

## THÈSE



Pour l'obtention du grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS École nationale supérieure d'ingénieurs (Poitiers) Laboratoire d'informatique et d'automatique pour les systèmes - LIAS (Poitiers) (Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM (Poitiers) Secteur de recherche : Automatique et application

> Présentée par : Mohamed Farah

## Estimation paramétrique de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

Directeur(s) de Thèse : Thierry Poinot, Guillaume Mercère, Régis Ouvrard

Soutenue le 08 décembre 2016 devant le jury

#### <u>Jury :</u>

Président	Mohamed Chaabane	Professeur, École nationale d'ingénieurs de Sfax, Tunisie	
Rapporteur	Francisco Carrillo	Professeur des Universités, ENIT, Tarbes, INP de Toulouse	
Rapporteur Laurent Autrique		Professeur des Universités, Université d'Angers	
Membre Thierry Poinot		Professeur des Universités, Université de Poitiers	
Membre Guillaume Mercère		Maître de conférences, Université de Poitiers	
Membre Régis Ouvrard		Maître de conférences, Université de Poitiers	
Membre	Sylvain Lalot	Professeur des Universités, Université de Valenciennes	

#### Pour citer cette thèse :

Mohamed Farah. Estimation paramétrique de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles [En ligne]. Thèse Automatique et application. Poitiers : Université de Poitiers, 2016. Disponible sur Internet <a href="http://theses.univ-poitiers.fr">http://theses.univ-poitiers.fr</a>

#### THESE

pour l'obtention du grade de

#### DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE POITIERS (Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers) (Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole Doctorale : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

Secteur de Recherche : Automatique et Application

Présentée par Mohamed FARAH

# Estimation paramétrique de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles

Directeur de t Co-encadrants	hèse : :	Thierry POINOT Guillaume MERCI Régis OUVRARD	ERE	Université de Poitiers, LIAS Université de Poitiers, LIAS Université de Poitiers, LIAS
Prése	entée et	soutenue publique	ment	le 8 Décembre 2016
COMPOSITION DU JURY				JURY
Rapporteurs :	Lauren	t AUTRIQUE	Profe LARI	esseur des Universités S-ISTIA. Université d'Angers
	Francis	sco CARRILLO	Profe	esseur des Universités ENI de Tarbes
Examinateurs :	Sylvair	1 LALOT	Profe LAM	esseur des Universités IH, Université de Valenciennes
	Mohan	ned CHAABANE	Profe ENIS	esseur des Universités , Université de Sfax
	Thierry	y POINOT	Profe LIAS	esseur des Universités . Université de Poitiers
	Guillau	Ime MERCERE	Maîti LIAS	re de Conférences HDR Université de Poitiers
	Régis (	OUVRARD	Maîti LIAS	re de Conférences , Université de Poitiers

Thèse préparée au sein du Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes de Poitiers

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une thèse au sein de l'équipe Identification du Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes de Poitiers (LIAS) de l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ENSIP).

Je tiens à remercier, et en premier lieu, Dieu pour toutes ces bénédictions qu'il m'a offertes et de m'avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Thierry POINOT, Professeur à l'Université de Poitiers, pour m'avoir fait confiance en me permettant d'effectuer ces travaux au sein de son équipe, pour ses compétences et son enthousiasme pour le travail et pour son encadrement exemplaire. Je le témoigne toute ma reconnaissance pour les fructueuses discussions que nous avons eues et son soutien pour que la recherche réalisée se déroule dans des conditions favorables.

Je tiens à témoigner à Guillaume MERCÈRE, Maître de Conférence HDR à l'Université de Poitiers, co-directeur de thèse. Ses commentaires, ses suggestions et sa clairvoyance m'ont été d'une aide précieuse tout au long de ce travail. J'aimerais aussi le remercier pour l'autonomie qu'il m'a accordé, et ses conseils qui m'ont permis de m'enrichir autant sur le plan professionnel que personnel.

J'ai eu l'immense plaisir de travailler avec Régis OUVRARD, maître de Conférences à l'Université de Poitiers, co-directeur de thèse. Je tiens à le remercier pour ses précieux conseils, sa disponibilité permanente dans l'encadrement de ce travail. Par ses grandes compétences scientifiques et ses remarquables qualités humains, il a su rendre chaleureusement et fructueuse ces années de recherche.

Je remercie tout spécialement Monsieur Laurent AUTRIQUE, Professeur à Université d'Angers et Monsieur Francisco CARRILLO, Professeur à l'ENI de Tarbes pour avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de participer au jury.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Mohamed CHAABANE, professeur à l'ENIS, Tunisie et Monsieur Sylvain LALOT, Professeur à l'Université de Valenciennes pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à ce jury de thèse. Je pense à toutes les équipes du laboratoire LIAS, aussi bien les doctorants que les permanents, pour les très bonnes conditions de travail et la sympathique ambiance qui m'ont permis de mener à bien mes travaux.

Je tiens à remercier du fond du cœur mes parents qui m'ont encouragée tout au long de ces années d'études. Qu'ils reçoivent ici ma profonde gratitude pour leurs innombrables sacrifices. Merci aussi à mes deux chères sœurs Soumaya et Wafa.

À mon épouse Amal qui m'a toujours soutenu et qui m'a beaucoup aidé durant ces années. A toi, je te dis merci, merci pour ta patience, merci pour ton soutien, en un mot merci d'être ce que tu es.

Mes derniers remerciements vont à :

A mes adorables neveux Mohamed, Omar et Youssef.

A ma chère nièce Aloula.

A tous mes amis(es).

ii

## Table des matières

remercier i				
In	trod	uction	générale	1
1	Intr	oducti	ion et état de l'art sur l'identification des EDP	<b>5</b>
	1.1	Introd	luction	5
	1.2	Modél	lisation à temps continu	6
		1.2.1	Équation différentielle	6
		1.2.2	Équation différentielle ordinaire	7
		1.2.3	Équations aux dérivées partielles	9
			1.2.3.1 Exemples de systèmes régis par des équations aux	
			dérivées partielles	9
			1.2.3.2 Conditions aux limites	10
			1.2.3.3 Résolution des équations aux dérivées partielles	11
	1.3	Outils	d'identification	13
		1.3.1	Algorithme à erreur d'équation	15
		1.3.2	Algorithme à erreur de sortie	16
	1.4	Estim	ation paramétrique des équations aux dérivées partielles	18
		1.4.1	Méthodes basées sur les différences finies	18
		1.4.2	Méthodes basées sur le filtrage des signaux	22
		1.4.3	Méthodes basées sur la réduction du modèle	23
		1.4.4	Méthodes basées sur la modélisation fractionnaire	25
	1.5	Conclu	usion	26
<b>2</b>	Ide	ntificat	tion de systèmes régis par des EDPs basée sur les RPM	<b>27</b>
	2.1	Introd	luction	27
	2.2	Rapp	els sur les moments partiels réinitialisés	28
		2.2.1	Définition des moments partiels $1D$	28
		2.2.2	Modèle de sortie basé sur les moments partiels $1D$	28
		2.2.3	Définition des moments partiels réinitialisés $1D$	30
		2.2.4	Modèle de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés $1D$	30

		2.2.4.1	Cas simple	30
		2.2.4.2	Cas général	31
	2.2.5	Identific	ation et implémentation	32
		2.2.5.1	Estimation par les moindres carrés	32
		2.2.5.2	Estimation par l'approche variable instrumentale .	33
2.3	Mome	ents parti	els $2D$	33
	2.3.1	Définitio	on des moments partiels $2D$	33
	2.3.2	Propriét	és statistiques - Étude d'un cas simple	34
		2.3.2.1	Modèle basé sur les moments partiels	34
		2.3.2.2	Covariance des moments partiels avec la méthode	
			des rectangles	36
		2.3.2.3	Hypothèse d'un bruit blanc	36
		2.3.2.4	Hypothèse d'un bruit corrélé	42
		2.3.2.5	Conclusion	44
	2.3.3	Diffusion	n de chaleur dans un mur $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	47
		2.3.3.1	Position du problème	47
		2.3.3.2	Modèle basé sur les moments partiels $2D$	47
		2.3.3.3	Moyenne de l'erreur d'approximation en présence de	
			bruit blanc	49
		2.3.3.4	Variance de l'erreur d'approximation en présence de	
			bruit blanc	50
~ .	2.3.4	Conclus	ion	52
2.4	Mome	nts partie	els réinitialisés $2D$	52
	2.4.1	Définitio	on des moments partiels réinitialisés $2D$	52
	2.4.2	Modèle	de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés $2D$	52
	2.4.3	Identific	ation et implémentation	53
		2.4.3.1	Estimation par les moindres carrés	53
		2.4.3.2	Estimation par l'approche variable instrumentale .	54
		2.4.3.3	Implémentation des moments partiels réinitialisés .	54
	2.4.4	Discussi	on	55
2.5	Identi	fication d	u coefficient de diffusion de la chaleur dans un mur	
	therm	ique		55
	2.5.1	Identific	ation avec des mesures uniformément réparties	55
		2.5.1.1	Simulation	56
		2.5.1.2	Modèle basé sur les moments partiels réinitialisés $2D$	58
		2.5.1.3	Résultats	59
	2.5.2	Identific	ation avec des mesures non uniformément réparties .	62
		2.5.2.1	Etude sans bruit de mesure	62
		2.5.2.2	Etude en présence de bruit	63
	2.5.3	Conclus	ion sur la répartition de capteurs	64
2.6	Conclu	usion		64

3	Ide	ntification de systèmes régis par des EDP par optimisation non	
	liné	aire	67
	3.1	Introduction	67
	3.2	Représentation d'état $2D$ classique $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	69
		3.2.1 Modèle de Roesser	69
		3.2.1.1 Système d'absorption de gaz	69
		3.2.1.2 Processus de sorption	70
		3.2.2 Modèle de Fornasini-Marchesini	72
		3.2.3 De Roesser à Fornasini-Marchesini et vice versa	73
	3.3	Lien entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fraction-	
		naire	74
		3.3.1 Rappel sur la représentation linéaire fractionnaire	74
		3.3.2 Description du modèle d'état LTI $1D$ sous forme d'une repré-	
		sentation linéaire fractionnaire	75
		3.3.3 Description du modèle $2D$ de Roesser sous forme d'une re-	
		présentation linéaire fractionnaire	75
		3.3.4 Identification du modèle 2D de Roesser	77
		3.3.5 Discussion	79
	3.4	Exemple de simulation	79
		3.4.1 Modèle causal, récursif et séparable en dénominateur	80
		$3.4.1.1$ Simulation $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$ $\ldots$	80
		3.4.1.2 Résultats	80
	3.5	Conclusion	83
4	Ider	ntification paramétrique d'un échangeur de chaleur à co-courant	85
	4.1	Introduction	85
	4.2	Échangeur de chaleur à co-courant	86
		4.2.1 Équations de transfert de chaleur	86
		4.2.2 Simulation	87
	4.3	Approche à erreur d'équation	88
		4.3.1 Modèle basé sur les moments partiels réinitialisés $2D$	88
		4.3.2 Intervalle de réinitialisation optimal	91
		4.3.3 Identification avec des mesures uniformément et non unifor-	
		mément réparties	93
		$4.3.3.1  \text{Étude sans bruit de mesure}  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  \ldots  $	93
		4.3.3.2 Étude en présence de bruit	94
	4.4	Approche à erreur de sortie	95
		4.4.1 Initialisation pseudo-aléatoire	96
		4.4.2 Initialisation basée sur les moments partiels réinitialisés	99
	4.5	Conclusion	100
Co	onclu	ision générale	101
Δ	Een	árance mathámatique des produits de moments particle	105
× •	чор	si ance manifemanique des produits de momento partició	-00

 $\mathbf{v}$ 

B Rappel sur les méthodes des sous-espace B.1 Rappel sur l'algorithme $N4SID$ : cas $1L$ B.2 Rappel sur l'algorithme $N4SID$ : cas $2L$	es     107       0       107       0       110		
Bibliographie 1			
Abstract	125		
Résumé	127		

vi

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

La construction d'un modèle mathématique consiste à représenter un système par un modèle mathématique décrivant au mieux son comportement dynamique. L'élaboration de ce modèle peut être réalisée soit en se basant exclusivement sur les lois physiques gouvernant le comportement du procédé, soit par des approximations se basant uniquement sur des données expérimentales, soit en combinant les deux approches. Cette étape de modélisation est présentée souvent comme la première phase dans l'automatique moderne.

Dans ce travail, on s'intéresse aux systèmes régis par des équations aux dérivées partielles. Contrairement aux équations différentielles ordinaires, ces équations se caractérisent par plusieurs variables indépendantes (variables spatiales, x, y et z, variable temporelle t, etc). Dans ce travail, on se limite à deux variables, une variable spatiale x et une variable temporelle t. Par contre, les outils proposés ici peuvent être étendus à des systèmes à n variables.

Il est bien connu que la plupart des phénomènes qui apparaissent dans les domaines de la physique et de l'ingénierie peuvent être décrit par des équations aux dérivées partielles. En physique, par exemple, le flux de chaleur et le phénomène de propagation d'ondes sont décrits par des équations aux dérivées partielles. En écologie, les dynamiques de population sont régies par des équations aux dérivées partielles. Même en chimie, la dispersion d'un matériau réactif est caractérisée par une équation aux dérivées partielles. Ainsi, ces équations sont devenues un outil utile pour décrire des phénomènes scientifiques et technologiques.

Au sein du Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes (LIAS), plusieurs outils et méthodes d'identification paramétrique des équations différentielles ordinaires sont élaborés. Par contre, l'identification des équations aux dérivées partielles est récemment étudiée. À l'aide des modèles fractionnaires, Poinot et Trigeassou (2002, 2003) ont réussi à identifier les équations de diffusion de la chaleur.

Ces travaux de recherche répondent à la problématique liée à l'identification paramétrique de modèles de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles continues dans l'espace et le temps. Actuellement, la plupart des outils logiciels et des techniques d'identification sont dédiés aux équations différentielles ordinaires. Cependant, on ne peut pas les appliquer directement aux équations aux dérivées partielles. Les estimateurs proposés dans ce mémoire présentent une extension des ces techniques.

Ce mémoire de thèse est organisé en quatre chapitres décrivant le développement de deux estimateurs pour résoudre la problématique.

Chapitre 1 : Introduction et état de l'art sur l'identification des équations aux dérivées partielles. Ce chapitre est consacré à présenter le problème d'identification des équations aux dérivées partielles. Dans ce contexte, on présente les deux principaux algorithmes d'identification utilisés dans ce travail :

- l'algorithme à erreur d'équation,
- l'algorithme à erreur de sortie.

Dans la suite, on cite trois grandes familles de méthodes d'identification paramétrique des équations aux dérivées partielles

- méthodes basées sur les différences finies,
- méthodes basées sur le filtrage des signaux,
- méthodes basées sur la réduction du modèle,
- méthodes basées sur la modélisation fractionnaire.

Chapitre 2 : Identification de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles basée sur les moments partiels réinitialisés. Dans ce chapitre, et dans un première étape, on propose un rappel sur les moments partiels réinitialisés 1D. Dans un seconde étape, et après avoir introduit les moments partiels réinitialisés 2D, une étude statistique est proposée afin de montrer l'influence de l'intervalle d'intégration sur l'estimation des paramètres. Les performances de cette approche sont testées à l'aide d'un exemple de simulation : la diffusion de la chaleur dans un mur thermique.

Chapitre 3 :Identification de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles par optimisation non linéaire. Les systèmes décrits par les équations aux dérivées partielles sont des systèmes multidimensionnels. Ainsi, ce chapitre est consacré à l'identification des modèles multidimensionnels, et plus précisément au modèle 2D de Roesser. Ce modèle peut être facilement décrit à l'aide d'une représentation linéaire fractionnaire. Ainsi, une attention particulière est dédiée à un algorithme à erreur de sortie afin d'identifier cette représentation. Chapitre 4 : Identification paramétrique d'un échangeur de chaleur à co-courant. Dans ce chapitre, une attention particulière est accordée à l'échangeur de chaleur à co-courant. Dans un premier temps, la méthode des moments partiels réinitialisés développée au chapitre deux est mise en œuvre sur le modèle de l'échangeur. Les résultats sont biaisés mais permettent néanmoins d'initialiser l'approche à erreur de sortie développée au chapitre 3.

À la fin de ce manuscrit, une conclusion générale présente un résumé de ce travail et quelques perspectives en lien avec la problématique de cette thèse.

#### Chapitre 1

## INTRODUCTION ET ÉTAT DE L'ART SUR L'IDENTIFICATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

## 1.1 Introduction

L'identification est un processus essentiel et indispensable en automatique. Cette étape se caractérise par la modélisation et l'estimation paramétrique (Landau, 1988; Ljung, 2000; Söderström et Stoica, 1989). La modélisation consiste à construire une structure de modèle mathématique qui approxime le comportement dynamique et statique du système. L'estimation paramétrique consiste à estimer les paramètres de ce modèle à partir des données d'entrée-sortie du système.

La modélisation du système est une étape fondamentale qui précède toute démarche de simulation, de surveillance, d'établissement d'une loi de commande, etc. Ces modèles peuvent être classés selon trois catégories :

- Les modèles de type boite blanche : ces modèles mathématiques sont obtenus théoriquement à partir des lois physiques selon le domaine étudié, chimie, physique, mécanique, thermique, etc. Cette catégorie nécessite d'être spécialiste du domaine d'application.
- Les modèles de type boite noire : ces modèles mathématiques sont élaborés à partir de mesures des entrées-sorties issues du système. Contrairement au modèle de type boite blanche, la modélisation est obtenue à partir des essais expérimentaux sans aucune connaissance sur les lois physiques du système. Cette méthode est aussi appelée modèle de comportement.
- Les modèles de type boite grise : c'est une combinaison entre les deux premières catégories. En effet, cette technique permet d'introduire des connaissances physiques dans le modèle de comportement.

Notons de plus que les modèles peuvent être présentés sous la forme d'équation à temps continu ou à temps discret. Dans cette thèse, on s'intéresse aux modèles à temps continu. Souvent, un système dynamique peut, sous certaines hypothèses,

être facilement représenté par une équation différentielle ordinaire (EDO), modèle à temps continu simple généralement valide au voisinage d'un point de fonctionnement. Cependant, pour de nombreux systèmes ou pour diverses applications, les EDOs ne suffisent pas à représenter le comportement dynamique. Il est alors préférable de considérer des modèles à temps continu définis par des équations aux dérivées partielles (EDP). Dans ce travail de thèse, on s'intéresse à cette modélisation par EDP.

Dans ce chapitre, après une présentation des modèles à temps continu utilisés, une vue d'ensemble sur l'estimation paramétrique est présentée. Ainsi, on présente des deux familles d'algorithmes d'identification à temps continu qui sont utilisées dans ce travail : les algorithmes à erreur d'équation et les algorithmes à erreur de sortie (Ljung, 1999; Richalet *et al.*, 1971; Walter et Pronzato, 1997). Il est à noter que la méthode d'estimation est imposée par la structure du modèle. La méthode à erreur d'équation est élaborée à partir des termes de l'équation du modèle. Les algorithmes correspondants, généralement basés sur une approche simple des moindres carrés, sont souvent biaisés en raison de la présence de bruit au niveau des données de mesure. La méthode à erreur de sortie est obtenue à partir de la minimisation d'un critère quadratique basé sur l'erreur de sortie, écart entre la sortie mesurée du système et la sortie simulée du modèle. Les algorithmes correspondants sont itératifs et généralement non biaisés asymptotiquement. Ils nécessitent cependant une initialisation et peuvent converger vers des optimums secondaires.

Ce chapitre présente également un état de l'art sur l'identification des EDPs. Dans la littérature, plusieurs méthodes sont proposées. Parmi ces méthodes, on décrit les méthodes basées sur les différences finies (Mitchell et Griffiths, 1980), les méthodes basées sur le filtrage des signaux (Garnier et Wang, 2008) et les méthodes basées sur la réduction du modèle (Li et Qi, 2010).

Dans cette thèse, on aborde le problème de l'identification de modèles de type boite grise représentés par des EDPs. De nouveaux outils pour l'estimation des EDPs sont développés en combinant des approches à erreur d'équation et à erreur de sortie.

## 1.2 Modélisation à temps continu

Dans ces travaux de recherche, on intéresse à la modélisation des systèmes dynamiques. Mathématiquement, ces systèmes peuvent être représentés par des équations différentielles qui peuvent être divisées en deux grandes classes : les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles.

#### 1.2.1 Équation différentielle

Une équation différentielle est une équation constituée d'une ou plusieurs fonctions dépendant d'une ou plusieurs variables ainsi que de dérivées de ces fonctions par rapport à ces variables (Kreyszig, 2006). L'ordre d'une équation différentielle est donné par l'ordre de dérivation le plus grand (Bronshtein *et al.*, 2007).

#### 1.2.2 Équation différentielle ordinaire

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation différentielle ne dépendant que d'une seule variable. Dans le cadre des systèmes dynamiques qui nous intéressent dans ce travail, la variable est le temps t. Voici ci-dessous quelques exemples de systèmes modélisés par des équations différentielles ordinaires.

• Mécanique

La loi de Newton présente un simple modèle mécanique. En effet, elle montre la relation entre l'accélération v(t) d'un point matériel x(t) de masse m et la résultante  $\mathbf{F}(x(t))$  des forces appliquées sur ce point

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(x(t)), \qquad (1.1a)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt},$$
(1.1b)

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x) &= -Kx \text{ avec } K > 0 & (\text{oscillateur harmonique}), \\ \mathbf{F}(x) &= -m \; (g/\ell) \; \sin x & (\text{pendule simple de longueur } \ell), \\ \mathbf{F}(x) &= \lambda(x)x \; \text{avec } \lambda(x) \in \mathbb{R} & (\text{force centrale}), \\ \mathbf{F}(x) &= -\text{grad}V(x) & (\text{champ potentiel}), \end{aligned}$$
 (1.2)

où g est l'accélération de la pesanteur,  $\lambda(x)$  est le coefficient de frottement au point x et V(x) est l'énergie potentielle au point x.

• Électricité

Considérons une résistance R connectée en série avec un condensateur C, comme représenté sur la figure 1.1.



FIGURE 1.1 – Charge et décharge d'un circuit RC.

Une batterie, fournissant une force électromotrice, se connecte à ce circuit par l'intermédiaire d'un interrupteur. Au départ, l'interrupteur est connecté en b. Ainsi

le condensateur est déchargé. Lorsque l'interrupteur est placé en a, la tension de batterie est appliquée au circuit RC et le condensateur se charge. Cependant, quand l'interrupteur passe en b, la batterie est déconnectée et le condensateur se décharge.

Les tensions à travers une résistance et un condensateur sont représentées par

$$V_R(t) = Ri(t)$$
 et  $V_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ , (1.3)

où la relation entre la charge q(t) et le courant i(t) est donnée par

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}.$$
(1.4)

À partir des équations (1.3) et (1.4), on exprime la tension aux bornes de la résistance en fonction de la tension aux bornes du condensateur

$$V_R(t) = RC \frac{dV_C(t)}{dt}.$$
(1.5)

En appliquant la loi de Kirchhoff lorsque l'interrupteur est en a, la force électromotrice est égale à la somme des tensions dans la boucle fermée

$$V_R(t) + V_C(t) = \epsilon. \tag{1.6}$$

En remplaçant  $V_R(t)$  dans l'équation précédente, une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre est obtenue

$$\frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{V_C(t)}{RC} = \frac{\epsilon}{RC}.$$
(1.7)

• Chimie

Supposons que deux produits chimiques A et B réagissent pour former un produit C qu'on écrit comme suit

$$A + B \xrightarrow{k} C, \tag{1.8}$$

où k est appelée la constante de vitesse de la réaction.

Notons par a(t), b(t) et c(t) les concentrations des réactants A, B et le résultant C, respectivement. D'après la loi d'action de masse,  $\frac{dc(t)}{dt}$  est proportionnelle au produit des concentrations a(t) et b(t)

$$\frac{dc(t)}{dt} = ka(t)b(t).$$
(1.9)

De même, la loi d'action de masse permet de décrire les équations aux dérivées temporelles de la concentration des réactants A et B

$$\frac{da(t)}{dt} = -ka(t)b(t), \quad \frac{db(t)}{dt} = -ka(t)b(t).$$
(1.10)

#### 1.2.3 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles (EDP) se différencie d'une EDO par un nombre de variables indépendantes la composant supérieur à un. Dans ce manuscrit, on se limite à deux variables indépendantes qui sont la variable temporelle t et la variable d'espace x. Ces équations apparaissent fréquemment dans tous les domaines de la physique et en ingénierie.

#### 1.2.3.1 Exemples de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles

• Équation d'onde

Prenons l'exemple classique d'une corde tendue placée le long d'un axe x et fixée en x = 0 et x = L (voir figure 1.2). Soit u(x, t) le déplacement transversal de la corde.



FIGURE 1.2 – Oscillation libre d'une corde.

Sous réserve de diverses hypothèses (forces d'amortissements négligées, poids de la corde négligé, etc.) et en appliquant la loi du mouvement de Newton, la fonction u(x,t) satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\tag{1.11}$$

où c est une constante positive désignant la vitesse de l'onde.

Cette equation d'onde représente un système du deuxième ordre par rapport au temps et à l'espace. Si certains facteurs sont pris en compte, des formes plus complexes de cette équation sont mises en jeu :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - g, \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \ (\alpha \ : \ \text{amortissement}). \end{cases}$$
(1.12)

#### • Ligne de transmission

Pour un cable électrique (suffisamment long) ou un fil téléphonique, le courant et la tension dépendent de la position le long du fil ainsi que de la variable de temps (figure 1.3).



FIGURE 1.3 – Ligne de transmission.

À l'aide des lois de base de l'électricité, il est possible de montrer que le courant électrique i(x, t) satisfait l'EDP suivante :

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + RGi(x,t), \quad (1.13)$$

où les constantes R, L, C et G sont, respectivement, la résistance, l'inductance, la capacité et la conductance de fuite. Cette equation représente un système du deuxième ordre par rapport au temps et à l'espace.

Pour un cable sous-marin, la conductance de fuite et les effets inductifs peuvent être négligés. Dans ce cas, l'équation (1.13) devient :

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = RC \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}.$$
(1.14)

Cette équation représente un système du premier ordre par rapport au temps et du deuxième ordre par rapport à l'espace.

#### 1.2.3.2 Conditions aux limites

Les EDO et les EDP sont généralement complétées par des conditions initiales (conditions imposées au temps t = 0) et des conditions aux limites indiquant le comportement du système à ses frontières. Il existe un grand nombre de conditions aux limites selon les conditions expérimentales et l'équation mise en jeu. Les plus connues sont les conditions aux limites de Neumann et Dirichlet (Brezis, 2010).

• Condition de Neumann : cette condition consiste à imposer les valeurs des dérivées que la solution doit vérifier aux frontières du domaine

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial n} = f(t) \text{ pour } x \in \overline{\Omega} \text{ et } t > 0, \qquad (1.15)$$



FIGURE 1.4 – Vecteur normal au domaine.

où y(x,t) représente la sortie,  $\Omega$  est le domaine spatial et n est la normale au domaine spatial (figure 1.4).

• Condition de Dirichlet : cette condition consiste à imposer les valeurs que la solution doit vérifier aux frontières du domaine

$$y(x,t) = g(t) \text{ pour } x \in \Omega \text{ et } t > 0.$$

$$(1.16)$$

Ces conditions sont définies à partir des observations du système étudié. Quelle que soit la structure du système, la résolution mathématique des EDP ne peut s'obtenir qu'à partir de ces conditions, conditions aux limites et conditions initiales. Dans la section suivante, on présente deux méthodes pour la résolution des EDPs.

#### 1.2.3.3Résolution des équations aux dérivées partielles

Par rapport aux EDOs, la résolution des EDPs est plus compliquée du fait que ces équations se caractérisent par plusieurs variables indépendantes. Plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature pour résoudre ces équations (Kreyszig, 2006; Bronshtein et al., 2007).

• Solution basée sur la séparation des variables

Afin de présenter cette technique, on considère l'équation d'onde (1.11). Le principe est d'imposer que la solution u(x,t) est le produit de deux fonctions indépendantes

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$
 (1.17)

Ainsi

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t) \text{ et } \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \overset{''}{F}(x)G(t), \tag{1.18}$$

avec  $\ddot{G} = \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$  et  $\ddot{F} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ . Substituons alors ces deux égalités dans l'équation (1.11)

$$F(x)\ddot{G}(t) = c^{2} F'(x)G(t).$$
(1.19)

L'étape suivante consiste à diviser par  $c^2 FG$  à gauche et à droite de l'équation (1.19)

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = \frac{\ddot{F}(x)}{F(x)}.$$
(1.20)

L'égalité (1.20) montre bien que la séparation de deux variables temporelle et spatiale est obtenue. Le côté gauche ne dépend que de la variable t et le côté droit que de la variable x. Par conséquent, les deux côtés sont égaux à une constante

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = \frac{\ddot{F}(x)}{F(x)} = k.$$
(1.21)

Ainsi, l'EDP (1.11) est représentée par deux EDOs

$$\frac{d^2 G(t)}{dt^2} - kc^2 G(t) = 0,$$

$$\frac{d^2 F(x)}{dx^2} - kF(x) = 0.$$
(1.22)

Les méthodes classiques pour résoudre les EDOs permettent de déterminer F(x) et G(t). Ainsi, une solution pour l'EDP est obtenue. Il est à noter que la constante k est déterminée à partir des conditions limites et initiales.

• Solution basée sur la transformée de Laplace

La résolution des EDPs peut être faite en utilisant la transformée de Laplace (Kreyszig, 2006; Handibag et Karande, 2012). Pour une EDP à deux variables, la démarche est la suivante :

- 1. La transformée de Laplace par rapport à l'une des variables (généralement le temps) est appliquée à l'EDP. Le résultat est une EDO par rapport à la deuxième variable.
- 2. Cette EDO est résolue en tenant comptes des conditions initiales et aux limites.
- 3. En appliquant la transformée de Laplace inverse, la solution du problème est obtenue.

Appliquons cette méthode à l'équation d'onde (1.11) d'une corde semi-infinie. Pour cela, considérons les conditions limites suivantes (condition de Dirichlet)

$$u(0,t) = f(t), \lim_{x \to \infty} u(x,t) = 0,$$
 (1.23)

et les conditions initiales données par

$$u(x,0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \dot{u}(x,0) = 0.$$
 (1.24)

Commençons par la transformée de Laplace par rapport à t de l'équation (1.11)

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2 \mathscr{L}\left\{u\right\} - su(x,0) - \dot{u}(x,0) = c^2 \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}.$$
 (1.25)

D'après les conditions initiales, l'expression  $-su(x,0) - \dot{u}(x,0) = 0$ . De plus,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathscr{L}\left\{u\right\}.$$
 (1.26)

Posons  $U(x,s) = \mathscr{L} \{ u(x,t) \}$ , alors

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2} U(x,t) = 0.$$
(1.27)

Etant donné que cette équation contient uniquement une dérivée par rapport à x, on la considère comme une équation différentielle ordinaire. Alors, une solution générale est donnée par

$$U(x,s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}.$$
(1.28)

D'après les conditions limites, on montre que A(s) = 0. En effet,

$$\lim_{x \to \infty} U(x,s) = \lim_{x \to \infty} A(s)e^{sx/c} = 0.$$
(1.29)

Il est à noter que

$$U(0,s) = \mathscr{L}\{u(0,t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = F(s).$$
(1.30)

D'après l'equation (1.28),

$$U(0,s) = B(s) = F(s).$$
 (1.31)

Ainsi, la transformée de Laplace de u(x,t) est égale à

$$U(x,s) = F(s)e^{-sx/c}.$$
 (1.32)

À l'aide de la transformée inverse, on détermine u(x,t)

$$u(x,t) = \mathscr{L}^{-1} \{ U(x,s) \} = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$
(1.33)

### 1.3 Outils d'identification

Pour ces travaux de recherche, on s'intéresse à l'identification du système à partir des mesures expérimentales. Afin d'atteindre ce but, on propose de suivre la démarche proposée par Ljung (1999) illustrée par la figure 1.5. Commençons par recueillir les informations disponibles sur le système et créons une base de données qui contient les mesures expérimentales de la sortie et les excitations de l'entrée. Après avoir fixé la structure du modèle, la deuxième étape consiste à estimer les paramètres de ce modèle en se basant sur l'optimisation d'un critère choisi. À la fin, une étape de validation du modèle est nécessaire.



FIGURE 1.5 – Procédure d'identification des systèmes.

Dans cette section, on présente les deux principales familles d'algorithmes d'identification utilisées dans ce travail : l'algorithme à erreur d'équation (Ljung, 1999) et l'algorithme à erreur de sortie (Richalet *et al.*, 1971; Walter et Pronzato, 1997). Ces deux algorithmes sont les méthodes d'identification les plus fréquemment utilisées. Les algorithmes à erreur d'équation sont dédiés aux modèles linéaires par rapport aux paramètres et conduisent à un optimum unique. Leur biais est toutefois dépendant de la nature du bruit sur les données. Les algorithmes à erreur de sortie peuvent s'appliquer aux différents types de modèles et sont non biaisés. Toutefois, on ne peut pas garantir leur convergence vers l'optimum global.

Afin de présenter ces méthodes, on considère le système continu décrit par

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{u}^{t-1}, \mathbf{y}^{t-1} | \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v}(t).$$
(1.34)

où l'entrée est représentée par  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  est la sortie et  $\mathbf{v}(t)$  est le bruit. La fonction  $\mathbf{F}$  est la fonction qui décrit la relation entre les données d'entrée-sortie du système et  $\boldsymbol{\theta}$  est le vecteur des paramètres.

On définit l'ensemble des données d'entée-sortie sur l'intervalle de temps  $[0,N_t]$  par

$$\mathbf{u}^{k} = [\mathbf{u}(0) \ \mathbf{u}(1) \ \cdots \ \mathbf{u}(k)],$$
  
$$\mathbf{y}^{k} = [\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \cdots \ \mathbf{y}(k)].$$
 (1.35)

#### 1.3.1 Algorithme à erreur d'équation

La méthode d'erreur d'équation est élaborée à partir des termes de l'équation du modèle. L'estimation du modèle est généralement obtenue en utilisant une approche simple des moindres carrés (Young, 1981, 1984; Ljung, 1999; Pearson, 1988). L'inconvénient principal de ces méthodes est que l'estimation peut être asymptotiquement biaisée. Aussi, des méthodes de réduction de biais, comme la variable instrumentale, doivent être utilisées pour résoudre ce problème (Young, 2008). Les algorithmes à erreur d'équation reposent sur la minimisation d'un critère quadratique afin d'estimer les paramètres inconnus du modèle qui décrit le système. La figure 1.7 présente le principe de ces méthodes.

Le critère quadratique est donné par

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} (\mathbf{y}(k) - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{y}^{k-1} | \boldsymbol{\theta}))^T (\mathbf{y}(k) - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{y}^{k-1} | \boldsymbol{\theta})),$$
  
$$= \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \boldsymbol{e}^T(k | \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{e}(k | \boldsymbol{\theta}),$$
(1.36)

où  $\boldsymbol{e}(k|\boldsymbol{\theta})$  est l'erreur d'équation.



FIGURE 1.6 – Principe de la méthode à erreur d'équation.

