alpha \rangle_H = (f_n(x) - f(x)) \cdot \alpha \rightarrow 0$ ce qui équivaut à $f_n(x) \rightarrow f(x)$. $\square$

Propriété 4. (réciproque partielle.) Si $(f_n)_n$ est une suite bornée dans H qui converge simplement vers une fonction f , alors $f \in H$ et $(f_n)_n$ converge faiblement vers f

Démonstration. Puisque $(f_n)_n$ est bornée dans H on sait qu'elle va avoir des valeurs d'adhérences au sens faible. il suffit alors de montrer que f est la seule valeur d'adhérence possible. Or si $(f_{\phi(n)})_n$ est une sous-suite qui converge faiblement vers une fonction $\tilde{f} \in H$, alors

$$f(x) \cdot \alpha = \lim f_{\phi(n)}(x) \cdot \alpha = \lim \langle k(x, \cdot)\alpha \mid f_{\phi(n)} \rangle_H = \langle k(x, \cdot)\alpha \mid \tilde{f} \rangle_H = \tilde{f}(x) \cdot \alpha.$$

$\square$

Enfin, il est important pour notre construction que la régularité du noyau se transmette au RKHS qu'il engendre. La proposition ci-dessous nous dit que c'est bien le cas. Dans la suite on aura $S = \mathbb{R}^d$.

Proposition 13. Soit k un noyau vectoriel positif de dimension m , continue et borné sur $\mathbb{R}^d$ et tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $k(x, \cdot)$ est nul à l'infini. Alors l'espace reproduisant associé à k s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. Par hypothèse, les fonctions $k(x, \cdot)\alpha$ appartiennent à $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ et donc l'espace vectoriel H_0 qu'elle engendrent aussi. D'autre part, pour tout $f \in H$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $\alpha \in \mathbb{R}^m$, on a

$$f(x) \cdot \alpha = \langle k(x, \cdot)\alpha | f \rangle_H,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne

$$|f(x) \cdot \alpha| \leq \sqrt{\alpha \cdot k(x, x)\alpha} \|f\|_H.$$

Par conséquent, si on note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^m$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ la norme d'opérateur associée, on a

$$\|f(x)\|_2^2 \leq \sqrt{f(x) \cdot k(x, x)f(x)} \|f\|_H \leq \|f(x)\|_2 \sqrt{\|k(x, x)\|_{\mathcal{L}}} \|f\|_H.$$

Comme on a supposé que k est bornée, nous avons alors

$$\|f\|_{\infty} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sqrt{\|k(x, x)\|_{\mathcal{L}}} \|f\|_H.$$

Les suite de Cauchy dans H_0 sont donc uniformément convergente. Les éléments de la complétion H (limites simples des suite de Cauchy de H_0) sont donc dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$ et vérifient

$$\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{\|k\|_{\infty}} \|f\|_H.$$

En conclusion, H s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$. □

On peut en fait montrer qu'on peut obtenir n'importe quelle degré de régularité en choisissant bien le noyau. C'est un résultat à mettre en lien avec ce que nous avons déjà dit de la représentation spectrale des RKHS.

4.2 Etude des noyaux, invariance par transformation rigide.

Concernant notre problème d'appariement, il est naturelle d'exiger que toute nos mesures reste inchangées si on applique une transformation rigide au deux objets à la fois. Pour remplir cette condition, nous devons construire le RKHS admissible V de manière à ce que sa norme soit invariante par de telles transformations. C'est ce que nous allons étudier dans le paragraphe qui vient.

Invariance par translation

Proposition 14. Soit V un RKHS de fonctions $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ et k_V son noyau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) Pour toute translation τ de $\mathbb{R}^d$, l'application $f \rightarrow f \circ \tau$ est une isométrie de V .
- ii) Il existe une fonction $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ telle que $k_V(x, y) = k(x - y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$.

Preuve 1. Si, V est invariant par translation, alors pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \beta \cdot k_V(x + z, y + z)\alpha &= \langle k_V(x, \cdot)\alpha | k_V(y + z, \cdot + z)\beta \rangle_V, \\ &= \langle k_V(x, \cdot - z)\alpha | k_V(y + z, \cdot)\beta \rangle_V, \\ &= \beta \cdot k_V(x, y)\alpha. \end{aligned}$$

On a utiliser le fait que $k_V(x, y) = k_V^*(x, y)$. Par conséquent, on a toujours $k_V(x + z, y + z) = k_V(x, y)$. En prenant $z = -x$, on a $k_V(x, y) = k(y - x)$ avec $k(t) = k_V(0, t)$.

