

# THÈSE

pour l'obtention du Grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS  
Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées  
Diplôme National - Arrêté du 7 Août 2006

*École Doctorale* : **Sciences et Ingénierie pour l'Information**  
*Secteur de Recherche* : **Informatique & Applications**

Présentée par :  
**Aurélie RICHARD**

## **Décomposition des rotations $nD$ et arithmétisation des cercles**

Dirigée et encadrée par :  
Gaëlle LARGETEAU-SKAPIN  
Laurent FUCHS  
Eric ANDRES

Soutenue le 06 Décembre 2011 devant la Commission d'Examen composée de :

<b>P. SCHRECK</b>	Professeur, Laboratoire LSIT - Université de Strasbourg	Rapporteur
<b>D. MICHELUCCI</b>	Professeur, Laboratoire Le2i - Université de Bourgogne	Rapporteur
<b>Y. KENMOCHI</b>	Chargée de recherche, Laboratoire Gaspard Monge - Université de Paris-Est	Examinateur
<b>G. WALLET</b>	Professeur émérite, Laboratoire MIA - Université de La Rochelle	Examinateur
<b>L. FUCHS</b>	Maître de Conférences, Laboratoire XLIM-SIC - Université de Poitiers	Co-directeur
<b>G. LARGETEAU-SKAPIN</b>	Maître de Conférences, Laboratoire XLIM-SIC - Université de Poitiers	Co-directeur



*Je tiens à remercier tout ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réussite de cette thèse.*

*Tout d'abord, Gaëlle, Laurent et Eric pour m'avoir supportée durant ces trois années. Un grand merci aussi à Guy et Yukiko pour nos nombreuses discussions constructives. Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à Messieurs Dominique Michelucci et Pascal Schreck pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs. Un merci particulier à mes différents et non moins nombreux collègues de bureau et du laboratoire sans oublier Agathe. Je remercie aussi ceux qui m'ont facilité la tâche au quotidien: Virginie, Bruno, Sébastien, Philippe, Françoise, et les autres.*

*Mes remerciements les plus chaleureux vont bien sûr à mes parents, à ma grand-mère et à Romuald pour m'avoir soutenue, aidée, supportée...*

*Un grand merci à tous*



---

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Notations, conventions et abbréviations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Décomposition de rotations</b>	<b>7</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>11</b>
1 Représentation des rotations . . . . .	11
1.1 Représentation matricielle . . . . .	12
1.1.1 Angles d'Euler . . . . .	14
1.1.2 Quaternions . . . . .	18
1.2 Représentation algébrique . . . . .	22
1.2.1 Introduction aux algèbres géométriques . . . . .	22
1.2.2 Réflexions . . . . .	24
1.2.3 Rotors . . . . .	25
1.2.4 Spineurs . . . . .	31
1.3 Avantages et inconvénients des différentes représentations . . . . .	32
2 Méthodes de décomposition des rotations existantes . . . . .	33
2.1 Méthodes « géométriques » . . . . .	33
2.2 Méthodes « algébriques » . . . . .	46
2.3 Méthode « isogonale » . . . . .	48
2.4 Récapitulatif des intérêts et limites . . . . .	52
<b>2 Décomposition des rotations <math>nD</math> et estimation de leurs paramètres</b>	<b>53</b>
1 Décomposition des rotations $nD$ . . . . .	54
1.1 Décomposition en rotations élémentaires . . . . .	54
1.2 Rotations bruitées . . . . .	58
2 Algorithmes de décomposition des rotations $nD$ . . . . .	61
2.1 Détermination des plans de rotation . . . . .	62
2.1.1 Détermination d'une base de $P$ . . . . .	62
2.1.2 Détermination d'une base des sous-espaces (quasi-)isogonaux . . . . .	64
2.1.3 Détermination des plans de rotation . . . . .	67
2.2 Détermination des angles de rotation . . . . .	72

3	Décomposition des rotations $nD$ en rotations planes en utilisant la décomposition de Schur . . . . .	75
4	Exemples numériques. . . . .	77
4.1	Exemples en dimension 3 . . . . .	78
4.2	Exemples en dimension 4 . . . . .	80
5	Décomposition des rotations $nD$ en rotations isoclines . . . . .	84
<b>3</b>	<b>Résultats</b>	<b>89</b>
1	Bibliothèques utilisées . . . . .	89
2	Simulations numériques . . . . .	91
2.1	Génération des matrices de tests . . . . .	91
2.2	Evaluation de l'erreur . . . . .	92
2.3	Influence du paramètre $\beta$ . . . . .	93
3	Exemple numérique . . . . .	94
3.1	Algorithme utilisant l'algèbre géométrique . . . . .	96
3.2	Algorithme basé sur la décomposition de Schur . . . . .	97
4	Analyse des résultats . . . . .	98
5	Perspectives : adaptation de nos algorithmes à un cadre expérimental classique .	101
6	Estimation de l'erreur de l'algorithme de Fontijne [FD10] . . . . .	104
6.1	Propriétés de la médiatrice généralisée simplifiée . . . . .	105
6.1.1	Bandes et faisceaux . . . . .	107
6.1.2	Symétrie généralisée . . . . .	108
6.2	Reconstruction de rotation en utilisant la MGS . . . . .	112
6.2.1	Algorithme de reconstruction des rotations . . . . .	112
6.2.2	Adaptation aux données bruitées de l'algorithme de reconstruction . . . . .	113
	<b>Conclusion</b>	<b>117</b>
	<b>II Arithmétisation</b>	<b>121</b>
	<b>Introduction</b>	<b>123</b>
<b>4</b>	<b>Travaux précédents</b>	<b>125</b>
1	Analyse nonstandard . . . . .	125
2	Les $\Omega$ -entiers et la droite d'Harthong-Reeb associée . . . . .	129
2.1	Les $\Omega$ -entiers . . . . .	129
2.2	Droite de Harthong-Reeb basée sur les $\Omega$ -entiers . . . . .	130
3	Méthode d'arithmétisation par le schéma d'Euler . . . . .	131
3.1	Connexité des arcs de cercles . . . . .	134
3.2	Estimation de l'erreur globale . . . . .	138
<b>5</b>	<b>Arithmétisation par le schéma de Heun et <math>\Omega</math>-arithmétisation des ellipses</b>	<b>145</b>
1	Condition de connexité pour l'arithmétisation par le schéma de Heun . . . . .	146
1.1	Arithmétisation par le schéma de Heun . . . . .	146
1.2	Condition de connexité . . . . .	148
1.3	Etude de l'ordre . . . . .	152
2	$\Omega$ -arithmétisation des ellipses . . . . .	156

2.1	Arcs d'ellipses discrets . . . . .	156
2.2	Propriétés et résultats graphiques. . . . .	158
2.2.1	Propriétés de connexité . . . . .	158
2.2.2	Illustrations graphiques . . . . .	159
<b>Conclusion</b>		<b>163</b>
<b>Conclusion</b>		<b>165</b>
<b>Annexes</b>		<b>169</b>
<b>A STRUCTURES ALGÈBRIQUES ET ALGÈBRE LINÉAIRE</b>		<b>171</b>
1	Généralités sur les algèbres . . . . .	171
2	Formes bilinéaires et quadratiques . . . . .	172
3	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	173
3.1	Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	173
3.2	Principe de la SVD et propriétés . . . . .	174
3.3	Interprétations géométriques . . . . .	175
3.4	Applications . . . . .	176
<b>B ALGÈBRES GÉOMÉTRIQUES</b>		<b>177</b>
1	L'algèbre de Grassmann . . . . .	178
2	L'algèbre de Clifford . . . . .	182
2.1	Le produit interne . . . . .	184
2.2	Les contractions . . . . .	185
3	Lien entre les algèbres géométriques . . . . .	186
4	Opérations dans l'algèbre géométrique . . . . .	187
4.1	Projections et réjections sur des sous-espaces . . . . .	187
4.2	Réflexions . . . . .	188
4.3	Rotations . . . . .	189
4.4	Notion de dualité . . . . .	191
<b>C RELATIONS ENTRE LES REPRÉSENTATIONS DES ROTATIONS</b>		<b>193</b>
<b>D MÉTHODE D'ARITHMÉTISATION</b>		<b>197</b>
1	Le schéma d'Euler . . . . .	197
2	Le schéma de Heun . . . . .	199
<b>Liste des publications personnelles</b>		<b>203</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>205</b>
<b>Index</b>		<b>212</b>



---

## TABLE DES FIGURES

---

1.1	Représentations des rotations 3D par les angles d'Euler . . . . .	15
1.2	Cardans dans un espace de dimension 3 . . . . .	17
1.3	Blocage de cardan . . . . .	18
1.4	Représentation des transformations géométriques avec des quaternions . . . . .	21
1.5	Réflexion d'un vecteur par rapport à un autre . . . . .	25
1.6	Décomposition de la rotation en deux réflexions. . . . .	26
1.7	Interprétation graphique des $k$ -vecteurs . . . . .	27
1.8	Principe de la première méthode de Cheng . . . . .	35
1.9	Système de coordonnées sphériques . . . . .	35
1.10	Rotation dans un système de coordonnées sphériques . . . . .	36
1.11	Réflexion de vecteurs par rapport à un hyperplan . . . . .	38
1.12	Reconstruction d'une rotation 2D . . . . .	40
1.13	Illustration de la méthode de Fontijne dans le cas de données bruitées . . . . .	41
1.14	Principe de la médiatrice généralisée . . . . .	42
1.15	Médiatrice généralisée entre deux pixels . . . . .	42
1.16	Angle charnière . . . . .	43
1.17	Multi-grille rationnelle . . . . .	45
1.18	Détermination de l'axe de rotation . . . . .	45
1.19	Plans orthogonaux et complètement orthogonaux . . . . .	49
1.20	Caractérisation de plans orthogonaux et complètement orthogonaux . . . . .	50
1.21	Rotations isoclines droite et gauche . . . . .	51
2.1	Plans et angles de rotation . . . . .	63
2.2	Contraction d'un vecteur sur un plan . . . . .	68
2.3	Construction de plans orthogonaux . . . . .	69
2.4	Construction d'une base . . . . .	71
2.5	Exemple numérique 3D . . . . .	79
2.6	Composition de rotations planes . . . . .	86
3.1	Influence du paramètre $\beta$ sur les résultats de notre algorithme . . . . .	95
3.2	Tableau comparatif des différentes valeurs de $\beta$ . . . . .	96
3.3	Moyennes de l'erreur de nos algorithmes . . . . .	99
3.4	Comparaison de l'erreur entre les deux algorithmes . . . . .	100
3.5	Médiatrice généralisée et médiatrice généralisée simplifiée . . . . .	106
3.6	« Squelette » de la médiatrice généralisée simplifiée . . . . .	107
3.7	Faisceaux et médiatrices généralisées . . . . .	108
3.8	Symétrie généralisée . . . . .	109

3.9	Faisceaux et bandes de droites . . . . .	110
3.10	Symétrie d'un pixel par rapport à des droites . . . . .	111
3.11	Reconstruction d'une rotation 2D en utilisant l'algorithme de Fontijne . . . . .	113
4.1	Illustration graphique de la 8-connexité . . . . .	126
4.2	Changement d'échelle : du discret au continu . . . . .	127
4.3	Isomorphisme entre l'ensemble $HR_\omega$ et $\mathbb{R}$ . . . . .	128
4.4	Vecteur tangent orthogonal . . . . .	131
4.5	Arc de cercle dessiné à l'échelle $\omega$ . . . . .	133
4.6	Connexité des arcs de cercles interprétés à l'échelle $\alpha$ . . . . .	135
4.7	Arcs de cercles générés par arithmétisation du schéma d'Euler . . . . .	135
4.8	Connexité des arcs de cercles interprétés à l'échelle $\beta$ . . . . .	137
5.1	Cercle généré par le schéma de Heun et interprété à l'échelle $\omega$ . . . . .	147
5.2	Connexité des arcs de cercles générés par le schéma de Heun . . . . .	149
5.3	Représentation graphique de l'aspect multi-résolution de l' $\Omega$ -arithmétisation d'un arc d'ellipse. . . . .	156
5.4	Représentation quad-tree des $\Omega$ -pixels . . . . .	160
5.5	Représentations graphiques de l' $\Omega$ -arithmétisation . . . . .	160
5.6	Connexité des ellipses . . . . .	161
5.7	Ellipse multi-résolution . . . . .	162
A.1	Interprétation géométrique de la SVD . . . . .	175
B.1	Interprétation graphique des $k$ -vecteurs . . . . .	177
B.2	Représentations graphiques des bivecteurs . . . . .	181
B.3	Interprétation géométrique de la base des $k$ -vecteurs . . . . .	181
B.4	Projection, réjection et contraction d'un vecteur sur un plan . . . . .	186
B.5	Décomposition de la rotation en deux réflexions. . . . .	188
B.6	Réflexion d'un vecteur par rapport à un autre . . . . .	189
B.7	Dualité dans des espaces de dimensions 2 et 3 . . . . .	192

---

# NOTATIONS, CONVENTIONS ET ABBREVIATIONS

---

$\mathcal{A}$	algèbre.
$\mathcal{B}$	forme bilinéaire.
$Q$	forme quadratique.
$E$	espace vectoriel de dimension $n$ (sauf mention contraire pour la dimension).
$\mathcal{C}(E)$ (resp. $\mathcal{C}_n$ )	algèbre de Clifford associée à $E$ (resp. $\mathbb{R}^n$ ).
$\mathcal{G}_E$ (resp. $\mathcal{G}_n$ )	algèbre de Grassmann associée à $E$ (resp. $\mathbb{R}^n$ ).
$\mathcal{G}_n^+$	sous-algèbre de $\mathcal{G}_n$ constituée des éléments pairs.
$\alpha, \beta$	scalaires (lettres grecques).
$\mathbf{x}$	vecteurs (en minuscules et en gras).
$\mathbf{x}^T, M^T$	transposé du vecteur $\mathbf{x}$ et transposée de la matrice $M$ .
$\mathbf{A}, \mathbf{B}$	multivecteurs (en majuscules et gras).
$\langle \mathbf{A} \rangle_k$	partie $k$ -vectorielle d'un multivecteur.
$\mathbf{I}$	pseudo-scalaire.
$\text{Grade}(\mathbf{A})$	grade d'un multivecteur.
$\mathbf{A}^{-1}$	inverse d'un multivecteur.
$\tilde{\mathbf{A}}$	« renversé » d'un multivecteur.
$I_n$	matrice identité d'ordre $n$ .
$I_d$	application identité.
$SO(n)$ ou $SO(n, \mathbb{R})$	groupe spécial orthogonal.
$\text{Spin}(n)$	groupe des spineurs en dimension $n$ .
$\rfloor$	contraction à gauche.
$i, j, k$	nombres complexes généralisés.
$\text{Re}()$ et $\text{Im}()$	parties réelles et imaginaires d'un complexe ou d'un quaternion.
$\bar{q}$	conjugué d'un complexe ou d'un quaternion.
$\mathbb{H}, \mathbb{H}_1, \mathbb{H}_p$	ensembles des quaternions, quaternions de norme 1, quaternions purs.
$\dot{\mathbf{b}}$	exclusion de $\mathbf{b}$ de l'opération courante.
$LQI$	Liste Quasi-Isogonale.

$CQI$	Composante Quasi-Isogonale notée $[\ ]$ .
$C_i^{\alpha_i}$	$i^{\text{ème}}$ élément de la Partition Quasi-Isogonale de longueur $\alpha_i$ .
$\mathbf{x}_\parallel, \mathbf{x}_\perp$	composante parallèle et orthogonale du vecteur $\mathbf{x}$ respectivement à un sous espace donné.
$F$	ensemble des vecteurs fixes d'une rotation.
$P$	ensemble orthogonal à l'ensemble des vecteurs fixes de la rotation.
$\mathcal{P}$	sous-espace (quasi)-isogonal.
$M(i, j)$	élément à la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M$ , $i$ et $j$ peuvent être remplacés par " : " pour désigner la ligne ou la colonne entière.
$Proj_A(B)$	projection de $B$ sur le sous-espace $A$ .
$R_P(\theta)$	rotation d'angle $\theta$ dans le plan $P$ .
$R_P^I(\theta)$	rotation isocline (composée de rotations planes d'angles $\theta$ ou $-\theta$ , l'ensemble des plans de rotation est engendré par $P$ )
$R_P^G(\theta_1, \dots, \theta_p)$	rotation générale (composée de rotations planes d'angles $\theta_1, \dots, \theta_p$ de valeurs différentes, l'ensemble des plans de rotation est engendré par $P$ )
$MGS(P_1, P_2)$	médiatrice généralisée simplifiée entre les pixels $P_1$ et $P_2$ .
$\mathbb{D}_i$	segments ou demi-droites délimitant une médiatrice généralisée simplifiée.
$\mathbb{P}_i$	points caractéristiques d'une médiatrice généralisée simplifiée.
$\text{Bande}(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_j)$	bande de la médiatrice généralisée simplifiée délimitée par les points $\mathbb{P}_i$ et $\mathbb{P}_j$ .
$\mathbb{F}_i$	faisceau de droites issu du point $\mathbb{P}_i$ et inclus dans une médiatrice généralisée simplifiée.
$SG(P_1, P_2)$	réflexion par rapport à la médiatrice généralisée simplifiée des pixels $P_1$ et $P_2$ .
$\lfloor x \rfloor$	partie entière de $x$ .
$\{x\}$	partie fractionnaire de $x$ (bornée en valeur absolue par 1).
$\text{HR}_\omega$ (resp. $\text{HR}_\Omega$ )	droite d'Harthong-Reeb définie sur les nombres (resp. suite de nombres).
$C_d^\alpha(0, R)$ (resp. $C_d^\beta(0, R)$ )	arcs de cercles discrets générés par le processus d'arithmétisation et interprétés à l'échelle $\alpha$ (resp. $\beta$ ).

---

---

# INTRODUCTION

---

Les transformations géométriques rigides jouent un rôle fondamental aussi bien en analyse qu'en synthèse d'images. Parmi ces transformations, nous nous sommes intéressés aux rotations  $nD$  et plus particulièrement à l'estimation de leur paramètre. Ceci peut être utile dans de nombreux domaines comme par exemple la vision par ordinateur [SS01, Sze10] ou la médecine [Che04, CNP00].

La vision par ordinateur permet de construire un modèle algorithmique qui, vu de l'extérieur, possède des propriétés semblables à la vision humaine. Lorsque nous regardons des objets, l'image que nous percevons et nos connaissances *a priori*, comme les formes et les couleurs, nous permettent d'interpréter ce que nous voyons. Cela permet, notamment de pouvoir décrire ce que nous voyons en termes d'objets, de mouvements, de positions. Une des applications est la reconstruction d'objets 3D. Dans ce cas, une caméra ou un appareil photo effectue une séquence d'images en tournant autour de cet objet. Ces images sont ensuite utilisées pour reconstruire l'objet en 3D. Au cours ce processus, il est nécessaire de retrouver à la fois les positions des caméras (*i.e.* l'endroit d'où les photos ont été prises), mais aussi leurs orientations par rapport à l'objet, ce qui requiert une reconstruction de rotations.

En anatomie, les mouvements des membres, et du corps humain d'une manière plus générale, peuvent être modélisés par différentes actions comme les flexions (celles des genoux par exemple permettent de plier les jambes), les extensions (celles de la hanche permettent le déplacement de la jambe vers l'arrière) mais aussi les rotations 3D. Certains mouvements peuvent être vus comme la composée de translations et de rotations. Décrire un mouvement entre deux attitudes (positions) requiert la connaissance des paramètres de ces rotations qui le composent et en particulier les axes et les angles de rotations.

Des algorithmes d'estimation de paramètres de rotations 3D ont été largement étudiés [CNP00, Che04, Wat06]. Toutefois, pour certaines applications (espaces couleurs, espaces homogènes, modèle conforme, ...), l'estimation de paramètres de rotation pour des espaces de dimension supérieure à trois est nécessaire. Peu de travaux avaient abordé cette question jusque là. De plus, la plupart des méthodes existantes, en 3D ou en  $nD$  souffrent d'une grande sensibilité au bruit.

Ce mémoire a comme premier objectif d'étudier les rotations  $nD$  et de proposer plusieurs algorithmes d'estimation de paramètres qui soient quelque peu robustes au bruit. Dans nos

travaux, nous nous plaçons dans un cadre vectoriel. Nous nous intéressons uniquement aux rotations centrées en l'origine. Dans la seconde partie du mémoire, nous nous intéressons aux espaces discrets en étudiant le cercle discret. En effet, la génération et la reconnaissance de cercles discrets forment une première étape dans ce qui pourrait être une nouvelle approche d'estimation de paramètres de rotations discrètes 2D. Par ailleurs, de nombreuses questions théoriques sur le processus d'arithmétisation que nous avons utilisé nous semblent intéressantes.

Dans la première partie du mémoire, nous nous intéressons aux rotations  $nD$ . Des algorithmes d'estimation de paramètres de rotations sont déjà utilisés [CNP00, Che04, Wat06, AGARAVS09, FD10, Thi10, PS02, DFM07]. Certains algorithmes ont été développés uniquement dans le cas de la 3D comme [CNP00, Che04]. D'autres sont basés sur des considérations géométriques comme [AGARAVS09, FD10]. Ils utilisent principalement la décomposition en réflexions de la rotation (théorème de Cartan-Dieudonné). Ces algorithmes sont incrémentaux : la détermination des axes se fait par étapes dépendantes les unes des autres. Ainsi, lors de la détermination des premiers axes de réflexions, une petite perturbation, due par exemple à des problèmes de précision sur les nombres, entraîne des erreurs assez importantes sur la détermination des axes suivants. Pour ces raisons, si les données sont bruitées, ce qui est le cas lorsque l'on travaille avec des données expérimentales, ces algorithmes ne peuvent pas être appliqués.

À notre connaissance, aucun algorithme ne permet de décomposer les rotations  $nD$  à partir de données bruitées. L'un des buts de cette thèse est avant tout de proposer des algorithmes utilisables en toutes dimensions et robustes au bruit au sens où, même si les données de départ ne sont pas exactes, les plans et les angles de rotation estimés peuvent être utilisés pour caractériser la rotation  $nD$ . Pour développer un algorithme utilisable en toutes dimensions, le formalisme de l'algèbre géométrique nous paraît pertinent. Celle-ci est une algèbre particulière dans laquelle les objets (droites, plans, ...) ou les transformations sont des éléments de l'algèbre. Elle permet de définir des transformations en toutes dimensions. Ainsi, les isométries, et par conséquent, les rotations peuvent être représentées et manipulées par des termes algébriques et des opérations sur ces termes.

Nous supposons que nous disposons de vecteurs (formant une base de l'espace de dimension  $n$ ) et de leurs images par une rotation centrée en l'origine. À partir de ces données et en utilisant le formalisme des algèbres géométriques, nous proposons un premier algorithme permettant de retrouver les paramètres de la rotation  $nD$  (plans et angles). D'après le théorème de Cartan-Dieudonné, toute rotation  $nD$  se décompose en au plus  $n$  réflexions. De plus, comme la composée de deux réflexions est une rotation plane, toute rotation  $nD$  peut alors se décomposer en rotations planes. La rotation  $nD$  peut ainsi être décomposée en rotations élémentaires. Celles-ci sont soit des composées de rotations planes d'angles égaux (appelées *rotations isoclines*) soit des rotations planes d'angles différents (appelées *rotations générales*). Cette décomposition de la rotation  $nD$  permet de décomposer le sous-espace  $E$  sur lequel elle est définie, en sous-espaces tels que la restriction de la rotation soit une rotation élémentaire (rotation isocline ou générale). Dans le cas des rotations générales, il existe un nombre fini de plans de rotation. Par contre, les rotations isoclines en admettent une infinité. Ces plans de rotation sont générés par un vecteur et son image par la rotation. Pour chacun de ces sous-espaces, il est par conséquent possible de construire les plans de rotation parmi cette infinité.

Nous proposons un second algorithme d'estimation de paramètres des rotations  $nD$ . Il utilise la décomposition matricielle de Schur. En décomposant la matrice formée par les vecteurs images (des vecteurs de la base) nous obtenons directement les plans et les angles de rotation.

D'autre part, nous proposons, à partir d'une décomposition de la rotation  $nD$  en rotations planes, une méthode permettant d'obtenir une décomposition en rotations isoclines. Par conséquent, si un algorithme calcule cette décomposition en rotations isoclines, à partir de vecteurs et de leurs images, cette réécriture pourra permettre, en utilisant les particularités des plans de rotations des rotations isoclines, de déduire les rotations planes (plus précisément, leurs plans et leurs angles).

Ces algorithmes ont été testés de la dimension 2 à la dimension 15 avec des données bruitées. Les simulations numériques ont montré qu'ils étaient résistants au bruit.

Par ailleurs, dans le cadre d'un travail dans l'équipe de géométrie discrète sur les médiatrices généralisées (pour faire de la reconnaissance de cercles notamment), nous avons été amené à illustrer le comportement par rapport au bruit de l'algorithme de Fontijne [FD10]. Nous avons montré que la méthode d'estimation des paramètres  $nD$  de Fontijne n'est pas résistante au bruit. Cet algorithme permet de reconstruire, de manière incrémentale, les axes de réflexions (médiatrices) qui composent la rotation  $nD$  à partir de points appariés. Son algorithme est plus général que nos travaux au sens où les rotations qu'il cherche à décomposer ne sont pas nécessairement centrées en l'origine du repère. En pratique, il n'est toutefois utilisable qu'avec des données exactes. En effet, dans ce cas, les médiatrices déterminent bien les axes de réflexions qui composent la rotation. Si les données sont bruitées, le premier axe de réflexion est déterminé avec une petite erreur, le deuxième avec une erreur plus importante (les erreurs se cumulent) et ainsi de suite. Pour visualiser cette erreur, nous appliquons son algorithme dans le cas de données bruitées. Cela revient à considérer non plus un point mais une surface autour de ce point. Pour reconstruire les axes de réflexions, nous utilisons des médiatrices généralisées [RALSA10] (médiatrices entre des surfaces). Ces travaux, menés en collaboration avec Marc Rodríguez ont fait l'objet d'une publication [RLSR<sup>+</sup>11].

Dans une deuxième partie du mémoire, nous nous sommes intéressés au schéma d'arithmétisation permettant de générer des cercles (et des ellipses) discrets. Nous étendons pour cela, certains résultats que nous avons précédemment obtenus concernant l'arithmétisation (discrétisation) par des schémas numériques (Euler, Heun, ...). Ces schémas permettent d'approcher les solutions des équations différentielles. En discrétisant le schéma numérique qui régit les cercles nous obtenons des cercles discrets. Nous avons précédemment étudié les arcs de cercles générés par le schéma numérique d'Euler [RWF<sup>+</sup>09]. Nous avons notamment mis en évidence des propriétés de connexité et étudié l'ordre de l'erreur. Ici, d'une part, nous étendons l'étude aux arcs de cercles générés par le schéma de Heun. D'autre part, un travail commun avec Agathe Chollet [CWA<sup>+</sup>10] a permis d'appliquer la méthode d'arithmétisation par le schéma d'Euler à des suites d'entiers appelées  $\Omega$ -entiers. Une application aux ellipses est aussi présentée. Ces travaux constituent une première étape qui nous permettra, nous l'espérons, d'aborder le problème de l'estimation des paramètres des rotations discrètes. L'idée est qu'une définition mathématique de cercle discret et un algorithme de reconnaissance qui l'accompagnerait peut apporter des informations sur les paramètres des rotations discrètes.

**Organisation du mémoire** Le manuscrit est organisé comme suit. La première partie est consacrée aux rotations  $nD$  et en particulier à leurs décompositions. La deuxième est dédiée au processus d'arithmétisation et plus particulièrement à l'étude des arcs de cercles (et d'ellipses) discrets ainsi générés.

Dans la partie traitant des rotations, nous commençons par rappeler leurs différentes représentations (axe-angle, quaternion, rotor, ...). Nous nous intéressons ensuite à leurs

décompositions. Après avoir rappelé des méthodes de décomposition existantes (chapitre 1), nous étudions certaines propriétés des rotations  $nD$  et nous proposons des méthodes pour estimer leurs paramètres (chapitre 2). Nous présentons aussi la méthode permettant de réécrire la décomposition en rotations planes des rotations  $nD$  en composées de rotations isoclines. Les deux algorithmes de ce chapitre ont été implémentés et testés. Les résultats sont présentés dans le chapitre 3.

Dans la partie concernant le processus d'arithmétisation, nous commençons par rappeler quelques notions de base concernant l'analyse nonstandard qui définit le contexte de ces travaux (chapitre 4). De plus, nous présentons la méthode d'arithmétisation par le schéma d'Euler et son application aux arcs de cercles ayant fait l'objet de travaux précédents [RWF<sup>+</sup>09]. Ce processus d'arithmétisation est ensuite appliqué au schéma numérique de Heun dans le cas du cercle (chapitre 5). Nous étudions ensuite quelques propriétés intéressantes comme la connexité et l'ordre du schéma arithmétisé. Une application de cette méthode d'arithmétisation par le schéma d'Euler aux suites d'entiers est ensuite proposée. Il est le fruit d'un travail commun avec Agathe Chollet [CWA<sup>+</sup>10]. Nous terminons en synthétisant nos travaux et en donnant des perspectives générales.

# **Première partie**

## **Décomposition de rotations**



---

---

# INTRODUCTION

---

Estimer les paramètres des rotations est très utile dans de nombreux domaines comme la médecine (pour modéliser les mouvements des membres) [Che04, CNP00], la vision par ordinateur [SS01, Sze10] ou en analyse d'images afin de reconnaître, par exemple, entre deux images d'un objet, la rotation que cet objet a subi. Si de nombreuses méthodes d'estimation de paramètres existent, elles ne sont souvent pas applicables en  $nD$  [Che04, CNP00, Wat06] ou ne sont pas robustes au bruit [FD10, AGARAVS09]. Pour ces raisons, nous proposons dans ce manuscrit deux algorithmes permettant de décomposer les rotations  $nD$  en rotations planes. Pour déterminer les paramètres de rotation, nous disposons de vecteurs  $\mathbf{x}_i$  et de leurs images  $\mathbf{y}_i$ . Nous considérons le problème de l'estimation des paramètres d'une rotation vectorielle. Le problème de l'estimation du centre de rotation n'est pas abordé dans ce contexte. Nous considérons également que les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  correspondent aux vecteurs d'une base de l'espace  $E$  de dimension  $n$ . Ces conditions sont, certes, restrictives mais nos contributions ne sont qu'une première brique pour de futurs travaux. Ils pourront servir de point de départ pour la conception d'algorithmes pour estimer les paramètres de rotations non centrées en l'origine. D'une manière encore plus générale, ils pourraient être utilisés pour déterminer les paramètres d'isométries ou de transformations orthogonales. Afin de proposer ces méthodes d'estimation de paramètres de rotation à partir des vecteurs  $\mathbf{x}_i$  d'une base et de leurs images respectives  $\mathbf{y}_i$ , nous avons étudié les rotations  $nD$ . D'après le théorème de Cartan-Dieudonné nous savons que les rotations  $nD$  se décomposent en au plus  $n$  réflexions. Comme la composée de deux réflexions est une rotation plane, nous savons que toute rotation  $nD$  peut se décomposer en rotations planes [Aud03]. Ces rotations planes peuvent avoir des angles égaux. Si cela est le cas, la rotation peut être vue comme la composée de rotations planes d'angles égaux (appelées *rotations isoclines*) et de rotations d'angles différents (appelées *rotations générales*). Cette décomposition de la rotation est liée à la décomposition de l'espace  $E$  de dimension  $n$  dans lequel s'effectue la rotation  $nD$ . Celui-ci peut, en effet, être décomposé en sous-espaces appelés *sous-espaces isogonaux* dans lesquels la restriction de la rotation  $R$  est une rotation isocline. Ces rotations ont la particularité d'admettre une infinité de plans de rotation [Man14, Meb94]. Ainsi, pour une rotation  $R$ , nous commençons par décomposer l'espace en sous-espaces isogonaux. Nous générons, grâce à la décomposition en valeurs singulières (SVD<sup>1</sup> en anglais) de la matrice des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)$ , des bases de chacun de ces sous-espaces. Ensuite, pour chacun d'entre eux, nous construisons les plans de rotation. Par projection des couples  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  sur les plans de rotation, nous retrouvons ensuite les angles de rotation associés. Comme l'algorithme est utilisable en dimension  $n$ , nous nous plaçons dans le cadre de l'algèbre géométrique qui permet des calculs et des raisonnements en toute dimension.

---

1. Singular Value Decomposition.

Nous proposons aussi un autre algorithme de décomposition des rotations  $nD$  en rotations planes à partir des vecteurs  $\mathbf{x}_i$  d'une base et de leurs images  $\mathbf{y}_i$ . Il utilise la décomposition de Schur de la matrice composée par les vecteurs  $\mathbf{y}_i$ . Celle-ci décompose cette matrice en deux matrices : l'une permet de générer les plans de rotation et l'autre, les angles de rotation.

Enfin, nous présentons, à partir d'une décomposition de la rotation  $nD$  en rotations planes, une méthode pour obtenir une décomposition de la rotation  $nD$  en rotations isoclines. L'intérêt d'une telle décomposition est de pouvoir utiliser la construction particulière des plans de rotation de celles-ci pour construire ceux de la rotation  $nD$ . Autrement dit, si un algorithme permet d'obtenir cette décomposition en rotations isoclines à partir de vecteurs et de leurs images, cette réécriture pourra permettre de déduire les plans de rotation de la rotation de départ.

Nous proposons également une évaluation de l'erreur de la méthode de Fontijne [FD10]. Celle-ci est basée sur la reconstruction des axes de réflexions qui composent la rotation  $nD$  à partir de points appariés (points et leurs images respectives par la rotation). La rotation considérée par Fontijne n'est pas nécessairement centrée en l'origine (sa méthode peut aussi être appliquée dans un cadre vectoriel). Si ces points sont exacts, sa méthode reconstruit bien ces axes ; néanmoins si les points sont bruités, les axes, déterminés de manière incrémentale, ne sont plus correctement construits. Afin de visualiser l'erreur de la méthode, nous proposons de remplacer les points par des éléments de surface et les médiatrices continues par des médiatrices généralisées (*i.e.* médiatrices entre deux surfaces) [RALSA10, RLSR<sup>+</sup>11].

Ce travail n'est qu'une première étape pour fournir une méthode de décomposition des rotations  $nD$  à partir d'un cadre expérimental classique où l'on disposerait d'un ensemble de points appariés plutôt que des vecteurs d'une base et de leurs images respectives. Nos algorithmes devront, en effet, être adaptés. Une autre application possible serait une adaptation aux rotations discrètes.

Cette partie est organisée comme suit. Nous donnons dans un premier temps les différentes représentations des rotations ainsi que des méthodes de décomposition des rotations existantes afin de présenter leurs avantages et inconvénients (chapitre 1). Dans le chapitre 2, nous présentons nos deux algorithmes de décomposition des rotations mais également la méthode permettant de passer d'une décomposition en rotations planes à une décomposition en rotations planes de même angle (angles égaux ou opposés). Nos expérimentations numériques et la méthode d'évaluation de l'erreur de la méthode de Fontijne [FD10] sont présentées dans le chapitre 3. Nous terminons en proposant quelques pistes intéressantes qui mériteraient d'être approfondies.

---

# CHAPITRE 1

---

## ÉTAT DE L'ART

---

Dans cette première partie, nous nous intéressons aux rotations  $nD$  et plus particulièrement à leurs décompositions. Le but de cette première partie est d'estimer les paramètres de rotations des rotations vectorielles  $nD$  à partir de vecteurs et de leurs images. Dans de nombreux domaines, l'estimation des paramètres des rotations est une étape indispensable comme en médecine [CNP00, Che04] ou en vision par ordinateur [Sze10]. Pour certaines applications (espaces couleurs, modèle conforme, ...), l'estimation de ces paramètres est nécessaire dans des espaces de dimension supérieure à trois.

De manière générale, les images de vecteurs par une rotation  $nD$  tiennent compte d'un facteur de translation dû au fait que le centre de la rotation ne correspond pas nécessairement à l'origine. Dans tout le manuscrit (sauf mention contraire), nous nous plaçons dans un cadre vectoriel. En particulier, dans le chapitre suivant, dans lequel nous proposons nos algorithmes d'estimation de paramètres de rotations nous considérons que nous disposons d'images recalées, ce qui revient à considérer comme nulle cette translation<sup>1</sup>. Dans cette partie dédiée aux différentes représentations des rotations, nous considérons uniquement les rotations centrées en l'origine car ce sont les seules que nous utilisons dans la suite de nos travaux.

Classiquement, en infographie, les rotations sont représentées sous forme de matrices exprimées avec des coordonnées homogènes mais d'autres représentations à l'aide de quaternions ou de rotors, par exemple, existent. L'inventaire que nous proposons permettra de choisir la représentation la plus adéquate (notamment une représentation utilisable en toute dimension) dans le contexte de nos travaux. Nous présentons ensuite des méthodes existantes de décomposition/reconstruction de rotations. Pour chacune d'entre elles nous présentons leurs avantages et leurs limites.

## 1 Représentation des rotations

Afin de choisir la meilleure représentation des rotations pour nos contributions présentées dans le chapitre 2, nous commençons par rappeler différentes représentations des rotations

---

1. Cette condition est, certes, restrictive mais ces travaux ne sont qu'une première étape pour obtenir un algorithme permettant, non plus d'estimer les paramètres de rotation centrée en l'origine, mais de centre quelconque.

existantes, que nous comparons dans la section 1.3. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la représentation matricielle. Cette représentation est la plus usuelle. Grâce aux matrices, les rotations peuvent être représentées en  $nD$ . Cependant, elle présente des inconvénients : en dimension 3, ces matrices permettent de définir les angles d'Euler (cf. section 1.1.1) correspondant à la décomposition de la rotation 3D relativement à chaque axe du repère. Nous voyons dans la section 1.1.1 que, dans certains cas, leur utilisation peut poser problème (blocage de cardan<sup>2</sup> ou *Gimbal Lock*). En 3D, ce problème peut être contourné en représentant les rotations par des quaternions (nombres complexes généralisés) comme dans la section 1.1.2. Cette notion de quaternion est étendue, en dimension  $n$ , à la notion de rotors et de spineurs (cf. sections 1.2.3 et 1.2.4). Ces notions s'utilisent dans le cadre d'une algèbre particulière : l'algèbre géométrique. Cette algèbre est présentée dans la section 1.2.1.

Dans tout ce chapitre,  $E$  désigne un espace vectoriel de dimension  $n$ . Les angles de rotation sont exprimés modulo  $2\pi$ .

## 1.1 Représentation matricielle

Une rotation dans  $E$  est une *isométrie positive ou directe*,<sup>3</sup> c'est-à-dire une application qui conserve les distances, de déterminant  $+1$ . L'ensemble des rotations d'un espace de dimension  $n$  forme un groupe appelé *groupe des rotations* ou *groupe Spécial Orthogonal*<sup>4</sup> noté  $SO(n)$ . Toute rotation  $nD$  peut être représentée sous forme matricielle. La matrice d'une rotation, et de manière plus générale, celle de tout élément de  $O(n)$ , est une *matrice orthogonale*<sup>5</sup>. Dans le cas d'une rotation le déterminant vaut  $+1$ .

En dimension finie, ces isométries peuvent être caractérisées ; cela fait l'objet du théorème suivant :

**Théorème 1** (Caractérisation des isométries en dimension finie [Don77]). *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces euclidiens de même dimension finie et  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *L'application  $f$  est une isométrie ;*
- *Il existe une base orthonormale de  $E$  dont l'image par  $f$  est une base orthonormale de  $F$  ;*
- *Il existe une base orthonormale de  $E$  et une base orthonormale de  $F$  dans lesquelles la matrice de  $f$  est orthogonale.*

Dans des bases bien choisies, les matrices des isométries  $nD$  peuvent être diagonales par blocs :

2. En mécanique, un cardan est une pièce en forme d'anneau qui tourne autour d'un axe. Généralement, les cardans sont imbriqués les uns dans les autres afin de pouvoir tourner autour de plusieurs axes.

3. Soient  $E$  et  $F$  deux espaces euclidiens (espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire). Une *isométrie* est une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $\forall \mathbf{x}, \|f(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ . Le déterminant d'une isométrie  $f$  est défini comme le déterminant de la matrice de  $f$  dans une base donnée. Une isométrie de déterminant  $+1$  est dite *isométrie positive* par opposition à celles de déterminant  $-1$  appelées *isométries négatives* (par exemple la symétrie orthogonale).

4. Ce groupe est un sous groupe du *groupe Orthogonal* noté  $O(n)$  qui comprend en plus les *isométries négatives*. Contrairement aux isométries positives, les isométries négatives ne constituent pas un groupe car la composée de deux isométries négatives est une isométrie positive.

5. Les matrices orthogonales sont des matrices carrées inversibles (d'inverse leur transposée) de déterminant  $+1$  ou  $-1$ . Les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale sont normés. De plus, ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.

**Proposition 1** (Réduction des isométries). *Soit  $f$  une isométrie de l'espace  $E$ . L'espace vectoriel  $E$  est la somme directe orthogonale<sup>6</sup> (notée  $\overset{\perp}{\oplus}$ ) suivante :*

$$E = V \overset{\perp}{\oplus} W \overset{\perp}{\oplus} P_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} P_r$$

où les sous-espaces  $V$ ,  $W$  et  $P_i$  sont stables par  $f$ ,  $f|_V = Id_V$ ,  $f|_W = -Id_W$  et pour tout  $P_i$  avec  $i = 1, \dots, r$ ;  $P_i$  est un plan tel que  $f|_{P_i}$  soit une rotation.

La démonstration de cette proposition peut être trouvée dans [Aud03]. De manière matricielle, la proposition 1 nous assure l'existence d'une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice  $\mathcal{F}$  de  $f$  est diagonale par blocs :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_r} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

où  $I_p$  désigne la matrice identité d'ordre  $p$  et où les  $R_{\theta_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) sont des matrices de rotation  $2 \times 2$ . Dans le cas des rotations, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de rotation peut s'écrire comme une matrice diagonale par blocs. Sa diagonale est composée de  $r$  blocs de taille  $2 \times 2$  et de  $(n - 2r)$  blocs  $1 \times 1$ . Les blocs  $2 \times 2$  sont des matrices de rotations planaires. Les  $(n - 2r)$  blocs  $1 \times 1$  sont composés uniquement de 1. En effet, comme nous travaillons avec des rotations, l'entier  $q$  indiquant la dimension de la matrice  $-I_q$  est pair<sup>7</sup> et le bloc  $-I_q$  peut être vu comme  $\frac{q}{2}$  blocs  $2 \times 2$  correspondant à des matrices de rotation d'angle  $\pi$ . Nous revenons plus en détails sur cette décomposition dans la partie 1.1.

Voici maintenant quelques exemples de matrices de rotation en dimension 3. Soit  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  un repère orthonormé formant une base d'un espace 3D. D'après la proposition 1, nous savons qu'une rotation 3D est une rotation dans un plan laissant un axe fixe (ce plan et cet axe correspondent respectivement aux sous-espaces  $P_1$  et  $V$ ). Si cet axe de rotation est aligné sur les axes du repère, les matrices des rotations d'angle  $\theta$  par rapport aux vecteurs de la base  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$  respectivement notées  $R_{\mathbf{X}}(\theta)$ ,  $R_{\mathbf{Y}}(\theta)$ ,  $R_{\mathbf{Z}}(\theta)$  sont données par :

$$R_{\mathbf{X}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$R_{\mathbf{Y}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$R_{\mathbf{Z}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

6. Deux sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  sont en somme directe orthogonale si tout élément  $\mathbf{x}$  de  $E$  peut se décomposer sous la forme  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$  telle que les vecteurs  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  soient orthogonaux et  $\mathbf{x}_1 \in E_1$  et  $\mathbf{x}_2 \in E_2$ . Cela implique notamment que  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ . De plus, si les dimensions des sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  sont finies, nous avons  $\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E)$ .

7. Si  $q$  était impair l'isométrie serait une réflexion.

**Remarque 1.** La matrice donnée par la formule (1.2) est bien de la même forme que celle de (1.1). Les matrices (1.3) et (1.4) peuvent le devenir via un changement de base.

Ces formules peuvent être utilisées uniquement pour exprimer une rotation autour d'un axe aligné sur un des axes du repère. Dans le cas général, le vecteur invariant (axe de rotation) n'est pas un des axes du repère. Dans ce cas, la matrice de rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe normé  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  est donnée par :

$$\begin{pmatrix} a_x^2 + (1 - a_x^2)c\theta & a_x a_y(1 - c\theta) - a_z s\theta & a_x a_z(1 - c\theta) + a_y s\theta \\ a_x a_y(1 - c\theta) + a_z s\theta & a_y^2 + (1 - a_y^2)c\theta & a_y a_z(1 - c\theta) - a_x s\theta \\ a_x a_z(1 - c\theta) - a_y s\theta & a_y a_z(1 - c\theta) + a_x s\theta & a_z^2 + (1 - a_z^2)c\theta \end{pmatrix}$$

où  $c\theta = \cos \theta$  et  $s\theta = \sin \theta$ .

Cette formule peut se simplifier sous la forme :

$$R(\theta) = I_3 \cos \theta + \sin \theta Q + (1 - \cos \theta)P \quad (1.5)$$

où  $I_3$  est la matrice identité en dimension 3 et les matrices  $P$  et  $Q$  sont données par :

$$P = \begin{pmatrix} a_x^2 & a_x a_y & a_x a_z \\ a_x a_y & a_y^2 & a_y a_z \\ a_x a_z & a_y a_z & a_z^2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}.$$

La formule (1.5) est appelée *formule de Rodrigues* [Rod40]. Elle donne la forme matricielle d'une rotation 3D autour d'un axe quelconque. Ainsi, l'image  $\mathbf{v}'$  du vecteur  $\mathbf{v}$  par la rotation d'angle  $\theta$  autour d'un axe  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  est donnée par :

$$\mathbf{v}' = \cos \theta \mathbf{v} + (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \sin \theta + \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos \theta)$$

où  $\times$  représente le produit vectoriel.

Nous avons vu que nous pouvons représenter les rotations en toutes dimensions par des matrices. En dimension 3, nous avons explicité la matrice de rotation en fonction de l'axe et de l'angle. Une rotation 3D peut aussi être vue comme la composée de trois rotations. Les trois angles correspondant à ces rotations sont appelés des *angles d'Euler* et ils font l'objet de la section suivante.

### 1.1.1 Angles d'Euler

Dans cette partie, nous allons définir les angles d'Euler. Nous montrons aussi que la représentation des rotations par les angles d'Euler conduit à un problème appelé *blocage de cardan*.

Même s'ils sont définis en dimension supérieure, ils sont classiquement utilisés en dimension 3. C'est pourquoi, dans cette partie, nous nous restreignons uniquement à leur étude en dimension 3. De plus, dans la suite, tous les repères sont considérés comme des repères directs.

Afin de présenter les angles d'Euler, nous allons énoncer le théorème de rotation d'Euler [Kui02] :

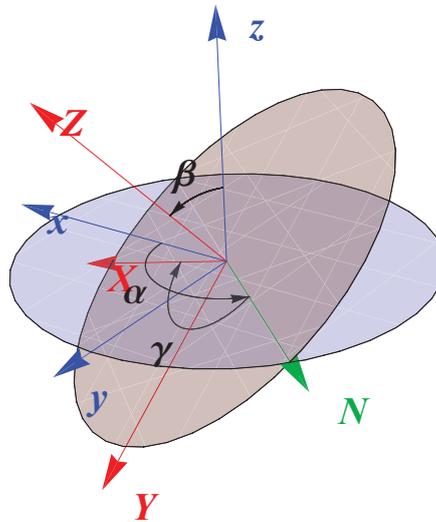


FIGURE 1.1 – Représentation géométrique des rotations 3D par les angles d’Euler. Le repère  $(x, y, z)$  est transformé en le repère  $(X, Y, Z)$  par la composée de trois rotations autour des axes des repères nouvellement tournés ; les angles correspondant donnés par  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les angles d’Euler.

**Théorème 3** (Théorème de rotation d’Euler). *Soient deux repères orthonormaux avec la même origine. Il existe une suite d’au plus trois rotations autour des axes permettant de transformer le premier repère en le deuxième. Deux rotations successives ne peuvent se faire autour du même axe.*

Ce théorème a pour conséquence que toute rotation 3D peut être vue comme la composée d’au plus trois rotations autour des axes du repère. De manière équivalente, toute matrice de rotation 3D peut être vue comme le produit des matrices de rotations élémentaires données par les formules (1.2), (1.3), (1.4). Les angles associés sont appelés *angles d’Euler*.

Notons  $xyz$  la suite de rotations<sup>8</sup> permettant de passer d’un repère  $(x, y, z)$  à un repère  $(X, Y, Z)$  de la manière suivante :

$$(x, y, z) \xrightarrow{x} (x, y', z') \xrightarrow{y} (x', y', z'') \xrightarrow{z} (x'', y'', z'') = (X, Y, Z). \quad (1.6)$$

Par abus de langage, la notation  $x$  (resp.  $y$ , resp.  $z$ ) signifie que la rotation se fait par rapport au premier (resp. deuxième, resp. troisième) axe du repère [Kui02]. La suite  $xyz$  appliquée au repère  $(x, y, z)$  signifie donc que nous effectuons la première rotation par rapport à l’axe  $x$  suivie d’une rotation par rapport à  $y'$  (image du deuxième axe du repère après la première rotation) puis par rapport  $z''$  (image du troisième axe du repère après la composée des deux rotations précédentes comme cela est décrit par la suite (1.6)). En toute généralité, nous devrions noter ces axes  $x, y', z''$ . Cet abus de langage est aussi utilisé dans la suite.

8. Cette convention est une des plus utilisée. Elle est adoptée notamment par Kuipers dans [Kui02].

D'après le théorème 3, deux rotations successives ne se font pas autour du même axe. Par conséquent, il existe 12 suites différentes<sup>9</sup> :

$$\begin{array}{cccc} xyz & xzy & xyx & xzx \\ yzx & yxz & yzy & yxy \\ zxy & zyx & zxz & zyz. \end{array} \quad (1.7)$$

Cependant quelle que soit la dimension, un problème classique lié à l'utilisation des angles d'Euler survient. Ce phénomène est appelé le *blocage de cardan* (*Gimbal Lock* en anglais). Nous allons maintenant l'illustrer par un exemple concret puis nous expliquons mathématiquement ce phénomène.

Considérons, un espace de dimension 3 et les trois cardans (anneaux pouvant tourner autour d'un axe) comme sur la figure 1.2. Ces cardans tournent les uns par rapport aux autres de manière indépendante. Nous avons dans ce cas différentes configurations. Parmi celles-ci nous avons, par exemple, le cas où les trois cardans sont dans le même plan comme sur la figure 1.2(a) ou le cas où les trois cardans sont dans trois plans orthogonaux (figure 1.2(b)). Chaque cardan définit un plan de rotation dont l'axe est représenté sur cette figure par les flèches. Considérons maintenant un objet, par exemple une petite boîte munie d'une flèche comme sur la figure 1.3. Cet objet peut tourner dans l'espace autour des trois axes précédemment définis. Supposons maintenant que l'objet tourne d'un angle  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à l'axe bleu. Dans ce cas, les plans délimités par les cardans bleu et vert deviennent coplanaires comme nous le montre la figure 1.3(b). Les axes de rotation correspondant sont confondus. De cette façon, effectuer une rotation autour de l'axe de rotation du cardan vert ou effectuer une rotation autour de l'axe de rotation du cardan bleu revient à effectuer une rotation dans le même plan. En conséquence, on perd ainsi un degré de liberté. Ce phénomène est appelé *blocage de cardan* ou *Gimbal lock*. Etudions maintenant, de manière plus mathématique, le problème.

Mathématiquement, nous savons d'après le théorème de rotation d'Euler, que la rotation de cet objet peut être représentée par le produit de trois matrices de rotation autour des axes du repère. Dans la suite, considérons que ces trois matrices correspondent à la configuration *zyx*. Dans ce cas la matrice de rotation est donnée par :

$$\begin{aligned} R_{\phi,\theta,\psi} &= R_{\mathbf{X}}(\phi)R_{\mathbf{Y}}(\theta)R_{\mathbf{Z}}(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ -\cos \phi \sin \psi + \cos \psi \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \psi + \sin \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \theta \sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi + \cos \phi \cos \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \psi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**Remarque 2.** Comme nous venons de le voir, le passage des angles d'Euler à la matrice de rotation se fait par multiplication des matrices de rotation. Par contre il n'y a pas de méthode type pour, à partir d'une matrice de rotation, retrouver les trois angles d'Euler. Les angles dépendent de la configuration choisie parmi l'ensemble des douze données par (1.6). En annexe C, nous donnons un exemple du passage de la matrice de rotation aux angles d'Euler.

Sur la figure 1.3, l'angle correspondant à la deuxième rotation vaut  $\frac{\pi}{2}$ . En remplaçant dans la matrice précédente l'angle  $\theta$  par  $\frac{\pi}{2}$ , nous obtenons la matrice :

9. Pour une rotation donnée, il existe une configuration parmi ces 12 qui la représente.

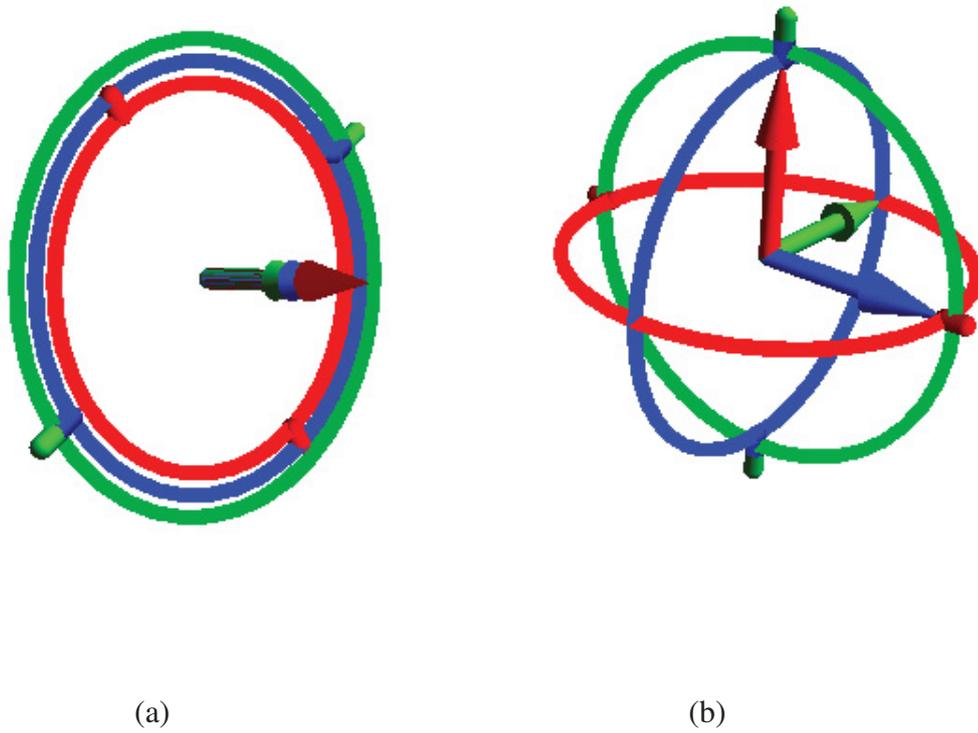


FIGURE 1.2 – Représentation de trois cardans dans un espace de dimension 3. Chaque anneau coloré tourne autour de son axe de manière indépendante les uns des autres. Les trois anneaux peuvent, par exemple, être coplanaires (a) ou orthogonaux deux à deux (b). Dans le premier cas, les normales aux plans qu'ils définissent (représentés ici par les flèches de couleur) sont confondues, dans le second cas, elles forment un repère orthonormal.

$$R_{\phi, \frac{\pi}{2}, \psi} \begin{pmatrix} -\cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi & -\cos \psi \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}.$$

Comparons maintenant les deux matrices  $R_{0, \frac{\pi}{2}, \psi}$  et  $R_{-\phi, \frac{\pi}{2}, 0}$  données respectivement par :

$$R_{0, \frac{\pi}{2}, \psi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R_{-\phi, \frac{\pi}{2}, 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \cos \phi & \sin \phi & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, dans le cas où les angles  $\psi$  et  $-\phi$  sont égaux, si on effectue une rotation d'axe  $z$  et d'angle  $\psi$  ou une rotation d'axe  $x$  d'angle  $-\phi$ , la matrice de rotation ainsi calculée engendre la même rotation. Il n'est alors pas possible d'effectuer une rotation par rapport à l'axe des  $x$  qui soit différente d'une rotation par rapport à l'axe des  $z$ . Cela est le *blocage de cardan*. Ce phénomène peut aussi être mis en évidence pour d'autres configurations.

Nous venons de voir que la représentation des rotations par les angles d'Euler induit le problème du blocage de cardan. En dimension 3, l'utilisation des quaternions permet de résoudre ce problème.

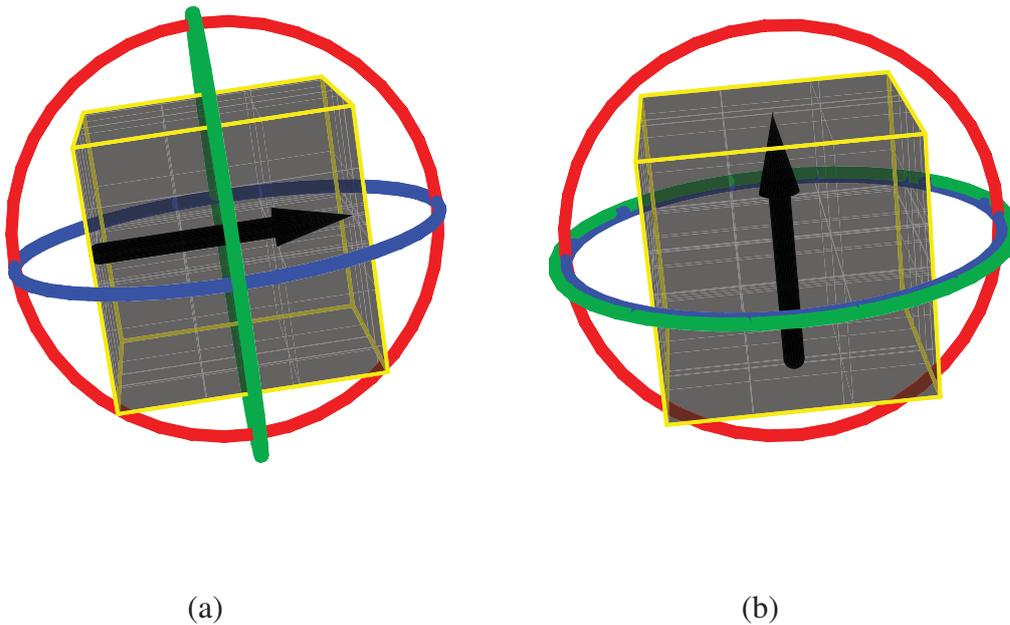


FIGURE 1.3 – Illustration du blocage de cardan. (a) L'objet cubique peut tourner dans l'espace 3D dans les trois directions matérialisées par les anneaux de couleur. Ces trois anneaux sont indépendants ; (b) Si l'objet effectue une rotation d'angle  $\pi/2$  dans une direction, deux des trois anneaux sont coplanaires : on parle alors de *blocage de cardan*.

### 1.1.2 Quaternions

Les quaternions [Lou09, Kui02] peuvent être vus comme une généralisation des nombres complexes à trois parties imaginaires au lieu d'une. Notons qu'au sein du département SIC du laboratoire XLIM, différents travaux sont menés concernant l'utilisation des quaternions pour l'analyse et le traitement des images couleur comme, par exemple, dans le cas de la détection des contours couleur [DCFM07]. En effet, dans ce domaine, les trois parties imaginaires d'un quaternion servent notamment à représenter les trois composantes couleurs Rouge, Vert, Bleu. Dans notre cas, nous montrons que les trois parties imaginaires peuvent être vues comme un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et nous les utiliserons comme telles.

Dans cette partie, nous introduisons les opérations courantes sur les quaternions (addition, multiplication, norme, ...) afin de représenter les transformations et en particulier les rotations 3D. Dans la partie 1.2.3 nous montrons que la notion de *rotor* étend la notion de quaternion pour représenter les rotations  $nD$ . Les quaternions et de manière plus générale les rotors offrent l'avantage de représenter de manière compacte les rotations (et les transformations de manière plus globale).

#### Définition et opérations sur les quaternions

Pour introduire les quaternions, nous allons commencer par quelques rappels sur les nombres complexes. Les nombres complexes, dont l'ensemble est noté  $\mathbb{C}$ , sont des nombres de la forme  $z = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $i$  vérifiant  $i^2 = -1$ . Le réel  $a$  est appelé partie réelle de  $z$  et  $b$  sa partie imaginaire. Un nombre complexe peut être représenté par un point du plan  $\mathbb{R}^2$  d'abscisse

$a$  et d'ordonnée  $b$ . Considérons maintenant non plus un seul nombre imaginaire  $i$  mais trois :  $i, j$  et  $k$  régis par les règles multiplicatives suivantes :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 = ijk$$

$$ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik.$$

Les entités  $i, j$  et  $k$  sont appelées *nombre complexes unitaires généralisés* appelés aussi *hypercomplexes* [Den07, Dic19]. En utilisant ces hypercomplexes, nous pouvons définir les quaternions dont l'ensemble est noté  $\mathbb{H}$  en hommage à Hamilton qui les a introduits. Cet ensemble forme un espace vectoriel de dimension 4 de base  $\{1, i, j, k\}$ . Un quaternion est défini par :

$$q = w + xi + yj + zk$$

où  $w, x, y, z$  sont des nombres réels. Les quaternions sont parfois notés sous la forme d'un quadruplet  $(w, x, y, z)$ .

De la même manière que pour les complexes, on distingue les parties réelle et imaginaire d'un quaternion  $q$  notées respectivement  $Re(q)$  et  $Im(q)$ . Pour  $q = w + xi + yj + zk$ , alors  $Re(q) = w$  et  $Im(q) = xi + yj + zk$ . Cette décomposition est unique. La partie réelle est un nombre réel. La partie imaginaire peut être assimilée à un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . Ainsi  $\mathbb{H} \sim \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3$ .

A l'instar des nombres complexes, diverses opérations peuvent être effectuées sur les quaternions. La multiplication du quaternion  $q = w + \mathbf{q}$  (avec  $\mathbf{q} = xi + yj + zk$ ) par le quaternion  $q' = w' + \mathbf{q}'$  (avec  $\mathbf{q}' = x'i + y'j + z'k$ ) est donnée par :

$$qq' = ww' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}' + w\mathbf{q}' + w'\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{q}'$$

où  $\cdot$  représente le produit scalaire et  $\times$  le produit vectoriel entre les deux parties vectorielles des quaternions. La partie imaginaire d'un quaternion pouvant être vue comme un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ , le produit scalaire (resp. vectoriel) est calculé comme le produit scalaire (resp. produit vectoriel) entre deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . La multiplication entre quaternions est une opération fondamentale dans la suite. En effet, les rotations 3D et 4D sont représentées par le produit de trois quaternions.

Retenons que l'addition et la différence de deux quaternions (addition et soustraction définies termes à termes comme pour les complexes) ainsi que la multiplication d'un quaternion par un scalaire (multiplication de chacun des termes du quaternion par le scalaire) sont commutatives<sup>10</sup>. La multiplication de quaternions, elle, ne l'est pas (compte tenu des règles multiplicatives énoncées précédemment). L'ensemble  $\mathbb{H}$  est donc un corps non commutatif. De manière similaire aux nombres complexes, il est aussi possible de définir le conjugué, la norme et l'inverse des quaternions. Ces trois notions interviennent dans le calcul des rotations. Soit  $q = w + \mathbf{q}$  un quaternion avec  $w = Re(q)$  et  $\mathbf{q} = Im(q)$ . Le conjugué  $\bar{q}$  et la norme  $|q|$  de  $q$  sont définis par :

$$\bar{q} = w - \mathbf{q} \text{ et } |q| = \sqrt{q\bar{q}}.$$

En effet, le produit d'un quaternion  $q$  par son quaternion conjugué  $\bar{q}$  est une quantité réelle<sup>11</sup>. L'inverse du quaternion est noté  $q^{-1}$ . Il est donné par :

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

10. De manière plus formelle, pour deux quaternions  $q = w + xi + yj + zk$  et  $q' = w' + x'i + y'j + z'k$  et pour tout réel  $\lambda$ , nous avons  $q + q' = (w + w') + (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k$ ,  $q - q' = (w - w') + (x - x')i + (y - y')j + (z - z')k$  et  $\lambda q = q\lambda = (\lambda w) + (\lambda x)i + (\lambda y)j + (\lambda z)k$ .

11. Soient  $q = w + xi + yj + zk$  un quaternion et  $\bar{q} = w - xi - yj - zk$  son quaternion conjugué alors  $q\bar{q} = (w + xi + yj + zk)(w - xi - yj - zk) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2 + (-wx + xw - yz + zy)i + (-wy + xz + yw - zx)j + (-wz - xy + yx + zw)k = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ .

L'inverse d'un produit de quaternions  $pq$  est donné par :

$$(pq)^{-1} = q^{-1}p^{-1}.$$

Comme la multiplication des quaternions n'est pas commutative, la notation  $\frac{q_1}{q_2}$  pour désigner la multiplication du quaternion  $q_1$  par l'inverse du quaternion  $q_2$  est à bannir car elle peut aussi bien signifier  $q_1q_2^{-1}$  que  $q_2^{-1}q_1$ .

La forme exponentielle complexe  $|\rho|e^{i\theta}$  (avec  $|\rho|$  le module du nombre complexe et  $\theta$  son argument) permettant d'exprimer une rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$  peut être étendue aux quaternions. Soit  $q = w + xi + yj + zk \in \mathbb{H}$  alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\mathbf{u} \in \mathbb{H}$  avec  $|\mathbf{u}| = 1$  et  $Re(\mathbf{u}) = 0$  tels que<sup>12</sup> :

$$q = |q|e^{\mathbf{u}\frac{\theta}{2}} = |q|(\cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}).$$

Le quaternion  $\mathbf{u}$  est appelé axe de  $q$  et  $\frac{\theta}{2}$  est son angle. Ils sont respectivement donnés par :

$$\mathbf{u} = \frac{Im(q)}{|Im(q)|} \text{ et } \frac{\theta}{2} = \arctan \left( \frac{|Im(q)|}{Re(q)} \right).$$

Cette forme exponentielle intervient dans le calcul des rotations ; elle combine à la fois l'information concernant l'angle :  $\frac{\theta}{2}$  et celle concernant l'axe de rotation :  $\mathbf{u}$ . Nous abordons cela de manière plus précise dans la suite.

### Quaternions particuliers

Parmi les quaternions de  $\mathbb{H}$ , on distingue en particulier les *quaternions unitaires* (de norme 1) et les *quaternions purs* (sans partie réelle). Nous les notons dans la suite respectivement  $\mathbb{H}_1$  et  $\mathbb{H}_p$ . Les quaternions unitaires forment un sous-groupe de  $\mathbb{H}$ . L'ensemble  $\mathbb{H}_p$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Ces quaternions sont ainsi considérés comme des vecteurs et inversement. Les quaternions unitaires interviennent dans le calcul des rotations comme nous le voyons dans le paragraphe suivant.

### Quaternions et transformations géométriques

Les quaternions permettent de décrire, en dimension 3, de manière très simple et très compacte les transformations géométriques simples telles que les projections, les réjections<sup>13</sup>, les réflexions et bien évidemment les rotations (cf. figure 1.4).

Soient  $q_1$  un quaternion pur,  $q_2$  un quaternion pur unitaire et  $\theta$  un réel. La projection, la réjection et la réflexion de  $q_1$  par rapport à  $q_2$  respectivement notées  $q_{proj}$ ,  $q_{rej}$  et  $q_{reflex}$  sont données par :

$$q_{proj} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2q_1q_2), \quad q_{rej} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2q_1q_2) \text{ et } q_{reflex} = -q_2q_1q_2.$$

Ces transformations sont graphiquement illustrées en dimension 2 sur la figure 1.4(a). Pour cette dimension, cela revient à considérer les quaternions comme des nombres complexes (les coefficients des parties hypercomplexes  $j$  et  $k$  sont nuls).

12. Une démonstration de cette formule expliquant notamment l'apparition du terme  $\theta/2$  peut être trouvée dans [Vin11].

13. La réjection d'un vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport à un vecteur  $\mathbf{y}$  est la composante de  $\mathbf{x}$  qui est orthogonale à  $\mathbf{y}$ .

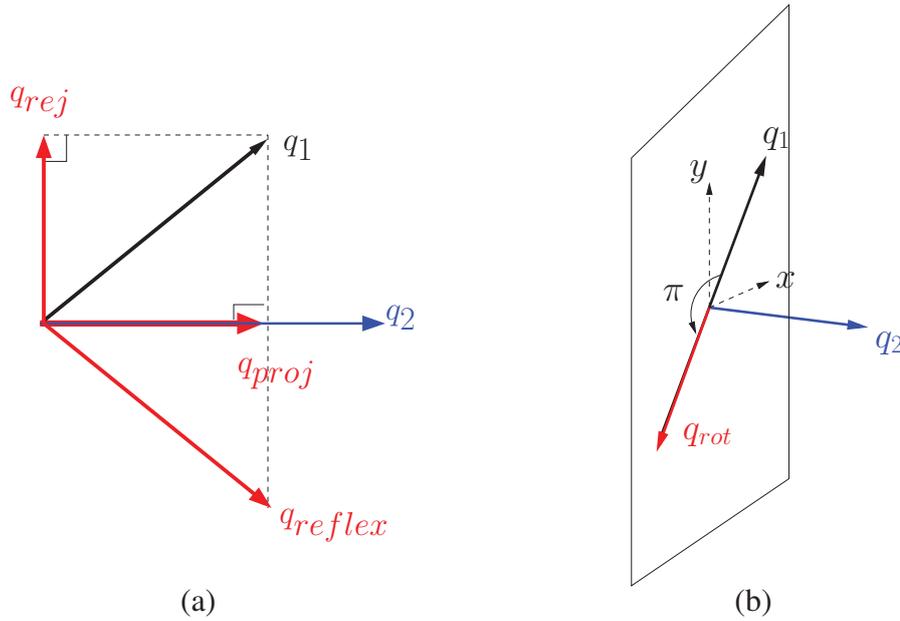


FIGURE 1.4 – (a) Représentation des transformations géométriques avec des quaternions :  $q_{proj}$ ,  $q_{rej}$  et  $q_{reflex}$  représentent respectivement la projection, la réjection et la réflexion du quaternion pur  $q_1$  par rapport au quaternion pur unitaire  $q_2$ . (b) Représentation de la rotation d'angle  $\pi$  et d'axe représenté par le quaternion  $q_2$ . Le quaternion  $q_{rot}$  représente l'image du vecteur  $(1, 1, 0)$  (correspondant au quaternion  $q_1$ ) par cette rotation.

La figure 1.4(b) représente la rotation, en dimension 3, du vecteur  $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ , représenté par le quaternion  $q_1 = (0, 1, 1, 0)$ , d'angle  $\pi$  par rapport à l'axe défini par le vecteur  $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 1)$  représenté par le quaternion  $q_2 = (0, 0, 0, 1)$ . L'image  $\mathbf{v}_{rot}$  de  $\mathbf{v}_1$  par cette rotation est représentée par le quaternion  $q_{rot}$ .

D'une manière générale, l'image  $q_{rot}$  de  $q_1$  par la rotation d'angle  $\theta$  par rapport à l'axe représenté par  $q_2$  est donnée par :

$$\begin{aligned} q_{rot} &= e^{q_2 \frac{\theta}{2}} q_1 e^{-q_2 \frac{\theta}{2}} \\ &= (\cos \frac{\theta}{2} + q_2 \sin \frac{\theta}{2}) q_1 (\cos \frac{\theta}{2} - q_2 \sin \frac{\theta}{2}) \\ &= Q q_1 Q^{-1} \text{ avec } Q = \cos \frac{\theta}{2} + q_2 \sin \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Cette dernière formule est appelée *formule d'Hamilton-Cayley*. Les deux quaternions unitaires  $Q$  et  $-Q$  définissent la même rotation dans l'espace de dimension 3 car  $(-Q)q_1(-Q)^{-1} = Qq_1Q^{-1}$ . Cette formule se généralise en dimension  $n$  grâce à la notion de rotor et de versor que nous présentons dans la section 1.2.3 et 1.2.4. D'après la formule d'Hamilton-Cayley, représenter une rotation 3D avec des quaternions nécessite le stockage de seulement quatre coefficients alors que la représentation sous la forme d'une matrice de rotation en requiert neuf. De plus, le quaternion donne directement les paramètres de la rotation (axe et angle) ce qui n'est pas le cas d'une matrice de rotation de la forme (1.1).

La composition de rotations s'exprime très facilement par des produits de quaternions. Comme la multiplication des quaternions n'est pas commutative, l'ordre des quaternions qui interviennent dans le produit est très important. En 3D, une rotation peut s'exprimer à l'aide d'un quaternion unitaire, en dimension 4 elle en nécessite deux. Soient  $q$  un quaternion et  $q_1, q_2$  deux quaternions unitaires. L'application  $q \mapsto q_1 q q_2^{-1}$  est une rotation dans un espace de dimension 4. De cette manière, il est possible de générer toutes les rotations de  $SO(4)$ . Comme pour la dimension 3, les paires de quaternions  $(q_1, q_2)$  et  $(-q_1, -q_2)$  définissent la même rotation.

En dimensions supérieures, la notion de quaternion se généralise grâce à la notion de rotor. Cette notion utilise l'*algèbre géométrique* que nous présentons dans la section suivante.

## 1.2 Représentation algébrique

Les rotations 3D et 4D peuvent être représentées par des quaternions comme nous venons de le voir dans la partie précédente. La notion de quaternion peut être étendue en dimensions supérieures à la notion de rotor en se plaçant dans l'*algèbre géométrique*. Dans cette partie, nous présentons, dans un premier temps, cette algèbre géométrique puis, dans un deuxième temps, nous montrons comment représenter les rotations  $nD$  à l'aide des rotors.

Les principaux concepts concernant les structures algébriques sur lesquelles reposent les algèbres géométriques ne sont pas exposées dans cette section mais font l'objet de l'annexe A. Pour plus de détails sur les algèbres géométriques, le lecteur peut se référer à [DFM07, HFDP04, Som01, DM02, MD02, Cha07].

### 1.2.1 Introduction aux algèbres géométriques

Dans ce paragraphe, nous présentons des notions qui nous sont utiles pour définir les réflexions et les rotations dans l'*algèbre géométrique*. L'annexe B offre une présentation plus détaillée de ces algèbres.

Les algèbres sont des espaces vectoriels munis d'un produit.

Nous allons construire une algèbre géométrique adaptée à la géométrie sur laquelle il est possible de définir des transformations (isométries) et en particulier les rotations. Cette algèbre est en quelque sorte une version particulière de l'algèbre de Clifford (*cf.* annexe B).

Nous nous plaçons sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Nous nous donnons une forme quadratique<sup>14</sup>  $\mathcal{Q}$ . Cette forme quadratique permet d'introduire un produit scalaire  $\mathcal{B}$  qui permet de définir une notion d'orthogonalité entre deux vecteurs par exemple. La métrique sur  $E$  est définie par :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \mathcal{B}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

où  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est la distance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  et  $\mathcal{B}$  est la forme bilinéaire symétrique<sup>15</sup> associée à la forme quadratique  $\mathcal{Q}$ . Dans le cadre de notre étude des rotations, nous considérons une forme quadratique définie positive<sup>16</sup> telle que la distance définie soit la distance euclidienne<sup>17</sup>.

À partir de cette forme quadratique  $\mathcal{Q}$ , nous pouvons construire un produit appelé *produit géométrique*. L'algèbre munie de ce produit est appelée *algèbre de Clifford* et elle est notée  $\mathcal{C}(E)$ , ses éléments sont appelés des *multivecteurs*. Pour ne pas alourdir les notations, si  $E = \mathbb{R}^n$ , plutôt que de noter l'algèbre  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  elle est notée plus simplement  $\mathcal{C}_n$ . Dans cette algèbre, il est possible de manipuler les entités géométriques, en particulier les isométries et les rotations, en tenant compte de la métrique que nous avons définie.

14. Une forme quadratique est une fonction  $\mathcal{Q}$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tout scalaire  $\lambda$  l'égalité  $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ .

15. Les formes bilinéaire et quadratique sont liées par la relation :  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y}))$  où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs de  $E$ .

16. Une forme quadratique est dite définie positive si  $\forall \mathbf{x} \in E, \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$  &  $[\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0]$ .

17. La distance euclidienne entre deux points est définie comme la racine carrée de la somme des carrés de la différence des coordonnées. Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  alors la distance euclidienne entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est définie par  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ .

Le produit géométrique n'a pas de symbole, il est simplement noté par juxtaposition de ses opérandes. Il permet de définir l'inverse des éléments de l'algèbre. Cette notion d'inverse intervient notamment pour représenter les transformations que nous utilisons dans la suite de ce manuscrit.

Pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs, le produit géométrique vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{u}) \\ \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} &= 2\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Le produit géométrique possède les propriétés suivantes :

- $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$  (commutativité des scalaires) ;
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$  (associativité) ;
- $(\alpha\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{C}) + \mathbf{B}\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}(\alpha\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{C}\mathbf{A}) + \mathbf{C}\mathbf{B}$  ; (bilinéarité)

où  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sont des multivecteurs et  $\alpha$  un scalaire.

Ce produit géométrique permet de construire tous les éléments de l'algèbre  $\mathcal{C}(E)$ . Ces éléments sont soit des scalaires (appelés aussi 0-vecteurs), soit des vecteurs de  $E$  (1-vecteurs) soit des produits géométriques de  $k$  vecteurs de  $E$  ( $k$ -vecteurs). L'ensemble des 0-vecteurs noté  $\mathcal{C}^0$  forme un espace vectoriel. Il en est de même pour l'ensemble des  $k$ -vecteurs (avec  $k$  fixé) noté  $\mathcal{C}^k$ . Pour un  $k$  fixé ( $0 \leq k \leq n$ ), former une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^k$ , revient à choisir  $k$  vecteurs parmi les  $n$  qui forment une base de  $E$ . Il en résulte que l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^k$  est de dimension  $\binom{n}{k}$ . L'entier  $k$  est appelé le *grade* du  $k$ -vecteur. On dit que l'algèbre géométrique  $\mathcal{C}(E)$  que nous venons de construire est une *algèbre graduée*. Cette algèbre, vue en tant qu'espace vectoriel, est de dimension  $2^n$ .

Lorsque des calculs s'avèrent nécessaires, ils peuvent être effectués dans une base construite à partir de celle de l'espace  $E$ .

**Exemples .** Soit  $(\mathbf{e}_i)_{i=1\dots n}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ .

- En dimension 2, une base de l'algèbre géométrique de Clifford associée à  $\mathbb{R}^2$  notée  $\mathcal{C}_2$  est donnée par :

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}. \quad (1.8)$$

La base est de dimension  $2^2 = 4$ .

- En dimension 3, une base de l'algèbre géométrique dite de Clifford  $\mathcal{C}_3$  est donnée par :

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}. \quad (1.9)$$

Elle est de dimension  $2^3 = 8$ .