Le choix de l'algorithme d'optimisation dépend du paramétrage du modèle. Dans la suite, on considère que le système est linéaire par rapport aux paramètres. Ainsi, la sortie du système est donnée par

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{\Phi}^T(k)\boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}(k), \qquad (1.37)$$

où  $\Phi,$  appelé le regresseur (Ljung, 1999), contient les mesures d'entrée-sortie du système.

Étant donné que tous les éléments du régresseur sont accessibles, la méthode des moindres carrés peut être utilisée pour estimer les paramètres du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ 

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \boldsymbol{\Phi}(k) \boldsymbol{\Phi}^T(k)\right)^{-1} \left(\frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \boldsymbol{\Phi}(k) \mathbf{y}(k)\right).$$
(1.38)

Les données mesurées sont souvent bruitées. Par conséquent, un biais d'estimation asymptotique est ajouté au niveau de la solution. Ainsi, il est intéressant d'introduire une variable instrumentale pour améliorer la qualité d'estimation (Young (1970)).

Malgré le problème du biais, les méthodes à erreur d'équation sont largement utilisées dans l'initialisation des autres algorithmes d'identification tels que les algorithmes à erreur de sortie.

#### 1.3.2 Algorithme à erreur de sortie

La méthode à erreur de sortie est obtenue à partir de la minimisation d'un critère quadratique basé sur l'erreur de sortie. Elle représente l'erreur entre la sortie du système mesurée et la sortie simulée. La figure 1.7 présente le principe de la méthode à erreur de sortie.



FIGURE 1.7 – Principe de la méthode à erreur de sortie.

Comme indiqué dans la figure 1.7, le vecteur des paramètres estimés est obtenu par la minimisation d'un critère quadratique donné par l'équation suivante

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} (\mathbf{y}(k) - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-1}, \hat{\mathbf{y}}^{k-1} | \boldsymbol{\theta}))^T (\mathbf{y}(k) - \mathbf{F}(\mathbf{u}^{k-1}, \hat{\mathbf{y}}^{k-1} | \boldsymbol{\theta})),$$
  
$$= \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \boldsymbol{\epsilon}^T(k | \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\epsilon}(k | \boldsymbol{\theta}),$$
(1.39)

où  $\hat{\mathbf{y}}^{k-1}$  est la sortie simulée à partir des données d'entrée-sortie passées et  $\boldsymbol{\epsilon}(k, |\boldsymbol{\theta})$  est l'erreur de sortie.

Plusieurs algorithmes d'optimisation peuvent être utilisés : gradient, gradient conjugué, algorithmes génétiques, etc (Richalet *et al.*, 1971; Himmelblau, 1972; Dennis et Shnabel, 1996; Ortega et Rheinboldt, 2000; Boyd et Vandenberghe, 2004). Dans cette thèse, l'algorithme itérative de Levenberg-Marquardt (Marquardt, 1963) est considéré et il est défini par

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{i+1} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i - \left\{ \left[ J^{''}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) + I\lambda \right]^{-1} J^{'}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \right\}_{\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}_i}, \qquad (1.40)$$

où  $\lambda$  est un paramètre qui assure la rapidité et la stabilité de l'algorithme.  $J'(\hat{\theta})$  et  $J''(\hat{\theta})$  représentent, respectivement, le gradient et l'approximation du Hessien

définis par

$$J'(\hat{\theta}) = \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2 \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \gamma(k|\hat{\theta}) \epsilon(k|\hat{\theta}),$$
  

$$J''(\hat{\theta}) = \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}} = 2 \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \gamma(k|\hat{\theta}) \gamma(k|\hat{\theta})^T,$$
  

$$\gamma(k|\hat{\theta}) = \frac{\partial \epsilon(k|\theta)}{\partial \theta}.$$
(1.41)

Cette méthode d'identification assure une estimation non biaisée des paramètres (Richalet *et al.*, 1971; Landau, 1979; Richalet, 1991; Walter et Pronzato, 1997; Trigeassou et Poinot, 2001). Ces algorithmes peuvent s'appliquer aux systèmes linéaires par rapport aux paramètres ainsi qu'aux systèmes non linéaires. Ceci explique que ces algorithmes sont utilisés dans la plupart des domaines de l'ingénierie. Par contre, cette méthode souffre du problème d'initialisation. En effet, un mauvais choix du vecteur initial peut conduire vers un optimum local (Pronzato et Walter, 2001). Pour résoudre ce problème fondamental, l'algorithme d'optimisation peut être testé avec différents vecteurs de départ. Par contre, cette étape sera coûteuse en terme de temps de calcul.

## 1.4 Estimation paramétrique des équations aux dérivées partielles

En analysant les EDPs, l'identification de ces équations en gardant la même structure n'est pas réalisable. En effet, ces équations se caractérisent par des dérivées partielles spatiales et temporelles, appliquées à l'entrée et à la sortie du système, qui sont non mesurables. Ce problème est bien connu et diverses méthodes ont été conçues pour traiter ces dérivées. Dans la suite, on cite quatre grandes familles de techniques d'approximation des dérivées partielles utilisées en estimation paramétrique des EDPs.

#### 1.4.1 Méthodes basées sur les différences finies

Le principe de la méthode consiste à approcher les dérivées partielles de l'EDP par des différences finies. Elle est généralement utilisée pour déterminer une solution numérique de l'EDP. Dans le cadre de l'estimation paramétrique, elle consiste à remplacer le modèle continu par un modèle discret.

Considérons y une fonction de deux variables, l'espace x et le temps t. Considérons de plus une discrétisation uniforme dans l'espace et dans le temps, telle que  $\Delta x$  est la différence entre deux points consécutifs de l'espace et  $\Delta t$  est la différence entre deux instants consécutifs. On définit alors les variables discrètes  $x_l$  et  $t_k$  par

$$x_l = l\Delta x, \quad l = 0, \dots, N_x,$$
  

$$t_k = k\Delta t, \quad k = 0, \dots, N_t.$$
(1.42)

Considérons le développement en série de Taylor de y(x,t) lorsque  $\Delta x$  tend vers zéro (y(x,t) est supposée indéfiniment dérivable)

$$y(x + \Delta x, t) = y(x, t) + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \frac{\Delta^2 x}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\Delta^3 x}{3!} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) + \dots, \quad (1.43)$$

soit

$$y(x + \Delta x, t) = y(x, t) + \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x).$$
(1.44)

On en déduit l'approximation à droite de  $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$  (ou différence explicite)

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \approx \frac{y(x+\Delta x,t) - y(x,t)}{\Delta x} = \frac{y(l+1,k) - y(l,k)}{\Delta x}.$$
 (1.45)

Une deuxième formulation du développement en série de Taylor est donnée par

$$y(x - \Delta x, t) = y(x, t) - \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \frac{\Delta^2 x}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) - \frac{\Delta^3 x}{3!} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) + \dots, \quad (1.46)$$

soit

$$y(x - \Delta x, t) = y(x, t) - \Delta x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x).$$
(1.47)

On en déduit l'approximation à gauche de  $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$  (ou différence implicite)

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \approx \frac{y(x,t) - y(x - \Delta x, t)}{\Delta x} = \frac{y(l,k) - y(l-1,k)}{\Delta x}.$$
 (1.48)

En faisant la différence entre l'équation (1.43) et (1.46), on obtient

$$y(x + \Delta x, t) - y(x - \Delta x, t) = 2\Delta x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + 2\frac{\Delta^3 x}{3!} \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(x, t) + \dots,$$
  
$$= 2\Delta x \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x^2).$$
 (1.49)

On obtient alors l'approximation centrée de  $\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$ 

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) \approx \frac{y(x+\Delta x,t) - y(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} = \frac{y(l+1,k) - y(l-1,k)}{2\Delta x}.$$
 (1.50)

qui est plus précise que les approximations (1.45) et (1.48).

Pour déterminer l'approximation de la dérivée seconde, faisons la somme des équations (1.43) et (1.46). Il vient

$$y(x + \Delta x, t) + y(x - \Delta x, t) = 2y(x, t) + \Delta^2 x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + 2 \frac{\Delta^4 x}{4!} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(x, t) + \dots,$$
  
$$= 2y(x, t) + \Delta^2 x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta^2 x).$$
  
(1.51)

On obtient alors

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) \approx \frac{y(x+\Delta x,t) - 2y(x,t) + y(x-\Delta x,t)}{\Delta^2 x}, \\
\approx \frac{y(l+1,k) - 2y(l,k) + y(l-1,k)}{\Delta^2 x}.$$
(1.52)

En utilisant le même principe, on détermine l'approximation des dérivées partielles par rapport au temps. Ces approximations sont présentées dans le tableau 1.1.

Dérivées partielles	Approximation par différences finies	Type	Ordre
$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$	$rac{y(l+1,k)-y(l,k)}{\Delta x}$	explicite	1 par rapport $x$
$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$	$rac{y(l,k)-y(l-1,k)}{\Delta x}$	implicite	1 par rapport $x$
$\frac{\partial^2 y}{\partial x}(x,t)$	$\frac{y(l+1,k)-y(l-1,k)}{2\Delta x}$	centré	1 par rapport $x$
$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$	$\frac{y(l+1,k)-2y(l,k)+y(l-1,k)}{\Delta^2 x}$	centré	2 par rapport $x$
$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$	$rac{y(l,k+1)-y(l,k)}{\Delta t}$	explicite	1 par rapport $t$
$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$	$\frac{y(l,k) - y(l,k-1)}{\Delta t}$	implicite	1 par rapport $t$
$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t)$	$\frac{y(l,k{+}1){-}y(l,k{-}1)}{2\Delta t}$	centré	1 par rapport $t$
$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$	$\frac{y(l,k+1)-2y(l,k)+y(l,k-1)}{\Delta^2 t}$	centré	2 par rapport $t$

TABLE 1.1 – Approximation par différences finies.

Dans le cas le plus simple où l'EDP est linéaire, l'approximation des dérivées partielles permet d'obtenir un modèle linéaire discret. Alors, l'application directe des méthodes d'identification pour les modèles discrets permet d'estimer les paramètres inconnus du système.

Afin de présenter cette méthode, considérons le cas simple d'une équation aux dérivées partielles définie par

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t \partial x} = -a_0 y(x,t) + b_0 u(x,t).$$
(1.53)

En appliquant la différence finie implicite par rapport à l'espace et explicite par rapport au temps pour la partie gauche de l'équation (1.53), on obtient

$$\frac{y(l,k+1) - y(l,k) - y(l-1,k+1) + y(l-1,k)}{\Delta t \Delta x} = -a_0 y(l,k) + b_0 u(l,k).$$
(1.54)

Ainsi, la sortie du système est donnée par

$$y(l, k+1) = (1 - \Delta t \Delta x a_0) y(l, k) + \Delta t \Delta x b_0 u(l, k) + y(l-1, k+1) - y(l-1, k),$$
  
=  $\varphi^T(l, k)\theta + \gamma(l, k),$  (1.55)

avec

$$\varphi^{T}(l,k) = [y(l,k) \ u(l,k)], \theta = [1 - \Delta t \Delta x a_{0} \ \Delta t \Delta x b_{0}]^{T}, \gamma(l,k) = y(l-1,k+1) - y(l-1,k).$$
(1.56)

Un algorithme de type moindres carrés permet alors d'estimer les paramètres  $\theta$ .

Guo et Billings (2006) ont traité la forme non linéaire des EDPs où la partie non linéaire n'est liée qu'aux dérivées spatiales. L'approximation de cette fonction non linéaire peut être obtenue à partir des polynômes, des fonctions splines, des fonctions rationnelles, des fonctions de base radiales (Buhmann, 2009) et des réseaux de neurones (Borne *et al.*, 2007). Par contre, les dérivées temporelles sont estimées par différences finies. Ainsi, un modèle linéaire est obtenu et est identifié par un algorithme des moindres carrés.

La discrétisation des EDPs permet également d'obtenir des modèles de simulation. En effet, plusieurs travaux ont montré qu'à partir des différences finies, des simulateurs des EDPs sont développés (Marszalek, 1984; Gabano *et al.*, 2008; Schorsch *et al.*, 2013b). Dans le deuxième chapitre de cette thèse, on présente un algorithme à erreur de sortie se basant sur le calcul du gradient et l'approximation du Hessien. Cet algorithme est appliqué à un échangeur de chaleur co-courant qui se caractérise par deux EDPs. Ces deux équations couplées sont modélisées par un modèle de Roesser. Ce modèle est obtenu à l'aide de la discrétisation par la méthode de différences finies. Les données issues de cette simulation sont utilisées pour identifier les paramètres inconnus de ce modèle.

Les travaux cités précédemment ont montré la simplicité et l'efficacité de mise en œuvre de cette méthode. De plus, cette approche offre la possibilité de déterminer des approximations d'ordre élevé. Par contre, ces approximations présentent toujours des sources d'erreur soit pour l'identification des paramètres du système, soit pour la simulation du système. Ces erreurs sont dues principalement au choix du pas d'échantillonnage spatial et temporel. En effet, si la largeur entre deux points de mesure est grande alors on n'a plus le comportement réel du système. En pratique, ce choix dépend de la nature et de la géométrie du système physique étudié et il est délicat surtout pour l'échantillonnage spatial. Il est aussi à noter que ces choix influent sur la stabilité du simulateur du système. Enfin, dans le cas stochastique, une mauvaise approximation des dérivées peut conduire à une amplification du bruit. L'estimation des paramètres sera alors fortement biaisée.

#### 1.4.2 Méthodes basées sur le filtrage des signaux

Plusieurs méthodes basées sur des techniques de filtrage ont été développées pour l'identification des EDOs. Parmi ces méthodes, citons entre autres la méthode de filtre à variables d'état (Young, 1964) et l'approche par les fonctionnelles des moments de poisson (Saha et Rao, 1983; Unbehauen et Rao, 1987). Schorsch *et al.* (2013a) présentent une extension des filtres à variables d'état pour l'estimation paramétrique des EDPs.

En partant du même principe que celui utilisé pour les EDOs, l'idée de cette approche est de déterminer un filtre qui permet de mesurer un signal ainsi que ses dérivées. L'objectif est donc de faire disparaitre les dérivées qui sont non accessibles à la mesures et difficiles à calculer sans erreur, particulièrement lorsque les mesures accessibles sont bruitées. Le modèle pré-filtré obtenu peut alors être exploité afin d'estimer les paramètres inconnus du système. Par contre, le choix de ce filtre est plus compliqué que dans le cas des EDOs. En effet, ce filtre dépend de plusieurs variables en plus de la variable temporelle.

Sagara *et al.* (1990) ont proposé un algorithme d'identification pour un système à paramètres distribués d'ordre deux. Un filtre passe-bas à deux dimensions est introduit pour pré-filtrer les mesures. Ce filtre se caractérise par deux fréquences de coupures  $\lambda_x$  et  $\lambda_t$ . Cette méthode a été améliorée par Schorsch *et al.* (2013a) de façon à ce qu'elle puisse être généralisée à toutes les EDPs. D'une manière générale, ces filtres sont sous la forme suivante

$$F(p_x, p_t) = \frac{1}{(p_x + \lambda_x)^{n_x} (p_t + \lambda_t)^{n_t}}.$$
(1.57)

Il est à noter que  $n_x$  et  $n_t$  représentent l'ordre du système et  $p_x$  et  $p_t$ , représentent les opérateurs différentiels  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$ , respectivement.

L'utilisateur doit fournir *a priori* les fréquences de coupure  $\lambda_x$  et  $\lambda_t$ . Ce choix a une influence directe sur l'estimation des paramètres en présence d'un bruit qui agit sur les données de mesures (Sagara *et al.*, 1990). D'une manière générale, ces paramètres doivent être choisis supérieurs ou égaux à la bande passante du système à identifier.

Afin de mieux expliquer cette approche, on rappelle le cas simple d'une équation aux dérivées partielles définie par

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t \partial x} = -a_0 y(x,t) + b_0 u(x,t). \tag{1.58}$$

Cette équation représente un système d'ordre 1 par rapport à l'espace et au temps. Alors, on applique le filtre (1.57) à l'équation précédente avec  $n_x = n_t = 1$  pour donner

$$F_1^1(p_x, p_t)y(x, t) = -a_0 F_0^0(p_x, p_t)y(x, t) + b_0 F_0^0(p_x, p_t)u(x, t),$$
(1.59)

où

$$F_{i_x}^{i_t}(p_x, p_t) = \frac{p_x^{i_x} p_t^{i_t}}{(p_x + \lambda_x)^{n_x} (p_t + \lambda_t)^{n_t}}, \text{ pour } i_x = i_t = \{0, 1\}.$$
 (1.60)

Ainsi, on a obtenu un modèle pré-filtré linéaire par rapport aux paramètres qui peut être aisément identifié à partir d'une approche basée sur les moindres carrés.

L'une des difficultés de cette approche est de bien choisir la méthode d'implémentation de ces filtres. En effet, cette implémentation a un impact direct sur la qualité d'estimation. Une possibilité consiste à discrétiser ces filtres en remplaçant les opérateurs différentiels partiels grâce à une transformation bilinéaire (Sagara et al., 1990).

$$p_x \approx \frac{2 - z_1^{-1}}{\Delta x + z_1^{-1}},$$

$$p_t \approx \frac{2 - z_2^{-1}}{\Delta t + z_2^{-1}},$$
(1.61)

où  $z_1$  et  $z_2$  représentent les opérateurs retard par rapport à l'espace et au temps, respectivement.

Cette méthode d'identification à temps continu permet d'estimer les paramètres du système avec des données échantillonnées. De plus, elle s'adapte à tout système linéaire à paramètres distribués de dimension n, tel que  $n \ge 2$ . Comme mentionné ci-dessus, cette technique dépend du choix des deux fréquences de coupure. Un bon choix de ces paramètres permet de diminuer l'influence du bruit sur la qualité d'estimation. Malheureusement, une approche basée sur les moindres carrés ne suffit pas puisque l'estimation sera biaisée. Ainsi, une variable instrumentale est nécessaire.

Pour le cas d'une EDP non linéaire, aucun algorithme appartenant à cette classe de méthodes d'identification n'a, à notre connaissance, été développé.

#### 1.4.3 Méthodes basées sur la réduction du modèle

Plusieurs méthodes peuvent être envisagées dans cette approche. L'une de ces méthodes consiste à approximer l'EDP par un ensemble d'EDOs (Liu, 2005). Cette technique conserve toutes les propriétés intrinsèques du modèle d'origine. Considérons une EDP dépendant de deux variables indépendantes, l'espace x et le temps t. La réalisation de cette approche consiste en la discrétisation des dérivées partielles spatiales à l'aide d'une des méthodes suivantes : élément finie, différence finie, .... Ainsi, pour chaque point d'espace, une EDO est obtenue. Contrairement à la méthode présentée dans la section 1.4.1 où on obtient un modèle discret, cette méthode conduit à un modèle hybride : discret par rapport à l'espace et continu par rapport au temps.

Dans le même cadre, une deuxième stratégie consiste à résoudre la problématique suivante : comment approcher une fonction y(x,t) de deux variables, l'espace x et le temps t, par une somme infinie d'un produit de deux fonctions où chaque fonction dépend d'une variable :

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) y_i(t).$$
 (1.62)

Comme présenté dans (Li et Qi, 2010), l'idée consiste à séparer les deux variables spatiale et temporelle. En observant l'équation (1.62), la distribution de la fonction y(x,t) est souvent ordonnée du mode le plus lent vers le mode le plus rapide dans le domaine des fréquences spatiales (qui présente le même principe que les séries de Fourier). Généralement, les modes rapides contribuent peu sur l'ensemble du système. Ainsi, seuls les n premiers modes lents dans l'expression (1.62) seront conservés dans la pratique (Fletcher, 1984)

$$y_n(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) y_i(t).$$
 (1.63)

Cette approche revient à une décomposition de la fonction y(x,t) sur une base de fonctions orthogonales comme montré dans la figure (1.8).



FIGURE 1.8 – Interprétation géométrique pour la méthode de séparation spatio-temporelle (n = 3).

Pour une meilleure approximation de la fonction spatio-temporelle y(x, t), il faut bien choisir la base de projection et déterminer le nombre n qui représente le nombre de ces axes. Généralement, pour résoudre ce problème, on considère en premier lieu les fonctions de base  $\phi_i(x)$ . Ces fonctions peuvent être choisies parmi des fonctions connues dans la littérature tels que les polynômes de Chebychev, de Legendre ou les fonctions trigonométriques (Peyret, 2002). Après avoir approché les fonctions de base  $\phi_i(x)$ , il faut ensuite déterminer l'ensemble des fonctions temporelles  $y_i(t)$  pour chaque fonctions de base  $\phi_i(x)$ . Comme expliqué dans (Cordier et Bergmann, 2006), cette détermination sera plus facile en considérant que les fonctions  $\phi_i(x)$  forment une base orthonormale. Dans ce cas,  $y_i(t)$  est donnée par

$$y_i(t) = \int_{\Omega} y(x,t)\phi_i(x)dx = (y(x,t),\phi_i(x))$$
(1.64)

où  $\Omega$  est le domaine spatial et (.,.) est le produit interne.

Pour l'identification de ces modèles, les techniques d'optimisations traditionnelles peuvent être directement utilisées si les paramètres sont constants, par exemple, la méthode de Levenberg-Marquardt (Banks *et al.*, 1983; Wouwer *et al.*, 2006), méthode de Gauss-Newton (Rannacher et Vexler, 2005), la méthode de Newton-like (Omatu et Matumoto, 1991) ou la méthode de quasi-linéarisation (Park *et al.*, 1998).

#### 1.4.4 Méthodes basées sur la modélisation fractionnaire

En étudiant les fonctions de transfert des EDPs, une nouvelle approche a été élaborée. En effet, cette étude a montré que ces fonctions se caractérisent par des structures compliquées (Curtain et Morris, 2009). À titre d'exemple, si on considère des systèmes physiques dédiés aux processus de diffusion, on remarque que leurs fonctions de transfert se caractérisent par des termes assez complexes tels que cosh, sinh et tanh. Parmi ces processus, on cite la conduction de la chaleur (Battaglia et Puigsegu, 2004) et la diffusion des espèces ioniques dans des processus électrochimiques (Ichise *et al.*, 1971). Par contre, la résolution fréquentielle de ces équations fait apparaître des fonctions de transfert avec un ordre non entier, appellées aussi modèles fractionnaires (Lin *et al.*, 2000; Battaglia et Puigsegu, 2004; Gabano *et al.*, 2008; Kanoun, 2013). Ces fonctions peuvent être décrites par deux modèles :

• Fonction de transfert commensurable :

$$H_N(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{0.5} + \ldots + b_{N-1} (s^{0.5})^{N-1}}{a_0 + a_1 s^{0.5} + \ldots + a_{N-1} (s^{0.5})^{N-1} + a_N (s^{0.5})^N},$$
(1.65)

avec N est un nombre entier.

• Fonction de transfert non commensurable :

$$H_N(s) = \frac{b_0 + b_1 s^n}{a_0 + a_1 s^n + s^{n+0.5}},$$
(1.66)

où n est est un nombre entier inconnu.

D'où, l'idée d'approximer les EDPs avec des modèles fractionnaires non entier.

Afin d'expliquer cette méthode, on considère le processus de diffusion de chaleur dans un mur de longueur L (Gabano *et al.* (2008)). La température à l'intérieur du mur  $\mathbb{T}_0(x, t)$ , pour  $x \in [0, L]$ , est décrite par l'équation de la chaleur suivante

$$\frac{\partial \mathbb{T}_0\left(x,t\right)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbb{T}_0\left(x,t\right)}{\partial x^2},\tag{1.67}$$

$$\varphi(x,t) = -\lambda \frac{\partial \mathbb{T}_0(x,t)}{\partial x}, \qquad (1.68)$$

où

- $\lambda$  : conductivité thermique (W.m<sup>-1</sup>.°C<sup>-1</sup>),
- $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ : diffusivité thermique (m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>),
- $\rho$  : masse volumique (kg.m<sup>-3</sup>),
- c : chaleur spécifique (J.kg<sup>-1</sup>.°C<sup>-1</sup>).

Les conditions spatio-temporelles initiales et limites sont présentées par les relations suivantes

$$\begin{cases} \mathbb{T}_0(L,t) = 0 & t \ge 0, \\ \mathbb{T}_0(x,0) = 0 & 0 \le x \le L. \end{cases}$$
(1.69)

La fonction de transfert de la diffusion de chaleur qui relie la sortie  $\mathbb{T}_0(0,t)$  et l'entrée  $\varphi(0,t)$  est donnée par

$$\mathbf{H}(s) = \frac{L}{\lambda} \frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{L^2s}}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\sqrt{L^2s}}{\alpha}\right)}.$$
(1.70)

Gabano et Poinot (2009) ont montré que la réponse fréquentielle de cette fonction de transfert est similaire à celle d'un modèle fractionnaire non entier qui s'écrit comme suit

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^{0.5}},\tag{1.71}$$

tel que  $a_0 = \frac{\sqrt{\alpha}}{L}$  et  $b = L \frac{a_0}{\lambda}$ .

### 1.5 Conclusion

Une vue d'ensemble sur les algorithmes d'identification est considérée dans ce chapitre. Pour ces méthodes, on a présenté le principe de base pour les algorithmes à erreur d'équation et les algorithmes à erreur de sortie. De plus, on a introduit quelques exemples d'EDPs et la différence entre ces équations et les EDOs.

Au sein de ce chapitre, on a classé les méthodes d'identification des systèmes à paramètres distribués en quatre grandes familles à savoir : les méthodes basées sur les différences finies, les méthodes basées sur le filtrage des signaux, les méthodes basées sur la réduction du modèle et les méthodes basées sur la modélisation fractionnaire. Dans ce contexte, plusieurs outils et méthodes d'identification sont présentés.

#### Chapitre 2

## IDENTIFICATION DE SYSTÈMES RÉGIS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES BASÉE SUR LES MOMENTS PARTIELS RÉINITIALISÉS

## 2.1 Introduction

Comme présenté dans l'introduction générale, on introduit dans ce manuscrit une nouvelle méthode d'identification de systèmes régis par des équations aux dérivées partielles (EDP) basée sur le calcul des moments partiels réinitialisés (RPM pour *reinitialized partial moment*). L'approche consiste à faire disparaitre, par des outils mathématiques, les dérivées de l'EDP. L'outil mathématique est le moment partiel. Son implémentation numérique appliquée sur les mesures bruitées de la sortie présente des propriétés statistiques qui sont exploitées dans une version dite réinitialisée des moments partiels (Trigeassou (1980, 1987)).

Les moments sont des outils performants dans la théorie des probabilités et des statistiques (Casella et Berger, 2002; Gibson, 2008). Les moments sont des invariants du système; c'est à ce titre qu'ils sont utilisés dans des domaines tels que la réduction de modèle (Krajewski *et al.* (1995); Abdelmadjid *et al.* (2007)) et le contrôle de système (Abdelmadjid *et al.* (2008)).

Une des premières apparitions des moments en identification de système date de 1948, où Elmore (1948) les a introduits pour décrire la réponse impulsionnelle et le comportement transitoire d'un système linéaire. Dans les années 60 - 70, les moments sont utilisés pour obtenir une réalisation minimale d'une fonction de transfert (Bruni *et al.*, 1969; Puri et Takeda, 1973)). Cependant, on constate deux problèmes essentiels concernant ces techniques :

- la restriction de l'entrée à un échelon ou une impulsion,
- la nécessité de calculer les moments sur un intervalle de temps infini.

Pour résoudre ces deux problèmes, Trigeassou (1980) a adapté les moments de telle façon qu'on les considère uniquement sur un intervalle de temps fini ; ce sont les moments partiels. Afin de bénéficier des propriétés statistiques des moments partiels et
d'offrir la capacité de balayer le domaine temporel, les moments partiels réinitialisés sont introduits dans Trigeassou (1987). Le modèle obtenu est linéaire par rapport aux paramètres, ce qui conduit à une méthode d'identification à erreur d'équation qui se décline aussi bien en temps discret qu'en temps continu (Trigeassou (1987); Tohme (2008); Ouvrard *et al.* (2010); Ouvrard et Trigeassou (2011)).

À ce jour, les développements sur les moments partiels réinitialisés sont dédiés aux cas une dimension (1D) des équations différentielles ordinaires (EDO). L'objectif de ce chapitre est d'exploiter les propriétés intéressantes des moments partiels réinitialisés dans l'estimation des paramètres des équations aux dérivées partielles (Farah *et al.*, 2015).

Ce chapitre est composé comme suit. La section 2.2 rappelle l'approche RPM dans le cas 1D. Les sections 2.3 et 2.4 introduisent, respectivement, les nouveaux outils que sont les moments partiels 2D et les moments partiels réinitialisés 2D. Enfin, les performances de ces nouveaux outils sont étudiées sur l'exemple du mur thermique dans la section 2.5.

# 2.2 Rappels sur les moments partiels réinitialisés

# 2.2.1 Définition des moments partiels 1D

Soit f(t) une fonction de carré sommable définie sur un intervalle  $[0, \infty)$ . Le moment d'ordre n, de la fonction f, est défini comme suit

$$\mathcal{M}_n^f = \int_0^\infty \frac{t^n}{n!} f(t) dt.$$
 (2.1)

Si l'horizon d'intégration de  $\mathcal{M}_n^f$  est fini, alors, on définit le moment partiel

$$\mathcal{M}_n^f(T) = \int_0^T \frac{t^n}{n!} f(t) dt.$$
(2.2)

#### 2.2.2 Modèle de sortie basé sur les moments partiels 1D

Considérons l'exemple simple d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre écrite sous la forme

$$\frac{dy_0(t)}{dt} = -a_0 y_0(t) + b_0 u(t) \tag{2.3}$$

où  $y_0(t)$  est la sortie exacte du système et u(t) son entrée.

La première étape de cette approche est d'appliquer un moment partiel du premier ordre à l'équation différentielle (2.3)

$$\int_{0}^{T} t \frac{dy_0(t)}{dt} dt = -a_0 \int_{0}^{T} ty_0(t) dt + b_0 \int_{0}^{T} tu(t) dt.$$
(2.4)

Après une intégration par parties sur la partie gauche de l'équation précédente, une nouvelle formulation de la sortie  $y_0(t)$  est obtenue

$$y_0(T) = -a_0 \frac{\int_0^T ty_0(t)dt}{T} + b_0 \frac{\int_0^T tu(t)dt}{T} + \frac{\int_0^T y_0(t)dt}{T} = -a_0 \frac{\mathcal{M}_1^{y_0}(T)}{T} + b_0 \frac{\mathcal{M}_1^u(T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_0^{y_0}(T)}{T}.$$
(2.5)

Puisque la sortie exacte  $y_0(t)$  est inaccessible, considérons la sortie mesurée y(t)à l'instant<sup>1</sup>  $t = k\Delta t$  perturbée par un bruit v(t) de moyenne nulle et de variance  $\sigma_v^2$ . Ainsi, on définit le modèle de sortie  $\bar{y}(t)$  à partir de (2.5) en remplaçant  $y_0(t)$ par  $y(t) = y_0(t) + v(t)$  comme suit

$$\bar{y}(T) = -a_0 \frac{\mathcal{M}_1^y(T)}{T} + b_0 \frac{\mathcal{M}_1^u(T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_0^y(T)}{T}.$$
(2.6)

On nomme erreur d'approximation  $\bar{\varepsilon}(T)$  la différence entre la sortie exacte à l'instant T donnée par (2.5) et la sortie du modèle (2.6)

$$\bar{\varepsilon}(T) = y_0(T) - \bar{y}(T)$$

$$= a_0 \frac{\mathcal{M}_1^v(T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_0^v(T)}{T}.$$
(2.7)

Trigeassou (1987) montre que, dans le cas d'un bruit blanc, l'erreur d'approximation est de moyenne nulle et sa variance  $est^2$ 

$$\sigma_{\bar{\varepsilon}}^2 = \sigma_v^2 \left[ \mathcal{T} \left( \frac{(a_0 \Delta t)^2}{3} \right)^2 - a_0 \Delta t (1 + \frac{a_0 \Delta t}{2}) + \frac{1}{\mathcal{T}} (1 + a_0 \Delta t + \frac{(a_0 \Delta t)^2}{6}) \right]$$
(2.8)

avec  $T = \mathcal{T}\Delta t$  ( $\mathcal{T} \in \mathbb{N}$ ). L'étude de (2.8) montre que la variance de l'erreur d'approximation est minimale pour  $T = T_{opt}$  où  $T_{opt} = \sqrt{3} \frac{1}{a_0}$ .

Trigeassou (1987) généralise l'exemple simple ci-dessus à un ordre quelconque. Cette généralisation conduit à des développements qui rendent difficile l'étude statistique de l'erreur d'approximation. Cependant, il est possible de montrer empiriquement l'existence d'un instant  $T_{opt}$  pour lequel une variance minimale de l'erreur d'approximation est obtenue.

Ainsi, le modèle de sortie basé sur les moments partiels 1D possède les propriétés suivantes :

- linéarité par rapport aux paramètres,
- filtrage du bruit de sortie pour les instants T proches de  $T_{opt}$ .

 $<sup>^{1}\</sup>Delta t$  est la période d'échantillonnage.

 $<sup>^2\</sup>mathrm{Ce}$  résultat est obtenu à partir d'une implémentation des intégrales utilisant la méthode des rectangles.

# 2.2.3 Définition des moments partiels réinitialisés 1D

Pour  $T \ll T_{opt}$ , l'effet de filtrage du bruit n'est pas efficace. Et pour  $T \gg T_{opt}$ , le modèle de sortie (2.6) présente une accumulation d'erreur qui nuit à l'estimation (Ouvrard *et al.*, 2010). Afin de pallier cette difficulté et de conserver la propriété de variance minimale, Trigeassou (1987) a introduit les moments partiels réinitialisés qui consistent en un calcul des intégrales sur un horizon glissant de largeur  $\hat{T}$ . Ce paramètre  $\hat{T}$  est un paramètre de conception qui approxime  $T_{opt}$  généralement non connu *a priori*.

Le moment partiel réinitialisé d'ordre n de la fonction f est défini par

$$M_n^f(t) = \int_0^{\hat{T}} \tau^n f(t - \hat{T} + \tau) d\tau$$
 (2.9)

où  $\hat{T}$  est une approximation de  $T_{opt}$ .