Réciproquement, si il existe k telle que $k_V(x, y) = k(y - x)$. Alors $k_V(x + z, y + z) = k_V(x, y)$ pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^d$ et donc

$$\begin{aligned}\langle k_V(x, \cdot + z)\alpha \mid k_V(x, \cdot + z)\alpha \rangle_V &= \langle k_V(x - z, \cdot)\alpha \mid k_V(x - z, \cdot)\alpha \rangle_V, \\ &= \alpha \cdot k_V(x - z, x - z)\alpha, \\ &= \alpha \cdot k_V(x, x)\alpha = \langle k_V(x, \cdot)\alpha \mid k_V(x, \cdot)\alpha \rangle_V,\end{aligned}$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^m$. L'action de translation est donc une isométrie sur les $k_V(x, \cdot)\alpha$, ces éléments forment une famille totale de V , la propriété se propage donc à l'espace entier.

Caractérisation spectrale des noyau invariant par translation.

On donne maintenant une adaptation du théorème de Bochner et de la représentation spectrale. Les transformée de Fourier est à prendre coordonnées par coordonnées.

Théorème 11. (Bochner adapté) Soit $k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ une fonction intégrable ainsi que sa transformée de Fourier $\hat{k}$ et vérifiant $k = \mathcal{F}^{-1}(\hat{k})$. Alors, le noyau associé à k (ie : $k_V(x, y) = k(y - x)$) est un noyau vectoriel positif si et seulement si sa transformée de Fourier $\hat{k}$ est telle que pour tout $\omega \in \mathbb{R}^d$, $\hat{k}(\omega)$ est un opérateur hermitien positif.

Propriété 5. (Représentation spectrale) Sous les hypothèses du théorème de Bochner et si de plus $\hat{k}(w)$ est strictement positif (pour tout ω) et borné sur $\mathbb{R}^d$, alors le produit scalaire du RKHS V associé à k_V s'écrit :

$$\langle f, g \rangle_V = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\hat{f}(\omega)} \cdot \hat{k}(\omega)^{-1} \hat{g}(\omega) d\omega. \quad (29)$$

On peut aller plus loin et construire des espaces pour lequel les transformations orthogonales sont aussi des isométries. Une manière rapide de procéder est de poser $k_V(x, y) = k(|x - y|)Id$. Ce sont les noyaux radiaux scalaires.

4.3 Principe de réduction.

Comme nous l'avons signaler plus haut, nous considérons maintenant que toute notre construction est issue du choix d'un noyau k_V . Nous allons voir que cette méthode permet d'obtenir des formules explicites, adaptées à la résolution numérique du problème. Rappelons à nouveau le problème (PA).

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|^2 dt + A(\Phi_1^v) \quad (PA).$$

Cette expression comporte deux termes. Le premier terme est le point centrale de la méthode. En effet, bien qu'il soit plus difficile à cerner que le second, il nous assure un contrôle sur les objets que l'on manipule et donne une validité mathématique au problème. Le second, plus intuitif, est le terme d'attache aux données, il mesure la qualité de la mise en correspondance des deux objets étudiés.

On peut opérer une première réduction sur le second terme. Si on suppose que nos deux objet O_1 et O_2 sont localisés dans une zone $S \subset \mathbb{R}^d$, il peut être utile de considérer que A n'est pas fonction de tout le difféomorphisme ϕ_1^v mais seulement des points $\phi_1^v(x)$ pour $x \in S$, (cette réduction est assez naturelle en vue du calcul numérique).

Dans la suite, V est un espace de champs de déformations $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (Hilbert admissible). k_V est le noyau de V .

Proposition 15. Soit $S \subset \mathbb{R}^d$ un sous ensemble quelconque.

i) L'espace $V_S = \{v \in V \mid v(x) = 0, \forall x \in S\}$, est un sous-espace vectoriel fermé de V . Son orthogonal satisfait :

$$V_S^\perp = \overline{\text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha \mid x \in S, \alpha \in \mathbb{R}^d\}}. \quad (30)$$

C'est l'unique RKHS de fonctions $S \rightarrow \mathbb{R}^d$ de noyau k_V .

ii) Pour tout $v_0 \in V$ il existe une unique champs v , de norme minimale parmi les champs qui interpole v_0 sur S . De plus, v est l'unique élément de $V_S^\perp$ qui interpole v_0 sur S .