Le produit géométrique permet de définir une notion importante : l'*inverse des multivecteurs*. Celle-ci est notamment utilisée pour représenter des transformations et en particulier les rotations. Certains multivecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de l'algèbre sont tels que leur produit géométrique vaut 1 (i.e.  $\mathbf{A}\mathbf{B} = 1$ ). Dans ce cas, le multivecteur  $\mathbf{A}$  (resp.  $\mathbf{B}$ ) est dit inversible d'inverse  $\mathbf{B}$  (resp.  $\mathbf{A}$ ). L'inverse d'un multivecteur (s'il existe) est noté par l'exposant  $-1$ . Dans le cas des algèbres géométriques on peut ainsi « diviser » des (multi)vecteurs. La notation  $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$  n'est cependant pas utilisée car elle est ambiguë : elle peut aussi bien désigner  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$  que  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ . Dans le premier cas, on dit que  $\mathbf{B}$  est l'inverse droit de  $\mathbf{A}$ . Dans le deuxième cas, on parle d'inverse

gauche. Comme le produit géométrique n'est pas commutatif, les inverses droit et gauche ne sont pas, dans le cas général, égaux.

La notion d'inverse n'est pas définie pour tous les éléments de l'algèbre, mais uniquement pour les vecteurs de norme non nulle. L'inverse du vecteur  $\mathbf{a}$  de norme strictement positive est donné par :

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}.$$

Parmi les multivecteurs inversibles, certains s'écrivent comme des produits géométriques de vecteurs inversibles. Ils sont appelés *verseurs*. Soit  $\mathbf{V}$  le verseur défini par :

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_p$$

où les  $(\mathbf{a}_i)_{i=1\dots p}$  sont des vecteurs. Généralement ils sont choisis normés. Dans ce cas, l'inverse  $\mathbf{V}^{-1}$  de ce verseur est donné par :

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{a}_p \mathbf{a}_{p-1} \dots \mathbf{a}_1.$$

Dans le cas des verseurs, les inverses droit et gauche sont égaux. Ces verseurs jouent un rôle très important au sein des algèbres de Clifford. Ils permettent en effet de représenter et de manipuler les transformations orthogonales et en particulier les rotations qui sont au coeur de nos travaux.

Les éléments inversibles servent notamment à coder les transformations (comme les verseurs), les autres ne représentent pas des transformations mais sont quand même utilisés dans les calculs en tant qu'auxiliaires ou pour représenter des objets géométriques. En effet, les éléments de l'algèbre représentent aussi bien des objets géométriques que des transformations comme nous le voyons dans la suite. Nous allons maintenant étudier comment sont représentées certaines transformations dans les algèbres géométriques et en particulier les réflexions et les rotations.

### 1.2.2 Réflexions

Avant d'étudier les réflexions dans le cadre de l'algèbre géométrique, intéressons nous, tout d'abord, à leurs définitions en algèbre linéaire. Dans ce cas, la réflexion d'un vecteur  $\mathbf{v}$  par rapport à un hyperplan dual<sup>18</sup> au vecteur  $\mathbf{a}$  est définie par :

$$R_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a}.$$

La matrice<sup>19</sup> de transformation associée, est donnée par  $M = I_n - 2\mathbf{a}\mathbf{a}^t$  où  $I_n$  est la matrice identité en dimension  $n$  (le vecteur  $\mathbf{a}$  est un vecteur colonne).

La réflexion  $\mathbf{x}_{\text{reflex}}$  du vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport à la droite passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire (*i.e.* de norme 1)  $\mathbf{a}$  est donnée par :

$$\mathbf{x}_{\text{reflex}} = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a}^{-1}.$$

En dimension 3, cela revient à effectuer une rotation d'angle  $\pi$  et d'axe  $\mathbf{a}$  (*cf.* [DFM07]). Nous pouvons considérer aussi la réflexion non plus par rapport au vecteur  $\mathbf{a}$  mais par rapport à son

18. Cet hyperplan est défini par l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{z}$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que le produit scalaire entre  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{a}$  soit nul.

19. Cette matrice est appelée *matrice de Householder*.

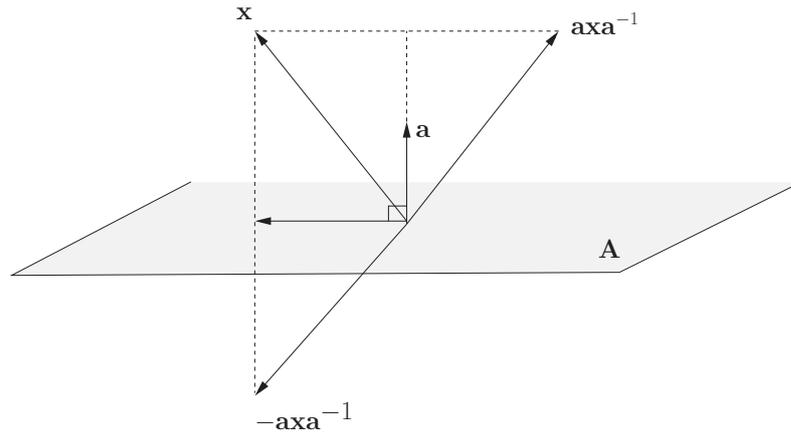


FIGURE 1.5 – Le vecteur  $axa^{-1}$  est l'image du vecteur  $x$  par la réflexion par rapport à la droite support du vecteur  $a$  (en dimension 3 cela équivaut à une rotation) et  $-axa^{-1}$  celle par rapport à l'hyperplan  $A$  dual du vecteur  $a$ .

hyperplan dual (en dimension 3, le vecteur  $a$  est considéré comme la normale au plan dual). La réflexion du vecteur  $x$  par rapport à l'hyperplan  $a^\perp$  dual au vecteur  $a$  est donnée par :

$$x_{\text{reflex}} = -axa^{-1}.$$

La figure 1.5 représente graphiquement les réflexions du vecteur  $x$  par rapport au vecteur  $a$  et à l'hyperplan  $a^\perp$ .

### 1.2.3 Rotors

Dans cette partie nous montrons comment sont définies les rotations 2D (rotations planes) et  $n$ D dans l'algèbre géométrique (cf. annexe B et [DFM07] pour plus de détails).

Ces rotations peuvent être vues soit comme des composées de réflexions (par le théorème de Cartan-Dieudonné) soit comme des composées de rotations planes (par la proposition 1 page 13). L'élément, appelé *rotor*, qui permet de définir ces rotations dans l'algèbre géométrique peut, par conséquent, être défini de deux manières : soit par rapport à ces axes de réflexions soit à partir des plans et des angles des rotations planes.

**Rotors et axes de réflexions** Composer deux réflexions (par rapport à des hyperplans) permet de « compenser » le signe moins. Ces réflexions peuvent donc aussi bien se faire par rapport à des droites qu'à des hyperplans ce qui est plus simple à se représenter. Ainsi, les rotations, composées d'un nombre pair de réflexions par rapport à des hyperplans, peuvent se voir comme des composées de rotations par rapport à des droites. La figure 1.6 fournit une représentation géométrique de cette décomposition en dimension 3.

Soient  $x$  un vecteur et  $\tilde{x}$  son image par la réflexion par rapport à l'axe  $a$ . Soit  $x'$  l'image de  $\tilde{x}$  par la réflexion par rapport à l'axe  $b$ . Le vecteur  $x'$  est, par conséquent, l'image de  $x$  par la réflexion d'axe  $a$  suivie de celle d'axe  $b$ . En utilisant la représentation des réflexions dans l'algèbre géométrique de la section 1.2.2, il en découle que  $\tilde{x} = axa^{-1}$  et :

$$x' = b(axa^{-1})b^{-1} = -b(-axa^{-1})b^{-1} = \mathbf{R}x\mathbf{R}^{-1}$$

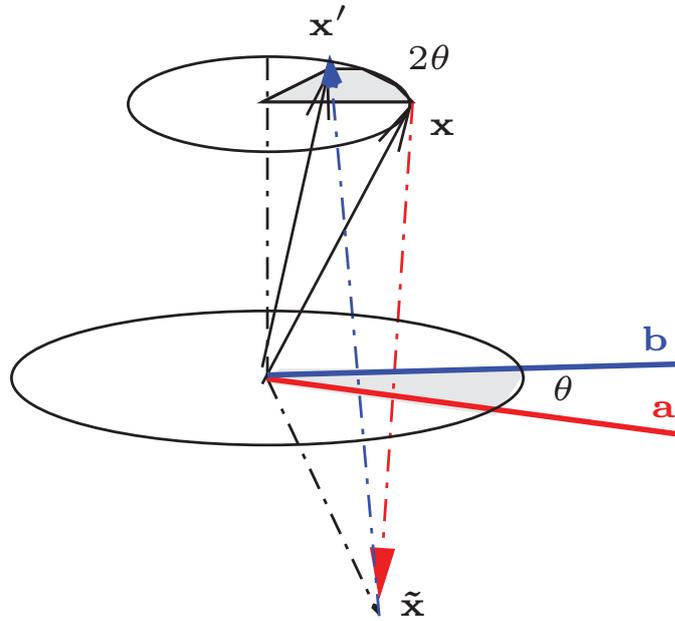


FIGURE 1.6 – Décomposition de la rotation en deux réflexions par rapport à une droite. La rotation de  $x$  en  $x'$  peut être vue comme la composition de la réflexion par rapport à la droite support du vecteur  $a$  puis celle du vecteur  $b$ . L'angle de rotation est le double de celui formé par les droites supports de  $a$  et  $b$ .

avec  $\mathbf{R} = \mathbf{b}\mathbf{a}$ . La quantité  $\mathbf{R}$  est appelée *rotor* et elle permet de définir les rotations en toute dimension dans l'algèbre géométrique.

D'une manière plus générale, par composition des réflexions, nous avons :

**Propriété 1.** *Un rotor  $\mathbf{R}$  s'écrit comme le produit géométrique d'un nombre pair de vecteurs unitaires. En d'autres termes, un rotor  $R$  peut être exprimé sous la forme :*

$$\mathbf{R} = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_k$$

où les  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  sont des vecteurs unitaires de  $C_n$  représentant les axes de réflexions et  $k \leq n$  est un entier pair. De plus, ce rotor est tel que  $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = 1$ . Un rotor est donc un cas particulier de verseurs (cf. partie 1.2.1).

Nous présentons maintenant une autre définition des rotors. Elle utilise non plus les axes de réflexions mais les plans et les angles de rotation des rotations planes.

**Rotor et paramètres des rotations** Pour définir les rotors à partir des paramètres de la rotation, nous nous restreignons, dans un premier temps, à la dimension 2. Cela nous permet de faire le lien avec les nombres complexes. Nous généralisons ensuite la définition en toute dimension. L'image  $x'$  d'un point  $x$  du plan complexe par la rotation centrée en l'origine d'angle  $\theta$  peut être exprimée sous la forme exponentielle. Elle est donnée par :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}e^{i\theta} = \mathbf{x}(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.10)$$

Dans l'algèbre géométrique, un plan est représenté par le produit de deux vecteurs (non colinéaires) de ce plan. Ce produit est appelé le *produit extérieur* et est noté  $\wedge$ . Soient  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  des multivecteurs et  $\alpha$  un scalaire. Le produit extérieur possède les propriétés suivantes :

- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$  (antisymétrique) ;
- $\alpha \wedge \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \alpha$  ;
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$  (associativité) ;
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 0$  si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont linéairement dépendants.

Des propriétés complémentaires sont détaillées dans l'Annexe B. D'une manière générale, le produit de  $k$  vecteurs indépendants appelé  $k$ -vecteur simple ( $k$ -blade en anglais) représente un sous-espace de dimension  $k$  engendré par ces  $k$  vecteurs comme l'illustre la figure 1.7. Un bivecteur décomposable est un élément de l'algèbre pouvant s'écrire sous la forme du produit extérieur de deux vecteurs :  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  (avec  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  des vecteurs). Interprétés géométriquement, ils représentent des sous-espaces de dimension 2 (plans). D'une manière plus générale, les bivecteurs sont des combinaisons linéaires d'éléments de la forme  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ .

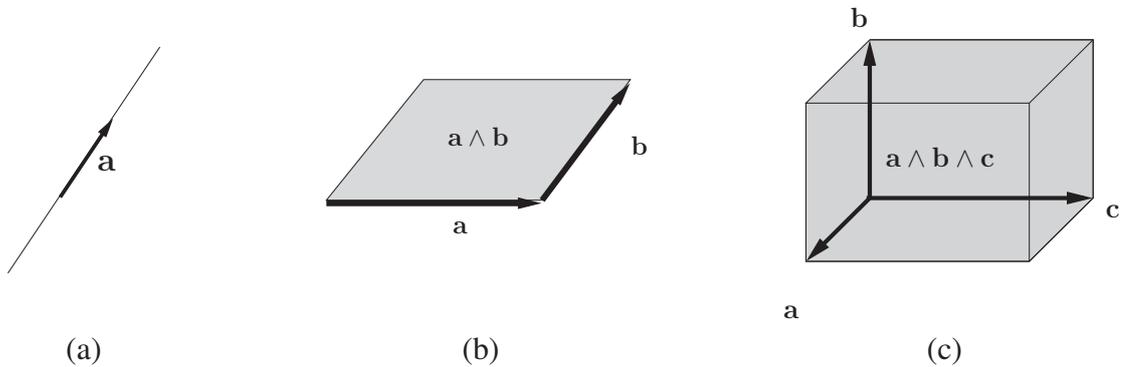


FIGURE 1.7 – Le vecteur  $\mathbf{a}$  représente un sous-espace vectoriel de dimension 1 (a), le produit, noté  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ , des deux vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  représente un sous-espace de dimension 2 (b), le produit, noté  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ , des trois vecteurs  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  représente un sous-espace de dimension 3 (c).

Ainsi, dans l'algèbre géométrique, le plan généré par les vecteurs  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$  est représenté par l'élément  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ . La formule (1.10) se généralise dans l'algèbre géométrique à :

$$\mathbf{x}' = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} \mathbf{x} e^{\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} = \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{x} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{x} \mathbf{R}^{-1}. \quad (1.11)$$

La quantité :

$$\mathbf{R} = \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (1.12)$$

est un *rotor*. La formule (1.11) présente des avantages par rapport à la formule (1.10). Contrairement à la formule (1.10), valable uniquement dans le plan complexe (correspondant au plan représenté par  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ ), la formule (1.11) peut être utilisée dans n'importe quel plan en posant  $\mathbf{P} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  des vecteurs de  $\mathcal{C}_n$ . La formule (1.11) permet donc d'exprimer n'importe quelle rotation plane (2D) dans l'algèbre  $\mathcal{C}_n$ .

**Exemple .** Calculons l'image du vecteur  $\mathbf{e}_3$  dans la rotation d'angle  $\theta = \pi/3$  dans le plan  $\mathbf{P} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$ . Soit :

$$\mathbf{R} = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} = \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) (\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)$$

le rotor représentant cette rotation. Calculons son inverse  $\mathbf{R}^{-1}$ . Nous avons  $\mathbf{R} = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}}$  et nous cherchons  $\mathbf{R}^{-1}$  tel que  $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} \mathbf{R}^{-1} = 1$  (par définition de l'inverse et de

**R**). Ainsi, en multipliant à gauche les deux membres de l'égalité par  $(e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}})^{-1}$ , nous avons  $(e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}})^{-1}e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}}\mathbf{R}^{-1} = (e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}})^{-1}$ . Or, d'après les propriétés sur les exponentielles, nous avons,  $(e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}})^{-1} = e^{\mathbf{P}\frac{\theta}{2}}$ . Ainsi l'inverse de **R** est donné par :

$$\mathbf{R}^{-1} = e^{\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3).$$

Calculons maintenant l'image de  $\mathbf{e}_3$ . Elle est donnée par  $\mathbf{R}\mathbf{e}_3\mathbf{R}^{-1}$ . En utilisant les propriétés du produit géométrique et du produit extérieur (et notamment  $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{b} = \mathbf{a}$ , pour deux vecteurs **a** et **b**) nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\mathbf{e}_3\mathbf{R}^{-1} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)\right) \mathbf{e}_3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_1\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{e}_3 \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

On retrouve le même résultat qu'en algèbre linéaire où l'image du vecteur  $(0, 0, 1)^T$  est donnée

$$\text{par : } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De plus, la formule (1.11) peut être utilisée aussi bien pour des vecteurs que pour des multivecteurs. La rotation d'un multivecteur **X** est donnée par :

$$\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}$$

où **R** est un rotor.

Nous allons maintenant montrer comment étendre cette formule pour exprimer les rotations  $nD$ . Nous savons d'après la proposition 1 (page 13) issue de [Aud03] que les rotations  $nD$  sont la composition de rotations planes. Ainsi si  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  sont des rotors codant respectivement la rotation d'angle  $\theta_1$  dans le plan  $P_1$  représenté par un bivecteur (décomposable)  $\mathbf{P}_1$  et la rotation d'angle  $\theta_2$  dans le plan  $P_2$  de représentant  $\mathbf{P}_2$  alors l'image  $\mathbf{p}'$  de  $\mathbf{p}$  par la composition de ces deux rotations est donnée par :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{p}(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)^{-1} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{p}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2^{-1}.$$

Cette formule peut se généraliser à un nombre quelconque de rotations. Le rotor associé à la composition de  $k$  rotations est le produit (dans l'ordre inverse de composition) des rotors. Comme la multiplication dans les algèbres géométriques n'est pas commutative, l'ordre des éléments intervenant dans ce produit est important.

Dans l'algèbre géométrique, toute rotation  $nD$  s'écrit donc sous la forme compacte :  $\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}$  où l'élément **R** est un rotor et **X** est un élément de l'algèbre dont nous voulons calculer l'image. Comme l'élément **R** est une combinaison linéaire d'éléments de l'algèbre (ou un produit de ces combinaisons linéaires), l'élément **R** est un élément de l'algèbre.

Dans la partie précédente, nous avons vu que les quaternions pouvaient représenter les rotations. Les rotors le permettent également et ce, en dimension quelconque. Nous voyons maintenant le lien entre ces deux notions. Soit la rotation d'angle  $\theta$  dans un plan représenté par le

bivecteur  $\mathbf{P}$  dont son vecteur normal est représenté par le quaternion pur (*i.e.* sans partie réelle) et unitaire  $\mathbf{a}$ . Nous avons montré précédemment que le quaternion qui codait la rotation était donné par :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Dans la section 1.2.3, nous venons de montrer que le rotor associé à cette rotation est donné par :

$$\mathbf{R} = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Par identification, nous avons la relation entre la partie imaginaire  $Im(Q)$  du quaternion  $Q$  et la partie 2-vectorielle (*i.e.* partie de grade 2)  $\langle \mathbf{R} \rangle_2$  du rotor. Elle est donnée par :

$$Im(Q) = - \langle \mathbf{R} \rangle_2 \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{I}$  est le pseudo-scalaire (élément de grade  $n$ ). Cette relation exprime la dualité entre le plan de rotation (ici le plan représenté par le bivecteur  $\mathbf{P}$ ) et son vecteur normal c'est-à-dire l'axe de rotation (ici le vecteur  $\mathbf{a}$ ). Nous ne rentrons pas ici dans les détails de cette notion. Elle est définie plus formellement dans l'Annexe B. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter [DFM07].

Après avoir défini la notion de rotor, nous présentons maintenant quelques propriétés des rotors.

**Propriétés des rotors** Nous venons de voir que les rotors peuvent être définis comme le produit géométrique d'éléments de l'algèbre. Ce produit est de la forme :

$$\mathbf{R} = (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \mathbf{P}_1)(\cos \theta_2 - \sin \theta_2 \mathbf{P}_2) \dots (\cos \theta_k - \sin \theta_k \mathbf{P}_k)$$

où les  $\theta_i$  sont les angles de rotation dans les plans représentés par les bivecteurs  $\mathbf{P}_i$ . Chacun des éléments de ce produit est de grade zéro (éléments de la forme  $\cos \theta_i$ ) ou de grade deux (éléments de la forme  $\sin \theta_i \mathbf{P}_i$ ).

D'une manière générale, le produit géométrique d'un vecteur de grade  $a$  et d'un vecteur de grade  $b$  est un vecteur de grade  $c$  avec  $c$  un entier compris entre  $|a - b|$  et  $|a + b|$  par pas de 2 (cette propriété est montrée dans [DFM07]). Par exemple :

$$\begin{aligned} & (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \mathbf{P}_1)(\cos \theta_2 - \sin \theta_2 \mathbf{P}_2) = \\ & \underbrace{\cos \theta_1 \cos \theta_2}_{\text{grade 0}} \underbrace{- \sin \theta_1 \cos \theta_2 \mathbf{P}_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 \mathbf{P}_2}_{\text{grade 2}} \underbrace{- \sin \theta_1 \sin \theta_2 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2}_{\text{grade 4}}. \end{aligned}$$

En raisonnant par récurrence sur  $k$ , nous avons :

**Propriété 2.** *Un rotor  $\mathbf{R}$  s'écrit comme une combinaison linéaire d'éléments de grades pairs.*

Ainsi, pour représenter un rotor, nous avons besoin de stocker non pas  $2^n$  coefficients mais seulement  $2^{n-1}$ .

Nous avons vu que les rotors peuvent être définis à partir de bivecteurs (représentant les plans de rotation). Nous allons maintenant présenter des propriétés sur ces bivecteurs. Celles-ci sont utilisées dans la partie 1.2.3 dans le cadre de notre algorithme de décomposition des rotations  $nD$ .

Nous avons défini dans la partie 1.2.3, les bivecteurs décomposables comme des éléments pouvant s'écrire comme le produit extérieur de deux vecteurs de l'algèbre. Ils sont donc de la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux vecteurs de l'algèbre géométrique. La propriété suivante extraite de [DFM07] nous donne une autre expression d'un bivecteur  $\mathbf{B}$  :

**Propriété 3.** Dans un espace euclidien  $nD$  tout bivecteur  $\mathbf{B}$  peut s'écrire sous la forme d'une somme de 2-vecteurs telle que le produit géométrique de deux des éléments de cette somme soit commutatif.

De manière plus formelle, cela signifie que pour tout bivecteur  $\mathbf{B}$ , il existe des 2-vecteurs  $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$  tels que  $\mathbf{B}$  s'écrive sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_k + \dots + \mathbf{B}_1 \quad (1.13)$$

avec  $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_j \wedge \mathbf{B}_i$  pour  $i \neq j$  et  $\mathbf{B}_i^2 = -|\mathbf{B}_i|^2 < 0$ . L'équation (1.13) est appelée *forme orthogonale* ou *décomposition orthogonale* du bivecteur  $\mathbf{B}$ .

Non seulement, d'après (1.13), un bivecteur  $\mathbf{B}$  peut se décomposer en une somme de 2-vecteurs qui commutent mais en plus nous avons la propriété suivante :

**Propriété 4.** La décomposition orthogonale d'un bivecteur  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$  n'est pas unique si les  $\mathbf{B}_i$  sont de mêmes normes.

Cette propriété est démontrée dans [HS87]. Elle est fondamentale dans la suite de nos travaux car elle nous permet de retrouver les plans de rotation des rotations planaires qui composent la rotation  $nD$  (cf. section 2 du chapitre 2). En effet, dans notre algorithme, les plans de rotation (correspondant aux  $\mathbf{B}_i$ ) sont systématiquement normalisés afin de faciliter les calculs. D'après la propriété 3, choisir n'importe quelles combinaisons de colonnes pour générer les plans de rotation est possible (cf. section 2 du chapitre 2). De plus, cette normalisation nous permet de choisir des couples de vecteurs définissant les plans de rotation car ces plans ne sont pas déterminés de manière unique. En règle générale, avoir des propriétés d'unicité est intéressant ; ici, cette non-unicité est un atout car nous avons plus de « liberté » pour construire les plans de rotation. En termes de matrices, le fait de pouvoir choisir les vecteurs qui engendrent les plans de rotation se traduit par le fait que deux matrices peuvent représenter la même rotation mais peuvent ne pas être égales. Nous en donnons maintenant les conséquences.

Soit  $\mathbf{R}$  un rotor. Il s'exprime sous la forme exponentielle  $\mathbf{R} = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}}$  où  $\mathbf{P}$  et  $\theta$  représentent respectivement le plan et l'angle de la rotation associée. En posant  $\mathbf{B} = \mathbf{P}\frac{\theta}{2}$ , la propriété 3 implique :

$$e^{-\mathbf{B}/2} = e^{-(\mathbf{B}_k + \dots + \mathbf{B}_1)/2} = e^{-\mathbf{B}_k/2} \dots e^{-\mathbf{B}_1/2}. \quad (1.14)$$

où les  $\mathbf{B}_i$  vérifient la propriété de commutativité de la propriété (1.13). La formule (1.14) peut se réécrire sous la forme :

$$e^{-\mathbf{B}/2} = (\mathbf{b}_{2k} \mathbf{b}_{2k-1}) \dots (\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1). \quad (1.15)$$

où les  $\mathbf{b}_i$  sont des vecteurs unitaires tels que  $\mathbf{B}_i = \mathbf{b}_{2i-1} \wedge \mathbf{b}_{2i}$ .

Dans les algèbres géométriques, comme nous le montre Dorst dans [DFM07], l'égalité suivante n'est pas vraie en général :

$$e^{\mathbf{B}} e^{\mathbf{A}} = e^{\mathbf{B}+\mathbf{A}}$$

avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  des bivecteurs. Cette égalité est seulement vraie si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  commutent.

Nous avons vu que les rotors offrent l'avantage de pouvoir exprimer les rotations (et les composées de rotations) de manière compacte. De plus, la représentation des rotations par les rotors est valable en toute dimension. Néanmoins, nous voyons dans le paragraphe suivant que les rotors nécessitent beaucoup de place en mémoire pour être stockés.

**Stockage en machine des rotors** Nous avons vu qu'il y a  $2^n$  éléments dans l'algèbre et que les rotors sont des combinaisons linéaires des éléments de grade pair (propriété 2). Comme il y a  $2^{n-1}$  éléments de grade pair dans l'algèbre<sup>20</sup>, il faut  $2^{n-1}$  coefficients pour stocker en mémoire un rotor. À titre de comparaison,  $n^2$  coefficients sont nécessaires pour stocker une matrice de rotation. À partir de la dimension 7, les matrices utilisent beaucoup moins de coefficients que les rotors. La complexité spatiale est donc plus élevée par l'utilisation des rotors (en  $\Theta(2^{n-1})$ ) que des matrices (en  $\Theta(n^2)$ ) à partir de la dimension 7. Par exemple, en dimension 10, il faudra stocker  $10^2 = 100$  coefficients en mémoire pour stocker une matrice contre  $2^9 = 512$  coefficients pour stocker un rotor. Comme un coefficient est souvent codé sur 4 octets, dans le cas de matrices, 400 octets sont nécessaires contre 2048 dans le cas des rotors.

Les rotors sont des cas particuliers de spineurs que nous étudions dans la section suivante.

### 1.2.4 Spineurs

Les spineurs [HS87, Dor94, Lou09] sont définis comme des produits d'un nombre pair de vecteurs unitaires. Si  $\mathbf{S}$  est un spineur, alors il vérifie :

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1} = \pm 1. \quad (1.16)$$

Ces spineurs forment un groupe : le groupe des spineurs noté  $\text{Spin}(n)$ .

Comme un rotor  $\mathbf{R}$  est une combinaison linéaire d'éléments de grade pair vérifiant  $\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} = +1$ , les rotors sont donc des cas particuliers de spineurs. Les rotors forment un sous-groupe du groupe  $\text{Spin}(n)$  appelé *groupe Spin spécial*. Comme l'espace  $E$  est muni d'une forme quadratique définie positive, les groupes  $\text{Spin}$  et  $\text{Spin}$  spécial coïncident. Les spineurs peuvent donc décrire les rotations dans le cadre des algèbres géométriques. Les spineurs n'ont pas été introduits par les mathématiciens mais par les physiciens. Les notions de spineurs et de rotors sont très proches mais elles ont été développées en parallèle et de manière totalement indépendante [Hla96].

De manière plus formelle, le groupe  $\text{Spin}$  est défini par :

$$\text{Spin}(n) = \{\mathbf{X} \in \mathcal{G}_n^+, \|\mathbf{X}\| = 1, \mathbf{X}\mathbf{v}\mathbf{X}^{-1} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n\} \quad (1.17)$$

où  $\mathcal{G}_n^+$  est la sous-algèbre géométrique des éléments de grade pair (combinaisons linéaires d'éléments de grade pair) associée à l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Cela est équivalent à :

$$\text{Spin}(n) = \left\{ \prod_{i=1}^{2k} \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \in \mathcal{G}_n^+, |\mathbf{a}_i| = 1 \right\}. \quad (1.18)$$

Par exemple, en dimension 3, le groupe  $\text{Spin}$  est le groupe des éléments de grade pair  $\mathbf{X}$  de l'algèbre (*i.e.* des combinaisons linéaires de scalaires et bivecteurs), de norme 1 tel que tout vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^3$ , l'élément  $\mathbf{X}\mathbf{v}\mathbf{X}^{-1}$  soit un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ . En utilisant la définition alternative (1.18), le groupe  $\text{Spin}$  en dimension 3 est donné par :

$$\text{Spin}(3) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X} = \alpha_1 + \alpha_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \alpha_{23}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + \alpha_{31}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1, \\ \alpha_1, \alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31} \in \mathbb{R}, \alpha_1^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2 = 1. \end{array} \right\}$$

20. En effet, les deux formules suivantes sont vraies :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0,2,4}^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} + \sum_{k=1,3,5}^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

En posant  $a = 1$  et  $b = -1$  dans la deuxième formule, les termes pairs et impairs s'annulent. Leurs sommes sont donc égales et ainsi les deux termes  $\sum_{k=0,2,4}^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k}$  et  $\sum_{k=1,3,5}^{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \binom{n}{k}$  sont égaux. Ils valent chacun  $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ .

avec les relations  $\mathbf{e}_i^2 = -1$  et  $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = -\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i$ . Chaque élément de  $SO(3)$  peut être représenté par un élément de  $\text{Spin}(3)$ . En effet, pour tout élément  $\mathbf{v}$  de  $\text{Spin}(3)$ , l'application  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}\mathbf{x}\mathbf{v}^{-1}$  représente une rotation de  $\mathbb{R}^3$ .

De plus, le groupe  $\text{Spin}(3)$  est isomorphe à celui des quaternions unitaires  $\mathbb{H}_1$ . En effet, d'après la définition de  $\text{Spin}(3)$  et en utilisant l'identification :

$$\begin{cases} i & \mapsto \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \\ j & \mapsto \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \\ k & \mapsto \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \end{cases} \quad (1.19)$$

il en résulte que  $\text{Spin}(3) \sim \mathbb{H}_1$ . Ainsi, si  $\mathbf{X} = w1 + xi + yj + zk \in \text{Spin}(3)$ , pour tout vecteur  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{v}\mathbf{X}^{-1} &= \mathbf{X}(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\mathbf{X}^{-1} \\ &= \mathbf{X}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\mathbf{X}^{-1} && \text{car } (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = 1 \\ &= (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{X}(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3)\mathbf{X}^{-1} \text{ d'après } (\star) \\ &= -(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{X}(v_1i + v_2j + v_3k)\mathbf{X}^{-1} \end{aligned}$$

où  $(\star)$  est définie par les relations :  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -i$  (d'après 1.19),  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -j$  et  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -k$ . Par conséquent, toute rotation induite par  $\mathbf{X} \in \text{Spin}(3)$  peut être vue comme une rotation induite par le quaternion pur  $v_1i + v_2j + v_3k$  en utilisant les applications :

$$\mathbf{v} \mapsto -(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{v} \text{ et } \mathbf{X} \mapsto -(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\mathbf{X}$$

pour convertir le vecteur  $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$  en le quaternion pur  $w1 + xi + yj + zk$  et inversement. Cet isomorphisme permet donc de faire le lien entre les quaternions présentés dans la partie 1.1.2 et les spineurs.

### 1.3 Avantages et inconvénients des différentes représentations

Comme nous venons de le voir dans les sections précédentes, les rotations peuvent être représentées sous différentes formes. Dans cette partie, nous synthétisons ces différentes représentations ainsi que leurs avantages et leurs inconvénients afin de choisir celle qui nous convient le mieux pour décomposer les rotations  $nD$ .

Représentations	Avantages	Inconvénients
Matrices	Représentation la plus usuelle.	Utilisation des angles d'Euler découlant de cette représentation peut induire le problème du blocage de cardan.
Quaternions	Manipulation plus simple que les matrices.	Pas adaptés aux dimensions supérieures ou égales à 4.
Rotors/spineurs	Adaptés au raisonnement et à la preuve mathématique (même en dimension élevée).	Moins pratique pour une utilisation machine (base des multivecteurs de taille exponentielle en la dimension).

Le but du chapitre 2 de ce manuscrit est de décomposer les rotations en  $nD$ . Pour les manipuler, nous devons donc utiliser une représentation valable en toute dimension et facile à

manipuler. À la vue des différentes représentations présentées ci-dessus et de nos exigences précédemment citées, il en résulte que les rotors sont les plus appropriés dans notre contexte. Ainsi, dans la suite de ce manuscrit et en particulier dans les contributions du chapitre 2, nous utilisons la notion de rotors.

## 2 Méthodes de décomposition des rotations existantes

La détermination des paramètres des rotations à partir de vecteurs et de leurs images est utilisée dans de nombreux domaines d'applications comme par exemple la vision par ordinateur [SS01] pour déterminer la position des objets et de la caméra ou en médecine [Che04, CNP00] pour déterminer les mouvements des membres.

Dans beaucoup de cas, estimer les rotations en 3D suffit. Mais, de plus en plus, nous avons besoin de nous placer en dimensions supérieures comme par exemple en analyse d'images couleurs ou en calcul de visibilité globale [CAF07] qui utilise l'espace de Plücker [Ave09, Cha07] de dimension 6 (où une droite de  $\mathbb{R}^3$  est représentée par six coordonnées). Cet espace n'est pas séparable au sens où il ne peut pas être décomposé en deux sous-espaces de dimension 3 (dans lequel nous pourrions estimer une rotation 3D). Cela nécessite donc de pouvoir déterminer les paramètres des transformations et en particulier des rotations en dimension quelconque.

Il existe peu de méthodes pour déterminer les caractéristiques d'une rotation. Le but de cette partie est de faire l'inventaire des différentes méthodes existantes et, pour chacune d'entre elles, d'en donner les intérêts et les limites.

Nous classons ces méthodes en trois groupes. Nous distinguons les méthodes « géométriques », les méthodes « algébriques » et les méthodes « isogonales ». Les méthodes géométriques sont basées sur des considérations géométriques (utilisation de médiatrices par exemple). Les méthodes algébriques utilisent le formalisme de l'algèbre géométrique que nous venons de présenter dans la section 1.2.1. Les méthodes isogonales décomposent les rotations  $nD$  en rotations planes d'angles égaux. Ces classes ne sont pas exclusives : certaines méthodes comme celle de Dorst [FD10] sont communes à deux catégories. Elle peut être considérée aussi bien comme une méthode algébrique que comme une méthode géométrique au sens où nous les avons définies.

### 2.1 Méthodes « géométriques »

Dans cette section, nous présentons les méthodes de décomposition des rotations qui utilisent des constructions géométriques (médiatrices par exemple).

#### Première méthode de Cheng [CNP00]

Dans son article, Cheng cherche à déterminer les paramètres des rotations 3D modélisant le mouvement des membres entre deux positions.

Le mouvement d'une position à une autre d'un membre peut être modélisé de différentes façons. D'une manière générale, ce mouvement 3D peut être vu comme la composition d'une translation et de rotations. Dans [CNP00], Cheng suppose la translation connue et ne considère

ainsi que les rotations. Ce mouvement 3D est ainsi équivalent à une rotation 3D et peut ainsi être vu comme la composition de deux rotations planes. Comme nous l'avons vu dans la section 1.1, la composée de deux rotations planes est une rotation 3D.

Son raisonnement est illustré par la figure 1.8. Soient  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  les deux vecteurs unitaires représentant respectivement les positions initiale et finale du membre. La rotation permettant de passer de  $\mathbf{n}_1$  à  $\mathbf{n}_2$  est la composée de la rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $\Pi$  défini par  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  (*i.e.* une rotation d'axe  $\mathbf{n}$  où  $\mathbf{n}$  est la normale au plan  $\Pi$ ) et d'une rotation d'angle  $\phi$  et d'axe  $\mathbf{n}_2$  comme le montre la figure 1.8(a). La première se fait par rapport à l'axe longitudinal du membre et l'autre par rapport à l'axe passant par l'articulation, perpendiculaire à l'axe longitudinal du membre.

Ces deux rotations sont indépendantes au sens où elles commutent. La méthode de Cheng permet de retrouver les paramètres de ces rotations c'est-à-dire les valeurs de  $\theta$  et  $\mathbf{n}$  pour la première rotation et de  $\phi$  pour la deuxième.

Connaissant les positions initiale et finale (resp.  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$ ), les paramètres  $\theta$  et  $\mathbf{n}$  peuvent être retrouvés. En effet, nous avons d'une part,  $\cos \theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$  (car  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$  sont normés) et d'autre part  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|}$  où  $\times$  désigne le produit vectoriel.

Considérons maintenant  $\mathbf{n}_{x_1}$  l'axe des  $x$  avant la rotation. Après la première rotation d'angle  $\theta$ , on le retrouve en position  $\mathbf{n}_{x_2}$  puis en position  $\mathbf{n}_{x_3}$  après la rotation d'angle  $\phi$  (*cf.* figure 1.8). L'angle  $\phi$  est calculé grâce au produit scalaire entre  $\mathbf{n}_{x_2}$  et  $\mathbf{n}_{x_3}$ . Comme nous avons précédemment calculé l'angle  $\theta$  ainsi que l'axe  $\mathbf{n}$  et que les vecteurs  $\mathbf{n}_{x_1}$  et  $\mathbf{n}_{x_3}$  sont connus, le vecteur  $\mathbf{n}_{x_2}$  peut être calculé grâce à la formule de Rodrigues [Rod40] :

$$R(\theta, \mathbf{n}) = \cos(\theta)I + (1 - \cos(\theta))\mathbf{nn}^T + \sin(\theta)[\tilde{\mathbf{n}}] \quad (1.20)$$

où

\*  $R(\theta, \mathbf{n})$  désigne la matrice de rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{n} = (l_1, l_2, l_3)$  ;

\*  $I$  est une matrice de rotation  $3 \times 3$  unitaire ;

\*  $[\tilde{\mathbf{n}}]$  est la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -l_3 & l_2 \\ l_3 & 0 & -l_1 \\ -l_2 & l_1 & 0 \end{pmatrix}$  ;

L'avantage de cette méthode est qu'elle est en accord avec les descriptions cliniques. Elle permet de décrire de manière naturelle la rotation 3D d'un membre. Dans le contexte médical dans lequel cette méthode a été développée, la 3D est suffisante. Néanmoins, cette méthode étant très liée au contexte applicatif, elle ne peut pas être étendue aux dimensions supérieures.

### Deuxième méthode de Cheng [Che04]

Dans [Che04], Cheng donne une nouvelle méthode de description clinique des rotations 3D des articulations entre deux positions dans un système de coordonnées sphériques. Il montre ainsi que la rotation peut se décomposer de deux manières en deux rotations indépendantes.

Soit  $XYZ$  le système de coordonnées de référence. Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs (normés) représentant respectivement l'orientation initiale et l'orientation finale d'une rotation 3D d'un membre. Ces vecteurs peuvent être exprimés dans le système de coordonnées sphériques. Plutôt que d'exprimer les vecteurs par un triplet  $(x, y, z)$  où  $x, y$  et  $z$  représentent respectivement ces coordonnées dans un repère, les coordonnées du vecteur sont paramétrées par deux angles

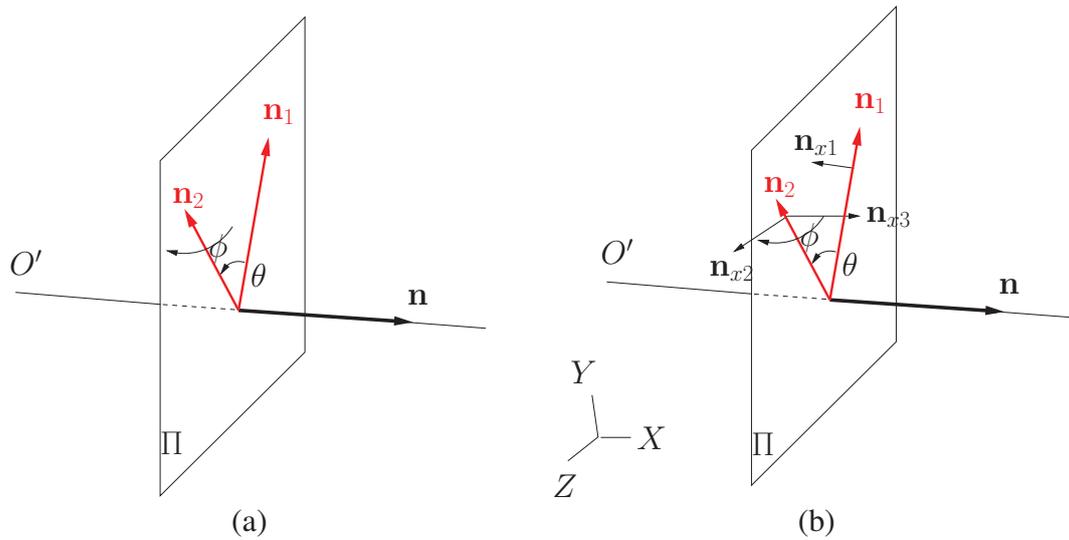


FIGURE 1.8 – (a) Les vecteurs avant et après la rotation sont respectivement  $\mathbf{n}_1$  et  $\mathbf{n}_2$ . L'angle  $\theta$  représente l'angle de la rotation dans le plan de vecteur normal  $\mathbf{n}$  et  $\phi$  celui de la rotation autour de  $\mathbf{n}_2$ . (b) Position des vecteurs  $\mathbf{n}_{x1}$  (position de l'axe des  $x$  avant la rotation),  $\mathbf{n}_{x2}$  (image de  $\mathbf{n}_{x1}$  par la rotation d'angle  $\theta$  autour de  $\mathbf{n}$ ) et  $\mathbf{n}_{x3}$  (image de  $\mathbf{n}_{x2}$  par la rotation d'angle  $\phi$  autour de  $\mathbf{n}_2$ ).

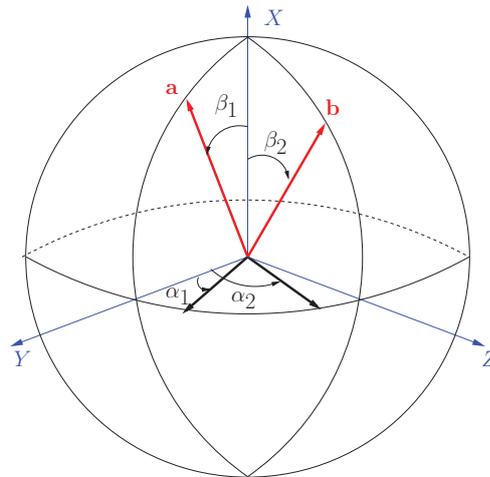


FIGURE 1.9 – Représentation dans le système de coordonnées sphériques des vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Les vecteurs sont identifiés grâce à deux angles (les  $\alpha_i$  représentent les longitudes et les  $\beta_i$  les latitudes).

représentant la latitude et la longitude du vecteur dans l'espace. Ce système de coordonnées est illustré par la figure 1.9.

Dans ce système, le vecteur  $\mathbf{a}$  a pour coordonnées  $(\cos \beta_1, \sin \beta_1 \cos \alpha_1, \sin \beta_1 \sin \alpha_1)$  et le vecteur  $\mathbf{b}$  a pour coordonnées  $(\cos \beta_2, \sin \beta_2 \cos \alpha_2, \sin \beta_2 \sin \alpha_2)$  où les  $\alpha_i$  représentent les longitudes et les  $\beta_i$  les latitudes.

Les valeurs des latitudes et longitudes peuvent être facilement calculées connaissant les coordonnées  $(a_i)_{i=1\dots 3}$  et  $(b_i)_{i=1\dots 3}$  des vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  dans le système de coordonnées de référence  $XYZ$ .

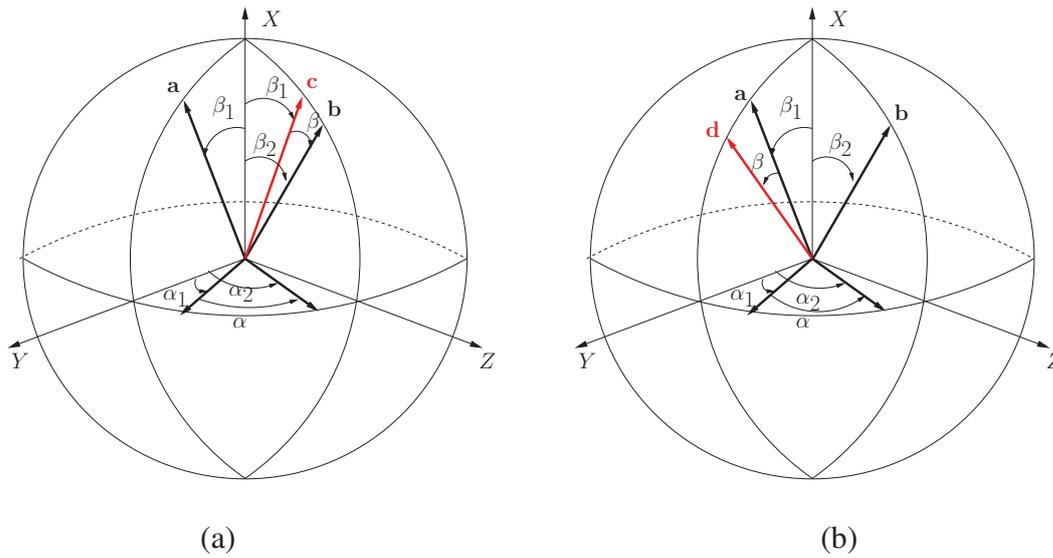


FIGURE 1.10 – La rotation de **a** à **b** peut se faire de deux manières. (a) le changement de longitude est suivi d'un changement de latitude ; on passe de **a** à **b** en passant par **c** (b) le changement de latitude est suivi d'un changement de longitude : le passage de **a** à **b** se fait en passant par **d** ; dans les deux cas, les deux rotations commutent.

Le mouvement de **a** à **b** peut donc être décrit par les changements de longitude et de latitude dans le système de coordonnées sphériques par  $\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$  et  $\beta = \beta_2 - \beta_1$ . Ainsi, le passage de la position **a** à la position **b** peut se faire de deux manières. Soit on tourne d'un angle  $\alpha$  puis d'un angle  $\beta$ , cela définit une première rotation  $R_1$ . Soit on tourne d'un angle  $\beta$  puis d'un angle  $\alpha$  cela définit une deuxième rotation  $R_2$ . Ces deux rotations sont représentées respectivement sur la figure 1.10(a) et 1.10(b). Les deux rotations composant  $R_1$  sont indépendantes l'une de l'autre : elles commutent comme cela est prouvé dans [Che04]. Il en est de même pour  $R_2$ .

Cette méthode permet de représenter et d'étudier les mouvements des articulations de l'homme. Elle est efficace et fiable pour la bio-mécanique, domaine pour lequel elle a été développée. Cependant, elle ne peut pas être généralisée à d'autres dimensions.

### Méthode de Watson [Wat06]

Les transformations de Helmert [STM10] permettent de modéliser la composition de rotations, d'homothéties et de translations. Dans [Wat06], Watson montre comment retrouver les paramètres de ces transformations à partir d'un ensemble donné de  $m$  points  $(\mathbf{p}_i)_{i=1\dots m} \in \mathbb{R}^3$  et de leurs images  $(\mathbf{q}_i)_{i=1\dots m} \in \mathbb{R}^3$ .

La transformation de Helmert (dite à 7 coefficients) associée à ces points est donnée par :

$$\mathbf{p}_i = dR(\phi)\mathbf{q}_i + \mathbf{t} \quad \text{pour } i = 1 \dots m \quad (1.21)$$

où :

- \*  $R(\phi) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$  avec  $\phi = (\alpha, \beta, \gamma)^T$  et  $R_k(j)$  est la matrice de rotation d'angle  $j$  d'axe  $k$  ;
- \*  $d \in \mathbb{R}$  est le facteur d'échelle de l'homothétie que l'on représente ;

\*  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur de translation.

Ici, Watson cherche à estimer les paramètres  $(\phi, d, \mathbf{t})$  connaissant les  $(\mathbf{p}_i)_{i=1\dots m} \in \mathbb{R}^3$  et leurs images  $(\mathbf{q}_i)_{i=1\dots m} \in \mathbb{R}^3$ . Pour cela, il convient de chercher la solution d'un problème de moindres carrés qui minimise la fonction :

$$F = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{p}_i - dR\mathbf{q}_i - \mathbf{t}\|^2. \quad (1.22)$$

D'après [Wat06], cette solution est indépendante de  $d$ . Ainsi la solution  $\phi$  recherchée minimise la quantité  $\sum_{i=1}^m \|\mathbf{p}_i - R(\phi)\mathbf{q}_i - \mathbf{t}\|^2$ . Les valeurs de  $\mathbf{t}$  et de  $d$  sont ensuite obtenues par différentiation de la fonction  $F$ . Watson propose aussi une méthode numérique dans le cas où le facteur d'échelle  $d$  n'est plus une constante mais une matrice diagonale  $D = \text{Diag}(d_1, d_2, d_3)$ . Cela généralise donc sa méthode précédente car le facteur de l'homothétie est différent selon les axes. Dans ce cas là, la transformation de Helmert est définie par, non plus 7 coefficients  $(\alpha, \beta, \delta, t_1, t_2, t_3, d)$ , mais 9. Elle est donnée par :

$$\mathbf{p}_i = DR(\phi)\mathbf{q}_i + \mathbf{t} \quad \text{pour } i = 1 \dots m.$$

De la même manière, il convient de minimiser la fonction  $F' = \sum_{i=1}^m \|\mathbf{p}_i - DR\mathbf{q}_i - \mathbf{t}\|^2$ . Les valeurs de  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3)$  et  $\mathbf{t}$  peuvent être trouvées en résolvant des systèmes d'équations linéaires issus de la différentiation par rapport à  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{t}$  de la formule précédente. Connaissant maintenant les valeurs de  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{t}$ , minimiser (1.22) revient à minimiser une fonction de  $\phi$ . Pour cela, Cheng utilise une méthode numérique : celle de Gauss-Newton [Bie06] qui permet de résoudre le problème des moindres carrés de la formule (1.22). Cette méthode requiert la connaissance d'une valeur initiale de  $\phi$  qui est ensuite ajustée par la méthode numérique pour minimiser la quantité  $F'$ . Cette valeur initiale est calculée à partir d'une décomposition de la matrice  $(\sum_{i=1}^m \mathbf{q}_i \mathbf{p}_i^T) - m\bar{\mathbf{p}}\bar{\mathbf{q}}^T$ . Cette décomposition est appelée *décomposition en valeurs singulières* (SVD). Nous ne détaillons pas ici le principe. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à l'annexe A. À partir de cette valeur calculée, il applique la méthode numérique de Gauss-Newton qui fournit la valeur de  $\phi$  minimisant  $F'$ . Ainsi, les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  sont obtenus. Sa méthode a été implémentée avec Matlab et en pratique, elle converge en peu d'itérations<sup>21</sup>. Cette méthode serait donc adaptée pour retrouver les paramètres des rotations 3D centrée en l'origine. Il suffit pour cela de remplacer  $d$  par 1 (ou  $D$  par l'identité) et  $\mathbf{t}$  par  $(0, 0, 0)$ . Les transformations de Helmert ne modélisent que des transformations en dimension 3. Ainsi, la méthode de Watson telle qu'elle est donnée dans [Wat06] n'est utilisée qu'en dimension 3. Une généralisation en dimension supérieure est une piste ouverte qui reste à étudier.

### Méthode de Aragón [AGARAVS09], méthode de Fontijne [FD10]

Dans cette section, nous présentons conjointement les travaux d'Aragón et de Fontijne qui sont assez proches. Leur approche est différente des méthodes que nous venons de présenter. Elles sont basées sur le théorème de Cartan-Dieudonné que nous avons vu dans la section 1.2.2. Rappelons que ce théorème permet de décomposer toute rotation  $nD$  en au plus  $n$  réflexions. De plus, comme la composée de deux réflexions est une rotation plane, toute rotation  $nD$  peut se décomposer en au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  rotations planaires. Dans [AGARAVS09], Aragón montre de

21. Ces itérations sont dues à l'utilisation de la méthode numérique de Gauss-Newton.

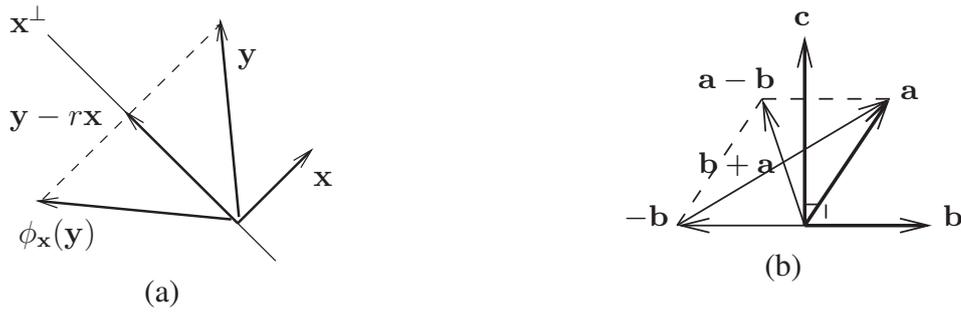


FIGURE 1.11 – (a) Réflexion du vecteur  $y$  par rapport à l'hyperplan  $x^\perp$ , (b) Rotation qui envoie le vecteur  $a$  sur le vecteur  $b$  peut être vue comme la composition de la réflexion par rapport aux hyperplans  $(a + b)^\perp$  et  $b^\perp$ .

manière constructive<sup>22</sup> ce théorème. À partir de cette preuve constructive, nous pouvons en déduire un algorithme de décomposition des rotations. Dans [FD10], Fontijne présente un algorithme de décomposition des rotations en reconstruisant les réflexions qui les composent. En fait, cela revient à appliquer la preuve constructive d'Aragón. Il conviendra de noter que la méthode de Fontijne est applicable aussi bien à des rotations affines qu'à des rotations vectorielles contrairement à notre approche qui n'est que vectorielle. Toutefois, comme nous le montrons dans la section 6 du chapitre 3, l'algorithme est très sensible au bruit.

**Preuve constructive du théorème de Cartan-Dieudonné [AGARAVS09]** Le but de l'article d'Aragón [AGARAVS09] est, comme nous venons de le mentionner, de fournir une preuve constructive du théorème de Cartan-Dieudonné. Néanmoins, même si cela n'est pas le but des auteurs, cette preuve peut fournir un algorithme permettant de reconstruire les réflexions qui composent la rotation.

Soient  $v$  un vecteur et  $v^\perp$  l'hyperplan composé par les vecteurs orthogonaux à  $v$ . Notons  $\phi_v(x)$  la réflexion du vecteur  $x$  par rapport à l'hyperplan  $v^\perp$  comme illustré sur la figure 1.11(a). Cette réflexion est donnée par :

$$\phi_v(x) = x - 2 \frac{v \cdot x}{\|v\|^2} v = x - 2rv \text{ avec } r = \frac{v \cdot x}{\|v\|^2}$$

Dans un espace euclidien  $E$ , une réflexion  $\phi$  est déterminée de manière unique par un vecteur  $a$  et son image  $\phi(a) = b$  où  $a$  et  $b$  sont des vecteurs non nuls avec  $b \neq a$  et  $\|a\| = \|b\|$ . Cette réflexion est définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_a(x) & \text{si } b = -a \\ \phi_{a-b}(x) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.23)$$

La décomposition en réflexions de la rotation  $R$ , et de manière générale de toute transformation orthogonale, peut être déterminée par un processus incrémental qui construit la réflexion à chaque étape comme montré sur la figure 1.11(b). La méthode est la suivante. Considérons  $R$  une rotation et un ensemble de vecteurs  $(e_1, \dots, e_n)$  formant une base de  $E$ . À la première étape, on choisit  $a = e_1$  et  $b = R(e_1)$  qui définissent la première réflexion  $\phi_1$  par rapport à l'hyperplan  $a_1^\perp$  (dans ce cas  $a_1$  est soit  $e_1$ , soit  $e_1 - R(e_1)$ , d'après la formule (1.23)). À la

22. Une preuve constructive permet de prouver l'existence d'un objet mathématique en le créant ou en donnant une méthode pour le créer.

$k$ -ième étape, on choisit  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_k$  et  $\mathbf{b} = \phi_{k-1} \circ \dots \circ \phi_1 \circ R(\mathbf{e}_k)$ . Les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  définissent la  $k$ -ième réflexion  $\phi_k$  par rapport à l'hyperplan  $\mathbf{a}_k^\perp$ .

À la fin du processus, on obtient :

$$R = \phi_1^{-1} \circ \phi_2^{-1} \circ \dots \circ \phi_n^{-1} = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n.$$

Comme nous décomposons des rotations, le nombre de réflexions est pair et d'après le théorème de Cartan-Dieudonné, il est inférieur à  $n$ . Ainsi, si l'espace est de dimension  $n$  impaire, nous avons au plus  $n - 1$  réflexions. Par conséquent, comme la méthode en construit exactement  $n$ , au moins une des réflexions est l'identité.

Nous avons réalisé des expérimentations basées sur cette approche avec Matlab en utilisant le module des algèbres géométriques Gable [DMB02]. Cette approche donne de bons résultats si les données sont exactes. Cependant, si les données sont bruitées, c'est-à-dire qu'une perturbation est introduite, cette méthode n'est pas utilisable. En effet, en 3D nous obtenons trois réflexions et nous savons que l'une d'entre elles est l'identité (car en 3D la rotation est la composée de deux réflexions). Dans le cas de données bruitées, on ne sait pas reconnaître cette réflexion et donc l'hyperplan qui ne doit pas être pris en compte.

Considérons par exemple la rotation 3D composée de la rotation d'angle  $\pi/4$  autour de l'axe des  $X$  suivie de la rotation autour de l'axe des  $Y$  d'angle  $\pi/6$ . Les images des vecteurs de la base canonique sont respectivement données par :  $\mathbf{y}_1 = (\sqrt{3}/2, 0, -1/2)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (\sqrt{2}/4, \sqrt{2}/2, \sqrt{6}/4)$  et  $\mathbf{y}_3 = (\sqrt{2}/4, -\sqrt{2}/2, \sqrt{6}/4)$ . Considérons maintenant que nous travaillons à une précision de  $10^{-3}$ . À la première étape de l'algorithme, nous avons  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{b} = 0.866\mathbf{e}_1 - 0.500\mathbf{e}_3$ . La première réflexion  $\phi_1$  est la réflexion par rapport à l'hyperplan dual de l'axe  $\mathbf{a}_1 = -0.134\mathbf{e}_1 - 0.500\mathbf{e}_3$ . À la deuxième étape, les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont donnés respectivement par  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{b} = 0.001\mathbf{e}_1 + 0.707\mathbf{e}_2 - 0.707\mathbf{e}_3$ . La deuxième réflexion  $\phi_2$  est, par conséquent, la réflexion par rapport à l'hyperplan dual de l'axe  $\mathbf{a}_2 = -0.293\mathbf{e}_2 - 0.707\mathbf{e}_3$ . Finalement à la dernière étape de l'algorithme, nous obtenons les vecteurs  $\mathbf{a} = \mathbf{e}_3$  et  $\mathbf{b} = -0.001\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ . La troisième réflexion  $\phi_3$  est donc l'identité car à cette précision le vecteur et son image sont les mêmes. À partir des axes de réflexions  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  nous pouvons en déduire le plan de rotation. Dans ce cas, cet algorithme fournit bien le plan de rotation recherché ; l'angle de rotation de  $53.670^\circ$  est ensuite obtenu par projection des couples vecteurs/images sur le plan de rotation trouvé. Reprenons maintenant le même exemple mais en travaillant à des précisions de  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$ . Nous donnons les couples  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ainsi que les axes  $\mathbf{a}_i$  obtenus aux différentes étapes de l'algorithme dans chaque cas :

Précision de  $10^{-2}$  :

Étape 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{b} = 0.87\mathbf{e}_1 - 0.50\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_1 = -0.13\mathbf{e}_1 - 0.50\mathbf{e}_3$$

Étape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b} = 0.01\mathbf{e}_1 + 0.71\mathbf{e}_2 - 0.70\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_2 = -0.29\mathbf{e}_2 - 0.70\mathbf{e}_3$$

Étape 3 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = -0.01\mathbf{e}_1 - 0.01\mathbf{e}_2 + 1.00\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_3 = -0.01\mathbf{e}_1 - 0.01\mathbf{e}_2$$

Précision de  $10^{-1}$  :

Étape 1 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{b} = 0.9\mathbf{e}_1 - 0.5\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_1 = -0.2\mathbf{e}_1 - 0.5\mathbf{e}_3$$

Étape 2 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{b} = -0.2\mathbf{e}_1 + 0.7\mathbf{e}_2 - 0.6\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_2 = -0.2\mathbf{e}_1 - 0.3\mathbf{e}_2 - 0.6\mathbf{e}_3$$

Étape 3 :

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} = 0.3\mathbf{e}_1 - 0.1\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a}_3 = -0.3\mathbf{e}_1$$

Dans les deux cas, on voit facilement que retrouver l'axe  $a_i$  dont la réflexion par rapport à son hyperplan orthogonal est l'identité, c'est-à-dire qui laisse invariant le vecteur  $a$ , n'est pas immédiat. Par exemple, à la précision de  $10^{-1}$ , il est difficile d'identifier à quelle étape les vecteurs  $a$  et  $b$  sont égaux. Une solution serait de ne pas tenir compte de l'axe dont la norme est la plus faible (ici  $a_3$ ). Cela permet de résoudre le problème en 3D.

Dans le cas de la 3D, nous savons qu'il n'y a qu'une et une seule réflexion qui laisse les vecteurs  $a$  et  $b$  invariants. Nous savons donc que l'une des trois réflexions est l'identité. Néanmoins en dimension supérieure à 3, il n'est pas possible de savoir *a priori* le nombre de réflexions correspondant à l'identité. Par exemple, considérons une rotation 5D. Elle peut être décomposée en deux ou quatre réflexions. On ne peut pas déterminer combien de plans ne doivent pas être pris en compte. On peut en effet avoir une ou trois réflexions laissant les vecteurs  $a$  et  $b$  invariants.

De plus, l'approche incrémentale cumule les erreurs. Ainsi une petite erreur dans la détermination de  $\phi_k$  entraîne une erreur, parfois importante, dans les déterminations des  $\phi_{k+i}$  suivantes. Pour une étape donnée, considérons comme mesure d'erreur la norme du vecteur de la différence entre le vecteur  $a_i$  obtenu à la précision  $10^{-3}$  et celui obtenu à la précision  $10^{-1}$ . Dans l'exemple précédent, l'erreur à la deuxième étape est très supérieure à celle de la première étape. Ainsi, l'algorithme, déduit de la preuve du théorème de Cartan-Dieudonné, de [AGARAVS09], ne peut pas être utilisé en pratique. Dans la section suivante, nous allons néanmoins expliquer comment Fontijne, de manière indépendante à Aragón, l'a mis en pratique et nous présentons brièvement la notion de *médiatrice généralisée* que nous utilisons dans le chapitre 3 pour évaluer l'erreur engendrée par son algorithme.

### Méthode de Fontijne [FD10]

Dans [FD10], Fontijne, propose une méthode pour reconstruire une rotation  $nD$  à partir de  $n$  points et de leurs images. Il se place donc dans un cadre affine. On peut donc considérer des rotations qui ne sont pas centrées en l'origine. Néanmoins, sa méthode peut aussi être appliquée dans un cadre vectoriel. Cette méthode équivaut à la mise en pratique de la preuve constructive du théorème de Cartan-Dieudonné qu'a fourni Aragón dans [AGARAVS09].

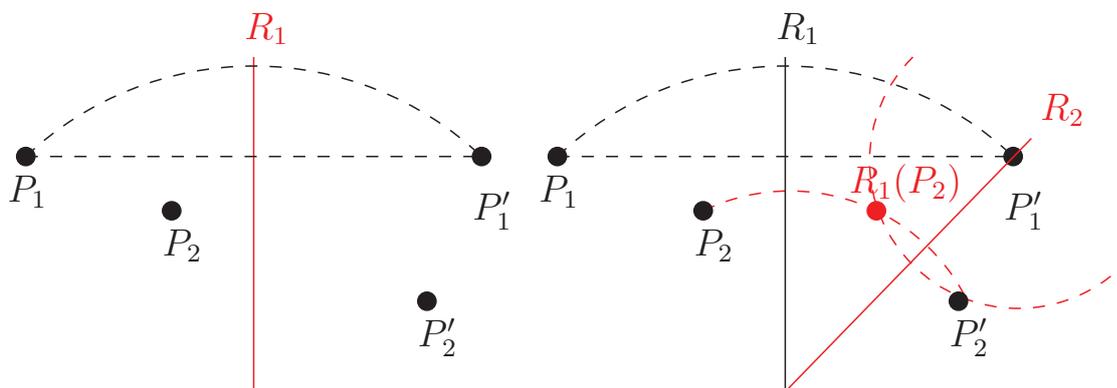


FIGURE 1.12 – Reconstruction d'une rotation 2D. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux points et  $P'_1$  et  $P'_2$  leurs images par une rotation  $R$  à reconstruire. L'axe  $R_1$  est l'axe de réflexion qui envoie le point  $P_1$  sur  $P'_1$ . Ensuite on place  $R_1(P_2)$  l'image de  $P_2$  par la réflexion d'axe  $R_1$ . L'axe  $R_2$  est l'axe permettant d'envoyer ce point sur  $P'_2$ . La rotation  $R = R_2(R_1(\cdot))$  est la rotation centrée en l'intersection de  $R_1$  et  $R_2$ . Son angle est égal à deux fois la valeur de l'angle formé par les droites  $R_1$  et  $R_2$ .

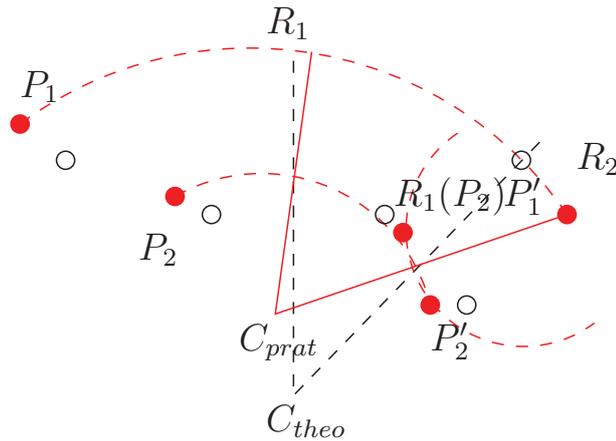


FIGURE 1.13 – Illustration de la méthode de Fontijne dans le cas de données bruitées : les points blancs et les axes en pointillés représentent les points exacts ; les points colorés et les axes en lignes pleines sont les points bruités et les médianes correspondantes dont nous avons détaillé la construction sur la figure 1.12. Nous laissons apparents les arcs de cercle (dessinés en pointillés). Les points  $C_{prat}$  et  $C_{theo}$  représentent respectivement les points d'intersection des axes de réflexions dans le cas de données exactes et bruitées.

Sa méthode, illustrée graphiquement en 2D par la figure 1.12 est maintenant rappelée brièvement. Pour reconstruire la rotation  $R$  à partir de  $n$  points  $p_i$  et de leurs images  $p'_i = R(p_i)$ , Fontijne reconstruit des réflexions qui alignent les points les uns par rapport aux autres. Par exemple, la réflexion  $R_1$  aligne  $p_1$  et son image  $p'_1$ , la réflexion  $R_2$  aligne  $p_2$  avec  $p'_2$  sans modifier les points  $p_1$  et  $p'_1$  qui sont déjà alignés comme nous allons le voir dans la suite. D'après le théorème de Cartan-Dieudonné, pour chaque  $i$ ,  $p'_i = R(p_i) = R_k(\dots R_2(R_1(p_i))\dots)$  avec  $k \leq n$ . Les réflexions  $R_i$  sont déterminées de manière incrémentale en considérant les médianes. La première réflexion  $R_1$  est la médiane de  $p_1$  et de  $p'_1$ , la deuxième réflexion  $R_2$  est la médiane entre  $R_1(p_2)$  et  $p'_2$  et ainsi de suite. La composition des réflexions ne change pas les points alignés. Comme  $p'_1 = R_1(p_1) = R(p_1) = R_k(\dots R_2(R_1(p_1))\dots)$  alors nous avons  $R_k(\dots R_2(p_1))\dots = p'_1$ . Comme nous le montre la figure 1.12 en dimension 2,  $p'_1 = R_1(p_1)$  appartient à  $R_2$  et il est le centre du cercle passant par  $R_1(p_2)$  et  $p'_2$ .

Il est clair que cette méthode est une méthode incrémentale : la  $i^{\text{ème}}$  médiane est calculée en fonction de la  $(i - 1)^{\text{ème}}$ . De cette façon, même si l'implémentation de l'algorithme permet de calculer de manière exacte, une petite « perturbation » dans les données de départ va être très largement amplifiée. Ce phénomène est illustré sur la figure 1.13. Les points blancs et les axes en pointillés représentent les points exacts ; les points colorés et les axes en lignes pleines sont les points « bruités » et les médianes correspondantes. Nous laissons apparents les arcs de cercle (dessinés en pointillés). Sur cette figure nous voyons que les médianes calculées à partir des données bruitées s'éloignent, au fil de l'incrémental, de la médiane idéale. De même, le centre de rotation est beaucoup plus éloigné du centre « idéal » que ne le sont les points « bruités » par rapport aux points « exacts ». En d'autres termes, si  $C_{theo}$  et  $C_{prat}$  représentent respectivement les centres « exact » et « bruité » et  $\epsilon_i$  (resp.  $\epsilon'_i$ ) la distance entre le point  $P_i$  exact et le point  $P_i$  bruité (resp. le point  $P'_i$  exact et le point  $P'_i$  bruité), nous avons estimé uniquement de manière expérimentale, d'après la figure 1.13, que :

$$\|C_{theo} - C_{prat}\| \geq \max_i(\max_i \|\epsilon_i\|, \max_i \|\epsilon'_i\|).$$

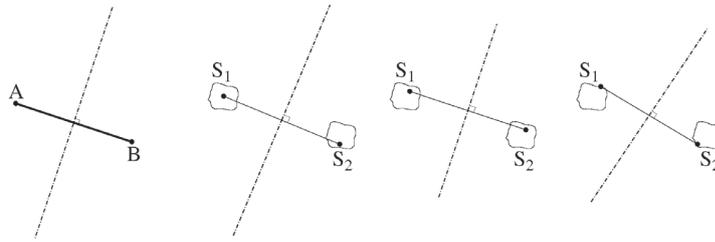


FIGURE 1.14 – La médiatrice entre deux points  $A$  et  $B$  est l'unique droite dont tous les points sont à égales distances de  $A$  et  $B$ ; la médiatrice généralisée entre deux régions  $S_1$  et  $S_2$  est l'ensemble des médiatrices entre tout couple  $(p, q)$ ,  $p \in S_1$  et  $q \in S_2$ .

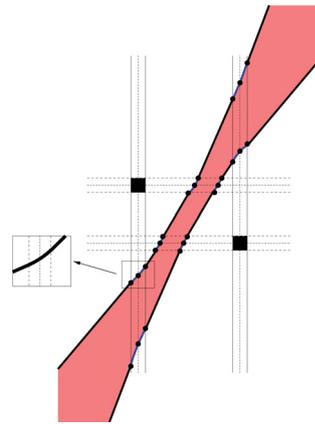


FIGURE 1.15 – Médiatrice généralisée entre deux pixels.

Comme nous venons de le voir, dans le cas de données bruitées, les axes de réflexions sont très éloignés de ceux que l'on aurait obtenus si les données n'étaient pas bruitées. Afin d'évaluer l'erreur que l'on commet dans le cas des données bruitées, il est possible de définir une marge d'incertitude  $S_i$  autour de chaque point. Plutôt que de considérer une unique médiatrice calculée par rapport aux deux points, l'idée est de considérer l'ensemble des médiatrices calculées à partir de tous les couples  $(p, q)$  avec  $p \in S_1$  et  $q \in S_2$  : c'est la *médiatrice généralisée* [ALSR11, RALSA10]. Elle étend la notion de médiatrice entre deux points à la médiatrice entre deux voxels  $v_1$  et  $v_2$  (les voxels pouvant être des éléments de surface, de volume, ...). Les figures 1.14 et 1.15 représentent des médiatrices généralisées. Dans le chapitre 3 dans lequel nous présentons nos expérimentations, nous montrons, en particulier, dans la section 6 comment cette notion de médiatrice généralisée permet de visualiser l'erreur générée par cette méthode de reconstruction de rotation lorsque les données sont bruitées. Nous montrons ainsi, que la méthode n'est pas robuste au bruit.

### Méthode de Thibault [Thi10]

Les travaux de Thibault se placent dans le cadre de la géométrie discrète. En géométrie discrète, les objets manipulés sont constitués par des pixels à coordonnées entières et non plus des points à coordonnées réelles. Ils constituent une discrétisation des objets continus. Ainsi, les rotations peuvent être discrétisées et calculées uniquement avec des entiers. De plus, dans le domaine du traitement d'images, les images sont vues comme des matrices d'entiers où chaque coefficient de la matrice est un entier codant par exemple le niveau de gris. Durant sa thèse [Thi10], Thibault a proposé une méthode discrète (*i.e* n'utilisant que des entiers) pour estimer une rotation entre une paire d'images 3D (discrètes) dont les centres des voxels sont déjà supposés

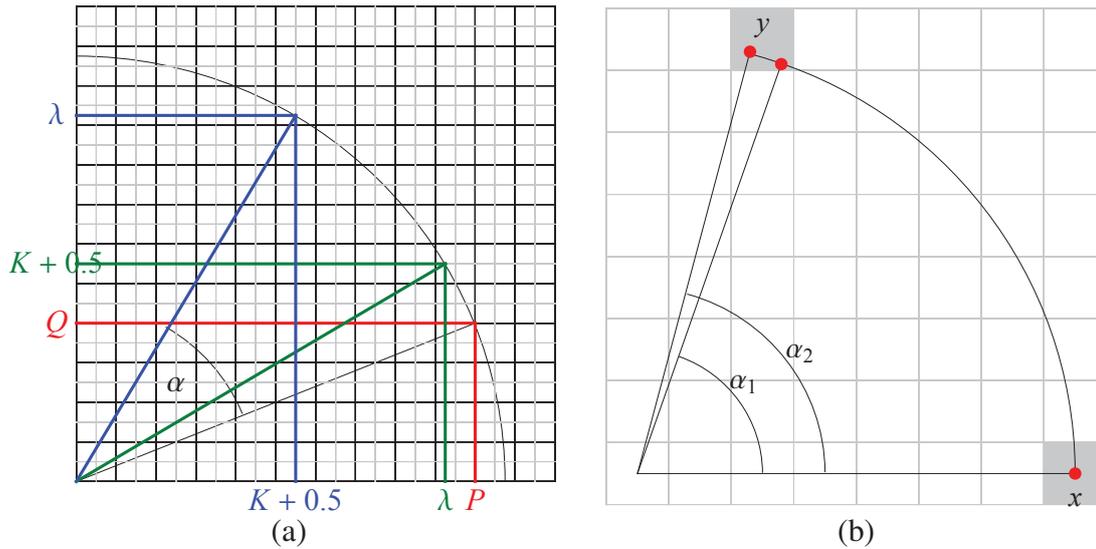


FIGURE 1.16 – (a) En dimension 2, un angle charnière  $\alpha$  peut être représenté par un triplet d'entiers  $(P, Q, K)$  tel que  $2Q \cos \alpha + 2P \sin \alpha = 2K + 1$  (b) Le pixel  $y$  est l'image du pixel  $x$  (il est considéré par rapport à son centre) par les rotations d'angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (avec  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ).

appariés en  $n$  paires. Il fournit ainsi un ensemble de rotations « admissibles » qui transforment la première image en la deuxième.

Nous avons montré, dans la section 1.1.1, que les rotations en 3D pouvaient être vues comme la composée de trois rotations par rapport à des axes (représentation par les angles d'Euler). Cette représentation conduit au blocage de cardan. Ainsi, pour éviter la composition des rotations qui pose souvent problème, Thibault choisit de représenter ces rotations en utilisant la représentation axe/angle que nous avons vu dans la partie 1.1. Les rotations sont donc estimées grâce à l'angle et à l'axe de rotation plutôt que par les trois angles d'Euler et le centre. Sa méthode est basée sur les *angles charnières* et les *vecteurs pythagoriciens*. Ces notions sont étroitement liées au contexte discret.

Les *angles charnières* sont des angles particuliers qui envoient un point à coefficients entiers sur la frontière d'une cellule de discrétisation (pixel, voxel). Ils correspondent donc aux discontinuités de l'application qui associe à un angle, sa rotation discrétisée. Cette application est donnée par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ces angles déterminent le passage d'un point  $(x', y')^t$  d'une cellule à une cellule adjacente. En d'autres termes,  $\alpha$  est un angle charnière s'il existe au moins un point entier tel que son image par la rotation<sup>23</sup> d'angle  $\alpha$  appartient à la demi-grille (grille composée des points à coefficients demi-entiers c'est-à-dire de la forme  $x_i + \frac{1}{2} x_i \in \mathbb{Z}$ ) comme sur la figure 1.16(a). Sur cette figure, nous pouvons voir que l'image du point à coefficients entiers  $(P, Q)$  par la rotation d'angle  $\alpha$  est le point d'abscisse  $K + 0.5$  avec  $K$  un entier. Son image est donc un point de la demi-grille.

23. La rotation euclidienne est la rotation donnée par :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des rotations « admissibles » est déterminé par des angles charnières ; les axes de rotations sont des vecteurs pythagoriciens que nous définissons maintenant. Les *vecteurs pythagoriciens* sont des vecteurs de la forme  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$  tel que  $x^2 + y^2 = z^2$ . Ils permettent de définir des angles pythagoriciens. Ces angles  $\theta$  sont tels qu'il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$  tel que  $\cos \theta = \frac{a}{c}$  et  $\sin \theta = \frac{b}{c}$ . Dans la suite, la notion de *point* s'apparente au centre d'un pixel.

La méthode est en deux temps : l'axe est estimé puis les angles de rotation sont calculés en accord avec les paires de points et l'axe de rotation estimé précédemment.

Soient  $A = (a_1, \dots, a_n)$  les centres des  $n$  pixels de la première image et  $B = (b_1, \dots, b_n)$  les centres des  $n$  pixels associés de la deuxième image. Le couple  $(a_i, b_i)$  correspond au même pixel avant et après la rotation. Lorsque l'on travaille uniquement avec des nombres entiers, l'angle de rotation n'est pas unique. Il peut, en effet, exister des angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  tels que l'image d'un pixel  $x$  par la rotation d'angle  $\alpha_1$  et d'angle  $\alpha_2$  soit le même pixel  $y$ , comme cela est illustré sur la figure 1.16(b). De plus, pour tout  $\alpha_3$  compris entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , le pixel  $x$  a toujours la même image  $y$ . C'est pourquoi, Thibault ne cherche pas à estimer un angle mais un ensemble d'angles dits *angles admissibles* qui sont compris entre deux angles charnières  $\alpha^{inf}$  et  $\alpha^{sup}$ .