# 2.2.4 Modèle de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés 1D

#### 2.2.4.1 Cas simple

Considérons de nouveau l'exemple simple du paragraphe 2.2.2 et l'équation (2.5). En remplaçant les moments partiels par des moments partiels réinitialisés et la sortie exacte  $y_0(t)$  par la sortie mesurée y(t), on obtient l'estimation  $\hat{y}(t)$  suivante pour tout t

$$\hat{y}(t) = -\hat{a}_0 \int_0^{\hat{T}} \frac{\tau}{\hat{T}} y(t - \hat{T} + \tau) d\tau + \hat{b}_0 \int_0^{\hat{T}} \frac{\tau}{\hat{T}} u(t - \hat{T} + \tau) d\tau + \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\hat{T}} y(t - \hat{T} + \tau) d\tau = -\hat{a}_0 \frac{M_1^y(t)}{\hat{T}} + \hat{b}_0 \frac{M_1^u(t)}{\hat{T}} + \frac{M_0^y(t)}{\hat{T}}.$$
(2.10)

Le changement de variable  $\mu = \hat{T} - \tau$  permet de reformuler l'équation comme suit

$$\hat{y}(t) = -\hat{a}_0 \int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \mu}{\hat{T}} y(t - \mu) d\mu + \hat{b}_0 \int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \mu}{\hat{T}} u(t - \mu) d\mu + \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\hat{T}} y(t - \mu) d\mu = \hat{a}_0 \alpha_0^y(t) + \hat{b}_0 \beta_0^u(t) + \gamma^y(t)$$
(2.11)

30

$$\begin{aligned} \alpha_0^y(t) &= -\int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \mu}{\hat{T}} y(t - \mu) \, d\mu \\ \beta_0^u(t) &= \int_0^{\hat{T}} \frac{\hat{T} - \mu}{\hat{T}} u(t - \mu) \, d\mu \\ \gamma^y(t) &= \int_0^{\hat{T}} \frac{1}{\hat{T}} y(t - \mu) \, d\mu. \end{aligned}$$
(2.12)

Les fonctions (2.12) peuvent être reformulées sous la forme de produits de convolution

$$\begin{aligned}
\alpha_0^y(t) &= -m(t) * y(t) \\
\beta_0^u(t) &= m(t) * u(t) \\
\gamma^y(t) &= \left(\delta(t) - \frac{dm(t)}{dt}\right) * y(t)
\end{aligned}$$
(2.13)

où

$$m(t) = \begin{cases} \frac{\hat{T}-t}{\hat{T}} & \text{pour } t \in \left[0, \hat{T}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\delta(t) \text{ est la fonction de Dirac}$$

$$\text{et * est le produit de convolution.}$$

$$(2.14)$$

Ainsi, le modèle de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés d'un système linéaire du premier ordre est décrit comme suit

$$\hat{y}(t) = -\hat{a}_0(m(t) * y(t)) + \hat{b}_0(m(t) * u(t)) + \left(\delta(t) - \frac{dm(t)}{dt}\right) * y(t)$$
(2.15)

où m(t) est un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) implicite et  $\hat{T}$  est le paramètre de conception qui doit être choisi proche de  $T_{opt} = \frac{\sqrt{3}}{a_0}$ .

#### 2.2.4.2 Cas général

Trigeassou (1987) généralise ces développements à une fonction de transfert d'ordre quelconque  $n_a$ 

$$H(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \ldots + b_{n_b} s^{n_b}}{a_0 + a_1 s + \ldots + a_{n_a - 1} s^{n_a - 1} + s^{n_a}}, \ n_b \le n_a.$$
(2.16)

Le modèle de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés correspondant est alors donné par

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{n_a - 1} \hat{a}_i \alpha_i^y(t) + \sum_{j=0}^{n_b} \hat{b}_j \beta_j^u(t) + \gamma^y(t)$$
(2.17)

où

$$\begin{aligned} \alpha_{0}^{y}(t) &= -m(t) * y(t), \\ \beta_{0}^{u}(t) &= m(t) * u(t), \\ \alpha_{i}^{y}(t) &= -\frac{d^{i}m(t)}{dt^{i}} * y(t) \text{ pour } 1 \leq i < n_{a}, \\ \beta_{j}^{u}(t) &= \frac{d^{j}m(t)}{dt^{j}} * u(t) \text{ pour } 1 \leq j \leq n_{b}, \\ \gamma^{y}(t) &= \left(\delta(t) - \frac{d^{n_{a}}m(t)}{dt^{n_{a}}}\right) * y(t), \\ m(t) &= \frac{(\hat{T}-t)^{n_{a}}t^{n_{a}-1}}{(n_{a}-1)!\hat{T}^{n_{a}}} \text{ pour } t \in \left[0, \hat{T}\right]. \end{aligned}$$

$$(2.18)$$

On note que les fonctions  $\alpha_i^y$ ,  $\beta_j^u$  et  $\gamma^y$  sont définies par le produit de convolution de l'entrée ou de la sortie avec le filtre FIR m(t) ou bien ses dérivées. Donc, on peut conclure qu'appliquer les moments partiels réinitialisés à une équation différentielle ordinaire revient à filtrer les signaux d'entrée et de sortie par un filtre FIR.

# 2.2.5 Identification et implémentation

Le modèle de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés (2.17) est linéaire par rapport aux paramètres. On utilise la méthode des moindres carrés (Eykhoff (1974)) pour estimer les paramètres  $\hat{a}_i$  et  $\hat{b}_i$  à partir des mesures d'entrée-sortie  $\{u(k\Delta t), y(k\Delta t)\}_{k\in\{0,\dots,N_t\}}$ .

#### 2.2.5.1 Estimation par les moindres carrés

Le modèle (2.17) peut être reformulé sous la forme d'une régression linéaire

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t)\hat{\theta}^{RPM} + \gamma^y(t) \tag{2.19}$$

où

$$\varphi(t) = [\alpha_0^y, \dots, \alpha_{n_a-1}^y, \beta_0^u, \dots, \beta_{n_b}^u]^T \\ \hat{\theta}^{RPM} = [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n_a-1}, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_{n_b}]^T.$$
(2.20)

On considère le critère quadratique suivant

$$J = \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varepsilon^2 (k\Delta t) = \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} (y(k\Delta t) - \hat{y}(k\Delta t))^2$$
(2.21)

où  $\hat{\mathcal{T}}$  correspond à  $\hat{T} = \hat{\mathcal{T}} \Delta t$  et  $N_t + 1$  représente le nombre de mesures. Alors, le vecteur  $\hat{\theta}^{RPM}$ , qui minimise le critère J, est défini par la relation suivante

$$\hat{\theta}^{RPM} = \left[\sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi(k\Delta t) \varphi^T(k\Delta t)\right]^{-1} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi(k\Delta t) (y(k\Delta t) - \gamma^y(k\Delta t)).$$
(2.22)

#### 2.2.5.2 Estimation par l'approche variable instrumentale

Puisque la sortie bruitée  $y(k\Delta t)$  est présente dans le régresseur  $\varphi(t)$ , l'estimation (2.22) est biaisée (Eykhoff (1974)). Pour réduire le biais, une variable instrumentale  $\psi(t)$  est générée à partir d'un modèle auxiliaire avec les paramètres estimés précédemment, pour fournir l'estimation suivante

$$\hat{\theta}^{IV/RPM} = \left[\sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \psi(k\Delta t)\varphi^T(k\Delta t)\right]^{-1} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \psi(k\Delta t)(y(k\Delta t) - \gamma^y(k\Delta t)) \quad (2.23)$$

où

$$\psi(t) = [\alpha_0^{\hat{y}}, \dots, \alpha_{n_a-1}^{\hat{y}}, \beta_0^u, \dots, \beta_{n_b}^u)]^T$$
(2.24)

Quelques itérations de la variable instrumentale permettent de réduire le biais.

# **2.3** Moments partiels 2D

Une équation aux dérivées partielles se caractérise par une fonction à plusieurs variables indépendantes. Dans cette étude, on va se limiter à deux variables qui peuvent être la variable spatiale x et la variable temporelle t.

#### **2.3.1** Définition des moments partiels 2D

On considère la fonction à deux dimensions f(x,t) de carré sommable. Définissons le moment partiel d'ordre *i* dans le domaine spatial et d'ordre *j* dans le domaine temporel de la fonction f(x,t) comme suit

$$\mathcal{M}_{i,j}^f(X,T) = \int_0^X \int_0^T x^i t^j f(x,t) \partial t \partial x \qquad (2.25)$$

où  $i \in \{\mathbb{N}, -\}$  et  $j \in \{\mathbb{N}, -\}$ . Dans le cas où i est remplacé par le symbole "-", cela signifie qu'il n'y a pas d'intégration dans l'espace et le moment partiel (2.25) s'exprime comme un moment partiel temporel d'ordre j pour x = X

$$\mathcal{M}_{-,j}^f(X,T) = \int_0^T t^j f(X,t) \partial t.$$
(2.26)

Dans le cas où j est remplacé par "-", le moment partiel se présente comme un moment partiel spatial d'ordre i à t=T

$$\mathcal{M}_{i,-}^f(X,T) = \int_0^X x^i f(x,T) \partial x.$$
(2.27)

### 2.3.2 Propriétés statistiques - Étude d'un cas simple

Considérons le cas simple d'une équation aux dérivées partielles définie par

$$\frac{\partial^2 y_0(x,t)}{\partial t \partial x} = -a_0 y_0(x,t) + b_0 u(x,t).$$
(2.28)

L'objectif est ici d'étudier l'influence des bornes d'intégration X et T sur les propriétés statistiques de la représentation basée sur les moments partiels. L'étude statistique est réalisée en discret à partir d'un ensemble fini de mesures d'entréesortie. Considérons l'ensemble défini par

$$\{u(l\Delta x, k\Delta t), y(l\Delta x, k\Delta t)\}_{l\in\{0,\cdots,\mathcal{X}-1\},k\in\{0,\cdots,\mathcal{T}-1\}},$$
(2.29)

où  $\Delta x$  et  $\Delta t$  correspondent aux intervalles d'échantillonnage, et  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{T} \in \mathbb{N}$  représentent, respectivement, les bornes d'intégration  $X = \mathcal{X}\Delta x$  et  $T = \mathcal{T}\Delta t$  en termes de nombre d'échantillons dans le domaine spatial et dans le domaine temporel.

#### 2.3.2.1 Modèle basé sur les moments partiels

Appliquons à l'équation (2.28) un moment partiel 2D d'ordre 1 dans le domaine spatial et d'ordre 1 dans le domaine temporel

$$\int_{0}^{X} \int_{0}^{T} xt \frac{\partial^{2} y_{0}(x,t)}{\partial t \partial x} \partial t \partial x = -a_{0} \int_{0}^{X} \int_{0}^{T} xt y_{0}(x,t) \partial t \partial x + b_{0} \int_{0}^{X} \int_{0}^{T} xt u(x,t) \partial t \partial x. \quad (2.30)$$

En développant la partie gauche à l'aide de l'intégration par parties, les dérivées partielles disparaissent. L'équation (2.30) peut alors être réécrite pour obtenir la sortie exacte suivante au point X et à l'instant T

$$y_0(X,T) = -a_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{y_0}(X,T)}{XT} + b_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^u(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{y_0}(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{y_0}(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{y_0}(X,T)}{XT}.$$
 (2.31)

Bien évidemment, on ne dispose pas de la sortie exacte mais plutôt de la sortie mesurée perturbée par un bruit additif v(x,t), c'est-à-dire  $y(x,t) = y_0(x,t) + v(x,t)$ . Substituons alors la sortie mesurée y(x,t) à la sortie exacte  $y_0(x,t)$  dans (2.31) pour obtenir, au point X et à l'instant T, une approximation de la sortie comme suit

$$\bar{y}(X,T) = -a_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^y(X,T)}{XT} + b_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^u(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^y(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{-,0}^y(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^y(X,T)}{XT}.$$
 (2.32)

Considérons l'erreur d'approximation de la sortie définie par

$$\bar{\varepsilon}(X,T) = y_0(X,T) - \bar{y}(X,T). \tag{2.33}$$

En notant que

$$\mathcal{M}_{i,j}^{y}(X,T) = \mathcal{M}_{i,j}^{y_0}(X,T) + \mathcal{M}_{i,j}^{v}(X,T), \qquad (2.34)$$

l'erreur d'approximation devient

$$\bar{\varepsilon}(X,T) = a_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^v(X,T)}{XT} - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^v(X,T)}{X} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^v(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^v(X,T)}{XT}.$$
 (2.35)

Cette erreur est composée de deux parties. Une première partie résulte de l'implémentation numérique des moments partiels. Il existe différentes méthodes numériques pour calculer les intégrales : méthodes des rectangles, des trapèzes, de Simpson (Walter, 2014)... Il sera supposé par la suite que cette erreur est négligeable. La seconde partie de l'erreur est liée à la présence du bruit v(x,t) sur les mesures de la sortie.

Considérons également l'erreur d'estimation de la sortie, c'est-à-dire les résidus, définie par

$$\hat{\varepsilon}(X,T) = y(X,T) - \hat{y}(X,T)$$
(2.36)

où  $\hat{y}(X,T)$  est la sortie du modèle estimé par moindres carrés

$$\hat{y}(X,T) = -\hat{a}_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^y(X,T)}{XT} + \hat{b}_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^u(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^y(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^y(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^y(X,T)}{XT}, \quad (2.37)$$
$$\hat{y}(X,T) = \varphi^T(X,T)\hat{\theta}^{PM} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^y(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{-,0}^y(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^y(X,T)}{XT}$$

avec

$$\varphi(X,T) = \begin{bmatrix} -\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{y}(X,T)}{XT} & \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{u}(X,T)}{XT} \end{bmatrix}^{T}$$
$$\hat{\theta}^{PM} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{0} & \hat{b}_{0} \end{bmatrix}^{T}$$
(2.38)

 $\operatorname{et}$ 

$$\hat{\theta}^{PM} = \left(\sum_{l=0}^{\mathcal{X}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}} \varphi(l\Delta x, k\Delta t) \varphi^{T}(l\Delta x, k\Delta t)\right)^{-1} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}} \varphi(l\Delta x, k\Delta t) \left(y(l\Delta x, k\Delta t) - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{y}(l\Delta x, k\Delta t)}{l\Delta x} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{y}(l\Delta x, k\Delta t)}{k\Delta t} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{y}(l\Delta x, k\Delta t)}{l\Delta x k\Delta t}\right).$$
(2.39)

L'objectif des sections suivantes est de rechercher s'il existe des valeurs optimales de X et de T pour lesquelles les variances de l'erreur d'approximation  $\bar{\varepsilon}(X,T)$  et de l'erreur d'estimation  $\hat{\varepsilon}(X,T)$  sont minimales.

#### 2.3.2.2 Covariance des moments partiels avec la méthode des rectangles

Pour faciliter les calculs, on considère la méthode des rectangles pour l'implémentation des moments partiels définis par (2.25), soit

$$\mathcal{M}_{i,j}^{f}(X,T) \approx \Delta x^{i+1} \Delta t^{j+1} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} l^{i} k^{j} f(l\Delta x, k\Delta t).$$
(2.40)

Dans ces conditions, la covariance des moments partiels peut être calculée de la façon suivante<sup>3</sup>

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{i_{1},j_{1}}^{f}(X,T) \ \mathcal{M}_{i_{2},j_{2}}^{f}(X,T)\right\} \approx \Delta x^{i_{1}+i_{2}+2} \Delta t^{j_{1}+j_{2}+2}$$
$$\sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}^{i_{1}} k_{1}^{j_{1}} \sum_{l_{2}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{2}^{i_{2}} k_{2}^{j_{2}} \mathbb{E}\left\{f(l_{1}\Delta x,k_{1}\Delta t)f(l_{2}\Delta x,k_{2}\Delta t)\right\}. \quad (2.41)$$

Si un des ordres est représenté par le symbole "-", l'équation (2.41) est modifiée et la somme correspondante disparait. Par exemple, si  $j_2$  correspond à "-", (2.41) devient

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{i_{1},j_{1}}^{f}(X,T) \ \mathcal{M}_{i_{2},-}^{f}(X,T)\right\} \approx \Delta x^{i_{1}+i_{2}+2} \Delta t^{j_{1}+1}$$
$$\sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}^{i_{1}} k_{1}^{j_{1}} \sum_{l_{2}=0}^{\mathcal{X}-1} l_{2}^{i_{2}} \mathbb{E}\left\{f(l_{1}\Delta x,k_{1}\Delta t)f(l_{2}\Delta x,(\mathcal{T}-1)\Delta t)\right\}. \quad (2.42)$$

#### 2.3.2.3 Hypothèse d'un bruit blanc

Le bruit v(x,t) considéré est une séquence aléatoire bidimensionnelle obtenue aux points d'échantillonnage  $l\Delta x$  dans l'espace et  $k\Delta t$  dans le temps avec  $l \in \{0, \dots, \mathcal{X} - 1\}$  et  $k \in \{0, \dots, \mathcal{T} - 1\}$ .

Considérons les hypothèses suivantes :

• bruit de moyenne nulle<sup>4</sup>

$$\mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\} = 0\tag{2.43}$$

• bruit blanc

$$\mathbb{E}\left\{v(l,k)v(l',k')\right\} = \sigma^2 \ \delta_{l-l'} \ \delta_{k-k'} \tag{2.44}$$

où  $\sigma^2$  est la variance du bruit v(l,k), et  $\delta_{i-j}$  est le symbole de Kronecker avec  $\delta_0 = 1$  et  $\delta_{i-j} = 0 \quad \forall i \neq j$ .

 $<sup>{}^{3}\</sup>mathbb{E}\left\{\bullet\right\}$  représente ici l'espérance mathématique d'une variable aléatoire à temps discret.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>La notation des variables à temps discret est simplifiée en considérant  $v(l,k) \equiv v(l\Delta x, k\Delta t)$ .

Dans ces conditions, les covariances (2.41) et (2.42) des moments partiels du bruit deviennent, respectivement

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{i_{1},j_{1}}^{v}(X,T) \ \mathcal{M}_{i_{2},j_{2}}^{v}(X,T)\right\} \approx \sigma^{2} \Delta x^{i_{1}+i_{2}+2} \Delta t^{j_{1}+j_{2}+2} \\ \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{i_{1}+i_{2}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} k^{j_{1}+j_{2}} \quad (2.45)$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{i_1,j_1}^v(X,T) \ \mathcal{M}_{i_2,-}^v(X,T)\right\} \approx \sigma^2 \Delta x^{i_1+i_2+2} \Delta t^{j_1+1} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{i_1+i_2} (\mathcal{T}-1)^{j_1}.$$
(2.46)

Les équations (2.45)-(2.46) peuvent être simplifiées en considérant au cas par cas les propriétés suivantes

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^{0} = I,$$

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^{1} = \frac{(I-1)I}{2},$$

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^{2} = \frac{(I-1)I(2I-1)}{6},$$

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^{3} = \left(\frac{(I-1)I}{2}\right)^{2}.$$
(2.47)

#### Moyenne de l'erreur d'approximation en présence de bruit blanc

Calculons la moyenne de l'erreur d'approximation (2.35) en considérant une implémentation des moments basée sur la méthode des rectangles (2.40). On obtient alors

$$\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)\right\} \approx a_0 \frac{\Delta x \Delta t \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} l \ k \ \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\}}{\mathcal{XT}} - \frac{\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} \mathbb{E}\left\{v(l,\mathcal{T}-1)\right\}}{\mathcal{X}} - \frac{\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} \mathbb{E}\left\{v(\mathcal{X}-1,k)\right\}}{\mathcal{T}} + \frac{\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\}}{\mathcal{XT}} \quad (2.48)$$

soit, en considérant (2.43), une moyenne nulle, c'est-à-dire  $\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)\right\} \approx 0.$ 

#### Variance de l'erreur d'approximation en présence de bruit blanc

Toujours dans les mêmes conditions, calculons maintenant la variance de l'erreur d'approximation (2.35), soit

$$\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} = a_{0}^{2} \frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)^{2}\right\}}{X^{2}T^{2}} + 2a_{0}\left(-\frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)\right\}}{X^{2}T}\right) \\ -\frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)\right\}}{XT^{2}} + \frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)\right\}}{X^{2}T^{2}}\right) \\ +\frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)^{2}\right\}}{X^{2}} + \frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)^{2}\right\}}{T^{2}} + \frac{\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)^{2}\right\}}{X^{2}T^{2}} \\ +\frac{2\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)\right\}}{XT} - \frac{2\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)\right\}}{XT^{2}} - \frac{2\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)\right\}}{XT^{2}}\right\}$$
(2.49)

En considérant (2.45-2.47), on obtient

$$\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} \approx \frac{\sigma^{2}}{36 \mathcal{XT}} \left(a_{0}^{2} \Delta x^{2} \Delta t^{2} (\mathcal{X}-1)(2\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1)(2\mathcal{T}-1) -54 a_{0} \Delta x \Delta t (\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1) + 36 (\mathcal{X}+\mathcal{T}-1)\right). \quad (2.50)$$

Dans l'hypothèse d'un bruit blanc, la variance de l'erreur d'approximation (2.50) présente un minimum pour des intervalles d'intégration  $\mathcal{X}_{opt}$  et  $\mathcal{T}_{opt}$ .

Exemple 1. Considérons les valeurs numériques suivantes :  $a_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.1$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $1 \leq \mathcal{X} \leq 100$ ,  $1 \leq \mathcal{T} \leq 150$  avec l'hypothèse d'un bruit blanc (les unités ne sont pas spécifiées. Dans cet exemple académique, la signification des deux dimensions est quelconque). La variance normalisée de l'erreur d'approximation est tracée sur la figure 2.1. En termes de variance minimale, les valeurs optimales des intervalles d'intégration des moments partiels sont  $\mathcal{X}_{opt} = 45$  et  $\mathcal{T}_{opt} = 45$ .

**Remarque 2.1.** L'équation aux dérivées partielles considérée (2.28) est "symétrique" au sens où les variables x et t peuvent être échangées sans modifier le comportement. Ce qui explique le fait que  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt}$ .

**Remarque 2.2.** Dorénavant, l'équation (2.50) approchant la variance de l'erreur d'approximation peut être utilisée pour rechercher  $\mathcal{X}_{opt}$  et  $\mathcal{T}_{opt}$  à partir d'une connaissance a priori sur le paramètre  $a_0$ .

Exemple 2. Considérons de nouveau l'exemple 1, à savoir le vrai paramètre  $a_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.1$  et  $\Delta t = 0.1$ .



FIGURE 2.1 – Variance normalisée de l'erreur d'approximation (Exemple 1).

Supposons une connaissance a priori du paramètre  $a_0$  avec une erreur de plus ou moins 30 %. Alors :

- Pour  $a_{0a \ priori} = 0.7$ , on déduit de l'équation (2.50) les valeurs  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 57$ .
- Pour  $a_{0a \ priori} = 1.3$ , on obtient les valeurs  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 38$ .

Reprenons l'équation (2.50) avec le vrai  $a_0$ , soit  $a_0 = 1$ , et calculons l'écart relatif entre la variance normalisée optimale obtenue pour  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 45$  et celle obtenue à partir de l'information a priori sur  $a_0$ . Alors,

- Pour  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 57$  ( $a_{0a \ priori} = 0.7$ ), on obtient un écart relatif de 7.7 %.
- Pour  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 38$  ( $a_{0a \ priori} = 1.3$ ), on obtient un écart relatif de 3.7 %.

La recherche  $\mathcal{X}_{opt}$  et  $\mathcal{T}_{opt}$  à partir d'une connaissance *a priori* assez précise conduit à des écarts relatifs peu importants. Il faut toutefois que cette information *a priori* ne soit pas trop éloignée de la valeur recherchée. Pour l'exemple proposée, si on prend  $a_{0a \ priori} = 0.5$ , on obtient  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 71$ , ce qui conduit à un écart relatif sur la variance de 32.4 %.

# Variance de l'erreur d'estimation en présence de bruit blanc

Considérons l'erreur d'estimation de la sortie définie par (2.36). Notons que la sortie bruitée peut être reformulée comme suit

$$y(X,T) = y_0(X,T) + v(X,T)$$

$$y(X,T) = -a_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{y_0}(X,T)}{XT} + b_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^u(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{y_0}(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{y_0}(X,T)}{X}$$

$$+ \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{y_0}(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{y_0}(X,T)}{XT} + v(X,T)$$

$$y(X,T) = -a_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^y(X,T)}{XT} + b_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^u(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^g(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^g(X,T)}{X}$$

$$+ \frac{\mathcal{M}_{-,0}^y(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^y(X,T)}{XT} + v(X,T) + a_0 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^v(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^v(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^v(X,T)}{XT}$$

$$(2.51)$$

pour obtenir

$$y(X,T) = \varphi^{T}(X,T)\theta + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{y}(X,T)}{X} + \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{y}(X,T)}{T} - \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{y}(X,T)}{XT} + v(X,T) + a_{0}\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT} - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT}$$
ec

avec

$$\theta = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \end{bmatrix}^T. \tag{2.53}$$

Ainsi, l'erreur d'estimation devient

$$\hat{\varepsilon}(X,T) = \varphi^{T}(X,T) \left(\theta - \hat{\theta}^{PM}\right) + v(X,T) + a_{0} \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT} - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)}{X} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT}.$$
(2.54)

Étudions la variance de l'erreur d'estimation dans l'hypothèse où  $\hat{\theta}^{PM} \to \theta,$  soit

$$\mathbb{E}\left\{\lim_{\hat{\theta}^{PM}\to\theta}\hat{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} = \mathbb{E}\left\{v(X,T)^{2}\right\} + 2a_{0}\mathbb{E}\left\{v(X,T)\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT}\right\} - 2\mathbb{E}\left\{v(X,T)\frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)}{X}\right\} - 2\mathbb{E}\left\{v(X,T)\frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)}{T}\right\} + 2\mathbb{E}\left\{v(X,T)\frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT}\right\} + \mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\}.$$
(2.55)

Dans l'hypothèse d'un bruit blanc, les termes  $\mathbb{E}\left\{v(X,T)\frac{\mathcal{M}_{\bullet,\bullet}^{v}(X,T)}{\bullet}\right\}$  sont nuls. D'où

$$\mathbb{E}\left\{\lim_{\hat{\theta}^{PM}\to\theta}\hat{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} = \mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} + \sigma^{2}.$$
(2.56)

En conclusion, l'erreur d'estimation présente une variance minimale pour les mêmes valeurs  $\mathcal{X}_{opt}$  et  $\mathcal{T}_{opt}$  obtenues pour l'erreur d'approximation.

# Variance du biais en présence de bruit blanc

En substituant (2.52) dans (2.39), on obtient le biais sur les paramètres estimés

$$\Delta \theta = \hat{\theta}^{PM} - \theta = \left(\sum_{l=0}^{\mathcal{X}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}} \varphi(l\Delta x, k\Delta t) \varphi^{T}(l\Delta x, k\Delta t)\right)^{-1}$$

$$\sum_{l=0}^{\mathcal{X}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}} \varphi(l\Delta x, k\Delta t) \left(v(l\Delta x, k\Delta t) + a_{0} \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(l\Delta x, k\Delta t)}{l\Delta x k\Delta t} - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(l\Delta x, k\Delta t)}{l\Delta x} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(l\Delta x, k\Delta t)}{k\Delta t} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(l\Delta x, k\Delta t)}{l\Delta x k\Delta t}\right).$$

$$(2.57)$$

La matrice de covariance du biais, définie par  $\mathbb{E}\left\{\left(\Delta\theta - \mathbb{E}\left\{\Delta\theta\right\}\right)\left(\Delta\theta - \mathbb{E}\left\{\Delta\theta\right\}\right)^T\right\}$ , dépend de

$$\mathbb{E}\left\{\varphi(X,T)\varphi^{T}(X,T)\left(v(X,T)+a_{0}\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT}-\frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{T}+\frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT}\right)^{2}\right\}.$$
(2.58)

Or, dans l'hypothèse d'un bruit v(x,t) blanc, la matrice (2.58) devient

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{y_0}(X,T) + \mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT}\right)^2\right\} & \mathbb{E}\left\{\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{y_0}(X,T) + \mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT} \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{u}(X,T)}{XT}\right\} \\ \mathbb{E}\left\{\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{y_0}(X,T) + \mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT} \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{u}(X,T)}{XT}\right\} & \mathbb{E}\left\{\left(\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{u}(X,T)}{XT}\right)^2\right\} \\ \mathbb{E}\left\{\left(v(X,T) + a_0\frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT} - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)}{X} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT}\right)^2\right\} \\ = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(2.59)$$

Étudions le seul terme non nul qui peut être réécrit sous la forme suivante

$$E_{11} = \mathbb{E}\left\{ \left( \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)}{XT} - \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v}(X,T)}{X} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v}(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v}(X,T)}{XT} \right) \right)^{2} \right\}.$$
(2.60)

En notant que  $E\left\{v(X,T)\mathcal{M}_{\bullet,\bullet}^{v}(X,T)\right\}=0$ , ce terme devient

$$E_{11} = \mathbb{E} \left\{ a_0^2 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{v-4}}{X^4 T^4} + 2a_0 \left( -\frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-3}}{X^4 T^3} - \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-3}}{X^3 T^4} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-3}}{X^4 T^4} \right) \\ + \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-2}}{X^4 T^2} + \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-2}}{X^2 T^4} + \frac{\mathcal{M}_{0,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-2}}{X^4 T^4} \\ + 2 \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v} \mathcal{M}_{-,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-2}}{X^3 T^3} - 2 \frac{\mathcal{M}_{0,-}^{v} \mathcal{M}_{0,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-2}}{X^4 T^3} - 2 \frac{\mathcal{M}_{-,0}^{v} \mathcal{M}_{0,0}^{v} \mathcal{M}_{1,1}^{v-2}}{X^3 T^4} \right\},$$

$$(2.61)$$

et, après les simplifications présentées en annexe A,

$$\begin{split} E_{11} &\approx \sigma^{4} \\ \left[ a_{0}^{2} \frac{\Delta x^{4} \Delta t^{4}}{900} \frac{(\mathcal{X}-1)(2\mathcal{X}-1)(3\mathcal{X}^{2}-3\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1)(2\mathcal{T}-1)(3\mathcal{T}^{2}-3\mathcal{T}-1)}{\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{3}} \right. \\ &+ a_{0} \Delta x^{3} \Delta t^{3} \left( -\frac{(\mathcal{X}-1)^{2}(\mathcal{T}-1)^{3}}{2\mathcal{X}^{2}\mathcal{T}^{3}} - \frac{(\mathcal{X}-1)^{3}(\mathcal{T}-1)^{2}}{2\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{2}} + \frac{(\mathcal{X}-1)^{2}(\mathcal{T}-1)^{2}}{8\mathcal{X}^{2}\mathcal{T}^{2}} \right) \\ &+ \Delta x^{2} \Delta t^{2} (\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1) \left( \frac{(2\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1)}{6\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{2}} + \frac{(\mathcal{X}-1)(2\mathcal{T}-1)}{6\mathcal{X}^{2}\mathcal{T}^{3}} \right. \\ &+ \frac{(2\mathcal{X}-1)(2\mathcal{T}-1)}{36\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{3}} + \frac{2(\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1)}{\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{3}} - \frac{(2\mathcal{X}-1)(\mathcal{T}-1)}{3\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{3}} - \frac{(\mathcal{X}-1)(2\mathcal{T}-1)}{3\mathcal{X}^{3}\mathcal{T}^{3}} \right) \right] \end{split}$$

Exemple 3. Considérons de nouveau l'exemple 1, à savoir le vrai paramètre  $a_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0.1$  et  $\Delta t = 0.1$ . La figure 2.2 présente  $E_{11}$ , image de la variance du biais, définie par (2.62). Le terme  $E_{11}$  est minimal pour des intervalles d'intégration des moments partiels  $\mathcal{X}_{opt} = 44$  et  $\mathcal{T}_{opt} = 44$ , soit des valeurs très proches des valeurs optimales pour l'erreur d'approximation.

#### 2.3.2.4 Hypothèse d'un bruit corrélé

Considérons maintenant un bruit v(x,t) corrélé. Pour simplifier les développements, on considère un bruit 2D avec une corrélation séparable à l'aide des hypothèses suivantes :

• bruit de moyenne nulle

$$\mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\} = 0\tag{2.63}$$

• la corrélation résulte d'un bruit blanc e(l, k) de variance unitaire filtré par un processus 2D AR(1)<sup>5</sup> comme suit

$$v(l,k) = \rho_1 v(l-1,k) + \rho_2 v(l,k-1) - \rho_1 \rho_2 v(l-1,k-1) + e(l,k) \quad (2.64)$$

et est définie par

$$\mathbb{E}\left\{v(l,k)v(l',k')\right\} = \sigma_v^2 \rho_1^{|l-l'|} \rho_2^{|k-k'|}$$
(2.65)

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Processus auto-régressif à deux dimensions d'ordre 1.



FIGURE 2.2 –  $\frac{E_{11}}{\sigma^4}$ , image de la variance du biais en présence de bruit blanc (Exemple 3).

où

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2)} \tag{2.66}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$0 \le \rho_1 < 1, \quad 0 \le \rho_2 < 1. \tag{2.67}$$

Des coefficients de corrélation  $\rho_1$  et  $\rho_2$  proches de 1 génèrent un bruit très corrélé, alors que des coefficients nuls fournissent un bruit blanc. Dans ces conditions, la variance de l'erreur d'approximation devient

$$\frac{\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\}}{\sigma_{v}^{2}} \approx a_{0}^{2} \frac{\Delta x^{2} \Delta t^{2}}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}^{2}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}k_{1} \sum_{l_{2}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{2}k_{2}\rho_{1}^{|l_{1}-l_{2}|}\rho_{2}^{|k_{1}-k_{2}|} \\
+ 2a_{0} \left( -\frac{\Delta x \Delta t}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}k_{1} \sum_{l_{2}=0}^{\mathcal{X}-1} \rho_{1}^{|l_{1}-l_{2}|}\rho_{2}^{|k_{1}-\mathcal{T}+1|} \\
-\frac{\Delta x \Delta t}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}k_{1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} \rho_{1}^{|l_{1}-\mathcal{X}+1|}\rho_{2}^{|k_{1}-k_{2}|} \\
+\frac{\Delta x \Delta t}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}^{2}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}k_{1} \sum_{l_{2}=0}^{\mathcal{X}-1} \rho_{1}^{|l_{1}-l_{2}|}\rho_{2}^{|k_{1}-k_{2}|} \\
+\frac{\Delta x \Delta t}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}^{2}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} l_{1}k_{1} \sum_{l_{2}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} \rho_{1}^{|l_{1}-l_{2}|}\rho_{2}^{|k_{1}-k_{2}|} \\
+\frac{2}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{T}-1} \rho_{2}^{|k_{1}-k_{2}|} \\
+ \frac{2}{\mathcal{X}\mathcal{T}} \sum_{l_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} \rho_{1}^{|l_{1}-\mathcal{X}+1|}\rho_{2}^{|\mathcal{T}-1-k_{2}|} \\
- \frac{2}{\mathcal{X}\mathcal{T}^{2}} \sum_{k_{1}=0}^{\mathcal{X}-1} \sum_{k_{2}=0}^{\mathcal{T}-1} \rho_{1}^{|\lambda_{1}-l_{2}|}\rho_{2}^{|k_{1}-k_{2}|}. \quad (2.68)$$

Pour l'équation différentielle (2.28) et les conditions de simulation considérées, la variance de l'erreur d'approximation (2.68) en présence de bruit corrélé est minimale pour des intervalles d'intégration  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{T}$  inférieurs à ceux obtenus dans le cas d'un bruit blanc.

Exemple 4. Considérons de nouveau l'exemple 1 avec cette fois l'hypothèse d'un bruit corrélé. Les figures 2.3 et 2.4 représentent la corrélation du bruit (2.65) et la variance de l'erreur d'approximation (2.68) pour les cas suivants :

- Cas 1 :  $\rho_1 = 0.5$  et  $\rho_2 = 0.5$ ,
- Cas  $2: \rho_1 = 0.9$  et  $\rho_2 = 0.9$ .

Les valeurs optimales sont  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 31$  pour le cas 1 avec un bruit faiblement corrélé, et  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 19$  pour le cas 2 avec un bruit fortement corrélé. Rappelons que ces valeurs étaient  $\mathcal{X}_{opt} = \mathcal{T}_{opt} = 45$  dans le cas du bruit blanc (exemple 1).