Remarque 8. Dans le point ii), le champs de vecteur v_0 ne joue pas de rôle centrale, il sert juste à "fixer" des valeurs sur S . On précise un peu cela dans la démonstration.

Démonstration. Par définition, $V_S = \text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha \mid x \in S, \alpha \in \mathbb{R}^d\}^\perp$ et donc

$$V_S^\perp = \overline{\text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha \mid x \in S, \alpha \in \mathbb{R}^d\}}.$$

Pour montrer que $V_S^\perp$ est le RKHS correspondant à k_V , on remarque que $V_S^\perp$ peut être considéré comme espace de champs sur S . En effet, si on restreint les éléments de $V_S^\perp$ à S on ne réduit pas $V_S^\perp$ car si deux éléments de $V_S^\perp$ sont égaux sur S alors leur différence est dans $V_S \cap V_S^\perp = \{0\}$. On peut donc identifier $V_S^\perp$ à l'espace des champs obtenus par complétion de $\text{Vect}\{k_V(x, \cdot)\alpha \mid x \in S, \alpha \in \mathbb{R}^d\}$ pour la norme induite par k_V .

Pour la démonstration du point ii), on introduit l'espace $\tilde{V} = \{v \in V \mid v - v_0 \in V_S\}$ (il est non vide car il contient v_0). Comme nous l'avons signalé, v_0 n'a qu'un rôle secondaire dans cette ensemble. Ce qui nous intéresse, c'est que tous les éléments de $\tilde{V}$ prennent les mêmes valeurs sur S . Nous cherchons un élément de norme minimale dans $\tilde{V}$.

Or, si on note P la projection orthogonale sur $V_S^\perp$ on constate que l'image de $\tilde{V}$ par cet opérateur se résume à un unique vecteur v_* . En effet, si on prend $u_1, u_2 \in \tilde{V}$, alors

$$u_1 - u_2 = (u_1 - v_0) - (u_2 - v_0) \in V_S.$$

Par conséquent, $P(u_1 - u_2) = 0$.

De plus, v_* est toujours dans $\tilde{V}$ car $v_* = P(v_0)$, et $v_0 - P(v_0) \in V_S = (V_S^\perp)^\perp$. Finalement, en utilisant le fait que P est une contraction, on peut dire que v_* est l'unique élément de norme minimale dans $\tilde{V}$, il interpole donc v_0 sur S et c'est aussi un élément de $V_S^\perp$. $\square$

Le théorème qui précède, et celui qui va suivre illustrent à nouveau le principe de la méthode que nous présentons : par l'intermédiaire du terme de contrôle dans (PA) nous retrouvons des problèmes hilbertiens bien connus et résolubles.

Théorème 12. Supposons que k_V soit un noyau vectoriel strictement positif (définition 9). Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ tous distincts, et $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ d'autres vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe une unique solution $v_* \in V$ au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} v(x_i) = \gamma_i & 1 \leq i \leq n, \\ \|v\|_V & \text{minimale.} \end{cases} \quad (31)$$

La solution v_* s'écrit :

$$v_*(x) = \sum_{i=1}^n k_V(x_i, x) \alpha_i, \quad (32)$$

où les $\alpha_i \in \mathbb{R}^d$ sont solutions du système linéaire :

$$\sum_{i=1}^n k_V(x_i, x_j) \alpha_i = \gamma_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (33)$$

Démonstration. En utilisant les notation étendues (Notation 1), le système 33 s'écrit

$$k_V(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \alpha = \gamma.$$

D'après l'hypothèse de stricte positivité, ce système admet une unique solution. Le champs v_* donnée par 32 satisfait alors la condition d'interpolation. De plus, de par sa forme, c'est un éléments de $V_S^\perp$ (ici $S = \{x_1, \dots, x_n\}$). D'après la proposition précédente, c'est bien l'unique solution du problème posé. $\square$

Considérons maintenant le problème (PA) pour lequel le terme d'appariement n'est fonction que des déplacements des point x d'une zone S .

$$J(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|^2 dt + A((\Phi_1^v(x)))_{x \in S} \quad (34)$$

On résout ce problème en minimisant la fonctionnelle J dans le Hilbert $L_V^2 = L^2([0, 1], V)$, cependant on va montrer qu'on peut réduire à nouveau l'espace de recherche.