Comme Thibault ne travaille qu'avec des nombres entiers, l'axe de rotation est approché par un vecteur pythagorien. Cet axe est calculé en utilisant la notion de *médiatrice*. En effet, l'axe de la rotation qui permet de transformer un point en un autre appartient au plan bissecteur entre ces deux points. Si maintenant, on considère non plus une paire mais  $n$  paires de points, l'axe de rotation appartient à l'intersection des  $n$  plans bissecteurs des points pris deux par deux. De cette manière, l'intersection n'est pas unique. Dans ce cas, le moyen le plus simple pour obtenir un seul axe est de faire la moyenne entre les différents axes de rotation comme illustré sur la figure 1.18. L'axe de rotation ainsi obtenu est ensuite approché par un vecteur pythagorien. Connaissant l'axe et, par conséquent, le plan de rotation, l'ensemble des angles admissibles pour cette rotation est généré de manière incrémentale. En effet, cet ensemble est l'intersection des ensembles d'angles admissibles pour chaque couple  $(a_i, b_i)$ .

En 2D, à partir de deux couples de points de coordonnées  $(p_1, q_1)$  et  $(p_2, q_2)$  en correspondance, les angles sont obtenus grâce à une table de conversion donnée dans [Thi10]. Elle est calculée à partir d'un indice tenant compte du nombre de points d'intersection entre le cercle centré en  $p_1$  passant par  $p_2$  et la demi-grille centrée en  $q_2$ .

En 3D, pour une paire de points  $(a_i, b_i)$ , Thibault commence par générer la *multi-grille rationnelle* obtenue par intersection du plan de rotation et de la demi-grille 3D (points de l'espace 3D à coordonnées de la forme  $x_i + 0.5$  avec  $i = 1, 2, 3$  et  $x_i$  des entiers). Elle est composée de trois ensembles de droites parallèles (sauf cas particuliers) séparées par des intervalles réguliers comme nous le montre la figure 1.17. Ainsi le plan de rotation est « pavé » par des polygones convexes appelés *convexels* comme nous le montre la figure 1.17(b). Il s'agit en fait de l'intersection d'un cube avec un plan. Ces convexels sont des polygones pouvant avoir entre 3 et 6 cotés selon l'« axe de coupe ». Les angles sont calculés de la même façon que dans le cas 2D mais en considérant le convexe contenant  $b_i$  et le cercle centré en l'origine passant par  $a_i$ .

En 3D, on peut aussi considérer non plus les centres de voxels comme précédemment mais des voxels. Dans ce cas là, le plan bissecteur n'est plus unique. Cela est une conséquence directe de la notion de médiatrice généralisée introduite page 42. Malgré des résultats prometteurs, cette méthode n'est applicable qu'en discret puisque les notions ne sont définies que dans ce domaine.

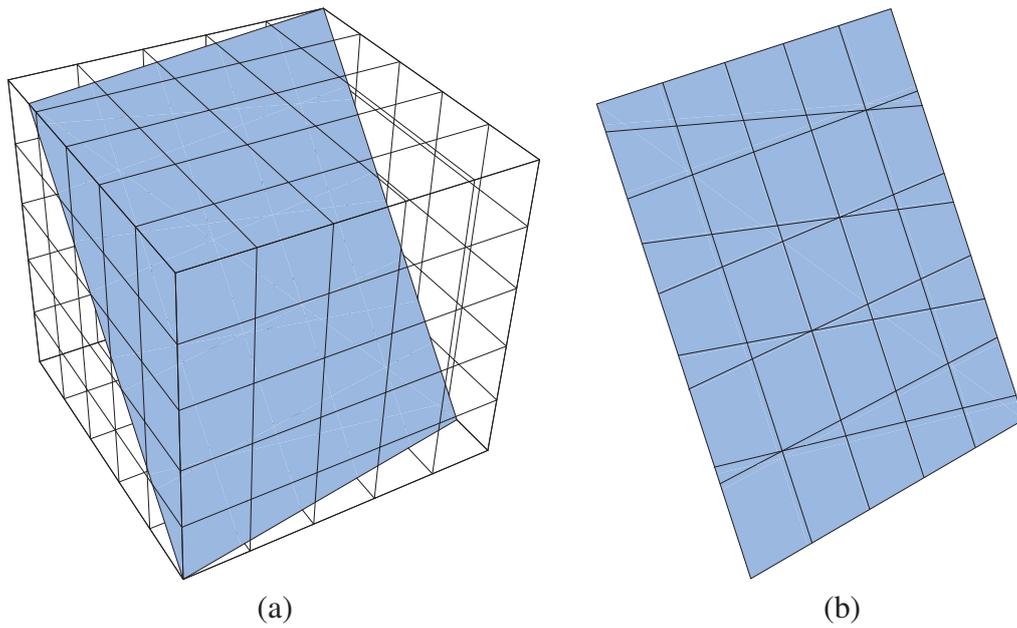


FIGURE 1.17 – (a) Le plan de rotation et la demi-grille 3D (grille composée des points à coefficients semi-entiers) (b) Multi-grille rationnelle obtenue comme l'intersection du plan de rotation et de la demi-grille 3D.

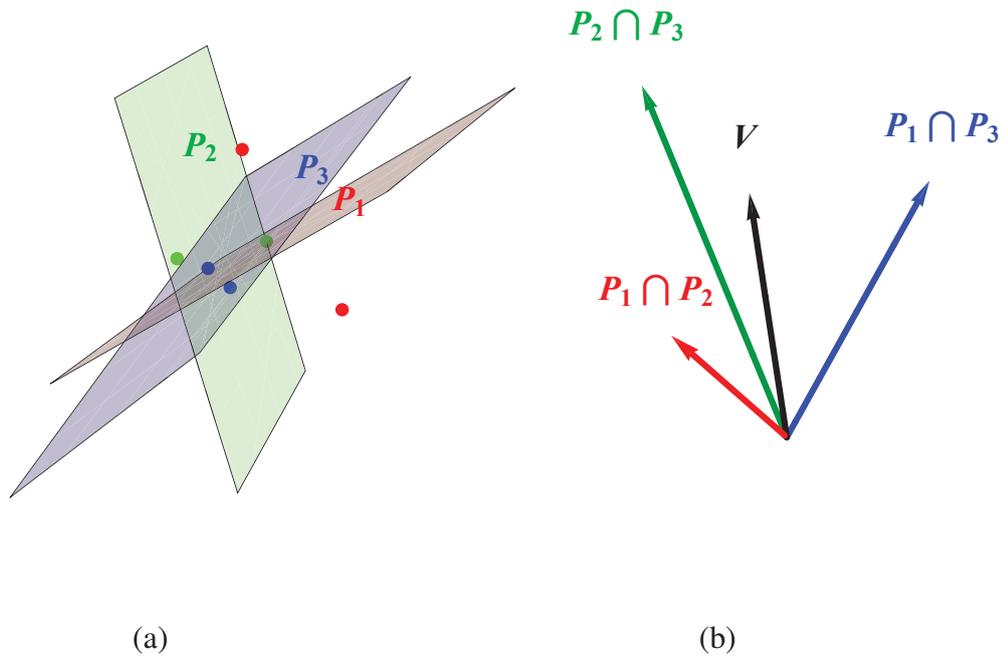


FIGURE 1.18 – (a) L'intersection entre 3 plans bissecteurs de trois paires de pixels n'est pas unique. Les plans se coupent deux à deux ; (b) Dans ce cas l'axe de rotation retenu est la moyenne des vecteurs directeurs des différentes intersections (en noir).

## 2.2 Méthodes « algébriques »

Dans cette partie, nous présentons les méthodes pour décomposer les rotations basées sur l'algèbre géométrique.

### Méthode de Perwass [PS02]

Dans [PS02], Perwass propose une méthode pour évaluer le versor qui représente une transformation. Nous nous intéressons ici plus particulièrement au cas de la rotation et donc au rotor qui permet de la définir.

Dans tout ce paragraphe, nous nous plaçons dans l'algèbre de Clifford  $\mathcal{C}_n$  (que nous avons présentée dans la section 1.2.1) munie de la base  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2^n}\}$ . Dans les sections précédentes, nous avons donné une base de l'algèbre sous la forme  $\{1, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1}\mathbf{e}_n, \dots, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n\}$  pour mettre en évidence le caractère gradué de l'algèbre. Ici nous introduisons une autre notation pour cette base. Elle est notée sous la forme  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{2^n}\}$  où l'élément  $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$  est ici noté  $\mathbf{e}_{n+1}$  et l'élément  $\mathbf{e}_{2^n}$  représente l'élément que nous avons noté  $\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n$ . Cette notation permet de faciliter l'écriture des formules. Soit l'ensemble des  $g_{ij}^k$  pour  $i, j$  et  $k$  variant entre 1 et  $2^n$  défini de la manière suivante :

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{2^n} g_{ij}^k \mathbf{e}_k.$$

Les coefficients<sup>24</sup>  $g_{ij}^k$  valent  $-1, 0$  ou  $1$ . Le produit géométrique des éléments s'exprime en fonction des éléments de la base. Ces coefficients définissent une métrique (c'est-à-dire la forme quadratique) sur  $\mathcal{C}_n$  mais aussi la commutativité ou la non-commutativité des éléments.

Comme dans [PS02], pour simplifier les formules, nous utilisons la notation de la sommation d'Einstein :

$$\alpha^i \mathbf{e}_i \equiv \sum_i \alpha^i \mathbf{e}_i.$$

En utilisant cette convention, le produit  $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$  avec  $\mathbf{A} = a^i \mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{B} = b^j \mathbf{e}_j$  est donné par :  $c^k = a^i b^j g_{ij}^k$ .

Nous avons vu dans la section 1.2.3 que la rotation qui envoie l'élément  $\mathbf{A}$  sur l'élément  $\mathbf{B}$  est codée dans l'algèbre géométrique par l'équation  $\mathbf{VA}\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{B}$  où  $\mathbf{V}$  est un rotor. Cette équation est équivalente à :

$$\mathbf{VA} - \mathbf{BV} = 0. \quad (1.24)$$

Dans [PS02], Perwass propose d'évaluer numériquement ce versor  $\mathbf{V}$ . En utilisant la sommation d'Einstein et en l'appliquant au cas du produit, l'équation (1.24) est équivalente aux assertions suivantes :

$$v^i a^j g_{ij}^k - b^r v^s g_{rs}^k = 0 \quad (1.25)$$

$$\Leftrightarrow G_R(\mathbf{a})v - G_L(\mathbf{b})v = 0 \quad (1.26)$$

avec  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs tels que le vecteur  $\mathbf{b}$  soit l'image du vecteur  $\mathbf{a}$  par la rotation dont on cherche à déterminer le rotor,  $G_L(\mathbf{z}) = z^i g_{ij}^k$  et  $G_R(\mathbf{z}) = z^j g_{ij}^k$  sont des matrices carrées de dimensions  $2^n$  avec  $\mathbf{z} = (z^1, \dots, z^{2^n})^T$  un vecteur colonne de dimension  $2^n$ .

24. Ces coefficients sont ceux du tenseur qui définit le produit géométrique.

Supposons maintenant que nous disposons de  $t$  couples de vecteurs appariés  $(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i)_{i=1\dots t}$  correspondant à un vecteur et son image par la rotation. L'équation (1.26) est équivalente au système suivant en  $v$  :

$$\begin{pmatrix} G_R(\mathbf{a}_1) - G_L(\mathbf{b}_1) \\ \vdots \\ G_R(\mathbf{a}_t) - G_L(\mathbf{b}_t) \end{pmatrix} v = 0 \quad (1.27)$$

Trouver  $v$  à partir de l'équation (1.27) revient à calculer le noyau de la matrice. Cela peut se faire notamment par une décomposition en valeurs singulières (*cf.* Annexe A) permettant la meilleure estimation au sens des moindres carrés. Le rotor vient d'être numériquement calculé mais nous n'avons pas déterminé les plans de rotation. Ces plans ne peuvent d'ailleurs pas être facilement retrouvés. Une première méthode serait d'exprimer le rotor sous une forme matricielle. Dans ce cas, les images des éléments de la base sont les colonnes de la matrice de rotation. Le calcul des plans pourrait ensuite être effectué par un algorithme comme celui que nous proposons dans le chapitre 2. Ainsi, à partir des données de départ, estimer le rotor pour ensuite calculer les plans de rotation ne semble pas judicieux.

Une autre manière de faire serait d'exprimer le rotor  $\mathbf{R}$  sous sa forme exponentielle. Nous avons vu dans la section 1.2.3 qu'un rotor  $\mathbf{R}$  peut s'écrire sous la forme  $\mathbf{R} = e^{-\mathbf{B}/2}$  où  $\mathbf{B}$  est un bivecteur ; c'est-à-dire un élément algébrique qui est une combinaison linéaire de  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$ ,  $i \neq j$ . Le bivecteur  $\mathbf{B}$  peut être décomposé en la somme  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \dots + \mathbf{B}_k$  avec  $k \leq n/2$ . Ces éléments  $\mathbf{B}_i$  définissent les plans des rotations planaires. Nous devons donc dans un premier temps obtenir ce bivecteur (par un calcul de logarithme de bivecteur [HS87, DFM07]) puis le décomposer. Ces deux calculs sont difficiles à mener à bien [DFM07, HS87]. Cela constitue un inconvénient majeur de la méthode de Perwass.

### Méthode de Dorst [Dor09]

Dans [Dor09], Dorst retrouve le versor correspondant à une transformation à partir d'un certain nombre de points et de leurs images. Cette méthode, comme celles de Perwass et de Fontijne, est donc plus générale que les précédentes. Les données sont supposées exactes. Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont un vecteur et son image par une transformation, alors il existe un versor (c'est-à-dire un produit géométrique de  $k$  vecteurs)  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{x}' = \widehat{\mathbf{V}}\mathbf{x}\mathbf{V}^{-1}$  où  $\widehat{\cdot}$  désigne l'involution de grade. L'involution de grade permet de changer le signe de l'élément suivant son grade<sup>25</sup>.

Pour retrouver le versor  $\mathbf{V}$ , Dorst utilise les notions de projection et de base réciproque. Cette base permet notamment d'obtenir une base orthonormale à partir d'une base qui ne l'est pas nécessairement (*cf.* [DFM07] page 89 pour plus de détails). La projection d'un vecteur  $\mathbf{x}$  sur un multivecteur  $\mathbf{M}$  est donnée dans l'algèbre géométrique par la formule  $(\mathbf{x} \rfloor \mathbf{M})\mathbf{M}^{-1}$  où  $\rfloor$  est l'opérateur de contraction<sup>26</sup> à gauche que nous présentons plus en détails dans la section 2.2 et dans l'annexe B. Si on considère la base  $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1\dots n}$ , sa base réciproque est donnée par les vecteurs  $\{\mathbf{b}^i\}_{i=1\dots n}$  tels que

$$\mathbf{b}^i = (-1)^{i-1}(\mathbf{b}_1 \wedge \mathbf{b}_2 \wedge \dots \wedge \dot{\mathbf{b}}_i \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_n) \rfloor I_n^{-1}$$

où  $\dot{\mathbf{b}}_i$  indique que  $\mathbf{b}_i$  ne fait pas partie du produit<sup>27</sup>.

25. Elle est définie pour un élément  $\mathbf{A}_k$  de grade  $k$  par  $\widehat{\mathbf{A}}_k = (-1)^k \mathbf{A}_k$ .

26. La contraction à gauche est telle que :  $\mathbf{a} \rfloor \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (où  $\cdot$  est le produit scalaire sur les vecteurs) et  $\mathbf{a} \rfloor (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{a} \rfloor \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} + (-1)^{\text{Grade}(\mathbf{B})} \mathbf{B} \wedge (\mathbf{a} \rfloor \mathbf{C})$ .

27. Le vecteur  $\mathbf{b}^i$  est en fait le *dual* de l'élément de grade  $(n-1)$  généré par tous les vecteurs sauf  $\mathbf{b}_i$ . Cette notion de dualité introduite brièvement dans la section 1.2.3 est détaillée dans l'annexe B. D'une manière générale,

La connaissance *a priori* de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  donne des informations sur la projection  $(\mathbf{x} \rfloor \mathbf{V}) \mathbf{V}^{-1}$ . En effet, si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  représentent un vecteur et son image par la transformation, la quantité  $(\mathbf{x} \rfloor \mathbf{V}) \mathbf{V}^{-1}$  est telle que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} \rfloor \mathbf{V}) \mathbf{V}^{-1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} \mathbf{V} - \widehat{\mathbf{V}} \mathbf{x}) \mathbf{V}^{-1} \quad (\text{propriétés de la contraction (cf. section 1.2.3 et annexe B)}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \widehat{\mathbf{V}} \mathbf{x} \mathbf{V}^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{définition de } \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Dans le cas d'une rotation, le versor  $\mathbf{V}$  recherché peut s'écrire sous la forme d'une somme d'éléments de grade pair (cf. section 1.2.3) :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_4 + \dots + \mathbf{V}_{2k}$$

avec  $\mathbf{V}_i$  la partie de  $\mathbf{V}$  de grade  $i$ . Comme  $\mathbf{V}_0$  est un scalaire, rechercher  $\mathbf{V}$  est équivalent à chercher  $\mathbf{V} \mathbf{V}_0^{-1} = (\mathbf{V}_0 \mathbf{V}^{-1})^{-1}$  qui est proportionnel à  $\mathbf{V}$ .

Soit maintenant la quantité  $\mathbf{D}_k$  telle que

$$\mathbf{D}_k = \sum_{\text{base des éléments } \mathbf{X} \text{ de grade } k} \mathbf{X}^r (\mathbf{X} \rfloor \mathbf{V}) \mathbf{V}^{-1} \stackrel{\text{d'après [HS87]}}{=} \sum_{K=0,2,\dots}^n \binom{K}{k} \mathbf{V}_K \mathbf{V}^{-1} \quad (1.28)$$

où  $^r$  désigne l'élément dans la base réciproque. En utilisant cette formule, nous obtenons, par exemple,  $\mathbf{D}_2 = 1\mathbf{V}_2 \mathbf{V}^{-1} + 6\mathbf{V}_4 \mathbf{V}^{-1} + 15\mathbf{V}_6 \mathbf{V}^{-1} + 28\mathbf{V}_8 \mathbf{V}^{-1} + \dots$

En utilisant la formule (1.28) et regroupant ces valeurs sous forme matricielle nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}_4 \\ \mathbf{D}_6 \\ \mathbf{D}_8 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 15 & 28 & \dots \\ 0 & 1 & 15 & 70 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 28 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_2 \mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{V}_4 \mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{V}_6 \mathbf{V}^{-1} \\ \mathbf{V}_8 \mathbf{V}^{-1} \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Par inversion de la matrice, les  $\mathbf{V}_{2j} \mathbf{V}^{-1}$  peuvent s'exprimer en fonction des  $\mathbf{D}_{2j}$  pour  $j = 1, 2, \dots$ . Comme  $\mathbf{V} = \sum_j \mathbf{V}_{2j}$  on a  $\mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} = 1 = (\sum_j \mathbf{V}_{2j}) \mathbf{V}^{-1}$ , et ainsi la quantité recherchée  $\mathbf{V}_0 \mathbf{V}^{-1}$  peut être calculée. Elle vaut  $1 - \sum_j \mathbf{V}_{2j} \mathbf{V}^{-1}$ . D'après Dorst, cette méthode ne peut pas être utilisée en cas de données bruitées. Comme en pratique, nous travaillons qu'avec des données bruitées, sa méthode ne peut pas être retenue.

## 2.3 Méthode « isogonale »

Il existe une méthode de décomposition des rotations 3D et 4D en rotations planes dont les angles sont égaux. Nous les appelons *isogonales* car étymologiquement ce terme signifie « de même angle ». Dans cette partie, nous présentons les décompositions des rotations 3D et 4D en rotations de même angle proposées par Mebius [Meb94]. Dans la partie 2, nous étendons son principe de décomposition aux rotations  $n$ D.

Nous allons nous intéresser au préalable à certaines propriétés des plans (vectoriels) qui sont utilisées pour ces décompositions.

un élément  $\mathbf{V}$  peut s'exprimer en fonction du produit scalaire et de la base réciproque constituée par les vecteurs  $e^J$  sous la forme :  $\mathbf{V} = \sum_J e^J (\mathbf{e}_J \cdot \mathbf{V})$  où  $\cdot$  est le produit scalaire.

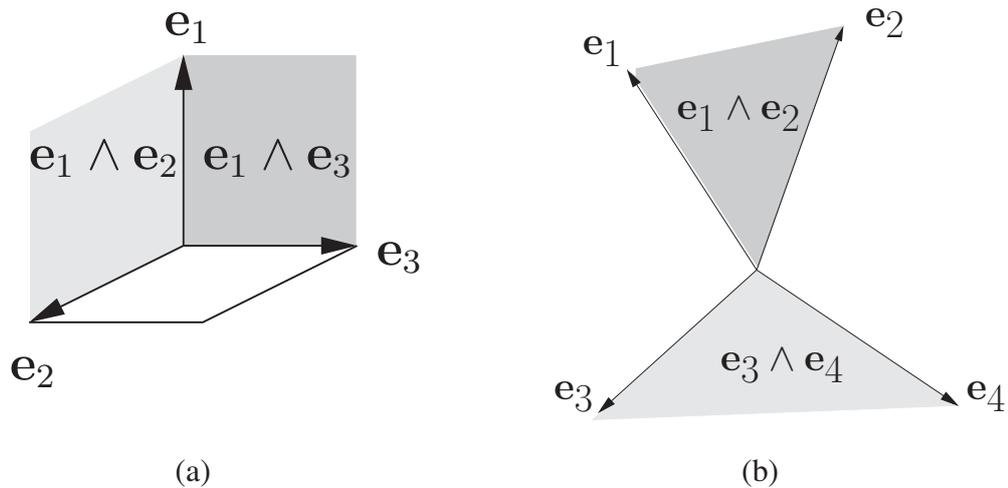


FIGURE 1.19 – (a) En 3D, l'intersection des plans représentés par les bivecteurs  $e_1 \wedge e_2$  et  $e_1 \wedge e_3$  est une droite : les plans sont orthogonaux. (b) En 4D, l'intersection des plans représentés par  $e_1 \wedge e_2$  et  $e_3 \wedge e_4$  est un point : les plans sont complètement orthogonaux.

### Plans en $nD$

En 3D, l'intersection de deux plans quelconques est une droite. En 4D, l'intersection de deux plans quelconques pourra être soit une droite soit un point. Cela nous amène à distinguer les notions de *plans orthogonaux* et de *plans complètement orthogonaux* :

**Définition 1** (Plans orthogonaux). *Deux plans  $P_1$  et  $P_2$  sont orthogonaux si pour toute droite  $d_1$  de  $P_1$  et toute droite  $d_2$  de  $P_2$  sont, soit orthogonales, soit confondues.*<sup>28</sup>

**Définition 2** (Plans complètement orthogonaux). *Deux plans sont dits complètement orthogonaux si toute droite de l'un est orthogonale à toute droite de l'autre.*

Les plans complètement orthogonaux ont la propriété suivante :

**Propriété 5.** *Deux plans complètement orthogonaux se coupent en un unique point.*

**Remarque 3.** *En 3D, il n'existe pas de plans complètement orthogonaux. Cette notion n'apparaît qu'en dimensions supérieures ou égales à la dimension 4.*

Les figures 1.19(a) et (b) schématisent respectivement deux plans orthogonaux en dimension 3 et deux plans complètement orthogonaux d'un espace 4D. En 3D et 4D, les plans définis par les bivecteurs  $e_1 \wedge e_2$  et  $e_1 \wedge e_3$  sont orthogonaux. Leur intersection est la droite de vecteur directeur  $e_1$ . En 4D, les plans représentés par  $e_1 \wedge e_2$  et  $e_3 \wedge e_4$  sont des plans complètement orthogonaux. Leur intersection est réduite à  $0_{\mathbb{R}^n}$ .

La composée de deux rotations dans des plans complètement orthogonaux commutent. De plus, si les deux angles de rotation dans les deux plans sont égaux, la rotation est dite *isocline*. Dans la section suivante, nous étudions plus en détails ces rotations particulières.

28. Elles correspondent à l'intersection de  $P_1$  et  $P_2$ .

### Rotation isocline

Dans [Man14], Manning considère en 4D la notion d'angles entre les plans. Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans et  $P_3$  un plan orthogonal commun. Les angles (aigus ou droits)  $\phi$  et  $\phi'$  entre les plans  $(P_1, P_3)$  et  $(P_2, P_3)$  sont appelés *angles entre  $P_1$  et  $P_2$* . Cette notion permet notamment de caractériser les plans l'un par rapport à l'autre. Cela est schématiquement représenté sur la figure 1.20. Les plans  $P_i$  de cette figure représentent en dimension 2 de manière schématique des plans dans un espace de dimension 4. Si  $\phi$  ou  $\phi'$  est nul,  $P_1$  et  $P_2$  se coupent. En particulier si l'un est nul et l'autre est droit les plans sont orthogonaux avec une droite comme intersection (cf. figure 1.20(b)). Si les deux angles  $\phi$  et  $\phi'$  sont droits, les plans sont dits *complètement orthogonaux* (leur intersection est réduite à un point) comme cela est schématiquement représenté sur la figure 1.20(a). Si  $\phi = \phi'$ , les plans  $P_1$  et  $P_2$  admettent une infinité de plans orthogonaux. Ils sont dits *isoclines*<sup>29</sup>. Si  $P_1$  et  $P_2$  sont complètement orthogonaux et que la rotation dans  $P_1$  et  $P_2$  est de même angle, alors toutes les demi-droites issues de l'origine tournent dans des plans isoclines à  $P_1$  et chaque plan associé à son plan complètement orthogonal (unique en dimension 4) peut être vu comme une paire de plans de rotation [Man14].

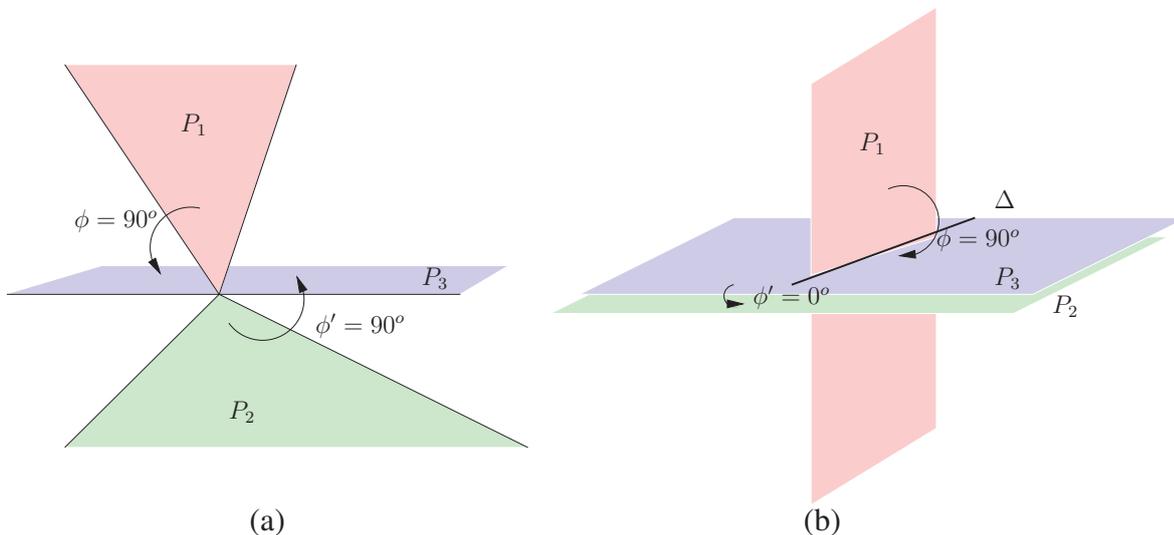


FIGURE 1.20 – Caractérisation des plans complètement orthogonaux (a) et orthogonaux (b) grâce aux angles entre les plans. Le plan  $P_3$  est un plan orthogonal commun aux plans  $P_1$  et  $P_2$ . Si l'angle  $\phi$  entre les plans  $P_1$  et  $P_3$  et l'angle  $\phi'$  entre les plans  $P_2$  et  $P_3$  sont tels que  $\phi = \phi' = 90^\circ$  alors les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont complètement orthogonaux : ils se coupent en un seul point (a) ; si  $\phi = 90^\circ$  et  $\phi' = 0^\circ$ , les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont orthogonaux : ils se coupent en une droite, la droite  $\Delta$ . (La figure n'est qu'un schéma car les plans sont théoriquement dans un espace 4D.)

Dans [Man14], Manning se restreint à la dimension 4 et définit comme *isoclines* des rotations qui sont la composée de deux rotations planes de même angle. Ces rotations 4D ont donc la particularité d'admettre une infinité de plans de rotation et d'être la composée de deux rotations d'angles égaux.

La thèse de Mebius [Meb94] traite de la modélisation des mouvements du corps humain et plus particulièrement des rotations 3D des membres. Ces rotations 3D peuvent être représentées par des quaternions qui sont des quadruplets de nombres. Par conséquent, son étude est principalement basée sur la dimension 4. Néanmoins, Mebius étend la notion de rotation isocline aux

<sup>29</sup>. En particulier, deux plans complètement orthogonaux sont isoclines. Si  $P_1$  est isocline à  $P_2$  lui-même complètement orthogonal à un plan  $P_3$  alors  $P_1$  et  $P_3$  sont complètement orthogonaux (cf [Man14]).



FIGURE 1.21 – (a) Rotation isocline gauche : les angles sont égaux ; (b) Rotation isocline droite : les angles sont opposés.

espaces de dimensions paires. Il considère ainsi comme isocline toute rotation  $nD$  (avec  $n$  pair) dont les  $\frac{n}{2}$  angles sont de même valeur absolue. Toutes les demi-droites passant par l'origine subissent une rotation de même angle. Par conséquent, dans un espace de dimension impaire, la seule rotation isocline est l'identité. Dans le chapitre 2, nous étendons cette notion aux espaces de dimensions impaires.

La notion de rotation isocline permet notamment à Mebius de décomposer les rotations  $3D$  et  $4D$  en rotations de même angle. Dans [Meb94], Mebius distingue deux sortes de rotations isoclines : les *rotations isoclines gauches* et les *rotations isoclines droites*. Pour les définir, il impose une orientation arbitraire sur les demi-droites issues de l'origine. En fonction de cette orientation, si les deux angles de la rotation sont égaux, la rotation isocline est dite rotation isocline gauche. Si les angles sont opposés, la rotation est dite rotation isocline droite comme sur la figure 1.21. Les seules rotations qui sont à la fois isocline droite et gauche sont l'identité et la symétrie centrale.

En utilisant ces notions, il est possible de décomposer les rotations  $4D$  en rotations isoclines :

**Théorème 4** (Théorème de décomposition isocline). *Toute rotation  $4D$  peut être décomposée en une rotation isocline droite et une rotation isocline gauche de deux manières.*

Ce théorème est prouvé dans [Meb94]. Le théorème 4 peut se réécrire :

$$\begin{aligned} Rot_{4D} &= [Rot_{2D}(\theta_1)Rot_{2D}(\theta_2)]_{P_1} [Rot_{2D}(\theta_3)Rot_{2D}(\theta_4)]_{P_2} \\ &= \underbrace{[[Rot_{2D}(\theta_1)]_{P_1} [Rot_{2D}(\theta_3)]_{P_2}]}_{\text{isocline gauche}} \underbrace{[[Rot_{2D}(\theta_2)]_{P_1} [Rot_{2D}(\theta_4)]_{P_2}]}_{\text{isocline droite}} \end{aligned}$$

avec  $\theta_1 = \theta_3$  et  $\theta_2 = -\theta_4$  où  $Rot_{kD}(\theta_i)$  désigne la rotation  $kD$  d'angle  $\theta_i$  et  $[X]_{P_i}$  indique que la transformation  $X$  s'effectue dans le plan  $P_i$ .

Dans [Meb94], Mebius décompose aussi les rotations  $3D$  :

**Théorème 5.** *Toute rotation  $3D$  d'angle  $2\theta$  peut être décomposée en une rotation isocline droite et une rotation isocline gauche d'angle  $\theta$ .*

Une démonstration de ce théorème peut être trouvée dans [Meb94]. Dans le chapitre 2, nous proposons une généralisation des rotations isoclines droites et gauches et une extension de ce théorème à la dimension  $n$ .

Dans la partie 1.1, nous étendons la notion de rotation isocline aux espaces de dimensions impaires. Nous proposons aussi une extension de la décomposition des rotations en rotations isoclines droites et gauches de Mebius aux dimensions supérieures ou égales à 4.

## 2.4 Récapitulatif des intérêts et limites

Les rotations  $nD$  peuvent être décomposées par différentes méthodes. Elles présentent toutes des avantages et des inconvénients que nous résumons dans le tableau suivant.

Méthodes	Inconvénients	Avantages
Cheng [CNP00]	Pas utilisable en $nD$ .	Modélisation de la rotation conforme aux données médicales.
Cheng [Che04]	Pas utilisable en $nD$ .	Modélisation de la rotation conforme aux données médicales.
Watson [Wat06]	Pas utilisable en $nD$ .	Utilisable pour des composées de transformations (rotations, homothéties, translations).
Aragón [AGARAVS09]	Pas robuste au bruit.	Utilisable en $nD$ .
Fontijne [FD10]	Pas robuste au bruit.	Utilisable en $nD$ .
Perwass [PS02]	Calculs longs et difficiles.	Méthode générale utilisable pour toutes les transformations. Utilisable en $nD$ .
Dorst [Dor09]	Pas utilisable avec des données bruitées.	Méthode générale utilisable pour toutes les transformations. Utilisable en $nD$ .

## Conclusion du Chapitre 1

En nous plaçant dans un cadre vectoriel (ce qui correspond, dans le cas affine à des rotations centrées en l'origine), nous avons présenté les différentes représentations des rotations (matrice, quaternion, rotor, ...). Nous avons aussi exposé des méthodes d'estimation de paramètres et de décomposition des rotations  $nD$ . Certains ne sont pas généralisables à la  $nD$ ; d'autres ne sont pas robustes au bruit. Pour ces raisons, nous proposons dans le chapitre suivant deux algorithmes permettant de décomposer les rotations  $nD$  en rotations planes. Ces algorithmes peuvent être appliqués à des données bruitées.

---

## CHAPITRE 2

---

# DÉCOMPOSITION DES ROTATIONS $nD$ ET ESTIMATION DE LEURS PARAMÈTRES

---

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans un cadre vectoriel (cela revient à considérer des rotations affines centrées en l'origine). Nous proposons deux algorithmes permettant d'estimer les paramètres de rotations  $nD$  à partir des vecteurs de la base de l'espace  $nD$  et de leurs images respectives. Ces algorithmes sont utilisables en toute dimension et nous montrons dans la seconde partie qu'ils peuvent être utilisés avec des données bruitées (*ie.* avec une certaine imprécision).

D'après la proposition de réduction des isométries (proposition 1 page 13) présentée dans [Aud03], nous savons que les rotations  $nD$  se décomposent en au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  rotations 2D (rotations planes). L'implémentation de la décomposition issue de [Aud03] pose des problèmes si au moins deux angles sont égaux. Notre premier algorithme permet de résoudre ce problème en décomposant les rotations  $nD$  en rotations de dimension  $2k$  avec  $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Chacune de ces rotations de dimensions  $2k$  se décompose en  $k$  rotations 2D de même angle. L'espace  $E$  sur lequel est défini la rotation  $nD$  est décomposable en sous-espaces sur lesquels la restriction de la rotation est soit une rotation plane soit une rotation isocline (la composée de rotations planes de même angle). Nous montrons comment, pour chacun de ces sous-espaces, nous pouvons retrouver les plans de rotation des rotations élémentaires et donc ceux de la rotation  $nD$ . Cela définit un algorithme de décomposition des rotations  $nD$  permettant de retrouver les plans et les angles de rotation (calculés à partir des projections des couples formés par les vecteurs de la base et leurs images sur les plans de rotation). Comme nous voulons décomposer les rotations  $nD$ , le formalisme de l'algèbre géométrique que nous avons présenté dans la section 1.2.1 nous a paru pertinent. L'algorithme permettant de retrouver les paramètres de la rotation  $nD$  est présenté dans la section 2.

Nous proposons ensuite un autre algorithme de décomposition des rotations  $nD$  en rotations planes basé sur une décomposition matricielle : la décomposition de Schur (section 3). Ces deux algorithmes ont été implantés. Nous avons ainsi pu constater que même avec des données bruitées de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ , les paramètres des rotations pouvaient être bien estimés. Cette étude fait l'objet du chapitre 3. Enfin, nous présentons dans la section 5, une autre décomposition des rotations  $nD$  en rotations isoclines. Celle-ci est une extension à la dimension  $n$  de celle proposée par Mebius en dimension 4 dans [Meb94].

Dans ce chapitre, nous nous plaçons dans un espace euclidien  $E$  de dimension finie  $n$  muni d'une base (non nécessairement orthogonale) composée par les vecteurs  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}$ . L'espace  $E$  est muni d'une forme quadratique  $\mathcal{Q}$  induisant une forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  définie positive (non dégénérée). Cette forme quadratique induit une métrique et par conséquent une notion de distance. Soit  $R$  une rotation  $nD$  (supposée distincte de l'identité). Nous utilisons la notation  $R_P(\theta)$  pour désigner la rotation d'angle  $\theta$  dans le plan  $P$ .

## 1 Décomposition des rotations $nD$

Dans cette partie, nous proposons une décomposition des rotations  $nD$  basée sur l'égalité des angles des rotations planaires issues du résultat sur la réduction des isométries (proposition 1 page 13). Dans la partie 1.2, nous montrons comment adapter cette décomposition quand les données de départ ne sont pas exactes.

### 1.1 Décomposition en rotations élémentaires

La proposition 1 page 13 (réduction des isométries) appliquée aux rotations, implique l'existence d'un sous-espace sur lequel la restriction de la rotation  $R$  est l'identité. Ce sous-espace est généré par les vecteurs laissés fixes par  $R$ . Nous le notons  $F$  dans la suite. Soit  $P$  l'orthogonal de  $F$ . Les espaces  $F$  et  $P$  sont donc définis de la façon suivante :

$$F = \{\mathbf{x} \in E \mid R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\} \text{ et } P = \{\mathbf{x} \in E \mid \forall \mathbf{y} \in F, \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

Comme la forme bilinéaire associée à l'espace  $E$  est non dégénérée, la somme des dimensions d'un sous-espace et de son orthogonal dans  $E$  est égal à celle de  $E$  (cf. page 226 de [Aud03]) :

$$\dim(P) + \dim(F) = \dim(E) = n.$$

De plus, l'espace  $E$  est de dimension finie et, par construction,  $P \cap F = \{0\}$ . L'espace  $E$  peut être décomposé en la somme directe orthogonale suivante :

$$E = P \perp \oplus F. \quad (2.1)$$

**Remarque 4.** Ces espaces correspondent au noyau et à l'espace image<sup>1</sup> de l'application  $(R - Id)$ . Ici, le sous-espace  $F$  est l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x}$  tels que  $R(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow R(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow (R - Id)(\mathbf{x}) = 0$ . Le sous-espace  $F$  correspond donc au noyau de l'application  $R - Id$ . Les sous-espaces  $\text{Ker}$  (noyau) et  $\text{Im}$  (image) associés à la même application sont en somme directe. D'après (2.1), et par unicité de la décomposition en somme directe, le sous-espace  $P$  correspond à l'espace image de  $(R - Id)$  noté  $\text{Im}(R - Id)$ .

Dans la section 1.1, nous avons vu que l'espace  $E$  peut être décomposé de manière plus « fine » en sous-espaces  $P_i$  stables<sup>2</sup> par  $R$  tels que la restriction de  $R$  à ces sous-espaces soit l'identité ou une rotation plane c'est-à-dire :

$$E = F \perp \oplus P_1 \perp \oplus \dots \perp P_r. \quad (2.2)$$

1. En algèbre linéaire, l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v}$  tels que  $f(\mathbf{v}) = 0$  forme le *noyau* de l'application  $f$  noté  $\text{Ker } f$ . L'ensemble des vecteurs qui admettent un antécédent par une application  $f$  forme l'espace *image* de l'application  $f$  noté  $\text{Im } f$ .

2. Un sous-espace  $G$  est stable par une application  $f$  si  $f(G) \subset G$  c'est-à-dire  $\forall x \in G, f(x) \in G$ .

Dans le cas d'une rotation, ces sous-espaces  $P_i$  sont des plans de rotation. Ils sont donc de dimension 2. Par identification entre les formules (2.1) et (2.2), nous en déduisons que :

$$P = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_r.$$

Ainsi, le sous-espace  $P$  est de dimension paire ( $2r$ ) et il coïncide avec la somme directe des plans de rotation.

Par construction (cf. proposition 1), dans chacun de ces sous-espaces  $P_i$  la restriction de la rotation  $R$  est une rotation 2D. Certaines de ces rotations 2D peuvent avoir des angles égaux. Notre objectif est d'utiliser cette décomposition afin de décomposer  $P$  en sous-espaces  $\mathcal{P}_i$  dans lesquels la restriction de la rotation  $R$  est une rotation de dimension  $2k$ . Chacune de ces rotations de dimension  $2k$  est la composée de rotations 2D de même angle. Les sous-espaces  $\mathcal{P}_i$  sont donc constitués par des regroupements (sommés directes) de  $P_i$ . À notre connaissance, cette décomposition, tenant compte des angles, est la seule portant sur les rotations  $nD$  (cf. Chapitre 1). Cela nous amène à distinguer différentes rotations  $nD$  que nous définissons maintenant.

**Définition 3** (Rotations générale, pseudo-isocline et isocline). *Soit  $R$  une rotation  $nD$  sur un espace euclidien  $F$  de dimension  $n$ . Considérons sa décomposition<sup>3</sup> en rotations planes d'angles  $\theta_i$ . La rotation  $R$  est dite générale si tous les  $\theta_i$  sont différents. Elle est dite pseudo-isocline si au moins deux des angles  $\theta_i$  sont égaux. En particulier si ses  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  angles de rotation  $\theta_i$  sont égaux elle est dite isocline.*

D'après ces définitions, une rotation 3D peut toujours être considérée comme une rotation isocline. En utilisant ces définitions, nous proposons la décomposition des rotations  $nD$  suivante :

**Proposition 2** (Décomposition des rotations  $nD$ ). *Toute rotation  $R$  de dimension  $n$  peut se décomposer en produits de rotations isoclines et générales. Ainsi,  $R$  peut se réécrire sous la forme suivante :*

$$R = R_{\mathcal{P}_1}^I(\theta_1) \circ \dots \circ R_{\mathcal{P}_{j-1}}^I(\theta_{j-1}) \circ R_{\mathcal{P}_j}^G(\theta_j, \dots, \theta_p) \quad (2.3)$$

où

- $R_{\mathcal{P}_i}^I(\theta_i)$  désigne une rotation isocline dans le sous espace  $\mathcal{P}_i$  d'angle  $\theta_i$  (c'est-à-dire la composée de rotations planes d'angles égaux à  $\theta_i$ )
- $R_{\mathcal{P}_j}^G(\theta_j, \dots, \theta_p)$  est une rotation générale dans le sous-espace  $\mathcal{P}_j$  d'angles  $\theta_j, \dots, \theta_p$  (c'est-à-dire la composée de rotations planes d'angles  $\theta_j, \dots, \theta_p$ ).
- les sous-espaces  $\mathcal{P}_i$  sont en somme directe orthogonale :

$$\mathcal{P}_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}_{j-1} \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}_j = P.$$

Si  $R$  contient au moins une rotation isocline, comme cette rotation isocline admet une infinité de plans de rotation, la rotation  $R$  admet également une infinité de plans de rotation.

Dans la suite, afin de simplifier le discours, l'ensemble des rotations composant  $R$  est regroupé sous le terme de *rotations élémentaires*.

3. Cette décomposition existe nécessairement d'après la proposition 1.

**Exemple 1.** Soit  $R$  une rotation  $15D$  se décomposant en rotations planes de la manière suivante :

$$R = R_{P_1}(90^\circ) \circ R_{P_2}(90^\circ) \circ R_{P_3}(45^\circ) \circ R_{P_4}(45^\circ) \circ R_{P_5}(45^\circ) \circ R_{P_6}(36^\circ) \circ R_{P_7}(30^\circ).$$

D'après la proposition 2, cette rotation  $R$  peut se réécrire sous la forme :

$$R = R_{P_1 \oplus P_2}^I(90^\circ) \circ R_{P_3 \oplus P_4 \oplus P_5}^I(45^\circ) \circ R_{P_6 \oplus P_7}^G(36^\circ, 30^\circ).$$

La proposition 2 signifie en fait, que décomposer les rotations  $nD$  revient à traiter deux problèmes différents. Quand la rotation  $R$  est uniquement une rotation générale, elle est la composée de rotations planes avec un nombre fini de plans de rotation. Sinon, il existe au moins une rotation isocline dans sa décomposition. Dans ce cas, l'espace  $P$  peut être décomposé en sous-espaces de dimensions paires tels que la restriction de la rotation  $R$  à ces sous-espaces est une rotation isocline (c'est-à-dire des composées de rotations planes de même angle). Une rotation isocline admet une infinité de plans de rotation [Man14, Meb94] et par conséquent, il en est de même pour  $R$ . Ce cas n'arrive qu'en dimensions supérieures ou égales à 4 expliquant ainsi le fait que ce type de rotation n'est pas très bien connu et n'apparaît pas beaucoup dans la littérature traitant des rotations.

**Remarque 5.** Nous avons vu dans la section 2.3 du chapitre précédent, que dans un espace de dimension impaire, la seule rotation isocline est l'identité. Dans sa thèse [Meb94], Mebius ne considère pas comme isocline une rotation  $5D$  composée de deux rotations planes de même angle. Grâce à la définition 3 et à la proposition 2, nous étendons la notion d'isoclinie de Mebius en considérant que la restriction d'une telle rotation à un espace  $4D$  est une rotation isocline.

Pour démontrer la proposition 2, nous allons utiliser une propriété très particulière des rotations isoclines. Cette propriété, utilisée par Manning dans [Man14] en dimension 4, concernant les plans invariants d'une rotation isocline. Nous étendons ce résultat en toute dimension :

**Lemme 1.** Tous les plans engendrés par un vecteur et son image par une rotation  $nD$  isocline  $R_{iso}$  sont des plans invariants pour cette rotation.

Cette propriété n'est vraie que pour les rotations isoclines. En effet, considérons la rotation d'angle  $\pi/4$  dans le plan  $e_1 \wedge e_2$ . Soient  $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)^t$  un vecteur et  $\mathbf{x}' = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 3)^t$  son image par cette rotation. Le plan défini par  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}'$  contient le vecteur  $\mathbf{z} = (1, (-1 - 5\sqrt{2})/7, 0)$  ; par contre le vecteur  $\mathbf{z}' = (\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}(-1 - 5\sqrt{2})/14, -\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}(-1 - 5\sqrt{2})/14, 0)^t$ , image de  $\mathbf{z}$  par la rotation n'appartient pas à ce plan. Dans le cas général, tout plan généré par un vecteur et son image par une rotation n'est pas invariant ; cela n'est le cas que lorsque la rotation est isocline.

**Preuve** (du lemme 1). Pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que l'image d'un vecteur  $\mathbf{w}$  quelconque appartenant à un plan  $P$  généré par un vecteur et son image par une rotation isocline  $R_{iso}$  est encore dans  $P$ . Nous allons commencer par nous en assurer dans le cas de la dimension 4 ; la démonstration dans le cas de la dimension  $n$  avec  $n$  pair n'est qu'une extension triviale de ce cas là.

Soit  $R_{iso}$  une rotation isocline  $4D$ , composée de deux rotations planes d'angles égaux à  $\theta$ . D'après la proposition 1 page 13, il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $R_{iso}$  est diagonale par blocs, chaque bloc étant de la forme :  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

Soient  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  un vecteur quelconque et  $\mathbf{v}'$  son image par la rotation isocline  $R_{iso}$ . Ce dernier est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' = R_{iso}(\mathbf{v}) &= (\cos \theta v_1 + \sin \theta v_2, -\sin \theta v_1 + \cos \theta v_2, \cos \theta v_3 + \sin \theta v_4, -\sin \theta v_3 + \cos \theta v_4) \\ &= \cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \hat{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

avec  $\hat{\mathbf{v}} = (v_2, -v_1, v_4, -v_3)$ . Soit  $P$  le plan généré par  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}'$ . Ce plan  $P$  est généré<sup>4</sup> par les vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\hat{\mathbf{v}}$ .

Considérons maintenant  $\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} + \beta \hat{\mathbf{v}}$  un vecteur quelconque de  $P$  alors, comme  $\hat{\hat{\mathbf{v}}} = -\mathbf{v}$ , nous avons  $R_{iso}(\mathbf{w}) = \alpha \cos \theta \mathbf{v} + \alpha \sin \theta \hat{\mathbf{v}} + \beta \cos \theta \hat{\mathbf{v}} - \beta \sin \theta \mathbf{v}$ . Il est alors clair que l'image du vecteur  $\mathbf{w}$  appartient à  $P$ .  $\square$

D'après le lemme 1, nous savons que les plans définis par tout vecteur et son image par une rotation isocline sont invariants pour cette rotation. Or, les plans de rotation sont des plans invariants qui sont deux à deux orthogonaux (d'après la proposition 1). Ainsi, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 1.** *Toute rotation isocline admet un nombre infini de plans de rotation.*

En utilisant ce corollaire, nous pouvons démontrer la proposition de décomposition.

**Preuve** (de la proposition 2). D'après la proposition 1 page 13, une rotation  $R$  de dimension  $n$  peut se décomposer en  $r$  rotations planes  $\{R_{\theta_1}, \dots, R_{\theta_r}\}$  dans des plans  $P_1, \dots, P_r$ . Nous avons ainsi :  $R = R_1(\theta_1) \circ \dots \circ R_r(\theta_r)$ . Ainsi, l'espace  $E$  peut être décomposé en sous-espaces  $\mathcal{P}_i$  de dimensions paires  $2p$ . Ces sous-espaces sont définis de la manière suivante. Si  $p = 1$  alors la restriction de  $R$  à ce sous-espace est une rotation plane. Si  $p > 1$ , le sous-espace considéré est une somme directe de plans (car les  $P_i$  sont en somme directe d'après la proposition 1). La restriction de  $R$  à ce sous-espace est la composée de  $p$  rotations planes de même angle. La restriction de la rotation à ces sous-espaces est par conséquent une rotation isocline. D'après le corollaire 1, une rotation isocline a une infinité de plans invariants et donc de plans de rotation. De plus, l'espace  $P$  est la somme directe orthogonale des sous-espaces  $\mathcal{P}_i$  :  $P = \mathcal{P}_1 \oplus \dots \mathcal{P}_j$  car les plans de rotations  $P_i$  sont en somme directe orthogonale [Aud03].  $\square$

Nous venons de montrer que le sous-espace  $P$  de  $E$  générant les plans de rotation d'une rotation  $R$  de dimension  $n$  pouvait se décomposer en sous-espaces. La restriction de  $R$  à chacun d'entre eux est une rotation isocline ou une rotation générale. De plus, ces sous-espaces sont en somme directe orthogonale.

Pour former les rotations isoclines composant la rotation  $nD$ , nous regroupons toutes les rotations planes qui ont le même angle (cf. exemple 1). Nous devons donc pouvoir « classer » ces angles suivant un critère d'égalité. Cela sous-entend que nous devons travailler avec des données exactes, ce qui n'est pas le cas lorsque l'on travaille avec des données acquises de manière expérimentale. Ces données sont dites *bruitées*. Dans la section suivante, nous montrons comment tenir compte de ce bruit.

4. En effet, ce plan est représenté dans l'algèbre géométrique par le bivecteur  $\mathbf{P} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = \mathbf{v} \wedge (\cos \theta \mathbf{v} + \sin \theta \hat{\mathbf{v}}) = \cos \theta \mathbf{v} \wedge \mathbf{v} + \sin \theta \mathbf{v} \wedge \hat{\mathbf{v}} = \sin \theta (\mathbf{v} \wedge \hat{\mathbf{v}})$  car  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$ .

## 1.2 Rotations bruitées

Lorsque l'on travaille avec des données acquises de manière expérimentale, les données sont bruitées et nous devons tenir compte de ce bruit. Dans la suite, nous considérons que le terme *rotation bruitée* désigne une rotation déterminée par un ensemble de  $2n$  vecteurs bruités. Ces  $2n$  vecteurs correspondent à  $n$  vecteurs et leurs images respectives par la rotation bruitée. On suppose que ces  $n$  vecteurs forment une base de l'espace  $E$ . Si ces  $n$  vecteurs ne forment pas une base, l'algorithme ne peut pas être appliqué. Pour compenser cela, en pratique, on dispose souvent de plus de vecteurs.

Dans un premier temps, nous présentons certains concepts utilisables quand les données sont exactes puis nous montrons comment les adapter dans le cas de données bruitées. Lorsque nous travaillons avec des données exactes, nous pouvons classer les angles de la décomposition de la rotation suivant s'ils sont égaux ou non.

**Définition 4** (Liste et composante isogonales, sous-espace isogonal). *Les angles de rotation munis de la relation d'égalité sur les réels forment une liste appelée liste isogonale. Chaque élément de cette liste est appelé composante isogonale. Le sous-espace engendré par les plans associés à chaque élément de la liste isogonale est appelé sous-espace isogonal.*

**Exemple 2.** *Soit une rotation  $11D$  qui peut se décomposer en 5 rotations planes. Quitte à ré-indexer, supposons que les angles  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (130^\circ, 130^\circ, 100^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$  sont les angles de rotation dans les plans  $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ . La liste isogonale de cette rotation est donnée par  $((130^\circ, 130^\circ), (100^\circ), (60^\circ, 60^\circ))$ . Elle est donc composée de trois composantes isogonales. Les sous-espaces isogonaux associés sont donnés par :  $\mathcal{P}_1 = P_1 \oplus P_2$ ,  $\mathcal{P}_2 = P_3$  et  $\mathcal{P}_3 = P_4 \oplus P_5$ .*

**Remarque 6.** *Dans la suite, la liste des angles est systématiquement ordonnée par ordre décroissant de valeurs comme nous venons de le faire dans l'exemple précédent. Cette convention est la même que celle des valeurs singulières (obtenues par la décomposition en valeurs singulières que nous utilisons dans la suite (partie 2.1)).*

Lorsque la rotation est bruitée, il n'est plus possible d'utiliser la relation d'égalité sur les nombres réels pour définir les listes isogonales.

Dans ce cas, nous allons adapter la définition de composante isogonale. Pour cela, nous devons décider à partir de quand deux angles peuvent être considérés comme égaux. Nous introduisons donc une relation d'« égalité » en tenant compte d'une certaine marge d'erreur  $\beta$ . En utilisant cette relation d'« égalité » nous pouvons définir les composantes quasi-isogonales.

**Définition 5** (Composante Quasi-Isogonale). *Une composante quasi-isogonale (CQI) d'un angle  $\theta$ , notée  $[\theta]_\beta$ , associée à un ensemble  $\mathcal{S}$  d'angles compris entre 0 et  $2\pi$ , est définie comme l'ensemble de tous les angles  $\alpha \leq \theta$  tels que :*

$$[\theta]_\beta = \{\alpha \leq \theta \mid \alpha \stackrel{\beta}{\approx} \theta\}$$

où

$$\theta_1 \stackrel{\beta}{\approx} \theta_2 \Leftrightarrow |\theta_1 - \theta_2| \leq \beta,$$

le paramètre  $\beta$  est appelé marge d'erreur. La longueur d'une composante quasi-isogonale c'est-à-dire le nombre d'élément qui la compose, notée  $l([\theta]_\beta)$ , est définie par son cardinal.

**Exemple 3.** Soit une rotation bruitée  $11D$  qui peut se décomposer en 5 rotations planes dans les plans  $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$  avec les angles  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (130^\circ, 128^\circ, 76^\circ, 68^\circ, 60^\circ)$ . Les angles ont éventuellement été réordonnés en ordre décroissant. La marge d'erreur  $\beta$  est arbitrairement fixée à  $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ . Nous avons alors les relations et égalités suivantes :

$$\theta_1 \stackrel{\beta}{=} \theta_2, \theta_3 \stackrel{\beta}{=} \theta_4, \theta_4 \stackrel{\beta}{=} \theta_5, \theta_3 \stackrel{\beta}{\neq} \theta_5,$$

$$[\theta_1]_\beta = (\theta_1, \theta_2), [\theta_2]_\beta = (\theta_2), [\theta_3]_\beta = (\theta_3, \theta_4), [\theta_4]_\beta = (\theta_4, \theta_5), [\theta_5]_\beta = (\theta_5),$$

$$l([\theta_1]_\beta) = l([\theta_3]_\beta) = l([\theta_4]_\beta) = 2, l([\theta_2]_\beta) = l([\theta_5]_\beta) = 1.$$

**Remarque 7** (Composante quasi-isogonale). La longueur d'une composante quasi-isogonale est un entier compris entre 1 et  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Pour une rotation donnée, le nombre de composante est entier compris entre 1 et  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  inclus.

**Remarque 8.** La relation  $\stackrel{\beta}{=}$  n'est pas une relation d'équivalence car elle est réflexive et symétrique mais elle n'est pas transitive. Par exemple, considérons  $\theta_1 = 150^\circ$ ,  $\theta_2 = 136^\circ$ ,  $\theta_3 = 122^\circ$  et  $\beta = 15^\circ$ . Nous avons  $\theta_1 \stackrel{\beta}{=} \theta_2$  et  $\theta_2 \stackrel{\beta}{=} \theta_3$  mais nous n'avons pas  $\theta_1 \stackrel{\beta}{=} \theta_3$ . De plus, il convient de souligner que chaque angle appartenant à une composante quasi-isogonale d'un angle  $\theta$  est inférieur ou égal à  $\theta$ . En effet, considérons les angles suivants :  $(120^\circ, 110^\circ, 100^\circ, 90^\circ)$  et la marge d'erreur fixée à  $\beta = 15^\circ$ . Même si  $|110 - 120| \leq \beta$  et  $|110 - 100| \leq \beta$ , l'ensemble  $(120^\circ, 110^\circ, 100^\circ)$  n'est pas la composante quasi-isogonale associée à l'angle  $110^\circ$  car  $120^\circ > 110^\circ$ .

En utilisant la notion de composante quasi-isogonale, nous pouvons maintenant définir la notion de *liste quasi-isogonale*, qui constitue une adaptation de la notion de liste isogonale au cas des données bruitées.

**Définition 6** (Liste Quasi-Isogonale). Soit  $R$  une rotation et l'ensemble des composantes quasi-isogonales associées à l'ensemble  $\mathcal{S}$  des angles de  $R$ . Les composantes quasi-isogonales dont les intersections deux à deux sont vides et dont l'ensemble de leurs éléments recouvrent l'ensemble des angles, forment une liste appelée *liste quasi-isogonale*. Cela signifie que :

$$\forall \theta_i \in \mathcal{S}, \exists ! [\theta_j]_\beta \in LQI \mid \theta_i \in [\theta_j]_\beta$$

**Remarque 9.** Les éléments de la liste quasi-isogonale sont des composantes quasi-isogonales par définition. Un angle peut appartenir à plusieurs composantes quasi-isogonales mais l'angle dont la valeur est la plus élevée, notons le  $\theta_1$ , n'appartient qu'à une seule composante quasi-isogonale : la sienne. Nécessairement, comme chaque angle apparaît une et une seule fois dans la liste quasi-isogonale, cette liste contient la composante quasi-isogonale associée à  $\theta_1$ . De même parmi les angles restants (ceux qui n'appartiennent pas à la composante quasi-isogonale de  $\theta_1$ ), l'un a la valeur la plus élevée notons le  $\theta_i$ . Comme les intersections de deux composantes quasi-isogonales appartenant à la liste sont vides (par définition), aucune des composantes quasi-isogonales associées à un angle appartenant à  $[\theta_1]$  ne peut appartenir à la liste. Parmi les composantes quasi-isogonales restantes, l'angle  $\theta_i$  n'appartient donc qu'à  $[\theta_i]$ . Ainsi,  $[\theta_i]$  appartient à la liste. En réitérant le processus jusqu'à ce que tous les angles apparaissent dans la liste, nous constatons que la liste est construite de manière unique pour un  $\beta$  fixé.

La méthode pour calculer la liste quasi-isogonale d'une rotation  $R$  est résumée par l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** Calcul de la liste quasi-isogonale d'une rotation

---

**Entrée:**  $\mathcal{S}$  (Ensemble ordonné des angles de la rotation  $R$ )

**Sortie:**  $\mathcal{C}$  (Liste quasi-isogonale de la rotation  $R$ )

$\mathcal{C} = \emptyset$

**Tant Que**  $\mathcal{S} \neq \emptyset$  **faire:**

$\Theta$  : Premier élément de  $\mathcal{S}$

    Calcul de  $[\Theta]$

$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup [\Theta]$

$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \setminus [\Theta]$

**fin Tant Que**

---

Dans la suite, le  $i^{eme}$  élément de la liste de longueur  $\alpha_i$  est noté  $C_i^{\alpha_i}$ . Comme l'union de tous les angles de toutes les composantes quasi-isogonales qui composent une liste quasi-isogonale recouvre l'ensemble des angles et que chaque angle n'apparaît qu'une fois dans cette liste<sup>5</sup>, la somme des  $\alpha_i$  vaut  $k$  (où  $k$  est le nombre d'angles *ie.* il s'agit d'une rotation de dimension  $2k$ ).

Reprenons l'exemple 3 où les angles de la rotation 11D dans les plans  $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$  sont donnés respectivement par :  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5) = (130^\circ, 128^\circ, 76^\circ, 68^\circ, 60^\circ)$ . Les composantes quasi-isogonales sont données comme nous l'avons vu par :

$$[\theta_1]_\beta = (\theta_1, \theta_2), [\theta_2]_\beta = (\theta_2), [\theta_3]_\beta = (\theta_3, \theta_4), [\theta_4]_\beta = (\theta_4, \theta_5), [\theta_5]_\beta = (\theta_5).$$

Dans ce cas, certains angles étaient communs à plusieurs composantes. En effet,  $[\theta_1]_\beta \cap [\theta_2]_\beta \neq \emptyset$ ,  $[\theta_3]_\beta \cap [\theta_4]_\beta \neq \emptyset$  et  $[\theta_4]_\beta \cap [\theta_5]_\beta \neq \emptyset$ . En utilisant la notion de liste quasi-isogonale que nous venons de définir, nous ne retenons que les composantes quasi-isogonales dont les intersections deux à deux sont vides et dont l'ensemble des éléments recouvrent l'ensemble des angles. Cette liste est donnée par :

$$LQI(\mathcal{S}) = ((\theta_1, \theta_2), (\theta_3, \theta_4), (\theta_5)).$$

Chaque angle appartient ainsi à une et une seule composante.

En reprenant l'exemple précédent, la liste quasi-isogonale nous permet de décomposer la rotation  $R$  en trois rotations élémentaires. Par conséquent l'espace  $P$  générant les plans de rotations peut être décomposé en trois sous-espaces particuliers  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  et  $\mathcal{P}_3$ . Comme les données de départ sont bruitées, nous considérons que la restriction de  $R$  à  $\mathcal{P}_1$  et la restriction de  $R$  à  $\mathcal{P}_2$  se comportent comme une rotation isocline : elle admet une infinité de plans de rotations dans  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$ . C'est pourquoi, dans la suite, nous la considérons comme une rotation isocline dans chacun de ces sous-espaces. De même, nous considérons que la restriction de  $R$  à  $\mathcal{P}_3$  se comporte dans  $\mathcal{P}_3$  comme une rotation générale : elle n'admet qu'un nombre fini de plans. Dans la suite, nous la considérons par conséquent comme une rotation générale. Les sous-espaces particuliers  $\mathcal{P}_i$  sont appelés *espaces quasi-isogonaux* :

**Définition 7** (Espace quasi-isogonal). *Soit  $R$  une rotation  $nD$ . Considérons un ensemble de plans de rotation de  $R$ , l'ensemble des angles associés et sa liste quasi-isogonale. Le sous-espace formé par les plans associés à un élément de la liste quasi-isogonale est appelé espace quasi-isogonal. La somme directe des espaces quasi-isogonaux associée à une rotation est appelée décomposition en sous-espaces quasi-isogonaux.*

---

5. Car les intersections deux à deux des composantes quasi-isogonales sont vides.

Dans la suite, les plans de rotation sont notés avec des  $P$  majuscules (par exemple :  $P_1$ ) et les espaces (quasi-) isogonaux par des  $P$  majuscules calligraphiées (par exemple :  $\mathcal{P}_1$ ).

Dans le cas de l'exemple 3, les espaces quasi-isogonaux sont formés par  $\mathcal{P}_1 = P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2$ ,  $\mathcal{P}_2 = P_3 \overset{\perp}{\oplus} P_4$  et  $\mathcal{P}_3 = P_5$ . La décomposition en sous-espaces quasi-isogonaux est donnée par :

$$P = \mathcal{P}_1 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}_2 \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}_3.$$

En toute rigueur nous n'avons pas égalité des sous-espaces vu que les données sont bruitées. Il en est de même pour les sommes directes orthogonales. Nous faisons comme si ces égalités et ces sommes directes orthogonales étaient toujours vraies avec des rotations bruitées. Par conséquent, et par abus de langage, lorsque les données de départ sont bruitées nous utilisons les signes<sup>6</sup>  $\ll = \gg$  et  $\ll \overset{\perp}{\oplus} \gg$ .

Dans cette partie, nous avons montré que le sous-espace  $P$ , défini comme le sous-espace orthogonal à l'ensemble des vecteurs laissés fixes par une rotation  $R$ , coïncidait avec l'ensemble de ces plans de rotations. De plus, ce sous-espace peut se décomposer en somme directe de sous-espaces dans lesquels la restriction de la rotation est une rotation isocline ou une rotation générale. Cette somme directe est de la forme :  $P = \mathcal{P}_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}_j$ . Ces sous-espaces  $\mathcal{P}_i$ , appelés espaces (quasi-) isogonaux, vont nous servir à déterminer les plans de rotation  $P_i$  de  $R$  vérifiant  $P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_r = P$ . Dans la partie suivante, nous donnons un algorithme permettant de retrouver les plans de rotation  $P_i$  d'une rotation  $R$  à partir de ces sous-espaces  $\mathcal{P}_i$ .

## 2 Algorithmes de décomposition des rotations $nD$

Le but de cette partie est de proposer un algorithme permettant de décomposer les rotations  $nD$  en rotations de dimension 2. Plus précisément, il s'agit de retrouver les plans et angles de rotation à partir de  $n$  vecteurs et de leurs images (les vecteurs sont supposés appariés). Pour cela, nous utilisons les sous-espaces isogonaux que nous venons d'introduire. En effet, ils nous permettent de décomposer le sous-espace générant les plans de rotation de manière grossière. Pour chacun d'entre eux, nous affinons ensuite cette décomposition afin de déterminer les plans. Nous travaillons dans le contexte de l'algèbre géométrique précédemment exposé dans la section 1.2.1.

Dans [RFC10], nous avons proposé un algorithme de décomposition des rotations  $nD$  en rotations planes à partir des  $n$  vecteurs de la base et de leurs images. Cet algorithme est basé sur la décomposition de la proposition 1 issue de [Aud03]. Les tests ont permis de mettre en évidence que les rotations isoclines ne pouvaient pas être analysées correctement par cet algorithme. Cela est principalement dû à la singularité de leurs plans de rotation<sup>7</sup>. Nous avons alors étudié plus particulièrement ces rotations (*cf.* section 1). Cela nous a amené à proposer une autre version de l'algorithme présenté dans [RFC10]. Cette nouvelle version tient compte de ces rotations particulières. De plus, comme généralement les données de départ que nous considérons (vecteurs

6. Par exemple, soient  $P_1$  et  $P_2$  deux plans en somme directe orthogonale ( $P_1 \overset{\perp}{\oplus} P_2$ ). Considérons maintenant  $P'_1 = P_1 + \epsilon_1$  et  $P'_2 = P_2 + \epsilon_2$  où les  $\epsilon_i$  correspondent au bruit alors nous considérons que  $P'_1$  et  $P'_2$  sont en somme orthogonale directe que nous notons  $P'_1 \overset{\perp}{\oplus} P'_2$ .

7. Rappelons que les plans de rotation des rotations isoclines sont générés par un vecteur et son image. Ainsi, dans un espace de dimension  $n$ , une rotation isocline a une infinité de plans de rotation ( $n \geq 4$ ).

de la base et leurs images) sont bruitées, cet algorithme a ensuite été adapté pour tenir compte de ce bruit. Nous avons pour cela introduit les notions de composantes quasi-isogonales et espaces quasi-isogonaux. Le but de cette partie est de présenter cet algorithme qui permet de retrouver les paramètres des rotations (*i.e.* plans et angles) à partir des  $n$  vecteurs d'une base et de leurs images, ces données étant considérées connues avec une certaine imprécision. Dans un cadre expérimental classique, nous ne disposons pas des vecteurs d'une base mais de nuages de vecteurs. Dans le chapitre suivant, où sont notamment présentées nos expérimentations numériques, nous donnons quelques pistes qui mériteraient d'être explorées pour adapter notre algorithme à un cadre expérimental classique (*cf.* section 5).

Soit  $R$  une rotation  $nD$ . Dans la suite, sans perte de généralité, les rotations seront supposées centrées en l'origine du repère et les angles seront compris entre  $[0; 2\pi]$ . Nous supposons connus les couples de vecteurs  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$  pour  $i = 1 \dots n$ , représentant respectivement les  $n$  vecteurs d'une base de  $E$  et leurs images par la rotation  $R$ .

## 2.1 Détermination des plans de rotation

Dans cette partie, nous déterminons les plans de rotation d'une rotation  $nD$  de  $E$ . Comme nous venons de le montrer dans la section 1, la somme directe de ces plans correspond au sous-espace  $P$  défini comme le sous-espace orthogonal à l'ensemble des vecteurs fixes de  $R$ .

Cette détermination s'effectue en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous construisons une base de  $P$  c'est-à-dire une base de  $\text{Im}(R - Id)$  (*cf.* section 2.1.1). Ensuite en utilisant les listes quasi-isogonales, nous construisons une base de chacun des sous-espaces (quasi-) isogonaux  $\mathcal{P}_i$ . Enfin, pour chaque  $\mathcal{P}_i$ , nous savons que la restriction de la rotation est une rotation isocline ou générale. Nous pouvons donc construire les plans de rotation. Dans le premier cas, nous en avons une infinité (d'après le corollaire 1). Ils sont engendrés dans ce cas par un vecteur et son image. Dans le cas de la rotation générale, il en existe un nombre fini. Ils peuvent être déduits de la base du sous-espace quasi-isogonal associé.

### 2.1.1 Détermination d'une base de $P$

Comme le sous-espace  $P$  est de dimension finie, nous pourrions en extraire une base à partir de toute famille génératrice de  $P$ . Ainsi, déterminons, dans un premier temps, une famille génératrice de  $P$  :

**Proposition 3** (Famille génératrice de  $P$ ). *Soit  $P$  le sous-espace orthogonal à l'ensemble des vecteurs fixes d'une rotation  $R$ . Alors le sous-espace  $P$  est engendré par la famille des  $\{\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i\}_{i=1 \dots n}$  où les  $(\mathbf{x}_i)_{i=1 \dots n}$  et les  $(\mathbf{y}_i)_{i=1 \dots n}$  sont respectivement les vecteurs de la base de  $E$  et leurs images par la rotation  $R$ .*

Cette proposition est illustrée graphiquement par la figure 2.1. Sur ce schéma deux couples de vecteurs sont représentés par  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$  et  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$ . Le plan de rotation  $P_1$  est engendré par  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2$ .

**Preuve** (de la proposition 3). *Comme  $\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i = R(\mathbf{x}_i) - \mathbf{x}_i = (R - Id)(\mathbf{x}_i)$ , la famille des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)$  appartient bien à  $P$ . De plus, comme les  $\mathbf{x}_i$  forment une base de  $E$  alors la famille de vecteurs  $((R - Id)(\mathbf{x}_i))_{i=1 \dots n} = (\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1 \dots n}$  engendre bien  $P$ .  $\square$*

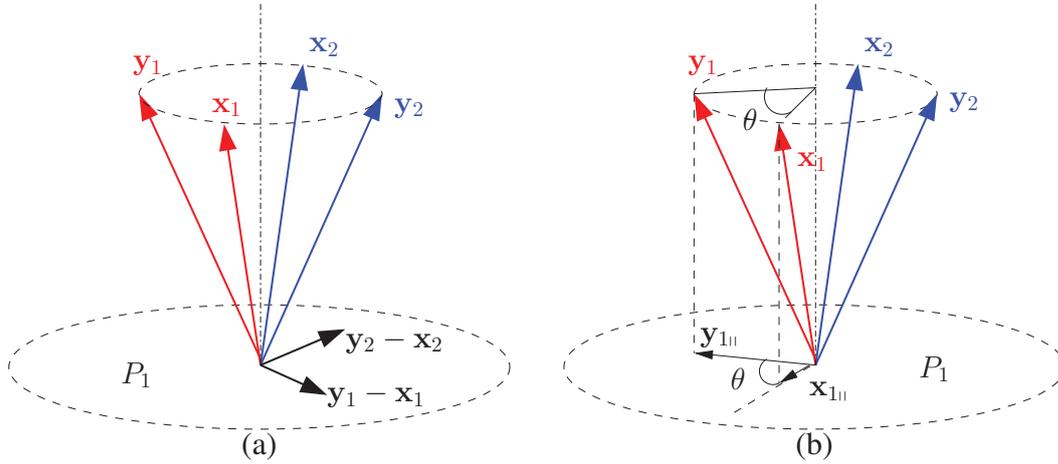


FIGURE 2.1 – Illustration graphique des plans et angles de rotation. Les vecteurs  $x_1, y_1$  (resp.  $x_2, y_2$ ) représentent un vecteur et son image par une rotation. (a) Le plan de rotation  $P_1$  est généré par  $x_1 - y_1$  et  $x_2 - y_2$ . (b) L'angle entre  $x_1$  et  $y_1$  est le même que celui entre  $x_{1n}$  et  $y_{1n}$ , les projetés du couple de vecteurs  $(x_1, y_1)$  dans  $P_1$ .

Nous venons de montrer que la famille formée par les  $n$  éléments  $(y_i - x_i)_{i=1\dots n}$  était une famille génératrice du sous-espace  $P$ . Cette famille ne constitue pas nécessairement une base de  $P$  car certains vecteurs peuvent être linéairement dépendants. Nous devons donc extraire un sous-ensemble de vecteurs libres. Le nombre de vecteurs formant cet ensemble est exactement  $2r$  (cf. section 1). L'entier  $2r$  est communément appelé *rang* de l'application  $R - Id$  et correspond à la dimension de  $Im(R - Id)$ . Cependant, la valeur de cet entier n'est pas connue ici. Pour calculer  $Im(R - Id)$  sans connaître la valeur du rang, nous utilisons la Décomposition en Valeurs Singulières<sup>8</sup> (SVD) [GL96, Vet92] de la matrice  $A$  formée par les vecteurs  $y_i - x_i$ . Cette décomposition permet d'approcher une matrice  $M$  par une matrice  $M'$ . Cette décomposition nous donne trois matrices  $U, S$  et  $V$  telles que :

$$R - I = A = USV^T = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \dots & u_{1,2r} & u_{1,2r+1} & \dots & u_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & \dots & u_{n,2r} & u_{n,2r+1} & \dots & u_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{1,1} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & s_{2r,2r} & & & \\ & & & s_{2r+1,2r+1} & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & s_{n,n} \end{pmatrix} V^T.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{Im(R-Id)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{Ker(R-Id)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{s_{i,i} \neq 0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{s_{i,i} = 0}$

Dans le cas général, les matrices  $U$  et  $V$  sont des matrices unitaires (elles vérifient  $U^*U = UU^* = I$  et  $V^*V = VV^* = I$  où  $U^*$  (resp.  $V^*$ ) désigne la matrice adjointe<sup>9</sup> de la matrice  $U$  (resp.  $V$ )). Ici, dans le cas de la rotation, les coefficients sont réels et les matrices  $U$  et  $V$  sont orthogonales. Dans la suite, nous utilisons uniquement les matrices  $S$  et  $U$ . La matrice  $S$  est diagonale. Ses éléments sont appelés *valeurs singulières*. Ses  $2r$  premières colonnes contiennent des éléments non nuls et ses  $n - 2r$  colonnes suivantes contiennent des zéros. Les  $2r$  premières

8. Cette décomposition fonctionne aussi avec des valeurs bruitées.  
 9. La matrice adjointe est la matrice transposée de la matrice conjuguée.

colonnes de la matrice orthogonale<sup>10</sup>  $U$ , appelées *vecteurs singuliers gauches* donnent une base de  $Im(R - Id)$  et les  $n - 2r$  suivants donnent une base de  $Ker(R - Id)$ . (cf. Annexe A.1 pour plus de détails sur le principe de cette décomposition de matrices). Comme nous ne connaissons pas *a priori* le rang de  $Im(R - Id)$ , utiliser la SVD permet d'obtenir exactement les  $2r$  vecteurs recherchés et ainsi une base de  $Im(R - Id)$ . Comme nous travaillons avec des données bruitées, nous n'obtenons pas nécessairement des valeurs singulières nulles. Nous les considérons comme telles lorsqu'elles sont inférieures à un certain seuil  $tol$ . Ce seuil<sup>11</sup> a été fixé à

$$tol = \max(\text{nbre de colonnes, nbre de lignes}) * \max(s_i) * 10^{-p}$$

où  $\max(s_i)$  est la plus grande valeur singulière et où  $p$  est la mesure du bruit introduit<sup>12</sup>. Ainsi, l'entier  $2r$  qui correspond au rang de l'application  $R - I$  est défini comme le nombre de valeurs singulières supérieures à  $tol$ .

Nous venons de voir dans cette partie qu'une base de  $P$  peut être obtenue en calculant la décomposition en valeurs singulières de la matrice des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}$ . Comme l'espace  $P$  se décompose en somme directe orthogonale d'espaces quasi-isogonaux  $\mathcal{P}_i$ , la base de  $P$  que nous venons de construire va nous permettre de déterminer une base de chacun de ces sous-espaces. Chacune d'entre elles est utilisée ensuite pour construire les plans de rotation comme expliqué dans la partie 2.1.2.

### 2.1.2 Détermination d'une base des sous-espaces (quasi-)isogonaux

Le but de cette partie est de construire une base des sous-espaces (quasi-)isogonaux à partir de la base de  $P$  construite d'après la méthode proposée dans le paragraphe précédent.

Pour générer les bases de ces sous-espaces quasi-isogonaux, nous devons connaître la liste quasi-isogonale. Pour cela, nous nous intéressons plus en détails aux matrices issues de la SVD et en particulier aux valeurs singulières (éléments diagonaux de la matrice  $S$ ) qui vérifient la propriété suivante :

**Propriété 6.** *Les valeurs singulières d'une matrice  $M$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $MM^T$ .*

Pour démontrer cette propriété, nous utilisons la décomposition en valeurs propres d'une matrice :

**Définition 8** (Décomposition en valeurs propres). *La décomposition en valeurs propres d'une matrice  $M'$  est donnée par :*

$$M' = QDQ^{-1} \quad (2.4)$$

où  $D$  est une matrice diagonale constituée des valeurs propres de  $M'$  et les colonnes de  $Q$  sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres (dans le même ordre).

10. Rappelons qu'une matrice orthogonale  $U$  vérifient  $U^t = U^{-1}$  et que les vecteurs colonnes  $U$  sont orthogonaux.

11. Ce seuil a été fixé par analogie avec celui utilisé dans la fonction *orth* de Matlab (fonction qui permet de trouver une base orthonormale de l'espace image d'une matrice  $A$ ). La première étape de cette fonction consiste à calculer la SVD de  $A$  et la base recherchée est composée des  $k$  premiers vecteurs correspondant aux  $k$  valeurs singulières supérieures à  $tol$ .

12. Pour simuler le bruit dans les expérimentations numériques, nous modifions aléatoirement une décimale donnée correspondant à la valeur de  $p$ . Les données sont donc considérées avec  $p$  décimales. En pratique, nous avons expérimenté pour des valeurs de  $p$  comprises entre 1 et 4.