#### 2.3.2.5 Conclusion

On peut conclure de l'étude du cas simple de l'équation aux dérivées partielles définie par (2.28) que le modèle 2D basé sur les moments partiels présente la même propriété du minimum de variance que le modèle 1D. Cependant comme le montre le paragraphe suivant, cette propriété n'est pas systématiquement vérifiée dans le domaine spatial pour une EDP quelconque.



(a)



FIGURE 2.3 – (a) Corrélation du bruit (2.65). (b) Variance de l'erreur d'approximation (2.68) - Minimum marqué par la croix. Cas 1 avec  $\rho_1 = 0.5$  et  $\rho_2 = 0.5$ .





FIGURE 2.4 – (a) Corrélation du bruit (2.65). (b) Variance de l'erreur d'approximation (2.68) - Minimum marqué par la croix. Cas 2 avec  $\rho_1 = 0.9$  et  $\rho_2 = 0.9$ .

# 2.3.3 Diffusion de chaleur dans un mur

### 2.3.3.1 Position du problème

Considérons le problème de diffusion de la chaleur dans un mur (Gabano *et al.* (2008)) où on s'intéresse à l'estimation du coefficient de diffusivité thermique  $\alpha$ . Supposons que la température  $\mathbb{T}_0(x,t)$  soit uniforme pour chaque plan parallèle aux faces avant et arrière du mur. Ce mur se caractérise par une épaisseur L comme présentée dans la figure 2.5.



FIGURE 2.5 – Mur thermique.

Un flux thermique  $\varphi_{in}(t)$  est appliqué au mur à x = 0. La température  $\mathbb{T}_0(x, t)$  et le flux thermique  $\varphi(x, t)$  satisfont respectivement les lois de diffusion de chaleur suivantes

$$\frac{\partial \mathbb{T}_0\left(x,t\right)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \mathbb{T}_0\left(x,t\right)}{\partial x^2} \tag{2.69}$$

$$\varphi(x,t) = -\lambda \frac{\partial \mathbb{T}_0(x,t)}{\partial x}$$
(2.70)

où

- $\lambda$  : conductivité thermique (W.m<sup>-1</sup>.°C<sup>-1</sup>),
- $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$  : diffusivité thermique (m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>),
- $\rho$  : masse volumique (kg.m<sup>-3</sup>),
- c : chaleur spécifique (J.kg<sup>-1</sup>.°C<sup>-1</sup>).

#### 2.3.3.2 Modèle basé sur les moments partiels 2D

Pour manipuler les ordres de dérivation supérieurs à 1, introduisons la formule de Cauchy pour l'intégration successive qui permet de transformer une intégrale multiple en une intégrale simple

$$\int_{a}^{\sigma_{0}} \int_{a}^{\sigma_{1}} \dots \int_{a}^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_{n}) \partial \sigma_{n} \dots \partial \sigma_{2} \partial \sigma_{1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{a}^{\sigma_{0}} (\sigma_{0} - \sigma_{1})^{n-1} f(\sigma_{1}) \partial \sigma_{1}.$$
(2.71)

L'équation (2.69) présente un système d'ordre 2 par rapport à l'espace et d'ordre 1 par rapport au temps. Pour faire disparaitre les dérivées partielles, appliquons le calcul intégral  $\int_0^T t \int_0^X \int_0^{x_1} x_2^2 \bullet \partial x_2 \partial x_1 \partial t$  à l'équation (2.69), soit

$$\underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} \int_{0}^{x_{1}} x_{2}^{2} \frac{\partial \mathbb{T}_{0}(x_{2}, t)}{\partial t} \partial x_{2} \partial x_{1} \partial t}_{\mathcal{Y}_{1}^{\mathbb{T}_{0}}(X, T)} = \alpha \underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} \int_{0}^{x_{1}} x_{2}^{2} \frac{\partial^{2} \mathbb{T}_{0}(x_{2}, t)}{\partial x^{2}} \partial x_{2} \partial x_{1} \partial t}_{\mathcal{Y}_{2}^{\mathbb{T}_{0}}(X, T)}.$$

$$(2.72)$$

Après une intégration par parties, la partie gauche de (2.72) devient

$$\mathcal{Y}_{1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = T \int_{0}^{X} \int_{0}^{x_{1}} x_{2}^{2} \mathbb{T}_{0}(x_{2},T) \partial x_{2} \partial x_{1} - \int_{0}^{T} \int_{0}^{X} \int_{0}^{x_{1}} x_{2}^{2} \mathbb{T}_{0}(x_{2},t) \partial x_{2} \partial x_{1} \partial t.$$
(2.73)

Utilisons la formule de Cauchy (2.71) pour simplifier les intégrales doubles et obtenir

$$\mathcal{Y}_{1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = TX \int_{0}^{X} x_{1}^{2} \mathbb{T}_{0}(x_{1},T) \partial x_{1} - X \int_{0}^{X} x_{1}^{2} \int_{0}^{T} \mathbb{T}_{0}(x_{1},t) \partial t \partial x_{1} - T \int_{0}^{X} x_{1}^{3} \mathbb{T}_{0}(x_{1},T) \partial x_{1} + \int_{0}^{X} x_{1}^{3} \int_{0}^{T} \mathbb{T}_{0}(x_{1},t) \partial t \partial x_{1}.$$
(2.74)

Ainsi,

$$\mathcal{Y}_{1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = TX\mathcal{M}_{2,-}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) + X\mathcal{M}_{2,0}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) + T\mathcal{M}_{3,-}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) - \mathcal{M}_{3,0}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T).$$
(2.75)

De la même manière, la partie droite de (2.72) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{Y}_{2}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = X^{2} \int_{0}^{T} t \mathbb{T}_{0}(X,t) \partial t - 4 \int_{0}^{T} t \int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x_{1} \mathbb{T}_{0}(x_{1},t) \partial x_{1} \partial t + 2 \int_{0}^{T} t \int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} \int_{0}^{x_{1}} \mathbb{T}_{0}(x_{2},t) \partial x_{2} \partial x_{1} \partial t. \quad (2.76)$$

À l'aide de la formule de Cauchy, on obtient

$$\mathcal{Y}_{2}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = X^{2} \int_{0}^{T} t \mathbb{T}_{0}(X,t) \partial t - 6 \int_{0}^{X} x_{1} \int_{0}^{T} t \mathbb{T}_{0}(x_{1},t) \partial t \partial x_{1} + 2X \int_{0}^{X} \int_{0}^{T} t \mathbb{T}_{0}(x_{1},t) \partial t \partial x_{1}, = X^{2} \mathcal{M}_{-,1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) - 6 \mathcal{M}_{1,1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) + 2X \mathcal{M}_{0,1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T).$$
(2.77)

Ainsi, le modèle obtenu peut être réécrit sous la forme suivante

$$\mathcal{Y}_{11}^{\mathbb{T}_0}(X,T) = \alpha \mathcal{Y}_{21}^{\mathbb{T}_0}(X,T) + \mathcal{Y}_{12}^{\mathbb{T}_0}(X,T)$$
(2.78)

avec

$$\mathcal{Y}_{11}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = \mathcal{M}_{2,-}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T),$$

$$\mathcal{Y}_{21}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = X \frac{\mathcal{M}_{-,1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T)}{T} - 6 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T)}{XT} + 2 \frac{\mathcal{M}_{0,1}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T)}{T},$$

$$\mathcal{Y}_{12}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T) = \frac{\mathcal{M}_{2,0}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{3,-}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T)}{X} - \frac{\mathcal{M}_{3,0}^{\mathbb{T}_{0}}(X,T)}{TX}.$$
(2.79)

**Remarque 2.3.** On notera que le modèle (2.78) n'est pas un modèle de sortie comme peut l'être le modèle (2.31). On a en fait construit une pseudo-sortie  $\mathcal{Y}_{11}^{\mathbb{T}_0}(X,T)$ .

Substituons la sortie mesurée  $\mathbb{T}(x,t) = \mathbb{T}_0(x,t) + v(x,t)$  à la sortie exacte  $\mathbb{T}_0(x,t)$ dans l'équation (2.78) pour obtenir une approximation de la sortie comme suit

$$\bar{\mathcal{Y}}_{11}(X,T) = \alpha \mathcal{Y}_{21}^{\mathbb{T}_0+v}(X,T) + \mathcal{Y}_{12}^{\mathbb{T}_0+v}(X,T)$$
(2.80)

où v(x,t) est le bruit blanc présenté dans la paragraphe 2.3.2.3.

Définissons l'erreur d'approximation

$$\bar{\varepsilon}(X,T) = \bar{\mathcal{Y}}_{11}(X,T) - \mathcal{Y}_{11}^{\mathbb{T}_0}(X,T) 
= \alpha \left( X \frac{\mathcal{M}_{-,1}^v(X,T)}{T} - 6 \frac{\mathcal{M}_{1,1}^v(X,T)}{XT} + 2 \frac{\mathcal{M}_{0,1}^v(X,T)}{T} \right) 
+ \frac{\mathcal{M}_{2,0}^v(X,T)}{T} + \frac{\mathcal{M}_{3,-}^v(X,T)}{X} - \frac{\mathcal{M}_{3,0}^v(X,T)}{TX}.$$
(2.81)

#### 2.3.3.3 Moyenne de l'erreur d'approximation en présence de bruit blanc

Considérons une implémentation des moments basée sur la méthode des rectangles, la moyenne de l'erreur d'approximation est alors donnée par

$$\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)\right\} \approx \alpha \left(\frac{\mathcal{X}\Delta x\Delta t}{\mathcal{T}}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}k \mathbb{E}\left\{v(\mathcal{X},k)\right\} - 6\frac{\Delta x\Delta t}{\mathcal{T}\mathcal{X}}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}l \ k \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\}\right\} + 2\frac{\Delta x\Delta t}{\mathcal{T}}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}k \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\}\right) + \frac{\Delta x^3}{\mathcal{T}}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}l^2 \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\} + \frac{\Delta x^3}{\mathcal{X}}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}l \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\} - \frac{\Delta x^3}{\mathcal{T}\mathcal{X}}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}l \mathbb{E}\left\{v(l,k)\right\}.$$

$$(2.82)$$

L'hypothèse d'un bruit v(x,t) de moyenne nulle permet de conclure que  $\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)\right\} \approx 0.$ 

# 2.3.3.4 Variance de l'erreur d'approximation en présence de bruit blanc Calculons la variance de l'erreur d'approximation, soit

$$\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} = \alpha^{2} \left(\frac{X^{2}}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)^{2}\right\} + 36\frac{1}{X^{2}T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)^{2}\right\} \right. \\ \left. + 4\frac{1}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)^{2}\right\} - 12\frac{1}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. + 4\frac{X}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)\right\} - 24\frac{1}{XT^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)\right\} \right) \right. \\ \left. + 2\alpha \left(\frac{X}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{2,0}^{v}(X,T)\right\} - 24\frac{1}{XT^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,-}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. -\frac{1}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,0}^{v}(X,T)\right\} - 6\frac{1}{XT^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{2,0}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. -6\frac{1}{X^{2}T} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,-}^{v}(X,T)\right\} - 6\frac{1}{X^{2}T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,0}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. -6\frac{1}{X^{2}T} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{2,0}^{v}(X,T)\right\} + 6\frac{1}{X^{2}T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,0}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. -2\frac{1}{T^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{2,0}^{v}(X,T)\right\} + 2\frac{1}{XT} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,-}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. -2\frac{1}{XT^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,1}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,0}^{v}(X,T)\right\} - 2\frac{1}{X^{2}T} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{2,0}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,-}^{v}(X,T)\right\} \right. \\ \left. -2\frac{1}{XT^{2}} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{2,0}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,0}^{v}(X,T)\right\} - 2\frac{1}{X^{2}T} \mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{3,-}^{v}(X,T)\mathcal{M}_{3,0}^{v}(X,T)\right\} \right.$$
 (2.83)

En supposant un bruit blanc et en considérant (2.45-2.47), on obtient

$$\mathbb{E}\left\{\bar{\varepsilon}(X,T)^{2}\right\} = \sigma^{2} \left(\alpha^{2} \frac{\Delta x^{2} \Delta t^{2}}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}^{2}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} k^{2} [\mathcal{X}^{4} + 36 \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{2} + 8\mathcal{X}^{3} - 12\mathcal{X}^{2}(\mathcal{X}-1) - 24\mathcal{X} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{2} + 2\alpha \frac{\Delta x^{4} \Delta t}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}^{2}} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} k [4 \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{3}(\mathcal{X}-1) - 6 \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{4} + 2\mathcal{X}^{2} \sum_{k=0}^{\mathcal{X}-1} l^{2}] + \frac{\Delta x^{6}}{\mathcal{X}^{2} \mathcal{T}^{2}} [\mathcal{T}\mathcal{X}^{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{4} + \mathcal{T}^{2} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{6} - \mathcal{T} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{6}]). \quad (2.84)$$

Exemple 5. On considère les valeurs numériques suivantes :  $\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} m^2 s^{-1}$ ,  $\Delta x = 0.0001 \ m$ ,  $\Delta t = 0.01 \ s$ ,  $1 \leq \mathcal{X} \leq 100 \ et \ 1 \leq \mathcal{T} \leq 150$ . La figure 2.6 présente la variance normalisée de l'erreur d'approximation. On peut noter que la variance est monotone en  $\mathcal{X}$  sur l'intervalle étudié. La figure 2.7 montre la variance normalisée pour  $\mathcal{X} = 100$ . L'optimum temporel est alors  $\mathcal{T} = 12$ .



FIGURE 2.6 – Variance normalisée de l'erreur d'approximation (Diffusion de chaleur dans un mur).



FIGURE 2.7 – Variance normalisée de l'erreur d'approximation pour  $\mathcal{X}=100.$ 

51

# 2.3.4 Conclusion

L'étude statistique des équations aux dérivées partielles est compliquée pour trois raisons. La première raison est liée à l'ordre du système : la complexité augmente dès que l'ordre augmente. La deuxième cause vient de l'hypothèse sur le bruit qui influence le calcul de la variance de l'erreur d'approximation. Et la troisième raison est attachée aux nombres de variables dans l'équation aux dérivées partielles. Notre cas d'étude se limite à deux variables : l'espace et le temps. Si le système admet n variables alors il faut n intégrales relatives à chaque variable.

Pour le cas simple de la section 2.3.2, on démontre que le modèle basé sur les moments partiels 2D possède bien deux intervalles d'intégration optimaux en termes de variance minimale de l'erreur d'approximation. Pour la diffusion de chaleur dans un mur, le modèle considéré ne présente qu'un optimum temporel.

# 2.4 Moments partiels réinitialisés 2D

#### 2.4.1 Définition des moments partiels réinitialisés 2D

De la même façon que pour les systèmes 1D, définissons le moment partiel réinitialisé 2D d'ordre *i* dans le domaine spatial et d'ordre *j* dans le domaine temporel de la fonction f(x,t) de carré sommable par

$$M_{i,j}^f(x,t) = \int_0^{\hat{X}} \int_0^{\hat{T}} \sigma^i \tau^j f(x - \hat{X} + \sigma, t - \hat{T} + \tau) \partial \tau \partial \sigma$$
(2.85)

où  $\hat{X}$  et  $\hat{T}$  sont les paramètres de réinitialisation, paramètres de conception à choisir par l'utilisateur.

Comme on a pu le voir dans l'exemple du paragraphe 2.3.3, si le problème est borné spatialement, il est raisonnable de choisir de calculer les moments en prenant X = L. Alors, seule la réinitialisation dans le domaine temporel est considérée. Dans ce cas, on utilise le moment partiel réinitialisé avec une fenêtre glissante dans le domaine temporel et un intervalle d'intégration spatial fixe portant sur [0, L] où L est l'horizon spatial. Ce qui donne

$$M_{i,j}^{f}(L,t) = \int_{0}^{L} \int_{0}^{\hat{T}} \sigma^{i} \tau^{j} f(\sigma, t - \hat{T} + \tau) \partial \tau \partial \sigma.$$
(2.86)

# 2.4.2 Modèle de sortie basé sur les moments partiels réinitialisés 2D

Considérons de nouveau l'exemple simple (2.28). En substituant la sortie exacte  $y_0(x,t)$  par la sortie mesurée y(x,t) dans l'équation (2.31), et en considérant les moments partiels réinitialisés plutôt que les moments partiels, on obtient le modèle de sortie suivant

$$\hat{y}(x,t) = -\hat{a}_0 \frac{M_{1,1}^g(x,t)}{\hat{X}\hat{T}} + \hat{b}_0 \frac{M_{1,1}^u(x,t)}{\hat{X}\hat{T}} + \frac{M_{0,-}^g(x,t)}{\hat{X}} + \frac{M_{-,0}^g(x,t)}{\hat{T}} - \frac{M_{0,0}^g(x,t)}{\hat{X}\hat{T}}.$$
(2.87)

# 2.4.3 Identification et implémentation

# 2.4.3.1 Estimation par les moindres carrés

Le modèle de sortie (2.87), linéaire par rapport aux paramètres, peut être réécrit sous la forme d'une régression linéaire

$$\hat{y}(x,t) = \varphi^T(x,t)\hat{\theta}^{RPM} + \gamma^y(x,t)$$
(2.88)

où

$$\varphi(x,t) = \begin{bmatrix} -\frac{M_{1,1}^{y}(x,t)}{\hat{X}\hat{T}} & \frac{M_{1,1}^{u}(x,t)}{\hat{X}\hat{T}} \end{bmatrix}^{T}, \\
\hat{\theta}^{RPM} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{0} & \hat{b}_{0} \end{bmatrix}^{T}, \\
\gamma^{y}(x,t) = \frac{M_{0,-}^{y}(x,t)}{\hat{X}} + \frac{M_{-,0}^{y}(x,t)}{\hat{T}} - \frac{M_{0,0}^{y}(x,t)}{\hat{X}\hat{T}}.$$
(2.89)

Disposant d'un ensemble fini de mesures d'entrée-sortie défini par

$$\{u(l\Delta x, k\Delta t), y(l\Delta x, k\Delta t)\}_{l\in\{0,\dots,N_x\}, k\in\{0,\dots,N_t\}},$$
(2.90)

considérons le critère quadratique suivant

$$J = \sum_{l=\hat{\mathcal{X}}}^{N_x} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} (y(l\Delta x, k\Delta t) - \hat{y}(l\Delta x, k\Delta t))^2$$
(2.91)

où  $\hat{\mathcal{X}}$  correspond à  $\hat{X} = \hat{\mathcal{X}} \Delta x$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  à  $\hat{T} = \hat{\mathcal{T}} \Delta t$ .

Le vecteur de paramètres  $\hat{\theta}^{RPM}$  peut être estimé par l'algorithme des moindres carrés

$$\hat{\theta}^{RPM} = \left[\sum_{l=\hat{\mathcal{X}}}^{N_x} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi(l\Delta x, k\Delta t) \varphi^T(l\Delta x, k\Delta t)\right]^{-1}$$

$$\sum_{l=\hat{\mathcal{X}}}^{N_x} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi(l\Delta x, k\Delta t) (y(l\Delta x, k\Delta t) - \gamma^y(l\Delta x, k\Delta t)).$$
(2.92)

#### 2.4.3.2 Estimation par l'approche variable instrumentale

Comme pour le cas 1D, la présence du bruit v(x,t) dans le régresseur  $\varphi(x,t)$ entraine un biais dans l'estimation par moindres carrés. Ce qui amène à introduire la variable instrumentale pour améliorer la qualité de l'estimation comme suit

$$\hat{\theta}^{IV/RPM} = \left[\sum_{l=\hat{\mathcal{X}}}^{N_x} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \psi(l\Delta x, k\Delta t) \varphi^T(l\Delta x, k\Delta t)\right]^{-1}$$

$$\sum_{l=\hat{\mathcal{X}}}^{N_x} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \psi(l\Delta x, k\Delta t) (y(l\Delta x, k\Delta t) - \gamma^y(l\Delta x, k\Delta t))$$
(2.93)

où

$$\psi(x,t) = \begin{bmatrix} -\frac{M_{1,1}^{\hat{y}}(x,t)}{\hat{X}\hat{T}} & \frac{M_{1,1}^{u}(x,t)}{\hat{X}\hat{T}} \end{bmatrix}^{T}$$
(2.94)

et  $\hat{y}(x,t)$ , l'instrument, est fourni par un simulateur de l'EDP avec les paramètres  $\hat{a}_0$  et  $\hat{b}_0$  estimés à l'itération précédente.

Quelques itérations de l'algorithme de la variable instrumentale sont recommandées afin d'éliminer le biais.

#### 2.4.3.3 Implémentation des moments partiels réinitialisés

Plusieurs méthodes de calcul approché d'intégrales sont proposées dans la littérature. Parmi ces techniques, on cite les méthodes de Simpson, des rectangles et des trapèzes (Walter, 2014). Dans la suite de ce chapitre, l'implémentation numérique des moments partiels réinitialisés (2.86) est obtenue à l'aide de la méthode des trapèzes. Le moment partiel réinitialisé d'ordre (i, j) se calcule alors comme suit

$$M_{i,j}^{f}(L,t) \approx \sum_{l=0}^{N_{x}} V_{l} \sum_{k=0}^{\hat{\mathcal{T}}} W_{k} (l\Delta x)^{i} (k\Delta t)^{j} f(l\Delta x, t - \hat{\mathcal{T}}\Delta t + k\Delta t), \qquad (2.95)$$

avec  $L = N_x \Delta x$ ,  $\hat{T} = \hat{T} \Delta t$ ,  $V_0 = V_{N_x} = \Delta x/2$ ,  $V_l = \Delta x$  pour  $l = 1, \dots, N_x - 1$ ,  $W_0 = W_{\hat{T}} = \Delta t/2$  et  $W_k = \Delta t$  pour  $k = 1, \dots, \hat{T} - 1$ .

Pour appliquer la formule (2.95), il est nécessaire d'avoir des données mesurées à chaque échantillon spatial. Il est à noter que ces échantillons sont équidistants. Dans certains cas, il est difficile de satisfaire cette hypothèse. Utilisons alors la méthode des trapèzes avec un échantillonnage spatial non uniformément réparti. Le moment partiel réinitialisé d'ordre (i, j) s'écrit alors

$$M_{i,j}^{f}(L,t) \approx \sum_{l=0}^{N_{x}-1} (x_{l+1} - x_{l}) \sum_{k=0}^{\hat{\mathcal{T}}} W_{k}(k\Delta t)^{j} \frac{(x_{l+1})^{i} f(x_{l+1}, t - \hat{\mathcal{T}}\Delta t + k\Delta t) + (x_{l})^{i} f(x_{l}, t - \hat{\mathcal{T}}\Delta t + k\Delta t)}{2},$$
(2.96)

où  $x_l$ , pour  $l = 0, \dots, N_x$ , représente le point d'échantillon spatial.

# 2.4.4 Discussion

En identification de systèmes à temps continu, les approches à erreur d'équation consistent à approcher les dérivées des signaux d'entrée-sortie inaccessibles à la mesure. Dans le cas 1D d'une équation différentielle ordinaire, trois classes d'approches existent, et elles sont basées, respectivement, sur le filtrage, l'intégration ou les fonctions modulantes (Mensler (1999); Garnier *et al.* (2003)). L'approche basée sur les moments partiels réinitialisés a la particularité d'appartenir à deux des trois classes. Effectivement, par nature, cette méthode est classée parmi les approches basées sur l'intégration, mais elle peut être également classée parmi les approches basées sur le filtrage étant donnée la formulation (2.17) avec le filtre FIR implicite (Trigeassou (1987); Ouvrard et Trigeassou (2011)).

Dans le cas 2D, le modèle basé sur les moments partiels réinitialisés n'a pas été formulé sous forme de filtrage FIR. Cependant, cette formulation est certainement envisageable si on considère les travaux de Mboup (Mboup *et al.* (2009); Bachalany *et al.* (2010)) sur la différentiation numérique multivariable.

L'utilisation des moments partiels réinitialisés permet d'obtenir une estimation des paramètres avec une variance minimale à condition de choisir les paramètres de conception  $\hat{\mathcal{X}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  proche de  $\mathcal{X}_{opt}$  et  $\mathcal{T}_{opt}$ . En pratique, le choix des valeurs de  $\hat{\mathcal{X}}$  et  $\hat{\mathcal{T}}$  se fait empiriquement en les augmentant progressivement et en utilisant un critère du type critère quadratique ou auto-corrélation des résidus.

# 2.5 Identification du coefficient de diffusion de la chaleur dans un mur thermique

# 2.5.1 Identification avec des mesures uniformément réparties

On considère dans cette section l'exemple de simulation de la diffusion de chaleur pour étudier les performances de la méthode des moments partiels réinitialisés. Cet exemple concerne l'équation de transfert de chaleur à travers un mur.

L'équation de diffusion de chaleur, sous sa forme générale, se caractérise par la relation entre la variable de temps t et les variables d'espace x, y et z. Ces quatre variables sont complètement indépendantes. Dans cette étude, on va se limiter à deux variables, ainsi la température est exprimée seulement par rapport à l'espace x et le temps t.

Dans cet exemple, on considère des moments partiels réinitialisés avec une fenêtre glissante temporelle et un intervalle spatial fixe [0, L] comme définis dans (2.86). Ceci se justifie par le fait qu'on ne trouve pas d'intervalle spatial optimum, mais également par la largeur limitée du mur.

# 2.5.1.1 Simulation

En se basant sur les différences finies, un simulateur numérique a été suggéré dans (Gabano *et al.* (2008); Gabano et Poinot (2009)) afin de simuler l'équation de diffusion de chaleur (2.69). Comme montré dans la figure 2.8, le mur est divisé en  $N_x$ cellules d'épaisseur  $\Delta x$ . Ainsi, chaque cellule est définie par son abscisse  $x = l\Delta x$  $(0 \le l \le N_x)$  et par son épaisseur  $\Delta x = L/N_x$ .



FIGURE 2.8 – Discrétisation spatiale du mur.

Les conditions initiales sont généralement connues. Elles représentent la répartition de la température à t = 0. Les conditions limites représentent les contraintes sur les frontières qui permettent de résoudre les équations aux dérivées partielles. Pour l'exemple du mur thermique, on maintient la température  $\mathbb{T}(L, t)$  de la face arrière constante.

Les conditions spatio-temporelles initiales et limites respectent les relations suivantes

$$\begin{cases} \mathbb{T}(L,t) = 0 & t \ge 0\\ \mathbb{T}(x,0) = 0 & 0 \le x \le L. \end{cases}$$
(2.97)

Pour chaque abscisse, l'équation de chaleur suit la loi suivante

$$\frac{d\mathbb{T}(l\Delta x,t)}{dt} = \frac{1}{R_l C_l} (\mathbb{T}((l-1)\Delta x,t) - 2\mathbb{T}(l\Delta x,t) + \mathbb{T}((l+1)\Delta x,t))$$
(2.98)

qui se caractérise par :

- la résistance thermique  $R_l = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{S}$ ,
- la capacité thermique  $C_l = \rho c S \Delta x$ ,

où S est la surface du mur.

**Remarque 2.4.** La multiplication de la résistance thermique  $R_l$  par la capacité thermique  $C_l$  est proportionnelle à l'inverse du paramètre de diffusion de chaleur  $\alpha$ .

L'équation (2.98) nous ramène au schéma électrique équivalent présenté dans la figure 2.9.



FIGURE 2.9 – Schéma de simulation d'une cellule élémentaire du mur.

Si on considère les températures  $\mathbb{T}(l\Delta x, t)$   $(0 \le l \le N_x)$  comme des variables d'état, alors on obtient le modèle d'état suivant

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + u \tag{2.99}$$

avec

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}(0,t) & \mathbb{T}(\Delta x,t) & \cdots & \mathbb{T}(N_x \Delta x,t) \end{bmatrix}^T, \\ u = \begin{bmatrix} 2\frac{\varphi_{in}(t)}{C_l} & 0 & \dots & 0 & \frac{\mathbb{T}(L,t)}{R_l C_l} \end{bmatrix}^T, \\ A = \begin{bmatrix} \frac{-2}{R_l C_l} & \frac{2}{R_l C_l} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{R_l C_l} & \frac{-2}{R_l C_l} & \frac{1}{R_l C_l} & \ddots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{R_l C_l} & \frac{-2}{R_l C_l} & \frac{1}{R_l C_l} \end{bmatrix}.$$
(2.100)

Le flux de chaleur  $\varphi_{in}(t)$  et la température de la face arrière  $\mathbb{T}(L, t)$  représentent les entrées du modèle, et les sorties sont les températures de chaque cellule élémentaire du mur.

Pour la simulation, on fixe les paramètres physiques comme suit

$$\begin{cases}
\rho = 8.522 \ 10^3 \ Kg.m^{-1}, \\
\lambda = 111 \ W.m.C^{-1}, \\
c = 0.385 \ 10^3 \ J.kg^{-1}.C, \\
\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} \ m^2.s^{-1}, \\
S = 100 \ cm^2, \\
L = 5 \ cm.
\end{cases}$$
(2.101)

De plus, les pas d'échantillonnage temporel et spatial sont fixés à  $\Delta t = 0.01 \ s$  et  $\Delta x = 10^{-4} \ m$ , respectivement. Le flux thermique  $\varphi_{in}(t)$ , utilisé pour exciter le simulateur, est présenté dans la figure 2.10, de même que les températures  $\mathbb{T}(0,t)$  et  $\mathbb{T}(\frac{L}{2},t)$ .



FIGURE 2.10 – Entrées/Sorties du mur (sans bruit).

#### 2.5.1.2 Modèle basé sur les moments partiels réinitialisés 2D

D'une manière similaire à l'exemple simple de la section 2.3.2, dans (2.78), on substitue les moments partiels réinitialisées aux moments partiels en considérant les mesures  $\mathbb{T}(x,t) = \mathbb{T}_0(x,t) + v(x,t)$  pour obtenir le modèle suivant

$$Y_{11}^{\mathbb{T}}(L,t) = \hat{\alpha}Y_{21}^{\mathbb{T}}(L,t) + Y_{12}^{\mathbb{T}}(L,t)$$
(2.102)

avec

$$Y_{11}^{\mathbb{T}}(L,t) = M_{2,-}^{\mathbb{T}}(L,t),$$

$$Y_{21}^{\mathbb{T}}(L,t) = \frac{L}{\hat{T}}M_{-,1}^{\mathbb{T}}(L,t) - 6\frac{1}{\hat{T}L}M_{1,1}^{\mathbb{T}}(L,t) + 2\frac{1}{\hat{T}}M_{0,1}^{\mathbb{T}}(L,t),$$

$$Y_{12}^{\mathbb{T}}(L,t) = \frac{1}{\hat{T}}M_{2,0}^{\mathbb{T}}(L,t) + \frac{1}{L}M_{3,-}^{\mathbb{T}}(L,t) - \frac{1}{\hat{T}L}M_{3,0}^{\mathbb{T}}(L,t).$$
(2.103)

Le modèle basé sur les moments partiels réinitialisés (2.102) étant linéaire par rapport aux paramètres, l'algorithme des moindres carrés permet d'estimer le coefficient de diffusivité thermique

$$\hat{\alpha}_{LS} = \left[\sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} Y_{21}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t)^2\right]^{-1} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} Y_{21}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t) (Y_{11}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t) - Y_{12}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t)) \quad (2.104)$$

où  $\hat{\mathcal{T}}$ , correspondant à  $\hat{T} = \hat{\mathcal{T}} \Delta t$ , est le paramètre de réinitialisation.

#### 2.5 Identification du coefficient de diffusion de la chaleur dans un mur thermique 59

Puisque le bruit est présent dans le régresseur  $Y_2^{\mathbb{T}}$ , l'estimation des moindres carrés est biaisée. Aussi, pour améliorer la qualité d'estimation, on introduit l'algorithme d'estimation avec la variable instrumentale. Le régresseur de la variable instrumentale est

$$\xi(L,t) = \frac{L}{\hat{T}} M_{-,1}^{\hat{\mathbb{T}}}(L,t) - 6\frac{1}{\hat{T}L} M_{1,1}^{\hat{\mathbb{T}}}(L,t) + 2\frac{1}{\hat{T}} M_{0,1}^{\hat{\mathbb{T}}}(L,t)$$
(2.105)

où  $\hat{\mathbb{T}}$  est fourni par un modèle auxiliaire basé sur l'estimation  $\hat{\alpha}$  à l'itération précédente dans le processus itératif de la variable instrumentale.

On se heurte à la difficulté de simulation de l'équation aux dérivées partielles représentant le modèle auxiliaire. Ici on a choisi d'utiliser le simulateur présenté dans la section 2.5.1.1 avec l'hypothèse que les paramètres  $\rho$  et c sont connus et que l'estimation de  $\hat{\alpha}$  donne accès à l'estimation de  $\hat{\lambda}$ . Autrement dit, le modèle auxiliaire donnant l'instrument est défini comme suit

$$\frac{\partial \hat{\mathbb{T}}(x,t)}{\partial t} = \frac{\hat{\lambda}}{\rho c} \frac{\partial^2 \hat{\mathbb{T}}(x,t)}{\partial x^2},$$
(2.106)

$$\hat{\varphi}(x,t) = -\hat{\lambda} \frac{\partial \hat{\mathbb{T}}(x,t)}{\partial x}.$$
(2.107)

L'estimation basée sur la variable instrumentale est donnée par

$$\hat{\alpha}_{IV} = \left[\sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \xi(L, k\Delta t) Y_{21}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t)\right]^{-1}$$

$$\sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \xi(L, k\Delta t) (Y_{11}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t) - Y_{12}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t)).$$
(2.108)

Quelques itérations de l'algorithme de la variable instrumentale suffisent à réduire le biais.

#### 2.5.1.3 Résultats

Les performances des estimateurs (2.104) et (2.108) sont évaluées par une simulation de Monte Carlo avec 100 tirages d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. Tous les échantillons spatiaux sont perturbés, dans le domaine temporel, avec des séquences de bruit différentes. Ce bruit se caractérise par un rapport signal sur bruit<sup>6</sup> égal à 10 dB. Pour obtenir une bonne estimation, on excite le système avec un flux  $\varphi_{in}(t)$  de type signal binaire pseudo-aléatoire comme le montre la figure 2.10. Le tableau 2.1 montre les résultats d'estimation des deux méthodes (LS et IV) où tous les points d'échantillonnage spatial sont considérés.

 ${}^{6}S/B_{dB} = 10 \ log(S/B)$ 

TABLE 2.1 – Estimation pour la simulation de Monte Carlo et  $N_x + 1 = 501$  (Valeur réelle :  $\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} \ m^2 s^{-1}$ ).

$\hat{lpha}_{LS}$		$\hat{\alpha}_{IV}$	
Moyenne $(10^{-4})$	Ecart-type $(10^{-6})$	Moyenne $(10^{-4})$	Ecart-type $(10^{-6})$
0.3289	0.1591	0.3397	0.1300

Les résultats de la variable instrumentale, présentés dans le tableau 2.1, montrent que le biais est largement réduit. Notons que ce résultat est obtenu pour un échantillonnage "idéal" tel que le nombre d'échantillons est égal à 501. Ces conditions ne sont pas réalistes. Par conséquent, on essaie de réduire le nombre d'échantillons spatiaux afin de trouver le nombre minimum qui permette d'obtenir une bonne estimation telle que l'erreur relative ne dépasse pas 3%.