On note $L_{V,S}^2$ l'ensemble des champs $v \in L_V^2$ tels que pour tout $t \in [0, 1]$, $v_t \in V_{\phi_t^v(S)}^\perp$ au sens de la proposition 15. Plus précisément, v_t est limite dans V de champs de la forme $\sum_{i=1}^n k(x_i, \cdot) \alpha_i$, avec $x_i \in \phi_t^v(S)$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 13. *Pour tout champs $v \in L_V^2$, il existe un champs projeté $v^S \in L_{V,S}^2$ tel que $\phi_1^{v^S}(x) = \phi_1^v(x)$ pour tout $x \in S$, et $\|v_t^S\|_V \leq \|v_t\|_V$ pour tout $t \in [0, 1]$. Par conséquent, la solution du problème d'optimisation 34 peut être recherchée dans $L_{V,S}^2$.*

Démonstration. La démonstration suit le principe suivant : à tout temps $t \in [0, 1]$ on remplace v_t par son projeté avec la méthode développée à la proposition 15. $\square$

Cas d'un ensemble fini de points.

On présente l'un des cas qui va nous intéresser dans la pratique. Ici, $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec les x_i tous distincts. Pour tout $v \in L_{V,S}^2$ il existe des vecteurs $\alpha_t^i \in \mathbb{R}^d$ tels que :

$$v_t(x) = \sum_{i=1}^n k(x_t^i, x) \alpha_t^i, \quad (35)$$

les trajectoires $x_t^i = \phi_t^v(x_i)$ vérifiant

$$x_t^j = x_j + \int_0^t \sum_{i=1}^n k_V(x_s^i, x_s^j) \alpha_s^i ds. \quad (36)$$

On va donc pouvoir paramétrer l'espace de minimisation par les trajectoires vectorielles $t \rightarrow \alpha_t^i$.

Comme le dit M.Glaunès, pour pouvoir définir un nouvelle espace minimisation, on doit pouvoir contrôler la norme des α_t^i . Un tel contrôle devient possible si l'on suppose la strict positivité du noyau k_V . En effet on a l'égalité suivante :

$$\|v_t\|_V^2 = \sum_{i,j=1}^n \alpha_t^j \cdot k_V(x_t^i, x_t^j) \alpha_t^i, \quad (37)$$

en notations étendues on obtient $\|v_t\|_V^2 = \alpha_t^* \cdot \mathbf{k}_V(\mathbf{x}_t) \alpha_t$. D'après ce que nous avons vu sur les équations intégrales, les trajectoires x_t^i ne se coupent pas. L'application $t \rightarrow \mathbf{x}_t$ est donc une application continue de $[0, 1]$ dans $(\mathbb{R}^d)^n_*$ des n-uplets d'éléments tous distincts de $\mathbb{R}^d$.

Ainsi, si k_V est supposé strictement positif, l'application $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}_V(\mathbf{x})$ est continue et va de $(\mathbb{R}^d)^n_*$ dans l'ensemble des opérateurs inversibles $\mathcal{L}((\mathbb{R}^d)^n)$. L'inversion est elle aussi continue, et le segment $[0, 1]$ est compact. Ainsi, on peut trouver une constante positive c telle que pour tout $t \in [0, 1]$ on ait $|k_V(\mathbf{x}_t)^{-1}| \leq c$.

Avec l'égalité 37 nous obtenons :

$$|\alpha_t| \leq c \|\mathbf{v}_t\|_V$$

et donc, $t \rightarrow \alpha_t$ appartient à $L^2([0, 1], (\mathbb{R}^d)^n)$.

Réciproquement, si $t \rightarrow \alpha_t$ est dans cette espace, si l'on veut reconstruire les champs v_t par l'équation 35, on doit calculer les trajectoires avec l'équation 36 ce qui en notations étendues donne :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x} + \int_0^t \mathbf{k}_V(\mathbf{x}_s) \alpha_s ds. \quad (38)$$

Les fonctions $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{k}_V(\mathbf{x}) \alpha_t$ sont lipschitzienne dans $(\mathbb{R}^d)^n$ car V est un Hilbert admissible. On satisfait ici toutes les conditions du lemme 5. Les trajectoires $t \rightarrow x_t^i$ sont donc définies et continues. Nous définissons alors v_t par la formule 35 et on vérifie que $v \in L_V^2$ grâce à 37 et au fait que k_V soit borné.