**Remarque 10.** Cette décomposition n'est valable que dans le cas de matrices diagonalisables. Ici, nous l'appliquons aux matrices de rotation  $M$  et  $M - I_n$ , où  $I_n$  est la matrice identité, qui sont diagonalisables (par une matrice unitaire) [Lau05].

**Preuve** (de la propriété 6). D'après la SVD de  $M$ , nous avons  $USV^T = M$ . La matrice  $MM^T$  est donnée par :  $(USV^T)(VS^TU^T) = U(SS^T)U^T$ . Comme la matrice  $U$  est orthogonale, elle vérifie  $U^T = U^{-1}$  (cf. section 1.1). De plus, comme la matrice  $S$  est diagonale,  $SS^T$  est diagonale. Ses éléments diagonaux sont les carrés des éléments diagonaux de  $S$ . Ainsi,  $MM^T = U(SS^T)U^{-1}$  est la décomposition en valeurs propres de la matrice  $MM^T$  (d'après l'équation (2.4)). Les valeurs singulières de la matrice  $M$  sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice  $MM^T$ .  $\square$

Dans la section 2.1.1, pour trouver une base de  $Im(R - Id)$ , la SVD a été calculée à partir de la matrice  $R - I_n$  où  $R$  est la matrice de rotation et  $I_n$  est la matrice identité en dimension  $n$ . Or, nous montrons la propriété suivante :

**Propriété 7.** Les valeurs propres de  $(R - I_n)(R - I_n)^T$ , avec  $R$  la matrice de rotation et  $I_n$  la matrice identité d'ordre  $n$ , sont données par 0 et  $(2 - 2 \cos \theta_i)$  (avec une multiplicité paire<sup>13</sup> dans ce cas).

**Preuve** (de la propriété 7). Les valeurs propres sont invariantes par changement de base [CE05]. Chercher les valeurs propres d'une matrice de rotation revient à calculer les valeurs propres de la matrice de rotation exprimée dans une base dans laquelle elle est orthogonale.

Soit une rotation  $nD$  dont la matrice  $R$  est donnée par<sup>14</sup> :

$$R = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & R_{\theta_p} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } R_{\theta_i} \text{ éventuellement réduit à l'identité.}$$

Soit  $M = R - I_n$  où  $I_n$  est la matrice identité en dimension  $n$ . Cherchons les valeurs propres de la matrice  $MM^T = (R - I_n)(R - I_n)^T$ .

Nous avons  $MM^T = (R - I_n)(R^T - I_n) = RR^T - (R + R^T) + I_n = 2I_n - (R + R^T)$  car  $RR^T$  est une matrice orthogonale. De plus,  $R + R^T$  est une matrice diagonale. D'où, le fait que  $MM^T$  est une matrice diagonale aussi. Les valeurs propres de  $MM^T$  sont ses éléments diagonaux. Il s'agit soit de 0 soit de  $2 - 2 \cos \theta_i$ . Dans ce dernier cas, les valeurs propres de  $2 - 2 \cos \theta_i$  sont de multiplicité 2.  $\square$

D'après les propriétés 6 et 7, les valeurs singulières de  $R - I_n$  sont les racines carrées des valeurs propres de  $(R - I_n)(R - I_n)^T$  et les valeurs singulières non nulles de  $R - I_n$  sont données par  $\sqrt{2 - 2 \cos \theta_i}$ . Le nombre d'angles et donc de rotations planes décomposant la rotation  $R$  est donc égal à la moitié du nombre de valeurs singulières (non nulles).

Connaissant la SVD de la matrice des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}$ , nous pouvons donc en déduire, la valeur des angles, le nombre d'angles non nuls distincts et nous pouvons obtenir la liste (quasi-)

13. Chaque valeur propre apparaît un nombre pair de fois dans l'ensemble des valeurs propres.

14. Une telle matrice existe d'après la proposition 1 page 13.

isogonale associée à l'ensemble des angles. Nous avons vu que chaque élément de cette liste est associé à un sous-espace isogonal. Montrons maintenant comment, à partir de la SVD, nous pouvons déterminer ces sous-espaces particuliers.

Les vecteurs singuliers gauches vérifient la propriété suivante :

**Propriété 8.** *Les vecteurs singuliers gauches (issus de la SVD d'une matrice  $M$ ) sont des vecteurs propres de  $MM^T$ .*

La preuve de cette propriété se déduit de la preuve de la propriété 6.

À partir de maintenant, nous nous restreignons à l'étude des  $2r$  premières colonnes des matrices  $U$  et  $S$ . En effet, les autres colonnes correspondent au noyau de  $R - I_n$  et non à l'espace image qui nous intéresse maintenant.

Par définition de la matrice  $U$  et d'après la propriété 6, les  $2r$  premières colonnes de la matrice  $U$  issue de la SVD de la matrice  $(R - I_n)$  correspondent aux vecteurs propres de  $(R - I_n)(R - I_n)^T$ . Ces  $2r$  colonnes sont des vecteurs générateurs des sous-espaces propres<sup>15</sup> associés aux valeurs propres de la matrice  $(R - I_n)(R - I_n)^T$ . D'une manière générale, la dimension d'un sous-espace propre est comprise entre 1 et la multiplicité de la valeur propre associée [CE05]. D'après la propriété 7, chaque valeur propre est de multiplicité paire. Supposons que les angles de rotation sont tous distincts. Alors la multiplicité de chaque valeur propre est exactement de deux (d'après la preuve de la propriété 7). Donc chaque sous-espace  $E_{\lambda_i}$  est de dimension 1 ou 2. Raisonnons par l'absurde pour montrer que la dimension recherchée est deux. Supposons qu'il existe une valeur propre  $\lambda$  tel que  $E_\lambda$  soit de dimension exactement 1. Comme nous disposons de  $2r$  vecteurs propres et de  $r$  sous-espaces propres, alors il existe une valeur propre  $\lambda'$  telle que son sous-espace associé soit de dimension au moins 3. Cela contredit le fait que la dimension doit être inférieure ou égale à 2 (multiplicité). De la même manière on montre, dans le cas où certains angles sont égaux, que *le sous espace propre est de la même dimension que la multiplicité de la valeur propre associée* (par parité de la dimension de l'espace). A partir de ces sous-espaces propres engendrés par les vecteurs singuliers gauches, montrons maintenant comment en extraire une base des sous-espaces isogonaux.

Comme il existe une base orthogonale dans laquelle la matrice est diagonale par blocs (proposition 1), nous savons que la matrice de rotation  $R$  peut s'écrire comme  $R = PDP^{-1}$  où  $P$  est une matrice orthogonale telle que ces deux premières colonnes engendrent  $P_1$ , ses deux suivantes engendrent  $P_2$  et ainsi de suite ; et  $D$  est une matrice diagonale par blocs composée de  $r$  blocs  $2 \times 2$  (correspondant à des matrices de rotations planes) puis des blocs  $1 \times 1$  composés de 1 (correspondant à l'identité). Les angles de rotation sont supposés ordonnés par ordre décroissant. Considérons maintenant,

$$(R - I_n)(R - I_n)^T = (PDP^{-1} - I_n)(PDP^{-1} - I_n)^T = P(2I_n - D - D^T)P^{-1}.$$

La matrice  $2I_n - D - D^T$  est une matrice diagonale dont les valeurs diagonales sont données par  $2 - 2 \cos \theta_i$ . D'autre part, nous avons vu que la décomposition en valeurs singulières de  $(R - I_n)(R - I_n)^T$  est donnée par

$$(R - I_n)(R - I_n)^T = US^2U^{-1}$$

où  $U$  est la matrice issue de la SVD de la matrice  $(R - I_n)$  et  $S^2$  est une matrice diagonale dont les valeurs sont données par  $2 - 2 \cos \theta_i$ . Par identification entre les deux formes de la matrice

15. Un sous-espace propre  $E_\lambda$  d'une application  $f$  de  $E$  associé à une valeur propre  $\lambda$  est défini comme l'ensemble des vecteurs propres associés à cette valeur propre. Il est donc donné par :  $E_\lambda = \{\mathbf{v} \in E | f(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}$ .

$(R - I_n)(R - I_n)^T$ , nous pouvons en déduire que les matrices  $P$  et  $U$  sont les mêmes. Si tous les angles de rotations sont différents, les deux premières colonnes de la matrice  $U$  engendrent le sous-espace  $\mathcal{P}_1 = P_1$ , les deux suivantes génèrent le sous-espace  $\mathcal{P}_2 = P_2$  et ainsi de suite. Si plusieurs angles sont égaux, notons  $\alpha_j$  la multiplicité de la valeur singulière  $s_j$ . Dans ce cas, le sous-espace  $\mathcal{P}_1$  est généré par les  $\alpha_1$  premières colonnes de  $U$ . Le sous-espace  $\mathcal{P}_2$  est engendré par les  $\alpha_2$  suivantes et ainsi de suite. Dans le cas de rotations bruitées, nous utilisons la liste quasi-isogonale des angles (elle est connue d'après les valeurs singulières). Notons  $\mathcal{C}_i^{\alpha_i}$  le  $i^{\text{ème}}$  élément (de longueur  $\alpha_i$ ) de cette liste. Ainsi, nous en déduisons que les  $(2\alpha_1)$  premières colonnes de  $S$  permettent de former  $\mathcal{C}_i^{\alpha_1}$  et que les  $(2\alpha_1)$  premières colonnes de  $U$  constituent une base de  $\mathcal{P}_1$ . Les  $(2\alpha_2)^{\text{ème}}$  colonnes suivantes de  $S$  forment  $\mathcal{C}_i^{\alpha_2}$  et les  $(2\alpha_2)^{\text{ème}}$  colonnes suivantes de  $U$  constituent une base de  $\mathcal{P}_2$  et ainsi de suite.

D'une manière générale, le  $k^{\text{ème}}$  sous-espace isogonal est donné par :

$$\mathcal{P}_k = \bigwedge_{i=2\alpha_{k-1}+1}^{2\alpha_k} U(:, i) \quad (2.5)$$

où  $\bigwedge$  représente le produit extérieur de l'algèbre géométrique sur  $E$  et  $U(:, i)$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $U$ . Par convention<sup>16</sup>, on pose  $\alpha_0 = 0$ . Rappelons que les  $\mathcal{P}_k$  définis de cette manière ne sont pas des plans mais des sous-espaces de dimensions paires pouvant être considérés comme des sommes directes orthogonales de plans. Maintenant que nous disposons d'une base pour chaque sous-espace isogonal, nous allons en déduire les plans de rotations.

### 2.1.3 Détermination des plans de rotation

À partir des sous-espaces quasi-isogonaux nous construisons les plans de rotation. Pour chaque sous espace  $\mathcal{P}_i$  de dimension  $\alpha_i$ , deux cas sont à distinguer :

- \* soit  $2\alpha_k = 2$  et alors  $\mathcal{P}_k$  est un plan. Le plan de rotation est donc directement déduit de la formule (2.5).
- \* soit  $2\alpha_k > 2$  et alors  $\mathcal{P}_k$  n'est pas un plan mais une somme directe de plans (par définition). Pour déterminer ces plans, il conviendra de projeter les  $n$  vecteurs de la base de  $E$  et leurs images sur l'espace (quasi-) isogonal  $\mathcal{P}_k$ .

Nous commençons par expliquer comment calculer des projections en utilisant l'algèbre géométrique. Ensuite, nous décrivons la méthode pour construire les plans de rotation à partir des sous-espaces isogonaux.

#### Projections dans les algèbres géométriques

Nous présentons dans cette partie uniquement les résultats utiles pour comprendre notre algorithme de décomposition des rotations et plus précisément l'étape de détermination des plans à partir des sous-espaces isogonaux. Cette étape utilise la notion de *projection*. Pour plus de détails sur les projections dans le cadre de l'algèbre géométrique, le lecteur peut consulter [DFM07, Cha07].

16. Cela nous permet de gérer les indices de manière cohérente. En effet  $\mathcal{P}_1 = \bigwedge_{i=1}^{2\alpha_1} U(:, i)$  et  $\mathcal{P}_2 = \bigwedge_{i=\alpha_1+1}^{2\alpha_2} U(:, i)$ . Pour harmoniser les notations on rajoute dans la définition de  $\mathcal{P}_1$ , l'indice nul  $\alpha_0$  pour obtenir  $\mathcal{P}_1 = \bigwedge_{i=\alpha_0+1}^{2\alpha_1} U(:, i)$ .

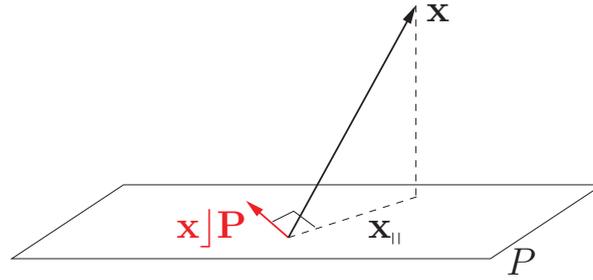


FIGURE 2.2 – Contraction  $\mathbf{x}|P$  d'un vecteur  $\mathbf{x}$  sur le plan  $P$  représenté par le bivecteur  $P$ . Le vecteur  $\mathbf{x}|P$  est un vecteur du plan  $P$ , perpendiculaire à la projection  $\mathbf{x}_{||}$  du vecteur  $\mathbf{x}$  dans ce plan.

Nous avons vu, dans la section 1, que tout vecteur  $\mathbf{x}$  de  $E$  peut être décomposé de manière unique comme  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{||} + \mathbf{x}_{\perp}$  avec  $\mathbf{x}_{||} \in P$  et  $\mathbf{x}_{\perp}$  appartient au sous-espace noté  $P^{\perp}$  où  $P$  est le plan représenté par le bivecteur noté  $P$  dans la suite. Ces vecteurs sont respectivement la projection et la réjection du vecteur  $\mathbf{x}$ . Ces deux notions, représentées sur la figure 2.2, peuvent s'exprimer à partir du produit interne<sup>17</sup> noté  $\cdot$  et du produit extérieur de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_{||} = (\mathbf{x} \cdot P)P^{-1} \text{ et } \mathbf{x}_{\perp} = (\mathbf{x} \wedge P)P^{-1} \quad (2.6)$$

où  $P^{-1}$  est l'inverse (défini dans la section 1.2.1) de  $P$ . La projection et la réjection vérifient :

$$\mathbf{x}_{\perp} \cdot P = 0 \text{ et } \mathbf{x}_{||} \wedge P = 0.$$

La formule (2.6) n'est valable que dans le cas de la projection et de la réjection d'un vecteur sur un plan. En effet, si  $A$  et  $B$  sont des bivecteurs décomposables<sup>18</sup> de  $C_3$ , la formule  $A_{\perp} = (A \wedge B)A^{-1}$  est toujours nulle car  $A \wedge B$  est un 4-vecteur, composé de quatre vecteurs dépendants. Dans le cadre de notre algorithme de décomposition des rotations, nous devons projeter des vecteurs sur des plans mais aussi des vecteurs sur des sous-espaces isogonaux qui ne sont pas nécessairement planaires (pour construire les plans de rotations à partir des sous-espaces isogonaux). Dans ce cas, les projections et les réjections du vecteur  $\mathbf{x}$  sur le sous-espace isogonal représenté dans l'algèbre par l'élément  $A$  sont définies par :

$$\mathbf{x}_{||} = (\mathbf{x} \cdot A)A^{-1} \text{ et } \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot A)A^{-1}.$$

Ces formules sont notamment appliquées dans notre algorithme. Elles nous permettent de projeter sur les espaces (quasi-) isogonaux les vecteurs de la base et leurs images. Dans la section suivante, nous détaillons ce principe.

17. Ce produit interne généralise le produit scalaire entre les vecteurs. En effet, si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont orthogonaux lors  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ . De plus, en dimension 3, le produit interne entre un vecteur et le bivecteur qui représente son plan normal est nul. Par conséquent, ce produit est un bon indicateur d'orthogonalité. Pour plus de détails sur ce produit, le lecteur pourra se référer à l'annexe B ou à [DFM07].

18. Un bivecteur (resp. trivecteur) est une combinaison linéaire d'éléments de la forme  $\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$  où les  $\mathbf{v}_i$  sont des vecteurs. Il est qualifié de *décomposable* s'il peut se réécrire sous la forme  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  (resp.  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ ) où  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  sont des vecteurs. Les bivecteurs décomposables s'interprètent géométriquement comme des sous-espaces de dimension 2 (plans), les trivecteurs décomposables comme des sous-espaces de dimension 3.

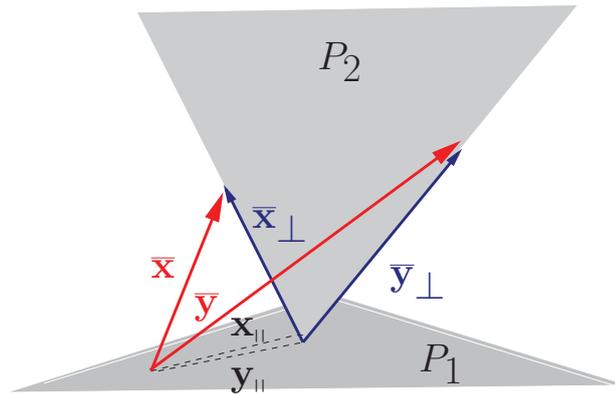


FIGURE 2.3 – Construction de plans orthogonaux. Un plan orthogonal à  $P_1$  est généré par  $\bar{x}_\perp = \bar{x} - \bar{x}_\parallel$  et  $\bar{y}_\perp = \bar{y} - \bar{y}_\parallel$  où  $\bar{x}_\parallel$  et  $\bar{y}_\parallel$  sont les projections des vecteurs  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  dans le plan  $P_1$ .

### Construction des plans de rotations

La première étape consiste à projeter tous les vecteurs  $\mathbf{x}_i$  et leurs images respectives  $\mathbf{y}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$  sur l'espace (quasi-) isogonal. Soient  $\bar{\mathbf{x}}_i$  et  $\bar{\mathbf{y}}_i$  pour  $i = 1, \dots, n$ , ces projections. Le premier plan  $P_1$  est engendré par un couple  $(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{y}}_k)$  tel que  $\bar{\mathbf{x}}_k \neq 0$  et  $\bar{\mathbf{y}}_k \neq 0$ . Le bivecteur décomposable qui représente ce plan est ensuite normalisé afin de se replacer dans le cas de la propriété 3 de la section 1.2.3. Cette propriété permet de décomposer le bivecteur  $\mathbf{B}$  qui représente la rotation en somme  $\mathbf{B}_k + \dots + \mathbf{B}_1$  de 2-vecteurs qui commutent (*i.e.*  $\mathbf{B}_i \mathbf{B}_j = \mathbf{B}_j \mathbf{B}_i$  pour  $i \neq j$ ). De plus, nous avons pu constater que cette décomposition n'est pas unique si les  $\mathbf{B}_i$  sont de même norme. Montrons maintenant l'intérêt de cette propriété dans nos travaux.

Supposons que nous disposons d'un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{2k}\}$  qui engendre l'ensemble des plans de rotation  $P$ . Si la décomposition orthogonale du bivecteur est unique alors il existe un unique ensemble de  $k$  bivecteurs  $\mathbf{B}_i$  de la forme  $\mathbf{B}_i = \mathbf{b}_j \wedge \mathbf{b}_l$ . D'autre part, comme le produit géométrique entre deux bivecteurs n'est pas commutatif alors dans ce cas, l'ordre dans lequel ces bivecteurs sont déterminés est important. La normalisation des bivecteurs représentant le plan et la propriété 3, nous permettent de ne plus avoir l'unicité de cet ensemble de  $k$  vecteurs. Nous pouvons donc choisir n'importe quel couple de vecteurs parmi les vecteurs  $\mathbf{b}_i$  pour former les plans de rotation. Enfin, dans ce cas particulier, le produit géométrique de deux bivecteurs est commutatif : ils peuvent être déterminés dans n'importe quel ordre. Cela montre l'intérêt de l'utilisation des algèbres géométriques dans nos travaux.

Nous savons que les plans de rotation sont deux à deux orthogonaux entre eux (car ils forment une somme directe orthogonale). Les autres plans de rotation doivent donc être orthogonaux à  $P_1$ . D'une manière générale, deux plans engendrés par deux vecteurs et leurs images ne sont pas mutuellement orthogonaux. Ainsi, il n'est pas judicieux de choisir n'importe quel couple  $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i)$  pour former le deuxième plan. Pour construire des plans orthogonaux entre eux en utilisant uniquement ces couples là, nous allons « adapter » le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt utilisé généralement pour les vecteurs à des plans. Ce processus est schématiquement représenté sur la figure 2.3.

Nous choisissons pour cela un couple  $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i)$  qui n'appartient pas à  $P_1$ . La projection de ce couple sur  $P_1$  est le couple  $(\bar{\mathbf{x}}_{i\parallel}, \bar{\mathbf{y}}_{i\parallel})$ . Nous pouvons maintenant calculer les vecteurs  $\bar{\mathbf{x}}_{i\perp} = \bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_{i\parallel}$  et  $\bar{\mathbf{y}}_{i\perp} = \bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{i\parallel}$ . Les vecteurs définissent un plan  $P_2$  engendré par un vecteur et son

image<sup>19</sup>. De plus, le plan  $P_2$  est, par construction, orthogonal à  $P_1$ . Ces deux plans  $P_1$  et  $P_2$  peuvent donc être considérés comme des plans de rotation. Ce processus est ensuite itéré afin d'obtenir l'ensemble des plans de rotation pour un sous-espace isogonal donné. En général, le  $(m + 1)^{\text{ième}}$  plan est engendré par  $\bar{\mathbf{x}}_i - \sum_{j=1}^{m-1} \text{proj}_{P_j}(\bar{\mathbf{x}}_i)$  et  $\bar{\mathbf{y}}_i - \sum_{j=1}^{m-1} \text{proj}_{P_j}(\bar{\mathbf{y}}_i)$  avec  $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i)$  qui n'appartiennent pas à  $P_1, \dots, P_m$ .

La méthode pour construire les plans de rotation à partir d'un sous-espace isogonal est résumée par l'algorithme 2.

---

**Algorithme 2** Calculer les plans de rotation  $P_i$  à partir d'un sous-espace (quasi-) isogonal  $\mathcal{P}$ .

---

**Entrée:**  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}, (\mathbf{y}_i)_{i=1\dots n}, \mathcal{P}$  (sous-espace (quasi-) isogonal)

**Sortie:**  $(P_i)_{i=2\dots \dim(\mathcal{P})/2}$  // Bivecteurs représentant les plans de rotation

**pour**  $i = 1$  à  $n$  **faire:**

    // Projections des vecteurs sur le sous-espace

$\bar{\mathbf{x}}_i = \text{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}_i)$

$\bar{\mathbf{y}}_i = \text{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{y}_i)$

**fin pour**

Choisir  $(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{y}}_k) \neq (0, 0)$

$P_1 = \text{Normalisation}(\bar{\mathbf{x}}_k \wedge \bar{\mathbf{y}}_k)$

**pour**  $i = 2$  à  $\dim(\mathcal{P})/2$  **faire:**

    Choisir  $(\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{\mathbf{y}}_i) \notin P_1 \dots P_{i-1}$

$\bar{\mathbf{x}}_{i||} = \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{P_j}(\bar{\mathbf{x}}_i)$

$\bar{\mathbf{y}}_{i||} = \sum_{j=1}^{i-1} \text{proj}_{P_j}(\bar{\mathbf{y}}_i)$

$P_i = \text{Normalisation}((\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_{i||}) \wedge (\bar{\mathbf{y}}_i - \bar{\mathbf{y}}_{i||}))$

**fin pour**

---

Par construction les plans que nous venons de générer à partir d'une base des sous-espaces (quasi-) isogonaux sont orthogonaux. De plus, nous avons la propriété suivante :

**Proposition 4.** Les plans fournis par l'algorithme 2 sont deux à deux complètement orthogonaux<sup>20</sup>.

**Preuve** (de la proposition 4). L'espace  $P$  peut être décomposé en  $j$  sous-espaces quasi-isogonaux d'après (2.3). Chaque sous-espace quasi-isogonal est soit un plan, soit une somme directe de plans d'après (2.5). Ainsi, nous avons :

$$P = \bigwedge_{i=1}^j \mathcal{P}_i = \bigwedge_{l=1}^k \mathbf{P}_l$$

où  $k \geq l$ , les  $\mathcal{P}_i$  sont les sous-espaces isogonaux et les  $\mathbf{P}_l$  sont les bivecteurs représentant les plans de rotation.

Par construction, les plans de rotation sont au moins orthogonaux. En effet, d'après (2.5), deux cas sont possibles. Si le sous-espace isogonal est exactement de dimension 2 alors le plan est engendré à partir des vecteurs colonnes de la matrice  $U$  issue de la SVD. Par construction,

---

19. Montrons que  $\bar{\mathbf{y}}_{i\perp} = R(\bar{\mathbf{x}}_{i\perp})$ . Nous avons :  $\bar{\mathbf{y}}_{i\perp} + \bar{\mathbf{y}}_{i||} = R(\bar{\mathbf{x}}_i) = R(\bar{\mathbf{x}}_{i\perp} + \bar{\mathbf{x}}_{i||}) = R(\bar{\mathbf{x}}_{i\perp}) + R(\bar{\mathbf{x}}_{i||})$ . Les éléments indicés par  $\perp$  appartiennent à  $F$  et ceux indicés par  $||$  appartiennent à  $P$ . Par identification, nous avons bien  $\bar{\mathbf{y}}_{i\perp} = R(\bar{\mathbf{x}}_{i\perp})$ .

20. Rappelons que deux plans sont dits complètement orthogonaux s'ils sont orthogonaux et se coupent en un seul point : l'origine.

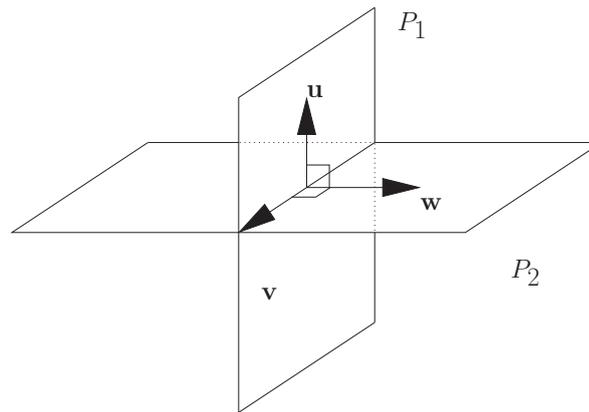


FIGURE 2.4 – Construction d’une base de dimension 3 : l’intersection des plans  $P_1$  et  $P_2$  est donnée par le vecteur  $\mathbf{v}$ . Le vecteur  $\mathbf{u}$  appartient au plan  $P_1$  et est perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}$ , le vecteur  $\mathbf{w}$  appartient à  $P_2$  et est perpendiculaire à  $\mathbf{v}$ .

*ces vecteurs forment une base orthonormée. Sinon, ils sont générés par un processus d’orthogonalisation de Gram-Schmidt, qui, de fait, produit des vecteurs orthogonaux. De plus, comme les plans de rotation sont aussi en somme directe d’après la proposition 1, leur intersection est réduite à un seul point. Ils sont donc complètement orthogonaux.  $\square$*

Ces différentes propriétés et résultats relatifs à l’algorithme 2 et à l’orthogonalité complète des plans de rotation impliquent directement le théorème de décomposition des rotations  $nD$  en rotations planes dans des plans complètement orthogonaux qui suit :

**Théorème 6.** *Toute rotation  $nD$  se décompose en au plus  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  rotations planes dans des plans complètement orthogonaux.*

La complète orthogonalité (cf. section 2.3) des plans de rotations découle directement de la commutativité des bivecteurs par rapport au produit géométrique (cf. section 1.2.1). Cette décomposition présente l’avantage, puisque les plans sont complètement orthogonaux, de fournir un ensemble de rotations indépendantes les unes des autres. Ceci nous permet, comme nous venons de le voir, de déterminer les plans de rotations dans n’importe quel ordre. De plus, comme les plans ne sont pas déterminés de manière incrémentale, mais formés indépendamment les uns des autres : si l’un d’entre eux est généré avec une petite erreur, celle-ci ne se répercute pas dans la détermination des autres plans. Ces plans peuvent se voir de manière assez imagée comme des plans ”indépendants” au sens où une rotation dans un plan est totalement indépendante de celle dans un autre plan complètement orthogonal. Pour démontrer le théorème 6, nous utilisons la propriété suivante :

**Proposition 5.** *La composée de deux rotations dans des plans (non complètement) orthogonaux est une rotation dans un plan.*

**Preuve** (de la proposition 5). *Soit une rotation  $nD$  composée de la rotation dans le plan  $P_1$  et de la rotation dans le plan  $P_2$  avec  $P_1$  et  $P_2$  (non complètement) orthogonaux. L’intersection de  $P_1$  et de  $P_2$  est réduite à une droite de vecteur directeur  $\mathbf{v}$ . Soit le vecteur  $\mathbf{u}$  appartenant au plan  $P_1$  perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}$  et soit  $\mathbf{w}$  le vecteur de  $P_2$  perpendiculaire à  $\mathbf{v}$  comme sur la figure 2.4.*

La composée des rotations dans les plans  $P_1$  et  $P_2$  est équivalente à la rotation dans l'espace  $3D$  de base  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ . Or, une rotation  $3D$  est une rotation dans un plan. Ainsi, la composée de deux rotations dans des plans (non complètement) orthogonaux est une rotation dans un plan.  $\square$

Montrons maintenant le théorème 6.

**Preuve** (du théorème 6). D'après la proposition 1, nous savons qu'une rotation  $nD$  peut se décomposer comme :

$$R_{P_1} \circ \dots \circ R_{P_l}$$

avec les plans  $P_i$  (non complètement) orthogonaux entre eux. D'après la proposition 5, il est possible de se ramener à :

$$R_{P'_1} \circ \dots \circ R_{P'_m}$$

avec  $m \leq l$ , et les plans  $P'_i$  des plans deux à deux complètement orthogonaux.  $\square$

Nous donnons maintenant un exemple qui illustre le théorème 6.

**Exemple 4.** Soit la rotation  $6D$  dans les plans orthogonaux représentés par les bivecteurs  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  et  $\mathbf{P}_3$  donnés respectivement par :  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$ ,  $\mathbf{P}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5$  et  $\mathbf{P}_3 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$  d'angles respectifs  $\theta_1 = 73^\circ$ ,  $\theta_2 = 272^\circ$  et  $\theta_3 = 23^\circ$ . Cette rotation  $6D$  peut se réécrire comme la composée des rotations dans les plans représentés par les bivecteurs  $\mathbf{P}'_1$  et  $\mathbf{P}'_2$  donnés par :  $\mathbf{P}'_1 = 0.045\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.220\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.401\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.434\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.760\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.155\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5$  et  $\mathbf{P}'_2 = 0.155\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.760\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.433\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 - 0.401\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.220\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.045\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5$  d'angles respectifs  $\theta'_1 = 94.394$  et  $\theta'_2 = 66.991^\circ$ . Les plans de représentants  $\mathbf{P}'_1$  et  $\mathbf{P}'_2$  sont complètement orthogonaux.

Dans cette partie, nous avons déterminé à partir des sous-espaces isogonaux, les plans de rotations qui composent la rotation  $nD$ . Ces plans de rotation ont la propriété d'être complètement orthogonaux entre eux rendant ainsi les rotations planes indépendantes les unes des autres. Nous allons maintenant calculer pour chacun d'entre eux les angles de rotation associés.

## 2.2 Détermination des angles de rotation

Nous avons vu, dans la section 2.1, que la SVD de la matrice des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1..n}$  permettait de connaître les angles de rotation. En fait, cette détermination est assez « grossière ». Nous avons vu, que les valeurs singulières à partir desquelles ils étaient calculés étaient de multiplicité 2. Or, lorsque les données de départ (vecteurs de la base et leurs images) sont fortement bruitées deux valeurs singulières  $s_i$  et  $s_{i+1}$  (avec  $i$  impair) peuvent être très éloignées. Par exemple, considérons les vecteurs  $\mathbf{y}_i$  (correspondant aux images des vecteurs de la base) donnés à une

précision de  $10^{-1}$  par les colonnes de la matrice suivante :  $\begin{pmatrix} 0.2 & 1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.5 & 0.1 & 0.8 & -0.4 \\ 0.8 & -0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$ .

Les valeurs singulières sont données par  $\{1.5, 1.4, 0.4, 0.3\}$  Dans ce cas là, il n'est pas possible de définir précisément l'angle de rotation. Ainsi, nous n'utilisons ces angles que pour calculer les listes (quasi-) isogonales et par conséquent, pour reconnaître la nature de la rotation (isocline ou générale). Nous avons donc choisi de recalculer plus précisément ces angles par

projection des vecteurs de la base et des vecteurs images sur les plans de rotation. Cela nous assure de retrouver exactement l'angle formé par les couples de vecteurs dans le plan de rotation comme nous l'avons vu sur la figure 2.1. Ces projections sont calculées à partir de l'opération de *contraction à gauche* utilisée dans les algèbres géométriques que nous présentons maintenant.

### La contraction à gauche

On distingue deux contractions : la contraction à droite et la contraction à gauche. Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement à la contraction à gauche. Cette contraction nous permet en effet, dans notre algorithme de décomposition des rotations, de calculer les projections des couples de vecteurs dans les plans de rotation que nous venons de déterminer. Nous n'exposons ici que les propriétés que nous utilisons dans notre cadre de travail. Pour plus de détails sur la contraction le lecteur peut se référer à l'Annexe B ou à [DFM07, Dor02, Cha07].

La contraction à gauche d'un vecteur  $\mathbf{x}$  par un bivecteur  $\mathbf{P}$  représentant le plan  $P$  est notée  $\mathbf{x} \rfloor \mathbf{P}$ . Elle est géométriquement interprétée comme un vecteur du plan  $P$  perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{x}$ . La figure 2.2 représente la contraction du vecteur  $\mathbf{x}$  par le bivecteur  $\mathbf{P}$ . La contraction a les propriétés suivantes :

Soient  $\mathbf{B}, \mathbf{C}$  des  $k$ -vecteurs (produit extérieur de  $k$  vecteurs indépendants) et  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  des vecteurs. Alors nous avons les propriétés suivantes :

- $\mathbf{a} \rfloor \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  (où  $\cdot$  est le produit scalaire)
- $\mathbf{a} \rfloor (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{a} \rfloor \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} + (-1)^{\text{Grade}(\mathbf{B})} \mathbf{B} \wedge (\mathbf{a} \rfloor \mathbf{C})$

### Calcul des angles de rotation

La dernière étape de notre algorithme consiste à trouver, pour chacun des plans de rotation, les angles de rotation associés. Ce calcul peut être effectué en utilisant la notion de contraction.

Pour chaque plan de rotation  $P_i$ , l'angle de rotation entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est le même que celui entre les projections  $\mathbf{x}_{\parallel}$  et  $\mathbf{y}_{\parallel}$  dans  $P_i$ . (cf. figure 2.1). Déterminons maintenant, pour chaque plan  $P_i$ , les vecteurs  $\mathbf{x}_{\parallel}$  et  $\mathbf{y}_{\parallel}$ . L'élément  $(\mathbf{x} \rfloor \mathbf{P}_i) \rfloor \mathbf{P}_i$  est un sous-espace de dimension 1. Il correspond au vecteur de  $P_i$  qui est orthogonal à  $\mathbf{x}$ . Il s'agit donc d'un vecteur colinéaire à  $\mathbf{x}_{\parallel}$ . Il correspond en fait à la projection du vecteur  $\mathbf{x}$  sur le plan car les formules  $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{P}_i) \mathbf{P}_i^{-1}$  et  $(\mathbf{x} \rfloor \mathbf{P}_i) \rfloor \mathbf{P}_i$  sont équivalentes. Nous projetons donc tous les couples de vecteurs dans le plan  $P_i$ . Nous choisissons un couple dont les projections ne sont pas nulles. L'angle de rotation  $\theta$  dans le plan  $P_i$  est l'angle formé par  $\mathbf{x}_{\parallel}$  et  $\mathbf{y}_{\parallel}$  ; il est donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x}_{\parallel} \cdot \mathbf{y}_{\parallel}}{\|\mathbf{x}_{\parallel}\| \|\mathbf{y}_{\parallel}\|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\mathbf{x}_{\parallel} \wedge \mathbf{y}_{\parallel}}{\|\mathbf{x}_{\parallel}\| \|\mathbf{y}_{\parallel}\|} \mathbf{P}_i^{-1}.$$

Pour trouver tous les angles qui composent la rotation, nous effectuons ce même calcul pour tous les plans.

Pour conclure cette partie 2, nous résumons les étapes de l'algorithme décomposition des rotations  $nD$  en rotations planes que nous avons proposé. Cet algorithme requiert uniquement la connaissance des  $n$  vecteurs de la base de l'espace  $E$  et leurs images par la rotation. Des pistes pour l'adapter à un cadre expérimental plus classique (nuage de vecteurs) sont proposées dans le chapitre suivant (section 5). Cet algorithme repose sur plusieurs étapes.

1. *Nous construisons une base du sous-espace  $P$  qui coïncide avec les plans de rotations.*  
D'après la proposition 3, la famille des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}$  est une famille génératrice de  $P$ .

La décomposition en valeurs singulières de cette matrice nous permet d'en extraire une base.

2. *Nous décomposons le sous-espace  $P$  en sous-espaces isogonaux.* Par les propriétés de la SVD, nous pouvons identifier les vecteurs de cette base qui génèrent les sous-espaces dans lesquels la restriction de la rotation est la composée de rotations de même angle.
3. *Nous construisons les plans de rotation.* Comme les plans de rotations sont deux à deux orthogonaux, nous adaptons la méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt aux plans. Cela nécessite d'effectuer des projections des vecteurs dans les sous-espaces isogonaux et sur les plans.
4. *Nous calculons les angles de rotation pour chaque plan de rotation.* Nous projetons tous les couples de vecteurs dans le plan grâce à la contraction. Nous choisissons un couple dont les projections sont non nulles. L'angle entre les deux vecteurs du couple définit l'angle de rotation.

Notre méthode se résume à l'algorithme 3.

---

**Algorithme 3** Algorithme général pour trouver les plans de rotation  $P_i$  et les angles de rotation  $\theta_i$  à partir de  $n$  vecteurs  $(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,n}$  et de leurs images respectives  $(\mathbf{y}_i)_{i=1,\dots,n}$ .

---

**Entrée:**  $(\mathbf{x}_i)_{i=1,\dots,n}, (\mathbf{y}_i)_{i=1,\dots,n}$

**Sortie:**  $P_i, \theta_i$

$\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i$

$(S, U, V) = SVD[\mathbf{z}_1 \dots \mathbf{z}_n]$

// Calcul des plans de rotation (cf. section 2.1)

$j$  = nombre de valeurs singulières distinctes

**pour**  $k = 1$  à  $j$  **faire:**

// Décomposition de  $P$  en sous-espaces (quasi-) isogonaux :  $P = \mathcal{P}_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{P}_j$

//  $\alpha_i$  est la longueur de la composante (quasi-) isogonale associée au sous-espace (quasi-) isogonal  $\mathcal{P}_i$  et par convention  $\alpha_0 = 0$ .

$\mathcal{P}_k = \bigwedge_{m=2\alpha_{k-1}+1}^{2\alpha_k} U(:, m)$

**si**  $\alpha_k = 1$  **alors**

$P_k = \mathcal{P}_k = \text{Normalisation}(U(:, 2\alpha_{k-1} + 1) \wedge U(:, 2\alpha_k))$

**sinon**

$P_k =$  Données de sortie de l'algorithme 2 (cf. section 2.1)

**fin si**

**fin pour**

// Calcul des angles de rotation (cf. section 2.2)

**pour tout**  $P_i$  **faire:**

Trouver  $\mathbf{x}_{j||} = (\mathbf{x}_j | P_i) | P_i$  et  $\mathbf{y}_{j||} = (\mathbf{y}_j | P_i) | P_i$  non nuls

Calculer  $\cos(\theta_j) = \frac{\mathbf{x}_{j||} \cdot \mathbf{y}_{j||}}{\|\mathbf{x}_{j||}\| \|\mathbf{y}_{j||}\|}$  et  $\sin(\theta_j) = \frac{\mathbf{x}_{j||} \wedge \mathbf{y}_{j||}}{\|\mathbf{x}_{j||}\| \|\mathbf{y}_{j||}\| \|P_i\|}$ .

**fin pour**

// La notation  $U(i, j)$  désigne l'élément d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $U$ , les indices  $i$  et  $j$  pouvant être remplacé par  $\langle : \rangle$  pour désigner la ligne ou la colonne entière.

---

Celui-ci permet de décomposer les rotations  $nD$  en rotations planes dans des plans complètement orthogonaux. Cet algorithme utilise l'algèbre géométrique qui permet d'exprimer les opérations (contraction, projection, rotation, ...) en toutes dimensions. Nous proposons maintenant un autre algorithme utilisant la décomposition de Schur des matrices.

### 3 Décomposition des rotations $nD$ en rotations planes en utilisant la décomposition de Schur

Dans cette partie, nous proposons un second algorithme de décomposition des rotations  $nD$ . Il permet lui aussi de retrouver les plans et les angles de rotation à partir des  $n$  vecteurs de la base et de leurs images par une rotation. Celui-ci utilise une décomposition matricielle appelée *décomposition de Schur*. Cette décomposition matricielle est utilisée notamment pour résoudre des équations de Riccati<sup>21</sup> [Lau79] ou en théorie du contrôle [BGVD92]. Elle est aussi utilisée en tatouage d'image (*watermaking* en anglais) [CMVSSK11]. Dans cet article, cette décomposition est d'ailleurs comparée à la SVD. Il apparaît notamment que si ces deux méthodes sont stables, la décomposition de Schur à une complexité moins élevée que la SVD (cette méthode requiert moins d'opérations). Cela laisse penser, comme nous le montrons dans la partie 3, que les résultats obtenus seront meilleurs, au sens où l'erreur sera moins élevée, dans le cas de l'utilisation de l'algorithme de Schur que dans le cas de notre algorithme utilisant sur les algèbres géométriques. Cette décomposition matricielle n'a pas été, à notre connaissance, utilisée pour trouver les paramètres d'une rotation.

Comme nous l'avons vu dans la partie 1.1, toute matrice de rotation peut être diagonalisée par blocs dans une base orthogonale. Une méthode pour bloc-diagonaliser une matrice est de calculer sa décomposition de Schur [GL96, pla]. Les matrices issues de la décomposition de Schur d'une matrice de rotation  $M$  permettent de déterminer les paramètres de cette rotation (plans et angles) [pla, HJ90]. La décomposition de Schur est une conséquence directe du théorème de Schur permettant de décomposer une matrice carrée à coefficients complexes [GL96, Ber09]. Nous donnons ici la version du théorème de décomposition de Schur s'appliquant aux matrices à coefficients réels car elles sont les seules dont nous avons besoin dans la suite. Dans la suite, toutes les matrices sont considérées à coefficients réels.

**Théorème 7** (Décomposition de Schur dans le cas de matrices à coefficients réels [Ber09, HJ90]). *Soit  $M$  une matrice de taille  $n \times n$ . Il existe une matrice orthogonale  $Q$  de taille  $n \times n$  telle que :*

$$Q^T M Q = T = \begin{pmatrix} M_1 & & & \star \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_k \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

*où les blocs  $M_i$  sont des matrices de taille  $1 \times 1$  ou  $2 \times 2$ , tous les éléments en dessous de cette diagonale sont nuls et ceux au dessus de la diagonale symbolisés par  $\star$  sont quelconques.*

De plus, comme la matrice de rotation  $M$  est une matrice orthogonale, elle est aussi une matrice normale (dans le cas réel, cela signifie qu'elle commute avec sa transposée). La matrice  $M$  vérifie donc le théorème suivant :

---

21. Les équations de Riccati sont des équations différentielles ordinaires de la forme  $y' = q_0(x) + q_1(x)y + q_2(x)y^2$  où les  $q_i$  sont des fonctions réelles ou complexes généralement continues définies sur un intervalle commun.

**Théorème 8** (Décomposition de Schur des matrices normales [HJ90]). *Pour toute matrice normale  $M$ , il existe une matrice orthogonale  $U$  telle que :*

$$U^T M U = T = \begin{pmatrix} M_1 & & & 0 \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & M_k \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

où les blocs  $M_i$  sont des matrices à coefficients de taille  $1 \times 1$  ou  $2 \times 2$  de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ .

Les théorèmes 7 et 8 sont démontrés dans [HJ90] pages 90 et 105. Ces démonstrations peuvent être utilisées comme algorithme pour calculer la décomposition de Schur d'une matrice normale.

Dans le cas de la rotation, ces blocs  $1 \times 1$  sont composés de 1 et ceux de la forme  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  sont donnés par :  $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Ce résultat est prouvé dans [HJ90] page 108.

Nous avons donc :

$$M = U T U^T = \begin{pmatrix} X & X & \dots & X & X & X & X \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X & X & \dots & X & X & X & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & X & & & & & \\ X & X & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & X & X & & \\ & & & X & X & & \\ & & & & & 1 & \\ 0 & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} U^T$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2r}$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{2r}$

où  $X$  remplace un élément de la matrice. Pour un bloc donné  $M_i$  de taille  $2 \times 2$  (matrice de rotation) de la matrice  $T$ , les colonnes correspondantes dans la matrice  $U$  engendrent le plan de rotation associé. Sur le schéma précédent, ces blocs et ces colonnes sont de la même couleur.

La décomposition de Schur nous permet donc de retrouver la matrice diagonale par blocs de la rotation que nous avons présentée dans le chapitre 1 et faisant l'objet de la proposition 1 de la page 13. La matrice  $P$  du théorème 8 peut donc être vue comme une matrice de changement de base. Elle nous permet de retrouver les plans de rotation. La décomposition de Schur d'une matrice n'est pas unique. Néanmoins, quelle que soit la décomposition obtenue, les colonnes de la matrice  $U$  génèrent toujours une base dans laquelle la matrice de départ est diagonale. Même si ces bases sont différentes, les paires de colonnes  $(i, i + 1)$  de la matrice  $U$  qui correspondent dans la matrice  $T$  aux matrices de rotations (l'intersection des colonnes  $i$  et  $i + 1$  avec les lignes  $i$  et  $i + 1$ ) génère le plan de rotation de cette rotation plane mais la base de ce plan n'est pas nécessairement la même. Ainsi, la non-unicité de la décomposition de Schur n'est pas un inconvénient pour retrouver des plans de rotations. Dans le cas de rotations isoclines, la matrice  $T$  contient des blocs  $2 \times 2$  identiques. Ils correspondent à des matrices de rotations planes de même angle dans les plans engendrés par colonnes de la matrice  $U$ . Ainsi, pour chacune des rotations planes, nous avons directement un plan de rotation. Dans l'algorithme 3, nous

dispositions d'une base générant l'ensemble des plans de rotation et nous devons construire les plans de rotation vérifiant des propriétés particulières (ils sont générés par un vecteur et son image et doivent être deux à deux orthogonaux). Dans le cas de l'algorithme utilisant la décomposition de Schur, les rotations isoclines ne posent plus les problèmes qui se posaient dans le cas de l'algorithme 3.

Nous pouvons ainsi proposer l'algorithme 4 basé sur la décomposition de Schur pour calculer les plans et les angles de rotation à partir des  $n$  vecteurs images d'une base :

---

**Algorithme 4** Trouver les plans de rotation  $P_i$  et les angles de rotation associés  $\theta_i$

---

**Entrée:**  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}, (\mathbf{y}_i)_{i=1\dots n}$

**Sortie:**  $P_i, \theta_i$

$M = [\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n]$

$(U, T) =$  Décomposition de Schur de la matrice  $M$

//  $U$  est une matrice orthogonale et  $T$  bloc-diagonale

**pour** chaque bloc  $2 \times 2$  de  $T$  **faire:**

$(j, j + 1) =$  indices des colonnes qui composent le bloc

$\theta_i$  tel que  $\arccos \theta_i = T(j, j)$  et  $\arcsin \theta_i = T(j, j + 1)$

$P_i = U(:, j) \wedge U(:, j + 1)$

**fin pour**

// La notation  $T(i, j)$  désigne l'élément d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $T$ , les indices  $i$  et  $j$  pouvant être remplacé par  $\ll : \gg$  pour désigner la ligne ou la colonne entière.

---

Dans cette partie, nous avons proposé un deuxième algorithme de décomposition des rotations  $nD$  en rotations planes à partir des  $n$  vecteurs de la base et de leurs images respectives notées  $\mathbf{y}_i$ . Cet algorithme utilise la décomposition de Schur de la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{y}_i$ . La décomposition de Schur nécessite  $8n^3/3$  opérations à virgule fixe alors que la décomposition en valeurs singulières en nécessite  $11n^3$ . La complexité des deux algorithmes n'a pas été étudiée plus en détails mais, néanmoins, ce sont les deux décompositions qui correspondent aux opérations les plus coûteuses. Les erreurs accumulées dans l'algorithme basé sur la décomposition de Schur sont moindres comme nous le montrent nos résultats expérimentaux en section 3.

## 4 Exemples numériques.

Dans cette partie, nous montrons comment mettre en pratique les algorithmes 3 et 4 afin d'en illustrer concrètement les principes et de pouvoir comparer les résultats obtenus par les deux méthodes. Nous donnons ici uniquement des exemples en 3D et 4D. La différence fondamentale entre ces deux dimensions est qu'en 3D nous n'avons qu'un seul angle de rotation. Nous n'utilisons donc pas de marge d'erreur  $\beta$  contrairement à la 4D. En dimension 4, nous donnons deux exemples : l'un dans le cas général (les deux angles de rotation sont différents), l'autre dans le cas isocline (les deux angles sont égaux). Dans le chapitre suivant, et plus particulièrement dans la section 3, dans laquelle nous expliquons nos simulations numériques, nous donnons un exemple en 6D pour lequel nous déroulons l'ensemble de notre protocole expérimental : génération de matrices de tests, application de l'algorithme et calcul de l'erreur commise.

### 4.1 Exemples en dimension 3

Soit l'espace  $E = \mathbb{R}^3$  muni de la base canonique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ . Soient  $\tilde{\mathbf{y}}_1 = (-0.736, 0.643, -0.211)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2 = (-0.618, -0.766, -0.177)$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_3 = (-0.276, 0, 0.961)$  les images respectives des vecteurs de la base par une rotation que nous voulons déterminer. Supposons maintenant que nous ne disposons pas des valeurs des  $(\tilde{\mathbf{y}}_i)_{i=1\dots 3}$  mais de données bruitées  $\mathbf{y}_1 = (-0.735, 0.636, -0.214)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (-0.618, -0.762, -0.172)$  et  $\mathbf{y}_3 = (-0.269, 0.002, 0.965)$ . Nous appliquons maintenant nos deux algorithmes aux vecteurs  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots 3} = (\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 3}$  et  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 3}$ .

#### Algorithme basé sur les algèbres géométriques

Dans cet exemple, nous travaillons à une précision de  $10^{-3}$ . Comme nous décomposons une rotation 3D, nous avons un unique angle de rotation; nous n'utilisons pas la marge d'erreur  $\beta$  qui nous permettait de former les listes (quasi-) isogonales car dans ce cas là, la liste est composée d'un seul élément. La matrice  $M$  des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1\dots 3}$  est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} -1.735 & -0.618 & -0.269 \\ 0.636 & -1.762 & 0.002 \\ -0.214 & -0.172 & -0.035 \end{pmatrix}.$$

La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $M$  est donnée par les matrices  $U, S$  et  $V$  telles que :

$$USV^T = \begin{pmatrix} -0.908 & 0.395 & -0.139 \\ -0.392 & -0.919 & -0.048 \\ -0.147 & 0.112 & 0.989 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.881 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.875 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.003 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.772 & -0.678 & -0.136 \\ 0.679 & 0.733 & -0.048 \\ 0.132 & -0.0578 & 0.990 \end{pmatrix} = M.$$

Par la SVD nous obtenons trois valeurs singulières. Comme les données de départ sont bruitées, la dernière valeur singulière n'est pas nulle mais nous pouvons la considérer comme telle. En effet, d'une part sa valeur est très faible comparée aux valeurs des deux autres. D'autre part, nous savons d'après la section 2.1.2 que le nombre de valeurs singulières non nulles est pair. Ainsi, en dimension 3 si la rotation que nous voulons décomposer est différente de l'identité (ce qui est le cas ici par hypothèse), nous avons exactement deux valeurs singulières non nulles. L'unique plan de rotation est engendré par les deux vecteurs correspondant aux deux premières colonnes de la matrice  $U$ . Le plan de rotation est donné par :

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = 0.989\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 0.048\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.139\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

où  $\mathbf{u}_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $U$  et  $\mathbf{e}_i$  sont les vecteurs de la base canonique de l'espace de dimension  $n$ . Ce plan est représenté sur la figure 2.5. En projetant un vecteur de la base et son image sur ce plan de rotation<sup>22</sup>, comme nous l'avons présenté sur la figure 2.5, nous obtenons que l'angle de rotation  $\theta$  donné par :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{x}_{2||} \cdot \mathbf{y}_{2||}}{\|\mathbf{x}_{2||}\| \|\mathbf{y}_{2||}\|} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{\mathbf{x}_{2||} \wedge \mathbf{y}_{2||}}{\|\mathbf{x}_{2||}\| \|\mathbf{y}_{2||}\|} \mathbf{P}^{-1}.$$

avec

$$\mathbf{x}_{2||} = 0.007\mathbf{e}_1 - 0.998\mathbf{e}_2 - 0.047\mathbf{e}_3 \text{ et}$$

22. Les projections de ces vecteurs doivent être non nulles (cf. section 2.2). Elles sont représentées respectivement par les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ .

$$\mathbf{y}_{2_{11}} = 0.625\mathbf{e}_1 + 0.764\mathbf{e}_2 + 0.125\mathbf{e}_3$$

soit un angle

$$\theta = 140.269 \text{ degrés.}$$

La figure 2.5 fournit une représentation graphique de cet exemple. Les vecteurs de la base  $\mathbf{e}_i$  et leurs images  $\mathbf{y}_i$  sont représentés. Le plan correspondant au plan de rotation  $P$  (le même pour les deux méthodes) et le couple de vecteur/image  $\mathbf{a} = \mathbf{x}_{2_{11}}$  et  $\mathbf{b} = \mathbf{y}_{2_{11}}$  permettant de calculer l'angle de rotation pour le premier algorithme (algorithme 3) sont aussi dessinés.

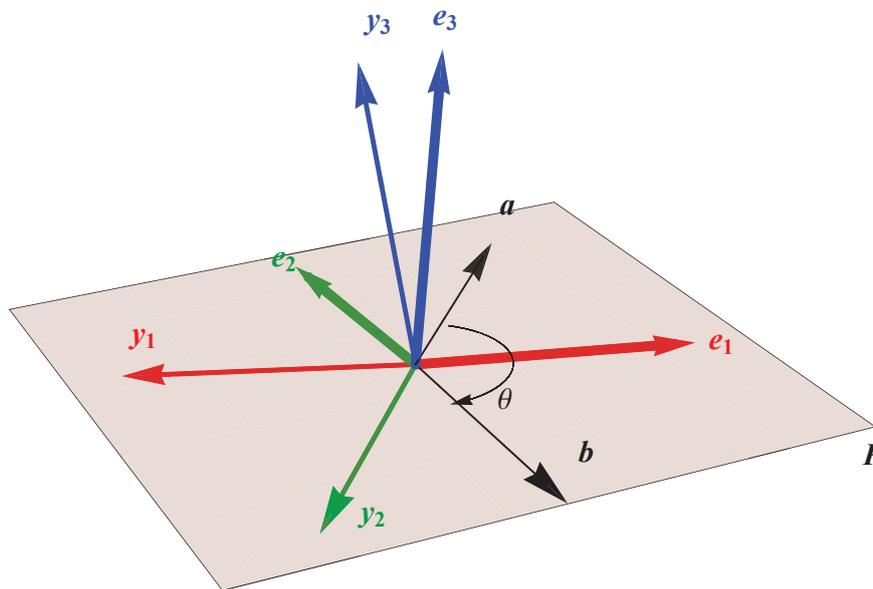


FIGURE 2.5 – Illustration graphique de l'exemple numérique en dimension 3. Les vecteurs de la base  $(\mathbf{e}_i)_{i=1,2,3}$  sont représentés en gras, leurs images  $(\mathbf{y}_i)_{i=1,2,3}$  en traits fins. Les couleurs codent les paires vecteurs/images. Les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  représentent respectivement les vecteurs  $\mathbf{x}_{2_{11}}$  et  $\mathbf{y}_{2_{11}}$ . L'angle  $\theta$  entre ces vecteurs est aussi représenté dans le plan de rotation  $P$ .

### Algorithme basé sur la décomposition de Schur

Nous utilisons maintenant les mêmes données :  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots 3} = (\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 3}$  et  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 3}$ . Nous travaillons toujours à une précision de  $10^{-3}$ . La décomposition de Schur de la matrice  $M'$  des  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 3}$  est donnée par :

$$M' = \begin{pmatrix} -0.735 & -0.618 & -0.269 \\ 0.636 & -0.762 & 0.002 \\ -0.214 & -0.172 & -0.965 \end{pmatrix} = UTU^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -0.199 & -0.970 & -0.139 \\ -0.977 & 0.208 & -0.048 \\ -0.075 & -0.127 & 0.989 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.767 & 0.631 & 0.001 \\ -0.637 & -0.767 & -0.006 \\ 0.000 & 0.000 & 1.003 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.199 & -0.970 & -0.139 \\ -0.977 & 0.208 & -0.048 \\ -0.075 & -0.127 & 0.989 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Comme les données sont bruitées, la matrice  $T$  peut être vue comme la composée d'une matrice de rotation (bruitée) en dimension 2 (lignes et colonnes d'indices 1 et 2). Cette matrice de rotation planaire correspond à une rotation d'angle  $\theta$  tel que  $\arccos \theta = -0.767$  et  $\arcsin \theta = 0.631$ . L'angle  $\theta$  vaut donc  $-140.085^\circ$ . Le plan de rotation de la matrice de départ est généré par la première et la deuxième colonne de la matrice  $U$ . Le plan de rotation est donné par :

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = -0.989\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.047\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.140\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

où  $\mathbf{u}_i$  représente la  $i^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $U$ .

Les plans et les angles fournis par les algorithmes 3 et 4 sont opposés. Pour cet exemple, ces deux algorithmes fournissent donc la même décomposition (à l'orientation des plans près et au signe des angles près).

## 4.2 Exemples en dimension 4

Dans le cas de la dimension 4, nous donnons deux exemples numériques sur lesquels nos algorithmes ont été appliqués. Nous distinguons le cas général (deux composantes quasi-isogonales) et le cas isocline (une seule composante quasi-isogonale). L'espace  $E = \mathbb{R}^4$  est muni de la base canonique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ .

### a) Cas général

Soient  $\tilde{\mathbf{y}}_1 = (0.033, -0.324, -0.945, 0.034)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2 = (0.882, 0.049, 0.031, 0.467)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_3 = (-0.469, 0.092, -0.016, 0.878)$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_4 = (0.011, 0.940, -0.325, -0.099)$  les images respectives des vecteurs de la base par une rotation que nous voulons déterminer. Supposons maintenant que nous ne disposons pas des valeurs des  $(\tilde{\mathbf{y}}_i)_{i=1\dots 4}$  mais de données bruitées  $\mathbf{y}_1 = (0.037, -0.326, -0.946, 0.034)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (0.877, 0.049, 0.030, 0.460)$ ,  $\mathbf{y}_3 = (-0.467, 0.094, -0.012, 0.869)$  et  $\mathbf{y}_4 = (0.009, 0.946, -0.331, -0.095)$ . Nous appliquons maintenant nos deux algorithmes aux vecteurs  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots 4} = (\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 4}$  et  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 4}$ .

### Algorithme basé sur les algèbres géométriques

Dans cet exemple, nous travaillons à une précision de  $10^{-3}$  et nous fixons arbitrairement la marge d'erreur  $\beta = 15^\circ$ . Cette valeur a été déterminée de manière expérimentale comme nous l'expliquons dans la section 2.3. La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $M$  des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1\dots 4}$  est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} -0.963 & 0.877 & -0.467 & 0.009 \\ -0.326 & -0.951 & 0.094 & 0.946 \\ -0.946 & 0.030 & -1.012 & -0.331 \\ 0.034 & 0.460 & 0.869 & -1.095 \end{pmatrix} = USV^t =$$

$$\begin{pmatrix} -0.547 & 0.413 & 0.352 & -0.638 \\ 0.591 & 0.345 & -0.480 & -0.549 \\ -0.409 & 0.584 & -0.563 & 0.418 \\ -0.429 & -0.608 & -0.573 & -0.343 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.880 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.873 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.704 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.700 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.376 & -0.666 & 0.188 & 0.617 \\ -0.578 & -0.122 & -0.683 & 0.429 \\ 0.470 & 0.688 & -0.196 & 0.517 \\ 0.551 & -0.261 & -0.678 & -0.411 \end{pmatrix}.$$

Par la SVD nous obtenons deux paires de valeurs singulières. Comme les valeurs singulières sont données par  $\sqrt{2 - 2 \cos \theta_i}$  où les  $\theta_i$  sont les angles de rotation (cf. section 2.1.2), on en déduit qu'elles correspondent à des angles d'environ  $139^\circ$  et  $41^\circ$ . Comme notre marge  $\beta$  est fixée à  $15^\circ$ , ces deux angles n'appartiennent pas à la même composante quasi-isogonale. Par conséquent les sous-espaces isogonaux correspondant aux valeurs singulières sont de dimension 2 et correspondent aux plans de rotation. Le premier plan est donc généré par les deux premières colonnes de la matrice  $U$  et le deuxième par les deux colonnes suivantes. Ils sont donc donnés par :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = -0.433\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.150\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.510\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.486\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.212\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.499\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \text{ et}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4 = -0.499\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.212\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.486\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.510\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.150\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.433\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$$

où  $\mathbf{u}_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $U$ . En projetant les vecteurs de la base et leurs images sur ces deux plans de rotation, nous obtenons que les angles de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  donnés par :

$$\cos(\theta_1) = \frac{\mathbf{x}_{2_{11}} \cdot \mathbf{y}_{2_{11}}}{\|\mathbf{x}_{2_{11}}\| \|\mathbf{y}_{2_{11}}\|} \text{ et } \sin(\theta_1) = \frac{\mathbf{x}_{2_{11}} \wedge \mathbf{y}_{2_{11}}}{\|\mathbf{x}_{2_{11}}\| \|\mathbf{y}_{2_{11}}\|} \mathbf{P}_1^{-1}.$$

avec

$$\mathbf{x}_{2_{11}} = -0.181\mathbf{e}_1 - 0.531\mathbf{e}_2 - 0.041\mathbf{e}_3 - 0.463\mathbf{e}_4 \text{ et}$$

$$\mathbf{y}_{2_{11}} = -0.468\mathbf{e}_1 - 0.399\mathbf{e}_2 + 0.308\mathbf{e}_3 - 0.248\mathbf{e}_4$$

soit un angle

$$\theta_1 = 140.077 \text{ degrés}$$

et

$$\cos(\theta_2) = \frac{\mathbf{x}_{4_{11}} \cdot \mathbf{y}_{4_{11}}}{\|\mathbf{x}_{4_{11}}\| \|\mathbf{y}_{4_{11}}\|} \text{ et } \sin(\theta_2) = \frac{\mathbf{x}_{4_{11}} \wedge \mathbf{y}_{4_{11}}}{\|\mathbf{x}_{4_{11}}\| \|\mathbf{y}_{4_{11}}\|} \mathbf{P}_2^{-1}.$$

avec

$$\mathbf{x}_{4_{11}} = 0.017\mathbf{e}_1 + 0.463\mathbf{e}_2 + 0.180\mathbf{e}_3 - 0.554\mathbf{e}_4 \text{ et}$$

$$\mathbf{y}_{4_{11}} = 0.319\mathbf{e}_1 - 0.499\mathbf{e}_2 + 0.186\mathbf{e}_3 + 0.432\mathbf{e}_4$$

soit un angle

$$\theta_2 = 41.528 \text{ degrés.}$$

On remarque que les angles calculés à partir des projections correspondent (à un degré près ou à l'orientation des angles près) aux angles donnés par les valeurs singulières. Ainsi, dans ce cas, le calcul des angles en utilisant les valeurs singulières donne une bonne approximation. Cela n'est pas toujours le cas. En effet, lorsque les données qui représentent les rotations sont très fortement bruitées, les valeurs singulières qui théoriquement doivent être de multiplicité double ne le sont pas. L'écart entre deux valeurs singulières  $s_i$  et  $s_{i+1}$  (avec  $i$  impair) est parfois

important. Soit la matrice de rotation :  $M = \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.5 & 0.1 & 0.8 & -0.4 \\ 0.8 & -0.2 & 0.5 & -0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$ .

Nous travaillons ici avec une précision de  $10^{-1}$ . Les valeurs singulières de la matrice  $M - I_4$  sont données par  $(1.5, 1.4, 0.4, 0.3)$ . Ces valeurs singulières correspondent à des angles<sup>23</sup> de  $99.4^\circ$  et  $92.3^\circ$  pour les deux premières et  $22.0^\circ$  et  $19.8^\circ$  pour les deux autres. Comme les valeurs de  $s_1$  et  $s_2$  sont différentes, nous ne pouvons pas déterminer la valeur des angles.

23. Rappelons que les valeurs singulières  $s_i$  sont données par  $\sqrt{2 - 2 \cos \theta_i}$ .

**Algorithme basé sur la décomposition de Schur**

Nous utilisons maintenant les mêmes données :  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots 4} = (\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 4}$  et  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 4}$ . Nous travaillons toujours à une précision de  $10^{-3}$ . La décomposition de Schur de la matrice  $M'$  des  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 4}$  est donnée par :

$$M' = \begin{pmatrix} 0.037 & 0.877 & -0.467 & 0.009 \\ -0.326 & 0.049 & 0.094 & 0.946 \\ -0.946 & 0.030 & -0.012 & -0.331 \\ 0.034 & 0.46 & 0.869 & -0.095 \end{pmatrix} = UTU^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.455 & 0.563 & 0.689 & 0.016 \\ -0.380 & 0.631 & -0.281 & 0.616 \\ -0.631 & -0.315 & 0.668 & 0.238 \\ -0.501 & 0.431 & -0.002 & -0.751 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.754 & 0.659 & 0.008 & 0.007 \\ -0.656 & 0.754 & 0.003 & -0.016 \\ 0 & 0 & -0.764 & 0.642 \\ 0 & 0 & -0.634 & -0.764 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.455 & 0.563 & 0.689 & 0.016 \\ -0.380 & 0.631 & -0.281 & 0.616 \\ -0.631 & -0.315 & 0.668 & 0.238 \\ -0.501 & 0.431 & -0.002 & -0.751 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Comme les données de départ sont bruitées, la matrice  $T$  peut être considérée comme une matrice diagonale par blocs. Chacun de ces blocs peut être vu comme une matrice de rotation de dimension 2. Les deux blocs ne sont pas exactement des matrices de rotation mais comme les données de départ sont bruitées, nous pouvons les considérer comme telles. Ces matrices de rotations planaires correspondent à des rotations d'angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  tels que  $(\arccos \theta_1, \arcsin \theta_1) = (0.754, 0.659)$  et  $(\arccos \theta_2, \arcsin \theta_2) = (-0.764, 0.642)$ . Ces angles sont donc  $\theta_1 = -41.062^\circ$  et  $\theta_2 = -139.818^\circ$ . Les plans de rotation de la matrice de départ sont générés respectivement par les deux premières colonnes de la matrice  $U$  et par les deux suivantes. Les plans de rotation sont donnés par :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2 = 0.501\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 0.212\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.478\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.518\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.152\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.430\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \text{ et}$$

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{u}_3 \wedge \mathbf{u}_4 = 0.429\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 0.152\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.517\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.478\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.212\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.501\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4$$

où  $\mathbf{u}_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $U$ .

Dans cet exemple, les deux algorithmes fournissent les mêmes plans (à l'orientation près) et les mêmes angles (au signe près). Cela montre que nos deux méthodes sont équivalentes dans ce cas. Dans le chapitre suivant, nous montrons que l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique donne en moyenne des résultats meilleurs que celui de Schur en dimension 4.

**b) Cas isocline**

Soient  $\tilde{\mathbf{y}}_1 = (0.656, 0.000, 0.000, 0.755)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_2 = (0.000, 0.574, 0.819, 0.000)$ ,  $\tilde{\mathbf{y}}_3 = (0.000, -0.819, 0.574, 0.000)$  et  $\tilde{\mathbf{y}}_4 = (-0.755, 0.000, 0.000, 0.656)$  les images respectives des vecteurs de la base par une rotation que nous voulons déterminer. Supposons maintenant que nous ne disposons pas des valeurs des  $(\tilde{\mathbf{y}}_i)_{i=1\dots 4}$  mais de données bruitées  $\mathbf{y}_1 = (0.656, -0.003, -0.004, 0.746)$ ,  $\mathbf{y}_2 = (0.000, 0.567, 0.815, 0.006)$ ,  $\mathbf{y}_3 = (-0.003, -0.811, 0.572, -0.003)$  et  $\mathbf{y}_4 = (-0.756, 0.005, -0.005, 0.656)$ . Nous appliquons maintenant nos deux algorithmes aux vecteurs  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots 4} = (\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 4}$  et  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 4}$ .

**Algorithme basé sur les algèbres géométriques**

Dans cet exemple, nous travaillons encore à une précision de  $10^{-3}$  et nous fixons toujours arbitrairement la marge d'erreur  $\beta = 15^\circ$ . La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $M$  des  $(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i)_{i=1\dots 4}$  est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} -0.344 & -0.000 & -0.003 & -0.756 \\ -0.003 & -0.433 & -0.811 & 0.005 \\ -0.004 & 0.815 & -0.428 & -0.005 \\ 0.746 & 0.006 & -0.003 & -0.344 \end{pmatrix} = USV^t =$$

$$\begin{pmatrix} -0.033 & -0.025 & -0.978 & -0.204 \\ 0.629 & -0.777 & -0.006 & 0.023 \\ -0.776 & -0.629 & 0.046 & -0.019 \\ -0.037 & 0.000 & -0.203 & 0.979 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.923 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.917 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.831 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.821 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.016 & -0.980 & -0.193 & 0.048 \\ 0.015 & -0.192 & 0.981 & 0.020 \\ 0.223 & 0.047 & -0.014 & 0.974 \\ 0.975 & -0.024 & -0.015 & -0.222 \end{pmatrix}.$$

Par la SVD nous obtenons deux paires de valeurs singulières<sup>24</sup> correspondant à des angles d'environ  $55^\circ$  et  $50^\circ$ . Comme notre marge  $\beta$  est fixée à  $15^\circ$ , ces deux angles appartiennent à la même composante quasi-isogonale. Par conséquent l'unique sous-espace isogonal  $\mathcal{P}$  est de dimension 4 : c'est l'espace  $E$  tout entier. Pour trouver les deux plans de rotation nous appliquons l'algorithme 2. Les vecteurs  $\bar{\mathbf{x}}_i$  et  $\bar{\mathbf{y}}_i$  sont égaux aux vecteurs  $\mathbf{x}_i$  et  $\mathbf{y}_i$  (car  $\mathcal{P} = E$ ). Le couple  $(\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{y}}_1)$  est non nul : il génère le premier plan  $P_1$  représenté par le bivecteur  $\mathbf{P}_1$  suivant :

$$\mathbf{P}_1 = \bar{\mathbf{x}}_1 \wedge \bar{\mathbf{y}}_1 = -0.004\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.005\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 1.000\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4.$$

Les vecteurs  $\bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{e}_2$  et  $\bar{\mathbf{y}}_2 = 0.567\mathbf{e}_2 + 0.815\mathbf{e}_3 + 0.006\mathbf{e}_4$  n'appartiennent pas<sup>25</sup> à  $P_1$ . Ils vont donc servir à générer le deuxième plan de rotation  $P_2$ . Le plan  $P_2$  est généré par  $(\bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_{2||})$  et  $(\bar{\mathbf{y}}_2 - \bar{\mathbf{y}}_{2||})$ . Il est représenté par le bivecteur  $\mathbf{P}_2$  :

$$\mathbf{P}_2 = 1.000\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.005\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.004\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.$$

En projetant les vecteurs de la base et leurs images sur ces deux plans de rotation, nous obtenons les angles de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  donnés par :

$$\cos(\theta_1) = \frac{\mathbf{x}_{2||} \cdot \mathbf{y}_{2||}}{\|\mathbf{x}_{2||}\| \|\mathbf{y}_{2||}\|} \text{ et } \sin(\theta_1) = \frac{\mathbf{x}_{2||} \wedge \mathbf{y}_{2||}}{\|\mathbf{x}_{2||}\| \|\mathbf{y}_{2||}\| \|\mathbf{P}_1\|}.$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{2||} &= -1.000\mathbf{e}_2 - 0.004\mathbf{e}_4 \text{ et} \\ \mathbf{y}_{2||} &= -0.567\mathbf{e}_2 - 0.815\mathbf{e}_3 - 0.007\mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

soit un angle

$$\theta_1 = 49.089 \text{ degrés}$$

et

$$\cos(\theta_2) = \frac{\mathbf{x}_{4||} \cdot \mathbf{y}_{4||}}{\|\mathbf{x}_{4||}\| \|\mathbf{y}_{4||}\|} \text{ et } \sin(\theta_2) = \frac{\mathbf{x}_{4||} \wedge \mathbf{y}_{4||}}{\|\mathbf{x}_{4||}\| \|\mathbf{y}_{4||}\| \|\mathbf{P}_2\|}.$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{4||} &= 0.004\mathbf{e}_2 + 0.005\mathbf{e}_3 - 1.000\mathbf{e}_4 \text{ et} \\ \mathbf{y}_{4||} &= 0.757\mathbf{e}_1 + 0.003\mathbf{e}_2 + 0.004\mathbf{e}_3 - 0.656\mathbf{e}_4 \end{aligned}$$

soit un angle

$$\theta_2 = 55.174 \text{ degrés.}$$

Nous remarquons que, dans ce cas, comme la rotation n'est pas fortement bruitée, ces angles sont proches de ceux que nous avons calculés à partir des valeurs singulières. Cela montre notamment qu'utiliser les angles calculés à partir de la SVD ne paraît pas si aberrant.

24. Rappelons que les valeurs singulières sont données par  $(2 - 2 \cos \theta_i)$  où les  $\theta_i$  sont les angles de rotation.

25. Un moyen de vérifier que  $\bar{\mathbf{x}}_2$  et  $\bar{\mathbf{y}}_2$  n'appartiennent pas à  $P_1$  est de comparer la norme de la projection sur  $P_1$  de ces vecteurs avec la norme des vecteurs. S'ils appartiennent à  $P_1$  ces deux normes sont égales sinon elles sont différentes. Ici, la projection de  $\bar{\mathbf{x}}_2$  sur  $P_1$  est nulle, sa norme est inférieure à celle de  $\bar{\mathbf{x}}_2$ . Il en est de même pour  $\bar{\mathbf{y}}_2$ .

### Algorithme basé sur la décomposition de Schur

Nous utilisons maintenant les mêmes données :  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots 4} = (\mathbf{e}_i)_{i=1\dots 4}$  et  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 4}$ . Nous travaillons toujours à une précision de  $10^{-3}$ . La décomposition de Schur de la matrice  $M'$  des  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots 4}$  est donnée par :

$$M' = \begin{pmatrix} 0.656 & -0.000 & -0.003 & -0.757 \\ -0.003 & 0.567 & -0.811 & 0.005 \\ -0.004 & 0.815 & 0.572 & -0.005 \\ 0.746 & 0.006 & -0.003 & 0.656 \end{pmatrix} = UTU^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} 0.998 & 0.011 & -0.029 & 0.047 \\ -0.007 & 0.057 & -0.905 & -0.422 \\ -0.055 & -0.007 & -0.422 & 0.905 \\ -0.011 & 0.998 & 0.049 & 0.030 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.656 & -0.757 & 0.000 & 0.003 \\ 0.746 & 0.656 & 0.002 & -0.007 \\ 0.000 & 0.000 & 0.569 & 0.810 \\ 0.000 & 0.000 & -0.816 & 0.569 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.998 & 0.011 & -0.029 & 0.047 \\ -0.007 & 0.057 & -0.905 & -0.422 \\ -0.055 & -0.007 & -0.422 & 0.905 \\ -0.011 & 0.998 & 0.049 & 0.030 \end{pmatrix}^{-1}.$$

De la même façon que dans le cas général, nous pouvons considérer la matrice  $T$  comme la matrice de la composée de deux matrices de rotation de dimension 2. Ces matrices de rotations planaires correspondent à des rotations d'angles  $49.004^\circ$  et  $-55.319^\circ$ . Les plans de rotation de la matrice de départ sont générés respectivement par les deux premières colonnes de la matrice  $U$  et par les deux suivantes. Les plans de rotation sont donnés par :

$$\mathbf{P}_1 = 0.057\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.006\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.996\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.003\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.006\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.055\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 \text{ et}$$

$$\mathbf{P}_2 = 0.055\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.006\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.003\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.997\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.006\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.057\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4.$$

Nous avons expérimenté, à l'aide de quelques exemples, correspondant à des rotations bruitées, les deux algorithmes que nous proposons. Les résultats, sur ces exemples sont proches de la solution exacte dans chaque cas.

Les algorithmes 3 et 4 permettent de décomposer les rotations  $nD$  en rotations planes dans des plans complètement orthogonaux. Nous proposons maintenant une autre décomposition des rotations  $nD$ . Elle utilise non plus les plans de rotations mais une égalité sur les angles. Cette troisième méthode de décomposition des rotations est ainsi basée sur les travaux de Mebius (cf. section 2.3).

## 5 Décomposition des rotations $nD$ en rotations isoclines

Dans cette section, nous proposons une décomposition des rotations  $nD$  en rotations isoclines. Celle-ci généralise celle de Mebius que nous avons présentée dans la section 2.3. L'intérêt, ici, est d'obtenir uniquement une décomposition en rotations isoclines dont les plans de rotation possèdent des propriétés intéressantes aussi bien de construction (un vecteur et son image engendrent un plan de rotation) que de nombre (les rotations isoclines possèdent une infinité de plans de rotation). Ce travail pourra être appliqué dans le cadre d'estimation de paramètres. En effet, si nous disposons d'un algorithme permettant de trouver ces rotations isoclines à partir de vecteurs et leurs images, nous pourrions déduire les plans de rotation de la rotation  $nD$  en utilisant les propriétés des rotations isoclines qui la compose.

Nous introduisons maintenant la notion de  $p$ -rotation qui sera utilisée dans la décomposition en rotations isoclines. Cette notion permet de caractériser une rotation en fonction du nombre de rotations planes qui la compose.

**Définition 9** ( $p$ -rotations). *Une rotation  $nD$  se décomposant en  $p$  rotations planaires dans des plans complètement orthogonaux ( $1 < p \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ) est appelée  $p$ -rotation. Si  $p = 2$ , la rotation est également appelée rotation double.*

Grâce à cette notion, nous proposons maintenant le théorème permettant de décomposer les rotations  $nD$  en rotations isoclines.

**Théorème 9** (Décomposition des rotations  $nD$  en rotations isoclines). *Toute  $p$ -rotation peut se décomposer en  $p$  rotations isoclines<sup>26</sup>. Cette décomposition n'est pas unique.*

En reprenant les notations des parties précédentes, cela signifie que  $\dim(P) = 2p$  et  $\dim(F) = n - 2p$  où les espaces  $P$  et  $F$  sont définis par :

$$P = \{\mathbf{x} \in E \mid \forall \mathbf{y} \in F, \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\} \text{ et } F = \{\mathbf{x} \in E \mid R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

**Preuve** (du théorème 9). *Soit  $R$  la  $p$ -rotation de dimension  $n$ , d'angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ . Les plans de rotation sont supposés complètement orthogonaux car il est toujours possible de se ramener à ce cas là par le théorème 6 page 71. Alors  $R$  s'écrit :*

$$R = R_{P_1}(\theta_1) \circ \dots \circ R_{P_p}(\theta_p)$$

avec  $\forall i, j$  les plans  $P_i$  et  $P_j$  complètement orthogonaux.