Les tableaux 2.2 et 2.3 présentent une comparaison entre l'algorithme des moindres carrés et l'algorithme de la variable instrumentale en diminuant le nombre d'échantillons spatiaux. Deux critères, la valeur moyenne et l'écart type des estimations, ont été calculés dans le but d'évaluer les performances d'estimation.

TABLE 2.2 – Estimation par les moindres carrés pour un nombre<br/>d'échantillons spatiaux variable

$N_x + 1$	Moyenne $(10^{-4})$	Ecart-type $(10^{-6})$	Erreur relative %
251	0.3287	0.2064	2.83
126	0.3284	0.2448	2.92
101	0.3283	0.2693	2.95
51	0.3269	0.3498	3.36
26	0.3229	0.4520	4.55
18	0.3170	0.5494	6.29
14	0.3072	0.6235	9.19
11	0.2986	0.6646	11.73
6	0.2164	0.4843	36.03

(Valeur réelle :  $\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} \ m^2 s^{-1}$ ).

La lecture horizontale de ces deux tableaux montre que l'estimation par l'approche de la variable instrumentale est moins biaisée que celle obtenue avec les moindres carrés quel que soit le nombre d'échantillons spatiaux. Et la lecture verticale montre que la précision de l'estimation est relative aux nombres de points d'échantillons. En effet, pour un nombre d'échantillons spatiaux élevé, l'estimation converge vers le vrai paramètre.

Considérons maintenant le critère du *Fitting* (FIT) pour évaluer la qualité d'estimation de nos algorithmes d'identification. Il est défini par

$$FIT = 100 \times \left(1 - \frac{\left\|\mathbb{T}(0,t) - \hat{\mathbb{T}}(0,t)\right\|}{\left\|\mathbb{T}(0,t) - mean(\mathbb{T}(0,t))\right\|}\right)$$
(2.109)

# 2.5 Identification du coefficient de diffusion de la chaleur dans un mur thermique 61

TABLE 2.3 – Estimation par la variable instrumentale pour	un nombre
d'échantillons spatiaux variable	
(Valeur réelle : $\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} \ m^2 s^{-1}$ ).	

$N_x + 1$	Moyenne $(10^{-4})$	Ecart-type $(10^{-6})$	Erreur relative $\%$
251	0.3397	0.1289	0.41
126	0.3395	0.2448	0.35
101	0.3395	0.2693	0.35
51	0.3394	0.3498	0.32
26	0.3357	0.1409	0.76
18	0.3303	0.1378	2.36
14	0.3223	0.1387	4.72
11	0.3111	0.1262	8.04
6	0.2125	0.1122	37.18

où  $\hat{\mathbb{T}}(x,t)$  est la simulation du modèle (2.106) avec le paramètre  $\hat{\lambda} = \rho c \hat{\alpha}$  estimé.

Le critère du fitting pour les moindres carrés et la variable instrumentale est représenté dans le tableau 2.4 pour x = 0 toujours pour les mêmes tirages de Monte Carlo.

$N_x + 1$	FIT MC (%)	FIT VI (%)
251	90.76	92.33
126	90.61	92.27
101	90.59	92.27
51	90.12	92.29
26	88.19	92.19
18	85.82	91.20
14	80.56	88.32
11	75.41	82.77
6	6.87	2.65

TABLE 2.4 – Valeur moyenne du FIT pour x = 0 pour la simulation de Monte Carlo.

Ces résultats montent également l'amélioration de la qualité d'estimation avec la variable instrumentale. On remarque qu'une bonne estimation est obtenue même si on réduit le nombre d'échantillons spatiaux à 18. Donc, on peut conclure que 18 capteurs sont suffisants pour résoudre ce problème d'identification.

La figure 2.11 montre la sortie mesurée, la sortie simulée et l'erreur de sortie obtenue en x = 0 pour un nombre d'échantillons spatiaux égal à 18.



FIGURE 2.11 – Sortie mesurée, sortie simulée et erreur de sortie (x = 0).

# 2.5.2 Identification avec des mesures non uniformément réparties

Dans l'exemple précédent, les résultats sont obtenus avec une répartition spatiale et temporelle des mesures uniformément répartie. Si, dans le domaine temporel, il est généralement aisé d'obtenir un échantillonnage régulier, dans le domaine spatial, la répartition de capteurs peut être hétérogène. Par conséquent, dans ce paragraphe, on considère des mesures uniformément réparties dans le temps, mais non uniformément réparties dans l'espace.

#### 2.5.2.1 Étude sans bruit de mesure

Considérons le système décrit dans le paragraphe 2.5.1 sans aucune perturbation sur les mesures pour évaluer le rôle de la répartition de capteurs. D'après le tableau 2.4, l'identification du mur thermique est réalisable avec 26 capteurs équidistants : 2 capteurs sur les faces avant et arrière et 24 capteurs à l'intérieur du mur. En gardant le même nombre de capteurs, on teste l'influence de leur positionnement dans le mur sur la qualité d'estimation. Pour 100 répartitions aléatoires des 24 capteurs internes, on estime la diffusivité thermique  $\alpha$  pour chaque répartition. Il est à noter que on dispose toujours des 2 capteurs en face avant et en face arrière, c'est-à-dire pour x = 0 et x = L. Les résultats montrent que l'identification avec une répartition uniforme donne de meilleurs résultats que celle obtenue avec une répartition non uniforme. La figure 2.12 montre le *Fitting* de la meilleure configuration non uniforme issue des 100 répartitions testées par rapport à la configuration uniforme.



FIGURE 2.12 – Identification du mur thermique avec 26 capteurs. Fitting et répartition des capteurs pour les configurations uniforme et non uniforme.

Diminuons le nombre de capteurs à 18. Considérons une configuration dite quasiuniforme où tous les capteurs sont équidistantes avec  $\Delta x = 0.003 \ m$  sauf les deux derniers capteurs qui sont éloignés de  $\Delta x = 0.002 \ m$ . En faisant la même expérience pour 100 répartitions aléatoires, on compare le *Fitting* obtenu avec le *Fitting* obtenu avec la répartition quasi-uniforme. La meilleure configuration non uniforme est présentée dans la figure 2.13. on remarque, sans surprise, que la meilleure configuration non uniforme présente de capteurs répartis sur toute la largeur du mur.



FIGURE 2.13 – Identification du mur thermique avec 18 capteurs. *Fitting* et répartition de capteurs pour les configurations quasiuniforme et non uniforme.

En comparant le critère du *Fitting*, ces expériences montrent l'influence de la répartition de capteurs sur la qualité d'estimation. Ces essais montrent qu'il est préférable d'utiliser la répartition la plus uniforme possible.

#### 2.5.2.2 Étude en présence de bruit

Pour tester les deux configurations présentées dans la figure 2.13, les estimateurs (2.104) et (2.108) sont évalués par un tirage de Monte Carlo avec 100 séquences de bruit. Pour chaque tirage, un bruit blanc gaussien de moyenne nulle avec un rapport signal sur bruit égal à 10 dB est ajouté sur chaque capteur.

Les tableaux 2.5 et 2.6 présentent les résultats d'estimation de ces deux configurations.

On montre ainsi que, en présence d'un bruit, l'estimation de la diffusivité thermique  $\alpha$  reste correcte à partir d'une répartition non uniforme de capteurs, même si la configuration non uniforme conduit à de moins bons résultats. Effectivement,
TABLE 2.5 – Estimation par les moindres carrés avec la répartition des capteurs de la figure 2.13 (Valeur réelle :  $\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} \ m^2 s^{-1}$ ).

Configuration	Moyenne $(10^{-4})$	Ecart-type $(10^{-6})$	Erreur relative $\%$
Quasi-uniforme	0.3170	0.5494	6.29
Non uniforme	0.3099	0.5872	8.39

TABLE 2.6 – Estimation par la variable instrumentale avec la répartition des capteurs de la figure 2.13 (Valeur réelle :  $\alpha = 0.3383 \ 10^{-4} \ m^2 s^{-1}$ ).

Configuration	Moyenne $(10^{-4})$	Ecart-type $(10^{-6})$	Erreur relative %
Quasi-uniforme	0.3303	0.1378	2.36
Non uniforme	0.3218	0.144	4.87

l'estimation avec une répartition non uniforme est satisfaisante pour ce niveau de bruit de 10 dB.

### 2.5.3 Conclusion sur la répartition de capteurs

On peut conclure de ces simulations qu'il est possible d'estimer les paramètres d'une EDP à partir de capteurs non uniformément répartis. De plus, plus les capteurs sont uniformément répartis, plus précise est l'estimation.

Cependant, les derniers résultats du tableau 2.4 montrent que, même si les capteurs sont uniformément répartis, cela conduit à une estimation fortement biaisée certes, mais pas aberrante. Cette estimation peut dans certains cas, comme on le verra dans le chapitre 4, fournir une bonne initialisation pour les algorithmes à erreur de sortie.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un rappel sur les moments partiels réinitialisés 1D dédiés aux EDOs. En se basant sur ces résultats, une nouvelle approche a été suggérée afin d'identifier les systèmes décrits par des EDPs. Cet algorithme est basé sur les moments partiels réinitialisés 2D qui permettent d'approcher les dérivées des signaux d'entrée-sortie. Ce modèle basé sur les moments partiels réinitialisés est estimé par un algorithme des moindres carrés. Ensuite, une variable instrumentale est introduite afin de réduire le biais sur l'estimation.

À l'aide d'une étude statistique, on a montré que les moments partiels réinitialisés permettent d'obtenir une estimation avec une variance minimale pour des paramètres de conception optimaux.

Cette approche a été évaluée avec un exemple de simulation, le mur thermique. Dans ce cadre, deux configurations d'identification sont considérées. Pour la première configuration, l'estimation des paramètres est obtenue à l'aide d'une répartition uniforme de capteurs à l'intérieur du système. Dans ce cas, on détermine le nombre de capteurs minimums qui assure une bonne estimation. Et pour la deuxième configuration, on montre l'influence de la répartition de capteurs sur la qualité d'estimation.

L'approche basée sur les moments partiels réinitialisés présentée dans ce chapitre est une approche à erreur d'équation. L'algorithme des moindres carrés développé présente l'avantage de donner une estimation unique et immédiate. L'inconvénient est que celle-ci est biaisée, voire fortement biaisée si le nombre de capteurs est réduit ou s'ils sont mal répartis.

L'inconvénient majeur de l'approche est qu'il est nécessaire de disposer de capteurs intermédiaires (capteurs intérieurs dans le cas du mur) entre un point de départ et un point d'arrivée lorsqu'on considère un domaine spatial, par exemple. Ce problème est rencontré également par les approches d'identification des EDPs par filtrage (Sagara *et al.*, 1990). D'autres approches ne présentent pas cet inconvénient. C'est le cas de la méthode à erreur de sortie présentée dans le troisième chapitre. Cependant, cette méthode est itérative et peut converger vers des optimums locaux pour peu qu'elle soit mal initialisée.

L'idée clé est maintenant d'utiliser l'approche basée sur les RPM pour initialiser les approches à erreur de sortie au plus proche de l'optimum global. Cette perspective est étudiée dans le chapitre 4.

#### Chapitre 3

# IDENTIFICATION DE SYSTÈMES RÉGIS PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES PAR OPTIMISATION NON LINÉAIRE

## 3.1 Introduction

L'emploi d'EDP rend le problème d'identification du système sous-jacent difficile puisque ces équations mettent en jeu des fonctions de plusieurs variables indépendantes (variables spatiales x, y et z, variable temporelle t, etc). Leur étude (et la recherche de solution) demande de considérer des espaces de fonctions (et non plus des espaces vectoriels plus classiques). Comme expliqué dans le chapitre introductif, leur étude, et par extension l'estimation de leurs paramètres, peut être réalisée en les approchant par des équations à dimensions finies de grandes dimensions. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux modèles dits multidimensionnels ou nD (Bose, 1977), plus spécifiquement aux modèles d'état nD.

La représentation d'état de systèmes nD apparaît dans plusieurs domaines tels que le traitement d'image (Roesser (1975)), le contrôle itératif d'apprentissage (Kurek et Zaremba (1993)), le filtrage 2D pour les images corrompues par un bruit (Dalla *et al.* (1999)) ainsi que la discrétisation des équations aux dérivées partielles (Chen *et al.* (2003)). L'extension au cas 2D permet en effet d'approcher plus précisément le comportement réel de ces systèmes multidimensionnels qu'en se limitant à la représentation 1D.

En identification, plusieurs méthodes et outils logiciels permettent d'estimer les paramètres des systèmes 1D à partir d'un ensemble des données d'entrées-sorties (Söderström, 1981; Unbehauen et Rao, 1987). Néanmoins, ces techniques d'identification ne sont généralement pas directement applicables pour les modèles d'état nD avec  $n \ge 2$ . En effet, plusieurs résultats et propriétés liées aux modèles 1D ne sont pas encore prouvées pour les systèmes nD (Kaczorek (1985)). Les difficultés ne s'arrêtent pas là. On peut montrer que, contrairement aux modèles 1D, les modèles nD se caractérisent par une infinité de pôles. Il est clair que ce type de propriété rend l'extension aux cas nD des techniques d'identification dédiées aux modèles 1D très délicate.

Parmi les différents modèles d'état nD présents dans la littérature, il est à noter que les modèles de Roesser (Roesser, 1975) et Fornasini-Marchesini (Fornasini et Marchesini, 1978) ont été particulièrement utilisés et étudiés. De par leur forte similitude avec les représentations d'état 1D, ces représentations d'état sont considérées comme relativement flexibles pour modéliser, commander et identifier les systèmes de grande dimension. Comme expliqué ultérieurement, il est assez simple de passer d'un modèle de Roesser à un modèle de Fornasini-Marchesini sous la contrainte de vérifier quelques hypothèses structurelles. Dans ce chapitre, une attention particulière sera portée au modèle de Roesser à cause de son lien (mis en évidence dans la Section 3.3) avec la représentation linéaire fractionnaire. Le modèle de Roesser offre ainsi des propriétés intéressantes (Galkowski (1997)) qui simplifient l'implémentation de l'algorithme d'identification proposé dans ce chapitre.

Dans la littérature, des solutions pour identifier des modèles d'état nD sont proposées (Lashgari *et al.*, 1983; Ramos, 1994; Xiao *et al.*, 1998). La plupart de ces méthodes se concentrent sur le modèle 2D causal récursif et séparable en dénominateur (CRSD) sous la forme de Roesser (Fraanje et Verhaegen (2005); Ramos *et al.* (2011); Ramos et Lopes dos Santos (2011)). En effet, ce type de représentation d'état correspond à une fonction de transfert où le dénominateur peut être présenté par un produit de deux polynômes. Ainsi, ce modèle 2D de Roesser peut être associé à deux modèles 1D d'état couplés. Les références mentionnées ci-dessus présentent des algorithmes des sous-espaces inspirés du cas 1D qui sont développés pour estimer, dans le cas discret, le modèle 2D de Roesser CRSD.

Dans ce travail, on introduit une nouvelle approche pour l'identification du modèle 2D de Roesser. Il est à noter que les développements suivants peuvent être étendus à tout modèle nD de Roesser,  $n \geq 3$ . Contrairement aux développements cités précédemment, notre approche présente l'avantage de fonctionner pour des modèles de Roesser non-séparables, c'est-à-dire ne nécessitant pas l'hypothèse CRSD. L'algorithme décrit dans ce chapitre est plus précisément basé sur le lien entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fractionnaire (linear fractional représentation (LFR) en Anglais) (Zhou *et al.* (1996); Farah *et al.* (2014)). Zhou *et al.* (1996) ont montré que le modèle Roesser peut être présenté facilement par une LFR. Par conséquent, une extension des algorithmes dédiés au LFR (Lee et Poolla (1996, 1999)) est suggérée pour identifier le modèle standard de Roesser. Plus précisément, une extension de l'algorithme de programmation non linéaire pour l'identification d'un modèle de type boîte noire ou boîte grise introduite dans (Lee et Poolla (1999)) est considérée.

Ce nouveau chapitre est composé comme suit. Dans la Section 3.2, on présente les modèles de Roesser et Fornasini-Marchesini. La Section 3.3 est quant à elle dédiée à la représentation linéaire fractionnaire et au lien entre LFR et modèle de Roesser. Dans cette section, la problématique et l'algorithme d'identification sont également proposés. Une simulation numérique permet d'illustrer l'efficacité de cette méthode dans la Section 3.4.

## **3.2** Représentation d'état 2D classique

### 3.2.1 Modèle de Roesser

C'est en 1975 que R. Roesser propose une extension du modèle d'état 1D au cas 2D. La caractéristique principale de ce modèle est que le vecteur d'état est composé de deux sous-vecteurs (généralement nommés horizontal et vertical et notés  $\mathbf{x}^h$  et  $\mathbf{x}^v$ , respectivement). Ce modèle est alors donné par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l+1,k) \\ \mathbf{x}^{v}(l,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} & \mathbf{A}_{2} \\ \mathbf{A}_{3} & \mathbf{A}_{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l,k) \\ \mathbf{x}^{v}(l,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} \\ \mathbf{B}_{2} \end{bmatrix} \mathbf{u}(l,k),$$
  
$$\mathbf{y}(l,k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1} & \mathbf{C}_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l,k) \\ \mathbf{x}^{v}(l,k) \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}(l,k).$$
(3.1)

où  $(l,k) \in \mathbb{Z}^2$ ,  $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ ,  $\mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{n_h \times n_v}$ ,  $\mathbf{A}_3 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_h}$ ,  $\mathbf{A}_4 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_h \times m}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_v \times m}$ ,  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times n_h}$ ,  $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times n_v}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ ,  $\mathbf{x}^h(l,k)$  est la partie horizontale du vecteur d'état,  $\mathbf{x}^v(l,k)$  est la partie verticale du vecteur d'état,  $\mathbf{u}(l,k)$  est le vecteur d'entrée appartenant à  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbf{y}(l,k)$  est le vecteur de sortie pris dans  $\mathbb{R}^{\ell}$ . Les conditions initiales pour (3.1) sont données par  $\mathbf{x}^h(0,k)$ ,  $\mathbf{x}^v(l,0)$  pour  $l, k = 0, 1, 2, \dots$ 

Le modèle de Roesser a été utilisé pour l'analyse et la commande de circuits linéaires itératifs (Kurek et Zaremba, 1993), le codage, le décodage et le traitement d'image (Lu et Antoniou (1992); Bracewell (1995)).

Afin d'illustrer plus spécifiquement l'emploi de cette modélisation pour des systèmes régis par des équations aux dérivées partielles, considérons des phénomènes physico-chimiques particuliers : le processus d'absorption de gaz et le processus de sorption.

### 3.2.1.1 Système d'absorption de gaz

Appelée aussi équation de Darboux, ce système est décrit par une équation hyperbolique du second ordre

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x \partial t} = a_1 \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} + a_2 \frac{\partial s(x,t)}{\partial x} + a_0 s(x,t) + bf(x,t).$$
(3.2)

Les conditions initiales et limites sont données ici par

$$s(x,0) = S_1(x), \ s(0,t) = S_2(t),$$
(3.3)

où s(x,t) est une fonction inconnue au point x et à l'instant t,  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $b_0$  sont des coefficients réels, f(x,t) est la fonction d'entrée et  $S_1(x)$  et  $S_2(t)$  sont des fonctions données.

Par changement de variables  $r(x,t) = \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} - a_2 s(x,t)$ , un système équivalent à l'équation (3.2), décrit par des équations différentielles ordinaires du premier ordre, est obtenu

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r(x,t)}{\partial x}\\ \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 + a_1 a_2\\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(x,t)\\ s(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\\ 0 \end{bmatrix} f(x,t),$$
(3.4)

avec la condition initiale

$$r(0,t) = \frac{\partial s(x,t)}{\partial t}|_{x=0} - a_2 s(0,t) = \frac{\partial}{\partial t} S_2(t) - a_2 S_2(t) = R(t).$$
(3.5)

Ce modèle représente un modèle 2D continu de Roesser. Une discrétisation explicite de  $\frac{\partial r(x,t)}{\partial x}$  et  $\frac{\partial s(x,t)}{\partial t}$  permet d'obtenir un modèle 2D discret de Roesser. En effet, avec

$$\frac{\partial r(x,t)}{\partial x} = \frac{r(l+1,k) - r(l,k)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = \frac{s(l,k+1) - s(l,k)}{\Delta t},$$
(3.6)

tel que  $r(l,k) = r(l\Delta x, k\Delta t)$  où  $\Delta x$  et  $\Delta t$  présentent respectivement le pas d'échantillonnage spatial et temporel, un modèle 2D discret de Roesser est obtenu

$$\begin{bmatrix} r(l+1,k)\\ s(l,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a_1\Delta x & (a_0+a_1a_2)\Delta x\\ \Delta t & 1+a_2\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(l,k)\\ s(l,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\Delta x\\ 0 \end{bmatrix} f(l,k)$$
(3.7)

avec les conditions initiales et limites données par

$$r(0,k) = R(k\Delta t), \ s(l,0) = S_2(l\Delta x).$$
 (3.8)

#### 3.2.1.2 Processus de sorption

Le terme de sorption se réfère à l'action de l'absorption ou de l'adsorption d'une substance dans une autre substance. Ce processus agit comme une éponge ou un filtre qui permet d'absorber les substances contaminantes. Lors du passage d'un flux dans un sorbant, le flux sortant ne contient plus les substances polluantes qui sont collectées par le sorbant (figure 3.1).

Dymkov *et al.* (2011) ont proposé un modèle pour la dynamique du processus de sorption dans l'approvisionnement en eau et dans le traitement des eaux usées industrielles. Ce modèle présente une version continue du modèle 2D de Roesser

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial s(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(x,t) \\ p(x,t) \end{bmatrix},$$
(3.9)

où s(x,t) représente la densité de substance absorbée et p(x,t) la concentration de la substance polluante dans le flux au point x et à l'instant t.

Une fois ces équations discrétisées, un modèle 2D de Roesser discret peut être obtenu

$$\begin{bmatrix} s(l+1,k)\\ s(l,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\Delta x & \Delta x\\ \Delta t & 1-\Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(x,t)\\ p(x,t) \end{bmatrix}.$$
 (3.10)



FIGURE 3.1 – Diagramme du processus de sorption (Dymkov et al., 2011).

 $\mathbf{71}$ 

### 3.2.2 Modèle de Fornasini-Marchesini

Fornasini et Marchesini (1976, 1977, 1978) ont proposé une représentation d'état pour des fonctions de transfert 2D dédiées aux filtres numériques avec une réalisation différente de celle de Roesser. Cette représentation du modèle de Fornasini-Marchesini est donnée par les équations suivantes

$$\mathbf{x}(l+1,k+1) = \mathbf{A}_{1f}\mathbf{x}(l+1,k) + \mathbf{A}_{2f}\mathbf{x}(l,k+1) + \mathbf{A}_{3f}\mathbf{x}(l,k) + \mathbf{B}_{1f}\mathbf{u}(l+1,k) + \mathbf{B}_{2f}\mathbf{u}(l,k+1) + \mathbf{B}_{3f}\mathbf{u}(l,k), \qquad (3.11)$$
$$\mathbf{y}(l,k) = \mathbf{C}_{f}\mathbf{x}(l,k) + \mathbf{D}_{f}\mathbf{u}(l,k),$$

où les matrices d'état  $\mathbf{A}_{1f} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $\mathbf{A}_{2f} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $\mathbf{A}_{3f} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $\mathbf{B}_{1f} \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ ,  $\mathbf{B}_{2f} \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ ,  $\mathbf{B}_{3f} \in \mathbb{R}^{n_x \times m}$ ,  $\mathbf{D}_f \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$  et  $\mathbf{C}_f \in \mathbb{R}^{\ell \times n_x}$ , x(l,k) est le vecteur d'état au point (l,k), u(l,k) est le vecteur d'entrée dans  $\mathbb{R}^m$  et y(l,k) est le vecteur de sortie dans  $\mathbb{R}^{\ell}$ . Les conditions initiales et limites de l'équation (3.11) sont données par

$$\begin{aligned} x(0,k) & \text{pour } k \ge 0, \\ x(l,0) & \text{pour } l \ge 0. \end{aligned}$$
(3.12)

Dans le cas où les matrices d'état  $\mathbf{A}_{3f}$  et  $\mathbf{B}_{3f}$  sont nulles, alors le modèle est dit de premier ordre. Par contre, si les matrices  $\mathbf{B}_{1f}$  et  $\mathbf{B}_{2f}$  sont nulles, alors c'est un modèle de deuxième ordre. Pour des raisons de simplicité, Fornasini-Marchesini ont défini un deuxième modèle de (3.11) par les équations suivantes

$$\mathbf{x}(l+1,k+1) = \mathbf{A}_{1f}\mathbf{x}(l+1,k) + \mathbf{A}_{2f}\mathbf{x}(l,k+1) + \mathbf{B}_{1f}\mathbf{u}(l+1,k) + \mathbf{B}_{2f}\mathbf{u}(l,k+1),$$
(3.13)  
$$\mathbf{y}(l,k) = \mathbf{C}_{f}\mathbf{x}(l,k) + \mathbf{D}_{f}\mathbf{u}(l,k).$$

**Remarque 3.1.** Considérons la fonction de transfert  $H(z_1, z_2) = \frac{2z_1+z_2}{1-z_1-2z_2}$  telle que  $z_1$  et  $z_2$  représentent deux opérateurs de retard, respectivement, par rapport à l'espace et au temps. Il est évident que la représentation d'état correspondante à cette fonction de transfert peut s'écrire sous forme d'un modèle de Fornasini-Marchesini

$$y(l+1,k+1) = y(l,k+1) + 2y(l+1,k) + 2u(l,k+1) + u(l+1,k).$$
(3.14)

De plus, un modèle de Rosser peut être facilement obtenu comme suit

$$x_{1}(l+1,k) = x_{1}(l,k) + x_{2}(l,k) + 2u(l,k),$$
  

$$x_{1}(l,k+1) = 2x_{1}(l,k) + 2x_{2}(l,k) + u(l,k),$$
  

$$y(l,k) = x_{1}(l,k) + x_{2}(l,k).$$
  
(3.15)

### 3.2.3 De Roesser à Fornasini-Marchesini et vice versa

À partir du modèle de Roesser (3.1), on cherche à déterminer le modèle de Fornasini-Marchesini. En effet, cette équation d'état peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l,k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^{v}(l,k) \end{bmatrix} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} & \mathbf{A}_{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l-1,k) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^{v}(l-1,k) \end{bmatrix} \right\}$$
$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{3} & \mathbf{A}_{4} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l,k-1) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}^{v}(l,k-1) \end{bmatrix} \right\}$$
$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(l-1,k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{2} \end{bmatrix} \mathbf{u}(l,k-1).$$
$$(3.16)$$

Ainsi, on écrit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l,k) \\ \mathbf{x}^{v}(l,k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} & \mathbf{A}_{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l-1,k) \\ \mathbf{x}^{v}(l-1,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{3} & \mathbf{A}_{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l,k-1) \\ \mathbf{x}^{v}(l,k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(l-1,k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{2} \end{bmatrix} \mathbf{u}(l,k-1).$$
(3.17)

Définissons

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(l, k-1) \\ \mathbf{x}^{v}(l, k-1) \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_{1f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{A}_{3} & \mathbf{A}_{4} \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_{2f} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1} & \mathbf{A}_{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_{1f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_{2} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_{2f} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1} \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}_{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{1}\mathbf{C}_{2} \end{bmatrix} \ et \ \mathbf{D}_{f} = \mathbf{D}.$$
(3.18)

Alors

$$\mathbf{x}(l,k) = \mathbf{A}_{1f}\mathbf{x}(l,k-1) + \mathbf{A}_{2f}\mathbf{x}(l-1,k) + \mathbf{B}_{1f}\mathbf{u}(l,k-1) + \mathbf{B}_{2f}\mathbf{u}(l-1,k),$$
(3.19)  
$$\mathbf{y}(l,k) = \mathbf{C}_{f}\mathbf{x}(l,k) + \mathbf{D}_{f}\mathbf{u}(l,k).$$

Cette représentation d'état représente bien le modèle de Fornasini-Marchesini avec les matrices  $\mathbf{A}_{3f}$  et  $\mathbf{B}_{3f}$  nulles.

**Remarque 3.2.** Il est à noter que le passage du modèle de Rosser vers le modèle de Fornasini-Marchesini peut présenter des problèmes numériques. En effet, le modèle de Fornasini-Marchesini obtenu possède des zéros au niveau des matrices d'état et de commande qui sont généralement une source d'erreurs numériques.

Si on considère maintenant le modèle de Fornasini-Marchesini défini par l'équation (3.11) avec la matrice  $\mathbf{B}_{1f} = \mathbf{B}_{2f} = 0$  et définissons le vecteur  $\eta(l, k)$  par

$$\eta(l,k) = \mathbf{x}(l,k+1) - \mathbf{A}_{1f}\mathbf{x}(l,k), \qquad (3.20)$$

 $\operatorname{alors}$ 

$$\eta(l+1,k) = \mathbf{x}(l+1,k+1) - \mathbf{A}_{1f}\mathbf{x}(l+1,k),$$
  
=  $\mathbf{A}_{2f}\mathbf{x}(l,k+1) + \mathbf{A}_{3f}\mathbf{x}(l,k) + \mathbf{B}_{3f}\mathbf{u}(l,k),$  (3.21)  
=  $\mathbf{A}_{2f}\eta(l,k+1) + (\mathbf{A}_{3f} + \mathbf{A}_{2f}\mathbf{A}_{1f})\mathbf{x}(l,k) + \mathbf{B}_{3f}u(l,k).$ 

Ainsi, le modèle Fornasini-Marchesini peut être représenté par la représentation d'état suivante

$$\begin{bmatrix} \eta(l+1,k) \\ \mathbf{x}(l,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{2f} & \mathbf{A}_{3f} + \mathbf{A}_{2f} \mathbf{A}_{1f} \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{A}_{1f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(l,k) \\ \mathbf{x}(l,k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{3f} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(l,k),$$
  
$$\mathbf{y}(l,k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta(l,k) \\ \mathbf{x}(l,k) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_f \mathbf{u}(l,k).$$
(3.22)

Le modèle obtenu est bien une représentation d'état du modèle de Roesser.

# 3.3 Lien entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fractionnaire

## 3.3.1 Rappel sur la représentation linéaire fractionnaire

La représentation linéaire fractionnaire peut être utilisée pour relier la représentation d'entrée-sortie et la représentation d'état d'un modèle d'une manière élégante. Cette représentation est expliquée dans la littérature (Zhou *et al.*, 1996, Chapter 10). Pour décrire cette liaison correctement, on rappelle les définitions et les notations suivantes.

Soit M une matrice réelle qui s'écrit sous cette forme

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(p_1 + p_2) \times (q_1 + q_2)}.$$
 (3.23)

**Définition 3.1.** La transformation fractionnaire linéaire supérieure (figure 3.2) de **M** par rapport à  $\Delta \in \mathbb{R}^{q_1 \times p_1}$  est donnée par

$$\mathcal{F}_{S}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{M}_{22} + \mathbf{M}_{21} \boldsymbol{\Delta} \left( \mathbf{I}_{p_{1} \times p_{1}} - \mathbf{M}_{11} \boldsymbol{\Delta} \right)^{-1} \mathbf{M}_{12}, \qquad (3.24)$$

à condition que l'inverse de  $(\mathbf{I}_{p_1 \times p_1} - \mathbf{M}_{11} \boldsymbol{\Delta})$  existe.

**Définition 3.2.** La transformation fractionnaire linéaire inférieure (figure 3.3) de **M** par rapport à  $\Delta \in \mathbb{R}^{q_2 \times p_2}$  est donnée par

$$\mathcal{F}_{I}(\mathbf{M}, \boldsymbol{\Delta}) = \mathbf{M}_{11} + \mathbf{M}_{12} \boldsymbol{\Delta} \left( \mathbf{I}_{p_{2} \times p_{2}} - \mathbf{M}_{22} \boldsymbol{\Delta} \right)^{-1} \mathbf{M}_{21}, \qquad (3.25)$$

à condition que l'inverse de  $(\mathbf{I}_{p_2 \times p_2} - \mathbf{M}_{22} \boldsymbol{\Delta})$  existe.

Dans la suite, on considère exclusivement la transformation fractionnaire linéaire supérieure.



FIGURE 3.2 – Représentation LFT supérieure.



FIGURE 3.3 – Représentation LFT inférieure.

## **3.3.2** Description du modèle d'état LTI 1D sous forme d'une représentation linéaire fractionnaire

Considérons la représentation d'état pour un système linéaire à temps invariant 1D d'ordre  $n_x$  donnée par

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
  
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$
  
(3.26)

où A, B, C et D sont des matrices réelles de dimensions compatibles avec les dimensions de  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  et  $\mathbf{u}(t)$ . Alors, la fonction de transfert s'écrit sous cette forme

$$\mathbf{G}(z) = \mathbf{C} \left( z \mathbf{I}_{n_x \times n_x} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$
(3.27)

Si on remplace la matrice **M** par  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$  et  $\mathbf{\Delta}$  par  $z\mathbf{I}_{n_x \times n_x}$  dans (3.24), on obtient la représentation linéaire fractionnaire de  $\mathbf{G}(z)$ 

$$\mathcal{F}_{S}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}, z^{-1}\mathbf{I}_{n_{x}\times n_{x}}\right) = \mathbf{G}(z).$$
(3.28)

## 3.3.3 Description du modèle 2D de Roesser sous forme d'une représentation linéaire fractionnaire

Dans cette section, on s'intéresse à la représentation d'état linéaire à temps invariant du modèle de Roesser 2D introduite par les équations (3.1). Afin de présenter la liaison entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fractionnaire, on rappelle que la transformée en z du vecteur d'état  $\begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(l+1,k) \\ \mathbf{x}^v(l,k+1) \end{bmatrix}$  est donnée par

$$Z\left(\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{h}(l+1,k)\\\mathbf{x}^{v}(l,k+1)\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}z_{1}I_{n_{h}} & 0\\0 & z_{2}I_{n_{v}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}^{h}(z_{1},z_{2})\\\mathbf{x}^{v}(z_{1},z_{2})\end{bmatrix}.$$
(3.29)

Supposons que les conditions initiales soient égales à zéro. Alors la transformée en z de (3.1) est donnée par

$$\begin{bmatrix} z_1 \mathbf{I}_{n_h \times n_h} & \mathbf{0}_{n_h \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_v \times n_h} & z_2 \mathbf{I}_{n_v \times n_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(z_1, z_2) \\ \mathbf{x}^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(z_1, z_2) \\ \mathbf{x}^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} + \mathbf{B} \mathbf{u}(z_1, z_2),$$

$$\mathbf{y}(z_1, z_2) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^h(z_1, z_2) \\ \mathbf{x}^v(z_1, z_2) \end{bmatrix} + \mathbf{D} \mathbf{u}(z_1, z_2),$$
(3.30)

où

 $\mathbf{76}$ 

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},$$
  
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \mathbf{D}.$$
 (3.31)

Ainsi, on obtient les relations suivantes

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{h}(z_{1}, z_{2}) \\ \mathbf{x}^{v}(z_{1}, z_{2}) \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} z_{1}\mathbf{I}_{n_{h} \times n_{h}} & \mathbf{0}_{n_{h} \times n_{v}} \\ \mathbf{0}_{n_{v} \times n_{h}} & z_{2}\mathbf{I}_{n_{v} \times n_{v}} \end{bmatrix} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(z_{1}, z_{2}),$$
  
$$\mathbf{y}(z_{1}, z_{2}) = \mathbf{C} \left( \begin{bmatrix} z_{1}\mathbf{I}_{n_{h} \times n_{h}} & \mathbf{0}_{n_{h} \times n_{v}} \\ \mathbf{0}_{n_{v} \times n_{h}} & z_{2}\mathbf{I}_{n_{v} \times n_{v}} \end{bmatrix} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(z_{1}, z_{2})$$
  
$$+ \mathbf{D}\mathbf{u}(z_{1}, z_{2}). \tag{3.32}$$

Dans ce cas, la fonction de transfert associée au modéle 2D de Roesser est donnée par

$$\mathbf{G}(z_1, z_2) = \mathbf{C} \left( \begin{bmatrix} z_1 \mathbf{I}_{n_h \times n_h} & \mathbf{0}_{n_h \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_v \times n_h} & z_2 \mathbf{I}_{n_v \times n_v} \end{bmatrix} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$
(3.33)

Cette formulation possède une représentation linéaire fractionnaire à deux dimensions qui s'écrit sous cette forme

$$\mathbf{G}(z_1, z_2) = \mathcal{F}_S\left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \mathbf{\Delta} \right), \qquad (3.34)$$

où

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} z_1^{-1} \mathbf{I}_{n_h \times n_h} & \mathbf{0}_{n_h \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_v \times n_h} & z_2^{-1} \mathbf{I}_{n_v \times n_v} \end{bmatrix}.$$
 (3.35)

À noter que cette représentation peut être étendue à un modèle nD de Roesser tel que  $n \ge 3$ .