Il en résulte une écriture explicite de la fonctionnelle 34 :

Proposition 16. *Si k_V est strictement positif et si $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec les x_i tous distincts, la fonctionnelle d'appariement 34 peut être réécrite en fonctions des paramètres α_t^i dans l'espace $L^2([0, 1], (\mathbb{R}^d)^n)$:*

$$J((\alpha_t^i)) = \lambda \int_0^t \sum_{i,j=1}^n \alpha_t^j \cdot k_V(x_t^i, x_t^j) \alpha_t^i dt + A(x_1^i). \quad (39)$$

Les trajectoires x_t^i sont calculées avec la formule 36.

5 Construction du terme d'attache aux données .

Nous allons construire un terme d'attache aux données A , qui soit adapté au problème de l'appariement de nuages de points. Cela signifie que les points de la source O_1 et ceux de la cible O_2 ne sont pas associés deux à deux, il va donc falloir traiter des nuages de points de manière globale. Cette approche est plus générale et s'adapte assez bien à l'appariement de courbes ou de surfaces.

Afin de construire le terme d'attache aux données, nous allons utiliser des espaces de mesures sur $\mathbb{R}^d$ et étudier le transport de ces mesures par les difféomorphismes du groupe $\mathcal{A}_V$. Par conséquent, on peut probablement faire un parallèle entre la méthode que nous allons exposer et des problèmes issus de la théorie du transport optimal. Commençons par introduire les outils qui vont nous être utiles dans la suite.

Définition 10. On note $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ l'espace des mesures borélienne signées de $\mathbb{R}^d$. On peut définir cet espace comme le dual topologique de $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$. La norme dual est alors appelée norme en variation totale :

$$\|\mu\|_{VT} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} f(x) d\mu(x) \mid f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|f\|_\infty \leq 1 \right\}. \quad (40)$$

$\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ a l'avantage de contenir toutes les mesures nécessaires à la modélisation de notre problème. De plus, on peut faire agir assez naturellement les transformations $\mathcal{A}_V$ sur cet espace, c'est l'action de transport.

Définition 11. On définit une action du groupe $\mathcal{A}_V$ sur $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ en posant $\phi \cdot \mu = \phi \# \mu$, c'est-à-dire qu'on prend la mesure image de μ par ϕ . Cette action conserve la distance en variation totale car $\phi^{-1}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$ pour tout $\phi \in \mathcal{A}_V$. La mesure image intègre les fonctions de $L^1(\mu)$ de la manière suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d(\phi \cdot \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} f \circ \phi d\mu. \quad (41)$$

Remarque 9. L'action de transport sur une combinaison de masses de Dirac ne change que la position des points sur lesquels la masse est répartie. En d'autres termes, si $\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$, alors :

$$\phi \cdot \mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{\phi(x_i)}. \quad (42)$$

La norme en variation totale peut être assez difficile à manipuler. Pour contourner cette difficulté et pour rester fidèle à notre méthode, on va plonger $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ dans un espace à noyau reproduisant afin de pouvoir utiliser les propriétés de ces espaces.

5.1 Norme de RKHS sur l'espace $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$.

Soit (I, k_I) un RKHS qui s'injecte continûment dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_\infty)$: il existe une constante $c_I > 0$ telle que pour tout $f \in I$, on ait $\|f\|_\infty \leq c_I \|f\|_I$. Soit $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ la restriction de μ à I définit un élément de I' . De plus, pour tout $f \in I$, on a l'inégalité suivante.

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \leq \|f\|_\infty \|\mu\|_{VT} \leq c_I \|f\|_I \|\mu\|_{VT}.$$

Ainsi, $\|\mu\|_{I'} \leq c_I \|\mu\|_{VT}$. L'application de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ dans I' qui restreint à I les mesures de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ est donc continue. Nous allons travailler sur l'image de cette application et on va pouvoir, grâce au noyau, écrire la norme de manière explicite.

Propriété 6. Soit $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ de la forme $\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}$, alors la définition du noyau reproduisant k_I nous donne :

$$\|\mu\|_{I'}^2 = \sum_{i,j=1}^n a_i a_j k_I(x_i, x_j). \quad (43)$$

Cette formule sera utile car dans la pratique, on va travailler avec des mesures empirique. Remarquons que toute mesure signée peut être approchée par des mesures empirique (pour la norme en variation totale et donc aussi pour $\|\cdot\|_{I'}$). En fait, en utilisant la propriété de reproduction du noyau on a une expression de la norme pour tous les éléments de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$.