Le but est de décomposer  $R$  de la manière suivante :

$$R = R_P^I(\Theta_1) \circ \dots \circ R_P^I(\Theta_p)$$

où  $R_P^I(\Theta_i)$  désigne une rotation isocline (sur l'espace  $P$ ) dont les d'angles ont la même valeur absolue  $\Theta_i$  (c'est-à-dire une composition de rotations d'angles égaux ou opposés dans des plans complètement orthogonaux). Chacune de ces rotations  $R_P^I(\Theta_i)$  est telle que :

$$R_P^I(\Theta_i) = R_{P_1}(\pm\Theta_i) \circ \dots \circ R_{P_p}(\pm\Theta_i)$$

où les plans  $P_j$  sont les plans de rotation issus de la décomposition en rotations planes.

D'une manière générale, la composée de  $r$  rotations planes de même centre  $C$  (ici le centre considéré est l'origine) dans le même plan est une rotation de centre  $C$ . Son angle de rotation est égal à la somme des  $r$  angles de rotation. Cette propriété est illustrée sur la figure 2.6.

Nous appliquons cette propriété à chaque rotation planaire composant  $R$ . Chacune d'entre elles peut donc être décomposée en plusieurs rotations dans le même plan  $P_i$  de la manière suivante :

$$R_{P_1}(\theta_1) = R_{P_1}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \dots R_{P_1}\left(\frac{\theta_1+\theta_p}{2}\right) R_{P_1}\left(\theta_1 - \frac{(\theta_1+\theta_2)}{2} - \dots - \frac{(\theta_1+\theta_p)}{2}\right)$$

$$R_{P_2}(\theta_1) = \left[ R_{P_2}\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) R_{P_2}\left(\frac{-(\theta_1+\theta_3)}{2}\right) \dots R_{P_2}\left(\frac{-(\theta_1+\theta_p)}{2}\right) R_{P_2}\left(-\theta_1 + \frac{(\theta_1+\theta_2)}{2} + \dots + \frac{(\theta_1+\theta_p)}{2}\right) \right]$$

et pour  $j = 2 \dots p - 1$  :

$$R_{P_{j+1}}(\theta_{j+1}) = \left[ R_{P_{j+1}}\left(\frac{-(\theta_1+\theta_2)}{2}\right) \dots R_{P_{j+1}}\left(\frac{-(\theta_1+\theta_{j-1})}{2}\right) R_{P_{j+1}}\left(\frac{\theta_1+\theta_j}{2}\right) \right]$$

$$R_{P_{j+1}}\left(\frac{-(\theta_1+\theta_{j+1})}{2}\right) \dots R_{P_{j+1}}\left(\frac{-(\theta_1+\theta_p)}{2}\right) R_{P_{j+1}}\left(-\theta_1 + \frac{(\theta_1+\theta_2)}{2} + \dots + \frac{(\theta_1+\theta_p)}{2}\right) \right].$$

26. Chacune d'entre elles est la composée de  $p$  rotations planes d'angles égaux ou opposés.

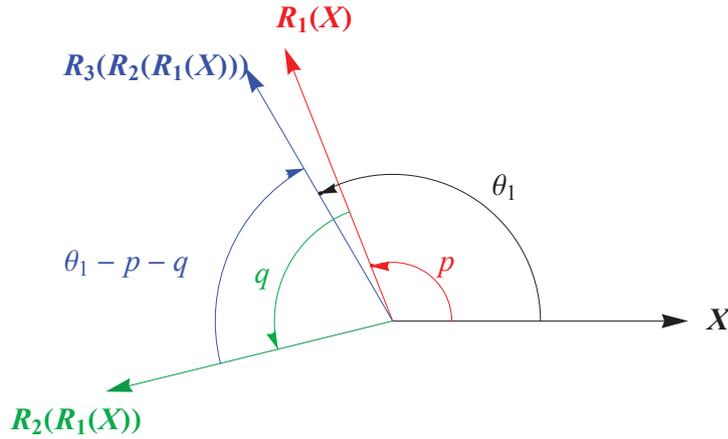


FIGURE 2.6 – Composition de rotations planes de même centre. Soient  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) la rotation de centre  $C$  et d'angle  $p = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$  (resp  $q = \frac{\theta_1 + \theta_3}{2}$ ) et  $R_3$  la rotation de centre  $C$  (dans notre cas, le centre est l'origine) et d'angle  $(\theta_1 - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\theta_1 + \theta_3}{2})$ . La rotation d'un vecteur  $x$  par  $R_3 \circ R_2 \circ R_1$  est équivalente à la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\theta_1$ .

Les angles  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_p$  sont donnés en fonction des angles  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$  par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \Theta_i = \left| \frac{\theta_1 + \theta_i}{2} \right| & i = 2, \dots, p-1 \\ \Theta_p = \left| \theta_1 - \sum_{i=1}^{p-1} \Theta_i \right|. \end{cases}$$

La rotation  $R$  est bien une composée de rotations isoclines. Les  $(p-1)$  premières rotations isoclines sont telles que la valeur absolue de leurs angles vaut  $\left| \frac{\theta_1 + \theta_j}{2} \right|$  avec  $j = 2 \dots p-1$ . La valeur absolue des angles de la dernière rotation isocline est  $\left| \theta_1 - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} - \dots - \frac{(\theta_1 + \theta_p)}{2} \right|$ . Dans cette décomposition, nous avons choisi comme facteur commun  $\theta_1$  mais nous aurions pu en choisir un autre. Cela rend la décomposition non unique.  $\square$

Dans le cas des rotations simples (1-rotations), nous avons le résultat suivant :

**Propriété 9.** Toute rotation simple (rotation plane) dans un espace de dimension<sup>27</sup>  $n > 3$  peut se décomposer en deux rotations isoclines.

**Preuve** (de la propriété 9). Soit  $R_{P_1}(\theta)$  une rotation  $nD$  ( $n > 3$ ) d'angle  $\theta$  dans le plan  $P_1$ . Composer une rotation avec la rotation nulle (identité) ne la modifie pas. La rotation  $R_{P_1}(\theta)$  peut ainsi être vue comme la composée de la rotation  $R_{P_1}(\theta)$  d'angle  $\theta$  dans le plan  $P_1$  et de la rotation  $R_{P_2}(0)$  d'angle 0 dans un plan  $P_2$  complètement orthogonal au plan  $P_1$ . La rotation  $R_{P_1}(\theta)$  peut s'écrire comme la composée de deux rotations d'angle  $\theta/2$  dans le plan  $P_1$  :

$$R_{P_1}(\theta) = R_{P_1}\left(\frac{\theta + 0}{2}\right) R_{P_1}\left(\frac{\theta - 0}{2}\right).$$

De manière similaire, la rotation  $R_{P_2}(\theta)$  peut s'écrire comme la composée de deux rotations d'angles  $\theta/2$  et  $-\theta/2$  dans le plan  $P_2$  :

$$R_{P_2}(0) = R_{P_2}\left(\frac{\theta + 0}{2}\right) R_{P_2}\left(\frac{0 - \theta}{2}\right).$$

<sup>27</sup> La dimension de l'espace doit être strictement supérieure à 3 afin d'assurer l'existence de plans complètement orthogonaux.

En utilisant ces décompositions, la rotation  $R_{P_1}(\theta)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} R_{P_1}(\theta) &= R_{P_1}(\theta)R_{P_2}(0) \\ &= R_{P_1}\left(\frac{\theta+0}{2}\right)R_{P_1}\left(\frac{\theta-0}{2}\right)R_{P_2}\left(\frac{\theta+0}{2}\right)R_{P_2}\left(\frac{0-\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Nous savons que les plans de rotations sont des plans complètement orthogonaux. Ainsi, les facteurs de la décomposition commutent :

$$R_{P_1}(\theta) = \underbrace{R_{P_1}\left(\frac{\theta+0}{2}\right)R_{P_2}\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}_{\text{Rotation isocline 1}} \underbrace{R_{P_1}\left(\frac{\theta-0}{2}\right)R_{P_2}\left(\frac{0-\theta}{2}\right)}_{\text{Rotation isocline 2}}.$$

La rotation  $R_{P_1}(\theta)$  est la composition de deux rotations isoclines.  $\square$

Si un algorithme peut déterminer ces rotations isoclines à partir de vecteurs et de leurs images, cette réécriture pourra permettre de déduire les rotations planes et plus précisément, leurs plans et leurs angles. En effet, dans ce cas les propriétés des rotations isoclines, notamment la construction particulière de leurs plans de rotation, pourront être utilisées.

Dans cette partie, nous avons montré que toute rotation  $nD$  peut se décomposer en rotations planes dans des plans complètement orthogonaux et d'angles de même valeur absolue. Ce résultat étend donc de la dimension 4 à la dimension  $n$ , les résultats de Mebius proposés dans [Meb94].

## Récapitulatif des décompositions des rotations $nD$ proposées.

Dans ce chapitre, nous avons présenté trois méthodes pour décomposer une rotation  $R$  de dimension  $n$ . Dans cette partie, nous rappelons brièvement ces méthodes :

- Les deux premières décompositions de la rotation  $R$  décomposent  $R$  en *rotations planes élémentaires (isoclines et générales)* :

$$R = R_{P_1}^I(\theta_1) \circ R_{P_2}^I(\theta_2) \circ \dots \circ R_{P_{j-1}}^I(\theta_{j-1}) \circ R_{P_j}(\theta_j, \dots, \theta_p)$$

où les  $R_{P_i}^I(\theta_i)$  désignent des rotations isoclines (angles égaux ou opposés) dans le sous-espace  $\mathcal{P}_i$  (sommets orthogonales de plans de rotation) et  $R_{P_j}(\theta_j, \dots, \theta_p)$  est une rotation générale (angles différents). À partir de cette décomposition nous pouvons décomposer la rotation  $R$  en rotations planes :

$$R = R_{P_1}(\theta_1) \circ R_{P_2}(\theta_2) \circ \dots \circ R_{P_m}(\theta_m)$$

avec les plans  $(P_i)_{i=1..m}$  complètement orthogonaux entre eux. La première méthode utilisant les algèbres géométriques est résumée par l'algorithme 3, elle est développée dans la section 2. La deuxième utilise la décomposition de Schur de la matrice de rotation associée à  $R$ , elle est expliquée dans la section 3.

- La dernière décomposition de la rotation  $R$  est une décomposition en *rotations isoclines (uniquement)* :

$$R = R_P^I(\Theta_1) \circ \dots \circ R_P^I(\Theta_k)$$

où  $R_P^I(\Theta_i)_{i=1\dots k}$  désigne une rotation isocline dont la valeur absolue des angles est donnée par  $|\Theta_i|$ , l'espace  $P$  correspond à l'espace formé par la somme directe des plans  $P_i$ . Cette méthode est développée dans la section 5.

## Conclusion du Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous avons montré que toute rotation  $nD$  peut se décomposer en rotations isoclines (de même angle) dans des sous-espaces (quasi-) isogonaux. La restriction de la rotation  $nD$  à ces sous-espaces admet une infinité de plans (et par conséquent d'angles) de rotation.

À partir de cette décomposition, nous avons proposé un algorithme pour décomposer les rotations  $nD$  en rotations planes. Cet algorithme est basé sur les algèbres géométriques. Elles sont utilisées notamment pour déterminer à partir d'un sous-espaces isogonal (sous-espace dans lequel la restriction de la rotation est une rotation isocline) les plans de rotation. Dans le cas où la restriction de la rotation à ce sous-espace est une rotation générale, connaître une base orthogonale de ce sous-espace permet de construire directement les plans de rotation : tout couple de vecteurs de cette base en est un. L'utilisation des algèbres géométriques a mis en évidence une condition<sup>28</sup> permettant de construire les plans de rotation dans n'importe quel ordre (conséquence de la décomposition orthogonale des bivecteurs (propriété 3)). De plus, les angles de rotation peuvent être calculés en utilisant le formalisme des algèbres géométriques. Cet algorithme doit être appliqué aux  $n$  vecteurs de la base  $\mathbf{x}_i$  et à leurs images  $\mathbf{y}_i$  (les vecteurs sont supposés appariés). À partir de la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) de la matrice de  $\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i$ , cet algorithme permet d'identifier les sous-espaces isogonaux. Pour chacun d'entre eux, il permet de retrouver ensuite des plans et des angles de rotation décomposant la rotation.

Nous avons aussi proposé une autre décomposition des rotations  $nD$  utilisant elle aussi  $n$  vecteurs  $\mathbf{x}_i$  d'une base et leurs images  $\mathbf{y}_i$  (supposés appariés). Cette décomposition est basée sur la décomposition de Schur des matrices. Celle-ci, appliquée à la matrice des  $\mathbf{y}_i$ , fournit deux matrices  $U$  et  $T$ . La première matrice permet de retrouver des plans de rotation et la seconde des angles de rotation permettant ainsi de décomposer une rotation  $nD$ .

Finalement, nous proposons une décomposition des rotations  $nD$ . Elle exprime les rotations  $nD$  uniquement en rotations isoclines à partir des rotations planes qui les composent. Une des perspectives de ce travail est de trouver un algorithme qui permettrait de trouver ces rotations isoclines à partir de  $n$  vecteurs et de leurs images. Ainsi, cette réécriture pourra permettre d'estimer les paramètres de rotation en utilisant les particularités des rotations isoclines (construction des plans et infinité de leur nombre).

Dans le chapitre suivant, nous proposons un protocole expérimental afin de tester nos méthodes. Ces décompositions sont expérimentées avec des valeurs numériques. Pour tester la robustesse de nos méthodes au bruit nous utilisons des données bruitées.

28. Le bivecteur qui représente le plan de rotation doit être normalisé.

---

## CHAPITRE 3

---

# RÉSULTATS

---

Ce chapitre a pour but de présenter les résultats que nous avons obtenus en estimant les paramètres des rotations  $nD$  par les deux premiers algorithmes proposés dans le chapitre 2.

La mise en œuvre de nos algorithmes nécessite la donnée de  $n$  couples de vecteurs : les  $n$  vecteurs de la base de l'espace  $nD$  et leurs images par la rotation que nous voulons estimer. Nous avons généré des vecteurs correspondant à l'image des vecteurs de la base par une rotation  $R_d$ . Nous les avons ensuite bruités (exprimés avec une certaine imprécision). Les tests ont ensuite été effectués avec ces vecteurs bruités afin de tester la robustesse de nos méthodes au bruit<sup>1</sup>. Afin d'évaluer la qualité des décompositions fournies par nos algorithmes, nous avons proposé un critère d'évaluation. Il consiste à recomposer la rotation à partir des données résultant de nos deux méthodes et à comparer les images de vecteurs aléatoires par cette rotation recomposée avec leurs images par la rotation  $R_d$ . Nous avons pu déduire des différents tests que, suivant la dimension de l'espace que nous considérons, il conviendra de privilégier l'un ou l'autre des deux algorithmes. Pour des dimensions comprises entre 2 et 4, il est préférable de privilégier le premier algorithme (celui utilisant l'algèbre géométrique). Pour des dimensions supérieures à 5, il est plus pertinent de mettre en œuvre le deuxième (celui basé sur la décomposition de Schur).

Avant de présenter dans la section 2 le protocole expérimental que nous avons établi, nous allons présenter, dans la première partie, les bibliothèques que nous avons utilisées. Nous donnons aussi une application de l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique présenté dans la section 2. Cette application a pour but d'évaluer et de visualiser l'erreur générée par l'algorithme de Fontijne que nous avons présenté dans la section 2.1 de l'état de l'art.

## 1 Bibliothèques utilisées

Dans sa thèse [Cha07], Sylvain Charneau a développé une bibliothèque sur les algèbres géométriques. Son implantation regroupe toutes les opérations utiles pour travailler avec les

---

1. c'est-à-dire si une petite perturbation dans les données de départ génèrait une perturbation très importante dans la détermination des paramètres de la rotation.

algèbres géométriques (création des multivecteurs, différents produits des algèbres, calcul d'inverse de  $k$ -vecteurs par exemple).

L'ensemble de sa bibliothèque est programmé dans le langage fonctionnel Ocaml [oca, CMP00], qui permet de générer une bibliothèque valable en toutes dimensions. La bibliothèque de Sylvain Charneau étant basée uniquement sur les algèbres géométriques, aucune fonction n'était prévue pour calculer la décomposition en valeurs singulières dont nous avons besoin. Nous avons donc utilisé en complément la bibliothèque LAPACK (Linear Algebra PACKage) [lap, ABB99]. Cette bibliothèque est dédiée à l'algèbre linéaire. Elle fournit des routines permettant notamment de résoudre des systèmes d'équations linéaires, de décomposer des matrices ou encore de résoudre les problèmes de valeurs propres et de valeurs singulières qui nous intéressent principalement. Cette librairie est très connue (elle est notamment utilisée par certaines fonctions du noyau de Matlab). De plus, elle est compatible avec le langage Ocaml. Développées en Fortran, certaines routines sont « interfacées » pour être utilisées en Ocaml (Lacaml [lac]). Nous pouvons donc directement les utiliser.

Même si théoriquement la bibliothèque de Sylvain Charneau est utilisable en toutes dimensions, lors des tests, à partir de la dimension 12, elle s'est révélée insuffisante. Les temps de calculs sont très longs et des problèmes de stockage sont apparus (problème de débordement de pile lors de la récursivité). Après recodage des fonctions en récursivité terminale, les deux problèmes subsistent. C'est pourquoi nous avons refait l'intégralité des tests<sup>2</sup> en utilisant une autre bibliothèque sur l'algèbre géométrique développée en C par Romuald Perrot. Elle offre certains avantages supplémentaires. Contrairement à celle de Sylvain Charneau, la bibliothèque de Romuald Perrot n'utilise pas la récursivité. De plus, la partie  $k$ -vectorielle d'un  $k$ -vecteur est stocké sur 32 bits. En effet, 32 bits permettent de stocker  $2^{32}$  valeurs et nous savons qu'un  $k$ -vecteur requiert au maximum le stockage de  $2^k$  éléments. La partie scalaire est stockée sur 32 bits supplémentaires. Par exemple, en dimension 3, le bivecteur  $3e_1 \wedge e_3$  est stocké sur deux fois 32 bits (32 bits pour stocker la partie scalaire c'est-à-dire le flottant 3 et 32 bits pour la partie vectorielle (101000...0)). Sylvain Charneau utilise lui une liste (pour la partie vectorielle) ; cela rend le stockage en mémoire inefficace. D'une manière générale, les temps de calculs sont très fortement améliorés. Par exemple, le produit extérieur entre un  $k$ -vecteur et un  $p$ -vecteur se fait en  $O(1)$  dans le cas de la bibliothèque de Romuald Perrot alors que dans le cas de celle de Sylvain Charneau il se fait en  $O(kp)$ . Comme cette bibliothèque offrait plus de possibilité que celle de Sylvain Charneau notamment en ce qui concerne les dimensions et les temps de calcul, tous les résultats que nous présentons ont été obtenus avec cette bibliothèque.

Synthétisons maintenant notre démarche. Dans un premier temps, nous avons codé nos algorithmes en Ocaml afin d'utiliser la bibliothèque de Sylvain Charneau codée elle aussi en Ocaml. Pour des raisons de mémoire et de temps de calculs, nos opérations dans l'algèbre géométrique ont été finalement calculées en utilisant la bibliothèque codée en C et interfacée en Ocaml de Romuald Perrot<sup>3</sup>. Néanmoins, le calcul de la SVD utilise LAPACK/Lacaml. Nous allons maintenant présenter le protocole expérimental qui a nécessité l'utilisation des bibliothèques que nous venons de présenter.

2. Pour des dimensions inférieures ou égales à 12, les tests ont donc été effectués à l'aide des deux bibliothèques. Nous avons obtenu les mêmes résultats, ce qui prouve que les résultats sont indépendants de l'implantation.

3. Cette bibliothèque est disponible sur simple demande.

## 2 Simulations numériques

Nous nous sommes uniquement intéressés à la décomposition de la rotation, la complexité des algorithmes n'a pas été étudiée en détails. Néanmoins, comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent, ce sont les décompositions matricielles (SVD et Schur) qui requièrent le plus d'opérations ( $11n^3$  opérations à virgule fixe pour la première et  $8n^3/3$  pour la deuxième). Les tests numériques ont porté sur 500 matrices pour chacune des dimensions de la 2D à la 15D et pour chacune des précisions de  $10^{-1}$  à  $10^{-4}$ . Nous en présentons maintenant le protocole expérimental.

### 2.1 Génération des matrices de tests

Pour tester nos algorithmes, nous devons disposer de  $n$  vecteurs de la base de l'espace  $nD$  et leurs images par une rotation dont nous cherchons les paramètres. Comme nous l'avons précisé, nous travaillons systématiquement avec des données bruitées. Cela nous permet de savoir si nos algorithmes sont sensibles au bruit. Pour obtenir nos  $2n$  vecteurs, nous procédons en deux étapes. Pour chacune des 500 rotations, nous générons de manière aléatoire des plans de rotations  $P_j$  et des angles de rotations  $\theta_j$ . À partir de ces données, nous calculons les images  $(\tilde{\mathbf{y}}_i)_{i=1,\dots,n}$  des vecteurs de la base en calculant le rotor associé à la rotation<sup>4</sup>. Ces vecteurs forment une matrice  $A$  telle que la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $A$  soit le vecteur  $\tilde{\mathbf{y}}_i$  associé à la rotation. En considérant l'ensemble des rotations, nous obtenons donc 500 matrices de rotation  $(A_k)_{k=1,\dots,500}$ . Ces matrices sont utilisées dans l'étape d'évaluation de nos algorithmes (cf. section 2.2).

Pour simuler le bruit, nous avons ensuite perturbé ces matrices. Nous avons modifié de manière aléatoire et selon une loi uniforme la  $p^{\text{ème}}$  décimale ( $1 \leq p \leq 4$ ) de toutes les coordonnées des vecteurs contenus dans les matrices  $A_k$ . Les matrices ainsi obtenues sont notées  $(B_k)_{k=1,\dots,500}$ . Les vecteurs colonnes correspondent donc aux vecteurs  $\mathbf{y}_i$  tels que nous les avons définis dans le chapitre précédent<sup>5</sup>. La norme des vecteurs  $\mathbf{y}_i$  est d'environ un<sup>6</sup>. Ces vecteurs sont utilisés comme données de départ de nos algorithmes 2 et 3.

Comme nous l'avons vu dans la section 1, l'algorithme 2 nécessite la donnée d'une marge d'erreur  $\beta$ . Dans la suite, nous fixons cette marge d'erreur à  $15^\circ (= \frac{\pi}{12}$  radian). Dans le paragraphe 2.3, nous montrons comment cette marge d'erreur a été choisie.

Maintenant que nous disposons de toutes les données nécessaires ( $2n$  vecteurs et marge d'erreur  $\beta$ ), nous expérimentons nos deux méthodes avec les mêmes matrices. Ces algorithmes nous permettent d'obtenir des plans et des angles de rotation estimés notés respectivement  $P'_i$  et  $\theta'_i$ . Nous devons maintenant évaluer nos méthodes, c'est-à-dire trouver un critère pertinent permettant d'indiquer si nos résultats obtenus sont proches de la solution exacte.

4. Rappelons que ce rotor est le produit géométrique de rotors de la forme  $R_j = \cos(\theta_j) - P_j \sin(\theta_j)$  (cf. section 1.2.3).

5. Les  $\mathbf{y}_i$  sont les images à une certaine précision des vecteurs de la base par la rotation que l'on veut décomposer.

6. Nous savons, d'après le chapitre 2, que  $\sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{y}}_i^2 = 1$ . Majorons maintenant la quantité  $\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^n (\tilde{\mathbf{y}}_i + \epsilon_i)^2$  où  $\epsilon_i$  représente la précision sur  $\tilde{\mathbf{y}}_i$ . Nous avons :  $\sum_{i=1}^n (\tilde{\mathbf{y}}_i + \epsilon_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{y}}_i^2 + \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 + \sum_{i=1}^n 2\epsilon_i \tilde{\mathbf{y}}_i \leq 1 + 0.01n + 0.2n = 1 + 0.21n$ . L'erreur est calculée en considérant la précision la moins élevée (ici 0.1).

## 2.2 Evaluation de l'erreur

Dans cette section, nous proposons deux critères d'évaluation afin d'évaluer nos méthodes de décomposition. Le premier utilise la norme de Frobenius des matrices qui est la norme la plus utilisée sur les matrices. Le second compare les images de vecteurs par la rotation et la rotation reconstruite. Nous montrons en particulier que ce premier critère n'est pas utilisable en pratique.

### Critère 1 : Norme de Frobenius

La norme de Frobenius est une norme matricielle très souvent utilisée. Elle pourrait notamment être utilisée pour évaluer nos algorithmes mais nous montrerons qu'en pratique elle n'est pas utilisable.

À partir des données fournies par nos algorithmes (ensembles de plans  $P'_j$  et d'angles associés  $\theta'_j$ ), nous pouvons reconstruire la rotation en calculant le rotor associé à la rotation. Connaissant maintenant le rotor qui représente la rotation nous pouvons en déduire la matrice  $E_k$  associée<sup>7</sup>. La méthode la plus naïve pour estimer l'erreur est de la calculer en utilisant une norme sur les matrices afin de comparer la matrice de rotation  $A_k$  avec la matrice estimée  $E_k$ . La norme la plus couramment utilisée est la norme de Frobenius. Pour une matrice de taille  $n \times m$ ,  $M = (m_{ij})_{i=1\dots n, j=1\dots m}$ , la norme de Frobenius est donnée par  $\|M\| = \sqrt{\sum_{i=1, j=1}^n m_{ij}^2}$ . Cependant, comme les plans de rotations ne sont pas déterminés de manière unique, deux matrices  $M$  et  $M'$  peuvent représenter la même rotation sans que la matrice  $M - M'$  ait une norme de Frobenius nulle car elles ne sont pas exprimées dans la même base. Par exemple, les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 0.345 & 0.000 & -0.121 & 0.853 & -0.372 & -0.000 \\ -0.001 & 0.146 & -0.937 & -0.000 & 0.303 & -0.094 \\ 0.147 & 0.004 & 0.283 & 0.362 & 0.875 & -0.001 \\ -0.895 & -0.140 & 0.001 & 0.362 & -0.000 & -0.217 \\ -0.000 & -0.826 & -0.165 & 0.001 & 0.054 & 0.536 \\ -0.239 & 0.526 & 0.001 & 0.097 & 0.000 & 0.810 \end{pmatrix}$$

et

$$M' = \begin{pmatrix} 0.982 & -0.075 & -0.078 & 0.117 & 0.102 & -0.033 \\ 0.068 & 0.963 & -0.010 & 0.179 & -0.184 & -0.055 \\ 0.081 & 0.034 & 0.978 & -0.021 & 0.078 & 0.172 \\ -0.095 & -0.203 & 0.027 & 0.933 & -0.235 & 0.150 \\ -0.119 & 0.147 & -0.081 & 0.245 & 0.943 & 0.092 \\ 0.049 & 0.063 & -0.174 & -0.150 & -0.074 & 0.967 \end{pmatrix}$$

représentent la même rotation mais dans des bases différentes. La norme de Frobenius de leur différence vaut  $\|M - M'\| = 2.799$ . Le calcul de la norme de Frobenius n'est donc pas adapté pour servir de critère d'évaluation de nos méthodes.

### Critère 2 : Comparaison des images par la rotation et par la rotation reconstruite

D'une part, pour une rotation donnée, nous pouvons calculer le rotor  $\mathbf{R}$  associé de la rotation en utilisant les plans  $P'_j$  et les angles  $\theta'_j$  fournis par nos algorithmes.

7. Pour cela, il suffit de calculer les images  $\mathbf{y}'_i$  de chaque vecteur de la base. La  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $E_k$  est donnée par le vecteur  $\mathbf{y}'_i$ .

D'autre part, nous savons que deux éléments  $\chi_1$  et  $\chi_2$  (rotor, matrice par exemple...) représentent la même rotation si l'image de n'importe quel vecteur calculée de manière indépendante à partir de  $\chi_1$  et de  $\chi_2$  est la même.

Ainsi, dans notre cas, nous allons comparer les images de vecteurs par la rotation (représentée par la matrice initiale  $A_k$ ) et par la rotation reconstruite à partir des données bruitées représentée par le rotor  $\mathbf{R}$ .

Nous limitons arbitrairement ce nombre de vecteurs à 500. Nous les générons de manière aléatoire et nous les choisissons normés<sup>8</sup>. De plus, sans perte de généralité, nous considérons que ces vecteurs aléatoires normés ont leurs  $n$  coordonnées positives<sup>9</sup>. Afin de garantir une répartition uniforme des vecteurs sur l'ensemble des vecteurs normés à coordonnées positives, nous les générons à l'aide de la méthode de rejet [KW08]. Cette méthode est souvent utilisée dans les méthodes de Monte-Carlo<sup>10</sup>. L'idée de la méthode de rejet est la suivante : on génère les  $n$  coordonnées comprises entre 0 et 1 d'un vecteur de manière aléatoire. Si la somme des carrés de ces coordonnées est inférieure ou égale à 1 le vecteur est normé sinon il est rejeté (d'où le nom de la méthode).

Pour chaque vecteur  $\mathbf{v}$  parmi les  $(\mathbf{v}_i)_{i=1\dots 500}$ , nous comparons le vecteur  $\mathbf{v}_{prat} = \mathbf{R}\mathbf{v}\mathbf{R}^{-1}$  avec le vecteur  $\mathbf{v}_{theo} = A_k\mathbf{v}$ . Pour une rotation donnée  $R$  parmi les 500 et un vecteur donné  $\mathbf{v}$  parmi les 500, l'erreur est quantifiée par la norme de  $(\mathbf{v}_{theo} - \mathbf{v}_{prat})$  et elle est notée  $E_{R,\mathbf{v}}$ . Pour chacune des dimensions et chacune des précisions, l'erreur finale est donc la moyenne des  $E_{R,\mathbf{v}}$  lorsque  $R$  décrit l'ensemble des 500 rotations et lorsque  $\mathbf{v}$  parcourt l'ensemble des 500 vecteurs aléatoires normés. Une valeur moyenne faible révèle une bonne estimation des plans et des angles de rotation. Les mêmes vecteurs aléatoires sont utilisés pour les deux méthodes.

### 2.3 Influence du paramètre $\beta$ sur notre méthode utilisant l'algèbre géométrique.

Comme nous l'avons montré dans la section 2 du chapitre précédent, notre algorithme 3 est basé sur la décomposition en sous-espaces isogonaux de l'espace  $E$  dans lequel nous travaillons. Ces sous-espaces isogonaux sont calculées en utilisant les listes isogonales déduites des angles obtenus par la décomposition en valeurs singulières. Ces listes quasi-isogonales sont calculés en fonction d'un seuil d'erreur angulaire  $\beta$ . Une étude préliminaire des variations de ce paramètre nous a paru pertinente afin de minimiser l'erreur de notre algorithme 3. Cette étude ne concerne que l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique. Si la valeur de ce paramètre est trop faible ou nulle, certaines rotations isoclines de la décomposition ne sont pas détectées. Dans ce cas, l'erreur est relativement élevée comme nous l'avons montré dans [RFC10] où les cas de rotations isoclines n'étaient pas gérés. *A contrario*, si ce paramètre est trop élevé, cela revient à considérer comme des rotations isoclines des rotations qui ne le sont pas. Pour ces raisons, une étude de l'influence du paramètre  $\beta$  sur la décomposition des rotations semble judicieuse.

Comme le paramètre  $\beta$  porte sur le nombre d'angles et non pas directement sur la dimension, une étude restreinte aux dimensions de même parité (ici nous choisissons arbitrairement les dimensions paires) semble suffisante<sup>11</sup>.

8. Cette normalisation permet simplement de faciliter les calculs mais ne change rien à nos résultats.

9. Les vecteurs à coordonnées mixtes (positives et négatives) peuvent être obtenus par symétrie.

10. Ces méthodes permettent de calculer une valeur numérique en utilisant des techniques probabilistes.

11. En effet, en dimension  $2p$  et  $2p + 1$ , les listes isogonales qui servent à calculer les composantes quasi-isogonales (en utilisant  $\beta$ ) contiennent le même nombre d'éléments :  $p$ . Nous avons donc  $p$  angles à répartir.

Pour chacune des dimensions 4, 6 et 8 et chacune des précisions, nous avons testé l'algorithme 3 avec des valeurs de  $\beta$  différentes. Dans chaque cas, nous calculons l'erreur associée par la méthode expliquée au paragraphe 2.2. Les résultats de ces tests sont présentés sur les différents graphiques de la figure 3.1. Cette figure représente l'évolution de l'erreur en fonction de  $\beta$  (exprimés en degrés) pour la dimension 4 et des précisions de  $10^{-1}$  à  $10^{-4}$  ainsi que pour les dimensions 6 et 8 et des précisions de  $10^{-2}$  et  $10^{-3}$ . Nous avons représenté à la fois les valeurs que nous obtenons en pratique (représentés par des  $\circ$ ) mais aussi une modélisation de ces données (polynôme de degré 2) comme nous le montre la figure 3.1. Pour la dimension 4 et la précision  $10^{-1}$ , le choix du paramètre n'influe pas sur les résultats. Comme les données sont très bruitées, les angles calculés à partir de la SVD sont très différents de ceux que nous aurions obtenus avec des données moins bruitées. Par conséquent, les listes quasi-isogonales sont mal calculées quelles que soient les valeurs de  $\beta$ . Cela pourrait éventuellement expliquer le phénomène mais une étude plus approfondie mériterait d'être menée.

Pour les autres expérimentations, il existe des « plateaux » (intervalles) où l'erreur est minimisée. Par exemple, en dimension 4 et à la précision de  $10^{-2}$ , l'erreur est minimisée pour des valeurs de  $\beta$  comprises entre 15 et 52. Ainsi, pour chaque graphique, la valeur optimale (permettant de minimiser l'erreur) peut être choisie soit comme la valeur de  $\beta$  telle que le polynôme de degré 2 soit minimale, soit comme une valeur de  $\beta$  appartenant à un plateau correspondant à l'erreur minimale. Comme le paramètre  $\beta$  correspond à la valeur à partir de laquelle deux angles peuvent être considérés égaux, nous retenons que la valeur minimale de l'intervalle (dans l'exemple précédent, nous retenons la valeur  $\beta = 15^\circ$ ). Le tableau de la figure 3.2, nous donne ces différentes valeurs (minimisation du polynôme de degré 2 et borne inférieure de l'intervalle) en fonction des dimensions et des précisions considérées. Afin d'« uniformiser » les résultats de nos expérimentations, nous choisissons une marge d'erreur  $\beta$  unique quelles que soient les dimensions et les précisions. Cette marge est fixée à  $15^\circ (= \frac{\pi}{12} \text{radian})$  car elle correspond d'après le tableau de la figure 3.2 à la moyenne des valeurs. C'est pourquoi, dans l'ensemble de nos tests de l'algorithme 3, nous avons choisi  $\beta = 15^\circ$ .

### 3 Exemple numérique

Des exemples numériques de nos deux algorithmes ont été donnés dans la section 4 du chapitre précédent afin d'en illustrer concrètement les principes. Dans cette section, nous donnons un autre exemple numérique. Il n'est pas destiné à illustrer les principes de nos algorithmes car de tels exemples ont été fournis à la section 4. Mais, il montre comment nos algorithmes ont été testés et évalués.

Soit l'espace  $E = \mathbb{R}^6$  muni de la base canonique  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6)$ . Considérons la composition des rotations d'angles  $(33^\circ, 34^\circ, 60^\circ)$  dans les plans respectifs  $(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4)$  où  $\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j$  représente le plan généré par les vecteurs  $\mathbf{e}_i$  et  $\mathbf{e}_j$ . Les données sont considérées avec une précision de 0.001. Les images des vecteurs de la base par cette rotation sont les colonnes de la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0.839 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.545 & 0.000 \\ 0.000 & 0.500 & 0.000 & -0.866 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.829 & 0.000 & 0.000 & -0.559 \\ 0.000 & 0.866 & 0.000 & 0.500 & 0.000 & 0.000 \\ 0.545 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.839 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.559 & 0.000 & 0.000 & 0.829 \end{pmatrix}$$

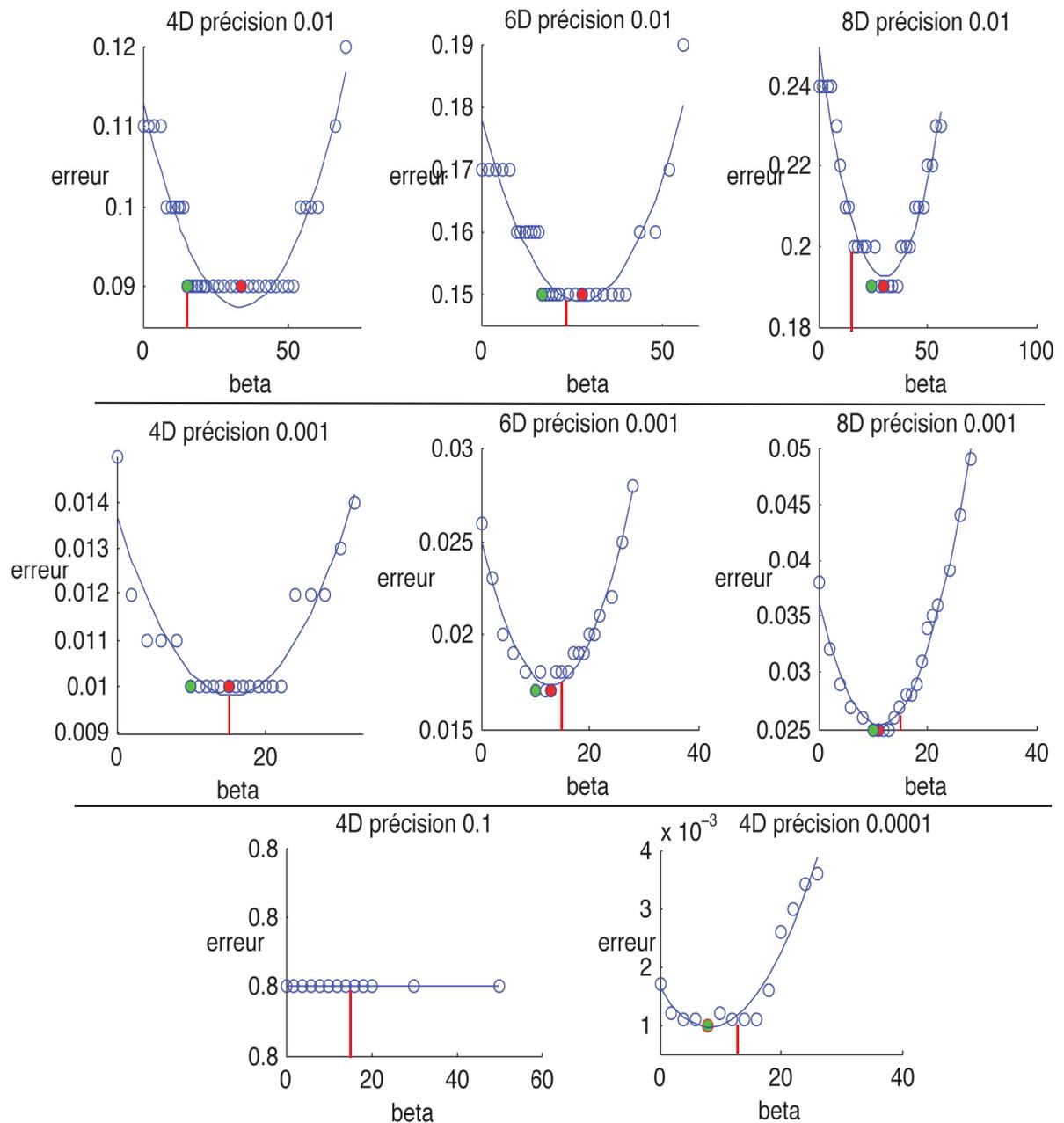


FIGURE 3.1 – Influence du paramètre  $\beta$  sur les résultats de notre algorithme pour différentes dimensions et précisions. Les points  $\circ$  représentent la moyenne de l'erreur de notre algorithme 3 en fonction du paramètre  $\beta$ . Les courbes modélisent les données par un polynôme de degré 2. Plus les valeurs du paramètre  $\beta$  s'approchent de 0 ou deviennent grandes plus l'erreur est élevée. Les points  $\bullet$  correspondent à la plus petite valeur de  $\beta$  minimisant l'erreur et les points  $\bullet$  ceux minimisant le polynôme. La valeur de  $\beta = 15^\circ$  est aussi indiquée par les traits verticaux rouges. Pour la dimension 4 à une précision de  $10^{-1}$ , le paramètre  $\beta$  ne semble pas influencer sur les résultats.

Pour simuler du bruit, les vecteurs sont bruités selon une loi uniforme. Ces vecteurs bruités  $(y_i)_{i=1\dots 6}$  que nous utilisons dans nos algorithmes sont les colonnes de la matrice  $B$  donnée par :

Dimension	Précision	Valeur minimum de $\beta$ minimisant l'erreur	Valeur de $\beta$ minimisant le polynôme	Valeur de l'erreur associée
4	0.01	15	34	0.09
4	0.001	10	15	0.010
4	0.0001	8	8	0.001
6	0.01	17	28	0.15
6	0.001	10	13	0.017
8	0.01	24	30	0.19
8	0.001	10	11	0.025

FIGURE 3.2 – Tableau comparatif des valeurs de  $\beta$  pouvant être choisies. Soit la valeur de  $\beta$  est la plus petite qui minimise l'erreur de l'algorithme 3 (3<sup>ème</sup> colonne), soit la valeur de  $\beta$  qui minimise le polynôme qui modélise les données expérimentales (4<sup>ème</sup> colonne). La valeur de l'erreur associée figure aussi dans le tableau (5<sup>ème</sup> colonne). Les comparaisons sont effectuées en fonction de la dimension et de la précision considérée.

$$B = \begin{pmatrix} 0.836 & 0.005 & 0.003 & 0.006 & -0.542 & 0.009 \\ 0.005 & 0.501 & 0.001 & -0.859 & 0.006 & 0.005 \\ -0.001 & 0.002 & 0.829 & -0.003 & 0.000 & -0.559 \\ -0.004 & 0.871 & 0.009 & 0.505 & -0.002 & -0.001 \\ 0.552 & -0.003 & 0.005 & -0.004 & 0.841 & 0.004 \\ -0.007 & -0.007 & 0.557 & -0.004 & 0.001 & 0.835 \end{pmatrix}$$

### 3.1 Algorithme utilisant l'algèbre géométrique

Pour cet exemple, notre algorithme utilisant l'algèbre géométrique nous fournit les plans suivants :

$$\mathbf{P}_1 = -0.009\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.001\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.004\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 1.000\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_5 - 0.014\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.017\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 - 0.005\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5,$$

$$\mathbf{P}_2 = 0.011\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.002\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 - 0.002\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.013\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + 1.000\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_6 - 0.003\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.001\mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 \text{ et}$$

$$\mathbf{P}_3 = 0.005\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 0.017\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.003\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 1.000\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.004\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 - 0.002\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.002\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.009\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.010\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6.$$

Par projection des couples de vecteurs sur ces plans, nous obtenons par l'algorithme 3 les angles de rotation donnés par  $\theta_1 = 33.434^\circ$ ,  $\theta_2 = 33.840^\circ$ ,  $\theta_3 = 119.911^\circ$ . Comme le plan de rotation  $P_3$  est presque  $-\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$  plutôt que  $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4$ , l'angle dans ce plan est  $119.911^\circ (= -60.089^\circ)$  plutôt que  $60.089^\circ$ .

Comme les données sont bruitées, les plans retrouvés par notre algorithme ne sont pas exactement ceux qui composaient la rotation. À partir de ces plans et de ces angles, nous reconstruisons la rotation en calculant le rotor  $\mathbf{R}$  associé. Il est donné par :

$$\mathbf{R} = \left( \cos\left(\frac{\theta_1\pi}{360}\right) - \mathbf{P}_1 \sin\left(\frac{\theta_1\pi}{360}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\theta_2\pi}{360}\right) - \mathbf{P}_2 \sin\left(\frac{\theta_2\pi}{360}\right) \right) \left( \cos\left(\frac{\theta_3\pi}{360}\right) - \mathbf{P}_3 \sin\left(\frac{\theta_3\pi}{360}\right) \right).$$

Nous évaluons maintenant la transformation en comparant les images de vecteurs aléatoires normés en utilisant la matrice  $A$  et le rotor  $\mathbf{R}$ . Cela nécessite au préalable la génération par la méthode de rejet de 500 vecteurs aléatoires normés. Ici, nous en choisissons un seul pour montrer le principe de l'évaluation mais dans la pratique nous les avons tous considérés. Soit  $\mathbf{v}$  un de ces 500 vecteurs. Il est donné par :

$$\mathbf{v} = (0.108, 0.463, 0.097, 0.445, 0.206, 0.724).$$

Les vecteurs  $\mathbf{v}_{theo}$  et  $\mathbf{v}_{prat}$  sont les suivants :

$$\mathbf{v}_{theo} = A\mathbf{v} = (-0.022, -0.154, -0.325, 0.623, 0.232, 0.654)$$

et

$$\mathbf{v}_{prat} = \mathbf{R}\mathbf{v}\mathbf{R}^{-1} = (-0.006, -0.162, -0.319, 0.631, 0.228, 0.649).$$

L'erreur associée à ce vecteur est de 0.021. Le test est fait sur les 500 vecteurs. Pour cet exemple, la moyenne de l'erreur sur l'ensemble des vecteurs est de 0.017.

### 3.2 Algorithme basé sur la décomposition de Schur

Nous appliquons maintenant notre algorithme basé sur la décomposition de Schur au même exemple numérique. Les deux matrices  $U$  et  $T$  associées à la décomposition de Schur de la matrice  $B$  sont respectivement données par :

$$U = \begin{pmatrix} -0.010 & 0.002 & 0.258 & 0.933 & 0.250 & -0.001 \\ 0.986 & 0.165 & 0.013 & 0.006 & -0.000 & 0.005 \\ 0.001 & 0.002 & -0.062 & 0.241 & -0.837 & -0.488 \\ 0.165 & -0.986 & -0.006 & 0.005 & 0.001 & -0.003 \\ 0.008 & 0.007 & -0.936 & 0.258 & 0.003 & 0.241 \\ 0.007 & 0.005 & -0.232 & -0.067 & 0.487 & -0.839 \end{pmatrix}$$

et

$$T = \begin{pmatrix} 0.503 & 0.859 & -0.007 & 0.007 & -0.002 & -0.002 \\ -0.871 & 0.503 & -0.012 & 0.002 & 0.008 & -0.002 \\ 0 & 0 & 0.839 & -0.552 & -0.002 & 0.002 \\ 0 & 0 & 0.540 & 0.839 & 0.002 & 0.001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.832 & -0.562 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.556 & 0.832 \end{pmatrix}$$

Comme les données sont bruitées, la matrice  $T$  peut être considérée comme la composée de trois matrices de rotations planaires (cf. section 3 du chapitre précédent) correspondant à des angles de  $-59.801^\circ$ ,  $32.965^\circ$  et  $33.695^\circ$ . En utilisant les colonnes de la matrice  $U$ , nous obtenons les trois plans suivants :

$$\mathbf{P}_1 = -0.003\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 0.009\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.002\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 1.000\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.006\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.004\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 - 0.002\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.009\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.007\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6,$$

$$\mathbf{P}_2 = -0.010\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + 0.120\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.006\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.940\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.199\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.003\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 + 0.009\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.001\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.001\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.210\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.060\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.003\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.001\mathbf{e}_4 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.123\mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6 \text{ et}$$

$$\mathbf{P}_3 = 0.001\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 - 0.123\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.001\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_4 + 0.060\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_5 - 0.210\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.004\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 - 0.002\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_6 + 0.003\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_4 - 0.200\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_5 + 0.940\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_6 - 0.120\mathbf{e}_5 \wedge \mathbf{e}_6$$

De même que dans la section 3.1, comme les données sont bruitées, les plans retrouvés par notre algorithme ne sont pas exactement ceux qui composaient la rotation.

À partir de ces plans et de ces angles, nous reconstruisons la rotation en calculant le rotor  $\mathbf{R}'$  associé. Nous évaluons ensuite la transformation. Nous utilisons les 500 vecteurs aléatoires générés par la méthode de rejet (les mêmes utilisés pour l'évaluation de l'autre algorithme). Comme dans la partie 3.1, nous ne donnons ici qu'un exemple, celui avec le même vecteur  $\mathbf{v} = (0.108, 0.463, 0.097, 0.445, 0.206, 0.724)$ . Les vecteurs  $\mathbf{v}_{theo}$  et  $\mathbf{v}_{prat}$  sont les suivants :

$$\mathbf{v}_{theo} = A\mathbf{v} = (-0.022, -0.155, -0.325, 0.623, 0.232, 0.654)$$

et

$$\mathbf{v}_{prat} = \mathbf{R}'\mathbf{v}(\mathbf{R}')^{-1} = (-0.011, -0.151, -0.322, 0.630, 0.230, 0.650).$$

L'erreur associée à ce vecteur est de 0.014. Le test est fait sur les 500 vecteurs. La moyenne de l'erreur sur cet exemple pour l'ensemble des vecteurs est 0.012.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des angles fournis par nos deux algorithmes et leurs erreurs respectives.

Méthode	Valeur des angles	Erreur sur le vecteur choisi	Erreur sur l'ensemble des vecteurs
valeur de référence	(33.000, 34.000, 60.000)	—	—
utilisant l'algèbre	(33.434, 33.840, -60.089)	0.021	0.017
utilisant la décomp. de Schur	(32.965, 33.695, -59.801)	0.014	0.012

## 4 Analyse des résultats

Pour chaque dimension et pour chaque précision, nous avons décomposé 500 rotations. Pour chacune de ces rotations, nous avons évalué l'erreur en utilisant 500 vecteurs aléatoires normés puis nous avons ensuite calculé la moyenne. Nous avons regroupé ces moyennes dans les tableaux des figures 3.3(a) et 3.3(b) correspondant respectivement à l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique et celui utilisant la décomposition de Schur. Chaque case du tableau correspond, pour une dimension donnée et une précision donnée, à la moyenne des 250000 valeurs que nous avons obtenues.

La figure 3.4 récapitule les données des tableaux des figures 3.3(a) et 3.3(b) sous la forme d'un graphe. Chaque graphique concerne une précision donnée (de  $10^{-1}$  à  $10^{-4}$ ). Pour chacune, nous avons tracé la courbe modélisant la moyenne de l'erreur en fonction de la dimension dans le cas de l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique et dans celui basé sur la décomposition de Schur. À la vue des différents graphiques, plusieurs constats peuvent être faits. Il apparaît clairement que plus la dimension est élevée plus l'erreur augmente. Cette erreur augmente de manière linéaire par rapport à la dimension pour les précisions de  $10^{-2}$  à  $10^{-4}$ .

**Variation de l'erreur en fonction de la dimension** Par lecture graphique, quelle que soit la précision, l'erreur augmente en fonction de la dimension. Cela s'explique par le fait que plus la dimension est élevée, plus il y a de plans et d'angles à calculer. Pour évaluer la méthode nous reconstruisons le rotor associé. Ce rotor est le produit extérieur des rotors associés à chaque rotation plane. Ainsi chacun d'entre eux est entaché d'une petite erreur et le rotor  $\mathbf{R}$  cumule ces erreurs. Ce phénomène de cumul d'erreur n'est pas le même que celui que l'on avait mis en évidence dans le paragraphe 2.1 du chapitre 1 concernant les méthodes de Fontijne [FD10] et Aragón [AGARAVS09]. Dans le cas de leur méthode, le phénomène était principalement dû au processus incrémental de leur méthode. Contrairement à leur méthode où les erreurs s'accumulaient à chaque étape, notre cumul d'erreur est une somme d'erreurs indépendantes. D'autre part, notre calcul d'erreur est basé sur la norme du vecteur  $\mathbf{v}_{theo} - \mathbf{v}_{prat}$ . Comme la norme est la somme de ses coordonnées élevées au carré, plus la dimension augmente plus ce

	2D	3D	4D	5D	6D	7D	8D
$10^{-4}$	0.0003	0.0005	0.0011	0.0023	0.0044	0.0052	0.0112
$10^{-3}$	0.003	0.006	0.010	0.012	0.018	0.021	0.027
$10^{-2}$	0.03	0.05	0.09	0.12	0.16	0.17	0.20
$10^{-1}$	0.3	0.5	0.8	0.9	1.1	1.1	1.2
	9D	10D	11D	12D	13D	14D	15D
$10^{-4}$	0.0113	0.0147	0.0161	0.0192	0.0179	0.0246	0.0252
$10^{-3}$	0.027	0.034	0.037	0.039	0.042	0.047	0.045
$10^{-2}$	0.22	0.25	0.26	0.29	0.29	0.31	0.32
$10^{-1}$	1.2	1.2	1.3	1.3	1.3	1.3	1.3

(a) Moyenne de l'erreur de notre algorithme utilisant l'**algèbre géométrique** de la section 2 de la dimension 2 à la dimension 15 pour des précisions de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ .

	2D	3D	4D	5D	6D	7D	8D
$10^{-4}$	0.0010	0.0013	0.0014	0.0018	0.0021	0.0025	0.0027
$10^{-3}$	0.008	0.009	0.012	0.013	0.013	0.016	0.018
$10^{-2}$	0.05	0.07	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13
$10^{-1}$	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1
	9D	10D	11D	12D	13D	14D	15D
$10^{-4}$	0.0031	0.0032	0.034	0.0037	0.0034	0.0038	0.0040
$10^{-3}$	0.018	0.020	0.020	0.022	0.022	0.023	0.023
$10^{-2}$	0.13	0.14	0.14	0.15	0.16	0.17	0.17
$10^{-1}$	1.1	1.2	1.2	1.2	1.3	1.4	1.4

(b) Moyenne de l'erreur de l'algorithme déduit de la **décomposition de Schur** de la section 3 de la dimension 2 à la dimension 15 pour des précisions de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ .

FIGURE 3.3 – Tableaux comparatifs des moyennes des erreurs de notre algorithme de la section 2 et de celui de la section 3 de la dimension 2 à la dimension 15 pour des précisions de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ . Les cases grisées correspondent pour une dimension donnée et une précision donnée à l'erreur la plus faible entre nos deux méthodes.

vecteur possède de coordonnées et plus la norme devient élevée. Pour des précisions de  $10^{-2}$  à  $10^{-4}$ , nous remarquons que graphiquement cette erreur est linéaire. Pour la précision  $10^{-1}$ , il semblerait qu'elle soit modélisable par un polynôme de degré 2.

**Méthode plus précise** Nous avons proposé dans le chapitre précédent deux méthodes pour décomposer les rotations  $nD$ . Ces deux méthodes ont été implantées. Une question qu'il est légitime de se poser est de savoir si l'une ou l'autre des deux méthodes est plus précise. D'après les graphiques, le choix de privilégier l'une ou l'autre des méthodes semble dépendre de la dimension. Dans des dimensions petites (dimensions 2 à 4), notre algorithme utilisant l'algèbre géométrique admet des erreurs plus faibles que celui basé sur la décomposition de Schur. Cependant cette tendance s'inverse dans des dimensions supérieures à 5. Le fait que l'algorithme basé sur la décomposition de Schur est plus précis en dimension élevée est corrélé au nombre d'opérations moins importante qu'il requiert comparé à l'autre algorithme (et surtout la SVD qu'il utilise).

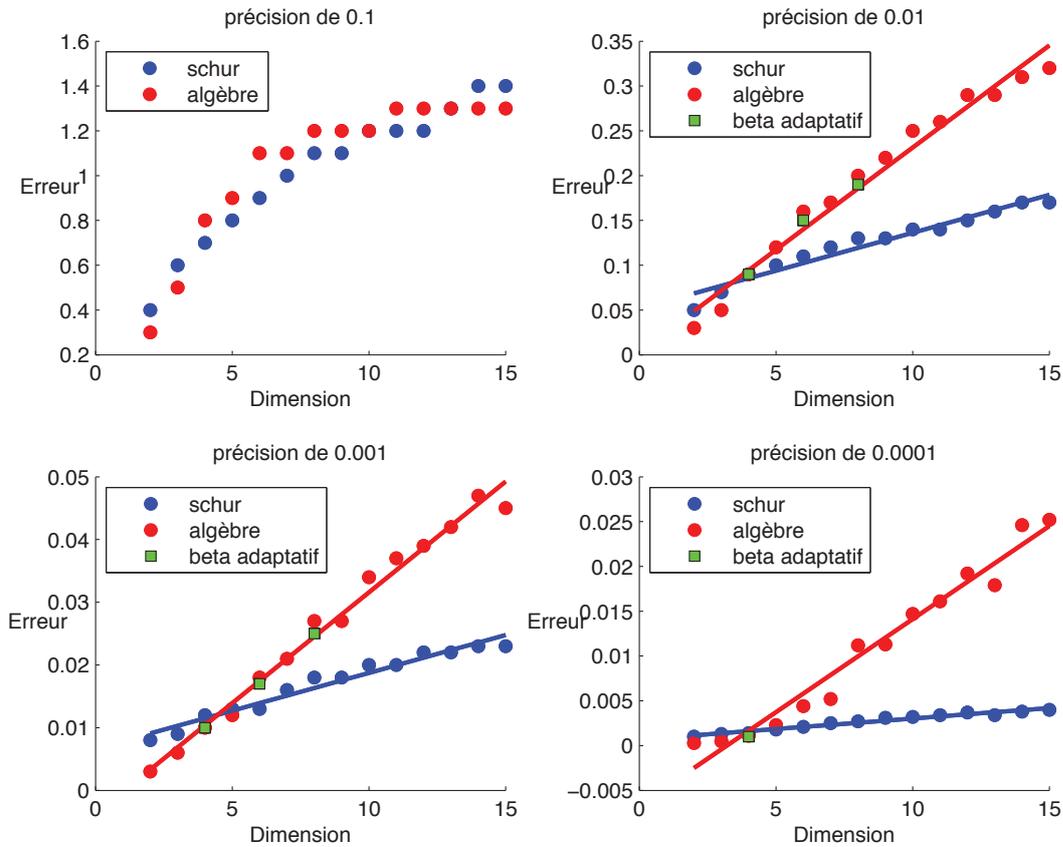


FIGURE 3.4 – Comparaison de l’erreur entre les algorithmes des sections 2 et 3 pour des précisions de  $10^{-1}$  à  $10^{-4}$  et des dimensions de 2 à 15. Les points représentent les mesures que nous avons obtenues. Elles ont ensuite été modélisées par des droites. Les valeurs de l’erreur que nous avons obtenues avec une valeur  $\beta_{opt}$  ont aussi été reportées sur les graphes pour les dimensions 4, 6 et 8 et les précisions 0.01 et 0.001.

**Valeur de  $\beta$  « adaptative »** Les mêmes simulations numériques utilisant une valeur de  $\beta$  « adaptative » (c’est-à-dire adaptée à la dimension et à la précision) pourront être envisagées. Il suffirait d’étendre l’étude de l’influence du paramètre  $\beta$  à toutes les dimensions et à toutes les précisions, et dans chaque cas, il conviendrait de choisir une valeur  $\beta_{opt}$  minimisant l’erreur. En utilisant le graphique 3.1 et le tableau de la figure 3.2, nous avons choisi une valeur  $\beta_{opt}$  minimisant l’erreur dans chacun des cas. Les erreurs associées (données dans le tableau de la figure 3.2) sont représentées sur les graphiques de la figure 3.4. Elles correspondent dans ces cas à des points de la droite modélisant l’erreur en fonction de la dimension. Les « fluctuations » des points autour des droites modèles (cf. figure 3.4) pourraient être expliquées par le fait que le paramètre  $\beta$  serait mal choisi.

## 5 Perspectives : adaptation de nos algorithmes à un cadre expérimental classique

Nos deux algorithmes ne peuvent être utilisés qu'avec des données d'entrée correspondant aux vecteurs d'une base  $(\mathbf{x}_i)_{i=1\dots n}$  et à leurs images  $(\mathbf{y}_i)_{i=1\dots n}$ . En pratique, nous disposons plus souvent de deux ensembles quelconques de vecteurs en correspondance que des vecteurs d'une base et de leurs images respectives. Le but de cette section est de proposer des pistes pour adapter nos algorithmes à des données expérimentales (nuages de vecteurs).

Supposons que nous disposions de deux ensembles de vecteurs  $X$  et  $Y$  :

$$X = \{(\mathbf{x}'_i)_{i=1\dots p} \in \mathbb{R}^n\} \text{ et } Y = \{(\mathbf{y}'_i)_{i=1\dots p} \in \mathbb{R}^n\}$$

où pour chaque  $i$ ,  $\mathbf{y}'_i$  est l'image de  $\mathbf{x}'_i$  par la rotation que nous voulons déterminer. Dans la section 2 du précédent chapitre, nous appliquions nos algorithmes à une matrice carrée de dimension  $n \times n$  dont les colonnes sont les vecteurs  $\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i$  (pour l'algorithme 3) et  $\mathbf{y}_i$  (en ce qui concerne l'algorithme 4). Dans le cas d'un ensemble de vecteurs, les matrices des  $\mathbf{y}'_i - \mathbf{x}'_i$  et  $\mathbf{y}'_i$  sont de dimension  $n \times p$ . Elles ne sont plus carrées. Or la décomposition de Schur d'une matrice ne peut se faire qu'à partir d'une matrice carrée. L'algorithme 4 ne peut donc pas être appliqué à un ensemble quelconque de vecteurs. Même si une adaptation de l'algorithme basé sur la décomposition de Schur n'a pas encore été étudiée en détails, une adaptation directe ne peut donc pas être envisagée. Une piste à explorer serait d'effectuer un pré-traitement adapté sur cette matrice afin de la rendre carrée. Extraire naïvement les  $n$  premières colonnes ne semble pas suffisant comme nous le montre l'exemple suivant.

Considérons la matrice de rotation donnée à une précision de  $10^{-3}$  par :

$$M = \begin{pmatrix} -0.114 & -0.811 & -0.158 & 0.551 \\ 0.650 & -0.091 & 0.725 & 0.208 \\ -0.747 & 0.105 & 0.631 & 0.181 \\ 0.080 & 0.568 & -0.226 & 0.787 \end{pmatrix}.$$

Un ensemble de vecteurs<sup>12</sup> associé à cette rotation est donné par les matrices  $M_X$  et  $M_Y$  suivantes :

$$M_X = \begin{pmatrix} 0.038 & 0.217 & 0.274 & 0.412 & 0.047 & 0.097 & 0.707 & 0.345 & 0.548 & 0.859 \\ 0.593 & 0.077 & 0.472 & 0.598 & 0.323 & 0.480 & 0.265 & 0.655 & 0.786 & 0.061 \\ 0.1726 & 0.687 & 0.725 & 0.052 & 0.640 & 0.471 & 0.109 & 0.571 & 0.248 & 0.508 \\ 0.7854 & 0.689 & 0.421 & 0.686 & 0.696 & 0.734 & 0.647 & 0.354 & 0.145 & 0.009 \end{pmatrix}$$

$$M_Y = \begin{pmatrix} -0.080 & 0.184 & -0.296 & -0.162 & 0.015 & -0.071 & 0.044 & -0.466 & -0.659 & -0.223 \\ 0.259 & 0.776 & 0.748 & 0.394 & 0.610 & 0.514 & 0.649 & 0.652 & 0.495 & 0.923 \\ 0.285 & 0.404 & 0.379 & -0.088 & 0.528 & 0.408 & -0.314 & 0.235 & -0.144 & -0.313 \\ 0.919 & 0.448 & 0.457 & 0.901 & 0.591 & 0.751 & 0.691 & 0.550 & 0.548 & -0.005 \end{pmatrix}$$

La  $i^{\text{ème}}$  colonne des matrices  $M_X$  et  $M_Y$  correspondent respectivement à un vecteur et son image par la rotation.

12. Pour générer un tel ensemble de vecteurs, nous avons considéré les images par la rotation de matrice  $M$  de 10 vecteurs aléatoires normés. Ces vecteurs ont été générés par la méthode de rejet (cf. section 2.2 pour plus de détails sur cette méthode).

En appliquant l'algorithme basé sur la décomposition de Schur aux quatre premières colonnes de la matrice  $M_Y$ , nous obtenons les matrices  $U$  et  $T$  suivantes :

$$U = \begin{pmatrix} 0.004 & 0.774 & -0.532 & 0.343 \\ -0.661 & -0.219 & -0.589 & -0.410 \\ 0.695 & 0.029 & -0.356 & -0.624 \\ 0.283 & -0.593 & -0.494 & 0.569 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -0.020 & 0.282 & -0.021 & 0.168 \\ -0.483 & -0.020 & 1.117 & -0.127 \\ 0 & 0 & 1.400 & 0.233 \\ 0 & 0 & 0 & 0.616 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $T$  que nous venons d'obtenir ne peut pas être considérée comme la composée de deux matrices de rotation planes car elle n'est pas diagonale par blocs. Cela met en évidence qu'il ne suffit pas de considérer n'importe quel ensemble de  $n$  vecteurs dans le nuage de vecteurs pour appliquer l'algorithme 4. Ainsi la matrice doit être rendue carrée par un processus adapté restant à définir. Ces travaux vont être menés afin d'adapter l'algorithme 4 à un cadre expérimental plus classique.

Contrairement à cet algorithme, la méthode utilisant l'algèbre géométrique peut être appliquée à une matrice qui n'est pas carrée. En effet, la décomposition en valeurs singulières s'applique aussi bien à des matrices carrées qu'à des matrices qui ne le sont pas. Reprenons l'exemple précédent et appliquons l'algorithme 3 à la matrice  $M_Z$  suivante :

$$M_Z = \begin{pmatrix} -0.118 & -0.034 & -0.570 & -0.574 & -0.032 & -0.168 & -0.663 & -0.811 & -1.206 & -1.082 \\ -0.334 & 0.699 & 0.276 & -0.204 & 0.286 & 0.034 & 0.384 & -0.003 & -0.291 & 0.862 \\ 0.113 & -0.283 & -0.346 & -0.140 & -0.111 & -0.063 & -0.424 & -0.336 & -0.392 & -0.821 \\ 0.134 & -0.241 & 0.036 & 0.215 & -0.105 & 0.018 & 0.045 & 0.195 & 0.403 & -0.013 \end{pmatrix}$$

La matrice  $M_Z$  ainsi définie correspond à la matrice des  $y'_i - x'_i$ . Les matrices  $U$  et  $S$  issues de la SVD de cette matrice  $M_Z$  sont données respectivement par :

$$U = \begin{pmatrix} -0.834 & -0.341 & 0.434 & 0.010 \\ 0.279 & -0.839 & -0.134 & 0.448 \\ -0.462 & 0.202 & -0.741 & 0.444 \\ 0.114 & 0.373 & 0.496 & 0.776 \end{pmatrix} \text{ et } S = \text{Diag}(2.459, 1.363, 0.049, 0.018).$$

Nous remarquons que dans ce cas les valeurs singulières ne sont pas de multiplicités paires. Or, nous avons besoin de cette parité dans l'algorithme 3 pour former les listes quasi-isogonales (cf. section 2 du chapitre précédent). De plus, sur cet exemple là, et dans le cas d'un ensemble de seulement dix vecteurs, les valeurs singulières  $s_i$  sont telles que  $|s_1 - s_2|$  est proche de 1. Sur des ensembles comprenant beaucoup plus de vecteurs, cet écart entre les valeurs singulières tend à se creuser. Par exemple avec un ensemble de 500 vecteurs nous avons obtenu pour la même rotation une matrice  $S$  telle que  $S = \text{Diag}(19.235, 11.116, 0.280, 0.166)$ . Cet écart très important entre les valeurs singulières n'est pas sans poser problème. En effet, nous avons vu dans la section 1 du précédent chapitre que les valeurs singulières étaient données par  $\sqrt{2 - 2 \cos \theta_i}$ . Si les données se sont pas bruitées, elles sont comprises entre 0 et 4 et nous n'utilisons uniquement celles qui sont non nulles. Dans le cas de données bruitées, pour trouver une base de l'espace  $\text{Im}(R - I_n)$  nous ne gardons que les  $k$  plus grandes valeurs singulières (cf. section 2.1.1 du chapitre 2). Celles-ci sont supérieures à un seuil de tolérance  $tol$  que nous nous sommes fixé. Il est donné par la formule <sup>13</sup> :

$$\begin{aligned} tol &= \max(\text{nbre de colonnes}, \text{nbre de lignes}) * \max(s_i) * 10^{-p} \\ &= n * \max(s_i) * 10^{-p} \text{ (car la matrice est carrée)} \end{aligned}$$

13. Ce seuil de tolérance a été fixé par analogie avec celui utilisé par Matlab pour trouver une base orthonormale de l'espace image.

où  $\max(s_i)$  est la plus grande valeur singulière et  $p$  la décimale que l'on bruite (cf. section 2.1). Dans le cas de vecteurs de la base et de leurs images ce seuil  $tol$  convient ; il permet notamment de prendre en compte le bruit. Dans notre exemple, lorsque l'on considère les vecteurs de la base et leurs images <sup>14</sup>, ce seuil est de 0.007. Par contre dans le cas d'un ensemble de vecteurs, ce seuil peut se révéler assez élevé. En reprenant le cas de l'ensemble formé par les 500 couples de vecteurs, ce seuil passe à 9.617 car le nombre de colonnes est élevé par rapport au cas précédent où l'on ne considèrerait que  $n$  vecteurs. En appliquant ce seuil de tolérance, on ne prend en compte que deux valeurs singulières et par conséquent qu'un seul plan de rotation alors que cette rotation 4D peut être décomposée en deux rotations planaires comme nous venons de le voir. Une adaptation possible de cet algorithme serait de modifier ce seuil de tolérance  $tol$  pour qu'il ne tienne plus compte du nombre de colonnes, ce nombre pouvant être élevé. Il pourrait être fixe par exemple à :

$$tol = n * \max(s_i) * 10^{-p}$$

où  $\max(s_i)$  est la plus grande valeur singulière et  $p$  la décimale que l'on bruite. Dans l'exemple numérique précédent, la nouvelle valeur de  $tol$  est de 0.077. Dans ce cas, les deux plans de rotation sont pris en compte alors que pour  $tol = 9.617$ , un seul plan était considéré. D'autres seuils de tolérance pourraient éventuellement être proposés comme par exemple des seuils de tolérance ne tenant pas compte du  $\max(s_i)$  qui est lui aussi souvent élevé en cas de nuages de vecteurs et bornés par 4 sinon. Des expérimentations vont être menées pour valider ces approches et pour trouver une valeur optimale de ce paramètre  $tol$ .

Supposons maintenant que nous ayons réussi à trouver une valeur de  $tol$  « idéale » c'est-à-dire qui permette à la fois de tenir compte du bruit et qui peut être appliquée dans le cas où nous disposons d'un ensemble de vecteurs et non des images des vecteurs d'une base comme dans la section 1 du chapitre 2. Nous nous plaçons toujours dans le cas où nous connaissons des ensembles de vecteurs. Nous notons  $k$  le nombre de valeurs singulières supérieures à ce seuil  $tol$  et nous considérons l'ensemble des  $k$  premières colonnes de la matrice  $U$  issue de la SVD. La question qu'il est maintenant légitime de se poser est de savoir si ces vecteurs engendrent bien les plans de rotations comme cela était le cas dans la section 1 du chapitre 2 où nous disposions des vecteurs d'une base et de leurs images respectives. Une étude à ce sujet est actuellement en cours. Il semblerait que les matrices  $U$  issues de la SVD dans le cas où elle est calculée à partir des vecteurs d'une base et dans le cas d'un ensemble de vecteurs soient presque les mêmes. Dans le cas précédent par exemple, ces deux matrices sont respectivement données par :

$$U_M = \begin{pmatrix} -0.832 & -0.327 & 0.443 & -0.067 \\ 0.262 & -0.845 & -0.061 & 0.462 \\ -0.471 & 0.206 & -0.649 & 0.560 \\ 0.128 & 0.369 & 0.616 & 0.684 \end{pmatrix} \text{ et } U_{M_Z} = \begin{pmatrix} -0.828 & -0.355 & 0.435 & 0.007 \\ 0.293 & -0.836 & -0.131 & 0.446 \\ -0.466 & 0.191 & -0.739 & 0.447 \\ 0.108 & 0.374 & 0.498 & 0.775 \end{pmatrix}$$

Ce constat n'a été établi qu'à partir de certains exemples numériques, cela reste à montrer de manière théorique. Si cela était démontré, nous pourrions considérer que l'étape clé de cette adaptation de l'algorithme 3 réside bien dans la détermination d'un seuil de tolérance à partir duquel les valeurs singulières sont rejetées. Connaissant ce seuil, l'algorithme pourra être ensuite appliqué aux ensembles de vecteurs comme dans le cas où nous disposions des vecteurs de la base (section 1 du chapitre 2) étant donné que les matrices  $U$  semblent être les mêmes (sur cet exemple, le cas général reste à montrer).

14. Dans ce cas, les valeurs singulières sont chacune de multiplicité 2 et sont données par 1.669 et 0.025. Le seuil est donc donné par  $4 * 1.669 * 0.001 = 0.007$ . Comme toutes les valeurs singulières sont supérieures à ce seuil, la rotation est donc la composée de deux rotations planes.

## Conclusion sur les expérimentations numériques

Nous avons implanté nos deux algorithmes proposés dans le chapitre précédent, l'un utilisant l'algèbre géométrique et l'autre basé sur la décomposition de Schur, de la dimension 2 à la dimension 15 et de la précision  $10^{-4}$  à la précision  $10^{-1}$ . Ils ont été testés chacun sur 500 matrices de rotation générées aléatoirement et bruitées selon une loi uniforme afin de tester la résistance au bruit des algorithmes. Une étude préliminaire concernant l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique a été menée. Elle nous a permis de fixer un paramètre  $\beta$  unique (correspondant au seuil d'appartenance aux composantes quasi-isogonales) quelles que soient les dimensions et les précisions. La valeur considérée optimale et donc la valeur retenue est  $\beta = 15^\circ$ . Nous avons ensuite défini une mesure d'erreur par comparaison entre un vecteur « théorique » et un vecteur « pratique ». Le vecteur « théorique » est l'image d'un vecteur  $\mathbf{v}$  calculée à partir de la matrice de rotation (avant introduction du bruit). Le vecteur « pratique » est l'image du même vecteur  $\mathbf{v}$  mais calculée à partir du rotor construit à partir des plans et des angles fournis par nos algorithmes. Les conclusions de l'étude sont les suivantes. Pour la précision  $10^{-1}$ , l'erreur est relativement élevée pour les deux méthodes<sup>15</sup>. Dans les deux cas, la courbe qui représente cette erreur en fonction de la dimension semblerait modélisable par un polynôme de degré 2. Pour des précisions de  $10^{-2}$  à  $10^{-4}$ , l'erreur augmente de manière linéaire lorsque la dimension augmente. Ce constat est valable pour les deux méthodes. Néanmoins, suivant la dimension et dans le cadre de nos implantations, il conviendra d'utiliser un algorithme plutôt que l'autre. Ici, pour des dimensions entre deux et quatre, nous choisirons d'utiliser l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique alors que pour des dimensions supérieures à cinq, la méthode basée sur la décomposition de Schur sera privilégiée.

Néanmoins, des études complémentaires méritent d'être menées pour améliorer les résultats. Il serait notamment intéressant de voir l'évolution de l'erreur si une loi gaussienne (plutôt qu'une loi uniforme) était appliquée pour bruite les rotations. Le paramètre  $\beta$  pourra être choisi en fonction des dimensions et précisions plutôt que d'être fixé. Les deux algorithmes devront être adaptés à un cadre expérimental plus classique (nuages de vecteurs). Pour l'algorithme basé sur la décomposition de Schur un pré-traitement adapté sur les données est envisagé ; son but étant d'extraire exactement  $n$  vecteurs et d'obtenir ainsi une matrice carrée permettant le calcul de la décomposition de Schur. Une modification du seuil de tolérance de l'algorithme 3 est en cours. De plus, une adaptation aux rotations discrètes mériterait également d'être menée. Elle pourra utiliser les travaux de Thibault [Thi10] sur les rotations discrètes et les angles charnières présentés dans la partie 2.1 de l'état de l'art. Elle pourrait notamment permettre de décomposer des rotations déterminées uniquement à partir de nombres entiers.

## 6 Estimation de l'erreur de l'algorithme de Fontijne [FD10]

Dans cette partie, nous montrons comment la notion de médiatrices généralisées que nous avons introduites dans la section 2.1 du chapitre 1, permet d'évaluer l'erreur de l'algorithme de décomposition des rotations de Fontijne [FD10]. En effet, si les vecteurs utilisés comme données de départ de cet algorithme sont bruités, nous pouvons considérer qu'ils appartiennent à une petite surface. Au lieu de reconstruire les médiatrices usuelles entre deux points comme Fontijne, nous pouvons, dans ce cas, construire les médiatrices généralisées.

15. L'erreur est supérieure à 1 à partir de la dimension 7, cela signifie que si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{prat} - \mathbf{x}_{theo}$  alors  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 1$ . Par conséquent, nous pouvons en déduire que les paramètres des rotations ne sont pas correctement calculés.

Nos deux algorithmes de décomposition des rotations des sections 2 et 3 du chapitre précédent ne sont pas des algorithmes incrémentaux comme ceux d'Aragón [AGARAVS09] et de Fontijne [FD10]. Ainsi, les erreurs ne se cumulent pas dans les calculs. Dans la partie 2.1, nous avons montré que celui de Aragón n'était pas stable numériquement au sens où une petite perturbation dans les données de départ de l'algorithme impliquait une erreur non négligeable dans le résultat. Dans cette partie, nous montrons quels sont les problèmes qui peuvent être rencontrés lorsque l'on applique la méthode de Fontijne [FD10] à des pixels. Cette adaptation peut se faire à l'aide des médiatrices généralisées que nous avons introduites dans la section 2.1 du chapitre 1. En effet, dans sa méthode, Fontijne construit, à partir de points appariés, les médiatrices entre ces points comme nous allons le rappeler plus en détails dans la section 6.1. Dans le domaine discret, nous ne considérons plus ici des points mais des ensembles de points. Ainsi, les médiatrices « continues » de Fontijne peuvent être remplacées par l'ensemble de toutes les médiatrices entre tous les couples de points : la médiatrice généralisée [RALSA10, ALSR11]. Plus précisément, nous montrons comment les médiatrices généralisées simplifiées permettent de visualiser l'erreur qui apparaît en utilisant l'algorithme de reconstruction de Fontijne avec des données bruitées. Ces travaux effectués en collaboration avec Marc Rodríguez, ont été publiés dans [RLSR<sup>+</sup>11].

Afin de proposer l'adaptation en discret que nous venons de mentionner et qui est détaillée dans la partie 6, nous présentons dans la partie 6.1 les différentes propriétés que nous avons du établir concernant la version simplifiée des médiatrices généralisées.

## 6.1 Propriétés de la médiatrice généralisée simplifiée

Le but de cette partie est de rappeler certains résultats connus sur les médiatrices généralisées [RALSA10, ALSR11] et d'en établir de nouveaux afin de pouvoir adapter en discret l'algorithme de Fontijne [FD10]. Ces nouveaux résultats concernent la décomposition de la médiatrice généralisée en bandes et en faisceaux (section 6.1.1) mais aussi l'introduction de la notion de symétrie par rapport à un ensemble de droites (section 6.1.2).