Après avoir reformulé le modèle de Roesser 2D avec la représentation linéaire fractionnaire, l'étape suivante consiste à adapter l'algorithme présenté dans (Lee et Poolla, 1996) afin d'estimer la matrice

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \qquad (3.36)$$

où  $\boldsymbol{\theta}$  représente le vecteur des paramètres à estimer.

#### 3.3.4 Identification du modèle 2D de Roesser

Afin d'identifier la représentation linéaire fractionnaire du modèle de Roesser 2D, une méthode standard consiste à minimiser la fonction de coût suivante<sup>1</sup>

$$\frac{1}{N_x + 1} \frac{1}{N_t + 1} \sum_{l=0}^{N_x} \sum_{k=0}^{N_t} \|\mathbf{y}(l, k) - \boldsymbol{\gamma}(l, k|\boldsymbol{\theta})\|_2^2$$
$$= \frac{1}{(N_x + 1)(N_t + 1)} \sum_{l=0}^{N_x} \sum_{k=0}^{N_t} \|\boldsymbol{\epsilon}(l, k|\boldsymbol{\theta})\|_2^2, \quad (3.37)$$

où  $\gamma(l, k|\boldsymbol{\theta}), l \in \{0, \dots, N_x\}, k \in \{0, \dots, N_t\}$ , désigne la sortie du modèle,  $\mathbf{y}(l, k), l \in \{0, \dots, N_x\}, k \in \{0, \dots, N_t\}$ , les mesures bruitées de la sortie et  $\boldsymbol{\epsilon}(l, k|\boldsymbol{\theta}), l \in \{0, \dots, N_x\}, k \in \{0, \dots, N_t\}$ , l'erreur de sortie correspondante.

Le choix de l'algorithme d'identification est lié au type de critère à minimiser. Lorsque le critère proposé est non convexe, un algorithme d'optimisation basé sur le calcul du gradient dédié au problème d'identification non linéaire est généralement recommandé (Banks *et al.*, 1983; Wouwer *et al.*, 2006). Dans ce cadre, on suggère l'algorithme de Levenberg-Marquardt afin d'optimiser cette fonction coût et estimer les paramètres  $\boldsymbol{\theta}$ . Ce type de technique nécessite le calcul des gradients et Hessiens associés. Comme montré dans (Lee et Poolla (1996)), la structure de la représentation linéaire fractionnaire (3.34)-(3.35) est très utile pour ces calculs. Une extension directe des résultats montrés dans (Lee et Poolla (1996)) conduit à la proposition suivante.

**Proposition 3.1.** L'algorithme de Levenberg-Marquardt (Moré (1978)) est étendu afin d'estimer les paramètres inconnus du système et il est présenté par l'équation itérative suivante

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i - \left\{ \left[ J^{\prime\prime}(\boldsymbol{\theta}_i) + I\lambda \right]^{-1} J^{\prime}(\boldsymbol{\theta}_i) \right\}, \qquad (3.38)$$

où  $\lambda$  est un paramètre qui assure la rapidité et la stabilité de l'algorithme. La matrice  $J''(\boldsymbol{\theta}_i) + I\lambda$  est inversible à chaque itération i.  $J'(\boldsymbol{\theta}_i)$  est le gradient associé à  $\boldsymbol{\theta}_i$ . On le définit par

$$J'(\boldsymbol{\theta}_i) = \frac{2}{(N_x + 1)(N_t + 1)} \boldsymbol{\psi}_{N_x N_t}^{\top}(\boldsymbol{\theta}_i) \mathbf{e}_{N_x N_t}(\boldsymbol{\theta}_i), \qquad (3.39)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>On rappelle que, pour un vecteur •,  $\| \bullet \|_2^2 = \bullet^{\top} \bullet$ .

оù

$$\mathbf{e}_{N_x N_t}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}^\top(0, 0|\boldsymbol{\theta}) & \boldsymbol{\epsilon}^\top(1, 0|\boldsymbol{\theta}) & \cdots \\ \boldsymbol{\epsilon}^\top(I, 0|\boldsymbol{\theta}) & \boldsymbol{\epsilon}^\top(0, 1|\boldsymbol{\theta}) & \cdots & \boldsymbol{\epsilon}^\top(N_x, N_t|\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}^\top, \quad (3.40)$$

et

$$\psi_{N_x N_t}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{e}_{N_x N_t}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^{\top}}.$$
(3.41)

L'approximation de Hessien est donnée par

$$J''(\boldsymbol{\theta}_i) \approx \frac{2}{(N_x+1)(N_t+1)} \boldsymbol{\psi}_{N_x N_t}^{\top}(\boldsymbol{\theta}_i) \boldsymbol{\psi}_{N_x N_t}(\boldsymbol{\theta}_i).$$
(3.42)

Il est clair que, pour chaque itération, il est nécessaire de calculer l'approximation du Hessien  $J''(\boldsymbol{\theta}_i)$  et le gradient  $J'(\boldsymbol{\theta}_i)$ . Pour converger vers les vrais paramètres, il est important de trouver une méthode efficace pour calculer ces quantités. D'après les équations (3.39) et (3.42), seules les matrices  $\mathbf{e}_{N_xN_t}(\boldsymbol{\theta})$  et  $\psi_{N_xN_t}(\boldsymbol{\theta})$  interviennent dans les calculs de l'approximation du Hessien et le gradient. Pour déterminer  $\mathbf{e}_{N_xN_t}(\boldsymbol{\theta})$ , il est nécessaire de calculer  $\gamma(l,k)$  pour  $l = 0, 1, ..., N_x$ et  $k = 0, 1, ..., N_t$ . Cette sortie est déterminée par la simulation de l'équation suivante

$$\boldsymbol{\gamma}(l,k) = \mathcal{F}_{S}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Delta} \right) \mathbf{u}(l,k).$$
(3.43)

Le calcul explicite des fonctions de sensibilité<sup>2</sup>  $\frac{\partial \epsilon(\bullet, \bullet | \theta)}{\partial \theta(i)}$  impliquées dans les équations précédentes peut être obtenu par la simulation de  $-\frac{\partial \gamma(\bullet, \bullet | \theta)}{\partial \theta(i)}$ , *i.e.*,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}(l,k|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}(i)} = \mathcal{F}_{S}\left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \\ \partial \boldsymbol{\theta}(i) & \partial \boldsymbol{\theta}(i) \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \partial \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \\ \partial \boldsymbol{\theta}(i) & \partial \boldsymbol{\theta}(i) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Delta} \right) \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(l,k|\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{u}(l,k) \end{bmatrix}, \quad (3.44)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(l,k|\boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\gamma}(l,k|\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \mathcal{F}_S \left( \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) & \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \mathbf{\Delta} \right) \mathbf{u}(l,k),$$
(3.45)

et  $n = n_h + n_v$ .

Notons que pour déterminer  $\psi_{N_xN_t}$  et J' pour chaque paramètre  $\theta(i)$ , il faut simuler les équations (3.44) et (3.45) qui présentent un modèle LFR. Ainsi, si  $\theta$  contient pparamètres à estimer, alors il faut simuler p fonctions de sensibilité.

 $<sup>^{2}\</sup>theta(i)$  désigne le composant i de  $\theta$ .

## 3.3.5 Discussion

La représentation du modèle de Roesser se caractérise par une interconnexion complexe entre les variables d'états  $\mathbf{x}^h$  et  $\mathbf{x}^v$ . Cette interconnexion rend l'identification des paramètres difficile. C'est pour cette raison que les algorithmes d'identification pour le modèle 2D de Roesser sont dédiés seulement à un modèle causal, récursif et séparable en dénominateur.

En se référant aux résultats publiés dans (Lee et Poolla, 1996; Lee, 1997), le modèle de LFR est suggéré afin de remplacer la représentation de Roesser. Ce modèle offre une simple représentation entrées-sorties du système sans avoir l'interconnexion entre les variables d'état  $\mathbf{x}^h$  et  $\mathbf{x}^v$ .

Il est intéressant de noter que lorsque le modèle considéré est entièrement paramétré, l'algorithme présenté dans la proposition 3.1 peut être modifié afin d'assurer la convergence des paramètres estimés (Lee et Poolla, 1996, Section 4.2). En effet, il s'agit d'un problème d'identifiabilité (Ljung (1999)). Ce problème peut être résolu par introduction d'une nouvelle paramétrisation du système : the data driven local coordinates (DDLC) parameterization (Lee et Poolla (1996); McKelvey *et al.* (2004)). Cette représentation, avantageuse du point de vue numérique, permet d'améliorer la convergence de l'algorithme introduit précédemment.

L'algorithme, proposé ici, permet d'estimer les paramètres inconnus du modèle de Roesser. Cependant, comme toute technique d'identification non linéaire et itérative, la qualité d'estimation dépend fortement du choix du vecteur initial des paramètres  $\theta_0$ . En effet, un mauvais choix peut entrainer une convergence vers un minimum local de la fonction coût (3.37). Ainsi, ce vecteur de départ doit être choisi dans le voisinage de l'optimum global de la fonction coût. Une technique, présentée dans le chapitre suivant, consiste à initialiser cette approche à l'aide d'un algorithme à erreur d'équation. Dans ce chapitre, on considère un choix aléatoire du vecteur initial des paramètres.

## 3.4 Exemple de simulation

L'algorithme décrit dans la section 3.3.4 est testé avec des données de simulation générées par un modèle 2D causal, récursif et séparable en dénominateur afin de le comparer à l'algorithme développé dans (Ramos *et al.*, 2011). Cette méthode, fondée sur les sous-espaces et décrite dans l'annexe B, est dédiée aux modèles CRSD. Cependant, il est à noter que notre algorithme peut être utilisé avec une représentation 2D d'état entièrement paramétrée sans contrainte. Ce cas sera illustré dans le chapitre 4.

## 3.4.1 Modèle causal, récursif et séparable en dénominateur

#### 3.4.1.1 Simulation

On considère un modèle causal, récursif et séparable en dénominateur caractérisé par la représentation d'état suivante

$$\mathbf{x}^{h}(l+1,k) = \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{A}_{2}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{B}_{1}\mathbf{u}(l,k),$$
  

$$\mathbf{x}^{v}(l,k+1) = \mathbf{A}_{2}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{A}_{4}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{B}_{2}\mathbf{u}(l,k),$$
  

$$\mathbf{y}(l,k) = \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{A}_{2}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(l,k),$$
  
(3.46)

où  $l \in \{0, \cdots, N_x\}$  et  $k \in \{0, \cdots, N_t\}$  et

$$\mathbf{A}_{1} = \begin{bmatrix} -0.2589 & -0.4997 & -0.2581 \\ -0.4526 & 0.2943 & -0.0616 \\ -0.0736 & 0.0822 & -0.0858 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2} = \begin{bmatrix} 0.3967 & 0.1232 \\ -0.0459 & 0.2855 \\ 0.3396 & -0.0614 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}_{3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{4} = \begin{bmatrix} -0.1175 & -0.1809 \\ 0.1257 & 0.3264 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{B}_{1} = \begin{bmatrix} 0.1006 & 0.1273 & -0.2313 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \quad \mathbf{B}_{2} = \begin{bmatrix} -1.0636 & -0.1246 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}, \\ \mathbf{C}_{1} = \begin{bmatrix} 1.4578 & 1.7139 & 0.6824 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{2} = \begin{bmatrix} 0.3152 & 2.5705 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{D} = & -0.2638. \end{aligned}$$

$$(3.47)$$

Similairement à ce qui est suggéré dans (Ramos *et al.* (2011)), le signal d'entrée est constitué d'une matrice de dimension  $N_x \times N_t$  contenant des valeurs pseudo-aléatoires tirées avec une distribution normale et  $N_x = N_t = 50$ .

#### 3.4.1.2 Résultats

L'algorithme d'optimisation, proposé dans ce chapitre, est basé sur le calcul du gradient. Cette technique est très sensible au choix du vecteur initial des paramètres. Par manque de connaissances physiques et puisque le modèle est de type boîte noire, on a fixé  $\theta_{init} = 0.6\theta_{real}$ . L'étude de la sensibilité par rapport à l'initialisation sera reportée au chapitre 4 où des informations sur les paramètres physiques du système sont disponibles.

Dans cet exemple, le modèle étudié est non identifiable, donc les matrices d'état estimées ne sont pas considérées comme un indice de performance puisqu'elles sont obtenues à un changement de base prés. Afin de comparer les performances de ces deux techniques d'identification, on doit introduire des invariants spécifiques du système. Pour les systèmes 1D non identifiables, ces invariants spécifiques sont souvent les pôles et les zéros de ces modèles. En effet, ces paramètres représentent le comportement dynamique de ces systèmes et sont identiques quelle que soit la réalisation de la forme d'état. Dans le cadre des systèmes 2D, un modèle linéaire invariant dans le temps peut avoir un nombre infini de pôles et de zéros (Kaczorek (1985)). Donc, ces outils standards ne sont plus utilisables. Ainsi, on choisit les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}$  comme des indices de performance afin de comparer les deux méthodes d'identification.

Au niveau de la simulation, un bruit, qui se caractérise par un rapport signal sur bruit égal à 40 dB dans un premier temps et 30 dB dans un deuxième temps, est ajouté à la sortie exacte du système. Les résultats présentés dans les figures 3.4-3.5 sont obtenus après avoir effectué un tirage de Monte Carlo de taille 100. À titre d'indication, au niveau des figures, notre approche est notée LFR.



FIGURE 3.4 – Estimation des valeurs propres pour la simulation de Monte Carlo. La valeur propre réelle est égale à -0.083.

D'après les résultats présentés dans les figures 3.4-3.5, l'utilisation de l'algorithme introduit dans ce chapitre est plus avantageuse que l'algorithme N4SID. Cet avantage est plus pertinent, en particulier, lorsque le rapport



 $\label{eq:FIGURE 3.5-Estimation des valeurs propres pour la simulation de Monte Carlo. La valeur propre réelle est égale à 0.267.$ 

signal sur bruit est égal à 30 dB. Ceci peut être expliqué par le fait que l'algorithme N4SID, développé dans Ramos *et al.* (2011), ne contient pas de variable instrumentale pour réduire le biais dû aux perturbations agissant sur le système.

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'identification des paramètres de système dont le comportement est régi par des équations aux dérivées partielles. Pour atteindre cet objectif, on a considéré que leur comportement pouvait être approché par une représentation d'état 2D, plus précisément par un modèle de Roesser 2D. Grâce au lien entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fractionnaire, on a pu proposer un algorithme basé sur le calcul du gradient afin d'estimer les matrices d'état d'un modèle 2D de Roesser. Contrairement aux solutions disponibles dans la littérature, aucune restriction (modèle causal récursif et séparable en dénominateur) sur le modèle n'a été mise en jeu.

À la fin de ce chapitre, on a testé cet algorithme avec des données de simulation. Une comparaison avec un deuxième algorithme proposé par Ramos *et al.* (2011) a été effectuée. Ces résultats numériques ont prouvé l'efficacité de l'algorithme de programmation non linéaire développé dans ce chapitre.

## Chapitre 4

# IDENTIFICATION PARAMÉTRIQUE D'UN ÉCHANGEUR DE CHALEUR À CO-COURANT

## 4.1 Introduction

Les échangeurs de chaleur sont de plus en plus mis en œuvre dans l'industrie. Les premières utilisations de l'échangeur de chaleur sont dédiées seulement à refroidir et chauffer les procédés industriels de grande taille. Actuellement, ils sont utilisés principalement pour récupérer l'énergie perdue par un flux chaud ou pour chauffer un autre flux. De par l'utilisation intensive des échangeurs de chaleur dans différents secteurs industriels, il est nécessaire d'avoir des modèles fiables et pertinents de ces processus. Ces modèles peuvent servir pour la détection de l'encrassement et la surveillance de l'échangeur de chaleur (Cooney *et al.*, 2005; Jonsson *et al.*, 2007; Mercère *et al.*, 2011). Selon la géométrie des échangeurs de chaleur, on distingue plusieurs types tels que les échangeurs à flux croisés, les échangeurs à flux rotatif, les échangeurs à flux contre-courant et les échangeurs à flux co-courant (Kakac et Liu (2002)). Au sein de ce chapitre, une attention particulière est accordée à l'identification des paramètres physiques d'un échangeur de chaleur à écoulement co-courant.

La distribution de la température, à l'instant t et au point x, dans un échangeur de chaleur se décrit par une équation aux dérivées partielles (EDP) (Lienhard, 1987; Incropera *et al.*, 2011). Comme expliqué dans le premier chapitre, il est difficile d'aborder une EDP vu que cette équation dépend de plusieurs variables indépendantes ce qui est le cas contraire de l'équation différentielle ordinaire (EDO). De plus, les échangeurs de chaleur à écoulement co-courant se caractérisent par deux EDPs couplées entre elles afin de représenter le transfert de chaleur entre deux fluides, froid et chaud.

Dans les deux chapitres précédents, on a élaboré deux algorithmes d'identification dédiés aux EDPs. Le premier algorithme est basé sur les propriétés intéressantes des moments partiels réinitialisés pour approximer les dérivées partielles. Dans ce cadre, on a présenté un algorithme à erreur d'équation dans le deuxième chapitre. Par contre, les résultats obtenus par les moindres carrés ne sont pas fiables dans le cas stochastique. En effet, un biais d'estimation asymptotique peut être ajouté au niveau de la solution. Un deuxième inconvénient de cette approche est qu'elle dépend du nombre de capteurs et de leurs positions le long du système à identifier. Dans le troisième chapitre, grâce au lien entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fractionnaire, un algorithme à erreur de sortie basé sur le calcul du gradient est présenté. Cette technique, comme toute technique d'optimisation non linéaire, souffre du problème d'initialisation (Nocedal et Wright, 2006). Ainsi, elle peut converger vers un optimum local.

Dans ce chapitre, on teste ces deux algorithmes sur des données de simulation de l'échangeur de chaleur (Farah *et al.*, 2016). Ensuite, on présente une combinaison de ces deux méthodes afin d'éviter les difficultés rencontrées avec chacune des techniques mentionnées ci-dessus. D'où, l'idée majeure de ce chapitre est d'utiliser l'approche basée sur les RPM pour initialiser l'approche à erreur de sortie au plus proche de l'optimum global.

## 4.2 Echangeur de chaleur à co-courant

### 4.2.1 Équations de transfert de chaleur

Un échangeur de chaleur à co-courant se caractérise par deux fluides froid et chaud qui s'écoulent dans la même direction à travers des conduits parallèles séparés par une paroi solide. Elle empêche les deux fluides de se mélanger comme présenté dans la figure 4.1.



FIGURE 4.1 – Échangeur de chaleur à co-courant.

Les échangeurs de chaleur présentent un transfert thermique du fluide chaud vers le fluide froid. Cette dynamique est décrite par les équations aux dérivées partielles du premier ordre (Lienhard (1987))

$$\frac{\partial \mathbb{T}_{h}(x,t)}{\partial t} + \nu_{h} \frac{\partial \mathbb{T}_{h}(x,t)}{\partial x} = \alpha \mathbb{T}_{h}(x,t) + \beta \mathbb{T}_{c}(x,t), 
\frac{\partial \mathbb{T}_{c}(x,t)}{\partial t} + \nu_{c} \frac{\partial \mathbb{T}_{c}(x,t)}{\partial x} = \eta \mathbb{T}_{h}(x,t) + \delta \mathbb{T}_{c}(x,t),$$
(4.1)

où  $\mathbb{T}_h$  et  $\mathbb{T}_c$  sont les températures des fluides chaud et froid (h pour hot et c pour cold), respectivement. Les paramètres inconnus à estimer sont  $\nu_h$ ,  $\nu_c$ ,  $\alpha$  et  $\eta$  en considérant  $\alpha = -\beta$  et  $\eta = -\delta$ . Ces paramètres peuvent être facilement liés aux paramètres physiques spécifiques du système. En effet, ces grandeurs sont reliées à la largeur L de l'échangeur de chaleur, les coefficients de convection froid  $h_c$  et chaud  $h_h$ , les débits massiques froid  $\dot{m}_c$  et chaud  $\dot{m}_h$ , les densités de fluide  $\rho_c$  et  $\rho_h$ , les épaisseurs  $d_c$  et  $d_h$  et les chaleurs spécifiques  $c_c$  et  $c_h$  comme suit

$$\nu_h = \frac{\dot{m}_h}{\rho_h d_h L},\tag{4.2}$$

$$\nu_c = \frac{\dot{m_c}}{\rho_c d_c L},\tag{4.3}$$

$$\alpha = -\beta = -\frac{h_c h_h}{\rho_h c_h d_h (h_c + h_h)},\tag{4.4}$$

$$\eta = -\delta = \frac{h_c h_h}{\rho_c c_c d_c (h_c + h_h)}.$$
(4.5)

**Remarque 4.1.** L'équation 4.1 présente seulement la dynamique des deux fluides chaud et froid. Par contre, la dynamique de la plaque qui sépare les deux fluides n'été pas prise en compte. Cette dynamique peut être introduite par une troisiéme EDP (D.Gvozdenac, 2012). Cependant, cette équation augmente la complexité du problème, sans changer la méthodologie ainsi que la procédure développée dans ce chapitre. Ainsi, pour cette raison, on considère que l'échangeur de chaleur est décrit que par l'équation 4.1.

### 4.2.2 Simulation

Dans l'intention de simuler les équations de l'échangeur de chaleur, on utilise la représentation d'état du modèle de Roesser 2D. Afin d'obtenir cette représentation, on utilise la discrétisation implicite et explicite pour  $\frac{\partial \mathbb{T}_{\bullet}}{\partial t}$  et  $\frac{\partial \mathbb{T}_{\bullet}}{\partial x}$ , respectivement, dans l'équation (4.1). Ces approximations conduisent aux équations linéaires à temps discret suivantes

$$\frac{\frac{\mathbb{T}_{h}(l,k+1) - \mathbb{T}_{h}(l,k)}{\Delta t} - \beta(\mathbb{T}_{c}(l,k) - \mathbb{T}_{h}(l,k)) + \nu_{h}\frac{\mathbb{T}_{h}(l,k) - \mathbb{T}_{h}(l-1,k)}{\Delta x} = 0,}{\frac{\mathbb{T}_{c}(l,k+1) - \mathbb{T}_{c}(l,k)}{\Delta t} - \eta(\mathbb{T}_{h}(l,k) - \mathbb{T}_{c}(l,k)) + \nu_{c}\frac{\mathbb{T}_{c}(l,k) - \mathbb{T}_{c}(l-1,k)}{\Delta x} = 0.}{(4.6)}$$

Après une simple manipulation, on obtient le modèle discret 2D de Roesser

$$\begin{bmatrix} \mathbb{T}_{1}(l+1,k) \\ \mathbb{T}_{2}(l+1,k) \\ \mathbb{T}_{3}(l,k+1) \\ \mathbb{T}_{4}(l,k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\nu_{h}\Delta t}{\Delta x} & 0 & (1-\frac{\nu_{h}\Delta t}{\Delta x} -\beta\Delta t) & \beta\Delta t \\ 0 & \frac{\nu_{c}\Delta t}{\Delta x} & \delta\Delta t & (1-\frac{\nu_{c}\Delta t}{\Delta x} -\eta\Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{T}_{1}(l,k) \\ \mathbb{T}_{2}(l,k) \\ \mathbb{T}_{3}(l,k) \\ \mathbb{T}_{4}(l,k) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{bmatrix} \mathbb{T}_1(l,k) \\ \mathbb{T}_2(l,k) \\ \mathbb{T}_3(l,k) \\ \mathbb{T}_4(l,k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_h(l-1,k) \\ \mathbb{T}_c(l-1,k) \\ \mathbb{T}_h(l,k) \\ \mathbb{T}_c(l,k) \end{bmatrix} \text{ pour } l > 1.$$
(4.8)

Les conditions initiales et limites sont supposées connues et fixées  $a \ priori$  comme suit

$$\begin{cases} \mathbb{T}_1(0,k) = 60 \quad k \ge 0, \\ \mathbb{T}_2(0,k) = 30 \quad k \ge 0, \\ \mathbb{T}_3(l,0) = 60 \quad l \ge 0, \\ \mathbb{T}_4(l,0) = 30 \quad l \ge 0. \end{cases}$$

$$(4.9)$$

Pour cette simulation numérique, on fixe les périodes d'échantillonnage spatiale et temporelle, respectivement, à  $\Delta x = 0.02 \ m$  et  $\Delta t = 0.007 \ s$  avec  $L = 1 \ m$ . Ainsi, les vrais paramètres à estimer sont égaux à  $\nu_h = 2.577$ ,  $\beta =$ 1.556,  $\nu_c = 1.289$  et  $\eta = 0.466$ . La figure 4.2 montre les signaux d'entrée et de sortie utilisés pour identifier les paramètres physiques de l'échangeur de chaleur.

## 4.3 Approche à erreur d'équation

#### 4.3.1 Modèle basé sur les moments partiels réinitialisés 2D

Notre objectif, dans cette section, est d'estimer les paramètres inconnus de l'échangeur de chaleur (4.1) avec l'approche des moments partiels réinitialisés présentée dans le deuxième chapitre. Ce système MIMO peut être considéré comme deux systèmes MISO de sorties respectives  $\mathbb{T}_h(N_x, k)$  et  $\mathbb{T}_c(N_x, k)$ .



FIGURE 4.2 – Entrées/Sorties de l'échangeur sans bruit.

Les dérivées partielles dans (4.1) ont un ordre spatial égal à 1 et un ordre temporel égal à 1. Pour faire disparaitre ces dérivées partielles, on applique le calcul intégral  $\int_0^T t \int_0^X x \bullet \partial x \partial t$  à (4.1), soit

$$\underbrace{\underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \frac{\partial \mathbb{T}_{h}(x,t)}{\partial t} \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{11}^{\mathbb{T}}(X,T)} + \nu_{h} \underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \frac{\partial \mathbb{T}_{h}(x,t)}{\partial x} \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{12}^{\mathbb{T}}(X,T)} \\ = \beta(\underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \mathbb{T}_{c}(x,t) \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{13}^{\mathbb{T}}(X,T)} - \underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \mathbb{T}_{h}(x,t) \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{13}^{\mathbb{T}}(X,T)}, \quad (4.10)$$

$$\underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \frac{\partial \mathbb{T}_{c}(x,t)}{\partial t} \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{21}^{\mathbb{T}}(X,T)} + \nu_{c} \underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \frac{\partial \mathbb{T}_{c}(x,t)}{\partial x} \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{22}^{\mathbb{T}}(X,T)} = \eta(\underbrace{\int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \mathbb{T}_{h}(x,t) \partial x \partial t}_{\mathcal{Y}_{23}^{\mathbb{T}}(X,T)} - \int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} x \mathbb{T}_{c}(x,t) \partial x \partial t). \quad (4.11)$$

En utilisant l'intégration par parties, les éléments de (4.10) deviennent

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{11}^{\mathbb{T}}(X,T) &= T \int_0^X x \mathbb{T}_h(x,T) \partial x - \int_0^T \int_0^X x \mathbb{T}_h(x,t) \partial x \partial t, \\ &= T \mathcal{M}_{1,-}^{\mathbb{T}_h}(X,T) - \mathcal{M}_{1,0}^{\mathbb{T}_h}(X,T), \\ \mathcal{Y}_{12}^{\mathbb{T}}(X,T) &= X \int_0^T t \mathbb{T}_h(X,t) \partial t - \int_0^T t \int_0^X \mathbb{T}_h(x,t) \partial x \partial t, \\ &= X \mathcal{M}_{-,1}^{\mathbb{T}_h}(X,T) - \mathcal{M}_{0,1}^{\mathbb{T}_h}(X,T), \\ \mathcal{Y}_{13}^{\mathbb{T}}(X,T) &= \mathcal{M}_{1,1}^{\mathbb{T}_c}(X,T) - \mathcal{M}_{1,1}^{\mathbb{T}_h}(X,T), \end{aligned}$$
(4.12)

et ceux de (4.11)

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{21}^{\mathbb{T}}(X,T) &= T \int_{0}^{X} x \mathbb{T}_{c}(x,T) \partial x - \int_{0}^{T} \int_{0}^{X} x \mathbb{T}_{c}(x,T) \partial x \partial t, \\ &= T \mathcal{M}_{1,-}^{\mathbb{T}_{c}}(X,T) - \mathcal{M}_{1,0}^{\mathbb{T}_{c}}(X,T), \\ \mathcal{Y}_{22}^{\mathbb{T}}(X,T) &= X \int_{0}^{T} t \mathbb{T}_{c}(X,t) \partial t - \int_{0}^{T} t \int_{0}^{X} \mathbb{T}_{c}(x,T) \partial x \partial t, \\ &= X \mathcal{M}_{-,1}^{\mathbb{T}_{c}}(X,T) - \mathcal{M}_{0,1}^{\mathbb{T}_{c}}(X,T), \\ \mathcal{Y}_{23}^{\mathbb{T}}(X,T) &= \mathcal{M}_{1,1}^{\mathbb{T}_{h}}(X,T) - \mathcal{M}_{1,1}^{\mathbb{T}_{c}}(X,T). \end{aligned}$$
(4.13)

L'étape suivante consiste à substituer les moments partiels réinitialisés aux moments partiels, comme montré précédemment pour l'exemple de diffusion de chaleur dans un mur, pour obtenir le modèle basé sur les moments partiels réinitialisés. Dans ce cas, l'équation (4.10) devient

$$Y_{11}^{\mathbb{T}}(L,t) = -\hat{\nu}_h Y_{12}^{\mathbb{T}}(L,t) + \hat{\alpha} Y_{13}^{\mathbb{T}}(L,t)$$
(4.14)

avec

$$Y_{11}^{\mathbb{T}}(L,t) = \hat{T}M_{1,-}^{\mathbb{T}_h}(L,t) - M_{1,0}^{\mathbb{T}_h}(L,t),$$
  

$$Y_{12}^{\mathbb{T}}(L,t) = LM_{-,1}^{\mathbb{T}_h}(L,t) - M_{0,1}^{\mathbb{T}_h}(L,t),$$
  

$$Y_{13}^{\mathbb{T}}(L,t) = M_{1,1}^{\mathbb{T}_c}(L,t) - M_{1,1}^{\mathbb{T}_h}(L,t),$$
(4.15)

et l'équation (4.11),

$$Y_{21}^{\mathbb{T}}(L,t) = -\hat{\nu}_c Y_{22}^{\mathbb{T}}(L,t) + \hat{\eta} Y_{23}^{\mathbb{T}}(L,t), \qquad (4.16)$$

avec

$$Y_{21}^{\mathbb{T}}(L,t) = \hat{T}M_{1,-}^{\mathbb{T}_c}(L,t) - M_{1,0}^{\mathbb{T}_c}(L,t),$$
  

$$Y_{22}^{\mathbb{T}}(L,t) = LM_{-,1}^{\mathbb{T}_c}(L,t) - M_{0,1}^{\mathbb{T}_c}(L,t),$$
  

$$Y_{23}^{\mathbb{T}}(L,t) = M_{1,1}^{\mathbb{T}_h}(L,t) - M_{1,1}^{\mathbb{T}_c}(L,t).$$
(4.17)

Les deux modèles (4.14) et (4.16) sont des régressions linéaires. On peut donc estimer les paramètres  $\nu_h$  et  $\alpha$  du modèle (4.14) à l'aide des moindres carrés

$$\begin{bmatrix} \hat{\nu}_h \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \left[ \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi_1(L, k\Delta t) \varphi_1^T(L, k\Delta t) \right]^{-1} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi_1(L, k\Delta t) Y_{11}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t), \quad (4.18)$$

avec

$$\varphi_1(L,t) = \begin{bmatrix} -Y_{12}^{\mathbb{T}}(L,t) & Y_{13}^{\mathbb{T}}(L,t) \end{bmatrix}^T$$

et  $\hat{T} = \hat{\mathcal{T}} \Delta t$ , le paramètre de réinitialisation.

Pour le modèle (4.16), les paramètres  $\nu_c$  et  $\eta$  sont estimés par

$$\begin{bmatrix} \hat{\nu}_c \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = \left[ \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi_2(L, k\Delta t) \varphi_2^T(L, k\Delta t) \right]^{-1} \sum_{k=\hat{\mathcal{T}}}^{N_t} \varphi_2(L, k\Delta t) Y_{21}^{\mathbb{T}}(L, k\Delta t),$$

avec

$$\varphi_2(L,t) = \begin{bmatrix} -Y_{22}^{\mathbb{T}}(L,t) & Y_{23}^{\mathbb{T}}(L,t) \end{bmatrix}^T$$

#### 4.3.2 Intervalle de réinitialisation optimal

À l'aide des moments partiels, les dérivées partielles ont disparues. Toutefois, un mauvais choix de l'intervalle d'intégration peut conduire à de mauvais résultats. En effet, si l'intervalle d'intégration est trop grand, alors l'estimation est biaisée en raison de l'accumulation du bruit. Si l'intervalle d'intégration est trop court, on n'a plus assez d'information pour estimer les paramètres du système. Pour contourner cette difficulté, on suggère d'utiliser une fenêtre glissante avec un intervalle d'intégration optimal. Puisque la longueur de l'échangeur est petite, l'intervalle d'intégration spatiale est fixé *a priori* à X = L. Ainsi, une attention particulière est accordée à l'intervalle d'intégration temporelle. Pour des données de mesure bruitées, on estime le vecteur des paramètres  $\theta$ , où  $\theta \in {\nu_h, \nu_c, \alpha, \eta}$ , pour chaque  $\mathcal{T} \in [10, 750]$ . Pour 100 tirages de Monte Carlo, on réalise la même expérience avec un rapport signal sur bruit égal à 20 dB.