Propriété 7. Soit $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$, si nous considérons μ comme une forme linéaire sur I , sa norme est donnée par

$$\|\mu\|_{I'} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_I(x, y) d\mu(x) d\mu(y). \quad (44)$$

Démonstration. Notons K_I l'isomorphisme du théorème de Riesz-Fréchet. La propriété de reproduction nous dit que la fonction $K_I(\mu) \in I$ est donnée par $x \rightarrow \langle \mu | k_I(x, \cdot) \rangle_{I'}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\mu\|_{I'}^2 &= \langle \mu | K_I(\mu) \rangle_{I'} , \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K_I(\mu)(x) d\mu(x), \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mu | k_I(x, \cdot) \rangle_{I'} d\mu(x), \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_I(x, y) d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

□

Maintenant nous donnons un résultat de continuité qui va nous permettre de définir correctement le problème d'appariement entre mesures.

Proposition 17. Supposons que I s'injecte continûment dans $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^d)$ et soit $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$. Si ϕ_n converge vers ϕ , uniformément sur le support de μ , alors $\phi_n \cdot \mu$ converge vers $\phi \cdot \mu$ dans I' .

Démonstration. Notons K les support de μ . Soit $f \in I$. D'après ce que nous avons dit plus haut nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |\langle \phi_n \cdot \mu - \phi \cdot \mu | f \rangle_{I'}| &= |\langle \mu | f \circ \phi_n - f \circ \phi \rangle_{I'}| \\ &\leq \|\mu\|_{VT} \|f\|_{1,\infty} \|\phi_n - \phi\|_{K,\infty}. \end{aligned}$$

Donc avec notre hypothèse d'injection,

$$\|\phi_n \cdot \mu - \phi \cdot \mu\|_{I'} \leq c_I \|\mu\|_{VT} \|\phi_n - \phi\|_{K,\infty},$$

ce qui nous donne le résultat. □

Si μ est à support compact, cette proposition implique que la fonctionnelle $A : \mathcal{A}_V \rightarrow I'$ qui à ϕ associe $\phi \cdot \mu$ est continue pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Nous avons déjà vu qu'une telle propriété nous permet de définir correctement le problème (PA) .

5.2 Appariement de mesures.

Nous définissons maintenant une fonctionnelle A (deuxième terme du problème (PA)). Soient μ_a et μ_b deux mesures de $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$. On suppose que μ_a est à support compact. Alors, on définit $A : \mathcal{A}_V \rightarrow [0, \infty[$ par

$$A(\phi) = \|\phi \cdot \mu_a - \mu_b\|_{I'}^2. \quad (45)$$

Proposition 18. *L'application $v \rightarrow A(\phi_1^v)$ de L_V^2 dans $[0, \infty[$ est faiblement continue.*

Démonstration. Ce résultat découle du théorème de faible continuité de l'application flot (théorème 8), de la proposition précédente et de la continuité de la norme. $\square$

Ainsi, nous arrivons à la définition d'un problème d'appariement adapté au cas des ensembles de points non labélisés :

Définition 12. *Le difféomorphisme optimal sur $\mathbb{R}^d$ pour l'appariement de μ_a et μ_b est la solution du problème de minimisation sur V :*

$$J(v) = \lambda \|v\|_{L_V^2} + A(\phi_1^v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \|\phi_1^v \cdot \mu_a - \mu_b\|_{I'}^2. \quad (46)$$

Enfin, nous terminons ce mémoire par un résultat de consistance. Supposons que l'on souhaite réaliser l'appariement entre deux courbes compactes O_1 et O_2 . Nous considérons alors les mesures μ et ν associées à ces courbes (mesures uniformes). Nous venons de voir que le problème (PA) est bien posé et qu'il existe un champ de vecteur v^* , optimal pour cet appariement.

Dans la pratique, nous allons échantillonner ces courbes et travailler avec deux mesures :

$$\mu_e = \sum_{i=1}^{N_1} \alpha_i \delta_{a_i} \quad \text{et} \quad \nu_e = \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j \delta_{b_j},$$

où les a_i sont des points de O_1 et les b_j des points de O_2 . Cette réduction ne doit pas trop affecter le résultat, il faut donc que pour N_1 et N_2 assez grand, la solution du problème empirique v_e^* soit assez proche de v^* . C'est l'objet de la section suivante.