Initialement cette notion a été développée comme l'analogue discret de la médiatrice continue. En effet, lorsque l'on travaille dans un espace continu, il est possible de définir un ensemble de points qui sont équidistants à deux points donnés. Ils forment une droite appelée *médiatrice*. Lorsque l'on travaille dans un domaine discret, un point est représenté par un élément de surface ou de volume (pixels, voxels), cette notion n'a plus de sens.

Dans la section 2.1, nous avons défini, en dimension  $n$ , la notion de médiatrice généralisée entre deux voxels (surfaces, volumes...) comme l'ensemble des médiatrices entre tous les couples de points  $(p, q)$  avec  $p$  et  $q$  appartenant chacun à un voxel différent. Dans [RALSA10], il a été prouvé que les points  $X \in \mathbb{R}^n$  appartenant à la médiatrice généralisée entre deux régions convexes bornées  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  vérifiaient<sup>16</sup> :

$$[d_{1_{\min}}(X), d_{1_{\max}}(X)] \cap [d_{2_{\min}}(X), d_{2_{\max}}(X)] \neq \emptyset \quad (3.1)$$

où  $d_{i_{\min}}(X) = \min_{Y \in \mathcal{S}_i}(d(X, Y))$ ,  $d_{i_{\max}}(X) = \max_{Y \in \mathcal{S}_i}(d(X, Y))$  et  $d$  la distance euclidienne usuelle. Ainsi définie, la médiatrice généralisée est composée de nombreux morceaux de droites et de paraboles [RALSA10]. Afin de faciliter les calculs, la notion de médiatrice

16. Cela est une conséquence directe du fait que chaque point de la médiatrice généralisée entre deux points peut être vu comme le centre d'un cercle passant par ces deux points [RALSA10].

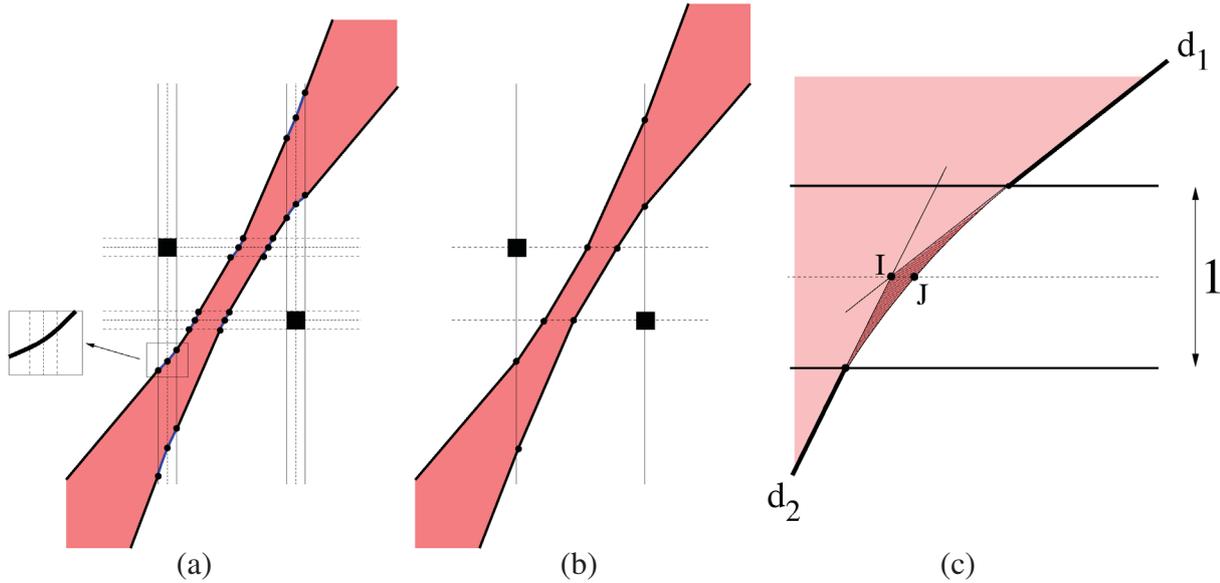


FIGURE 3.5 – La médiatrice généralisée (a) et son approximation : la médiatrice généralisée simplifiée (b) ; les morceaux de parabole sont remplacés par des morceaux de droites (c). En remplaçant les morceaux de paraboles par des morceaux de droites, la surface couverte est légèrement réduite.

généralisée simplifiée a été introduite [RALSA10, ALSR11]. Les « morceaux » de paraboles sont approchés par des morceaux de droites comme nous le montre la figure 3.5 qui représente une médiatrice généralisée et sa version simplifiée en dimension 2.

Pour mieux comprendre cette notion et afin de faciliter sa représentation nous nous plaçons, à partir de maintenant, dans le cas de la dimension 2. La médiatrice généralisée simplifiée<sup>17</sup> (MGS) de deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  est donnée par les équations :

$$\begin{aligned}
 MGS(P_1, P_2) = \{ & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\
 & \left( \sqrt{(x - C_{2x})^2 + (y - C_{2y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{1x})^2 + (y - F_{1y})^2} \right) \\
 & \wedge \left( \sqrt{(x - C_{1x})^2 + (y - C_{1y})^2} \leq \sqrt{(x - F_{2x})^2 + (y - F_{2y})^2} \right) \}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

avec  $C_{ix}, F_{ix} \in \{(x_i + \frac{1}{2}), (x_i - \frac{1}{2})\}$ ,  $C_{iy}, F_{iy} \in \{(y_i + \frac{1}{2}), (y_i - \frac{1}{2})\}$ .

Elle est donc constituée de morceaux de droites et de segments. Comme deux pixels découpent le plan en neuf régions (cf. figure 3.5(b)), il est possible de calculer, grâce à la formule (3.2), dans chacune des zones, les équations de droites. Dans chacune des neuf régions, nous avons au plus deux inéquations (correspondant aux deux bords de la médiatrice). Sur ces 18 inéquations, certaines sont incompatibles entre elles et il en découle la propriété suivante :

**Propriété 10.** *Les bords d'une médiatrice généralisée simplifiée sont composés d'au plus dix morceaux de droites et de segments.*

Dans la suite, nous appelons *point caractéristique de la MGS* tout point d'intersection entre deux morceaux de droites ou segments formant la médiatrice. Nous notons  $\{\mathbb{D}_i\}_{i \in [1,10]}$  les segments et les demi-droites délimitant la MGS de deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  et  $\{\mathbb{P}_i\}_{i \in [1,8]}$  les points

17. En anglais, on parle de *Simplified Generalized Perpendicular Bisector* abrégé en SGPB.

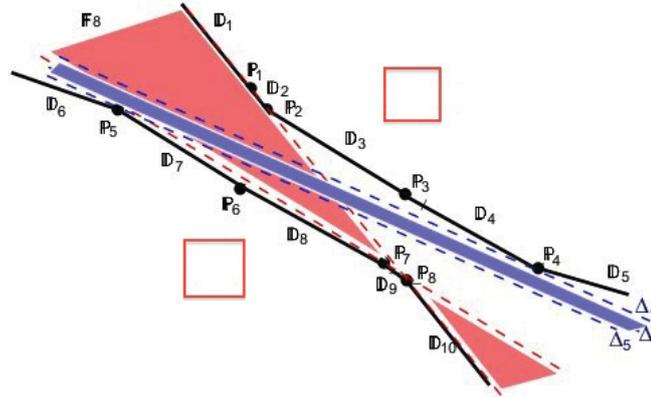


FIGURE 3.6 – Une médiatrice généralisée simplifiée entre deux pixels est composée d'au plus six segments et quatre demi-droites notés  $\{\mathbb{D}_i\}_{i \in [1,10]}$ . Ses bords se coupent en au plus dix points caractéristiques notés  $\{\mathbb{P}_i\}_{i \in [1,8]}$ . Les droites supports  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_{10}$  (resp.  $\mathbb{D}_5$  et  $\mathbb{D}_6$ ) sont les mêmes. Le faisceau de droites  $\mathbb{F}_8$  et la bande  $\mathbb{P}_4$  et  $\mathbb{P}_5$  sont aussi représentés.

caractéristiques. Comme nous le montre la figure 3.6, les points caractéristiques  $\{\mathbb{P}_i\}$  sont indiqués de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbb{P}_i = \mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_{i+1} & \text{si } i \in [1; 4] \\ \mathbb{P}_i = \mathbb{D}_{i+1} \cap \mathbb{D}_{i+2} & \text{si } i \in [5; 8]. \end{cases}$$

Parmi ces demi-droites, certaines ont la propriété d'avoir la même droite support :

**Lemme 2.** Soient  $A = (a_1, a_2)$  et  $B = (b_1, b_2)$  deux pixels. Les droites supports de  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_{10}$  de la MGS entre  $A$  et  $B$  (resp.  $\mathbb{D}_5$  et  $\mathbb{D}_6$ ) sont les mêmes sauf si  $a_i \pm 0.5 = b_i \pm 0.5$  où dans ce cas, les droites ne sont pas confondues mais parallèles.

La preuve découle de la formule (3.1). Dans la suite, nous nous placerons dans le cas général c'est-à-dire  $a_i \pm 0.5 \neq b_i \pm 0.5$ .

### 6.1.1 Bandes et faisceaux

Le but de cette partie est de montrer que la médiatrice généralisée simplifiée peut être décomposée en bandes et en faisceaux en utilisant les points caractéristiques que nous venons de définir dans la section précédente.

Soit  $M$  une médiatrice généralisée simplifiée et soient  $\mathbb{P}_i$  et  $\mathbb{F}_i$  respectivement l'ensemble de ses points caractéristiques et l'ensemble de ses segments et demi-droites limites. Nous définissons un faisceau de droites  $\mathbb{F}_i$  comme l'ensemble des droites  $\Delta$  qui passent par  $\mathbb{P}_i$  avec des pentes de droites comprises dans l'intervalle  $[\text{Pente}(\mathbb{D}_i), \text{Pente}(\mathbb{D}_{i+1})]$  (ou  $[\text{Pente}(\mathbb{D}_{i+1}), \text{Pente}(\mathbb{D}_{i+2})]$  selon les valeurs de  $i$ ) où  $\text{Pente}(D)$  représente la pente de la droite  $D$  comme nous le montre la figure 3.6. L'ensemble  $\mathbb{F}_i$  est défini de la manière suivante :

$$\mathbb{F}_i = \left\{ \text{droite } \Delta \mid \mathbb{P}_i \in \Delta \text{ et } \begin{cases} \text{Pente}(\Delta) \in [\text{Pente}(\mathbb{D}_i), \text{Pente}(\mathbb{D}_{i+1})] & \text{si } 1 \leq i \leq 4 \\ \text{Pente}(\Delta) \in [\text{Pente}(\mathbb{D}_{i+1}), \text{Pente}(\mathbb{D}_{i+2})] & \text{si } 5 \leq i \leq 8 \end{cases} \right\}.$$

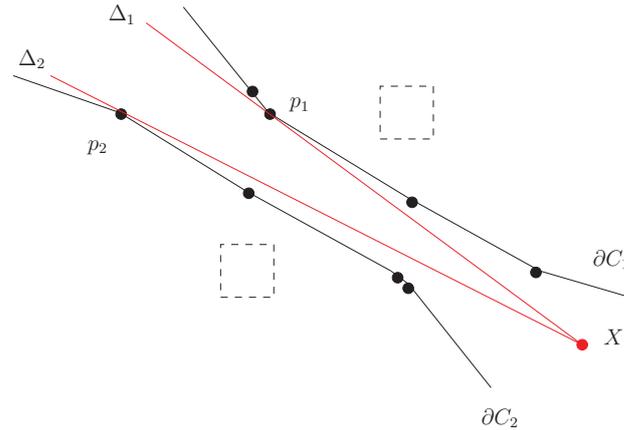


FIGURE 3.7 – Le point  $X$  est le point d'intersection des droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  passant chacune par un point caractéristique. Ainsi, tout point à l'intérieur de la médiatrice généralisée appartient à au moins un faisceau.

Nous pouvons aussi définir la bande  $\text{Bande}(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_j)$  par l'ensemble des droites parallèles délimitées par  $\Delta_i \in M$  et passant par  $\mathbb{P}_i$  pour  $i \in [1; 4]$  et  $\Delta_j \in M$  passant par  $\mathbb{P}_j$  pour  $j \in [5; 8]$  comme illustré sur la figure 3.6. En d'autres termes :

$$\text{Bande}(\mathbb{P}_i, \mathbb{P}_j) = \{ \text{droite } \Delta \mid \Delta \parallel \Delta_i \text{ et } \Delta \parallel \Delta_j \text{ avec } \mathbb{P}_i \in \Delta_i, \mathbb{P}_j \in \Delta_j \text{ et } \Delta_i \parallel \Delta_j \}.$$

Une droite de la MGS peut être caractérisée en utilisant ces notions de faisceaux et de bandes.

Pour chaque droite  $D$  de la MGS deux cas sont possibles. Soit la droite  $D$  passe par  $\mathbb{P}_i$ . Dans ce cas  $D$  appartient à  $\mathbb{F}_i$ . Sinon, si la droite ne passe pas par  $\mathbb{P}_i$ , il existe  $\mathbb{P}_j$  et  $\mathbb{P}_k$  tels que  $D'$ , le translaté de  $D$  passe par  $\mathbb{P}_j$  et  $D''$  l'autre translaté de  $D$  passe par  $\mathbb{P}_k$ . Dans ce cas,  $D$  appartient à la bande  $\text{Bande}(\mathbb{P}_j, \mathbb{P}_k)$  comme sur la figure 3.6. Nous obtenons donc une caractérisation des droites appartenant à la MGS :

**Propriété 11** (Droite appartenant à la MGS). *Toute droite de la MGS appartient soit à un faisceau  $\mathbb{F}_i$  soit à une bande  $\text{Bande}(\mathbb{P}_k, \mathbb{P}_l)$ .*

De plus, nous avons la propriété suivante :

**Propriété 12.** *L'union des huit faisceaux (issus des huit points caractéristiques) recouvre la MGS.*

**Preuve .** *Soit  $X$  un point de la MGS. Comme les bords de la MGS sont composés de deux polygones convexes  $\partial C_1$  et  $\partial C_2$ , il existe deux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  qui passent par  $X$  et respectivement par  $p_1 \in \partial C_1$  et  $p_2 \in \partial C_2$ . Comme les polygones sont convexes,  $p_1$  et  $p_2 \in \{\mathbb{P}_i\}$  comme nous le montre la figure 3.7.  $\square$*

### 6.1.2 Symétrie généralisée

L'image du symétrique d'un point  $p$  par rapport à la médiatrice entre  $p$  et  $q$  est le point  $q$  et inversement. Maintenant, considérons non plus deux points  $p$  et  $q$  mais deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  et leur médiatrice généralisée simplifiée. Nous avons introduit dans [RLSR<sup>+</sup>11] la notion de

*symétrie généralisée*<sup>18</sup> notée  $SG_{(P_1, P_2)}$  pour désigner la réflexion par rapport à la médiatrice généralisée simplifiée des pixels  $P_1$  et  $P_2$ . L'image d'un pixel  $P_3$  par cette transformation est donc l'union de tous les symétriques de tous les points de  $P_3$  par rapport à toutes les droites de la  $MGS(P_1, P_2)$ . De manière plus formelle, si  $sym(x, \Delta)$  désigne le symétrique de  $x$  par rapport à la droite  $\Delta$ , et  $M$  représente la médiatrice généralisée simplifiée entre deux pixels  $P_1$  et  $P_2$ , alors la symétrie généralisée d'un pixel  $P_3$  par rapport à  $M$  est donnée par :

$$SG_{(P_1, P_2)}(P_3) = \{sym(x, \Delta), \text{ pour tout } x \in P_3, \text{ et pour tout } \Delta \in M\}.$$

De manière évidente, l'image d'un pixel n'est pas un pixel. La figure 3.8(a) fournit un exemple numérique de la symétrie généralisée. La figure 3.8(b) représente de manière schématique la région  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$ .

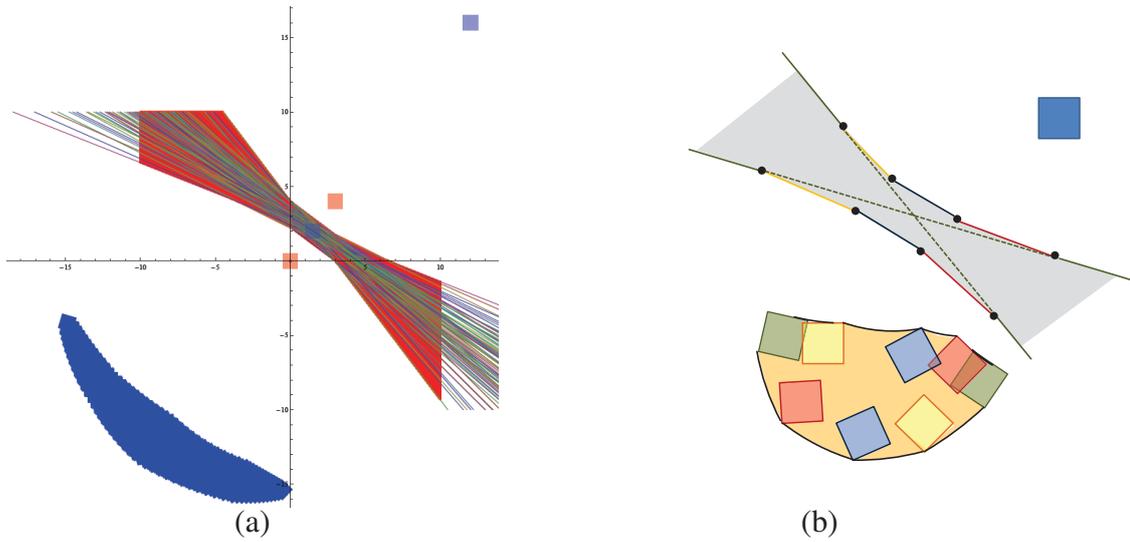


FIGURE 3.8 – (a) Symétrie généralisée pour le pixel (12,16) par rapport à la MGS entre les pixels (0,0) et (3,4); (b) Image du pixel par la symétrie généralisée. La forme obtenue est délimitée par les bords d'anneaux particuliers (cf. propriété 14) .

Par construction, un point  $p$  de  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$  est le symétrique d'un point  $p_3$  appartenant au pixel  $P_3$  par rapport à une droite  $\Delta$  qui appartient à  $MGS(P_1, P_2)$ . De manière plus formelle, nous avons :

$$p \in SG_{(P_1, P_2)}(P_3) \Leftrightarrow p \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \exists p_3 \in P_3, \exists \Delta \in MGS(P_1, P_2), p = sym(p_3, \Delta)$$

où  $sym(p_3, \Delta)$  est le symétrique du point  $p_3$  par rapport à la droite  $\Delta$ . Nous en déduisons la caractérisation des points de  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$  :

**Propriété 13** (SG d'un pixel). Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux pixels centrés respectivement en  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  et leur médiatrice généralisée simplifiée associée  $MGS(P_1, P_2)$ . Soit  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$  l'image du pixel  $P_3$  centré en  $(x_3, y_3)$  par  $SG_{(P_1, P_2)}$ . Un point  $(x, y)$  appartient à  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$  si les assertions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\exists(x', y')$  tels que  $(x_3 - 0.5 \leq x' \leq x_3 + 0.5)$  et  $(y_3 - 0.5 \leq y' \leq y_3 + 0.5)$  ;
- (ii)  $(x, y)$  peut s'écrire comme  $(\frac{-2ac - a^2x' + b^2x' - 2aby'}{a^2 + b^2}, \frac{-2bc - 2abx' + a^2y' - b^2y'}{a^2 + b^2})$  tels que  $(x_2, \frac{-c - ax_2}{b})$ ,  $(x_1, \frac{-c - ax_1}{b})$ ,  $(\frac{-by_1 - c}{a}, y_1)$ ,  $(\frac{-by_2 - c}{a}, y_2)$  satisfont la relation (3.1).

18. *Generalized Reflection Symmetry* en anglais notée  $GRS(P_1, P_2)$ .

Nous détaillons maintenant une méthode pour construire la SG d'un pixel. Nous avons vu que tout point de la médiatrice généralisée appartenait au moins à un faisceau ou à une bande. Avant de caractériser l'image d'un pixel par la MGS, nous allons étudier indépendamment l'image du pixel par un faisceau de droites et par une bande.

### a) Symétrie d'un pixel par rapport à toutes les droites d'un faisceau de droites

L'ensemble des images d'un pixel  $P_2$  par les symétries par rapport à des droites appartenant à un faisceau de droites complet passant par  $p$  (c'est-à-dire l'ensemble des droites qui passent par ce point) est un anneau centré en  $p$  délimité par les cercles centrés en  $p$  de rayons  $d_{min}(p, P_2)$  et  $d_{max}(p, P_2)$ . Dans la suite, nous utiliserons l'abus de langage « images d'un pixel  $P_2$  par rapport à un faisceau de droites » pour désigner cet ensemble. Dans notre cas, les faisceaux  $\mathbb{F}_i$  ne sont pas complets. Ils sont composés seulement de droites dont les pentes sont bornées par une pente minimum et une pente maximum. Les images d'un pixel par ce faisceau partiel de droites est par conséquent un morceau d'anneau comme nous le montre la figure 3.9(a). Elle montre l'ensemble des images du pixel  $P_2$  par le faisceau de droites issues du centre du pixel  $P_1$ . Nous venons de caractériser l'ensemble des images d'un pixel par des symétries par rapport à toutes les droites contenues dans un faisceau, nous caractérisons maintenant l'ensemble de ces images par rapport à toutes les droites appartenant à une bande.

### b) Symétrie d'un pixel par rapport à toutes les droites d'une bande de droites

Soient  $P_i$  et  $P_j$  les images du pixel  $P$  par deux droites définissant une bande. L'ensemble des images du pixel  $P$  par la bande entière c'est-à-dire par l'ensemble des droites de la bande est une bande délimitée par  $P_i$  et  $P_j$  comme sur la figure 3.9(b). Comme précédemment, nous utilisons l'abus de langage « images d'un pixel par rapport à une bande de droites » pour désigner l'ensemble des images que nous venons de définir.

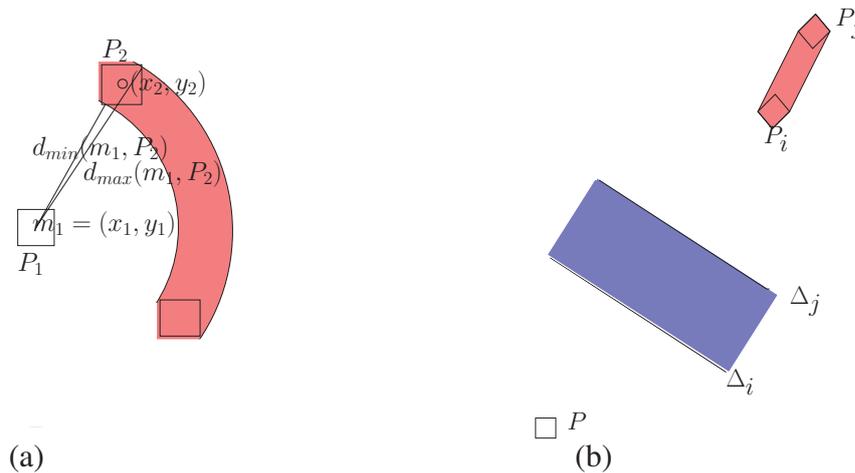


FIGURE 3.9 – (a) Image du pixel  $P_2$  par le faisceau issu de  $m_1$ , le centre du pixel  $P_1$  ; (b) image du pixel  $P$  par la  $Bande(\Delta_i, \Delta_j)$ .

### c) Symétrie d'un pixel $P_3$ par rapport à la médiatrice généralisée entre les pixels $P_1$ et $P_2$

Soient  $I_j$  les images de  $P_3$  par  $\mathbb{D}_j$ . Comme  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_{10}$  et  $\mathbb{D}_5 = \mathbb{D}_6$  (Lemme 2), nous avons seulement huit images différentes. Considérons maintenant les images de  $P_3$  par rapport à un faisceau de droites complet  $\mathbb{F}_i$  passant par  $\mathbb{P}_i = \mathbb{D}_i \cap \mathbb{D}_m$ . Ces images sont des morceaux

d'anneaux délimités par  $I_l$  et  $I_m$  de rayon interne  $d_{min}(\mathbb{P}_i, P_3)$  et de rayon externe  $d_{max}(\mathbb{P}_i, P_3)$ . La forme obtenue est donc délimitée par huit morceaux d'anneaux. L'objet est fermé car  $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_{10}$  et  $\mathbb{D}_5 = \mathbb{D}_6$ . La construction est représentée par la figure 3.8(b). De plus, cet objet doit contenir les images du pixel  $P_3$  par rapport aux bandes de droites incluses dans la médiatrice généralisée simplifiée. Cela fournit une seconde caractérisation de  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$  :

**Propriété 14** (SG d'un pixel). *Un point appartient à l'image d'un pixel  $P_3$  par la symétrie généralisée de deux pixels  $P_1$  et  $P_2$  si et seulement s'il appartient à l'ensemble formé par les huit morceaux d'anneaux centrés en  $\mathbb{P}_i$  pour  $1 \leq i \leq 4$  de rayon  $d_{min}(\mathbb{P}_{i \leq i \leq 4}, P_3)$  et centré en  $\mathbb{P}_i$  pour  $5 \leq i \leq 8$  de rayon  $d_{max}(\mathbb{P}_{i \leq i \leq 8}, P_3)$ , où les  $\mathbb{P}_i$  sont les points caractéristiques de la médiatrice généralisée simplifiée.*

#### d) Étude de $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$

Nous venons de donner une caractérisation géométrique de  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$ . Une étude de l'arc angulaire entre les extrema de cette région paraît importante. En effet, elle permet de borner (borne supérieure) le « bruit » que l'on ajoute au pixel quand on calcule son image par la symétrie généralisée.

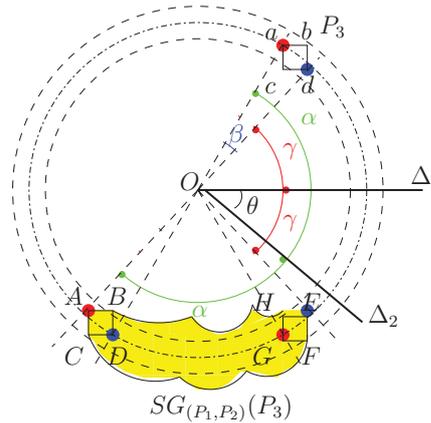


FIGURE 3.10 – Symétrie du pixel  $P_3$  par rapport aux droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  les droites supports des demi-droites  $\mathbb{D}_1$  et  $\mathbb{D}_5$  (cf. figure 3.10). Ces droites se coupent en un point  $O = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ . Sur la figure 3.10, les carrés  $ABDC$  et  $EFGH$  qui sont les symétriques du carré  $abdc$  par les droites respectives  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  définissent les extrema de cette région. Comme les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  appartiennent au faisceau de droites passant par  $O$ , les carrés  $ABDC$  et  $EFGH$  sont contenus dans l'anneau centré en  $O$  formé par les cercles  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  de rayons respectifs  $R_1 = d_{min}(O, P_3)$  et  $R_2 = d_{max}(O, P_3)$ . Comme les points  $B$  et  $H$  appartiennent à  $\mathcal{C}_1$  et que les points  $C$  et  $F$  appartiennent à  $\mathcal{C}_2$ , les points  $A, D, G$  et  $E$  appartiennent au cercle centré en  $O$  de rayon  $R_3 = \frac{R_1+R_2}{2}$  (cf. figure 3.10). La longueur angulaire notée  $l(SG_{(P_1, P_2)}(P_3))$  entre les deux extrema de  $SG_{(P_1, P_2)}(P_3)$  est donnée par :

$$l(SG_{(P_1, P_2)}(P_3)) = (\beta + 2\theta) \left( \frac{R_1 + R_2}{2} \right)$$

où  $\beta$  et  $\theta$  sont les angles respectifs entre les droites  $Oa$  et  $Od$  et les droites  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ . En particulier, plus l'angle  $\theta$  entre les deux droites support de la médiatrice généralisée est grand plus la longueur angulaire est importante. De plus, cette longueur est aussi dépendante des rayons  $R_1$  et  $R_2$  (correspondants aux distances *min* et *max* entre le pixel et le centre<sup>19</sup> de la médiatrice

19. Ce centre correspond au milieu du segment entre les centres des pixels  $P_1$  et  $P_2$ .

généralisée entre  $P_1$  et  $P_2$ ). Ainsi, plus le pixel est éloigné de la médiatrice généralisée, plus la longueur angulaire augmente. Par exemple, considérons que  $P_3$  est un pixel de coté 1, que deux de ses cotés sont parallèles à la droite  $\Delta_1$  comme sur la figure 3.10. Soit  $\theta = \pi/4$  l'angle entre  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  et supposons que la distance minimale entre  $P_3$  et  $O$  vaut  $R_1 = 5$  alors la distance maximale vaut  $R_2 = 5 + \sqrt{2}$ . L'angle  $\beta$  vaut  $2\frac{\sqrt{2}}{10+\sqrt{2}}$ . La distance angulaire est donc supérieure à 10. Cela montre bien qu'une petite erreur dans la détermination du point au départ (bornée ici par  $\sqrt{2}$ ) conduit à une erreur beaucoup plus importante dans la détermination de son symétrique par rapport à la médiatrice généralisée.

## 6.2 Reconstruction de rotation en utilisant la MGS

Comme nous l'avons précisé dans la section 2.1 du chapitre 1, l'algorithme de Fontijne est basé sur le théorème de Cartan-Dieudonné [Aud03] qui décompose les rotations  $nD$  en un nombre pair de réflexions. Cette méthode nécessite des correspondances exactes entre les points et ne tolèrent pas les données bruitées. Dans cette section, nous montrons comment la notion de médiatrice généralisée permet d'adapter cet algorithme à ce cas là. En effet, si ces points sont bruités (définis à une certaine précision par exemple) nous pouvons considérer qu'ils appartiennent à une petite surface. Plutôt que de construire des médiatrices usuelles, nous pouvons considérer la médiatrice généralisée entre ces surfaces.

L'étude que nous effectuons ici est uniquement faite en dimension 2. Dans la suite, la petite surface autour des points est supposée carrée<sup>20</sup> de coté 1. Nous commençons par rappeler de manière rapide le principe de fonctionnement de l'algorithme de base développé de manière plus détaillée dans la section 2.1 du chapitre 1.

### 6.2.1 Algorithme de reconstruction des rotations

Pour reconstruire la rotation  $R$  à partir de  $n$  points  $p_i$  et de leurs images  $p'_i = R(p_i)$  (les points sont supposés appariés), l'algorithme proposé dans [FD10] recherche les réflexions successives en utilisant le théorème de Cartan-Dieudonné.

Pour chaque  $i$ , nous avons  $p'_i = R(p_i) = R_k(\dots R_2(R_1(p_i))\dots)$  avec  $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , où  $R_i$  sont les réflexions<sup>21</sup>.

Les réflexions  $R_i$  sont déterminées de manière incrémentale. La première réflexion  $R_1$  a pour axe la médiatrice entre  $p_1$  et  $p'_1$ , la seconde est celle entre  $R_1(p_2)$  et  $p'_2$ . Par construction, les réflexions ont la propriété que leur composition ne déplace pas les points précédemment pris en compte. Par exemple,

$$p'_1 = R_1(p_1) = R(p_1) = R_k(\dots R_2(R_1(p_1))\dots).$$

Nous avons  $R_k(\dots R_2(p'_1)\dots) = p'_1$ .

20. Nous supposons que la surface est carrée afin de faciliter la mise en place de l'algorithme. En effet, calculer la médiatrice généralisée entre des surfaces quelconques pose des problèmes que nous ne savons actuellement pas résoudre. Les carrés, eux, sont supposés de côté unitaire uniquement pour faciliter la compréhension de la méthode. En effet, la notion de médiatrice généralisée est définie aussi dans le cas de carrés de longueurs quelconques. On parle dans ce cas de pixels adaptatifs [RLSR<sup>+</sup>11].

21. Dans cette section, nous identifions la réflexion proprement dite et la droite qui détermine la réflexion. Dans la suite, elle est notée  $R_i$ .

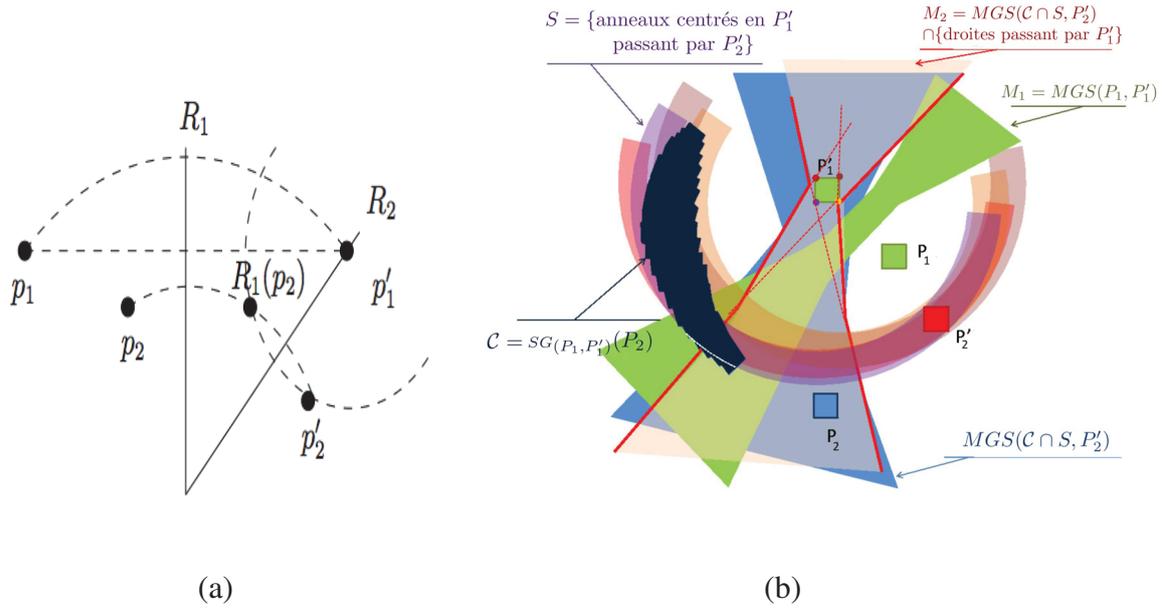


FIGURE 3.11 – (a) Reconstruction d'une rotation 2D. Le point  $p'_1$  appartient à  $R_2$ , donc  $p'_1 = R_2(p_1) = R_2(R_1(p_1))$ . La rotation  $R = R_2(R_1(\cdot))$  est une rotation de centre le point d'intersection de  $R_1$  et  $R_2$ . (b) Reconstruction d'une rotation bruitée 2D.

La Figure 3.11 illustre l'algorithme en dimension 2. Il est important de noter que  $p'_1 = R_1(p_1)$  appartient à  $R_2$  et qu'il est le centre du cercle passant par  $R_1(p_2)$  et  $p'_2$ . L'idée de l'adaptation aux données bruitées de cet algorithme est de remplacer la notion classique de médiatrice par celle de médiatrice généralisée.

### 6.2.2 Adaptation aux données bruitées de l'algorithme de reconstruction

Pour adapter cet algorithme aux données bruitées, nous remplaçons les points par un pixel incluant le point. Même si dans cette partie nous nous restreignons à la dimension 2, on peut facilement imaginer qu'en dimensions supérieures ces points pourront être remplacés par des voxels de dimension  $n$  (en 3D par exemple, il s'agira d'un volume englobant le point). Les réflexions sont ensuite déterminées grâce aux médiatrices généralisées simplifiées. Le résultat obtenu n'est donc pas une unique rotation comme cela était le cas avec les données exactes mais un ensemble de rotations qui sont compatibles avec les données de départ. Nous donnons maintenant le principe de l'adaptation de l'algorithme. Il est illustré par la figure 3.11(b)).

Premièrement les points  $p_i$  et leurs images  $p'_i$  sont remplacés par des pixels  $nD$  notés respectivement  $P_i$  et  $P'_i$ . Ensuite, nous déterminons la médiatrice généralisée simplifiée  $M_1 = MGS(P_1, P'_1)$  (correspondant à  $R_1$  dans le cas exact). En utilisant  $M_1$ , nous calculons la région  $SG_{(P_1, P'_1)}(P_2)$ . Cette région correspond, dans le cas exact, à  $R_1(p_2)$ .

Il est ensuite possible de réduire légèrement cette région en utilisant des propriétés sur les cercles : en effet, il existe un cercle centré en  $p'_1$  passant par  $p'_2$  et  $R_1(p_2)$  (cf figure 3.11(a)). Dans le cas de pixels cela signifie qu'il existe un ensemble  $S$  composé de tous les cercles centrés sur des points de  $P'_1$  passant par  $P'_2$ . La région qui nous intéresse est donc réduite à  $SG_{(P_1, P'_1)}(P_2) \cap S$ .

Maintenant, nous calculons la MGS  $MGS(SG_{(P_1, P'_1)}(P_2) \cap S, P'_2)$  comme sur la figure 3.11(b). Cette région peut être, elle aussi, réduite. En effet, dans le cas exact, la

médiatrice  $R_2$  passe par  $p'_1$ . Nous pouvons donc restreindre la région obtenue à l'ensemble  $L$  des droites passant par  $P'_1$  comme sur la figure 3.11(a)). Cela détermine la région  $M_2 = MGS(SG_{(P_1, P'_1)}(P_2) \cap S, P'_2) \cap L$  correspondant à  $R_2$  dans le cas exact. En dimension supérieure, il est possible de réitérer ce processus avec les autres couples de points. À la fin de l'algorithme, nous obtenons un ensemble de rotations déterminées par des droites choisies parmi les suite de  $M_i, 1 \leq i \leq n$ .

Cet algorithme n'a été expérimenté qu'en dimension 2 et nous avons dû faire face à un problème de calcul de la MGS entre un pixel  $P$  et une région plus compliquée comme  $MGS(SG_{(P_1, P'_1)}(P_2))$ . Le calcul de la médiatrice généralisée entre un pixel et une région générale ou entre un voxel et une région quelconque en dimension supérieure se complique rapidement. Par contre, clairement, l'algorithme de Fontijne entraîne une divergence des résultats de plus en plus grande pour des données de départ bruitées et cela indépendamment des éventuelles erreurs de calcul qui pourraient se rajouter.

## Conclusion sur l'application

Dans cette partie, nous avons montré comment la médiatrice généralisée simplifiée permettait de visualiser l'erreur de la méthode de Fontijne [FD10] permettant de déterminer les axes de réflexions qui décomposent une rotation  $nD$  à partir de  $n$  couples de points  $(p_i, p'_i)_{i=1\dots n}$ . Comme ces axes sont construits de manière incrémentale<sup>22</sup>, une petite erreur dans les données de départ de l'algorithme induit une erreur importante dans la détermination des axes. Pour visualiser cette erreur, nous avons proposé une adaptation de cet algorithme aux données bruitées. En effet, considérer des données comme bruitées revient à ne plus considérer un point mais une petite surface incluant ce point. Plutôt que de calculer des médiatrices usuelles entre ces points, nous déterminons des ensembles de médiatrices appelées médiatrices généralisées. Elles sont constituées par toutes les médiatrices entre tout couple de points appartenant à ces deux surfaces. Dans un premier temps, nous construisons la médiatrice généralisée entre les deux points  $p_1$  et  $p'_1$ . Nous construisons ensuite l'image du point  $p_2$  par cette médiatrice. Cette image n'est pas un pixel mais un objet convexe fermé  $\mathcal{C}$  de taille assez importante comparée à la taille du pixel de départ (cf. figure 3.11). Cet objet fermé permet de visualiser l'erreur induite par la méthode. En effet, plus les points sont bruités, plus l'objet  $\mathcal{C}$  est de taille importante. Dans le cas de données bruitées, les axes de réflexions ne sont plus uniques comme cela est le cas dans le domaine continu. La rotation est déterminée par un ensemble d'axes. En effet, tout ensemble d'axes  $R_i$ , où chaque  $R_i$  appartient à une médiatrice généralisée distincte construite par ce processus, détermine la rotation.

22. Le  $i^{\text{ème}}$  axe est construit à partir des  $(i - 1)$  précédents.

## Conclusion du Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats que nous avons obtenus en implantant nos deux algorithmes. Nous avons aussi appliqué l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique à un algorithme de décomposition des rotations existant [FD10] afin de visualiser l'erreur qui s'accumule lorsque les données ne sont pas exactes.

Dans une première partie, nous avons implanté nos deux algorithmes de décomposition de rotations (l'un utilisant l'algèbre géométrique et le second basé sur la décomposition de Schur) de la dimension 2 à la dimension 15. Pour cela, nous avons généré des couples de points correspondant aux vecteurs d'une base et leurs images par une rotation  $R_d$ . Ces vecteurs ont ensuite été bruités (donnés à une certaine précision allant de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ ). Afin de tester la robustesse et la sensibilité au bruit de nos méthodes, nous avons utilisé ces données bruitées comme données de départ de nos deux algorithmes. Nous avons aussi proposé un critère pour évaluer nos méthodes. Il nécessite de reconstituer la rotation à partir des données obtenues par nos algorithmes. Les images de vecteurs aléatoires normés par cette rotation recomposée à partir des plans et angles de rotation calculés par nos méthodes ont été comparés aux images par la rotation  $R_d$ . Plusieurs constats ont pu être faits à l'issue de ces tests. Il ressort notamment que plus la dimension augmente, plus l'erreur est élevée. De plus, aucun des deux algorithmes n'est meilleur que l'autre dans l'absolu. Cela dépend de la dimension considérée. En petites dimensions (de la 2D à la 4D) l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique donne de meilleurs résultats. L'erreur, par exemple en dimension 2 à une précision de  $10^{-3}$ , est trois fois moins élevée qu'avec la méthode de Schur. *A contrario*, en dimensions plus élevées, la méthode basée sur la décomposition de Schur est plus précise. Par exemple, en dimension 12, à la précision  $10^{-3}$  l'erreur est 1.5 fois plus importante avec la méthode utilisant l'algèbre géométrique que celle basée sur la décomposition de Schur. Cela s'expliquerait par le nombre beaucoup plus élevé d'opérations lors du calcul de la SVD par rapport à celui de la décomposition de Schur.

Néanmoins, si ces tests nous ont permis de valider nos méthodes, il n'en demeure pas moins que certaines améliorations mériteraient d'être apportées. En effet, dans l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique, un paramètre  $\beta$  est utilisé pour construire les listes quasi-isogonales (ensemble d'angles presque égaux). Nous avons fait le choix d'utiliser une valeur unique quelles que soient les dimensions et les précisions considérées. Une étude avec un  $\beta$  dépendant de la dimension et de la précision mériteraient d'être menées en complément. De plus, il est rare qu'en pratique nous disposions des vecteurs de la base et de leurs images. Généralement, dans un cadre expérimental classique, nous disposons le plus souvent d'un ensemble quelconque de points. Nous avons vu, dans la section 5, que l'algorithme basé sur la décomposition de Schur tel qu'il est donné dans la section 3 ne peut pas être appliqué à cet ensemble de vecteurs (car la matrice correspondante n'est pas carrée). Une idée pour pouvoir appliquer cette méthode serait d'effectuer un pré-traitement adapté sur les données afin d'obtenir une matrice carrée. De même, certaines pistes pour adapter l'algorithme qui utilise l'algèbre géométrique aux nuages de points ont été abordées. Contrairement à la méthode précédente, celle-ci peut être utilisée avec un ensemble de vecteurs. Néanmoins les paramètres ne sont pas bien estimés. Cela est notamment dû à un seuil de tolérance (permettant de considérer le nombre de plans adéquat) qui est trop élevé. Des études complémentaires pour d'ajuster ce paramètre sont actuellement en cours.

Dans une deuxième partie, nous avons considéré l'algorithme de Fontijne [FD10] permettant de décomposer les rotations en réflexions. En particulier, nous avons montré comment

la notion de médiatrices généralisées (médiatrices entre deux ensembles de points) [ALSR11, RALSA10] pouvaient permettre de visualiser l'erreur qui s'accumule à chaque étape de cette décomposition. Pour cela, nous avons mis en évidence certaines propriétés complémentaires de ces médiatrices. En particulier, nous avons défini la notion de symétrie d'un pixel par rapport à un ensemble de droites (symétrie généralisée). En remplaçant les points et les médiatrices de Fontijne par respectivement des pixels autour de ces points et des médiatrices généralisées nous pouvons de manière incrémentale reconstruire un ensemble d'axes de réflexions cohérents avec les données. A chaque étape de l'algorithme nous devons calculer l'image d'ensemble de points par la médiatrice généralisée. Cet ensemble de points devient de plus en plus important au fil des différentes étapes. Cela montre bien le problème d'accumulation d'erreurs inhérent à la méthode. Cette étude n'a été réalisée qu'en dimension 2. Des études complémentaires en dimensions supérieures seront menées ultérieurement.

---

## CONCLUSION DE LA PARTIE ROTATIONS

---

Dans cette première partie, nous avons proposé deux algorithmes d'estimation de paramètres de rotations. Le premier utilise le formalisme d'algèbres particulières : les algèbres géométriques. Le second est basé sur une décomposition matricielle : la décomposition de Schur. Enfin, nous avons proposé une décomposition des rotations  $nD$  en rotations isoclines.

Pour mettre en place l'algorithme utilisant l'algèbre géométrique, nous avons commencé par mettre en évidence le fait que les rotations  $nD$  d'un espace euclidien  $E$  pouvaient être décomposées en produits de rotations élémentaires. Ces rotations élémentaires sont de deux types. Elles sont soit une composée de rotations planes de même angle (rotation isocline) soit une composée de rotations planes d'angles différents (rotation générale). La décomposition d'une rotation  $R$  de cette forme peut être mise en parallèle avec une décomposition de l'espace  $E$ . Les sous-espaces  $\mathcal{P}_i$  dans lesquels la restriction de la rotation  $R$  est une rotation élémentaire telle que nous venons de les définir sont appelés sous-espaces isogonaux. Nous avons montré qu'ils étaient de dimensions paires et que leur ensemble formait une somme directe orthogonale qui coïncide avec la somme directe des plans de rotation. Pour un sous-espace isogonal donné, la nature de la rotation élémentaire permet de déterminer si la rotation  $R$  admet un nombre fini (dans le cas de la rotation générale) ou infini (dans le cas de la rotation isocline) de plans de rotation. En effet, nous avons montré que les rotations isoclines admettaient un nombre infini de plans de rotations. Ils sont générés par un vecteur et son image. Ce résultat a été prouvé dans le cas de la dimension 4 par Manning [Man14]. Nous l'avons démontré en utilisant les algèbres géométriques et surtout nous avons étendu et démontré cette propriété à n'importe quelle dimension paire. Cette propriété est très importante car elle nous permet de construire les plans de rotation dans le cas de sous-espaces isogonaux où la restriction de  $R$  est une rotation isocline. Si la restriction de la rotation à un sous-espace isogonal est une rotation générale, nous avons montré que les plans de rotation étaient générés par les vecteurs de la base du sous-espace isogonal associé. Connaissant les plans de rotation, les angles de rotation peuvent être calculés par projection. En effet, l'angle de rotation était le même que celui entre les projections d'un vecteur et son image. Le premier algorithme de décomposition des rotations  $nD$  que nous proposons nécessite la connaissance des vecteurs de la base de l'espace  $E$  et de leurs images respectives (les points étant supposés appariés). Il reconstruit, en utilisant l'algèbre géométrique, les plans de rotations et calcule les angles même si les données de départ ne sont pas exactes (données connues avec une certaine imprécision).

Le second algorithme que nous avons proposé utilise les mêmes données (couples formés par les vecteurs de la base et leurs images, les données pouvant être bruitées). Il se base non plus explicitement sur une décomposition de l'espace en sous-espaces mais sur la décomposition de Schur de la matrice des vecteurs images. Cette décomposition fournit deux matrices. L'une,

notée  $T$  est diagonale par blocs et l'autre, notée  $U$ , est une matrice orthogonale. Les blocs de la diagonale de  $T$  sont des matrices de rotation planes dont nous pouvons extraire par conséquent les angles de rotation. La matrice  $U$  est en fait une matrice de changement de base. Elle est donc composée de vecteurs formant une base orthonormale dans laquelle la matrice de rotation est diagonale par blocs. Ainsi, si l'intersection des colonnes  $i$  et  $j$  avec les lignes  $i$  et  $j$  forme une matrice de rotation d'angle  $\theta_i$  alors les  $i^{\text{ème}}$  et  $j^{\text{ème}}$  colonnes de la matrice  $U$  génèrent le plan de rotation correspondant. Toutes les rotations planes composant la rotation  $nD$  peuvent être identifiées par cette méthode.

Ces deux algorithmes ont été testés de la dimension 2 à la dimension 15 avec des données de départ bruitées. Pour cela, nous avons généré de manière aléatoire des matrices de rotation que nous avons ensuite biaisées (selon une loi uniforme) afin de simuler le bruit. Nous avons appliqué nos deux algorithmes de décomposition aux mêmes données. Pour chacune des rotations et chaque algorithme, nous obtenons des ensembles de plans et d'angles correspondant à la décomposition de rotations  $nD$  en rotations planes. À l'aide de ces ensembles de plans et d'angles nous avons ensuite reconstruit la rotation et calculé les images de vecteurs aléatoires normés. Ces vecteurs ont ensuite été comparés aux vecteurs « théoriques » correspondant à l'image des vecteurs normés par la rotation non bruitée. Cette différence de norme entre les vecteurs « théoriques » et « pratiques » nous a paru pertinente pour juger de nos algorithmes. Parmi ces deux méthodes, il n'y a pas une méthode meilleure que l'autre ; cela dépend de la dimension. En dimension 2, 3 et 4, l'algorithme utilisant les algèbres géométriques fournit des plans et des angles de rotation approchant au mieux ceux de la rotation de départ. En dimension supérieure à 6, la tendance est inversée. En dimension 5, les deux algorithmes sont « équivalents ».

D'autre part, nous proposons, à partir d'une décomposition de la rotation  $nD$  en rotations planes, une méthode pour obtenir une décomposition de la rotation en rotations isoclines. Elles ont la particularité d'admettre une infinité de plans de rotation. Ainsi, si un algorithme peut déterminer ces rotations à partir de points et de leurs images, cette réécriture pourra permettre de déduire les rotations planes (plus précisément, leurs plans et leurs angles).

Dans cette partie, nous avons aussi évalué l'erreur de l'algorithme incrémental de Fontijne [FD10]. Cet algorithme permet de reconstruire les axes de réflexions (médiatrices) qui composent la rotation à partir de points appariés. Il ne peut être utilisé qu'avec des données exactes. Même si l'implémentation de l'algorithme permet de calculer de manière exacte, si les données de départ sont bruitées, à chaque étape les erreurs se cumulent. Pour mettre cela en évidence, nous avons appliqué son algorithme à des données bruitées. Cela revient à considérer non plus un point mais une surface autour de ce point. Ainsi, nous reconstruisons la rotation, non plus à l'aide des médiatrices usuelles mais des médiatrices généralisées qui regroupent l'ensemble de toutes les médiatrices entre tous les couples de points qui composent les surfaces considérées.

Ces travaux ont fait l'objet de plusieurs publications : deux publications dans des conférences internationales (Discrete Geometry for Computer Imagery - DGCI & Computational modeling of objects presented in Images - CompImage) [RLSR<sup>+</sup>11, RFC10] (la première publication porte sur les médiatrices généralisées et leurs propriétés ainsi que l'application aux données bruitées de la méthode de Fontijne [FD10] et la seconde sur l'estimation des paramètres des rotations  $nD$ ), une publication en revue (Graphical Models) [RFALS11] concernant l'estimation des paramètres des rotations  $nD$ . En complément, un article pour une conférence nationale (Association Française d'Informatique Graphique - AFIG) [RRLSA10] concernant les médiatrices généralisées a aussi été publié.

Une des perspectives de ces travaux serait de se placer dans un cadre affine afin d'estimer les paramètres des rotations non centrées en l'origine. De plus, dans un cadre expérimental classique, nous disposons souvent d'un ensemble de vecteurs. Une estimation des paramètres des rotations  $nD$  à partir de ces derniers pourra aussi être envisagée. Une adaptation de ces algorithmes pourrait aussi être effectuée dans le cas de données discrètes. Elle pourrait utiliser les travaux de Thibault [Thi10], qui a proposé une méthode de décomposition des rotations 3D discrètes. Sa méthode permet notamment de retrouver le centre de rotation et l'axe de réflexion à partir de points discrets appariés.



## **Deuxième partie**

### **Arithmétisation**



---

# INTRODUCTION

---

Dans cette deuxième partie de mémoire, nous intéressons au domaine discret. L'estimation de paramètres des transformations en discret peut se faire par la définition et la reconnaissance de primitives discrètes. En particulier, nous nous sommes intéressés au cercle discret qui correspond à un premier pas pour l'estimation des paramètres de rotations.

Le processus de discrétisation des courbes a été un sujet d'étude très important dans les années 1960-1970 [Bre65, Bre77]. À la fin des années 80, Reveillès [Rev92a, Rev91, RR96] a proposé une nouvelle définition des droites discrètes suscitant un regain d'intérêt pour la géométrie discrète et la discrétisation de courbes. Cette droite se base sur des considérations d'analyse nonstandard (ANS). Cette théorie [Nel77, Rob74] permet de travailler de manière explicite avec des nombres infiniment grands et infiniment petits. Si  $\omega$  désigne un nombre infiniment grand, on peut établir une équivalence entre l'ensemble des réels limités (réels non infiniment grands) et un sous-ensemble noté  $HR_\omega$  des nombres entiers. Cet ensemble, muni de certaines opérations, est appelé *droite de Harthong-Reeb* [Har89, Die92, HR89, Har83]. L'idée générale est de considérer l'ensemble  $\mathbb{R}$  comme  $\mathbb{Z}$  vu de loin.

De nombreuses courbes sont définies comme une solution d'une équation différentielle. D'une manière numérique, ces solutions peuvent être approchées par des schémas d'intégration de type Euler ou Heun. Ces schémas ont un pas d'intégration. Plus ce pas d'intégration tend vers 0, plus la courbe obtenue est proche de la courbe exacte. Dans notre contexte d'analyse nonstandard, il paraît donc intéressant de considérer ce pas d'intégration comme un nombre infiniment petit. Ainsi, par un processus d'arithmétisation (passage du schéma des réels dans la droite de Harthong-Reeb), il est possible d'obtenir une courbe discrète qui est une représentation exacte de la courbe continue.

Dans cette partie, nous donnons suite à différents travaux récents concernant le processus d'arithmétisation, et notamment ceux d'Agathe Chollet *et al.* [FLSW<sup>+</sup>08, CWF<sup>+</sup>09a]. Ces travaux sont aussi une extension des travaux de Holin concernant les cercles discrets obtenus par le processus d'arithmétisation [Hol91, Hol89, Hol96]. Dans un premier chapitre, nous présentons ces différents travaux et leur contexte. Ensuite, nous proposons une première extension qui consiste à remplacer le schéma d'Euler d'ordre<sup>23</sup> 1 par le schéma de Heun d'ordre 2. Nous présentons une condition permettant d'assurer la connexité des cercles générés (cela en vue de faciliter une reconnaissance de cercles par exemple). De plus, nous étudions l'ordre du schéma arithmétisé permettant d'évaluer l'erreur. De manière naturelle, le schéma arithmétisé, comme son analogue discret est d'ordre 2. Cependant, nous montrons que la condition suffisante de

---

23. En analyse numérique, les schémas d'intégration [QSS00] ont un ordre d'approximation. Il donne une idée de la qualité de la solution calculée.

connexité que nous avons démontrée et un ordre d'arithmétisation de deux ne sont pas compatibles. Cela oblige à faire un "choix" entre la connexité et une meilleure précision.

Nous présentons également une deuxième extension des travaux précédents. Il s'agit d'appliquer le processus d'arithmétisation par le schéma d'Euler aux ellipses. Plutôt que de considérer des entiers nous considérons des suites d'entiers appelées  $\Omega$ -entiers [CWF<sup>+</sup>09b]. Ces travaux sur les ellipses, fruit d'une collaboration avec Agathe Chollet, ont été publiés dans [CWA<sup>+</sup>10]. Quelques perspectives et pistes prometteuses sont finalement proposées.

---

# CHAPITRE 4

---

## TRAVAUX PRÉCÉDENTS

---

Le développement de l'informatique graphique amène à manipuler des analogues d'objets continus dans des espaces discrets. Ce passage pose problème car il ne préserve pas la plupart des propriétés géométriques vraies dans le domaine continu. Par exemple, deux droites continues non parallèles du plan ont un point d'intersection alors que dans le domaine discret, les diagonales du damier<sup>1</sup> se croisent sans aucun point d'intersection. L'idée de Harthong et de Reeb, qui est d'ailleurs le point de départ des travaux de Reveillès sur les droites discrètes, est de construire un espace à la fois continu et discret afin d'établir un lien entre ces deux types de géométrie. L'idée de base pour la construction de cet espace est de considérer  $\mathbb{R}$  comme  $\mathbb{Z}$  vu de loin. Pour la mise en oeuvre, nous utilisons des éléments d'analyse nonstandard.

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode d'arithmétisation (discrétisation) par des schémas numériques [Cho10] et son application au cas particulier du cercle (partie 3) [RWF<sup>+</sup>09]. Cette méthode est fondée sur l'analyse nonstandard dont nous donnons quelques éléments dans la partie 1. Pour plus de détails sur l'analyse nonstandard, le lecteur pourra consulter [Die92, Hol91, Rev92b, Cho10].

Dans tout ce chapitre et le suivant, sauf mention contraire, les entiers sont notés en majuscules, les réels en minuscules et les vecteurs en gras. Sauf mention contraire, nous entendons par *connexité* la 8-connexité. Les pixels sont supposés de taille 1. Deux pixels  $P_1 = (X_i, Y_i)$  et  $P_2 = (X_j, Y_j)$  sont 8-connexes si  $|X_i - X_j| \leq 1$  et  $|Y_i - Y_j| \leq 1$ . La figure 4 représente les pixels 8-connexes au pixel  $P$ . Chacun d'entre eux est à une distance de 1 horizontalement et/ou verticalement du pixel  $P$ .

### 1 Éléments d'Analyse Nonstandard (ANS)

L'analyse nonstandard permet de manipuler de manière explicite des nombres qui sont infiniment grands ou infiniment petits ce que ne permet pas l'analyse classique. Cela demande d'utiliser une axiomatique particulière différente de celle de l'axiomatique des mathématiques

---

1. plateau de jeux de dames traditionnel, c'est-à-dire carré avec un nombre pair de cases par coté.

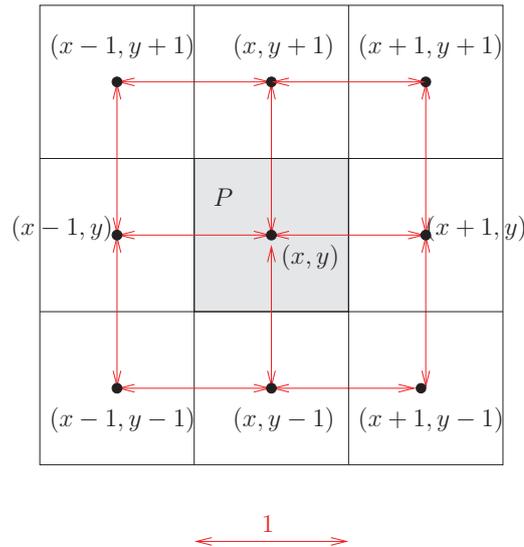


FIGURE 4.1 – Illustration graphique de la 8-connectivité. Les pixels blancs sont les voisins 8-connectés du pixel gris  $P$ . Ils sont à une distance horizontale et/ou verticale de 1 (matérialisée par les flèches rouges) du pixel  $P$ .

classiques. Celle généralement utilisée est celle la théorie IST (Internal Set Theory) introduite par Nelson [Nel77]. Néanmoins, pour nos travaux, il est possible d'utiliser une axiomatique simplifiée, minimale dans l'esprit de certains travaux de Nelson et Lutz [Nel87, Lut92]. De plus, nous présentons uniquement les notions dont nous avons besoin dans la suite de nos travaux. Pour plus de détails le lecteur pourra consulter [CWF<sup>+</sup>09a, CWF<sup>+</sup>09b]. Ainsi, nous donnons seulement une axiomatique sur les entiers car eux seuls sont nécessaires pour la définition de la droite de Harthong-Reeb. On étend la théorie classique des entiers avec les axiomes suivants :

- \* ANS1 : 1 est limité ;
- \* ANS2 : la somme, le produit et la différence de deux limités sont limités ;
- \* ANS3 : si  $x$  est limité et tel que  $|y| \leq |x|$  alors  $y$  l'est aussi ;
- \* ANS4 : il existe des éléments de  $\mathbb{Z}$  qui ne sont pas limités.

Pour pouvoir raisonner par récurrence, dans cette théorie, il est encore nécessaire d'ajouter un cinquième axiome qui est un principe de récurrence. Le lecteur intéressé pourra consulter [Cho10] ; nous n'en avons pas besoin dans le cas des travaux présentés ici.

Cette nouvelle théorie est une extension de la théorie classique des entiers : tout ce qui est vrai dans la théorie classique reste vrai. On note  $\mathbb{Z}$  les entiers de cette théorie et de la même façon, on notera  $\mathbb{N}$  les entiers positifs.

L'introduction du prédicat « limité » permet d'obtenir une échelle de grandeur sur les nombres entiers : les entiers limités et ceux qui ne le sont pas. Ces derniers sont dits *infiniment grands*. Cette échelle de grandeur se propage aux nombres réels. En effet, on définit l'ensemble des réels limités comme :

**Définition 10** ( $\mathbb{R}_{lim}$ ). *L'ensemble des réels limités  $\mathbb{R}_{lim}$  est défini par :*

$$\mathbb{R}_{lim} = \{x \in \mathbb{R}, \exists n \text{ limité} \in \mathbb{N}, |x| < n\}.$$

Nous pouvons maintenant présenter la construction d'un modèle discret du continu proposée par Harthong et Reeb[Har83, Har89, HR89]. L'intuition de cette construction est de considérer  $\mathbb{R}$  comme  $\mathbb{Z}$  vu de loin. La représentation mathématique de cette intuition est subordonnée au choix d'un entier  $\omega$  infiniment grand qui nous permet de définir une échelle de grandeur sur les nombres. Ce choix est arbitraire. Nous fixons, à partir de maintenant  $\omega \in \mathbb{N}$  un nombre entier infiniment grand et nous effectuons un *changement d'échelle* (fortement contractant) sur  $\mathbb{Z}$  pour que  $\omega$  en soit l'unité comme illustré par le schéma 4.2.

La droite de Harthong-Reeb est notée  $HR_\omega$  et elle est définie de manière formelle par :

$$HR_\omega = \{X \in \mathbb{Z}, \exists n \text{ limité} \in \mathbb{N}, |X| \leq n\omega\}.$$

Sur cet ensemble, on définit des relations d'égalité<sup>2</sup>, d'ordre<sup>3</sup> et une structure algébrique (où l'addition, la multiplication, la division et l'opposé sont respectivement notés  $+_\omega, \times_\omega, /_\omega$  et  $-_\omega$ ). Il s'agit d'un système numérique isomorphe à l'ensemble des réels limités, c'est-à-dire non infiniment grands,  $\mathbb{R}_{lim}$  [Cho10].

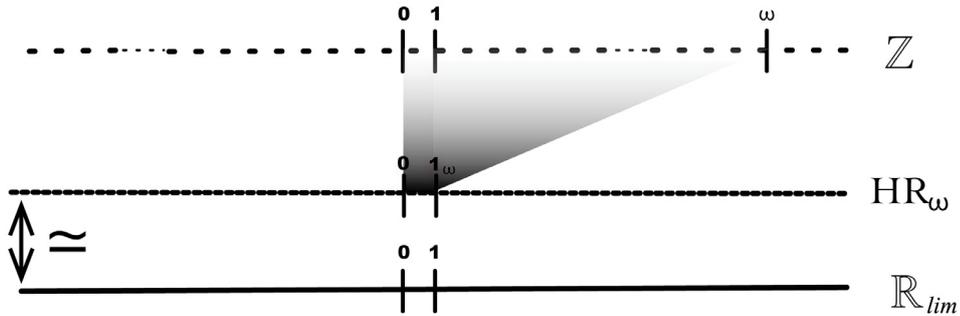


FIGURE 4.2 – Changement d'échelle : du discret au continu. Le  $\omega$  des entiers arbitrairement fixé devient l'unité de la droite de Harthong-Reeb  $HR_\omega$ . Cet ensemble est isomorphe à l'ensemble des réels.

Le passage des entiers aux réels et inversement se fait au moyen des deux applications suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_\omega : HR_\omega &\rightarrow \mathbb{R}_{lim} \\ X &\mapsto \frac{X}{\omega} \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \psi_\omega : \mathbb{R}_{lim} &\rightarrow HR_\omega \\ x &\mapsto \lfloor \omega x \rfloor \end{aligned} \tag{4.2}$$

où  $\lfloor a \rfloor$  désigne la partie entière de  $a$  par défaut<sup>4</sup>.

2. Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $HR_\omega$  sont égaux à l'échelle  $\omega$  (relation notée  $=_\omega$ ) si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ limité} \Rightarrow n|x - y| \leq \omega.$$

3. Ces relations sont dites *externes* au sens où elles ne font pas intervenir le prédicat « limité ».

4. La partie entière par défaut d'un nombre réel  $a$  est l'entier qui lui est immédiatement inférieur ou égal par opposition à la partie entière par excès notée  $\lceil a \rceil$  (plus petit entier plus grand ou égal).

Par exemple, le nombre 3.14 appartient à  $\mathbb{R}$  et  $\lfloor 3.14\omega \rfloor$  appartient à  $\text{HR}_\omega$ . De même,  $\lfloor \pi\omega \rfloor$  appartient à  $\text{HR}_\omega$ .

Cet isomorphisme est schématiquement représenté sur la figure 4.3. Pour plus de détails sur l'isomorphisme, le lecteur pourra consulter [Cho10]. Les structures algébriques de ces deux ensembles sont en correspondance. La droite de Harthong-Reeb est donc un système discret/continu au sens où elle est composée uniquement d'entiers et elle est telle que tout nombre réel a son équivalent dans  $\text{HR}_\omega$ .

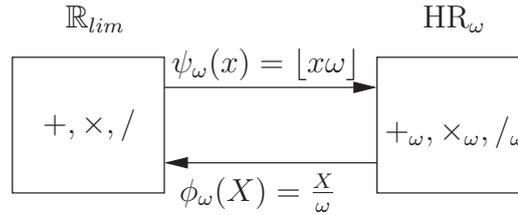


FIGURE 4.3 – Isomorphisme entre l'ensemble  $\text{HR}_\omega$  et  $\mathbb{R}_{lim}$ .

Nous définissons maintenant quelques notions utiles dans la suite.

**Définition 11** (Partie entière d'un vecteur). Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . La partie entière de  $\mathbf{x}$  est définie par  $\lfloor \mathbf{x} \rfloor = (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor) \in \mathbb{Z}^n$ .

Soit  $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$  la partie fractionnaire de  $x$ . Nous avons la notation équivalente dans le cas d'un vecteur  $\{\mathbf{x}\} = (x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, \dots, x_n - \lfloor x_n \rfloor) \in [0, 1]^n$  d'où  $\|\{\mathbf{x}\}\|_\infty < 1$ .

L'arithmétisation d'un objet continu (appartenant à  $\mathbb{R}$  par exemple) est un procédé permettant de lui trouver un équivalent discret (appartenant à  $\text{HR}_\omega$ ).

**Définition 12** (Arithmétisé direct d'une fonction en dimension  $n$ ). Si

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \mathbf{x}) \mapsto f(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}))$$

alors son arithmétisé direct est :

$$F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n \\ (T, \mathbf{X}) \mapsto F(T, \mathbf{X}) = \lfloor \omega f\left(\frac{T}{\omega}, \frac{\mathbf{X}}{\omega}\right) \rfloor$$

avec  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  et  $F(T, \mathbf{X}) = (\lfloor \omega f_1(\frac{T}{\omega}, \frac{X_1}{\omega}, \dots, \frac{X_n}{\omega}) \rfloor, \dots, \lfloor \omega f_n(\frac{T}{\omega}, \frac{X_1}{\omega}, \dots, \frac{X_n}{\omega}) \rfloor)$ .

Pour ne pas « alourdir » les formules nous posons la notation suivante :

**Notation 1.**  $A \div B = \lfloor \frac{A}{B} \rfloor$ .

Jusqu'ici, nous avons utilisé uniquement des entiers. Dans la partie suivante, nous allons introduire des suites d'entiers appelées  $\Omega$ -entiers. Ces suites nous permettent, dans un premier temps, de définir la droite de Harthong-Reeb sur des suites d'entiers (partie 2.2). Dans un deuxième temps, nous appliquons dans la partie 2 notre méthode d'arithmétisation au cas des ellipses à ces suites afin d'obtenir des ellipses à différentes échelles.

## 2 Les $\Omega$ -entiers et la droite d'Harthong-Reeb associée

Cette partie présente rapidement les bases de la théorie nonstandard de Laugwitz et Schmieden [Lau83, LS58]. Nous résumons ici les travaux de Chollet [Cho10]. Dans la partie 2, nous implantons cette théorie en utilisant le langage OCaml [oca] que nous utilisons pour dessiner les ellipses.

La théorie de Laugwitz et Schmieden permet de définir un modèle nonstandard de l'ensemble des entiers et peut être utilisée pour construire un modèle discret des réels. Dans [Cho10], Chollet considère leur point de vue comme base de définition du système de la droite d'Harthong-Reeb que nous venons de voir dans la section précédente. Le principal intérêt de ce modèle nonstandard est qu'il est constructif [Bri99]. Une implantation dans un langage de programmation est donc possible et elle est réalisée. Dans cette partie, nous introduisons uniquement les notions de base pour comprendre ce qui suit. Pour plus de détails sur cette approche, le lecteur pourra consulter [CWF<sup>+</sup>09b].

### 2.1 Les $\Omega$ -entiers

Pour étendre la théorie des rationnels, Laugwitz et Schmieden ont ajouté un nouveau symbole,  $\Omega$ , à ceux déjà existants (0, 2, 3, 9, +, /, ...). Nous considérons la « version » sur les entiers de Laugwitz et Schmieden.

Chaque élément  $a$  de la théorie peut être vu comme une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , appelée  $\Omega$ -entier. Afin de comparer les  $\Omega$ -entiers, nous posons la relation d'équivalence :

**Définition 13.** Soient  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux  $\Omega$ -entiers,  $a$  et  $b$  sont égaux s'il existe un entier limité  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > N$ ,  $a_n = b_n$ .

En d'autres termes, deux  $\Omega$ -entiers sont égaux si, à partir d'un rang donné, les suites sont égales. Par exemple, les  $\Omega$ -entiers  $a = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6...)$  et  $b = (3, 3, 3, 3, 4, 5, 6...)$  sont égaux.

L'ensemble des  $\Omega$ -entiers est noté  $\mathbb{Z}_\Omega$ . Il est muni des opérations usuelles :

**Définition 14.** Soient  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux  $\Omega$ -entiers, les opérations sur les  $\Omega$ -entiers sont définies de la manière suivante :

- $a + b =_{def} (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;
- $-a =_{def} (-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;
- $a \times b =_{def} (a_n \times b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ;
- $a > b =_{def} [(\exists N \forall n > N) a_n > b_n]$  ;
- $a \geq b =_{def} [(\exists N \forall n > N) a_n \geq b_n]$  ;
- $|a| =_{def} (|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Nous distinguons deux classes d'éléments :

- la classe des éléments *standard* qui sont les éléments  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $\exists p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \alpha_n = p$  (par exemple :  $(2)_{n \in \mathbb{N}}$ ) ;
- la classe des éléments *nonstandard* qui sont les autres éléments de  $\mathbb{Z}_\Omega$  (par exemple :  $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

Dans la suite, nous appelons  $\Omega$ -rationnels toute suite de rationnels. Cet ensemble est noté  $\mathbb{Q}_\Omega$ . L'addition et le produit de deux  $\Omega$ -rationnels sont définis terme à terme ; il en est de même pour la valeur absolue. Les opérations de comparaison sont elles aussi définies terme à terme mais à partir d'un certain rang.

Par exemple, si  $(a)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b)_{n \in \mathbb{N}}$  sont deux  $\Omega$ -rationnels alors  $a + b =_{def} (a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a \times b =_{def} (a_n \times b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $a > b =_{def} [(\exists N \forall n > N) a_n > b_n]$  et  $|a| =_{def} (|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ . L'ensemble des  $\Omega$ -rationnels limités est noté  $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$ . Il est défini par :

$$\mathbb{Q}_\Omega^{lim} = \{x \in \mathbb{Q}_\Omega, \exists n \text{ limité} \in \mathbb{N}, |x| < n\}.$$

L'ensemble des  $\Omega$ -rationnels est isomorphe à  $\mathbb{R}_{lim}$ . Parmi les éléments nonstandard, nous nous intéressons particulièrement aux *infiniment grands* qui sont les suites de la forme  $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tel que  $lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$  (par exemple :  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ ).

## 2.2 Droite de Harthong-Reeb basée sur les $\Omega$ -entiers

Nous avons vu dans la partie précédente que la droite de Harthong-Reeb est obtenue après un changement d'échelle fortement contractant sur les entiers. Nous considérons une nouvelle unité qui est un entier infiniment grand  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (qui peut être  $\Omega$  lui-même). De manière formelle, nous définissons une "nouvelle" droite de Harthong-Reeb  $HR_\omega^{om}$ , définie sur les  $\Omega$ -entiers comme suit :

**Définition 15.** *Considérons l'ensemble :*

$$HR_\omega^{om} = \{x \in \mathbb{Z}_\Omega, \exists p \text{ limité} \in \mathbb{N}, |x| \leq p\omega\}$$

et les relations, opérations et constantes suivantes : pour tout  $(x, y) \in (HR_\omega^{om})^2$ , nous posons :

- $(x =_\omega y) =_{def} (\forall p \text{ limité} \in \mathbb{N}) (p|x - y| \leq \omega)$  ;
- $(x >_\omega y) =_{def} (\exists p \text{ limité} \in \mathbb{N}) (p(x - y) \geq \omega)$  ;
- $(x \neq_\omega y) =_{def} (x >_\omega y) \vee (x <_\omega y)$  ;
- $(x \leq_\omega y) =_{def} (\forall z \in HR_\omega^{om}) (z <_\omega x \Rightarrow z <_\omega y)$  ;
- $(x +_\omega y) =_{def} (x + y)$  et  $0_\omega =_{def} 0$  et  $-_\omega x =_{def} -x$  ;
- $(x \times_\omega y) =_{def} ((x \times y) \div \omega)$  et  $1_\omega =_{def} \omega$  et  $x^{(-1)_\omega} =_{def} (\omega^2 \div x)$  pour  $x \neq_\omega 0$ .

La droite de Harthong-Reeb basée sur les  $\Omega$ -entiers est donc un système numérique  $(HR_\omega^{om}, =_\omega, \leq_\omega, +_\omega, \times_\omega)$ .

La différence entre ces deux versions de la droite d'Harthong-Reeb est que cette dernière est représentable sur les ordinateurs. Dans sa thèse [Cho10], Chollet explique plus en détails les différences entre ces deux modèles.

Donnons maintenant quelques exemples. Considérons que l'unité est donnée par la suite  $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dans le système  $HR_\omega$ , tout élément  $a$  de  $\mathbb{Z}$  est représenté par la suite notée  $a_\omega = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par exemple, le nombre  $2_\omega$  est représenté par la suite  $(0, 2, 4, 6, \dots) = (2n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Ainsi, l'ensemble  $HR_\omega^{om}$  est défini comme l'ensemble des  $\Omega$ -entiers qui sont limités à l'échelle  $\omega$ . Les opérations que nous venons de définir peuvent être déclinées au niveau de chaque terme de la suite. Par exemple :

$$x =_\omega y \iff \forall p \in \mathbb{N}, \exists M_p \in \mathbb{N}, \forall n \geq M_p \quad p|x_n - y_n| \leq \omega_n.$$

Nous pouvons considérer les deux applications isomorphes permettant de passer de l'ensemble des  $\Omega$ -rationnels limités  $\mathbb{Q}_\Omega^{lim}$  à la droite de Harthong-Reeb  $HR_\omega^{om}$  et inversement suivantes :

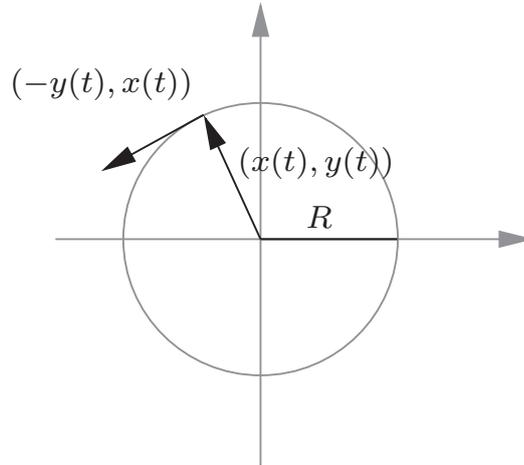


FIGURE 4.4 – Le vecteur tangent en tout point du cercle est orthogonal au rayon.

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\omega : \text{HR}_\omega^{om} \rightarrow \mathbb{Q}_\Omega^{lim} \\ x \mapsto x/\omega \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \psi_\omega : \mathbb{Q}_\Omega^{lim} \rightarrow \text{HR}_\omega^{om} \\ u \mapsto \lfloor \omega u \rfloor \end{array} \right\}.$$

Dans la partie suivante, nous rappelons le processus d'arithmétisation basé sur le schéma d'Euler [Dem06]. Ce processus utilise uniquement les entiers et la droite d'Harthong-Reeb  $\text{HR}_\omega$  sur les entiers telle qu'elle est définie dans la partie 1. Dans le Chapitre 5, nous appliquons cette méthode d'arithmétisation au cas des  $\Omega$ -entiers.

### 3 Méthode d'arithmétisation par le schéma d'Euler

Dans cette partie, nous rappelons la méthode d'arithmétisation exposée dans [CWF<sup>+</sup>09a] en l'adaptant aux équations différentielles dont les cercles sont des solutions. La méthode d'arithmétisation dans le cas d'une fonction  $f$  continue et dérivable est donnée en Annexe D.

Dans le plan euclidien, le cercle  $C(0, R)$  centré en 0 et de rayon  $R \in \mathbb{R}_+^*$  est décrit comme la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{cases} (x(0), y(0)) = (0, R) \\ (x'(t), y'(t)) = (-y(t), x(t)). \end{cases} \quad (4.3)$$

qui exprime le fait que le vecteur tangent est orthogonal au rayon comme montré sur le schéma 4.4.

Cette équation différentielle peut être résolue numériquement par différentes méthodes. En utilisant la méthode d'Euler [Dem06], nous obtenons le schéma d'Euler suivant qui calcule une solution numérique approchée de  $C(0, R)$  quand le pas  $h \in \mathbb{R}_+$  tend vers 0 :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, R) \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + (-y_n h, x_n h). \end{cases} \quad (4.4)$$

Cette méthode est itérative. Elle détermine des approximations de la fonction qui sont d'autant plus précises que le pas  $h$  est petit. Dans notre contexte d'analyse nonstandard, nous pouvons donc considérer un nombre  $h$  infiniment petit et donc que l'approximation est proche

de l'objet à arithmétiser pour un nombre standard d'itérations. Le principe de la méthode d'arithmétisation [Hol91, CWF<sup>+</sup>09a] est, par conséquent, de transformer un schéma numérique exprimé dans  $\mathbb{R}$  (par exemple (4.4)) en un schéma discret (à variables entières). Ce schéma numérique discret génère une courbe planaire  $C_d(0, R)$  exprimé dans  $\text{HR}_\omega$ . Cette courbe est l'analogue discret du cercle  $C(0, R)$ .