Pour chaque réalisation, on considère l'erreur quadratique moyenne relative (Nomalized Root Mean Square Error) définie par

$$NRMSE(\hat{\mathcal{T}}) = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} \left(\frac{\left\|\theta^{0}(i) - \hat{\theta}(i, \hat{\mathcal{T}})\right\|}{\|\theta^{0}(i)\|}\right)^{2}},$$
(4.19)

où  $\theta^0(i)$  représente la valeur réelle du i-ème paramètre et  $\hat{\theta}(i, \hat{\mathcal{T}})$ , la valeur estimée du i-ème paramètre pour  $\hat{\mathcal{T}}$  donné.

Pour chaque réalisation, on détermine la valeur optimale de  $\hat{\mathcal{T}}$ , notée  $\mathcal{T}_{opt}$ , qui permet d'avoir la valeur minimale de NRMSE. Par contre, en pratique, le vecteur des paramètres réels  $\theta^0$  est inconnu. Donc, il est nécessaire de disposer d'un autre critère. Dans la suite, on utilise le critère quadratique suivant

$$J(\hat{\mathcal{T}}) = \frac{1}{N_t + 1} \sum_{k=0}^{N_t} \left( \left\| \mathbb{T}_h(L, k\Delta t) - \hat{\mathbb{T}}_h(L, k\Delta t | \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathcal{T}})) \right\|_2^2 + \left\| \mathbb{T}_c(L, k\Delta t) - \hat{\mathbb{T}}_c(L, k\Delta t | \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathcal{T}})) \right\|_2^2 \right),$$
(4.20)

où  $\hat{\mathbb{T}}_h(L, k\Delta t | \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathcal{T}}))$  et  $\hat{\mathbb{T}}_c(L, k\Delta t | \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathcal{T}}))$  présentent les sorties de la simulation du modèle 2D de Roesser (4.7) avec le vecteur de paramètres estimés  $\hat{\theta}(\hat{\mathcal{T}})$ . Pour chaque tirage de Monte Carlo, on détermine l'approximation de la valeur optimale de  $\hat{\mathcal{T}}$ , notée  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$ , qui minimise le critère J.

La figure 4.3 présente la distribution de  $\mathcal{T}_{opt}$  et  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$  obtenus sur l'étude de Monte Carlo. Le tableau 4.1 montre les résultats statistiques de l'estimation basés sur  $\mathcal{T}_{opt}$  et  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$ .



FIGURE 4.3 – Distribution de l'intervalle optimal  $\mathcal{T}_{opt}$  et de l'intervalle optimal approximé  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$ .

		Modèle basé sur RPM		Modèle basé sur RPM	
		estimé par $\mathcal{T}_{opt}$		estimé par $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$	
Paramètre	Valeur réelle	Moyenne	Ecart-type	Moyenne	Ecart-type
$ u_h $	2.577	2.565	0.023	2.561	0.021
β	1.556	1.534	0.014	1.532	0.012
$\nu_c$	1.289	1.289	0.008	1.288	0.007
$\eta$	0.461	0.457	0.003	0.457	0.002

TABLE 4.1 – Estimation par les moindres carrés pour  $\hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T}_{opt}$  et  $\hat{\mathcal{T}} = \hat{\mathcal{T}}_{opt}$  (simulation de Monte Carlo).

A partir de cette expérience, on montre l'existence d'un intervalle d'intégration optimal  $T_{opt} = \mathcal{T}_{opt}\Delta x$ . Cet intervalle d'intégration optimal peut être approximé par l'étude du critère quadratique (4.20), ou encore d'un critère de *Fitting*.

Comme montré dans le tableau 4.1, l'estimation des paramètres à partir de l'intervalle d'intégration optimal  $T_{opt}$  est assez proche de celle obtenue par l'intervalle d'intégration optimal approximé  $\hat{T}_{opt}$ . La figure 4.3 montre que la distribution de  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$  est semblable à celle de  $\mathcal{T}_{opt}$ . De plus, on remarque que  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$  est souvent supérieur à  $\mathcal{T}_{opt}$ . Pour la simulation de Monte Carlo, les valeurs moyennes de  $\hat{\mathcal{T}}_{opt}$  et  $\mathcal{T}_{opt}$  sont, respectivement, 213 et 170. Dans la suite, l'estimation de l'échangeur de chaleur est effectuée avec l'intervalle d'intégration  $\hat{T} = 170\Delta x$ .

## 4.3.3 Identification avec des mesures uniformément et non uniformément réparties

#### 4.3.3.1 Étude sans bruit de mesure

Dans cette section, on considère que l'échangeur ne subit aucune perturbation sur les données de mesure. De plus, comme expliqué dans le deuxième chapitre, on cherche à diminuer le nombre de capteurs à l'intérieur de l'échangeur afin d'identifier les paramètres physiques du système. Dans ce cadre, on ne considère que 11 capteurs pour identifier l'échangeur. Le premier et le dernier capteurs sont placés à l'entrée et à la sortie du système, respectivement. Les 9 capteurs internes sont placés aléatoirement. Pour 100 tirages où les 9 capteurs internes sont répartis aléatoirement, on compare le *Fitting* obtenu avec le *Fitting* donné par une répartition uniforme de capteurs où le critère du Fitting, défini pour  $\mathbb{T}_{\bullet}$  (• représente h ou c), est donné par

$$FIT_{\bullet} = 100 \times \left( 1 - \frac{\left\| \mathbb{T}_{\bullet}(L,t) - \hat{\mathbb{T}}_{\bullet}(L,t) \right\|}{\left\| \mathbb{T}_{\bullet}(L,t) - mean(\mathbb{T}_{\bullet}(L,t)) \right\|} \right),$$
(4.21)

tel que  $\hat{\mathbb{T}}_{\bullet}(L,t)$  est la simulation du modèle (4.7) avec les paramètres estimés.

Parmi ces 100 configurations de capteurs, deux configurations offrent une estimation paramétrique meilleure que celle obtenue avec la configuration uniformément répartie. Ces configurations sont présentées dans la figure 4.4 avec la répartition uniforme.



FIGURE 4.4 – Identification de l'échangeur de chaleur avec 11 capteurs. Répartition des capteurs de la configuration uniforme et des deux meilleures configurations non uniformes.

On remarque que, même ces configurations sont non uniformes, les capteurs sont distribués sur toute la longueur de l'échangeur. Le tableau 4.2 présente les résultats obtenus pour chaque configuration de la figure 4.4.

TABLE 4.2 – Estimation par les moindres carrés. Paramètres estimés et *Fitting* obtenus pour les configurations de la figure 4.4

(v	aleurs	réelles	$\nu_h =$	2.577,	$\beta =$	1.556,	$\nu_c =$	1.289	et $\eta$ =	= 0.466	)
----	--------	---------	-----------	--------	-----------	--------	-----------	-------	-------------	---------	---

Configuration	$\hat{\nu}_h$	$\hat{eta}$	$\hat{\nu}_c$	$\hat{\eta}$	$FIT_h$	$FIT_c$
1 (uniforme)	2.5867	1.5550	1.2901	0.4643	99.0001	99.4641
2	2.5703	1.5503	1.2826	0.4634	99.6425	99.4735
3	2.5737	1.5531	1.2845	0.4642	99.8028	99.6334

L'analyse des résultats présentés dans le tableau 4.2 a montré qu'on estime bien les paramètres physiques de l'échangeur de chaleur pour un nombre réduit de capteurs. De plus, on constate que les résultats pour ces 3 configurations sont très voisins.

### 4.3.3.2 Étude en présence de bruit

Un bruit blanc gaussien, qui se caractérise par un rapport signal sur bruit égal à 20 dB, est ajouté pour chaque échantillon spatial dans le domaine temporel pour les températures des deux fluides de l'échangeur. Dans le même cadre, on cherche à diminuer encore le nombre de capteurs à l'intérieur de l'échangeur en gardant une répartition uniforme. Le tableau 4.3 présente les résultats obtenus à l'aide de 3, 6 et 11 capteurs, où l'erreur relative est définie par

Erreur relative = 
$$100 * \frac{\theta^0(i) - \hat{\theta}(i)}{\theta^0(i)}$$
, (4.22)

où  $\hat{\theta}(i)$  désigne le i-ème composant de  $\hat{\theta}$ .

Nombre de capteur	3	6	11
$ u_h $	6.22%	0.50%	0.12%
$\beta$	4.77%	0.47%	0.59%
$\nu_c$	5.92%	0.57%	0.09%
$\eta$	5.46%	0.42%	0.37%
$FIT_h$ (%)	75.91	97.74	98.78
$FIT_c$ (%)	85.71	98.66	99.28

TABLE 4.3 – Erreurs relatives et valeurs moyennes du FIT pour la simulation de Monte Carlo.

Le tableau 4.3 montre qu'on estime bien les paramètres physiques de l'échangeur de chaleur lorsqu'on utilise 6 ou 11 capteurs avec un *Fitting* qui dépasse 97.74%. Par contre, les résultats obtenus pour 3 capteurs (première colonne) sont fortement biaisés. Ces résulats peuvent étre amiliorés par l'utilisation d'une variable instrumentale ou en initialisant un algorithme à erreur de sortie.

## 4.4 Approche à erreur de sortie

Dans cette section, on envisage d'identifier les paramètres physiques de l'échangeur de chaleur (4.1) à l'aide de l'algorithme présenté dans le troisième chapitre. Ainsi, on suppose que le signal d'entrée est

$$u(l = 0, k) = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_h(0, k) \\ \mathbb{T}_c(0, k) \end{bmatrix}, \ k \in \{1, \cdots, N_t\}$$
(4.23)

et le signal de sortie

$$y(l = N_x, k) = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_h(N_x, k) \\ \mathbb{T}_c(N_x, k) \end{bmatrix}, \ k \in \{1, \cdots, N_t\}.$$
 (4.24)

Les approches à erreur de sortie souffrent toujours du problème d'initialisation. En effet, un mauvais choix du vecteur initial des paramètres peut faire converger vers un optimum local. Ainsi, une attention particulière est accordée à ce choix.

### 4.4.1 Initialisation pseudo-aléatoire

Dans cette première partie, on considère que le vecteur initial des paramètres  $\theta_{init}$  est généré par la formule suivante

$$\theta_{init}(i) = \theta^0(i) * r, \qquad (4.25)$$

où  $\theta^0(i)$ ,  $i = \{1, \dots, 4\}$ , est le vecteur des valeurs réelles des paramètres à estimer et r est un nombre aléatoire sur l'intervalle [0.30...1.70].

Les figures 4.5 et 4.6 présentent les paramètres estimés associés au fluide chaud et au fluide froid, respectivement, pour 100 valeurs aléatoires de r. Ces résultats sont obtenus dans le cas déterministe où aucun bruit n'agit sur l'échangeur.



FIGURE 4.5 – Valeurs estimées des paramètres  $\nu_h$  et  $\alpha$  pour  $r \in [0.30...1.70]$ .



FIGURE 4.6 – Valeurs estimées des paramètres  $\nu_x$  et  $\eta$ pour  $r \in [0.30...1.70]$ .

La figure 4.7 a été créée pour mieux visualiser l'estimation pour  $r \in [0.30...0.50]$ .

Ces figures montrent que le critère à minimiser, pour  $r \in [0.30...1.70]$ , possède deux optimums locaux marqués par les étoiles noires et rouges sur la figure 4.7 et un optimum global représenté par les étoiles bleues. Ainsi, on montre que le choix du vecteur d'initialisation influence la convergence vers les vrais paramètres.

Après avoir étudié le cas déterministe, on considère le cas stochastique où  $\theta_{init}(i) = 0.5 * \theta^0(i)$ . Les performances de l'algorithme d'identification sont évaluées par une simulation de Monte Carlo avec 100 tirages d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. Plus précisément, pour chaque tirage, deux séquences de bruit non corrélées, qui se caractérisent par un rapport signal sur bruit égal à 20 dB, sont additionnées aux sorties  $\mathbb{T}_h(N_x, k)$  et  $\mathbb{T}_c(N_x, k)$  de système. L'estimation des paramètres physiques du modèle (4.1) est présentée dans la figure 4.8.

Ces diagrammes en boite prouvent que, pour cet exemple de simulation, l'algorithme d'optimisation proposé dans ce chapitre est assez robuste pour un vecteur d'initialisation satisfaisant la formule  $\theta_{init}(i) = 0.5 * \theta^0(i)$ . En effet, malgré la présence d'un bruit blanc avec un faible rapport signal sur bruit, on remarque que l'algorithme converge vers les vrais paramètres.



FIGURE 4.7 – Valeurs estimées des paramètres de l'échangeur pour  $r \in [0.30...0.50]$ .



FIGURE 4.8 – Valeurs estimées des paramètres de l'échangeur pour r = 0.5 (tirage de Monte Carlo).

## 4.4.2 Initialisation basée sur les moments partiels réinitialisés

Dans cette deuxième partie, on cherche à initialiser l'algorithme du gradient à l'aide de l'algorithme à erreur d'équation présenté dans la section 4.3. La combinaison de ces deux méthodes est évaluée par une simulation de Monte Carlo avec 100 tirages d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle. Le rapport signal sur bruit est de 20 dB. De plus, pour l'algorithme des RPM, on considère un seul capteur à l'intérieur de l'échangeur. Dans ce cas, on envisage trois possibilités d'emplacement de ce capteur : x = 0.1 m, x = 0.5 met x = 0.9 m. Le tableau 4.4 présente les résultats obtenus par l'algorithme des moindres carrés.

	x = 0.1	x = 0.5	x = 0.9
$ u_h$	39.09%	6.22%	43.35%
$\beta$	16.78%	4.77%	18.81%
$ u_c $	24.33%	5.92%	20.32%
$\eta$	6.03%	5.46%	16.92%
$FIT_h$ (%)	28.28	75.91	18.44
$FIT_c$ (%)	53.81	85.71	51.10

TABLE 4.4 – Erreurs relatives et valeurs moyennes du FIT obtenues avec l'algorithme basé sur les RPM pour la simulation de Monte Carlo.

En observant le tableau 4.4, il est plus avantageux de placer le capteur au milieu pour avoir une bonne initialisation. En effet, dans le pire des cas, l'erreur relative est légèrement supérieure à 6%. Cependant, dans la pratique, il est plus facile d'introduire un capteur à l'extrémité qu'au milieu de l'échangeur. Par conséquent, on considére que le vecteur des paramètres initiaux est estimé avec un capteur placé à l'entrée de l'echangeur (x = 0.1 m).

La figure 4.9 montre la sortie mesurée et la sortie simulée tandis que les résultats de la simulation de Monte Carlo sont donnés dans le tableau 4.5.



FIGURE 4.9 – Sortie mesurée (trait continu) et sortie simulée avec l'algorithme à erreur de sortie (tiret).
	Modèle basé sur RPM		Modèle de Roesser		
Paramètre	Moyenne	$\sigma$	Moyenne	σ	Erreur Relative
$\nu_h$	1.569	0.0156	2.650	0.0041	2.83%
β	1.294	0.0132	1.602	0.0025	2.97%
$\nu_c$	0.975	0.0044	1.296	0.0019	0.54%
$\eta$	0.488	0.0021	0.459	0.0006	0.43%
$FIT_h$ (%)	28.28	0.15	97.18	0.14	-
$FIT_c$ (%)	53.81	0.21	98.36	0.05	-

TABLE 4.5 – Résultats de la simulation de Monte Carlo (valeurs réelles  $\nu_h = 2.577$ ,  $\alpha = 1.556$ ,  $\nu_c = 1.289$  et  $\eta = 0.466$ ).

Le tableau 4.5 montre que l'initialisation avec l'approche basée sur les RPM, même si elle est biaisée, conduit à des paramètres très proches des vrais paramètres. Ainsi, ces résultats prouvent l'efficacité de notre approche en passant par les deux étapes pour l'identification paramétrique de l'échangeur de chaleur à écoulement co-courant.

### 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une attention particulière a été accordée à l'estimation des paramètres physiques d'un échangeur de chaleur à écoulement co-courant. Dans ce cadre, les deux algorithmes présentés dans les chapitres 3 et 4, algorithme à erreur d'équation et algorithme à erreur de sortie, ont été testés sur des mesures de simulation de l'échangeur.

En premier lieu, un modèle basé sur les moments partiels réinitialisés a été élaboré. Ce modèle à été estimé par un simple algorithme des moindres carrés. On a suggéré la minimisation d'un critère quadratique pour déterminer l'intervalle d'intégration optimal associé aux moments partiels réinitialisés. Cet algorithme a été évalué avec une période d'échantillonnage spatial différente afin de tester l'effet du nombre de capteurs sur l'estimation des paramètres.

En deuxième lieu, on considère les résultats obtenus par les moindres carrés comme le vecteur d'initialisation de l'algorithme d'erreur de sortie. Ainsi, on prouve l'efficacité de notre solution en combinant ces deux algorithmes d'identification.

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Les systèmes dont le comportement peut être décrit par des équations aux dérivées partielles (EDP), aussi appelées systèmes à paramètres distribués, sont au centre de l'étude menée dans cette thèse. Cette modélisation mathématique apparait dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques. La dynamique de ces systèmes se caractérise par plusieurs variables indépendantes telles que l'espace et le temps. Dans le travail de thèse rapporté dans ce mémoire, on s'est intéressé à l'estimation paramétrique de ces équations aux dérivées partielles. Pour cela, deux approches ont été proposées :

- la première est une extension de l'approche des moments partiels réinitialisés aux systèmes dont le comportement est régi par des équations différentielles partielles,
- la seconde repose sur une discrétisation de l'EDP permettant de l'écrire sous la forme d'un modèle de Roesser.

Afin de présenter au mieux les développements réalisés au cours de cette thèse, le premier chapitre de ce manuscrit a porté tout d'abord sur des rappels sur les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles ainsi que la résolution de ces dernières. Les outils d'identification utilisés dans ce travail ont également été rappelés. Enfin, dans le cadre de l'identification paramétrique des EDP, différentes solutions de la littérature ont été brièvement présentées :

- Les méthodes basées sur les différences finies qui nécessitent des pas de discrétisation en espace et en temps suffisamment fins pour caractériser au mieux le comportement réel du système étudié;
- Les approches par filtrage des signaux qui permettent, à partir des mesures, de générer des signaux filtrés ainsi que leurs dérivées spatiales et temporelles. Ces approches sont d'autant plus efficaces que l'on dispose d'un nombre important de capteurs le long du problème étudié;

- Les approches basées sur un développement de l'EDP sur une base de fonctions spatiales définie par l'utilisateur afin de séparer les variables de temps et d'espace. Ces approches nécessitent une étape de réduction de modèle afin d'approximer le système de dimension infini par un ensemble fini d'équations différentielles ordinaires;
- La modélisation fractionnaire qui, pour certaines EDP, permet d'obtenir des modèles sous la forme de fonction de transfert ou de représentation d'état dont les paramètres sont liés à ceux de l'EDP.

Les outils développés dans ce travail s'insèrent dans le cadre de ces méthodes.

La première approche est basée sur la technique des moments partiels réinitialisés, initialement développée pour l'estimation des paramètres des équations différentielles ordinaires. Une extension de cette approche au cas des EDP a été proposée. Elle consiste à approcher les termes de dérivée partielle grâce à des moments partiels réinitialisés dépendant de l'espace et du temps. Le modèle obtenu est dépendant de l'EDP étudiée mais peut se mettre sous une forme linéaire par rapport aux paramètres. Un algorithme des moindres carrés associé à une variable instrumentale permet alors d'obtenir des estimations non biaisés des paramètres de l'EDP. La méthode nécessite la détermination d'un paramètre de synthèse qui est l'horizon d'intégration pour le calcul des moments partiels réinitialisés. Une étude du choix optimal de ce paramètre a été menée sur un exemple numérique. Cette méthode fournit de bons résultats mais nécessite néanmoins l'utilisation d'un nombre important de mesures à l'intérieur du système étudié, ce qui peut être rédhibitoire quant à l'utilisation de cette approche. En effet, si on considère l'exemple de l'échangeur de chaleur présenté dans ce mémoire, il est illusoire de vouloir placer un grand nombre de capteurs au sein même de l'échangeur. Conscient de cet inconvénient de l'approche, nous avons étudié l'influence du nombre de capteurs sur la qualité de l'estimation ainsi que l'influence du placement de ces capteurs au sein du système.

La seconde approche développée fait appel à des techniques d'identification à erreur de sortie et s'applique aux EDP pouvant être réécrites sous la forme d'un modèle de Roesser discret à deux dimensions. Ainsi, après avoir rappelé la définition d'un modèle de Roesser, nous avons proposé un algorithme à erreur de sortie basé sur le lien entre le modèle de Roesser et la représentation linéaire fractionnaire. L'efficacité de l'approche proposée a été illustrée par un exemple numérique et comparée à une approche basée sur une technique des sous-espaces. Contrairement à l'approche des moments partiels réinitialisés, l'algorithme proposée ne nécessite que la connaissance des signaux d'entrée et de sortie et bénéficie des avantages des approches à erreur de sortie, à savoir une estimation non biaisée quelque soit la nature du bruit (bruit qui doit néanmoins être de moyenne nulle). Il souffre toutefois des mêmes inconvénients, c'est-à-dire la non garantie de convergence vers l'optimum global et la nécessaire phase d'initialisation des paramètres. Cette dernière peut être résolue en utilisant l'approche basée sur les moments partiels réinitialisés, même biaisée, pour initialiser l'approche à erreur de sortie.

Finalement, le couplage des deux approches a été testé en simulation sur un problème d'estimation des paramètres d'un échangeur de chaleur à cocourant. En supposant possible de disposer d'une mesure interne à l'échangeur, l'approche des moments partiels réinitialisés a été utilisée pour fournir une estimation initiale à l'algorithme à erreur de sortie. Des simulations de Monte Carlo montrent l'efficacité de l'approche proposée.

#### Perspectives

L'approche par moments partiels réinitialisés souffre du fait qu'il est nécessaire de disposer de mesures au sein du système étudié. Si dans le cas de l'échangeur de chaleur proposé dans le dernier chapitre, cette approche ne semble pas très adaptée, elle peut l'être pour d'autres problèmes. On pense, par exemple, au suivi de pollution sur une zone géographique sur laquelle il existe différents points de mesures. On peut envisager d'utiliser cette approche pour tenter de définir le nombre et les emplacements optimaux de capteurs sur la zone à étudier pour parvenir aux objectifs souhaités.

La modélisation des équations aux dérivées partielles par un modèle de Roesser n'a été abordée ici que dans le cas à deux paramètres. Une extension au cas nD devra être menée pour les géométries plus complexes que celles vue dans ce travail. Il pourra alors être opportun de développer d'autres méthodes que les moments partiels réinitialisés pour initialiser l'algorithme d'identification à erreur de sortie.

Enfin, les travaux développés dans cette thèse ont été validés uniquement sur des exemples numériques. Une étape importante consistera à confronter ces approches sur des données expérimentales, en particulier sur des échangeurs de chaleur. Dans ce cadre, un des objectifs est la détection d'un éventuel encrassement d'une des voies de l'échangeur. Les outils que nous proposons doivent pouvoir permettre cette détection, soit en suivant l'évolution des paramètres, soit en générant un résidu issu d'une comparaison entre les données mesurées sur le processus et les sorties d'un modèle " sain " préalablement identifié. Dans le premier cas, il faut envisager une formulation récursive des algorithmes pour suivre les paramètres en ligne ou bien faire une identification sur une fenêtre d'observation glissante. L'intérêt de suivre l'évolution des paramètres plutôt qu'une erreur de sortie, même si cela peut être plus compliqué, serait de pouvoir indiquer quel coté de l'échangeur est encrassé.

#### ANNEXE A

## ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE DES PRODUITS DE MOMENTS PARTIELS

En considérant un calcul des moments par la méthode des rectangles (2.40), l'espérance mathématique des produits de moments partiels d'un bruit blanc peut être approchée de la manière suivante

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{1,1}^{v}\right\} \approx \sigma^4 \Delta x^8 \Delta t^8 \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^4 \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} k^4,$$
(A.1)

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{3}}\right\} \approx \sigma^{4}\Delta x^{7}\Delta t^{6}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}l^{3}(\mathcal{T}-1)^{3},\tag{A.2}$$

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,0}^{v}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{3}}\right\} \approx \sigma^{4}\Delta x^{6}\Delta t^{7}(\mathcal{X}-1)^{3}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}k^{3},\tag{A.3}$$

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,0}^{v}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{3}}\right\} \approx \sigma^{4}\Delta x^{7}\Delta t^{7}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}l^{3}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}k^{3},\tag{A.4}$$

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}^{2}\mathcal{M}_{1,1}^{v}\right\} \approx \sigma^{4} \Delta x^{6} \Delta t^{4} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{2} (\mathcal{T}-1)^{2},$$
(A.5)

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,0}^{v}^{2}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{2}}\right\} \approx \sigma^{4}\Delta x^{4}\Delta t^{6}(\mathcal{X}-1)^{2}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}k^{2},\tag{A.6}$$

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,0}^{v^{2}}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{2}}\right\} \approx \sigma^{4} \Delta x^{6} \Delta t^{6} \sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1} l^{2} \sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1} k^{2},$$
(A.7)

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}\mathcal{M}_{-,0}^{v}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{2}}\right\}\approx\sigma^{4}\Delta x^{5}\Delta t^{5}(\mathcal{X}-1)^{2}(\mathcal{T}-1)^{2},\qquad(A.8)$$

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{0,-}^{v}\mathcal{M}_{0,0}^{v}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{2}}\right\} \approx \sigma^{4}\Delta x^{6}\Delta t^{5}\sum_{l=0}^{\mathcal{X}-1}l^{2}(\mathcal{T}-1)^{2},\tag{A.9}$$

$$\mathbb{E}\left\{\mathcal{M}_{-,0}^{v}\mathcal{M}_{0,0}^{v}\mathcal{M}_{1,1}^{v^{2}}\right\} \approx \sigma^{4}\Delta x^{5}\Delta t^{6}(\mathcal{X}-1)^{2}\sum_{k=0}^{\mathcal{T}-1}k^{2}.$$
 (A.10)

Notons de plus que

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^0 = I,$$
  

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^1 = \frac{(I-1)I}{2},$$
  

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^2 = \frac{(I-1)I(2I-1)}{6},$$
  

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^3 = \left(\frac{(I-1)I}{2}\right)^2,$$
  

$$\sum_{i=0}^{I-1} i^4 = \frac{(I-1)I(2I-1)(3I^2-3I-1)}{30}.$$
  
(A.11)

### ANNEXE B

### RAPPEL SUR LES MÉTHODES DES SOUS-ESPACES

Les méthodes des sous-espaces ont été suggérées pour l'identification des modèles d'état des systèmes 1D (Van Overschee et De Moor (1996)) et des systèmes 2D (Ramos *et al.* (2011)). Dans les sections suivantes, un rappel sur les méthodes des sous-espaces pour les systèmes 1D et 2D est proposé.

### **B.1** Rappel sur l'algorithme *N*4*SID* : cas 1*D*

Rappelons tout d'abord qu'un système 1D s'écrit de la manière suivante

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k),$$
  
$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$
  
(B.1)

avec les matrices du système  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ . Introduisons la première équation du système (B.1) dans la deuxième équation, alors la sortie du système peut s'écrire de la manière suivante

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k),$$
  

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k+1),$$
  

$$\vdots$$
  

$$\mathbf{y}(k+i-1) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{x}(k) + \mathbf{C}\mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \cdots$$
  

$$+ \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+i-2) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k+i-1).$$
  
(B.2)

En outre,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+i-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}_{i}(k)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}_{i}} \mathbf{x}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{i-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{i-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_{i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(k+i-1) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{i}(k)}.$$
(B.3)

On suppose que on a accès à un nombre des données de mesure suffisamment grand. Alors on définit l'équation suivante

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}(k) + \mathbf{H}_i \mathbf{U}(k), \tag{B.4}$$

avec

$$\mathbf{X}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) & \cdots & \mathbf{x}(k+j-1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{U}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i(k) & \cdots & \mathbf{u}_i(k+j-1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Y}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i(k) & \cdots & \mathbf{y}_i(k+j-1) \end{bmatrix}.$$
(B.5)

Ainsi, les matrices futures et passées des états et des données entrée-sortie sont définies par

$$\mathbf{X}_{f} = \mathbf{X}(i), \qquad \mathbf{X}_{p} = \mathbf{X}(0),$$
$$\mathbf{U}_{f} = \mathbf{U}(i), \qquad \mathbf{U}_{p} = \mathbf{U}(0), \qquad (B.6)$$
$$\mathbf{Y}_{f} = \mathbf{Y}(i), \qquad \mathbf{Y}_{p} = \mathbf{Y}(0).$$

Ces matrices vérifient les représentations ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_p &= \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_p + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_p, \\ \mathbf{Y}_f &= \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X}_f + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_f, \\ \mathbf{X}_f &= \mathbf{A}^i \mathbf{X}_p + \Delta_i \mathbf{U}_p, \end{aligned} \tag{B.7}$$

avec  $\Delta_i = [\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{i-2}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{AB} \ \mathbf{B}].$ 

D'après Van Overschee et De Moor (1996), l'algorithme N4SID se résume en 3 étapes :

• Première étape : Calculer la projection oblique  $\mathcal{O}_i$ 

On définit  $\mathcal{O}_i$  la projection oblique donnée par

$$\mathcal{O}_i = \mathbf{Y}_f / \mathbf{U}_f \mathbf{W}_p, \tag{B.8}$$

où  $\mathbf{Y}_f/_{\mathbf{U}_f}$  est la projection de l'espace ligne de  $\mathbf{Y}_f$  sur l'espace ligne de  $\mathbf{U}_f$  et  $\mathbf{W}_p^T = [\mathbf{U}_p \ \mathbf{Y}_p].$ 

Cette matrice est obtenue par la décomposition RQ du  $[\mathbf{U}_f \ \mathbf{W}_p \ \mathbf{Y}_f]^T$ 

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_f \\ \mathbf{W}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{bmatrix}, \quad (B.9)$$

Il est prouvé dans (Van Overschee et De Moor (1996)) que

$$\mathcal{O}_i = \mathbf{R}_{32} \mathbf{R}_{22}^{\dagger} \mathbf{W}_p. \tag{B.10}$$

où  $R_{22}^{\dagger}$  représente la pseudo inverse de  $R_{22}$ .

• Deuxième étape : Estimer les matrices d'état A et C.

Pour cette étape, on commence par une décomposition en valeur singulière

$$\mathcal{O}_{i} = \begin{bmatrix} U_{1} & U_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1} & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1}^{T}\\ V_{2}^{T} \end{bmatrix},$$
  
$$= U_{1}S_{1}V_{1}^{T},$$
  
$$= \boldsymbol{\Gamma}_{i}\mathbf{X}_{f}.$$
 (B.11)

Ainsi, on détermine  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_i^{\perp}$ 

$$\Gamma_i = U_1 S_1^{1/2} , \quad \Gamma_i^{\perp} = U_1^T.$$
 (B.12)

Il est à noter que  $\Gamma_i^{\perp}\Gamma_i = 0$ . À partir de  $\Gamma_i$ , on estime les matrices **A** et **C** 

$$\hat{\mathbf{C}} = \text{les } \ell \text{ premières lignes de } \hat{\mathbf{\Gamma}}_i^h,$$

$$\hat{\mathbf{A}} = (\hat{\mathbf{\Gamma}}_i)_b^{\dagger} (\hat{\mathbf{\Gamma}}_i)_t,$$
(B.13)

où  $(\hat{\Gamma}_i)_b$  et  $(\hat{\Gamma}_i)_t$  représentent la matrice  $\hat{\Gamma}_i$  sans les  $\ell$  dernières lignes et les  $\ell$  premières lignes, respectivement.

• Troisième étape : Estimer les matrices d'état **B** et **D**.

À partir de la deuxième équation entrée-sortie du système (B.7), on constate que

$$\Gamma_i^{\perp} \mathbf{Y}_f = \Gamma_i^{\perp} \mathbf{H}_i \mathbf{U}_f. \tag{B.14}$$

Ainsi,

$$\Gamma_i^{\perp} \mathbf{Y}_f \mathbf{U}_f^{\dagger} = \Gamma_i^{\perp} \mathbf{H}_i. \tag{B.15}$$

Pour simplifier les notations, la partie gauche de l'équation précédente sera notée  $\mathcal{N}$  et  $\Gamma_i^{\perp}$  par  $\mathcal{L}$ 

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{0} \quad \mathcal{N}_{1} \quad \cdots \quad \mathcal{N}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{0} \quad \mathcal{L}_{1} \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CB} & \mathbf{D} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA^{i-2}B} \quad \mathbf{CA^{i-3}B} \quad \cdots \quad \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$
(B.16)

Afin de déterminer  $\hat{\mathbf{B}}$  et  $\hat{\mathbf{D}}$ , cette équation peut être reformulée comme suit

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{0} \\ \mathcal{N}_{1} \\ \vdots \\ \mathcal{N}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{0} \quad \mathcal{L}_{1} \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{i-2} \quad \mathcal{L}_{i-1} \\ \mathcal{L}_{1} \quad \mathcal{L}_{2} \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{i-1} \quad \times \\ \mathcal{L}_{2} \quad \mathcal{L}_{3} \quad \cdots \quad \times \quad \times \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathcal{L}_{i-1} \quad \times \quad \cdots \quad \times \quad \times \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} I_{\ell} & 0_{\ell \times n_{h}} \\ 0_{\ell(i-1) \times \ell_{h}} \quad \bar{\Gamma}_{i-1}^{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{B}_{1} \end{bmatrix}.$$
(B.17)

Une démonstration bien détaillée de cet algorithme est donnée dans (Van Overschee et De Moor, 1996, Chapter 2).

### **B.2** Rappel sur l'algorithme N4SID : cas 2D

Dans cette section, on considère un modèle causal, récursif et séparable en dénominateur. Ce modèle est caractérisé par la représentation d'état suivante

$$\mathbf{x}_{l+1,k}^{h} = \mathbf{x}^{h}(l+1,k) = \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{A}_{2}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{B}_{1}\mathbf{u}(l,k),$$
  

$$\mathbf{x}_{l,k+1}^{v} = \mathbf{x}^{v}(l,k+1) = +\mathbf{A}_{4}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{B}_{2}\mathbf{u}(l,k),$$
  

$$\mathbf{y}_{l,k} = \mathbf{y}(l,k) = \mathbf{A}_{1}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{A}_{2}\mathbf{x}^{h}(l,k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(l,k),$$
  
(B.18)

où  $l \in \{0..N_x\}$  et  $k \in \{0..N_t\}$ ,  $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{R}^{n_h \times n_h}$ ,  $\mathbf{A}_3 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_h}$ ,  $\mathbf{A}_4 \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v}$ ,  $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_h \times m}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_v \times m}$ ,  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^{\ell \times n_h}$ ,  $\mathbf{C}_2 \in \mathbb{R}^{\ell \times n_v}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ .

L'algorithme N4SID pour les systèmes 2D est une extension d'un algorithme 1D présenté par Van Overschee et De Moor (1996). En se basant sur le développement introduit dans la section précédente, Ramos *et al.* (2011) ont proposé cette technique. L'idée principale de cet algorithme est de transformer le système sous une forme similaire à celle présentée dans (B.7).