5.3 Consistance

Lemme 8. *Soit $(\mu_n)_n$ une suite bornée de mesures toutes supportées par une même compact K . Si $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers 0, alors elle converge vers 0 dans I' .*

Démonstration. On peut approcher $k_I(x, y)$ par une combinaison linéaire de fonctions du type $f(x)g(y)$ où f et g sont continues bornées. On a alors

$$\begin{aligned} \|\mu_n\|_{I'}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_I(x, y) d\mu_n(x) d\mu_n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_I(x, y) - \sum_{p=0}^P a_p f_p(x) g_p(y) d\mu_n(x) d\mu_n(y) + \sum_{p=0}^P a_p \langle \mu_n | f_p \rangle \langle \mu_n | g_p \rangle. \end{aligned}$$

La première quantité est arbitrairement petite (les μ_n sont toutes supportées par un même compact), la seconde tend vers 0 par convergence faible. $\square$

Lemme 9. Si le noyau scalaire k_I vérifie $k_I(x, y) > 0$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $\partial_1 \log k_I$ est bornée sur tout compact. Alors, pour tout compact K et $M > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mu \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ de support inclu dans K , et tout $v \in L_V^1$ tel que $\|v\|_{L_V^1} \leq M$, alors $\|\phi_1^v \cdot \mu\|_{I'} \leq C\|\mu\|_{I'}$.

Démonstration. Commençons par remarquer que les hypothèses de compacité et de fonction bornée nous permettent de dériver sous le signe intégrale. Ensuite, en utilisant l'action de transport on a :

$$\begin{aligned} \|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_I(x, y) d[\phi_t^v \cdot \mu(x)] d[\phi_t^v \cdot \mu(y)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} k_I(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y)) d\mu(x) d\mu(y), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 &= 2 \int_{\mathbb{R}^d} \partial_1 [\log k_I(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y))] \cdot v_t(\phi_t^v(x)) k_I(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y)) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq c \|v_t\|_V \|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2. \end{aligned}$$

La constante c est le maximum de $\partial_1 \log k_I$ sur l'ensemble des $(\phi_t^v(x), \phi_t^v(y))$ pour $x, y \in K$ et $v \in L_V^1$ tel que $\|v\|_{L_V^1} \leq M$. C'est un ensemble compact d'après le lemme 4 (contrôle en espace). Ainsi, en écrivant

$$\|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 - \|\phi_0^v \cdot \mu\|_{I'}^2 = \|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 - \|\mu\|_{I'}^2 = \int_0^t \frac{d}{dt} \|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 dt,$$

on obtient

$$\|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 \leq \|\mu\|_{I'}^2 + c \int_0^t \|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 \|v_t\|_V dt.$$

Le lemme de Gronwall nous permet de conclure que

$$\|\phi_t^v \cdot \mu\|_{I'}^2 \leq \|\mu\|_{I'}^2 \exp(c\|v\|_{L_V^1}).$$

En prenant la racine, on termine la démonstration. $\square$

Finalement, on démontre le théorème de consistance qui nous sera utile pour travailler avec des mesures empiriques.

Théorème 14. Supposons que le noyau k_I vérifie $k_I(x, y) > 0$ et $\partial_1 k_I$ bornée sur tout compact. Soient μ_a et μ_b deux mesures à support compact sur $\mathbb{R}^d$ et supposons que v^* est une solution du problème d'appariement de μ_a et μ_b . On suppose de plus que v^* est unique. Soient $(\mu_a^n)_n$ et $(\mu_b^n)_n$ deux suites de mesures dans $\mathcal{M}_s(\mathbb{R}^d)$ dont les supports sont tous inclus dans un même compact et telles que $(\mu_a^n)_n$ converge faiblement vers μ_a et $(\mu_b^n)_n$ converge faiblement vers μ_b (par exemple des mesures empiriques). Alors, les champs optimaux v_n^* pour l'appariement de μ_a^n vers μ_b^n , converge faiblement dans L_V^2 vers v^* .