Nous nous intéressons ici aux propriétés de la courbe discrète  $C_d(0, R)$ . Pour cela, nous commençons par décrire de manière plus précise l'arithmétisation du schéma d'Euler (4.4).

Afin de ne pas travailler sur des cas dégénérés (cercle de rayon infini), nous supposons que le rayon  $R$  du cercle est limité ( $R \neq +\infty$ ) et non infinitésimal ( $R \neq 0$ ).

Nous choisissons deux entiers naturels  $\omega$  et  $\beta$  tels que  $\omega$ ,  $\beta$  et  $\omega/\beta$  soient infiniment grands. Soit  $h = \frac{1}{\beta}$  ( $h \simeq 0$ ), le pas de discrétisation du schéma numérique. En utilisant l'application  $\psi_\omega$ , le schéma d'Euler est directement discrétisé. Nous obtenons donc l'arithmétisation du schéma d'Euler (4.4) à l'échelle  $\omega$ , définie par le schéma numérique 1 :

---

**Schéma numérique 1.** *Arithmétisation du schéma d'Euler- Interprétation à l'échelle  $\omega$*

---

$$\begin{cases} (X_0, Y_0) &= (0, \lfloor \omega R \rfloor) \\ (X_{n+1}, Y_{n+1}) &= (X_n, Y_n) + (-Y_n \div \beta, X_n \div \beta) \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  sont des variables à valeurs entières. Les points  $(X_i, Y_i)$  définissent une courbe discrète  $C_d(0, R)$ . La courbe obtenue (en « allumant » chaque pixel de la forme  $(X_n, Y_n)$ ) n'est pas connexe. Par exemple, considérons les abscisses  $X_0$  et  $X_1$  des deux premiers points, nous avons  $|X_1 - X_0| = |X_0 - \lfloor \omega R \rfloor \div \beta| = \lfloor \omega R \rfloor \div \beta$ . Ce nombre est un infiniment grand de l'ordre de  $\frac{\omega}{\beta} R$ . Ce résultat montre que deux points consécutifs ne sont pas placés l'un à coté de l'autre car la distance qui les sépare est supérieure à 1. Il y a donc un « trou » entre deux points. Pour bien comprendre cela, nous allons nous abstraire du contexte nonstandard dans lequel nous nous étions placés et revenir dans les entiers usuels. Dans ce cas, nous voyons que le schéma numérique 1 est paramétrisé par deux entiers  $\beta$  et  $\omega$ . Nous obtenons donc des familles de cercles paramétrisées par ces entiers. Chaque cercle est une représentation de la solution du schéma d'Euler. Ainsi, dans le cadre de nos expérimentations nous avons considéré des arcs de cercles interprétés à l'échelle  $\omega$  avec des valeurs de  $\beta$  et  $\omega$  limitées parce que dans ce cadre là il n'est pas possible de construire des nombres infiniment grands<sup>5</sup>. En effet, le nombre  $\omega$  n'existe que de manière axiomatique (son existence est assurée par l'axiome ANS4). Ainsi, ce nombre ne peut être représenté en machine que s'il est choisi soit comme un nombre entier assez grand (cela revient à se placer dans l'approximation et non la représentation exacte), soit comme un symbole formel vérifiant certaines propriétés (dans ce cas là, la représentation est exacte mais les calculs dépendent de  $\omega$  qui n'est pas une entité numérique gérée par l'ordinateur).

Le processus d'arithmétisation est toujours applicable avec des nombres qui ne sont pas infiniment grand mais le résultat est bien un cercle discret qui est une approximation du cercle continu. Cela justifie ainsi les valeurs de  $\beta$  et  $\omega$ , respectivement égales à 10 et 20, utilisées, par exemple, dans le cas de la figure 4.5. Le schéma numérique 1 (comme les suivants) décrit un algorithme qui est défini pour toutes valeurs entières de  $\beta$  et  $\omega$  et pas seulement pour des valeurs nonstandard. Ainsi, malgré le contexte nonstandard dans lequel nous nous sommes placés, la méthode d'arithmétisation définit des cercles paramétrisés par  $\omega$  et  $\beta$ . Ces cercles convergent vers le cercle continu  $C(0, R)$  quand les paramètres  $\beta$  et  $\omega$  deviennent grands.

---

5. c'est ce que nous tenterons de faire avec les  $\Omega$ -entiers dans la suite.

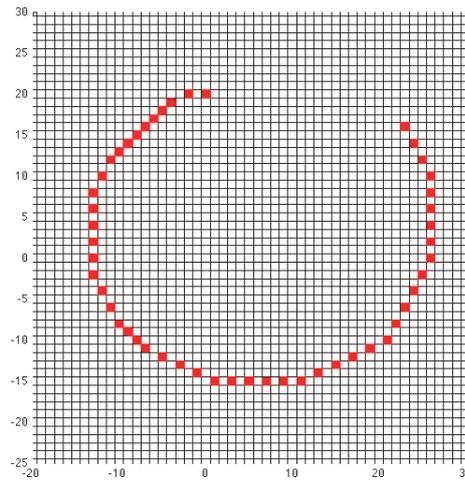


FIGURE 4.5 – Arc de cercle dessiné à l'échelle  $\omega$  : les points consécutifs ne sont pas, en général, connexes. Les paramètres sont  $R = 1$ ,  $\omega = 20$  et  $\beta = 10$ . Ils peuvent être considérés indépendamment du contexte nonstandard et être vus comme des paramètres des familles de cercles.

Plutôt que de tracer des segments entre les points afin d'assurer la connexité ce qui ne nous permettrait plus d'avoir des cercles dont l'ensemble converge vers le cercle continu, l'idée pour obtenir une courbe connexe, est d'effectuer un autre changement d'échelle pour passer de l'échelle  $\omega$  à une échelle intermédiaire  $\alpha = \frac{\omega}{\beta}$ . Pour cela, nous choisissons  $\omega$  comme un multiple du pas d'intégration  $\beta$  :  $\omega = \alpha\beta$  avec  $\alpha \simeq +\infty$ . Le changement d'échelle est donné par la composition :

$$\psi_\alpha \circ \varphi_\omega : X \mapsto \lfloor \alpha \frac{X}{\omega} \rfloor = X \div \beta.$$

Un élément  $X$  de  $\text{HR}_\omega$  s'écrit alors :

$$X = \widetilde{X}\beta + \widehat{X} \text{ pour tout entier } X \in \text{HR}_\omega$$

où  $\widetilde{X} = X \div \beta$  est un élément de  $\text{HR}_\alpha$  et  $\widehat{X} = X \bmod \beta$  est un entier compris entre 0 et  $\beta - 1$ . Par les propriétés de la division euclidienne, cette décomposition est unique. L'entier  $\widetilde{X} \in \text{HR}_\alpha$  est interprété comme le résultat du changement d'échelle de  $X$  (c'est-à-dire  $X$  vu à l'échelle  $\alpha$ ). Avec ces notations, nous pouvons réécrire le schéma (4.5) pour obtenir l'arithmétisation du schéma d'Euler (4.4) à l'échelle de tracé  $\alpha$  définie par le schéma numérique 2 :

---

**Schéma numérique 2.** Arithmétisation du schéma d'Euler- Interprétation à l'échelle  $\alpha$

---

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0) = (0, \lfloor \omega R \rfloor \div \beta) \\ (\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0) = (0, \lfloor \omega R \rfloor \bmod \beta) \\ (F_n^1, F_n^2) = ((-\widetilde{Y}_n\beta - \widehat{Y}_n) \div \beta, (\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n) \div \beta) \\ (\widetilde{X}_{n+1}, \widetilde{Y}_{n+1}) = (\widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + F_n^1) \div \beta, \widetilde{Y}_n + (\widehat{Y}_n + F_n^2) \div \beta) \\ (\widehat{X}_{n+1}, \widehat{Y}_{n+1}) = ((\widehat{X}_n + F_n^1) \bmod \beta, (\widehat{Y}_n + F_n^2) \bmod \beta) \end{array} \right. \quad (4.6)$$

---

Les variables qui servent aux tracés sont les variables  $\widetilde{X}_i$  et  $\widetilde{Y}_i$ . Les autres servent d'auxiliaires de calculs.

Les points  $(\widetilde{X}_i, \widetilde{Y}_i)$  définissent un cercle discret qui dépend des paramètres  $R$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Ce cercle est noté  $C_d^\alpha(0, R)$ . De manière symétrique, nous pouvons aussi considérer

l'arithmétisation du schéma d'Euler (4.4) à l'échelle de tracé  $\beta$ , qui est l'analogue du schéma 2. Dans ce cas, le changement d'échelle est donné par la composition :

$$\psi_\beta \circ \phi_\omega : X \mapsto \lfloor \beta \frac{X}{\omega} \rfloor = X \div \alpha.$$

Comme précédemment, nous avons la décomposition unique de tout élément  $X$  de  $\text{HR}_\omega$  donnée par :

$$X = \widetilde{X}\alpha + \widehat{X} \text{ pour tout entier } X \in \text{HR}_\omega$$

où  $\widetilde{X} = X \div \alpha$  appartient à  $\text{HR}_\beta$  et  $\widehat{X} = X \bmod \alpha$  est un entier compris entre 0 et  $\alpha - 1$ . L'entier  $\widetilde{X} \in \text{HR}_\beta$  est interprété comme le résultat du changement d'échelle de  $X$ . Nous obtenons ainsi deux versions arithmétisées du schéma d'Euler. Ce deuxième schéma est donné par le schéma numérique 3 :

---

**Schéma numérique 3.** Arithmétisation du schéma d'Euler- Interprétation à l'échelle  $\beta$ .

---

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0) = (0, \lfloor \omega R \rfloor \div \alpha) \\ (\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0) = (0, \lfloor \omega R \rfloor \bmod \alpha) \\ (F_n^1, F_n^2) = ((-\widetilde{Y}_n\alpha - \widehat{Y}_n) \div \beta, (\widetilde{X}_n\alpha + \widehat{X}_n) \div \beta) \\ (\widetilde{X}_{n+1}, \widetilde{Y}_{n+1}) = (\widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + F_n^1) \div \alpha, \widetilde{Y}_n + (\widehat{Y}_n + F_n^2) \div \alpha) \\ (\widehat{X}_{n+1}, \widehat{Y}_{n+1}) = ((\widehat{X}_n + F_n^1) \bmod \alpha, (\widehat{Y}_n + F_n^2) \bmod \alpha) \end{array} \right. \quad (4.7)$$

---

Les variables permettant le tracé sont les variables  $\widetilde{X}_i$  et  $\widetilde{Y}_i$ . Nous obtenons un autre cercle discret noté  $C_d^\beta(0, R)$ .

**Remarque 11** (Changement d'échelle). *Le résultat de l'interprétation à l'échelle  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) correspond à des divisions euclidiennes par  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ). Dans le schéma interprété à l'échelle  $\beta$ , certaines divisions euclidiennes se font par rapport à  $\beta$  et d'autres par rapport à  $\alpha$ . On notera que les divisions euclidiennes par  $\alpha$  relèvent du changement d'échelle et que celles par  $\beta$  correspondent aux formules dépendantes du pas d'intégration.*

Dans le cas d'une interprétation à l'échelle  $\alpha$  ou à l'échelle  $\beta$ , les expérimentations numériques montrent que la connexité des courbes discrètes  $C_d^\alpha(0, R)$  et  $C_d^\beta(0, R)$  est directement liée aux valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans le chapitre suivant, nous établissons une relation entre les échelles pour obtenir une connexité.

### 3.1 Connexité des arcs de cercles

Dans cette partie, nous établissons une condition sur les échelles de tracé  $\alpha$  et  $\beta$  pour que les arcs de cercles discrets  $C_d^\alpha(0, R)$  et  $C_d^\beta(0, R)$  que nous avons générés dans la section précédente soient 8-connexes. Ces résultats ont fait l'objet de travaux précédents (stage de Master) publiés dans [RWF<sup>+</sup>09]. Comme nous venons de le mentionner, les résultats ne dépendent pas du contexte nonstandard.

Considérons la solution  $((\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n))_{0 \leq n}$  de l'arithmétisation du schéma d'Euler (4.7) à l'échelle de tracé  $\alpha$  : il s'agit du cercle discret  $C_d^\alpha(0, R)$ . Nous allons maintenant définir la notion d'arc que nous utilisons dans la suite :

**Définition 16** (Arc). *Un arc de  $C_d^\alpha(0, R)$  est une sous-suite de la forme  $((\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n))_{k \leq n \leq k+p}$  pour  $k, p \in \mathbb{N}$  tel que  $p \geq 1$ .*

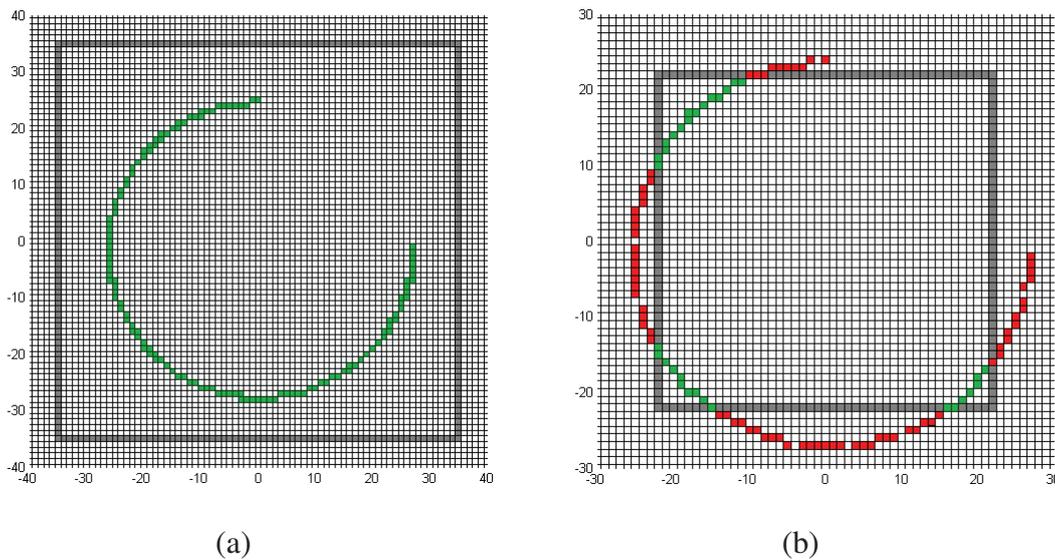


FIGURE 4.6 – Illustration du théorème 10 et du corollaire 1. Deux exemples d'arcs de cercles dessinés à l'échelle  $\alpha$ . (a) : arc 8-connexé avec  $(R, \alpha, \beta) = (1, 25, 35)$  (b) arc non 8-connexé de paramètres  $(R, \alpha, \beta) = (1, 24, 22)$ . Le carré gris représente la région  $R_\beta$ . À l'intérieur les pixels représentés en vert sont liés les uns aux autres par une relation de 8-connexité, ceux de l'extérieur (en rouge) ne le sont pas nécessairement.

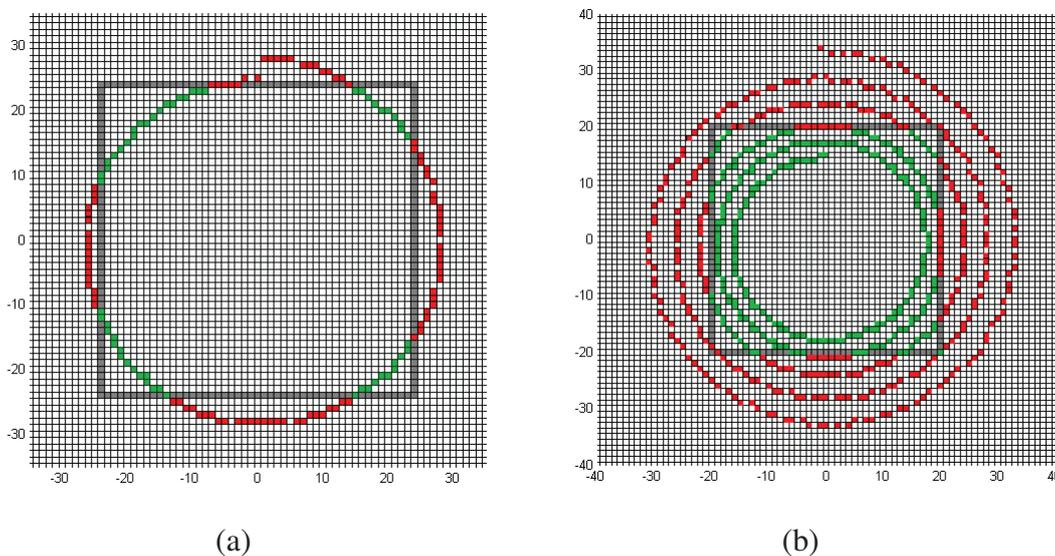


FIGURE 4.7 – (a) Arc de cercle de longueur  $\lfloor 2\pi\beta \rfloor$  avec  $(R, \alpha, \beta) = (1, 25, 24)$  (b) arc de cercle de longueur  $\lfloor 10\pi\beta \rfloor$  avec  $(R, \alpha, \beta) = (1, 15, 20)$ . Le carré gris représente la région  $R_\beta$ . À l'intérieur les pixels représentés en vert sont liés les uns aux autres par une relation de 8-connexité, ceux de l'extérieur (en rouge) ne le sont pas nécessairement.

Pour énoncer le théorème qui suit nous introduisons le carré de  $\mathbb{Z}^2$  centré en 0 de coté de longueur  $2\beta$  :

$$R_\beta = \{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 ; -\beta \leq X < \beta \text{ et } -\beta \leq Y < \beta\}.$$

**Théorème 10.** *Tout arc de  $C_d^\alpha(0, R)$  dans le carré  $R_\beta$  est 8-connexé.*

**Preuve** (du théorème 10). *Nous rappelons ici la preuve issue de [RWF<sup>+</sup>09].*

Soit  $\Gamma = ((\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n))_{k \leq n \leq k+p}$  un arc de  $C_d^\alpha(0, R)$  tel que  $(\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n) \in R_\beta$  pour chaque  $n = k, \dots, k+p$ . Alors,  $\Gamma$  est 8-connexe si et seulement si, pour chaque  $n = k, \dots, k+p-1$ , nous avons :

$$-1 \leq \widetilde{X}_{n+1} - \widetilde{X}_n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n \leq 1. \quad (4.8)$$

La preuve est découpée en deux parties : dans la partie (a) nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Gamma$  soit connexe, dans la partie (b) nous montrons que la condition  $\Gamma \subset R_\beta$  est suffisante.

**(a) Condition équivalente :**

En utilisant les deux schémas (4.5) et (4.6) et les propriétés de la partie entière, les conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & -1 \leq \widetilde{X}_{n+1} - \widetilde{X}_n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n \leq 1 \\ & -1 \leq (\widehat{X}_n + F_n^1) \div \beta \leq 1 \text{ et } -1 \leq (\widehat{Y}_n + F_n^2) \div \beta \leq 1 \\ & -\beta \leq \widehat{X}_n + F_n^1 < 2\beta \text{ et } -\beta \leq \widehat{Y}_n + F_n^2 < 2\beta \\ & -\beta - \widehat{X}_n \leq (-\widetilde{Y}_n\beta - \widehat{Y}_n) \div \beta < 2\beta - \widehat{X}_n \text{ et } -\beta - \widehat{Y}_n \leq (\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n) \div \beta < 2\beta - \widehat{Y}_n \\ & -\beta^2 - \widehat{X}_n\beta \leq -\widetilde{Y}_n\beta - \widehat{Y}_n < 2\beta^2 - \widehat{X}_n\beta \text{ et } -\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta \leq \widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n < 2\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta \\ & -\beta^2 - \widehat{X}_n\beta \leq -Y_n < 2\beta^2 - \widehat{X}_n\beta \text{ et } -\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta \leq X_n < 2\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\Gamma$  est 8-connexe si et seulement si, pour chaque  $n = k, \dots, k+p-1$ , nous avons :

$$-2\beta^2 + \widehat{X}_n\beta < Y_n \leq \beta^2 + \widehat{X}_n\beta \text{ et } -\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta \leq X_n < 2\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta. \quad (4.9)$$

**(b) Condition suffisante :**

Comme  $0 \leq \widehat{X}_n \leq \beta - 1$  et  $0 \leq \widehat{Y}_n \leq \beta - 1$ , nous avons les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} & -2\beta^2 + \widehat{X}_n\beta \leq -\beta^2 - \beta < -\beta^2 < \beta^2 \leq \beta^2 + \widehat{X}_n\beta \\ & -\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta \leq -\beta^2 < \beta^2 < \beta^2 + \beta \leq 2\beta^2 - \widehat{Y}_n\beta. \end{aligned}$$

Ainsi, si  $-\beta^2 \leq X_n < \beta^2$  et  $-\beta^2 \leq Y_n < \beta^2$ , alors la condition (4.9) est vérifiée. Il est facile de voir que, pour  $a \in \mathbb{Z}$  et  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , nous avons :

$$-b^2 \leq a < b^2 \iff -b \leq a \div b < b.$$

Comme  $\widetilde{X}_n = X_n \div \beta$  et  $\widetilde{Y}_n = Y_n \div \beta$ , la condition  $-\beta^2 \leq X_n < \beta^2$  est équivalente à  $-\beta \leq \widetilde{X}_n < \beta$  et  $-\beta^2 \leq Y_n < \beta^2$  à  $-\beta \leq \widetilde{Y}_n < \beta$ . D'où, la 8-connexité de  $\Gamma$  est une conséquence de la condition :

$$\forall n = k, \dots, k+p-1 \quad -\beta \leq \widetilde{X}_n < \beta \text{ et } -\beta \leq \widetilde{Y}_n < \beta. \square$$

Dans la suite nous appelons *arc initial* de  $C_d^\alpha(0, R)$  tout arc de la forme  $((\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n))_{0 \leq n \leq p}$  pour  $p \geq 1$ . Il s'agit donc d'un arc commençant par  $(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0)$ .

**Corollaire 1.** Si  $\alpha R < \beta$ , alors  $C_d^\alpha(0, R)$  a un arc initial qui est 8-connexe.

**Preuve** (du corollaire 1). D'après le théorème précédent,  $C_d^\alpha(0, R)$  a un arc initial qui est 8-connexe si  $-\beta \leq \tilde{X}_0 < \beta$  et  $-\beta \leq \tilde{Y}_0 < \beta$ . Comme  $(\tilde{X}_0, \tilde{Y}_0) = (0, \lfloor \omega R \rfloor \div \beta)$ , cette propriété est réduite à chacune des conditions équivalentes suivantes :

$$-\beta \leq \lfloor \omega R \rfloor \div \beta < \beta \Leftrightarrow -\beta^2 \leq \lfloor \omega R \rfloor < \beta^2 \Leftrightarrow -\beta \leq \alpha R < \beta.$$

Nous avons le résultat souhaité car  $\alpha R \geq 0$ .  $\square$

De la même manière, nous pouvons considérer l'arithmétisation du schéma d'Euler à l'échelle de tracé  $\beta$ . Dans ce cas, nous avons le résultat suivant :

**Théorème 11.**

- Tout arc de  $C_d^\beta(0, R)$  dans le carré  $R_\beta$  est 8-connexe ;
- Si  $R < 1$ , alors  $C_d^\beta(0, R)$  a un arc initial qui est 8-connexe.

**Preuve** (du théorème 11). La preuve est similaire à la preuve précédente.  $\square$

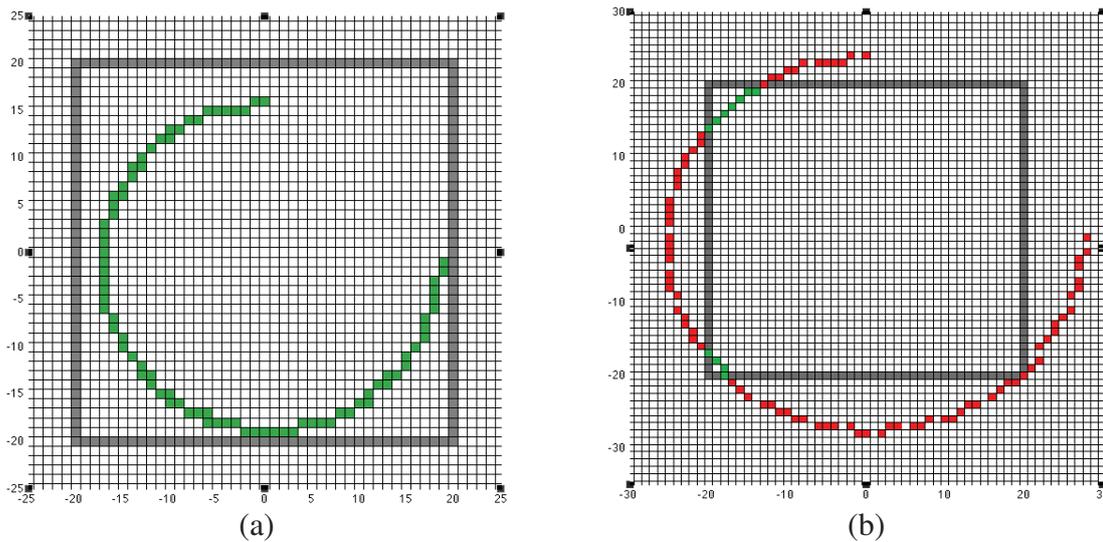


FIGURE 4.8 – Illustration du théorème 11. Deux exemples d'arcs de cercles dessinés à l'échelle  $\beta$ . (a) : arc 8-connexe avec  $(R, \alpha, \beta) = (0.8, 20, 20)$  (b) arc non 8-connexe de paramètres  $(R, \alpha, \beta) = (1.2, 20, 20)$ . Le carré gris représente la région  $R_\beta$ . A l'intérieur les pixels représentés en vert sont liés les uns aux autres par une relation de 8-connexité, ceux de l'extérieur (en rouge) ne le sont pas nécessairement.

Les figures 4.6, 4.7 et 4.8 fournissent une illustration graphique des théorèmes 10 et 11 ainsi que du corollaire 1. Nous ne proposons ici des arcs de cercles dessinés à l'échelle  $\alpha$  pour les deux premières figures et à l'échelle  $\beta$  pour la troisième. La première figure représente un arc de cercle discret connexe avec  $R = 1$ ,  $(\alpha, \beta) = (25, 35)$  et un qui n'est pas connexe avec  $R = 1$ ,  $(\alpha, \beta) = (24, 22)$ . La région  $R_\beta$  est représentée en gris. La deuxième figure représente un arc de cercle discret connexe de longueur  $\lfloor 2\pi\beta \rfloor$  avec  $R = 1$ ,  $(\alpha, \beta) = (25, 24)$  et l'arc de cercle initial de  $C_d^\alpha(0, R)$  de longueur  $\lfloor 10\pi\beta \rfloor$  avec  $R = 1$ ,  $(\alpha, \beta) = (25, 30)$  ce qui produit une spirale. Cela est une conséquence de l'erreur accumulée, car le schéma d'Euler est d'ordre 1, il est donc moins précis qu'un schéma d'ordre plus élevé (Heun). Il est clairement visible

qu'à l'intérieur du carré, l'arc est 8-connexe. À l'extérieur, il ne l'est pas nécessairement. Il en est de même pour l'interprétation à l'échelle  $\beta$ . Sur la figure 4.8, nous avons représenté un arc de cercle 8-connexe (pour  $(R, \alpha, \beta) = (0.8, 20, 20)$ ) et un arc de cercle non connexe (pour  $(R, \alpha, \beta) = (1.2, 20, 20)$ ). La propriété de connexité par rapport au carré  $R_\beta$  reste vraie car le  $\beta$  qui intervient dans la définition du carré  $R_\beta$  correspond au  $\beta$  du pas d'intégration et non au  $\beta$  correspondant à l'échelle de tracé.

Si l'arc est composé de  $N = \lfloor 2\pi\beta \rfloor$  points discrets, nous pourrions espérer obtenir un cercle complet mais cela n'est pas le cas car le point initial et le point final ne sont pas connectés (cf. figure 4.7(a)). Cet arc n'est pas une bonne discrétisation du cercle continu. La méthode d'arithmétisation n'accumule pas d'erreur mais c'est le schéma numérique, ici le schéma d'Euler, qui accumule une petite erreur à chaque pas d'intégration. Ainsi, quand la courbe est parcourue une fois (tour de cercle complet) l'erreur accumulée est suffisamment grande pour qu'elle prenne la forme d'un décalage du pixel d'« arrivée ». Elle est due, en particulier, au schéma d'intégration choisi mais aussi au passage du schéma arithmétisé dans les réels. Ce dernier point fait l'objet de la partie suivante.

### 3.2 Estimation de l'erreur globale

Dans cette section nous étudions l'erreur de notre méthode d'arithmétisation. Nous montrons ainsi que le schéma arithmétisé d'Euler est d'ordre 1 comme le schéma d'Euler classique.

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  définie sur un ouvert  $U$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Nous supposons que  $f$  est standard (c'est-à-dire indépendante du contexte nonstandard) et que  $f$  et ses dérivées partielles sont bornées sur  $U$ . Nous nous plaçons donc dans un contexte plus général que celui du cercle. Le cas particulier du cercle est donné par la fonction  $f$  suivante :  $f(t, z(t)) = (-y(t), x(t))$ .

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} z(a) = b \\ z'(t) = f(t, z(t)) \end{cases} \quad (4.10)$$

avec  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $a$  et  $b$  limités. Considérons la solution  $z : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de (4.10) où  $c \in \mathbb{R}$  est limité et tel que  $a \not\approx c$  (i.e.  $a$  n'est pas infiniment proche de  $c$ ). Celle-ci peut être approchée par le schéma d'Euler comme suit :

$$\begin{cases} (t_0, z_0) = (a, b) \\ (t_{n+1}, z_{n+1}) = (t_n + \frac{1}{\beta}, z_n + \frac{1}{\beta}f(t_n, z_n)) \end{cases} \quad (4.11)$$

dans lequel nous choisissons un pas d'intégration  $h = \frac{1}{\beta}$ . Pour un infiniment grand  $\beta$  (i.e.  $\beta \simeq +\infty$ ), nous avons  $z_n$  infiniment proche de  $z(t_n)$  (i.e.  $z_n \simeq z(t_n)$ ) pour  $0 \leq n \leq N$  avec  $N = \lfloor \beta c \rfloor$ . Pour définir l'erreur globale nous voulons estimer la distance entre  $z(t_n)$  (la solution exacte) et  $z'_n$  qui est la trace du schéma arithmétisé c'est-à-dire le schéma discrétisé réinterprété dans le continu (en utilisant l'isomorphisme) comme nous le précisons maintenant.

Notre méthode d'arithmétisation permet d'introduire un schéma constitué uniquement de variables entières :

$$\begin{cases} (T_0, Z_0) = (\lfloor \omega a \rfloor, \lfloor \omega b \rfloor) \\ (T_{n+1}, Z_{n+1}) = (T_n + \alpha, Z_n + F(T_n, Z_n) \div \beta) \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $F(T_n, Z_n) = \lfloor \omega f(\frac{T_n}{\omega}, \frac{Z_n}{\omega}) \rfloor$ . Ce schéma est obtenu à partir de l'application  $\psi_\omega$  et par substitution de la division par  $\beta$  par la division euclidienne par  $\beta$ . Ici, le pas d'intégration n'est plus de 1 (comme dans le paragraphe précédent où nous voulions des courbes 8-connexes) mais de  $\alpha$ , cela n'a pas d'incidence sur le raisonnement car nous repassons dans les réels ensuite.

En utilisant maintenant l'application inverse  $\varphi_\omega$ , nous définissons un nouveau schéma à variables réelles :

$$\begin{cases} (t'_0, z'_0) &= (\frac{1}{\omega} \lfloor \omega a \rfloor, \frac{1}{\omega} \lfloor \omega b \rfloor) \\ (t'_{n+1}, z'_{n+1}) &= (t'_n + \frac{1}{\beta}, z'_n + \frac{1}{\beta} g(t'_n, z'_n)) \end{cases} \quad (4.13)$$

où  $t'_n = \frac{T_n}{\omega}$ ,  $z'_n = \frac{Z_n}{\omega}$  et  $g(t'_n, z'_n) = \frac{1}{\alpha} \lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \rfloor$ . Nous appelons ce schéma la *trace* du schéma arithmétisé (4.12). Nous remarquons que les schémas (4.11) et (4.13) se ressemblent.

Pour estimer l'erreur globale (distance entre  $z(t_n)$  et  $z'_n$ ), nous devons fixer une notion de distance. Nous choisissons pour cela la norme infinie ( $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ ), et nous avons le résultat suivant :

**Théorème 12.** *Il existe des constantes limitées  $\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}} \in \mathbb{R}$  telles que :*

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \|z'_n - z(t_n)\| = \frac{\mathcal{L}}{\alpha} + \frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\beta}. \quad (4.14)$$

**Preuve .** *Commençons par majorer  $\|z'_n - z(t_n)\|$  en séparant cette expression en deux parties de la façon suivante :*

$$\|z'_n - z(t_n)\| \leq \|z'_n - z_n\| + \|z_n - z(t_n)\| \quad (4.15)$$

où  $z_n$  est la solution du schéma (4.11) et nous bornons séparément les deux expressions. La preuve est donc en deux temps. Par convention, et pour simplifier la présentation des inégalités suivantes, tous les indices  $n$  sont dans  $\llbracket 0, N \rrbracket$ .

**Etape 1 : majoration de  $\|z_n - z'_n\|$**

Pour cela nous considérons  $\|z_{n+1} - z'_{n+1}\|$ . En utilisant l'inégalité triangulaire usuelle et les schémas (4.11) et (4.13), nous obtenons :

$$\|z_{n+1} - z'_{n+1}\| \leq \|z_n - z'_n\| + \frac{1}{\beta} \|f(t_n, z_n) - f(t'_n, z'_n)\| + \frac{1}{\beta} \|f(t'_n, z'_n) - g(t'_n, z'_n)\|.$$

Pour majorer l'expression  $\|f(t'_n, z'_n) - g(t'_n, z'_n)\|$ , nous considérons  $g(t'_n, z'_n) = \frac{1}{\alpha} \lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \rfloor$ . En utilisant les propriétés de la fonction partie entière, cela se réécrit :

$$g(t'_n, z'_n) = f(t'_n, z'_n) - \frac{1}{\omega} \{ \omega f(t'_n, z'_n) \} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \right\}$$

où  $0 \leq \{ \omega f(t'_n, z'_n) \} < 1$  et  $0 \leq \{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \} < 1$ . Nous obtenons donc :  $\|g(t'_n, z'_n) - f(t'_n, z'_n)\| \leq \frac{2}{\alpha}$ .

Considérons maintenant l'expression  $\|f(t_n, z_n) - f(t'_n, z'_n)\|$ . Comme  $f$  est lipschitzienne<sup>6</sup> [RM73] (car elle est de classe  $C^1$ ) nous savons qu'il existe  $L_1 \in \mathbb{R}$ , une constante limitée, telle que :

$$\|f(t_n, z_n) - f(t'_n, z'_n)\| \leq L_1 (\|t_n - t'_n\| + \|z_n - z'_n\|). \quad (4.16)$$

6. Une application  $f$  de  $I \subset \mathbb{R}$  ( $I$  intervalle non vide et non restreint à un point) est lipschitzienne si  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  avec  $k$  un réel strictement positif limité.

Dans cette expression  $|t_n - t'_n|$  est tel que :

$$\forall n, |t_n - t'_n| = \left| t_{n-1} - \frac{1}{\beta} - t'_{n-1} + \frac{1}{\beta} \right| = |t_0 - t'_0| = \left| a - \frac{\omega a}{\omega} + \frac{\{\omega a\}}{\omega} \right| \leq \frac{1}{\omega}.$$

En combinant toutes les inégalités précédentes, nous obtenons :

$$\|z_{n+1} - z'_{n+1}\| \leq \|z_n - z'_n\| \left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right) + \frac{L_1}{\beta\omega} + \frac{2}{\omega} \leq \|z_n - z'_n\| \left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right) + \frac{L_1}{\omega} + \frac{2}{\omega}.$$

Cela devient :

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n \left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right) + \frac{L_2}{\omega} \quad (4.17)$$

où  $L_2 = 2 + L_1$  et  $\epsilon_{n+1} = \|z_{n+1} - z'_{n+1}\|$ . Nous utilisons maintenant le lemme suivant :

**Lemme 3** (Propriétés des suites arithmético-géométriques). Soit  $e_n$  une suite de  $\mathbb{R}^+$ . Si

$$e_{n+1} \leq Ae_n + B$$

avec  $A, B \in \mathbb{R}^+$  alors :

$$\forall n, e_n \leq A^n e_0 + B \frac{A^n - 1}{A - 1}.$$

Grâce à ce lemme, nous exprimons  $\epsilon_n$  en fonction de  $\epsilon_0$  et nous bornons  $\epsilon_n$  :

$$\epsilon_n \leq \epsilon_0 \left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right)^n + \frac{L_2}{\omega} \left( \frac{\left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right) - 1} \right).$$

Comme  $\frac{1}{\omega}$  est un majorant de  $\epsilon_0 = \|z_0 - z'_0\|$ , nous obtenons :

$$\epsilon_n \leq \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right)^n + \frac{L_2}{L_1} \frac{1}{\alpha} \left( \left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right)^n - 1 \right). \quad (4.18)$$

Pour majorer  $\left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right)^n$ , nous considérons un autre lemme :

**Lemme 4.**  $(1 + u)^n \leq e^{nu}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall u \geq 0$

L'inégalité  $\frac{n}{\beta} \leq (c - a)$  indique que le nombre d'itérations  $n$  est majoré par le produit de la longueur de l'intervalle d'intégration (qui est un nombre limité) multiplié par  $\beta$ . De plus, l'exponentielle d'un nombre limité est un nombre limité. D'où, en utilisant le lemme 4,  $\left(1 + \frac{L_1}{\beta}\right)^n$  est majoré par un nombre limité. Ainsi, il existe une constante limitée  $L_3 \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\|z_n - z'_n\| \leq \frac{1}{\alpha} L_3. \quad (4.19)$$

**Étape 2 : majoration de  $\|z_n - z(t_n)\|$**

La seconde étape de la preuve consiste à majorer la quantité  $\|z_n - z(t_n)\|$  de l'équation (4.15). Pour cela nous considérons  $\|z_{n+1} - z(t_{n+1})\|$ .

En utilisant le développement de Taylor<sup>7</sup> [Dem06, CE05] de  $z(t_{n+1})$ , il existe  $\gamma_n \in ]t_n, t_n + h[$  tel que :

$$z(t_{n+1}) = z(t_n + h) = z(t_n) + hz'(t_n) + \frac{h^2}{2}z''(\gamma_n). \quad (4.20)$$

Comme  $]t_n, t_n + h[ \subset [a, c]$ ,  $z''(\gamma_n) \leq \|z''\|_{[a,c]}$  où  $\|z''\|_{[a,c]}$  est la norme de  $z''$  dans l'intervalle  $[a, c]$ . Donc d'après (4.20) nous avons :

$$\|z_{n+1} - z(t_{n+1})\| \leq \|z_n - z(t_n)\| + \frac{1}{\beta}\|f(t_n, z_n) - f(t_n, z(t_n))\| + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 \|z''\|_{[a,c]}.$$

Comme précédemment, nous fixons  $\epsilon'_{n+1} = \|z_{n+1} - z(t_{n+1})\|$  et nous obtenons l'inégalité :

$$\epsilon'_{n+1} \leq \epsilon_n(1 + \frac{1}{\beta}L_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 L_4$$

où  $L_4 \in \mathbb{R}$  est limité et tel que  $\|z''\|_{[a,c]} \leq L_4$ . Nous utilisons maintenant les lemmes 3 et 4 et nous obtenons une majoration de  $\|z_n - z(t_n)\|$ . Il existe une constante limitée  $L_5 \in \mathbb{R}$  telle que

$$\|z_n - z(t_n)\| \leq \frac{1}{\beta}L_5.$$

D'où, d'après la dernière inégalité et l'inégalité (4.19) nous pouvons conclure qu'il existe des constantes limitées  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}''$  de  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\|z'_n - z(t_n)\| \leq \frac{\mathcal{L}'}{\alpha} + \frac{\mathcal{L}''}{\beta}.$$

ou encore en multipliant par une constante réelle comprise entre 0 et 1 le terme de droite, on obtient l'égalité :

$$\|z'_n - z(t_n)\| = \frac{\mathcal{L}}{\alpha} + \frac{\tilde{\mathcal{L}}}{\beta}$$

avec  $\mathcal{L}$  et  $\tilde{\mathcal{L}}$  des constantes limitées  $\square$

Comme dans le cas particulier du cercle, la solution exacte de l'équation différentielle est  $z(t) = Re^{i(t+\frac{\pi}{2})}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , nous obtenons :

$$\|z'_n - z(t_n)\| \leq \frac{e^{2\pi}}{\omega} + \frac{2(e^{2\pi} - 1)}{\alpha} + \frac{R(e^{2\pi}-1)}{\beta}. \quad (4.21)$$

En analyse numérique, les schémas d'intégration [QSS00] ont un ordre d'approximation. Il donne une idée de la qualité de la solution calculée. Jusqu'à maintenant, l'ordre des schémas arithmétisés n'avait pas été étudié et le théorème précédent nous permet de définir un ordre

7. Le développement de Taylor d'une fonction  $f$  de  $I \subset \mathbb{R}$  dans un espace vectoriel normé de dimension finie  $E$  au voisinage d'un point  $a$  de  $I$  est donné par :  $f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x)$  où  $f^{(i)}$  est dérivée  $i^{\text{ème}}$  de  $f$  et  $R_n(x)$  est un reste s'apparentant à  $(x-a)^{n+1}$ .

d'approximation du schéma d'intégration arithmétisé. Celui-ci est l'équivalent de la notion classiquement utilisée en analyse numérique.

L'ordre d'approximation classique est défini comme le plus grand entier  $p$  tel qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  vérifiant  $\|z_n - z(t_n)\| \leq Ch^p$ , où  $h$  est le pas d'intégration (petit par définition). Pour chaque schéma d'intégration, on peut définir un ordre. Par exemple, la méthode d'Euler est d'ordre 1. D'autres méthodes comme le schéma de Heun ou celui d'Euler modifié<sup>8</sup> sont d'ordre 2. D'après le théorème 12, nous proposons une définition de l'ordre d'approximation du schéma arithmétisé d'Euler (4.12) :

**Définition 17 (Ordre).** *Le schéma arithmétisé d'Euler (4.12) est d'ordre  $p$  s'il existe un nombre limité  $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$  tel que :*

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \|z'_n - z(t_n)\| \leq \frac{\mathcal{L}}{\beta^p}.$$

Avec cette définition, le corollaire suivant donne une condition suffisante pour que le schéma d'Euler arithmétisé (4.12) soit d'ordre 1.

**Corollaire 2.** *Si  $\frac{\beta}{\alpha}$  est limité (c'est-à-dire que  $\alpha$  et  $\beta$  sont de grandeur comparable) alors le schéma arithmétisé d'Euler (4.12) est d'ordre 1.*

**Preuve .** *Il existe un nombre limité  $\lambda$  tel que  $\beta = \lambda\alpha$ . Ainsi, d'après le théorème 12 :*

$$\|z'_n - z(t_n)\| \leq \frac{1}{\beta} \left( \frac{\mathcal{L}}{\alpha} + \mathcal{L}'\lambda + \mathcal{L} \right)$$

et  $\frac{\mathcal{L}}{\alpha} + \mathcal{L}'\lambda + \mathcal{L}$  est limité.  $\square$

## Conclusion du Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques éléments d'analyse nonstandard et la méthode d'arithmétisation par des schémas numériques [Cho10]. Nous avons rappelé les fondements de l'analyse nonstandard en présentant la droite de Harthong-Reeb [Har89, Har83, HR89]. Cette droite est le résultat d'un changement d'échelle fortement contractant sur les entiers. Il s'agit d'un espace à la fois continu et discret. Cette droite permet, par conséquent, d'établir un lien entre les deux types de géométries. Dans ce contexte, nous avons présenté les travaux déjà réalisés (stage de Master) [RWF<sup>+</sup>09]. Nous avons montré que le pas d'intégration qui tend classiquement vers 0 peut être remplacé par un nombre infiniment petit car cette notion est définie dans le contexte de l'analyse nonstandard. Cela nous amène à considérer des familles de cercles dépendantes de paramètres. Ainsi pour chaque paramètre nous pouvons tracer une représentation de la solution du schéma d'Euler. Plus ces paramètres tendent vers l'infini plus ces cercles tendent vers le cercle continu. Ces travaux concernent l'application aux cercles de la méthode d'arithmétisation par le schéma numérique d'Euler. Plus particulièrement, nous

8. Le schéma numérique d'Euler modifié permet d'approcher la solution  $z(t_{n+1})$  d'une équation différentielle par  $z_{n+1}$  défini par :

$$z_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}f(t_n, z_n))$$

où  $h$  représente le pas de discrétisation qui vaut  $\frac{1}{\beta}$ .

avons donné deux conditions de connexité des arcs de cercles : l'une pour ceux interprétés à l'échelle  $\alpha$  et l'autre pour ceux à l'échelle  $\beta$ . Nous avons aussi défini une notion d'ordre d'un schéma arithmétisé en étendant celle de l'ordre d'un schéma numérique classique. Le schéma arithmétisé par la méthode d'Euler est d'ordre 1 comme le schéma numérique d'Euler classique. L'idée serait d'étendre ces propriétés à des schémas arithmétisés à partir de schémas numériques d'ordre classiquement plus élevé. C'est pourquoi dans le chapitre suivant nous proposons d'étudier la méthode d'arithmétisation par un schéma d'ordre 2 : le schéma de Heun.

Dans ce présent chapitre, nous avons aussi présenté une autre version de la droite de Harthong-Reeb. Elle n'est plus basée sur des entiers mais des suites d'entiers : les  $\Omega$ -entiers. Dans le chapitre suivant, nous présentons une application aux ellipses [CWA<sup>+</sup>10] de l'extension aux  $\Omega$ -nombres de la méthode d'arithmétisation par le schéma numérique d'Euler de Chollet [CWF<sup>+</sup>09b].



---

## CHAPITRE 5

---

# ARITHMÉTISATION PAR LE SCHÉMA DE HEUN ET $\Omega$ -ARITHMÉTISATION DES ELLIPSES

---

Dans ce chapitre, nous étendons les travaux précédents concernant la méthode d'arithmétisation et les  $\Omega$ -entiers [CWF<sup>+</sup>09b, RWF<sup>+</sup>09, CWF<sup>+</sup>09a] de deux manières. Dans le chapitre précédent, nous avons appliqué aux cercles la méthode d'arithmétisation par le schéma numérique d'Euler et nous avons donné quelques propriétés des arcs de cercles générés par cette méthode [RWF<sup>+</sup>09]. Dans la partie 1, nous appliquons le processus d'arithmétisation au schéma numérique de Heun. Le schéma numérique classique de Heun est d'ordre <sup>1</sup> 2 alors que celui d'Euler est d'ordre 1 [Dem06]. Le choix d'un schéma numérique d'ordre plus élevé est motivé par le fait que les arcs de cercles résultants du processus d'arithmétisation approchent mieux le cercle continu. Nous proposons ensuite une condition de connexité sur les arcs de cercles résultants de l'arithmétisation par le schéma de Heun ainsi qu'une estimation de l'erreur globale.

Dans le chapitre 4, nous avons appliqué la méthode d'arithmétisation dans le cas d'entiers, nous proposons ici une extension naturelle de ce processus aux suites d'entiers ( $\Omega$ -entiers) définies dans la partie 1. L'idée de généraliser le procédé d'arithmétisation aux  $\Omega$ -nombres se justifie par le fait qu'ils permettent de considérer toutes les échelles en même temps. Même si les profondeurs sont indépendantes les unes des autres, c'est la suite de nombres qui confère à l'algorithme le statut de *représentation exacte* de la fonction que l'on veut représenter [Cho10]. L'algorithme donne donc des informations exactes et infinies<sup>2</sup>. Nous avons ainsi une représentation fidèle de la solution de l'équation différentielle au sens où elle donne suffisamment d'information pour retrouver la fonction de départ. Nous appliquons ensuite cette méthode au cas particulier de l'ellipse.

---

1. Soit  $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \\ t_{n+1} = t_n + h \end{cases}$  un schéma numérique. Celui-ci est dit d'ordre  $p$  si la quantité définie par  $e_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - h\phi(t_n, z(t_n))$  où  $y(t_n)$  est la solution exacte de l'équation différentielle en  $t_n$ , est telle que  $e_n = o(h^{p+1})$  lorsque  $h$  tend vers 0.

2. Néanmoins nous devons en extraire certains niveaux pour les représenter.

# 1 Condition de connexité pour l'arithmétisation par le schéma de Heun

Dans cette partie, nous expliquons le processus d'arithmétisation par le schéma de Heun [Dem06]. La méthode pour obtenir les schémas numériques est la même que pour le schéma d'Euler de la partie précédente. Nous nous plaçons dans le cas du cercle. Les schémas correspondant à une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sont donnés en Annexe D.

## 1.1 Arithmétisation par le schéma de Heun

Le schéma numérique de Heun permet d'approcher numériquement la solution  $z(t_n)$  pour  $0 \leq n \leq N$  ( $N$  fixé) d'une équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z(t)) \text{ pour } 0 \leq t \leq T \\ z(0) = z_0 \end{cases}$$

par la formule de  $z_n$  suivante :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}[f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_n + hf(t_n, z_n))] \tag{5.1}$$

où  $f$  est une fonction  $C_1$  (régulière) définie de  $[0, T] \times \mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^d$  et  $y_0 \in \mathbb{R}^d$ .

Nous appliquons maintenant la méthode d'arithmétisation de la section 3 à l'équation différentielle du cercle :

$$\begin{cases} (x(0), y(0)) = (0, R) \\ (x'(t), y'(t)) = (-y(t), x(t)). \end{cases} \tag{4.3}$$

En appliquant la formule (5.1) avec <sup>3</sup>  $f(t_n, z_n) = (-y_n, x_n)$  (d'après (4.3)), nous obtenons l'approximation par le schéma numérique de Heun de (4.3) donné par :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, R) \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + \frac{h}{2}((-y_n, x_n) + (-y_n - hx_n, x_n - hy_n)) \end{cases} \tag{5.2}$$

En posant  $h = \frac{1}{\beta}$  (avec  $\beta$  un nombre infiniment grand) comme précédemment, nous obtenons :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) = (0, R) \\ a_{n+1} = (-y_n, x_n) \\ b_{n+1} = (x_n, y_n) + \frac{1}{\beta}a_{n+1} = (b_{n+1}^1, b_{n+1}^2) \\ c_{n+1} = (-b_{n+1}^2, b_{n+1}^1) \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + \frac{1}{2\beta}(a_{n+1} + c_{n+1}) \end{cases} \tag{5.3}$$

Les variables  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  sont introduites dans le but de rendre plus facile la lecture des schémas.

Le schéma numérique 4 est le résultat de ce processus d'arithmétisation du schéma (5.3) interprété à l'échelle  $\omega$  où  $\omega$  est un multiple de  $\beta$  ( $\omega = \alpha\beta$  avec  $\alpha$  un infiniment grand) :

---

3. Ici, la fonction  $f$  ne dépend plus du temps mais des valeurs de  $x_n$  et  $y_n$ .

**Schéma numérique 4.** Arithmétisation du schéma de Heun- Interprétation à l'échelle  $\omega$ 

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = 0 \\ Y_0 = \lfloor \omega R \rfloor \\ A_{n+1} = (A_{n+1}^1, A_{n+1}^2) = (-Y_n, X_n) \\ B_{n+1} = (B_{n+1}^1, B_{n+1}^2) = (X_n + A_{n+1}^1 \div \beta, Y_n + A_{n+1}^2 \div \beta) \\ C_{n+1} = (-B_{n+1}^2, B_{n+1}^1) \\ X_{n+1} = X_n + (A_{n+1}^1 + C_{n+1}^1) \div 2\beta \\ Y_{n+1} = Y_n + (A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2) \div 2\beta \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Comme dans le chapitre précédent, nous notons en couleurs les variables  $(X_{n+1}, Y_{n+1})$  qui interviennent dans le tracé. Comme précédemment, nous obtenons des familles de cercles paramétrisés. Ce schéma numérique peut être utilisé avec des valeurs de  $\beta$  et  $\omega$  standard. Plus ces valeurs vont tendre vers l'infini, plus la solution du schéma numérique tendra vers le cercle continu. Comme nous le voyons sur la figure 5.1, l'arc de cercle interprété à l'échelle globale  $\omega$  est fortement non connexe. Cela justifie ainsi un passage à une échelle intermédiaire. Comme précédemment, nous ne pouvons pas tracer le segment entre deux pixels pour garantir la connexité car pour des valeurs infiniment grandes de  $\beta$  et  $\omega$  le cercle obtenu ne convergerait pas vers le cercle continu. Les schémas numériques 5 et 6 sont le résultat de l'interprétation du schéma numérique 4 aux échelles intermédiaires respectivement  $\alpha$  et  $\beta$ . Dans ce schéma nous avons des divisions euclidiennes par  $\alpha$  et par  $\beta$ . Les premières sont le résultat de l'interprétation à l'échelle  $\beta$ , les secondes correspondent soit aux résultats de l'interprétation à l'échelle  $\alpha$  soit  $\beta$  qui intervient dans le pas d'intégration  $\frac{1}{\beta}$ .

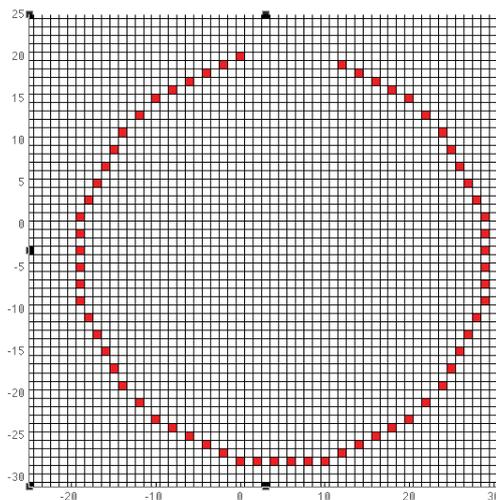


FIGURE 5.1 – Cercle de rayon 1 généré par le schéma de Heun et interprété à l'échelle  $\omega = 20$  ( $\alpha = 2$  et  $\beta = 10$ ). L'arc de cercle n'est pas 8-connexe justifiant un passage à une échelle intermédiaire.

**Schéma numérique 5.** Arithmétisation du schéma de Heun- Interprétation à l'échelle  $\alpha$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{X}_0 = 0 \quad , \quad \widetilde{Y}_0 = \lfloor \omega R \rfloor \div \beta \\ \widehat{X}_0 = 0 \quad , \quad \widehat{Y}_0 = \lfloor \omega R \rfloor \pmod{\beta} \\ A_{n+1} = (A_{n+1}^1, A_{n+1}^2) = (\lfloor -\widetilde{Y}_n \beta - \widehat{Y}_n \rfloor, \lfloor \widetilde{X}_n \beta + \widehat{X}_n \rfloor) \\ B_{n+1} = (B_{n+1}^1, B_{n+1}^2) = ((\widetilde{X}_n \beta + \widehat{X}_n + A_{n+1}^1 \div \beta, \widetilde{Y}_n \beta + \widehat{Y}_n + A_{n+1}^2 \div \beta) \\ C_{n+1} = (C_{n+1}^1, C_{n+1}^2) = (\lfloor -B_{n+1}^2 \rfloor, \lfloor B_{n+1}^1 \rfloor) \\ F_n = (F_n^1, F_n^2) = ((A_{n+1}^1 + C_{n+1}^1) \div 2\beta, (A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2) \div 2\beta) \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + F_n^1) \div \beta \\ \widetilde{Y}_{n+1} = \widetilde{Y}_n + (\widehat{Y}_n + F_n^2) \div \beta \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + F_n^1) \pmod{\beta} \\ \widehat{Y}_{n+1} = (\widehat{Y}_n + F_n^2) \pmod{\beta} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

**Schéma numérique 6.** Arithmétisation du schéma de Heun- Interprétation à l'échelle  $\beta$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{X}_0 = 0 \quad , \quad \widetilde{Y}_0 = \lfloor \omega R \rfloor \div \alpha \\ \widehat{X}_0 = 0 \quad , \quad \widehat{Y}_0 = \lfloor \omega R \rfloor \pmod{\alpha} \\ A_{n+1} = (A_{n+1}^1, A_{n+1}^2) = (\lfloor -\widetilde{Y}_n \alpha - \widehat{Y}_n \rfloor, \lfloor \widetilde{X}_n \alpha + \widehat{X}_n \rfloor) \\ B_{n+1} = (B_{n+1}^1, B_{n+1}^2) = ((\widetilde{X}_n \alpha + \widehat{X}_n + A_{n+1}^1 \div \beta, \widetilde{Y}_n \alpha + \widehat{Y}_n + A_{n+1}^2 \div \beta) \\ C_{n+1} = (C_{n+1}^1, C_{n+1}^2) = (\lfloor -B_{n+1}^2 \rfloor, \lfloor B_{n+1}^1 \rfloor) \\ F_n = (F_n^1, F_n^2) = ((A_{n+1}^1 + C_{n+1}^1) \div 2\beta, (A_{n+1}^2 + C_{n+1}^2) \div 2\beta) \\ \widetilde{X}_{n+1} = \widetilde{X}_n + (\widehat{X}_n + F_n^1) \div \alpha \\ \widetilde{Y}_{n+1} = \widetilde{Y}_n + (\widehat{Y}_n + F_n^2) \div \alpha \\ \widehat{X}_{n+1} = (\widehat{X}_n + F_n^1) \pmod{\alpha} \\ \widehat{Y}_{n+1} = (\widehat{Y}_n + F_n^2) \pmod{\alpha} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Les variables des schémas 5 et 6 qui sont utilisées dans les tracés sont  $\widetilde{X}_n$  et  $\widetilde{Y}_n$  (représentées en rouge).

Comme nous le montre les figures 5.1 et 5.2 suivant les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  les arcs de cercles sont connexes ou ne le sont pas. Dans la partie suivante, nous donnons une condition de 8-connexité des arcs de cercles obtenus par arithmétisation par le schéma de Heun.

## 1.2 Condition de connexité

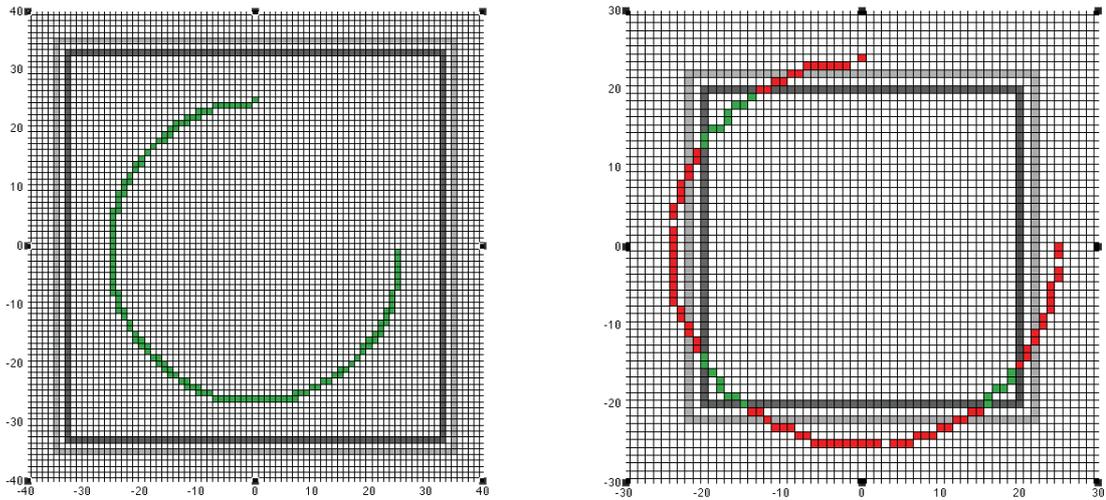
Dans cette partie, nous établissons une condition de connexité des arcs de cercles générés par la méthode d'arithmétisation par le schéma de Heun dans le cas d'une interprétation aux échelles  $\alpha$  et  $\beta$ .

Dans la suite, nous notons  $C_d^\alpha(0, R)$  et  $C_d^\beta(0, R)$  les arcs de cercles discrets interprétés aux échelles respectivement  $\alpha$  et  $\beta$ .

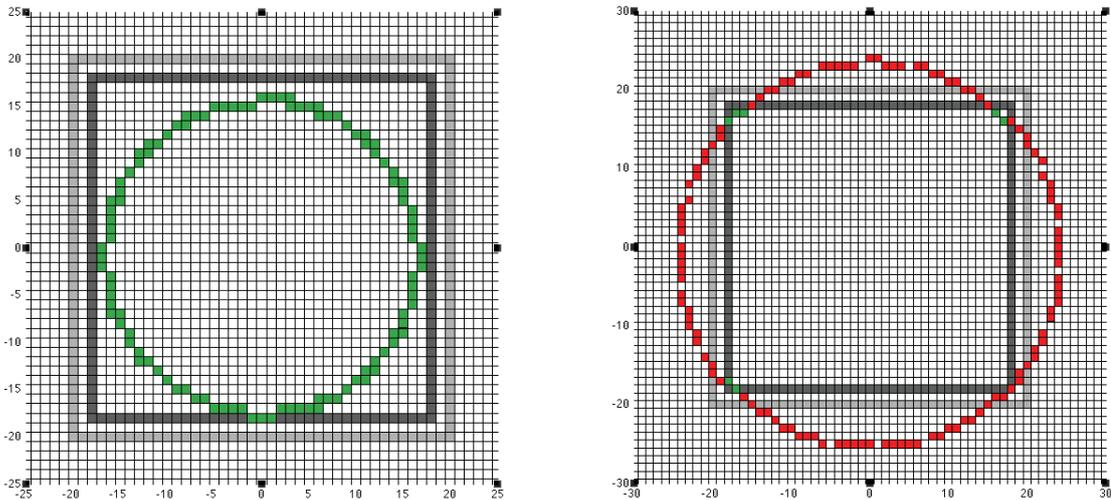
Nous définissons le carré de  $\mathbb{Z}^2$  centré en 0 de côté de longueur  $2(\beta - 2)$  :

$$R_{\beta-2} = \{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 ; -\beta + 2 \leq X < \beta - 2 \text{ et } -\beta + 2 \leq Y < \beta - 2\}.$$

Une condition de connexité de l'arc de cercle  $C_d^\alpha(0, R)$  est donné par :



(a) Interprétation à l'échelle  $\alpha$ . Les paramètres  $(R, \alpha, \beta)$  sont respectivement  $(1, 25, 35)$  et  $(1, 24, 22)$ .



(b) Interprétation à l'échelle  $\beta$ . Les paramètres  $(R, \alpha, \beta)$  sont respectivement  $(0.8, 20, 20)$  et  $(1.2, 20, 20)$ .

FIGURE 5.2 – Arcs de cercles générés par arithmétisation par le schéma de Heun interprétés aux échelles  $\alpha$  et  $\beta$ . Les rectangles de connexité  $R_\beta$  (en clair) et  $R_{\beta-2}$  (en foncé) sont aussi tracés.

**Théorème 13.** *Tout arc de  $C_d^\alpha(0, R)$  dans le carré  $R_{\beta-2}$  est 8-connexe.*

**Preuve** (du théorème 13). *La structure de la preuve est la même que celle du théorème 10 page 135.*

Soit  $\Gamma = ((\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n))_{k \leq n \leq k+p}$  un arc de  $C_d^\alpha(0, R)$  tel que  $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) \in R_{\beta-2}$  pour chaque  $n = k, \dots, k + p$ . Alors,  $\Gamma$  est 8-connexe si et seulement si, pour chaque  $n = k, \dots, k + p - 1$ , nous avons :

$$-1 \leq \tilde{X}_{n+1} - \tilde{X}_n \leq 1 \text{ et } -1 \leq \tilde{Y}_{n+1} - \tilde{Y}_n \leq 1. \tag{5.7}$$

La preuve est découpée en deux parties : dans la partie (a) nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que  $\Gamma$  soit connexe, dans la partie (b) nous montrons que la condition  $\Gamma \subset R_{\beta-2}$  est suffisante.

(a) Condition équivalente :

En utilisant le schéma numérique 5 et les propriétés de la partie entière, les conditions suivantes sont équivalentes<sup>4</sup> :

$$\begin{aligned}
 & -1 \leq \widetilde{X}_{n+1} - \widetilde{X}_n \leq 1 \\
 & -1 \leq (\widehat{X}_n + F_n^1) \div \beta \leq 1 \quad \star \\
 & -1 \leq \left\lfloor \frac{\widehat{X}_n + F_n^1}{\beta} \right\rfloor \leq 1 \quad \star \\
 & -1 \leq \frac{\widehat{X}_n + F_n^1}{\beta} < 2 \quad \star\star \\
 & -\beta \leq \widehat{X}_n + F_n^1 < 2\beta \\
 & -\beta - \widehat{X}_n \leq F_n^1 < 2\beta - \widehat{X}_n \\
 & -\beta - \widehat{X}_n \leq \left\lfloor \frac{A_{n+1}^1 + C_{n+1}^1}{2\beta} \right\rfloor < 2\beta - \widehat{X}_n \quad \star \\
 & -\beta - \widehat{X}_n \leq \frac{A_{n+1}^1 + C_{n+1}^1}{2\beta} < 2\beta - \widehat{X}_n \quad \star\star \\
 & -2\beta^2 - 2\widehat{X}_n\beta \leq A_{n+1}^1 + C_{n+1}^1 < 4\beta^2 - 2\widehat{X}_n\beta \\
 & -2\beta^2 - 2\widehat{X}_n\beta \leq -2\widetilde{Y}_n\beta - 2\widehat{Y}_n - \left\lfloor \frac{\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n}{\beta} \right\rfloor < 4\beta^2 - 2\widehat{X}_n\beta \quad \star \\
 & -4\beta^2 + 2\widehat{X}_n\beta < 2\widetilde{Y}_n\beta + 2\widehat{Y}_n + \left\lfloor \frac{\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n}{\beta} \right\rfloor \leq 2\beta^2 + 2\widehat{X}_n\beta \\
 & -4\beta^2 + 2\widehat{X}_n\beta - 2\widetilde{Y}_n\beta - 2\widehat{Y}_n < \left\lfloor \frac{\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n}{\beta} \right\rfloor \leq 2\beta^2 + 2\widehat{X}_n\beta - 2\widetilde{Y}_n\beta - 2\widehat{Y}_n \\
 & -4\beta^2 + 2\widehat{X}_n\beta - 2\widetilde{Y}_n\beta - 2\widehat{Y}_n + 1 \leq \frac{\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n}{\beta} < 2\beta^2 + 2\widehat{X}_n\beta - 2\widetilde{Y}_n\beta - 2\widehat{Y}_n + 1 \quad \star\star \\
 & -4\beta^3 + 2\widehat{X}_n\beta^2 - 2\widetilde{Y}_n\beta^2 - 2\widehat{Y}_n\beta + \beta \leq \widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n < 2\beta^3 + 2\widehat{X}_n\beta^2 - 2\widetilde{Y}_n\beta^2 - 2\widehat{Y}_n\beta + \beta
 \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons :

$$-4\beta^3 + 2\widehat{X}_n\beta^2 + \beta \leq X_n + 2\beta Y_n < 2\beta^3 + 2\widehat{X}_n\beta^2 + \beta \quad (5.8)$$

L'équation (5.8) est une condition nécessaire et suffisante pour que l'arc  $\Gamma$  soit 8-connexe. Cette condition concerne uniquement les abscisses  $\widetilde{X}_n$ . En procédant de la même façon à partir de  $-1 \leq \widetilde{Y}_{n+1} - \widetilde{Y}_n \leq 1$ , nous obtenons une condition nécessaire et suffisante sur les ordonnées  $\widetilde{Y}_n$  :

$$-4\beta^3 + 2\widehat{Y}_n\beta^2 < Y_n - 2\beta X_n \leq 2\beta^3 + 2\widehat{Y}_n\beta^2 \quad (5.9)$$

4. Si le passage de la ligne  $i - 1$  à la ligne  $i$  se fait en utilisant le schéma numérique 5, nous mettons  $\star$  en fin de ligne  $i$ , s'il se fait par les propriétés de la partie entière, nous mettons  $\star\star$ .

(b) Condition suffisante :

Par définition,  $0 \leq \widehat{X}_n \leq \beta - 1$  et  $0 \leq \widehat{Y}_n \leq \beta - 1$ . Supposons maintenant que :

$$-\beta + 2 \leq \widetilde{X}_n < \beta - 2 \text{ et } -\beta + 2 \leq \widetilde{Y}_n < \beta - 2$$

alors nous avons :

$$-\beta^2 + \frac{\beta}{2} \leq X_n \leq \beta^2 - \frac{\beta}{2} \text{ et } -\beta^2 + \frac{\beta}{2} \leq Y_n \leq \beta^2 - \frac{\beta}{2}.$$

D'après ces deux inégalités et les formules (5.8) et (5.9), nous avons les deux suites d'inégalités suivantes :

$$-4\beta^3 + 2\widehat{Y}_n\beta^2 \leq -4\beta^3 + 2\beta^2(\beta - 1) \leq -2\beta^3 + \frac{\beta}{2} \leq 2\beta^3 - \frac{\beta}{2} \leq 2\beta^3 \leq 2\beta^3 + 2\widehat{X}_n\beta^2$$

$$-4\beta^3 + 2\widehat{X}_n\beta^2 + \beta \leq -2\beta^3 - 2\beta^2 + \beta \leq -2\beta^3 + \frac{\beta}{2} \leq 2\beta^3 - \frac{\beta}{2} \leq \beta + 2\beta^3 \leq 2\beta^3 + 2\widehat{Y}_n\beta^2 + \beta$$

Ainsi, si  $\widetilde{X}$  et  $\widetilde{Y}$  sont dans le carré  $R_{\beta-2}$  alors l'arc de cercle  $C_d^\alpha(0, R)$  est connexe.  $\square$

Ce résultat est similaire à celui établi pour l'arithmétisation par le schéma d'Euler (théorème 10 page 135). La condition associée au schéma de Heun est légèrement plus restrictive. Sur la figure 5.2, nous avons représenté ces deux carrés de connexité (celui correspondant à la connexité par rapport au schéma numérique de Heun est plus foncé). D'après les simulations numériques, il semblerait que la condition de connexité par rapport au schéma d'Euler est encore valable dans le cas du schéma de Heun. Cela reste à prouver.

Nous rappelons qu'un arc initial de  $C_d^\alpha(0, R)$  est un arc commençant en  $(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0)$ . Nous déduisons du théorème précédent le corollaire :

**Corollaire 2.** Si  $\alpha R < \beta - 2$  alors  $C_d^\alpha(0, R)$  a un arc initial 8-connexe.

**Preuve** (du corollaire 2). D'après le théorème précédent,  $C_d^\alpha(0, R)$  a un arc initial qui est 8-connexe si  $-\beta + 2 \leq \widetilde{X}_0 < \beta - 2$  et  $-\beta + 2 \leq \widetilde{Y}_0 < \beta - 2$ . Comme  $(\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0) = (0, [\omega R] \div \beta)$ , cette propriété est réduite à chacune des conditions équivalentes suivantes :

$$-\beta + 2 \leq [\omega R] \div \beta < \beta - 2 \Leftrightarrow -\beta^2 + 2\beta \leq [\omega R] < \beta^2 - 2\beta \Leftrightarrow -\beta + 2 \leq \alpha R < \beta - 2.$$

Nous avons le résultat souhaité car  $\alpha R \geq 0$ .  $\square$

Une étude de la connexité dans le cas du schéma interprété à l'échelle  $\beta$  mériterait d'être menée. Elle nous permettrait non seulement de nous assurer que les cercles obtenus sont connexes mais aussi que ce résultat est similaire à celui que nous avons montré pour le schéma d'Euler.

### 1.3 Etude de l'ordre

Dans cette partie nous étudions l'erreur de notre méthode d'arithmétisation par le schéma numérique de Heun. Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z(a) = b \\ z'(t) = f(t, z(t)) \end{cases} \quad (4.10)$$

où  $f$  est une fonction de  $([a, c] \subset \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  dont les dérivées partielles sont bornées et  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^n$  des nombres limités. La solution de (4.10) peut être approchée par le schéma de Heun :

$$\begin{cases} t_0 = a \\ z_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\beta} \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2\beta}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_n + \frac{1}{\beta}f(t_n, z_n))) \end{cases} \quad (5.10)$$

de pas d'intégration  $h = \frac{1}{\beta}$ . Pour un infiniment grand  $\beta$  (i.e.  $\beta \sim +\infty$ ),  $z_n$  est proche de  $z(t_n)$  pour  $0 \leq n \leq N = \lfloor \beta c \rfloor$ .

Soit

$$\begin{cases} t'_0 = \lfloor \frac{\omega a}{\omega} \rfloor \\ z'_0 = \lfloor \frac{\omega b}{\omega} \rfloor \\ t'_{n+1} = t'_n + \frac{1}{\beta} \\ z'_{n+1} = z'_n + \frac{1}{2\beta}(\frac{2\beta}{\omega} \lfloor \frac{\omega}{2\beta}(g(t'_n, z'_n) + h(t'_{n+1}, b'_{n+1})) \rfloor) \end{cases} \quad (5.11)$$

avec  $g(t'_n, z'_n) = \frac{1}{\omega} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor$ ,  $h(t'_{n+1}, b'_{n+1}) = \frac{1}{\omega} \lfloor \omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1}) \rfloor$  et  $b'_{n+1} = z'_n + \frac{1}{\omega} \lfloor \frac{\omega g(t'_n, z'_n)}{\beta} \rfloor$ .

Ce schéma correspond à celui obtenu par plongements successifs du schéma (5.10) dans  $\text{HR}_\omega$  puis dans les réels. Ce schéma est appelé *trace du schéma arithmétisé* et il est très ressemblant à (5.10).

Le but est d'estimer la distance entre  $z'_n$  et la solution du problème de Cauchy  $z(t_n)$ . Cette distance définit l'erreur de notre méthode d'arithmétisation.

Dans la suite, la notion de distance est définie à partir de la norme infinie :

$$\|\mathbf{x}\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

L'erreur de notre méthode d'arithmétisation est estimée par la quantité :  $\|z_n - z(t_n)\|$ . Elle est telle que :

**Théorème 14.** *Il existe des constantes limitées  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}'' \in \mathbb{R}$  telles que :*

$$\forall n \in [0, N], \|z'_n - z(t_n)\| = \frac{\mathcal{L}'}{\alpha} + \frac{\mathcal{L}''}{\beta^2}.$$

**Preuve** (du théorème 14). *Commençons par majorer le membre de gauche. Grâce à l'inégalité triangulaire nous avons :*

$$\|z_n - z(t_n)\| \leq \|z_n - z'_n\| + \|z'_n - z(t_n)\|$$

Pour majorer la quantité de gauche, nous majorons séparément chaque terme de droite.

**Étape 1 : Majoration de  $\|z_n - z'_n\|$**  Nous rappelons que tout nombre  $x$  peut se décomposer de manière unique sous la forme  $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$  où la partie fractionnaire notée  $\{\dots\}$  est comprise entre 0 inclus et 1 exclu. Dans la suite de la preuve, comme cette partie fractionnaire est majorée par 1, afin d'éviter d'alourdir les notations, nous n'explicitons pas le contenu des accolades.

Nous avons :

$$\begin{aligned} z'_{n+1} &= z'_n + \frac{1}{\omega} \lfloor \frac{\omega}{2\beta} (g(t'_n, z'_n) + h(t'_{n+1}, b'_{n+1})) \rfloor \\ &= z'_n + \frac{1}{2\beta} (g(t'_n, z'_n) + h(t'_{n+1}, b'_{n+1})) + \frac{1}{\omega} \{\dots\} \\ &= z'_n + \frac{1}{2\beta} g(t'_n, z'_n) + \frac{1}{2\beta\omega} [\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1})] + \frac{1}{\omega} \{\dots\} \\ &= z'_n + \frac{1}{2\beta} g(t'_n, z'_n) + \frac{1}{2\beta} f(t'_{n+1}, b'_{n+1}) + \frac{1}{2\beta\omega} \{\dots\} + \frac{1}{\omega} \{\dots\} \end{aligned}$$

D'après le calcul précédent et après regroupement des termes, nous avons :

$$\|z_{n+1} - z'_{n+1}\| \leq \|z_n - z'_n\| + \frac{1}{2\beta} \|f(t_n, z_n) - g(t'_n, z'_n)\| + \frac{1}{2\beta} \|f(t_{n+1}, z_n + \frac{1}{\beta} f(t'_n, z'_n)) - f(t'_{n+1}, b'_{n+1})\| + \frac{1}{2\beta} \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}$$

Il est clair que  $\|f(t_n, z_n) - g(t'_n, z'_n)\| \leq \frac{1}{\omega}$  (par définition de la fonction  $g$  et par les propriétés sur les parties entières).

Pour que le problème de Cauchy ait des solutions, la fonction  $f$  est supposée lipschitzienne<sup>5</sup> de constante de Lipschitz  $L$  non infiniment petite c'est-à-dire :

$$\forall n, \|f(t, x) - f(t', x')\| \leq L\|(t - t') + (x - x')\|.$$

Ainsi, nous avons :

$$\|f(t_{n+1}, z_n + \frac{1}{\beta}) - f(t'_{n+1}, b'_{n+1})\| \leq \|z_n - z'_n\| L_1 + \frac{1}{\omega} L_2 + \frac{1}{\beta\omega} L_3$$

avec  $L_1, L_2, L_3$  des constantes limitées.

Finalement,

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - z'_{n+1}\| &\leq \|z_n - z'_n\| + \frac{1}{\beta\omega} + \frac{1}{2\beta} (\|z_n - z'_n\| L_1 + \frac{1}{\omega} L_2 + \frac{1}{\beta\omega} L_3) + \frac{1}{\omega} \\ &\leq \|z_n - z'_n\| (1 + \frac{L_1}{2\beta}) + \frac{1}{\beta\omega} + \frac{L_2}{2\beta\omega} + \frac{1}{2\beta^2\omega} L_3 + \frac{1}{\omega} \\ &\leq \|z_n - z'_n\| (1 + \frac{L_1}{2\beta}) + \frac{L_4}{\omega} \end{aligned}$$

En posant  $\epsilon_n = \|z_n - z'(t_n)\|$ , la dernière inégalité équivaut à :

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n \left(1 + \frac{L_1}{2\beta}\right) + \frac{L_4}{\omega}. \quad (5.12)$$

Nous utilisons maintenant le lemme 3 page 140. que nous rappelons :

L'équation (5.12) devient :

$$\epsilon_n \leq \epsilon_0 \left(1 + \frac{L_1}{2\beta}\right)^n + \frac{2\beta L_4}{\omega} \left(\left(1 + \frac{L_1}{2\beta}\right)^n - 1\right).$$

5. Une application  $f$  de  $I \subset \mathbb{R}$  ( $I$  intervalle non vide et non restreint à un point) est lipschitzienne si  $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  avec  $k$  un réel strictement positif.