Pour présenter cet algorithme, on commence par introduire les matrices futures et passées d'état pour  $k = \{0, 1, ..., N_t\}$  et  $N_x = 2i + j - 2$ .

$$\begin{aligned} X_{p}^{h}(k) &= \begin{bmatrix} x_{0,k}^{h} \ x_{1,k}^{v} \ \dots \ x_{j-1,k}^{h} \end{bmatrix}, \qquad X_{f}^{h}(k) &= \begin{bmatrix} x_{i,k}^{h} \ x_{i+1,k}^{h} \ \dots \ x_{i+j-1,k}^{h} \end{bmatrix}, \\ X_{p}^{v}(k) &= \begin{bmatrix} x_{0,k}^{v} \ x_{1,k}^{v} \ \dots \ x_{j-1,k}^{v} \ x_{j,k}^{v} \ \dots \ x_{j,k}^{v} \ x_{j,k}^{v} \ \dots \ x_{j,k}^{v} \end{bmatrix}, \qquad X_{f}^{v}(k) &= \begin{bmatrix} x_{i,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j-1,k}^{v} \end{bmatrix}, \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \vdots \ x_{i-1,k}^{v} \ x_{i,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j-2,k}^{v} \end{bmatrix}, \qquad X_{f}^{v}(k) &= \begin{bmatrix} x_{i,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j-1,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ \dots \ x_{i+j,k}^{v} \ x_{i+1,k}^{v} \ x$$

De même, on définit les matrices futures et passées des données entrées-sorties par

$$U_{p}^{h}(k) = \begin{bmatrix} u_{0,k} & u_{1,k} & \dots & u_{j-1,k} \\ u_{1,k} & u_{2,k} & \dots & u_{j,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{i-1,k} & u_{i,k} & \dots & u_{i+j-2,k} \end{bmatrix}, \quad Y_{p}^{h}(k) = \begin{bmatrix} y_{0,k} & y_{1,k} & \dots & y_{j-1,k} \\ y_{1,k} & y_{2,k} & \dots & y_{j,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{i-1,k} & y_{i,k} & \dots & u_{i+j-2,k} \end{bmatrix},$$
$$U_{f}^{h}(k) = \begin{bmatrix} u_{i,k} & u_{i+1,k} & \dots & u_{i+j-1,k} \\ u_{i+1,k} & u_{i+2,k} & \dots & u_{i+j,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2i-1,k} & u_{2i,k} & \dots & u_{2i+j-2,k} \end{bmatrix}, \quad Y_{f}^{h}(k) = \begin{bmatrix} y_{i,k} & y_{i+1,k} & \dots & y_{i+j-1,k} \\ y_{i+1,k} & y_{i+2,k} & \dots & y_{i+j,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{2i-1,k} & y_{2i,k} & \dots & y_{2i+j-2,k} \end{bmatrix}.$$
(B.20)

Définissons les matrices finales futures et passées d'état vertical par

$$\mathbf{X}_{p}^{v} = \left[ X_{p}^{v}(0) \ X_{p}^{v}(1) \ \cdots \ X_{p}^{v}(N_{t}) \right], \qquad \mathbf{X}_{f}^{v} = \left[ X_{f}^{v}(0) \ X_{f}^{v}(1) \ \cdots \ X_{f}^{v}(N_{t}) \right], \qquad (B.21)$$

et les matrices finales futures et passées d'état horizontal par

$$\mathbf{X}_{p}^{h} = \left[ X_{p}^{h}(0) \ X_{p}^{h}(1) \ \cdots \ X_{p}^{h}(N_{t}) \right], \qquad \mathbf{X}_{f}^{h} = \left[ X_{f}^{h}(0) \ X_{f}^{h}(1) \ \cdots \ X_{f}^{h}(N_{t}) \right]. \tag{B.22}$$

Les matrices finales futures et passées d'entrée horizontale sont données par

$$\mathbf{U}_{p}^{h} = \begin{bmatrix} U_{p}^{h}(0) & U_{p}^{h}(1) \dots & U_{p}^{h}(N_{t}) \\ U_{p}^{h}(0) & \dots & U_{p}^{h}(N_{t}-1) \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & U_{p}^{h}(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_{f}^{h} = \begin{bmatrix} U_{f}^{h}(0) & U_{f}^{h}(1) \dots & U_{f}^{h}(N_{t}) \\ U_{f}^{h}(0) & \dots & U_{f}^{h}(N_{t}-1) \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & U_{f}^{h}(0) \end{bmatrix}, \quad (B.23)$$

et les matrices finales futures et passées de sortie horizontale sont présentées par

$$\mathbf{Y}_{p}^{h} = \left[ Y_{p}^{h}(0) \ Y_{p}^{h}(1) \dots Y_{p}^{h}(N_{t}) \right], \qquad \mathbf{Y}_{f}^{h} = \left[ Y_{f}^{h}(0) \ Y_{f}^{h}(1) \dots Y_{f}^{h}(N_{t}) \right]. \tag{B.24}$$

Similairement au cas 1D, mais avec des matrices plus compliquées, on détermine les relations suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{p}^{h} &= \mathbf{\Gamma}_{i}^{h} \mathbf{X}_{p}^{h} + H_{i}^{h} \mathbf{U}_{p}^{h} = \mathbf{\Gamma}_{i}^{h} \mathbf{X}_{p}^{h} + [H_{T}^{h} \ G_{T}^{hv} C^{v}] \mathbf{U}_{p}^{h}, \\ \mathbf{Y}_{f}^{h} &= \mathbf{\Gamma}_{i}^{h} \mathbf{X}_{f}^{h} + H_{i}^{h} \mathbf{U}_{f}^{h} = \mathbf{\Gamma}_{i}^{h} \mathbf{X}_{f}^{h} + [H_{T}^{h} \ G_{T}^{hv} C^{v}] \mathbf{U}_{f}^{h}, \\ \mathbf{X}_{f}^{h} &= A_{1}^{i} \mathbf{X}_{p}^{h} + \Delta_{i}^{h} \mathbf{U}_{f}^{h} = A_{1}^{i} \mathbf{X}_{p}^{h} + [C_{i}^{h} \ \Phi_{i}^{hv} C^{v}] \mathbf{U}_{f}^{h}, \end{aligned} \tag{B.25}$$

avec

$$\begin{split} \mathbf{\Gamma}_{i}^{h} &= \begin{bmatrix} C_{1}^{T} & (C_{1}A_{1})^{T} & \cdots & (C_{1}A_{1}^{i-1})^{T} \end{bmatrix}^{I}, \quad \Phi_{i}^{hv} &= \begin{bmatrix} A_{1}^{i-1}A_{2} & A_{1}^{i-2}A_{2} & \cdots & A_{2} \\ C^{v} &= \begin{bmatrix} I_{i} \otimes B_{2} & I_{i} \otimes A_{4}B_{2} & \cdots & I_{i} \otimes A_{4}^{N_{t}-1}B_{2} \end{bmatrix}, \quad C_{i}^{h} &= \begin{bmatrix} A_{1}^{i-1}B_{1} & A_{1}^{i-2}B_{1} & \cdots & B_{1} \end{bmatrix}, \\ G_{T}^{hv} &= \begin{bmatrix} C_{2} & & & \\ C_{1}A_{2} & C_{2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{1}A^{i-2}A_{2} & C_{1}A^{i-3}A_{2} & \cdots & C_{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_{T}^{h} &= \begin{bmatrix} C_{1}B_{1} & D & & \\ C_{1}B_{1} & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ C_{1}A^{i-2}B_{1} & C_{1}A^{i-3}B_{1} & \cdots & D \end{bmatrix}. \\ (B.26) \end{split}$$

Une démonstration détaillée dans (Ramos *et al.* (2011)) explique bien le démarche pour obtenir le système (B.25).

L'algorithme  $N4SID \ 2D$  peut se résumer en 4 étapes :

• Première étape : Calculer la projection oblique  $\mathbf{Y}_{f}^{h}/_{\mathbf{U}_{f}^{h}}\mathbf{W}_{p}^{h} = \mathcal{O}_{i}^{h}$ .

La projection oblique, associée au variable  $\mathcal{O}_i^h$ , peut être calculée en utilisant la décomposition RQ du  $[\mathbf{U}_f^h \mathbf{U}_p^h \mathbf{Y}_p^h \mathbf{Y}_f^h]^T$ 

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{f}^{h} \\ \mathbf{W}_{p}^{h} \\ \mathbf{Y}_{f}^{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ R_{21} & R_{22} & \mathbf{0} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1}^{T} \\ Q_{2}^{T} \\ Q_{3}^{T} \end{bmatrix}, \quad (B.27)$$
où  $\mathbf{W}_{p}^{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{p}^{h} \\ \mathbf{Y}_{p}^{h} \end{bmatrix}.$ 

Ainsi,

$$\mathcal{O}_i^h = R_{32} R_{22}^\dagger \mathbf{W}_p^h. \tag{B.28}$$

• Deuxième étape : Estimer les matrices d'état  $A_1$  et  $C_1$ .

La décomposition en valeur singulière du matrice  $\mathcal{O}_i^h$  permet de calculer  $\hat{\Gamma}_i^h$ . En effet,

$$\mathcal{O}_{i}^{h} = \begin{bmatrix} U_{1}U_{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1}^{T} \\ V_{2}^{T} \end{bmatrix},$$
$$= \underbrace{U_{1}S_{1}^{\frac{1}{2}}}_{\hat{\Gamma}_{i}^{h}} S_{1}^{\frac{1}{2}}V_{1}^{T}.$$
(B.29)

Ainsi, l'estimation de  $C_1$  et  $A_1$  est donnée par

$$\hat{C}_1 = \text{ les } \ell \text{ premières lignes de } \hat{\Gamma}_i^h, 
\hat{A}_1 = (\hat{\Gamma}_i^h)_b^{\dagger} (\hat{\Gamma}_i^h)_t,$$
(B.30)

où  $(\hat{\Gamma}_i^h)_b$  et  $(\hat{\Gamma}_i^h)_t$  présentent la matrice  $\hat{\Gamma}_i^h$  sans les  $\ell$  dernières lignes et les  $\ell$  premières lignes, respectivement.

• Troisième étape : Estimer les matrices d'état  $B_1$  et D.

Cette étape consiste en premier lieu à calculer la matrice  $H_i^h$ , puis extraire  $H_T^h$  et enfin calculer  $\hat{B}_1$  et  $\hat{D}$ .

La matrice  $H_i^h = \begin{bmatrix} H_T^h & G_T^{hv} C^v \end{bmatrix}$  est déterminée à partir de la décomposition RQ (B.27)

$$H_i^h = (R_{31} - R_{32}R_{22}^{\dagger}R_{21})R_{11}^{-1}.$$
 (B.31)

Ainsi, on peut calculer les deux blocs  $H_T^h$  et  $G_T^{hv}C^v$ . Il est prouvé dans (Ramos et al. (2011)) que  $(\hat{\Gamma}_i^h)^{\perp} = (U_h)^{\perp}$ . D'où, on calcule

$$\mathcal{N} = [(\hat{\Gamma}_i^h)^{\perp}]^T [\mathbf{Y}_f^h - G_T^{hv} \mathcal{C}^v \mathbf{U}_f^h(mi+1:\bar{m}i,:)] [\mathbf{U}_f^h(1:mi,:)]^{\dagger},$$
  
=  $\begin{bmatrix} \mathcal{L}_0 \quad \mathcal{L}_1 \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{i-1} \end{bmatrix} H_i^h,$ (B.32)

où  $\bar{m} = m(N_t + 1)$ .

Cette matrice  $\mathcal{M}$  peut être réarrangée de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{0} \\ \mathcal{N}_{1} \\ \vdots \\ \mathcal{N}_{i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{0} \quad \mathcal{L}_{1} \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{i-2} \quad \mathcal{L}_{i-1} \\ \mathcal{L}_{1} \quad \mathcal{L}_{2} \quad \cdots \quad \mathcal{L}_{i-1} \quad \times \\ \mathcal{L}_{2} \quad \mathcal{L}_{3} \quad \cdots \quad \times \quad \times \\ \vdots \quad \vdots \quad \cdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \mathcal{L}_{i-1} \quad \times \quad \cdots \quad \times \quad \times \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_{\ell} & 0_{\ell \times n_{h}} \\ 0_{\ell(i-1) \times \ell_{h}} \quad \hat{\Gamma}_{i-1}^{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{D} \\ \hat{B}_{1} \end{bmatrix},$$
(B.33)

où  $\hat{\Gamma}_{i-1}^{h}$  représente la matrice  $\hat{\Gamma}_{i}^{h}$  sans le bloc  $\mathbf{C}_{1}\mathbf{A}_{1}^{i-1}$ . Cette équation est linéaire par rapport à  $\hat{D}$  et  $\hat{B}_{1}$  et elle pourra être résolue par les moindres carrés.

• Quatrième étape : Estimer les matrices d'état  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  et  $C_4$ .

Déterminons la matrice  $G_T^{hv} \mathcal{C}^v = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 & \cdots & G_{N_t} \end{bmatrix}$  à partir de  $H_i^h$ . Ainsi, on extrait les *m* colonnes de chaque matrices  $G_k$  et construisons la matrice **G** 

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_1(:, 1:m) & G_2(:, 1:m) & \cdots & G_{N_t}(:, 1:m) \end{bmatrix}, \\
= \begin{bmatrix} \frac{h_1^v & h_2^v & h_3^v & \cdots & h_{N_t}^v}{\mathcal{F}_{i-1,N_t}^{hv}} \end{bmatrix}, \\
= \begin{bmatrix} \frac{h_1^v & h_2^v & h_3^v & \cdots & h_{N_t}^v}{\Gamma_{i-1}^h A_2 \mathcal{C}_{N_t}^v} \end{bmatrix},$$
(B.34)

À l'aide des paramètres de Markov $h_i^v \; (i\!=\!1,\,2,\!...,\,N_t)$  , on construit la matrice de Hankel

$$\mathbf{H}_{i,N_{t}}^{v} = \begin{bmatrix}
h_{1}^{v} & h_{2}^{v} & \cdots & h_{N_{t}-i+1}^{v} & \cdots & h_{N_{t}}^{v} \\
h_{2}^{v} & h_{3}^{v} & \cdots & h_{N_{t}-i+2}^{v} & \cdots & h_{N_{t}}^{v} \\
h_{3}^{v} & h_{4}^{v} & \cdots & h_{N_{t}-i+3}^{v} & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
h_{i}^{v} & h_{i+1}^{v} & \cdots & h_{N_{t}}^{v} & & \\
\end{bmatrix}, \\
= \begin{bmatrix}
U_{v}U_{v}^{\perp}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
S_{v} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
V_{v}^{T} \\
(V_{v}^{\perp})^{T}\end{bmatrix}, \\
= \underbrace{U_{v}S_{v}^{\frac{1}{2}}}_{\hat{\Gamma}_{i}^{v}} \underbrace{S_{v}^{\frac{1}{2}}V_{v}^{T}}_{\hat{C}_{N_{t}}^{v}}.
\end{aligned}$$
(B.35)

Ainsi,

$$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{i}^{v} = \begin{bmatrix} \hat{C}_{2} \\ (\hat{\boldsymbol{\Gamma}}_{i}^{v})_{b} \hat{A}_{4} \end{bmatrix}, \qquad (B.36)$$
$$\hat{C}_{N_{t}}^{v} = \begin{bmatrix} \hat{B}_{2} & \hat{A}_{4} \hat{B}_{2} & \cdots & \hat{A}_{4}^{M-1} \hat{B}_{2} \end{bmatrix},$$

où  $(\hat{\Gamma}_i^v)_b$  est la matrice  $\hat{\Gamma}_i^v$  sans les  $\ell$  dernières lignes. L'estimation de  $A_2$ ,  $A_4$ ,  $B_2$  et  $C_2$  est donnée par

$$\hat{C}_{2} = \text{les } \ell \text{ premières lignes de } \Gamma_{i}^{v}, \\
\hat{A}_{4} = (\hat{\Gamma}_{i}^{v})_{b}^{\dagger} (\hat{\Gamma}_{i}^{v})_{t}, \\
\hat{A}_{2} = (\hat{\Gamma}_{i-1}^{h})^{\dagger} \mathcal{F}_{i-1,N_{t}}^{hv} (\hat{C}_{N_{t}}^{v})^{\dagger}, \\
\hat{B}_{2} = \text{les } m \text{ premières colonnes de } \hat{C}_{N_{t}}^{v},$$
(B.37)

où  $(\hat{\Gamma}_i^v)_t$  est la matrice  $\hat{\Gamma}_i^v$  sans les  $\ell$  premières lignes.

## Bibliographie

- B. ABDELMADJID, N. MAAMRI et J-C. TRIGEASSOU : The moments in control : A tool for analysis reduction and design. *International Journal of Computers, Communiciation and Control*, 2:82–103, 2007.
- B. ABDELMADJID, N. MAAMRI et J-C. TRIGEASSOU : Design of a MIMO PID robust controller using moment based approach. *International Journal* of Computers, Communiciation and Control, 3:125–134, 2008.
- Y. BACHALANY, S. RIACHY, M. MBOUP et J.-P. RICHARD : Différenciation numérique multivariable II : Projection orthogonale et filtrage à RIF. *In 6e Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Nancy, France, June 2010.
- H.T. BANKS, J.M. CROWLEY et K. KUNISCH : Cubic spline approximation techniques for parameter estimation in distributed systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 28:773–786, 1983.
- J.L. BATTAGLIA et L. PUIGSEGU : Représentation non entière du transfert de chaleur par diffusion. Utilité pour la caractérisation et le contrôle non destructif thermique. *International Journal of Thermal Sciences*, 43:69–85, 2004.
- P. BORNE, M. BENREJEB et J. HAGGÉGE : Les réseaux de neurones : présentation et applications. Méthode et pratiques de l'ingénieur. Automatique, 2007.
- N.K. BOSE : Problems and progress in multidimensional systems theory. *Proceedings of the IEEE*, 65, 1977.
- S. BOYD et L. VANDENBERGHE : *Convex optimization*. Cambridge University Press, 2004.
- R.N. BRACEWELL : Two-dimensional imaging. In Prentice-Hall, Inc, 1995.

- H. BREZIS : Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.
- I.N. BRONSHTEIN, K.A. SEMENDYAYEV, G. MUSIOL et H. MUEHL : Handbook of Mathematics. Fifth edition. Springer, 2007.
- C. BRUNI, A. ISIDORI et A. RUBERTI : A method of realisation based on the moments of the impulse-response matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 203-204:14–2, 1969.
- M. D. BUHMANN : Radial Basis Functions Theory and Implementations. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, February 2009.
- G. CASELLA et L. BERGER : Statistical Inference, 2nd Edition. 2002.
- C. CHEN, J. TSAI et L. SHIEH : Modeling of variable coefficient Roesser's model for systems described by second order partial differential equation. *Circuit system and signal processing*, 22:423–463, 2003.
- J. COONEY, C. RIVEROL et V. NAPOLITANO : On-line fouling detection in plate heat exchangers. *International Journal of Heat Exchangers*, 6:293– 304, 2005.
- L. CORDIER et M. BERGMANN : *Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres.* Ecole de printemps OCET Optimisation et Contrôle des Ecoulements et des Transferts, 2006.
- R. CURTAIN et K. MORRIS : Transfer functions of distributed parameter systems : A tutorial. *Automatica*, 45:1101–1116, 2009.
- M. DALLA, A. GERMANI et A. NARDECCHIA : 2-D filtering for images corrupted by non-Gaussian noise. In Proceedings of the IEEE Conference Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- J.E. DENNIS et R.S. SHNABEL : Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. *Society for industrial and applied mathematics*, 1996.
- D.GVOZDENAC : Heat exchangers basics design applications, chapter analytical solution of dynamic response of heat exchanger. *InTech*, pages 53–78, 2012.
- M. DYMKOV, K. GALKOWSKI, E. ROGERS, V. DYMKOU et S. DYMKOU : Modeling and control of a sorption process using 2D systems theory. *Multidimensional (nD) Systems (nDs), 2011 7th International Workshop on*, pages 1–5, 2011.

- W.C. ELMORE : The transient of damped linear networks with particular regard to wideband amplifier. *Applied physics*, 55-63:19, 1948.
- P. EYKHOFF : System identification : parameter and state estimation. Wiley, London, 1974.
- M. FARAH, G. MERCÈRE, R. OUVRARD et T. POINOT : Combining leastsquares and gradient-based algorithms for the identification of a co-current flow heat exchanger. *International Journal of Control*, pages 1–13, 2016.
- M. FARAH, G. MERCÈRE, R. OUVRARD, T. POINOT et J-D. GABANO : Reinitialized partial moments for the identification of the heat equation parameters. *European Control Conference*, 2015.
- M. FARAH, G. MERCÈRE, R. OUVRARD, T. POINOT et J. RAMOS : Identification of 2D Roesser models by using linear fractional representations. *In European Control Conference*, 2014.
- C.A.J. FLETCHER : Computational galerkin methods, 1st ed. Springer, New York, 1984.
- E. FORNASINI et G. MARCHESINI : State space realization theory of twodimensional filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 4:484–492, 1976.
- E. FORNASINI et G. MARCHESINI : Computation of reachable and observable realizations of spatial filters. *International Journal of Control*, 25:621–635, 1977.
- E. FORNASINI et G. MARCHESINI : Doubly-indexed dynamical systems : state-space models and structural properties. *Mathematical Systems Theory*, 12:59–72, 1978.
- R. FRAANJE et M. VERHAEGEN : A spatial canonical approach to multidimensional state-space identification for distributed parameter systems. In Proceedings of the International Workshop on Multidimensional systems, Wuppertal, Germany, July 2005.
- J.-D. GABANO et T. POINOT : Fractional modelling applied to heat conductivity and diffusivity estimation. *Physica scripta*, T136, 2009.
- J.D. GABANO, T. POINOT, J.C. TRIGEASSOU et A. BENCHELLAL : Fractional modeling of diffusive interfaces : Application to thermal characteristics identification. *IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, 2008.

- K. GALKOWSKI : Elementary operation approach to state-space realizations of 2-D systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 44:120–129, 1997.
- H. GARNIER, M. MENSLER et A. RICHARD : Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76:1337–1357, 2003.
- H. GARNIER et L. WANG : Identification of continuous-time models from sampled data. Springer Verlag, London, UK, 2008.
- W.C. GIBSON : The method of moments in electromagnetics. Chapman & Hall/CRC. Taylor & Francis Group, 2008.
- L. GUO et S.A. BILLINGS : Identification of partial differential equation models for continuous spatio-temporal dynamical systems. *IEEE Transactions* on Circuits and Systems II : Express Briefs, 53:657 – 661, 2006.
- S. HANDIBAG et B.D. KARANDE : Laplace substitution method for solving partial differential equations involving mixed partial derivatives. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 78:973–979, 2012.
- D.M. HIMMELBLAU : Applied nonlinear programming. Mc Graw Hill, 1972.
- M. ICHISE, Y. NAGAYANAGI et T. KOJIMA : An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes. *Journal* of Electroanalytical Chemistry and Interfacial Electrochemistry, 33:253–365, 1971.
- F. INCROPERA, D. DEWITT, T. BERGMAN et A. LAVINE : Fundamentals of heat and mass transfer. Wiley, 2011.
- G. JONSSON, S. LALOT, O. PALSSON et B. DESMET : Use of extended Kalman filtering in detecting fouling in heat exchangers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50:2643–2655, 2007.
- T. KACZOREK : Two dimensional linear systems. Springer, 1985.
- S. KAKAC et H. LIU : *Heat Exchangers : selection, rating and thermal design.* CRC Press, 2002.
- H. KANOUN : Modélisation LPV de systèmes fractionnaires non-linéaires : Application à la caractérisation de systèmes thermiques et de supercondensateurs. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2013.
- W. KRAJEWSKI, A. LEPSCHY et U. VIARO : Model reduction by matching markov parameters, time moments and impulse-response energies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995.

- E. KREYSZIG : Advanced engineering mathematics, 9th edition. John Wiley & Sons, Inc, 2006.
- J. KUREK et M. ZAREMBA : Iterative learning control synthesis based on 2-D system theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38:121–125, 1993.
- I. LANDAU : Adaptive control : the model reference approach. Marcel Dekker,. Control and systems theory, 8, 1979.
- I.D. LANDAU : Identification et commande des systèmes. In Traité des nouvelles technologies, Hermès, Paris, 1988.
- B. LASHGARI, L. SILVERMAN et J. ABRAMATIC : Approximation of 2-D separable in denominator filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 30:107–121, 1983.
- L. LEE : Identification and robust control of linear parameter varying systems. Thèse de doctorat, University of California, Berkeley, California, USA, 1997.
- L. LEE et K. POOLLA : Identification of linear parameter varying systems via LFTs. In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, December 1996.
- L. LEE et K. POOLLA : Identification of linear parameter varying systems using non linear programming. *Journal of Dynamic Systems, Measurements* and Control, 121:71–78, 1999.
- H. LI et C. QI : Modeling of distributed parameter systems for applications : a synthesized review from time-space separation. *Journal of Process Control*, 20:891–901, 2010.
- J. LIENHARD : A heat transfer textbook. Prentice Hall, 1987.
- J. LIN, T. POINOT, H J.C. TRIGEASSOU, KABBAJ et J. FAUCHER : Modélisation et identification d'ordre non entier d'une machine asynchrone. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pages 53–56, 2000.
- Y. LIU : Grey box identification of distributed parameter systems. Thèse de doctorat, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2005.
- L. LJUNG : System identification. Theory for the user. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2nd édition, 1999.
- L. LJUNG : System identification toolbox for use with MATLAB. Mathworks, 5th edition, 2000.

- W.S. LU et A. ANTONIOU : Two-dimensional digital filters. *Electrical Engineering and Electronics*, 80, 1992.
- D.W. MARQUARDT : An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11:431–441, 1963.
- W. MARSZALEK : Two dimensional state-space discrete models for hyperbolic partial differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 8:11–14, 1984.
- M. MBOUP, C. JOIN et M. FLIESS : Numerical differentiation with annihilators in noisy environment. *Numerical Algorithms*, 50(4):439–467, 2009.
- T. MCKELVEY, A. HELMERSSON et T. RIBARITS : Data driven local coordinates for multivariable linear systems and their application to system identification. *Automatica*, 40:1629–1635, 2004.
- M. MENSLER : Analyse et étude comparative de méthodes d'identification à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle. Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, France, 1999.
- G. MERCÈRE, H. PALSSON et T. POINOT : Continuous-time linear parametervarying identification of a cross flow heat exchanger : a local approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 19:64–76, 2011.
- A. MITCHELL et D. GRIFFITHS : The finite difference method in partial differential equations. Wiley, Chichester, 1980.
- J. MORÉ : The Levenberg-Marquardt algorithm : Implementation and theory. Numerical Analysis, 1978.
- J. NOCEDAL et S. WRIGHT : Numerical Optimization. Springer-Verlag, 2006.
- S. OMATU et K. MATUMOTO : Parameter identification for distributed systems and its application to air pollution estimation. *International Journal of Systems Science*, 22:1993–2000, 1991.
- J.M. ORTEGA et W.C. RHEINBOLDT : Iterative solution of nonlinear equations in several variables. *Society for industrial and applied mathematics*, 2000.
- R. OUVRARD, E. TOHME, T. POINOT et A. ABCHE : Model based on the reinitialised partial moments for initialising output-error identification methods. *IET Control Theory and Applications*, 4-9:1725–1738, September 2010.

- R. OUVRARD et J. C. TRIGEASSOU : On embedded FIR filter models for identifying continuous-time and discrete-time transfer functions : the RPM approach. *International Journal of Control*, 84:616–632, 2011.
- H.M. PARK, T.H. KIM et D.H. CHO : Estimation of parameters in flow reactors using the Karhunen-Loeve decomposition. *Computers and Chemical Engineering*, 109-123:23, 1998.
- A. E. PEARSON : Least squares parameter identification on nonlinear differential input-output models. In Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control, pages 1831–1835, Austin, USA, 1988.
- R. PEYRET : Spectral methods for incompressible viscous flow. Applied Mathematical Sciences 148. Springer, 2002.
- T. POINOT et J.-C. TRIGEASSOU : Parameter estimation of fractional models : application to the modeling of diffusive systems. 15th IFAC World Congress, 2002.
- T. POINOT et J.-C. TRIGEASSOU : A method for modelling and simulation of fractional systems. *Special Issue on Fractional Signal Processing and Applications*, 83:2319–2333, 2003.
- L. PRONZATO et E. WALTER : Eliminating suboptimal local minimizers in nonlinear parameter estimation. *Technometrics* 43-4, pages 434–442, 2001.
- S. PURI et H. TAKEDA : Minimal realization of a symmetric transfer-function matrix using moments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 305-306:18–3, 1973.
- J. RAMOS : A subspace algorithm for identifying 2-D separable-indenominator filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 41:63–67, 1994.
- J. RAMOS, A. ALENANY, H. SHANG et P. LOPES DOS SANTOS : Subspace algorithms for identifying separable in denominator 2-D systems with deterministic inputs. *IET Control Theory and Applications*, 5:1748–1768, 2011.
- J. RAMOS et P. LOPES DOS SANTOS : Subspace system identification of separable-in-denominator 2-D stochastic systems. In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, December 2011.
- R. RANNACHER et B. VEXLER : A priori error estimates for the finite element discretization of elliptic parameter identification problems with pointwise measurement. SIAM Journal on Control and Optimization, 44:1844–1863, 2005.

- J RICHALET : Pratique de l'identification. Hermès. Paris, 1991.
- J. RICHALET, A. RAULT et R. POULIQUEN : Identification des processus par la méthode du modèle. *Gordon Breach*, 1971.
- R. ROESSER : A discrete-state-space model for linear image processing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 20:1–10, 1975.
- S. SAGARA, Z. Y. ZHAO et K. WADA : Parameter estimation of distributedparameter systems under noisy measurements. *Systems Science*, 16:57–70, 1990.
- D.C. SAHA et G.P. RAO : Identification of continuous dynamical systems -The Poisson moment functionals (PMF) approach. Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- J. SCHORSCH, H. GARNIER, M. GILSON et P. YOUNG : Instrumental variable methods for identifying partial differential equation models. *International Journal of Control*, 86:2325–2335, 2013a.
- J. SCHORSCH, M. GILSON et H. GARNIER : Identification of advectiondiffusion equation from a limited number of spatial locations. In International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, Caen, France, July 2013b.
- T. SÖDERSTRÖM : Identification of stochastic linear systems in presence of input noise. *Automatica*, 17:713–725, 1981.
- T. SÖDERSTRÖM et P. STOICA : *System identification*. Prentice Hall, New York, 1989.
- E. TOHME : Initialization of output error identification algorithms. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, France, http://www.lias-lab.fr/publications/14967/PhD\_thesis\_Elie\_TOHME\_2008.pdf, 2008.
- J. C. TRIGEASSOU : Identification et commande de processus mono-entrée mono-sortie par la méhode des moments - Expérimentation sur calculatrice programmable. Thèse de doctorat, Université de Nantes, France, 1980.
- J. C. TRIGEASSOU : Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires. Thèse d'etat, Université de Poitiers, France, 1987.
- J.C. TRIGEASSOU et T. POINOT : Identification des systèmes. Chap. Identification des systèmes à représentation continue - Application à l'estimation de paramétres physiques. Hermès. Paris, 2001.

- H. UNBEHAUEN et G. RAO : Identification of continuous systems. North Holland System and Control Series, 10, 1987.
- P. VAN OVERSCHEE et B. DE MOOR : Subspace identification for linear systems. Theory, implementation, applications. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- E. WALTER : Numerical methods and optimization : a consumer guide. Springer, 2014.
- E. WALTER et L. PRONZATO : Identification of parametric models from experimental data. Springer Verlag, 1997.
- A.V. WOUWER, C. RENOTTE, I. QUEINNEC et P.H. BOGAERTS : Transient analysis of a wastewater treatment biofilter-distributed parameter modelling and state estimation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 12:423–440, 2006.
- C. XIAO, V. SREERAM, W.Q LIU et A.N VENETSANOPOLOS : Identification and model reduction of 2-D systems via the extended impulse response gramians. *Automatica*, 34:93–101, 1998.
- P. YOUNG : In flight dynamic checkout : a discussion. *IEEE Transactions on Aerospace*, AS2:1106–1111, 1964.
- P. YOUNG : An instrumental variable method for real time identification of noisy process. *Automatica*, 6:271–287, 1970.
- P. YOUNG : Parameter estimation for continuous-time models. A survey. *Automatica*, 17:23–39, 1981.
- P. YOUNG : *Recursive estimation and time series analysis.* Springer Verlag, Berlin, 1984.
- P.C YOUNG : The refined instrumental variable method : unified estimation of discrete and continuous-time transfer function models. In APII-Journal Européen des Systèmes Automatisés, volume 42, pages 149–179, 2008.
- K. ZHOU, J. DOYLE et K. GLOVER : *Robust and optimal control.* Prentice Hall, 1996.

## ABSTRACT

In this manuscript, a special attention is paid to the identification of dynamic systems whose behavior is governed by partial differential equations (PDE). To achieve this, two identification algorithms are proposed. The first is an equation-error algorithm based on reinitialized partial moments whose function is to make the terms of partial derivatives disappear. The parameters of the resulting model can then be estimated by a least squares type approach. This method requires the selection of a synthesis parameter and a large number of sensors distributed over the entire geometry of the studied system. A study of the optimal choice of the synthesis parameters as well as of the influence of the number and distribution of the sensors is conducted on a numerical example. The second algorithm is associated to the PDE that can be presented by a Roesser model. Throughout this model, a fractional linear formulation is proposed and an output-error algorithm is exploited to estimate the model parameters. The initialization of this algorithm is achieved thanks to the results provided by the first algorithm. Finally, the efficiency of the two proposed approaches is shown through a numerical example of co-current heat exchanger.

**Keywords :** Partial differential equation; Parametric estimation; Reinitialized partial moment; Rosser model; Linear fractional representation.

# RÉSUMÉ

Dans ce manuscrit, une attention particulière est accordée à l'identification des systèmes dynamiques dont le comportement est régi par des équations aux dérivées partielles (EDP). Afin d'atteindre cet objectif, deux algorithmes d'identification sont proposés. Le premier est un algorithme à erreur d'équation basé sur les moments partiels réinitialisés qui permettent de faire disparaitre les termes de dérivées partielles. Les paramètres du modèle obtenu peuvent alors être estimés par des approches de type moindres carrés. Cette méthode nécessite le choix d'un paramètre de synthèse ainsi qu'un nombre important de capteurs répartis sur toute la géométrie du système étudié. Une étude du choix optimal du paramètre de synthèse ainsi que de l'influence du nombre et de la répartition des capteurs est menée sur un exemple numérique. Le second algorithme est propre aux EDP pouvant être décrites par un modèle de Roesser. Dans ce cas, une formulation linéaire fractionnaire est proposée et un algorithme à erreur de sortie est mis en œuvre pour estimer les paramètres du modèle. L'initialisation de cet algorithme est réalisée grâce aux résultats fournis par le premier algorithme. Finalement, l'efficacité des deux approches proposées est montrée au travers un exemple numérique d'échangeur de chaleur à co-courant.

**Mots clés :** Èquation aux dérivées partielles; Estimation paramétrique; Moment partiel réinitialisé; Modèle de Roesser; Représentation linéaire fractionnaire.