Démonstration. Considérons la fonctionnelle $J_n : L_V^2 \rightarrow \mathbb{R}$ associée au problème d'appariement

$$J_n(v) = \lambda \int_0^1 \|v_t\|_V^2 dt + \|\phi_1^v \cdot \mu_a^n - \mu_b^n\|_{I'}^2 \quad (PAN) \quad (47)$$

Remarquons que nous pouvons restreindre le domaine de recherche à un sous ensemble borné de L_V^2 . En effet, les solutions v_n^* doivent vérifier

$$\lambda \int_0^1 \|v_{nt}^*\|_V^2 dt \leq J_n(0) = \|\mu_a^n - \mu_b^n\|_{I'}^2.$$

D'après l'hypothèse de convergence faible et le lemme 8 μ_a^n et μ_b^n converge dans I' et $\|\mu_a^n - \mu_b^n\|_{I'}^2$ est bornée. Maintenant, on utilise le lemme 8 et le lemme 9 pour dire que $\phi_1^v \cdot \mu_a^n - \mu_b^n$ converge vers $\phi_1^v \cdot \mu_a - \mu_b$ dans I' et que cette convergence est uniforme sur le domaine de recherche (borné) de la solution. Ainsi, $J_n(v)$ converge uniformément vers $J(v)$ sur ce domaine.

Pour terminer la démonstration il suffit de montrer que toute sous-suite faiblement convergente de v_n^* converge vers v^* (car v_n^* est bornée). Soit u_n une telle sous-suite, et u sa limite faible. Nous avons $J_n(u_n) \leq J_n(v^*)$ car u_n est optimale. De plus $J_n(v^*)$ tend vers $J(v^*)$. Enfin, $J_n(u_n)$ tend vers $J(u)$ car

$$|J_n(u_n) - J(u)| \leq |J_n(u_n) - J(u_n)| + |J(u_n) - J(u)|,$$

le premier terme tend vers 0 par convergence uniforme, le second, par continuité faible. Ainsi, $J(u) \leq J(v^*)$ et donc, $u = v^*$ (on a supposé l'unicité de v^*). $\square$

6 Conclusion

Au terme de ce mémoire nous connaissons une méthode adaptée à l'appariement de nuages de points. Le travail est loin d'être terminé. Il est clair que le choix du noyau influence grandement les espaces fonctionnelles générés et nous ne savons pas s'il est souhaitable de travailler avec des transformations très régulières (choix du noyau gaussien). Par conséquent, une étude rigoureuse de cette influence doit être menée. De plus, nous n'avons pas abordé l'aspect algorithmique de la méthode. En imagerie, la quantité de données est souvent très importante et nécessite des algorithmes efficaces. Le lecteur trouvera des réponses à ces questions dans la thèse de M.Glaunès [1], nous terminons ce mémoire en invitant toute personne intéressée à consulter ce document de grande qualité.

7 Remerciements

Je remercie Hermine Biermé et Julien Dambrine, mes deux maîtres de stage, pour m'avoir orienté vers ce sujet riche et stimulant. Merci également pour leur attention et le temps qu'ils m'ont généreusement accordé.

8 Annexe

Le script Scilab ci-dessous permet de générer la figure 1. Il s'agit d'un système de Lorentz avec quelques modifications.

```
mode(0);
clear;
usecanvas(%t);

// parametres

sig=10;
rho=28;
bet=8/3;

scf(1);clf();

for l= 1:10;

a=linspace(0,1,1000);

h=1/length(a);

U=zeros(1000,3);

for i=1:3;
    U(1,i)=i+1;
end;

function f=flot3d(t,X);
    f= [t*sig*(X(2)-X(1)),(1/(0.05 + t))*X(1)*(rho-X(3))-X(2),X(1)*X(2)-bet*X(3)]
endfunction

for k=2:length(a);
    U(k,:)=U(k-1,:)+h*flot3d(a(k-1),U(k-1,:));
end;

param3d(U(:,1),U(:,2),U(:,3))

e=gce() //the handle on the 3D polyline

e.foreground=color('red');

a=gca(); //the handle on the axes
a.rotation_angles=[10 70];
end;
```

Références

- [1] JOAN ALEXIS GLAUNÈS, *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique.*
- [2] A. MUNNIER, *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles.*
- [3] HAÏM BREZIS, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications.*
- [4] DAVID GINSBOURGER, *Métamodèles Multiples pour l'Approximation et l'Optimisation de Fonctions Numériques Multivariables*
- [5] MARK JENKINSON AND STEPHEN SMITH, *Optimisation in Robust Linear Registraion of Brain Images*