Puis en utilisant à la fois le lemme 4 page 140, le fait que la quantité  $\frac{1}{\omega}$  majore  $\epsilon_0 = \|z_0 - z'_0\|$  et que la quantité  $\frac{n}{\beta}$  est bornée (par  $(c - a)$ ), nous pouvons en conclure l'existence de constantes limitées  $L_5, L_6$  et  $L_7$  telle que :

$$\|z_n - z'_n\| \leq \frac{L_5}{\alpha} + \frac{L_6}{\omega} \leq \frac{L_7}{\alpha} \tag{5.13}$$

(Comme  $\frac{L_6}{\omega}$  est très inférieur à  $\frac{L_5}{\alpha}$ , il est toujours possible de trouver une constante limitée  $L_7$  telle que  $\frac{L_7}{\alpha}$  majore la somme des deux termes.)

**Etape 2 : Majoration de  $\|z'_n - z(t_n)\|$**

D'une part,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{2\beta}f(t_n, z_n) + \frac{1}{2\beta}f(t_{n+1}, z_n + hf(t_n, z_n)) \\ &= z_n + \frac{1}{2\beta}f(t_n, z_n) + \frac{1}{2\beta}(f(t_n, z_n) + \frac{1}{\beta}\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z_n) + \frac{1}{\beta}\frac{\partial f}{\partial z}(t_n, z_n)f(t_n, z_n)) + \frac{1}{2\beta^2}C_n. \end{aligned}$$

En posant,  $C = \max_{0 \leq n \leq N} C_n$  nous avons :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{1}{\beta}f(t_n, z_n) + \frac{1}{2\beta^2}\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z_n) + \frac{1}{2\beta^2}\frac{\partial f}{\partial z}(t_n, z_n)f(t_n, z_n) + \frac{1}{4\beta^3}C.$$

D'autre part, effectuons un développement limité de  $z(t_{n+1}) : \exists \gamma_n \in [t_n, t_n + h]$  tel que

$$\begin{aligned} z(t_{n+1}) &= z(t_n + \frac{1}{\beta}) = z(t_n) + \frac{1}{\beta}z'(t_n) + \frac{1}{2\beta^2}z''(t_n) + \frac{1}{6\beta^3}z'''(\gamma_n) \\ &= z(t_n) + \frac{1}{\beta}f(t_n, z(t_n)) + \frac{1}{2\beta^2}(\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z(t_n)) + f(t_n, z(t_n))\frac{\partial f}{\partial z}(t_n, z(t_n))) + \frac{1}{6\beta^3}z'''(\gamma_n). \end{aligned}$$

Ainsi,  $\|z_{n+1} - z(t_{n+1})\| \leq \|z_n - z(t_n)\| + \frac{1}{\beta}\|f(t_n, z_n) - f(t_n, z(t_n))\| + \frac{1}{2\beta^2}\|\frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z_n) - \frac{\partial f}{\partial t}(t_n, z(t_n))\| + \frac{1}{2\beta^2}\|\frac{\partial f}{\partial z}(t_n, z_n)f(t_n, z_n) - \frac{\partial f}{\partial z}(t_n, z(t_n))f(t_n, z(t_n))\| + \frac{L_8}{\beta^3}$

Nous posons  $\epsilon_{n+1} = \|z_{n+1} - z(t_{n+1})\|$ . Nous supposons maintenant que toutes les fonctions construites à partir de  $f$  ainsi que ses dérivées d'ordre 1 sont lipschitziennes de constante de Lipschitz limitée non infiniment petite sur un domaine limité.

Nous avons alors :

$$\epsilon_{n+1} \leq \epsilon_n \left(1 + \frac{L_7}{\beta}\right) + \frac{L_8}{\beta^3}$$

Puis en appliquant le lemme 3 :

$$\epsilon_n \leq \epsilon_0 \left(1 + \frac{L_7}{\beta}\right)^n + \frac{L_8}{\beta^2} \left(\frac{\left(1 + \frac{L_7}{\beta}\right)^n - 1}{L_7}\right)$$

De plus, comme  $\epsilon_0 = 0$  (car  $z_0 = z(t_0)$ ), en appliquant le Lemme 4, nous avons finalement :

$$\|z_{n+1} - z(t_{n+1})\| \leq \frac{L}{\beta^2} \tag{5.14}$$

Le théorème 14 est démontré en considérant les équations (5.13) et (5.14). Le signe  $\leq$  peut en effet être remplacé par  $=$  en multipliant le terme de droite par une constante limitée comprise entre 0 et 1.  $\square$

L'ordre d'un schéma arithmétisé a été défini dans [RWF<sup>+</sup>09] et rappelé dans le chapitre précédent page 142. Le corollaire suivant nous donne donc des conditions pour que le schéma arithmétisé de Heun soit d'ordre 1 ou 2 :

**Corollaire 3.**

- Si  $\frac{\beta^2}{\alpha}$  est limité alors le schéma arithmétisé de Heun est d'ordre 2.
- Si  $\frac{\beta^2}{\alpha}$  est infiniment grand, alors le schéma arithmétisé de Heun est d'ordre  $r$ , où  $r$  est l'unique nombre réel (nécessairement strictement inférieur à 2) tel que  $\alpha = \beta^r$  ;

**Preuve .**

- Si  $\frac{\beta^2}{\alpha}$  est limité, alors il existe  $\delta$  limité tel que  $\beta^2 = \delta\alpha$  et donc d'après le théorème 14 :  

$$\|z'_n - z(t_n)\| \leq \frac{c_1}{\alpha} + \frac{c_2}{\beta^2} \leq \frac{1}{\beta^2} (\delta c_1 + c_2)$$
 avec  $(\delta c_1 + c_2)$  limité.
- Sinon, on a  $\|z'_n - z(t_n)\| \leq \frac{1}{\beta^r} \left( c_1 + \frac{c_2}{\beta^{2-r}} \right)$  avec  $\left( c_1 + \frac{c_2}{\beta^{2-r}} \right)$  limité.  $\square$

Néanmoins, si nous voulons tenir compte de la condition de connexité, nous avons le corollaire suivant :

**Corollaire 4.** *Un schéma arithmétisé d'ordre 2 est incompatible avec la condition de connexité  $\alpha R < \beta - 2$ .*

Nous devons donc faire un choix entre un schéma arithmétisé d'ordre élevé (qui permet de mieux approcher la courbe que ne le ferait un schéma arithmétisé d'ordre plus faible) générant un cercle non connexe ou un schéma arithmétisé d'ordre plus faible générant un cercle connexe. La preuve du corollaire 4 est une conséquence directe des corollaires 2 et 3.

**Remarque 12.** *Il est clair que le terme en  $\|z_n - z'_n\|$  est un terme de l'ordre de  $\frac{1}{\alpha}$ . Cela montre que l'erreur spécifique rajoutée par le processus d'arithmétisation est de l'ordre de  $\frac{1}{\alpha}$  comparé à l'erreur du schéma numérique continu qui est de l'ordre de  $\frac{1}{\beta}$  ou  $\frac{1}{\beta^2}$  (suivant s'il s'agit du schéma de Euler ou de Heun dans notre cas). Ainsi, pour obtenir un ordre global d'un schéma arithmétisé plus élevé, il faut "jouer" sur l'ordre de grandeur du  $\alpha$ .*

## Conclusion sur l'arithmétisation par le schéma de Heun

Nous avons présenté dans cette partie la méthode d'arithmétisation par le schéma de Heun en l'appliquant au cas du cercle. Nous avons vu qu'une interprétation à l'échelle globale  $\omega$  produisait des arcs de cercles fortement non connexes. Cela justifie un passage à une échelle intermédiaire. Nous en avons considéré deux : l'échelle  $\alpha$  et l'échelle  $\beta$ . Nous avons mis en évidence pour chacune de ces deux échelles une condition de connexité des arcs de cercles ainsi interprétés. De plus, nous avons montré que le schéma arithmétisé de Heun est d'ordre 2. Cette notion d'ordre est celle introduite dans [RWF<sup>+</sup>09]. Une étude complémentaire pour déterminer une condition de connexité des arcs de cercles obtenus par arithmétisation par le schéma de Heun interprétés à l'échelle  $\beta$  mériterait d'être menée. La condition de connexité des arcs de cercles obtenus grâce au schéma d'Euler est une condition plus forte que celle en rapport avec le schéma de Heun au sens où la condition de connexité dans le cas du schéma d'Euler inclut celle correspondant au schéma de Heun. Néanmoins, au vu des résultats numériques, il semblerait que la condition appliquée dans le cas du schéma d'Euler est aussi valable dans le cas de Heun. Des recherches sont en cours pour le prouver. Une autre perspective serait de trouver un schéma dont l'ordre du schéma arithmétisé serait assez élevé (minimisant ainsi l'erreur) tout en étant compatible avec les conditions de connexité.

## 2 $\Omega$ -arithmétisation des ellipses

Dans cette partie, nous présentons l'application de la méthode d'arithmétisation étudiée au chapitre 4 non plus à des entiers mais à des suites d'entiers  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où pour chaque  $n$ ,  $a_n \in \mathbb{Z}$  (par exemple  $a = (0, 1, 2, 3, \dots)$ ) appelées  $\Omega$ -entiers [CWF<sup>+</sup>09b]. Nous obtenons comme sur la figure 5.3 des arcs d'ellipses à différentes échelles (multi-résolution) que nous étudions (connexité) dans la partie 2.2.1.

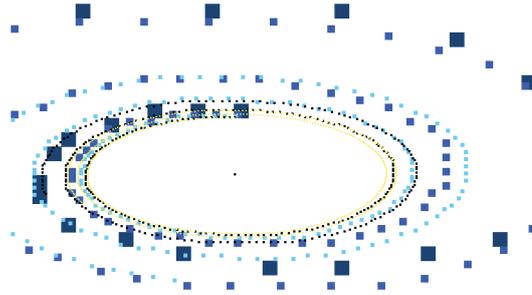


FIGURE 5.3 – Représentation graphique de l'aspect multi-résolution de l' $\Omega$ -arithmétisation d'un arc d'ellipse.

### 2.1 Arcs d'ellipses discrets

Dans cette partie, nous rappelons la méthode d' $\Omega$ -arithmétisation (méthode d'arithmétisation appliquée aux  $\Omega$ -entiers) [Cho10, CWF<sup>+</sup>09b]. Comme nous l'avons vu l'arithmétisation permet de transformer un schéma d'Euler continu en un discret. Il permet de générer pas à pas un algorithme permettant de tracer un objet discret.

Considérons l'équation d'une ellipse alignée sur les axes :

$$\frac{x(t)^2}{a'^2} + \frac{y(t)^2}{b'^2} = 1 \tag{5.15}$$

avec  $a'$  et  $b' \in \mathbb{Q}$ . L'équation paramétrique associée est donnée par :

$$\begin{cases} x = a' \cos(t) \\ y = b' \sin(t). \end{cases} \tag{5.16}$$

Elle est la solution du système différentiel :

$$\begin{cases} x' = -a'/b' y(t) \\ y' = b'/a' x(t). \end{cases} \tag{5.17}$$

Comme  $a'$  et  $b'$  sont dans  $\mathbb{Q}$ , il existe  $P, Q \in \mathbb{Z}$  et  $R, S \in \mathbb{N}^*$  tels que  $a' = P/R$  et  $b' = Q/S$ . Nous pouvons aussi définir deux entiers  $A$  et  $B$  tels que  $A/B = a'/b'$  et  $b/a = b'/a'$ . Par conséquent, nous ne travaillons maintenant qu'avec des entiers.

Pour obtenir une solution du système précédent, nous utilisons comme dans le cas du cercle, la méthode d'Euler :

$$\begin{cases} (x_0, y_0) &= (0, b') \\ (x_{n+1}, y_{n+1}) &= (x_n, y_n) + \left(-\frac{A}{B}h y_n, \frac{B}{A}h x_n\right). \end{cases} \tag{5.18}$$

Nous choisissons le pas d'intégration  $h$  qui tend vers 0. En théorie, plus le pas d'intégration est petit, meilleure est l'approximation. En pratique, cependant si le pas est de l'ordre d'un *ulp* (unit at the last place), des problèmes d'imprécision numérique surviennent. Néanmoins, le pas choisi lors de nos expérimentations est bien supérieur à un *ulp*.

Pour plonger ce schéma dans la droite d'Harthong-Reeb  $\text{HR}_\Omega$  nous utilisons l'isomorphisme  $\psi_\omega$  :

$$\begin{aligned} \psi_\omega &: \mathbb{R}_{lim} \longrightarrow \text{HR}_\Omega \\ x &\longmapsto \lfloor \omega x \rfloor \end{aligned}$$

et nous remplaçons le pas  $h$  par  $1/\beta$ . Ainsi, nous avons le schéma suivant :

$$\begin{cases} (X_0, Y_0) &= (0, \lfloor \omega b' \rfloor) \\ (X_{n+1}, Y_{n+1}) &= (X_n, Y_n) + ((-AY_n) \div (B\beta), BX_n \div (A\beta)) \end{cases} \quad (5.19)$$

où

- $\exists \alpha$  tels que  $\alpha, \beta, \omega \in \text{HR}_\Omega$ ;  $\alpha, \beta, \omega \simeq +\infty$  et  $\omega = \alpha\beta$  ( $\omega$  est appelé *échelle globale*)
- $\lfloor \omega b' \rfloor = (\lfloor \omega_0 b' \rfloor, \lfloor \omega_1 b' \rfloor, \dots)$
- $\forall U, V \in \text{HR}_\Omega, U \div V = (\lfloor U_0 \div V_0 \rfloor, \lfloor U_1 \div V_1 \rfloor, \dots)$
- $(X_0, Y_0) \in \text{HR}_\Omega^2$

Ces notations ne sont qu'une adaptation aux suites d'entiers des notations que nous avons précédemment dans le cas des entiers.

Comme nous l'avons vu, ce schéma génère des valeurs infiniment éloignées les unes des autres : la courbe n'est pas 8-connexe.

Pour pallier à ce problème nous passons à une échelle intermédiaire. Arbitrairement nous choisissons  $\alpha$  ( $\beta$  aurait aussi bien pu être choisi). Pour cela nous introduisons les notations suivantes. Soit  $X = \widetilde{X}\beta + \widehat{X}$  pour tout élément  $X \in \text{HR}_\omega^{om}$  alors  $\widetilde{X} = X \div \beta \in \text{HR}_\alpha^{om}$  et  $\widehat{X} = X \bmod \beta \in \{0, \dots, \beta - 1\}$ . L'élément  $\widetilde{X} \in \text{HR}_\alpha^{om}$  peut être interprété comme le résultat du changement d'échelle de  $X$ . Grâce à cette décomposition nous obtenons le schéma suivant (généralisation du schéma 2 au cas de l'ellipse) :

$$\begin{cases} (\widetilde{X}_0, \widetilde{Y}_0) &= (0, \lfloor \omega b' \rfloor \div \beta) \\ (\widehat{X}_0, \widehat{Y}_0) &= (0, \lfloor \omega b' \rfloor \bmod \beta) \\ (F_n^1, F_n^2) &= ((-A(\widetilde{Y}_n\beta + \widehat{Y}_n)) \div (B\beta), B(\widetilde{X}_n\beta + \widehat{X}_n) \div (A\beta)) \\ (\widetilde{X}_{n+1}, \widetilde{Y}_{n+1}) &= (\widetilde{X}_n + (\widetilde{X}_n + F_n^1) \div \beta, \widetilde{Y}_n + (\widetilde{Y}_n + F_n^2) \div \beta) \\ (\widehat{X}_{n+1}, \widehat{Y}_{n+1}) &= ((\widehat{X}_n + F_n^1) \bmod \beta, (\widehat{Y}_n + F_n^2) \bmod \beta) \end{cases} \quad (5.20)$$

Les variables servant à tracer les ellipses sont  $\widetilde{X}$  et  $\widetilde{Y} \in \text{HR}_\alpha^{om}$ . Les variables  $\widehat{X}$  et  $\widehat{Y}$  sont des auxiliaires de calcul.

Soit  $E_d^\alpha(0, A, B)$  la courbe discrète définie comme la solution  $(\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n)$  de (5.20). La courbe  $E_d^\alpha(0, A, B)$  est l'arithmétisation à l'échelle intermédiaire  $\alpha$  de l'ellipse de départ (5.15).

L'algorithme (5.20) est standard au sens où pour  $\alpha, \beta$  et  $\omega$  standard, le schéma usuel est dans  $\mathbb{Z}^2$ . Comme pour les cercles nous pouvons donc prendre des paramètres qui ne sont pas infiniment grands. Néanmoins, nous ne considérons ici que des  $\Omega$ -entiers, *i.e.* des suites infinies d'entiers. Par exemple,  $a = (a)_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $b = (b)_{m \in \mathbb{N}}$  et  $\beta = (\beta_m)_{m \in \mathbb{N}}$  and  $(\widetilde{X}_n, \widetilde{Y}_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\widetilde{X}_{m,n}), (\widetilde{Y}_{m,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ . Avec cette notation,  $n$  est l'itération de l'algorithme et  $m$  est le niveau de la suite.

## 2.2 Propriétés et résultats graphiques.

Dans cette partie nous montrons comment assurer la 8-connexité des arcs d'ellipses obtenus. Nous donnons aussi quelques illustrations graphiques obtenues avec un programme écrit en Ocaml de Agathe Chollet.

### 2.2.1 Propriétés de connexité

Introduisons d'abord quelques définitions dont nous aurons besoin dans la suite.

**Définition 18.** *Un arc de  $E_d^\alpha(0, A, B)$  est une suite de la forme  $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n)_{k < n < k+p}$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $p \in \mathbb{N}$  fixés.*

Nous définissons maintenant une notion de connexité sur les  $\Omega$ -entiers appelée  $8_\Omega$ -connexité :

**Définition 19.** *Une courbe définie par les  $\Omega$ -points  $((\tilde{X}_{m,n}), (\tilde{Y}_{m,n}))_{(m \in \mathbb{N}, k \leq n \leq k+p)}$  est  $8_\Omega$ -connexe si*

$$\forall n, \forall m, |X_{m,n+1} - X_{m,n}| \leq 1 \text{ et } |Y_{m,n+1} - Y_{m,n}| \leq 1.$$

Cette notion est équivalente à la notion classique de 8-connexité pour chaque niveau  $m$ . Cela est une généralisation naturelle aux  $\Omega$ -nombres de la connexité. Nous définissons aussi un rectangle de  $\mathbb{Z}_\Omega^2$ . Soit  $R_{l,w}$  le rectangle de  $\mathbb{Z}_\Omega^2$ , centré en zéro de longueur  $2l = (2l, 2l, \dots)$  et de hauteur  $2w = (2w, 2w, \dots)$  défini par :

$$R_{l,w} = \{(X, Y) \in \mathbb{Z}_\Omega^2 ; -l \leq X < l \text{ et } -w \leq Y < w\}.$$

Comme les  $\Omega$ -nombres sont des suites, cette définition devient :

$$R_{l,w} = \{((X_m)_{(m \in \mathbb{N})}, (Y_m)_{(m \in \mathbb{N})}) \in \mathbb{Z}_\Omega^2 ; \forall n \in \mathbb{N} (-l \leq X_n < l \text{ et } -w \leq Y_n < w)\}.$$

Classiquement la division euclidienne opère sur des entiers. Dans la preuve qui suit, nous l'étendons aux nombres rationnels. Nous définissons  $u \div v$  où  $u$  et  $v$  sont des fractions rationnelles par  $u \div v =_{def} \lfloor u/v \rfloor$ .

Le théorème suivant est une extension du théorème 10. Il s'agit en fait d'une double extension : passage du cercle aux ellipses et passage des entiers aux  $\Omega$ -entiers. La preuve est la même que celle du théorème 10. Comme nous travaillons avec des  $\Omega$ -entiers, le résultat est un résultat multi-échelle valable à toutes les échelles en même temps.

**Théorème 15.** *Tout arc de  $E_d^\alpha(0, A, B)$  dans le rectangle  $R_{l,w}$  est  $8_\Omega$ -connexe pour  $l = A\beta \div B$  et  $B\beta \div A$ .*

**Preuve .** (du théorème 15) Soit  $\Gamma = ((\tilde{x}_n, \tilde{Y}_n))_{k \leq n \leq k+p}$  un arc de  $E_d^\alpha(0, a, b)$  tel que  $(\tilde{X}_n, \tilde{Y}_n) \in R_\beta$  pour chaque  $n = k, \dots, k+p$ .

La preuve est en deux parties : dans la partie (a) nous donnons une condition nécessaire et suffisante concernant la connexité de  $\Gamma$ , dans la partie (b) nous montrons que la condition  $\Gamma \subset R_{l,w}$  avec  $(l, w) = (A\beta \div B, B\beta \div A)$  est suffisante.

**Partie (a) :**

En utilisant les deux schémas (5.19) et (5.20) et les propriétés de la partie entière, les conditions suivantes sont équivalentes<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned}
-1 &\leq \widetilde{X}_{m,n+1} - \widetilde{X}_{m,n} \leq 1 \\
-1 &\leq (\widehat{X}_{m,n} + F_n^1) \div \beta_m \leq 1 \quad \star \\
-\beta_m &\leq \widehat{X}_n + F_n^1 < 2\beta_m \quad \star\star \\
-\beta_m - \widehat{X}_{m,n} &\leq (-A(\widetilde{Y}_{m,n}\beta_m + \widehat{Y}_{m,n})) \div (B\beta_m) < 2\beta_m - \widehat{X}_{m,n} \quad \star \\
-B\beta_m^2 - B\widehat{X}_{m,n}\beta_m &\leq -A(\widetilde{Y}_n\beta_m + \widehat{Y}_{m,n}) < 2B\beta_m^2 - B\widehat{X}_{m,n}\beta_m \quad \star\star \\
-B\beta_m^2 - B\widehat{X}_{m,n}\beta_m &\leq -AY_{m,n} < 2B\beta_m^2 - B\widehat{X}_{m,n}\beta_m \\
-\frac{B}{A}(\beta_m^2 + \widehat{X}_{m,n}\beta_m) &\leq -Y_{m,n} < \frac{B}{A}(2\beta_m^2 - \widehat{X}_{m,n}\beta_m)
\end{aligned}$$

Avec une preuve similaire pour  $(\widetilde{Y}_{m,n+1} - \widetilde{Y}_{m,n})$ ,  $\Gamma$  est  $8_\Omega$ -connexe si et seulement si, pour chaque  $n = k, \dots, k+p-1$  pour tout  $m$ , nous avons les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{B}{A}(-2\beta_m^2 + \widehat{X}_{m,n}\beta_m) &< Y_{m,n} \leq \frac{B}{A}(\beta_m^2 + \widehat{X}_{m,n}\beta_m) \\
\frac{A}{B}(\beta_m^2 + \widehat{Y}_{m,n}\beta_m) &\leq X_{m,n} < \frac{A}{B}(2\beta_m^2 - \widehat{Y}_{m,n}\beta_m).
\end{aligned}$$

**Partie (b) :**

Nous prouvons dans cette partie que si  $\Gamma \subset R_{A\beta \div B, B\beta \div A}$ , alors la condition précédente est vérifiée. Comme  $0 \leq \widehat{X}_n \leq \beta - 1$  et  $0 \leq \widehat{Y}_n \leq \beta - 1$ , nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{B}{A}(-2\beta_m^2 + \widehat{X}_{m,n}\beta_m) &\leq \frac{B}{A}(-\beta_m^2 - \beta_m) < -\frac{B}{A}\beta_m^2 < \frac{B}{A}\beta_m^2 \leq \frac{B}{A}(\beta_m^2 + \widehat{X}_{m,n}\beta_m) \\
-\frac{A}{B}(\beta_m^2 + \widehat{Y}_{m,n}\beta_m) &\leq -\frac{A}{B}\beta_m^2 < \frac{A}{B}\beta_m^2 < \frac{A}{B}(\beta_m^2 + \beta_m) \leq \frac{A}{B}(2\beta_m^2 - \widehat{Y}_{m,n}\beta_m).
\end{aligned}$$

D'après  $-\frac{B}{A}\beta_m^2 \leq Y_n < \frac{B}{A}\beta_m^2$ , nous avons  $(-\frac{B}{A}\beta_m^2) \div \beta \leq Y_n \div \beta < \frac{B}{A}\beta_m^2 \div \beta$  et par conséquent  $-\frac{B}{A}\beta_m \leq \widetilde{Y}_n < \frac{B}{A}\beta_m$ . Cela implique que  $-(B\beta_m \div A) \leq \widetilde{Y}_n < B\beta_m \div A$ .

Pour  $\widetilde{X}$ , en appliquant la même propriété, si  $-\frac{A}{B}\beta_m^2 \leq X_n < \frac{A}{B}\beta_m^2$ , alors  $-(A\beta_m \div B) \leq \widetilde{X}_n < A\beta_m \div B$ . Cette condition est celle de l'appartenance au rectangle  $R_{A\beta \div B, B\beta \div A}$  et par conséquent de la  $8_\Omega$ -connexité.  $\square$

**2.2.2 Illustrations graphiques**

Dans cette section, nous donnons quelques exemples de différentes représentations d'arcs d'ellipses alignées sur les axes pour illustrer notre théorème de connexité 15. Ces travaux sont le fruit d'une collaboration avec Agathe Chollet [CWA<sup>+</sup>10]. Les  $\Omega$ -entiers peuvent être vus comme des fonctions. Les langages fonctionnels fournissent un bon outil pour les représenter. C'est pourquoi, nous utilisons le langage OCaml pour les implémenter [oca, CMP00].

6. Comme précédemment, nous notons  $\star$  les lignes qui se déduisent des schémas arithmétisés et par  $\star\star$  celles découlant des propriétés de la partie entière.

En 2D, un  $\Omega$ -pixel est défini par  $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ . Pour représenter graphiquement ces  $\Omega$ -pixels, nous utilisons de manière arbitraire<sup>7</sup> la représentation des arbres quaternaires (*quad-tree* en anglais). Ainsi, le pixel au niveau 0 est représenté par un carré de côté  $l$ , au niveau 1 par un carré de côté  $l/2$ , celui de niveau  $n$  par un carré de côté  $l/2^n$  comme sur la figure 5.4.

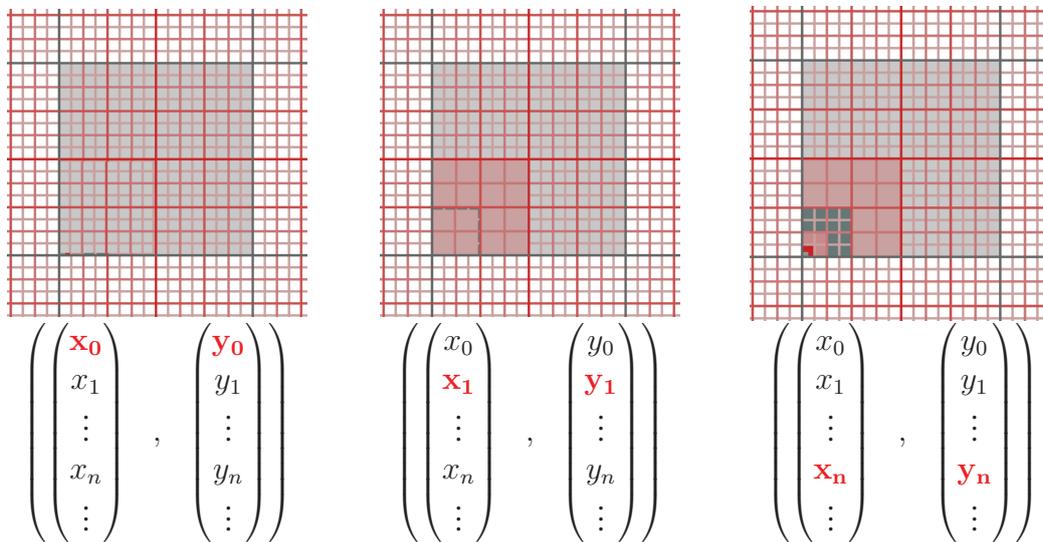


FIGURE 5.4 – Représentation quad-tree des  $\Omega$ -pixels : le pixel  $((x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}})$  est représenté au niveau 0 par un carré de côté  $l$ , celui de niveau  $n$  par un carré de côté  $l/2^n$  [Cho10].

L'aspect multirésolution est représenté par différentes couleurs qui codent le niveau  $m$  dans l' $\Omega$ -nombre. Il existe un lien entre le niveau de résolution et l'erreur. Le point important à comprendre est que le  $\Omega$ -entier contient toutes les échelles en même temps. Afin de les représenter, nous en avons extrait seulement quelques unes [Cho10, CWF<sup>+</sup>09b].

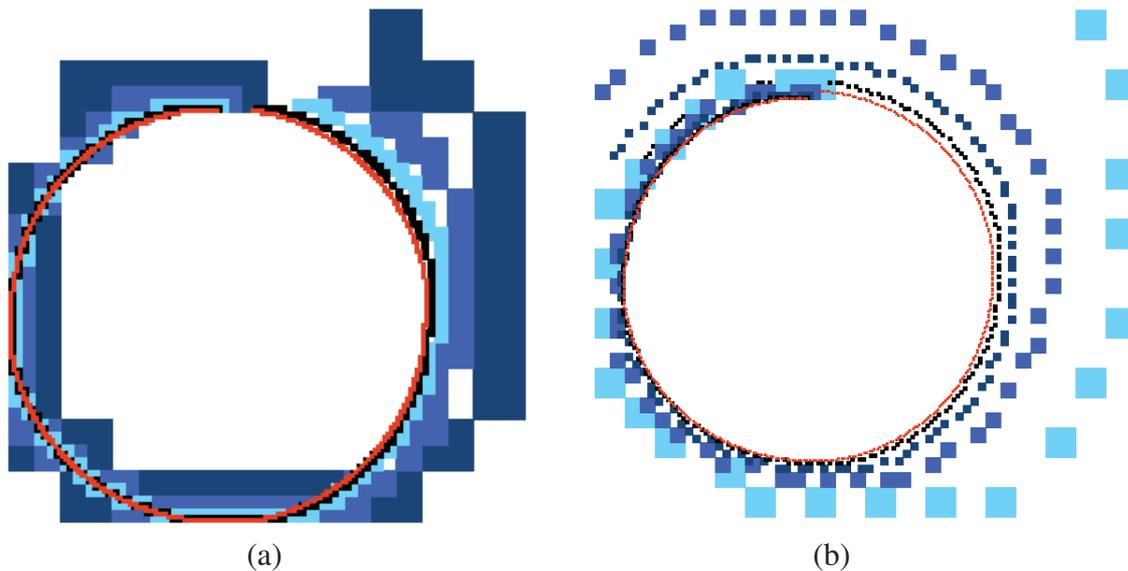


FIGURE 5.5 – Représentations graphiques de l' $\Omega$ -arithmétisation : arcs de cercles connexe et non connexe.

7. Nous aurions pu aussi bien choisir la représentation logarithmique : le carré du niveau  $n$  est  $n^2$  fois plus petit que celui de départ.

D'après le théorème 15 nous avons ici deux  $\Omega$ -arithmétisations d'arcs de cercles (cas particuliers d'ellipses). Sur la figure 5.7(a), l'arc initial est connexe, il satisfait  $\alpha R < \beta$ ,  $(R, \alpha, \beta) = ((2)_n, (2n)_n, (9n)_n)$ , et nous avons aussi  $\forall n \in \mathbb{N}, R\alpha_n = 2 * 2n = 4n < 9n$ . Le deuxième exemple de la figure 5.7(b) n'est pas connexe. Ses paramètres sont  $(R, \alpha, \beta) = ((2)_n, (4n)_n, (3n)_n)$ .

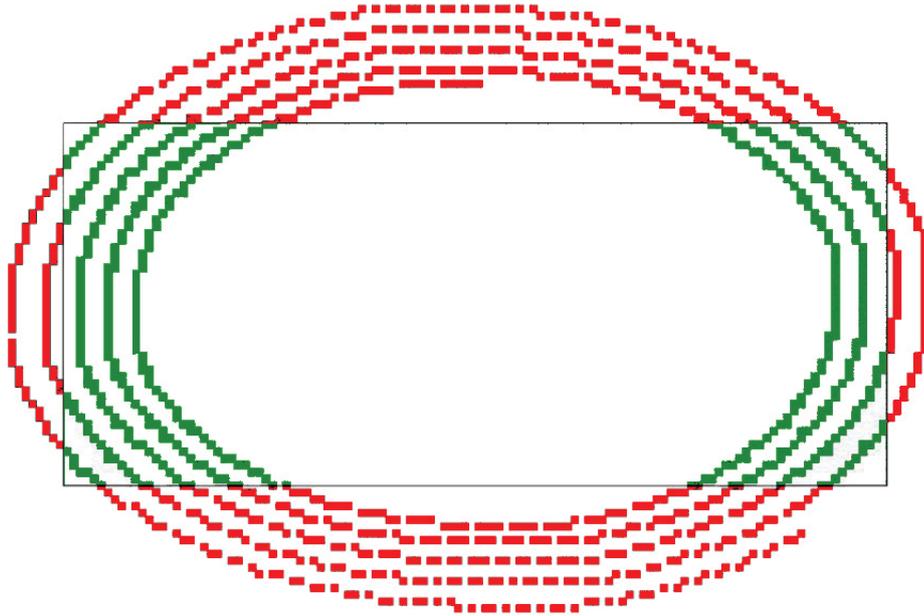


FIGURE 5.6 – Illustration du théorème avec l'ellipse  $E_d^{(2n)_{n \in \mathbb{N}}}(0, 3, 2)$  avec  $\beta = (80n)_{n \in \mathbb{N}}$ . À l'intérieur du rectangle  $R_{(2\beta; [0.5\beta])}$  les arcs d'ellipses sont connexes, en dehors ils ne le sont pas nécessairement.

La figure 5.7(b) nous montre que les morceaux d'ellipses contenus dans le rectangle  $R_{(2\beta; [0.5\beta])}$  sont connexes et ceux en dehors ne le sont pas nécessairement.

Sur la figure 5.7 nous avons représenté en (a) la représentation multi-résolution de l'ellipse discrète  $E_d^{(2n)_{n \in \mathbb{N}}}(0, 4, 2)$  avec  $\beta = (7n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Les figures (b), (c), (d), (e), (f) représentent séparément les différentes échelles. Le rectangle  $R_{(2\beta; [0.5\beta])}$  est aussi représenté sur chaque sous-figure.

## Conclusion sur l'application aux ellipses

Dans cette partie nous avons étendu nos résultats de [RWF<sup>+</sup>09]. En collaboration avec Agathe Chollet, nous avons appliqué la méthode d' $\Omega$ -arithmétisation (méthode d'arithmétisation appliquée aux  $\Omega$ -entiers) [Cho10, CWF<sup>+</sup>09b] aux ellipses. Nous avons mis en évidence une condition de connexité pour chaque niveau de l' $\Omega$ -pixel. A l'intérieur d'un certain rectangle défini à partir des longueurs des axes de l'ellipse, les arcs d'ellipses sont connexes. A l'extérieur, ils ne le sont pas nécessairement.

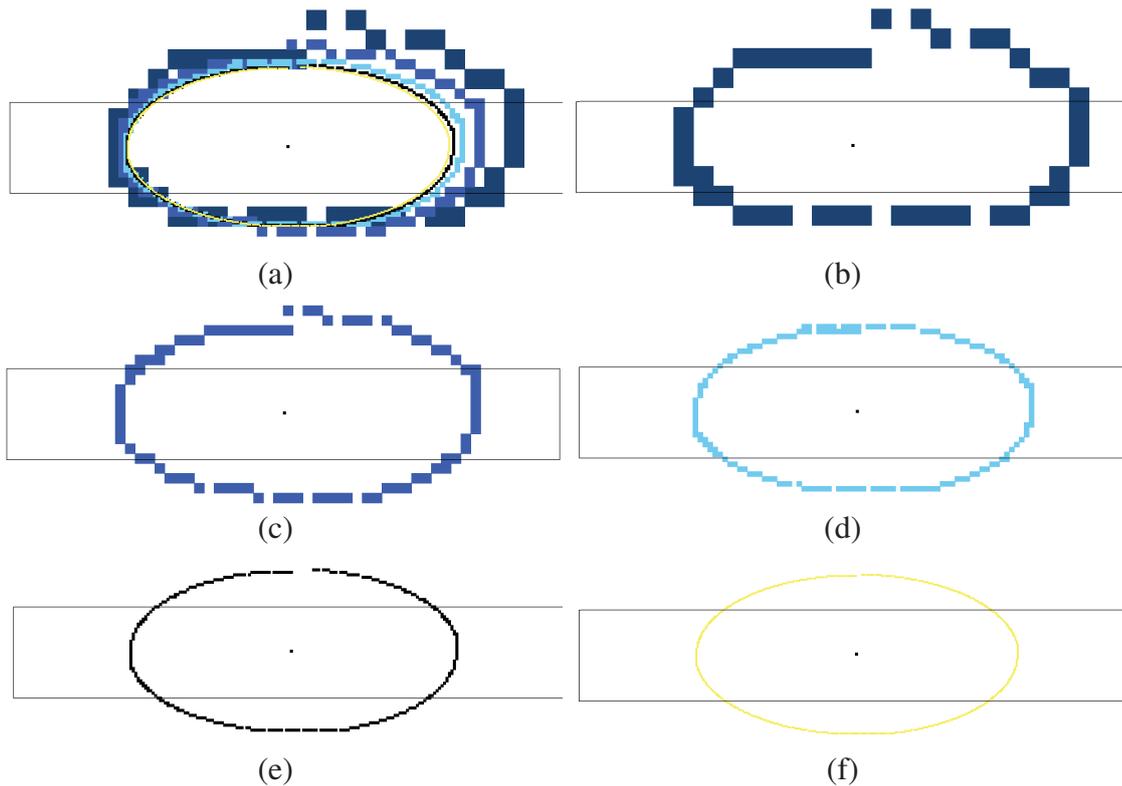


FIGURE 5.7 – Représentations graphiques des ellipses à différentes échelles avec le rectangle de connexité associé.

## Conclusion du Chapitre 5

Dans ce chapitre, nous avons donné suite à nos travaux précédents concernant la méthode d'arithmétisation [Cho10, RWF<sup>+</sup>09]. Nous avons présenté la méthode d'arithmétisation par le schéma de Heun. Lors de l'interprétation à l'échelle globale  $\omega$ , les arcs de cercles générés par la méthode d'arithmétisation par ce schéma sont fortement non connexes. Après passage à des échelles intermédiaires, nous avons mis en évidence pour chacune d'entre elles une condition de connexité. Nous avons aussi montré que le schéma arithmétisé de Heun est d'ordre 2 (comme le schéma de Heun classique).

Nous avons ensuite utilisé la méthode d'arithmétisation à des suites d'entiers : les  $\Omega$ -entiers introduite par Agathe Chollet [Cho10, CWF<sup>+</sup>09b]. En collaboration avec Agathe Chollet, nous l'avons appliqué aux ellipses. Pour chaque niveau de la suite des  $\Omega$ -entiers, nous avons mis en évidence une condition de connexité.

---

# CONCLUSION DE LA PARTIE ARITHMÉTISATION

---

Dans cette partie, nous avons rappelé certains résultats d'analyse nonstandard et présenté certains travaux antérieurs. Ils concernent notamment le processus d'arithmétisation par le schéma d'Euler appliqué aux cercles [RWF<sup>+</sup>09]. Nous avons ensuite présenté de nouveaux travaux concernant ce processus d'arithmétisation utilisant cette fois le schéma de Heun. Nous proposons également une condition garantissant la connexité des cercles ainsi générés. Ce critère de connexité est légèrement plus restrictif que celui que nous avons prouvé dans le cas du schéma d'Euler. Néanmoins, il semblerait qu'expérimentalement la même condition est encore vérifiée. Cela reste une conjecture qu'il est maintenant nécessaire de vérifier. Nous montrons toutefois que le schéma arithmétisé est d'ordre 2 : l'ordre permet d'estimer l'erreur globale (différence entre la trace du schéma arithmétisé et le schéma de Heun de départ). Nous pouvons donc en déduire que les cercles discrets générés pas le schéma de Heun sont plus proches du cercle continu que ceux issus du processus d'arithmétisation par le schéma d'Euler (ordre 1). Malheureusement, la condition de connexité n'est pas compatible avec le fait que le schéma soit d'ordre 2. Cela impose un choix entre une courbe connexe mais moins précise et une courbe non connexe mais plus exacte. De plus, une collaboration avec Agathe Chollet a permis d'étendre le processus d'arithmétisation aux ellipses et aux  $\Omega$ -entiers (suite d'entiers). Ainsi, pour chaque niveau dans la suite d'entiers, une condition de connexité généralisant celle qui concernait les cercles a été mise en évidence. Ces travaux ont été publiés dans [CWA<sup>+</sup>10]. De nouvelles pistes méritent néanmoins d'être explorées. Par exemple, une étude du processus d'arithmétisation avec des schémas de type Runge-Kutta (d'ordre 4). Dans ce cas, condition de connexité et ordre du schéma arithmétisé plus élevé pourraient éventuellement être compatibles. D'autre part, d'autres courbes comme des polynômes ou des courbes splines (polynôme par morceaux) pourraient être arithmétisées. En effet, ces courbes sont notamment utilisées dans des problèmes d'interpolation. Cela pourra permettre de modéliser plus facilement certaines formes en vue d'une nouvelle approche de reconnaissances de formes.



---

---

# CONCLUSION

---

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de l'analyse d'images. En effet, l'estimation de paramètres des transformations et la reconnaissance de formes sont des intérêts principaux dans ce domaine. Nous nous sommes particulièrement intéressés dans ce manuscrit aux méthodes permettant de décomposer des rotations et à une méthode permettant de générer des cercles et des ellipses discret(e)s.

La décomposition des rotations est utile dans beaucoup de domaines applicatifs (médecine, vision par ordinateur, ...). Des méthodes permettant de décomposer les rotations existent mais certaines ne peuvent pas être adaptées à une dimension quelconque [Che04, CNP00], d'autres ne sont pas robustes au bruit [FD10, AGARAVS09] : une perturbation dans les données de départ (données connues avec une certaine incertitude) implique une erreur très importante dans la détermination des paramètres de rotation. Nous avons évalué l'erreur de l'algorithme de reconstruction des rotations de Fontijne [FD10] à l'aide des médiatrices généralisées [RALSA10]. L'algorithme de Fontijne est fondé sur une construction incrémentale de médiatrices. Si les points sont exacts, ces médiatrices déterminent bien les axes de réflexions qui composent la rotation. Si les données sont bruitées, le premier axe de réflexion est déterminé avec une petite erreur, le second avec une erreur plus importante (les erreurs se cumulent) et ainsi de suite. Dans le cas de données bruitées, nous pouvons considérer, non plus le point mais une petite surface autour de ce point. Dans ce cas, nous construisons les médiatrices généralisées (ensemble des médiatrices entre tous les couples de points appartenant à deux surfaces) [RALSA10, ALSR11]. Dès la première étape, lors du calcul de l'image par la médiatrice généralisée, il apparaît clairement que nous n'obtenons plus un élément de même aire que ceux que nous nous étions donnés au départ mais un élément avec une surface beaucoup plus importante. Cela permet vraiment de mettre en évidence que l'algorithme ne peut pas être utilisé dans le cas de données bruitées car l'erreur commise n'est pas négligeable.

Comme les algorithmes existants présentent certains inconvénients majeurs (pas généralisable à la  $nD$ , pas résistant au bruit), nous proposons dans ce manuscrit deux algorithmes de décomposition des rotations à partir des  $n$  vecteurs de la base notés  $x_i$  et de leurs images notées  $y_i$  par la rotation (les vecteurs sont supposés appariés). Le premier utilise l'algèbre géométrique et le second la décomposition matricielle de Schur. Leur introduction a nécessité une étude approfondie des rotations  $nD$ .

D'après le théorème de Cartan-Dieudonné, nous savons que les rotations  $nD$  se décomposent en au plus  $n$  réflexions. La composition de deux de ces rotations est une rotation plane. Ainsi toute rotation  $R$  de dimension  $n$  peut se décomposer en composées de rotations planes. Si les angles de rotation de ces rotations planes sont égaux, la réflexion admet certaines propriétés. En effet, comme tout plan généré par un vecteur et son image par la rotation sont des

plans invariants, elle possède une infinité de plans de rotation. De telles rotations sont appelées *rotations isoclines* [Man14, Meb94]. L'espace  $E$  sur lequel est défini la rotation peut donc être décomposé en sous-espaces où la restriction de la rotation est une rotation isocline (infinité de plans de rotation) et en sous-espaces sur lesquels la rotation en admet un nombre fini. Ces deux types de sous-espaces sont appelés *sous-espaces quasi-isogonaux*. D'autre part, nous savons que cet espace  $E$  peut être décomposé en somme directe orthogonale de deux sous-espaces : le sous-espace  $\mathcal{P}$  (somme directe orthogonale des plans de rotation) et le sous-espace  $F$  (ensemble des vecteurs laissés fixes par la rotation). Nous avons montré que le sous-espace  $P$  était généré par  $\text{Im}(R - I)$  où  $I$  est l'identité. Par conséquent, trouver une base de  $P$  permet de déterminer une base de l'ensemble formé par les plans de rotations. Une méthode pour calculer cette base est d'utiliser une décomposition en valeurs singulières de la matrice des  $y_i - x_i$ . Grâce à cette décomposition matricielle, nous pouvons trouver une base de  $P$  ainsi qu'une base pour chacun des sous-espaces isogonaux. À partir de ces différentes bases et de la propriété de construction des plans de rotation des rotations isoclines que nous venons de mentionner, nous retrouvons les plans de rotation et par conséquent les angles qui sont obtenus par projection des couples formés pour un  $i$  donné par les vecteurs  $x_i$  et  $y_i$ . Si les données sont bruitées nous adaptons notre algorithme en considérant non plus comme isoclines des rotations de même angle mais de rotations d'angles proches. Deux angles sont considérés ainsi si la valeur absolue de leur différence est plus petite qu'un certain  $\beta$ . Les angles qui sont proches à  $\beta$  près forment une *composante quasi-isogonale*. On considère que la rotation composée de rotations planes d'angles appartenant à une même composante quasi-isogonale se comporte comme une rotation isocline (infinité de plans de rotation). Ainsi notre algorithme peut être utilisé avec des données bruitées.

Nous avons aussi proposé un second algorithme basé sur la décomposition matricielle de Schur. Cet algorithme permet de retrouver les paramètres d'une rotation à partir des  $n$  vecteurs de la base et de leurs images (les vecteurs sont supposés appariés et peuvent être bruités). La décomposition de Schur de la matrice composée par les vecteurs  $y_i$  donne deux matrices  $U$  et  $T$ , avec  $U$  une matrice orthogonale et  $T$  une matrice diagonale par blocs composée de blocs  $2 \times 2$  (matrices de rotations planes) et de blocs de taille  $1 \times 1$  composés de 1. Les blocs de la matrice  $T$  permettent de retrouver les angles de rotation et les colonnes de la matrice  $U$  génèrent les plans de rotation. Même si cette décomposition est très souvent utilisée [Lau79, BGVD92], à notre connaissance aucun algorithme de décomposition des rotations basé sur cette décomposition n'existe.

D'autre part, nous avons proposé une méthode permettant, à partir d'une décomposition de rotations  $nD$  en rotations planes, d'obtenir une décomposition en rotations planes de même angles ou d'angles opposés (appelées *rotations isoclines*). Ces travaux étendent ceux de Mebius [Meb94] de la dimension 4 à une dimension quelconque. Cette méthode pourra notamment être appliquée en sens inverse : supposons que nous disposons d'un algorithme permettant de retrouver ces rotations isoclines, alors retrouver les paramètres de la rotation de départ sera immédiat par cette méthode. En effet, elles admettent une infinité de plans de rotation générés à partir d'un vecteur et de son image. Il est plus facile de retrouver un plan de rotation quand il en existe une infinité plutôt que lorsqu'il n'en existe qu'un seul.

Nos deux algorithmes d'estimation des paramètres des rotations (celui utilisant l'algèbre géométrique et celui basé sur la décomposition de Schur) ont été testés de la dimension 2 à la dimension 15 avec des données de départ bruitées. Les tests ont été réalisés avec des données bruitées de  $10^{-4}$  à  $10^{-1}$ . Ils ont portés sur 500 rotations. Nous avons pour cela généré des plans et des angles de rotation. À partir de ces paramètres, nous avons calculé le rotor codant la rotation. Ce rotor nous a permis de calculer les images des vecteurs  $x_i$  par la rotation  $nD$  (ces

vecteurs sont rangés par colonnes dans la matrice  $A$ ). Nous avons ensuite bruité ces données et appliqué nos deux algorithmes. Pour une rotation donnée, chacune des deux méthodes fournit une liste des plans et des angles de rotation. À partir de ces paramètres, nous pouvons calculer le rotor associé à la rotation ainsi reconstruite. Nous comparons ensuite les images de vecteurs aléatoires obtenus de manière « théorique » en utilisant la matrice de rotation  $A$  et leurs images obtenues par le rotor correspondant à la rotation reconstruite. La différence de norme entre ces deux vecteurs est utilisée comme critère d'évaluation de nos méthodes. Les résultats montrent que pour des dimensions de 2 à 4 la méthode utilisant les algèbres géométriques est meilleure au sens où les plans et les angles calculés sont assez proches de la solution exacte. Cependant pour des dimensions supérieures à 5, l'algorithme basé sur la décomposition de Schur donne de meilleurs résultats.

Néanmoins, de nombreux points restent encore à explorer. Nos algorithmes ne peuvent être utilisés qu'à partir des vecteurs d'une base et de leurs images. D'une manière générale, dans un cadre expérimental classique, nous disposons plus souvent d'ensembles quelconques de vecteurs appariés que des vecteurs d'une base. Dans ce cas là, l'algorithme basé sur la décomposition de Schur, qui ne peut être appliqué qu'à des matrices carrées, ne peut plus être utilisé. Un pré-traitement sur les données dans le but d'en extraire exactement  $n$  devra être envisagé. Comme nous l'avons montré, choisir au hasard  $n$  vecteurs dans l'ensemble n'est pas pertinent. En effet, la décomposition de Schur devrait fournir une matrice composée de blocs  $2 \times 2$  correspondant à des matrices de rotations, ce qui n'est pas le cas.

L'algorithme utilisant les algèbres géométriques peut être utilisé quel que soit le nombre de vecteurs. Néanmoins, dans le cas d'un ensemble quelconque de vecteurs, comme nous l'avons montré, la SVD ne génère pas forcément le bon nombre de vecteurs. Ce nombre dépend en effet d'un paramètre  $tol$  à partir duquel est calculé le rang (le rang est égal au nombre de valeurs singulières supérieures à ce seuil  $tol$ ). Lorsque nous travaillons avec un ensemble quelconque de vecteurs, ce seuil de tolérance, dépendant du nombre de colonnes, augmente car ce nombre devient très élevé. Cela a pour conséquence de diminuer le rang de la matrice, de diminuer le nombre de vecteurs générant les plans et finalement de diminuer aussi le nombre de plans. Des études pour ajuster ce seuil mériteraient d'être menées. D'autre part, cet algorithme repose aussi sur le choix d'un paramètre  $\beta$  qui permet de déterminer la nature isocline ou non de la rotation dans le cas de données bruitées. En effet, nous considérons comme isocline une rotation dont la restriction à un sous-espace est la composée de rotations d'angles quasiment égaux, les angles étant considérés comme quasiment égaux si la différence de leur valeur absolue est plus petite que ce paramètre  $\beta$ . Ce paramètre  $\beta$  a été choisi, pour nos expérimentations numériques, indépendant de la dimension  $n$  et de la précision  $p$ . De nouveaux tests avec un  $\beta$  tenant compte des paramètres  $n$  et  $p$  mériteraient également d'être menés.

Les deux algorithmes proposés ne sont donc qu'une première étape pour fournir une méthode d'estimation des paramètres des rotations adaptée à un cadre expérimental. De plus, ces algorithmes pourront ensuite être adaptés pour être utilisés avec des données discrètes (entières). Cette extension pourra faire appel aux travaux de Thibault sur les rotations 3D discrètes [Thi10] et plus particulièrement à sa méthode de reconstruction de rotations (recherche du centre et de l'axe de rotation d'une rotation 3D).

Comme la génération et la reconnaissance de cercles discrets peuvent constituer une première étape pour estimer les paramètres de rotations discrètes 2D, il nous a paru pertinent de présenter le processus d'arithmétisation qui permet entre autres de générer des cercles et des ellipses discret(e)s.

Les schémas numériques de type Euler ou Heun permettent d'approcher de manière numérique une courbe continue. Rendre discret ce schéma permet d'approcher des courbes continues par des courbes discrètes. Une telle discrétisation peut se faire en utilisant un contexte d'analyse nonstandard qui permet de manipuler des nombres infiniment grands et des nombres infiniment petits, comme ici le pas d'intégration du schéma numérique. Lors de travaux précédents [RWF<sup>+</sup>09], nous avons présenté une application du processus d'arithmétisation (discrétisation) à l'équation différentielle qui régit le cercle. Nous avons proposé une condition afin d'assurer la connexité des cercles générés par ce processus. Nous avons aussi étudié l'ordre d'approximation du schéma numérique permettant d'évaluer l'erreur. Ici, nous avons appliqué le processus d'arithmétisation du schéma de Heun (d'ordre plus élevé que celui d'Euler) à l'équation différentielle du cercle. Comme pour le schéma d'Euler, nous avons proposé une condition garantissant la connexité. Cette condition semble légèrement plus restrictive que celle proposée dans le cas du schéma d'Euler. Néanmoins de manière expérimentale, il semblerait qu'elle soit inchangée mais cela reste encore à prouver. D'autre part, nous avons prouvé que l'ordre du schéma de Heun arithmétisé est d'ordre 2 (comme son analogue continu). Néanmoins, cet ordre deux n'est pas compatible avec la condition de connexité. Ainsi, un choix doit être fait entre un cercle discret approchant mieux la courbe continue (ordre 2) mais non connexe (ce qui influe par exemple sur la reconnaissance de cercles) et un cercle plus éloigné de la solution exacte (ordre 1) mais connexe (qui facilite sa reconnaissance). De plus, en collaboration avec Agathe Chollet, qui avait proposé une extension du processus d'arithmétisation aux suites d'entiers ( $\Omega$ -entiers) appelé  $\Omega$ -arithmétisation [CWF<sup>+</sup>09b], nous avons appliqué l' $\Omega$ -arithmétisation à des ellipses [CWA<sup>+</sup>10]. Ce procédé, utilisant le schéma d'Euler, nous permet d'obtenir à différentes échelles des ellipses discrètes qui approchent l'ellipse continue. Pour chaque échelle nous avons mis en évidence une condition permettant d'obtenir des ellipses connexes. Pour une échelle donnée, cette condition généralise aux ellipses celle que nous avons proposée dans le cas du cercle [RWF<sup>+</sup>09]. Des travaux pourront être effectués avec le schéma de Heun dans le cadre de l' $\Omega$ -arithmétisation et de manière plus générale l'arithmétisation des cercles et des ellipses pourra être appliquées à des schémas d'intégration d'ordre plus élevé comme les méthodes de Runge-Kutta (d'ordre 4). D'autres fonctions pourront être arithmétisées comme des polynômes ou des courbes splines. De plus, nous espérons que ces travaux pourront servir pour l'estimation de paramètres de rotations discrètes. En effet, une définition mathématique de cercles discrets ainsi que l'algorithme permettant de les générer peuvent apporter des informations sur les paramètres.

---

---

# ANNEXES

---



---

# ANNEXE A

---

## STRUCTURES ALGÈBRIQUES ET ALGÈBRE LINÉAIRE

---

Dans cette annexe nous rappelons les structures algébriques sur lesquelles sont fondées les algèbres géométriques que nous définissons dans la partie 1.2.1. Il ne s'agit ici que d'un rappel de définitions. Pour plus de détails sur ces concepts, le lecteur pourra consulter [BD72]. Nous rappelons aussi le principe de la décomposition en valeurs singulières qui est utilisée dans le chapitre 2.

### 1 Généralités sur les algèbres

Commençons par définir un *groupe* :

**Définition 20** (Groupe). *Un groupe  $(G, *)$  est un ensemble  $G$  muni d'une loi de composition interne  $*$  de  $G \times G$  dans  $G$  vérifiant :*

- *$G$  n'est pas vide*
- *la loi  $*$  est associative*
- *la loi  $*$  a un élément neutre  $e$  dans  $G$  vérifiant :*

$$\forall g \in G, g * e = e * g = g$$

- *tout élément admet un opposé pour la loi  $*$  :*

$$\forall g \in G, \exists -g/g * (-g) = (-g) * g = e$$

**Remarque 13.** *Si la loi du groupe est commutative, le groupe est dit commutatif*

**Exemple 5.** *L'ensemble  $(\mathbb{Z}, +)$  est un groupe. Il est composé des entiers relatifs et de la loi additive sur les entiers. Ce groupe est commutatif.*

La notion de *corps* est basé sur celle des groupes :

**Définition 21** (Corps). *Un corps  $(K, +, \cdot)$  est un ensemble  $K$  muni de deux lois internes  $+$  et  $\cdot$  vérifiant :*

- $K$  est un groupe commutatif pour l'addition
- $K \setminus \{0\}$  est un groupe pour la loi  $\cdot$
- La loi  $\cdot$  est distributive sur la loi  $+$

**Exemple 6.** *Les ensembles  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{C}$  sont des corps.*

Cette notion de corps nous permet de définir celle d'espace vectoriel :

**Définition 22** (Espace vectoriel). *Un espace vectoriel  $E$  sur un corps  $K$  est un ensemble muni d'une loi interne additive notée  $\dot{+}$  et d'une loi externe multiplicative notée  $\dot{\times}$  vérifiant :*

- L'ensemble  $E$  muni de la loi  $\dot{+}$  est un groupe commutatif d'élément neutre  $0$
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x} \in E, \alpha \dot{\times} (\beta \dot{\times} \mathbf{x}) = (\alpha \dot{\times} \beta) \dot{\times} \mathbf{x}$
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, (\alpha \dot{+} \beta) \dot{\times} \mathbf{x} = \alpha \dot{\times} \mathbf{x} \dot{+} \beta \dot{\times} \mathbf{x}$  et  $\alpha \dot{\times} (\mathbf{x} \dot{+} \mathbf{y}) = \alpha \dot{\times} \mathbf{x} \dot{+} \alpha \dot{\times} \mathbf{y}$ .

En utilisant la définition 22 nous pouvons maintenant définir une algèbre :

**Définition 23** (Algèbre). *Une algèbre  $\mathcal{A}$  est un espace vectoriel sur un corps  $K$  muni d'une application de  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  appelé produit noté  $*$ . L'algèbre  $\mathcal{A}$  est un ensemble muni de 2 lois internes  $+$  et  $*$  (l'une additive et l'autre multiplicative) et d'une loi externe  $\dot{\times}$  de  $K \times \mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  vérifiant :*

- $(\mathcal{A}, +, \dot{\times})$  est un espace vectoriel sur  $K$
- $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathcal{A}^3, \mathbf{x} * (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} * \mathbf{y} + \mathbf{x} * \mathbf{z}$  et  $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) * \mathbf{z} = \mathbf{x} * \mathbf{z} + \mathbf{y} * \mathbf{z}$
- $\forall (\alpha, \beta) \in K^2$  et  $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}^2, (\alpha \dot{\times} \mathbf{x}) * (\beta \dot{\times} \mathbf{y}) = \alpha \dot{\times} \beta (\mathbf{x} * \mathbf{y})$ .

## 2 Formes bilinéaires et quadratiques

Les applications bilinéaires sont définies de la manière suivante :

**Définition 24** (Application bilinéaire). *On appelle forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  d'un espace vectoriel  $E$  une application de  $E \times E$  dans  $K$  (corps sur lequel est défini l'espace vectoriel) qui, à un couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , associe  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  vérifiant pour tout scalaire  $\lambda$  la propriété :*

$$\mathcal{B}(\lambda \mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y} + \mathbf{y}') = \lambda \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{y}) + \lambda \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}') + \mathcal{B}(\mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

Sa forme quadratique  $\mathcal{Q}$  associée est donnée par :

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{x}).$$

La forme quadratique  $\mathcal{Q}$  et la forme bilinéaire  $\mathcal{B}$  sont liées par la relation :

$$\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y}))$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs de  $E$ .

À toute forme quadratique  $Q$  est associée une *signature*. Généralement, elle est notée  $(p, q)$ . Dans tout le manuscrit nous nous sommes placés dans le cas d'une signature  $(n, 0)$ . La signature permet de décrire les règles multiplicatives. L'entier  $p$  (resp.  $q$ ) représente la dimension maximale du sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  sur lequel  $Q$  est définie positive (resp. négative). En d'autres termes,  $p$  (resp.  $q$ ) indique le nombre d'éléments  $\mathbf{v}$  de la base dont la forme quadratique est strictement positive c'est-à-dire  $Q(\mathbf{v}) > 0$  (resp. négative c'est-à-dire  $Q(\mathbf{v}) < 0$ ). Quand la forme quadratique est non dégénérée et positive, alors nous avons un espace euclidien. Nous donnons maintenant quelques exemples en dimension 3.

**Exemple 7.** • Les éléments de l'algèbre géométrique associée à la forme quadratique de signature  $(3, 0)$  vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = +1$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2.$$

• Les éléments de l'algèbre géométrique associée à la forme quadratique de signature  $(2, 1)$  vérifient les relations suivantes :

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = +1 \text{ et } \mathbf{e}_3^2 = -1$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2.$$

## 3 Décomposition en valeurs singulières

Le but de cette partie est d'expliquer le principe de la décomposition en valeurs singulières (SVD) et d'en donner quelques applications. Pour cela, nous rappelons au préalable quelques notions de base concernant les valeurs propres et les vecteurs propres. Pour plus de détails sur les valeurs propres et les vecteurs propres le lecteur pourra consulter [Mey00] et [GL96, Vet92] pour ce qui concerne la partie théorique de la SVD. De nombreuses applications de cette dernière sont listées dans [Ran10].

### 3.1 Valeurs propres et vecteurs propres

Les notions de valeurs propres et de vecteurs propres sont communément utilisées en algèbre linéaire (et plus précisément en réduction des endomorphismes) pour décomposer l'espace de départ en somme directe de sous-espaces stables<sup>1</sup>.

**Définition 25** (Valeur propre, vecteur propre). Soit  $A$  une matrice carrée  $n \times n$ . Le réel  $\lambda$  est appelé valeur propre de la matrice  $A$  s'il existe un vecteur  $\mathbf{v}$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Le vecteur  $\mathbf{v}$  est appelé vecteur propre.

Les valeurs propres d'une matrice  $A$  sont les racines en  $\lambda$  du polynôme caractéristique  $\det(A - \lambda I_n)$  de degré  $n$  où  $I_n$  est la matrice identité en dimension  $n$ . Les vecteurs propres correspondants sont les éléments du noyau  $\text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)\mathbf{x} = 0\}$ . L'ensemble des valeurs propres d'une matrice est appelé *spectre*. L'ensemble des vecteurs propres  $E_\lambda$  associés à une valeur propre donnée  $\lambda$  forme un espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  appelé *espace*

1. Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$  alors  $F \subset E$  est un sous-espace stable par  $f$  si  $f(F) \subset F$ .

*propre*. Si la matrice  $A$  admet  $n$  vecteurs propres linéairement indépendants (c'est-à-dire s'ils ne sont pas combinaisons linéaires les uns des autres) alors  $A$  est *diagonalisable*. Elle peut alors se réécrire sous la forme  $A = VDV^{-1}$  où la matrice  $D$  est diagonale, composée des valeurs propres de la matrice  $A$  et les colonnes de  $V$  sont les vecteurs propres associés. Cette décomposition est appelée *décomposition spectrale*.

### 3.2 Principe de la SVD et propriétés

La décomposition en valeurs singulières est une conséquence directe du théorème :

**Théorème 16.** *Toute matrice  $A$  (à coefficients complexes) de taille  $m \times n$  peut être factorisée sous la forme  $A = USV^*$  où  $U$  est une matrice  $m \times m$  unitaire<sup>2</sup>,  $S$  est une matrice  $m \times n$ , diagonale et  $V^*$  est l'adjointe (transposée de la conjuguée) d'une matrice  $V$  unitaire.*

La démonstration de ce théorème est donnée dans [GL96].

Ce théorème de décomposition en valeurs singulières généralise celui de décomposition spectrale (théorème spectral) à des matrices non carrées. La décomposition en valeurs singulières n'est pas unique. Les éléments diagonaux de la matrice  $S$  sont appelés *valeurs singulières*. Les colonnes de la matrice  $U$  (resp.  $V$ ) sont appelés *vecteurs singuliers gauches* (resp. *droits*). Si  $u$  et  $v$  sont respectivement des vecteurs singuliers gauche et droit associés à une valeur singulière  $s$  alors ils vérifient  $Av = su$ . Ainsi nous avons les propriétés suivantes :

- Un vecteur singulier gauche  $u$  est un vecteur propre de la matrice  $AA^T$  associé à la valeur propre  $s^2$  ;
- Un vecteur singulier droit  $v$  est un vecteur propre de la matrice  $A^T A$  associé à la valeur propre  $s^2$ .

Le *rang* d'une matrice est le nombre de valeurs singulières non nulles. Cette propriété est très importante car elle permet d'approcher une matrice  $A$  par une matrice  $A'$  de rang inférieur (cf [Str03]). En d'autres termes, la SVD donne une bonne approximation, au sens des moindres carrés, de toute matrice rectangle par une autre matrice rectangle de rang inférieur. Ce résultat est appelé théorème d'Eckart-Young [EY36]. Par exemple, supposons que nous voulions trouver la matrice  $A'$  de rang  $k$  qui approche de manière optimale (au sens des moindres carrés<sup>3</sup>) une matrice  $A$  donnée. Conservons les  $k$  plus grandes valeurs singulières et fixons les autres à zéro. Soit  $S'$  la matrice obtenue. Éliminons maintenant les colonnes de  $U$  et de  $V$  (issues de la SVD de la matrice  $A$ ) qui correspondent aux valeurs singulières nulles. Soient  $U'$  et  $V'$  ces matrices. La matrice  $A'$  reconstruite à partir de  $U'S'V'^T$  est la matrice recherchée. D'autres propriétés sur le noyau  $\text{Ker}$  et l'image  $\text{Im}$  de la matrice  $A$  peuvent être obtenues à partir de sa décomposition en valeurs singulières  $A = USV^*$  [Wat02]. L'image de la matrice  $A$  (resp.  $A^T$ ) est engendrée par les  $r$  premières colonnes de  $U$  (resp.  $V$ ). Le noyau de la matrice  $A$  (resp.  $A^T$ ) est engendré par les  $n - r$  (resp.  $m - r$ ) dernières colonnes de la matrice  $V$  (resp.  $U$ ).

Nous donnons maintenant la méthode de Garcia [Gar06] pour décomposer une matrice  $A$  en valeurs singulières. Cette méthode est en cinq étapes :

1. Calcul de la transposée  $A^T$  de la matrice  $A$  et de  $A^T A$  ;
2. Détermination des valeurs propres de  $A^T A$  et rangement par ordre décroissant ; Les racines carrées de ces valeurs propres sont les valeurs singulières de  $A$  ;

2. Son inverse est la transposée de sa matrice conjuguée.

3. C'est-à-dire  $\|A - A'\|^2 = \min_X \|A - X\|^2$  pour l'ensemble des matrices  $X$  de rang inférieur ou égal à  $k$ .

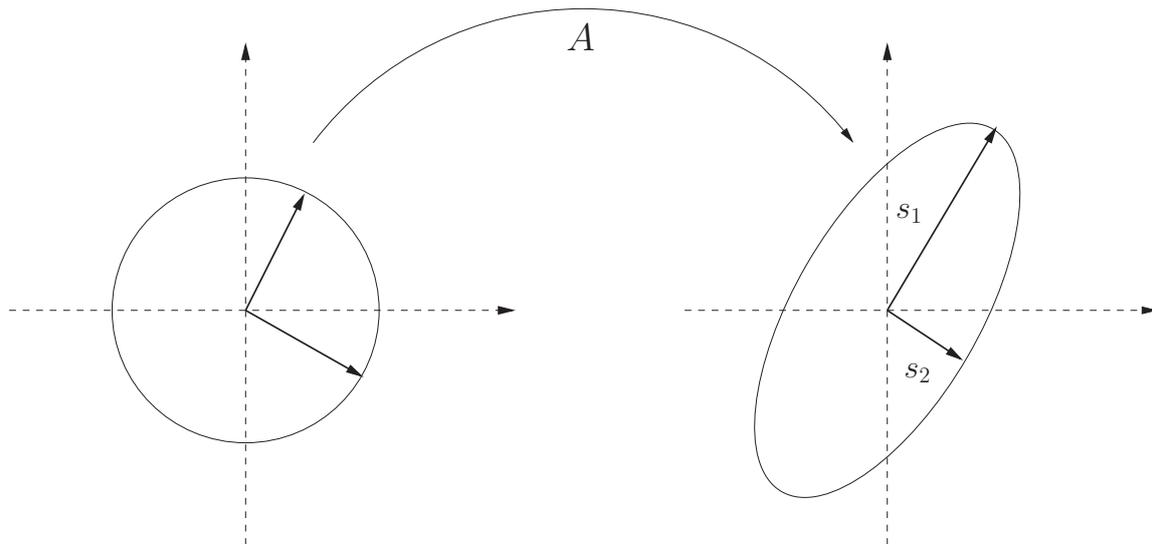


FIGURE A.1 – Interprétation géométrique de la SVD d'une matrice  $A$  : l'image par  $A$  de la sphère unité est une ellipsoïde dont les axes principaux sont les premières colonnes de la matrice  $U$  et dont les rayons  $s_i$  correspondent aux plus grandes valeurs singulières.

3. Construction de la matrice diagonale  $S$  à partir des valeurs singulières rangées par ordre décroissant. Calcul de l'inverse  $S^{-1}$  ;
4. Calcul des vecteurs propres de  $A^T A$  (en utilisant les valeurs propres calculées à l'étape 2) ; Les colonnes de la matrice  $V$  sont ces vecteur propres ; Calcul de la transposée  $V^T$  de  $V$  ;
5. Calcul de  $U = AVS^{-1}$ .

La matrice  $A$  est bien décomposée en valeurs singulières : elle est telle que  $A = USV^T$ .

### 3.3 Interprétations géométriques

La matrice  $U$  étant orthogonale, ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^m$ . De la même manière, les colonnes de la matrice orthogonale  $V$  forment une base orthonormée de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi,  $Av = su$  signifie que l'image dans  $\mathbb{R}^m$  d'un vecteur singulier droit de  $\mathbb{R}^n$  est égal à  $s$  fois le vecteur singulier gauche associé à la valeur singulière  $s$ . Supposons que la matrice  $A$  est de rang  $n$ . Pour un vecteur  $x$  quelconque de  $\mathbb{R}^n$ , cela revient à :

1. le projeter sur une base de  $\mathbb{R}^n$  (vecteurs colonnes de  $V$ ) ;
2. multiplier chacune de ses coordonnées par la valeur singulière  $s$ .

Le vecteur  $y$  de  $\mathbb{R}^m$  obtenu à partir des  $n$  coordonnées du vecteur  $x$  suivi de  $(m-n)$  coordonnées nulles est le vecteur  $Ax$ . Intuitivement, les valeurs singulières permettent de caractériser le facteur de déformation que va subir les vecteurs par l'action de la matrice. Une autre interprétation géométrique que l'on peut donner à la décomposition en valeurs singulières est la transformation de la sphère unité. Dans  $\mathbb{R}^n$ , la sphère unité est définie comme l'ensemble des vecteurs normés. La transformation linéaire associée à la matrice  $A$  transforme cette sphère unité en une ellipsoïde de dimension  $r = \text{rang}(A)$ . Les directions de ces axes principaux sont les  $r$  premières colonnes de  $U$  et leurs longueurs sont données par les valeurs singulières non nulles. Cette interprétation géométrique est illustrée par la figure A.1.

### 3.4 Applications

La SVD est notamment utilisée pour calculer le rang, le noyau et l'image d'une matrice. Le rang correspond, nous l'avons vu, au nombre de valeurs singulières non nulles. Le noyau est le sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  généré par les  $(n - r)$  vecteurs singuliers droits. L'espace image est le sous-espace de  $\mathbb{R}^m$  généré par les  $r$  vecteurs singuliers gauches. Les principales applications de la SVD sont le traitement du signal, le traitement d'images et les statistiques.

En statistiques, les colonnes principales de la matrice  $U$  représentent les tendances c'est-à-dire les directions de plus grandes variations. En annulant la diagonale de la matrice  $S$  au delà d'un certain seuil puis en reconstruisant la matrice, on filtre les données. Ces données représentent l'information dominante de l'ensemble de départ.

Cette méthode est aussi utilisée en compression d'images. La matrice  $A' = U'S'V'^T$  définie dans la section 3.2 est une matrice de rang  $k$  approchant de manière optimale la matrice  $A$ . Ces trois matrices peuvent donc être considérées comme une représentation de  $A$ . L'intérêt est de manipuler  $mk$ ,  $k$  et  $nk$  coefficients (nombre d'éléments respectifs des matrices  $U'$ ,  $S'$  et  $V'$ ) plutôt que  $mn$  coefficients en manipulant  $A$  directement.

En traitement du signal la SVD est notamment employée pour réduire le bruit d'un signal (temporel par exemple) [Cad88].

---

## ANNEXE B

---

# LES ALGÈBRES GÉOMÉTRIQUES

---

Dans cette annexe, nous présentons de manière plus précise les algèbres géométriques utilisées dans la partie 1.2.1. Pour encore plus de détails sur ces notions le lecteur peut consulter [DFM07, Cha07, HFPD04, Dor94]

Les algèbres géométriques sont des espaces vectoriels munis d'un produit permettant de construire des éléments de dimensions supérieures. Les éléments de ces algèbres sont interprétés comme des sous-espaces (on parle d'*algèbres de sous-espaces vectoriels*). Un vecteur de ces algèbres est interprété comme un sous-espace orienté de dimension 1, le produit de deux vecteurs comme un sous-espace orienté de dimension 2, le produit de  $k$  vecteurs comme un sous-espace orienté de dimension  $k$  comme nous le montre la figure B.1.

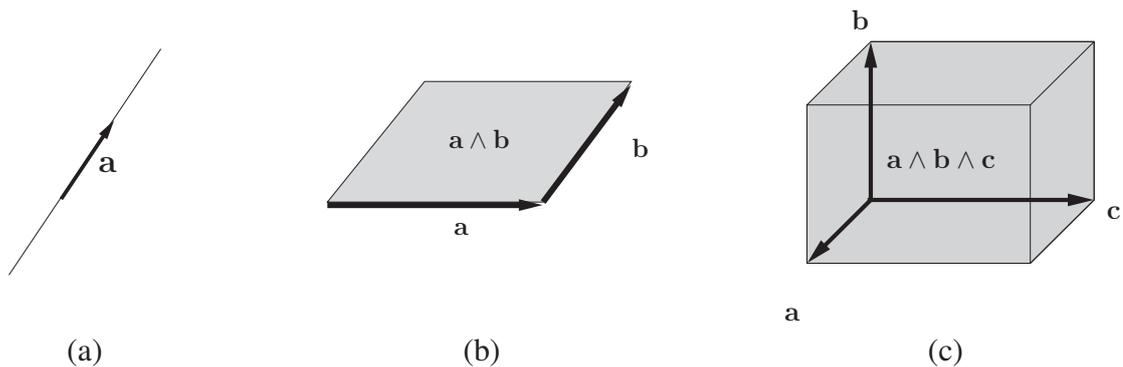


FIGURE B.1 – Le vecteur  $a$  représente un sous-espace vectoriel de dimension 1 (a), le produit noté  $a \wedge b$  des deux vecteurs  $a$  et  $b$  représente un sous-espace de dimension 2 (b), le produit noté  $a \wedge b \wedge c$  des trois vecteurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  représente un sous-espace de dimension 3 (c).

Un des intérêts des algèbres géométriques est que les éléments de l'algèbre peuvent aussi bien être des objets (droites, plans...) que des transformations elles-mêmes (réflexions, rotations...). D'une manière générale les algèbres géométriques permettent de définir des transformations en toutes dimensions. Ainsi, les isométries et, par conséquent, les rotations peuvent être représentées et manipulées par des termes algébriques et des opérations sur ces termes. En

algèbre linéaire, pour calculer l'image d'un vecteur par une rotation, nous utilisons des entités de natures différentes (matrice, vecteur). Nous montrons dans la suite de cette annexe, que dans le cadre des algèbres géométriques l'image  $x'$  d'un vecteur  $x$  par une rotation s'écrit sous la forme compacte  $\mathbf{R}x\mathbf{R}^{-1}$  où  $\mathbf{R}$  est un élément de l'algèbre (comme  $x$  et  $x'$ ) qui représente la rotation (au sens où il contient l'information du plan de rotation et de l'angle). Cette formule peut se généraliser. En effet, l'image du plan  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  par la rotation encodée par l'élément  $\mathbf{R}$  est donnée par l'expression :  $\mathbf{R}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})\mathbf{R}^{-1}$ . De plus, comme nous venons de le voir, les plans ne s'expriment pas en fonction d'un système de coordonnées comme c'est classiquement le cas en algèbre linéaire. Ces notations compactes permettent donc de s'abstraire des coordonnées notamment pour exprimer des objets ou des transformations. Ce formalisme permet notamment de ne pas manipuler des équations trop « lourdes » et souvent nombreuses pour résoudre un problème donné.

Parmi les algèbres géométriques, nous en distinguons trois. L'algèbre de Grassmann est munie d'un produit noté  $\wedge$ . Il permet de représenter les sous-espaces. L'algèbre de Clifford que nous utilisons dans la partie 1.2.1 est munie d'un produit déduit d'une métrique permettant de manipuler toutes les transformations géométriques et en particulier les rotations. Enfin, l'algèbre de Grassmann-Cayley est obtenue à partir de l'algèbre de Grassmann munie d'un second produit appelé *meet*. Il permet d'exprimer l'intersection de deux sous-espaces si leur union engendre l'espace vectoriel de départ tout entier. Dans la suite de ce manuscrit, nous nous intéressons principalement aux deux premières algèbres. Elles sont les seules dont nous avons besoin pour définir le contexte de notre méthode de décomposition des rotations. Ces algèbres sont compatibles entre elles, au sens où les éléments de l'une peuvent s'exprimer en fonction des éléments de l'autre. En effet, pour deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  nous pouvons exprimer le produit géométrique et le produit extérieur de la manière suivante :

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}.$$

Par conséquent, dans la suite, le terme *algèbre géométrique* désigne aussi bien l'algèbre de Grassmann que celle de Clifford. Dans la première partie du manuscrit le terme *algèbre géométrique* fait référence à une version particulière de l'algèbre de Clifford adaptée à la géométrie.

## 1 L'algèbre de Grassmann

Dans cette section, nous construisons l'algèbre géométrique de Grassmann. Pour cela, nous nous donnons un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$  que nous munissons d'un produit : le *produit extérieur* noté  $\wedge$ .

Ce produit extérieur permet de générer des éléments de l'algèbre géométrique : il permet de combiner les éléments qui représentent des sous-espaces de dimension 1 pour former des éléments représentant des sous-espaces de dimensions supérieures.

L'ensemble composé par :

- le scalaire 1 appelé aussi 0-vecteur,
- les vecteurs de  $E$  (dits 1-vecteurs),
- les produits extérieurs de  $k$  vecteurs linéairement indépendants<sup>1</sup> appelés *k-vecteurs*, où l'entier  $k$  est appelé *grade* du *k-vecteur*,

---

1. Si les  $k$  vecteurs ne sont pas linéairement indépendants, leur produit extérieur est nul.

forme un espace vectoriel<sup>2</sup>. Cet ensemble muni du produit extérieur forme l'*algèbre de Grassmann*  $\mathcal{G}_E$ . Pour ne pas alourdir les notations, si  $E = \mathbb{R}^n$ , plutôt que de noter l'algèbre associée  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}^n}$ , elle est notée plus simplement  $\mathcal{G}_n$ . La notion de grade que nous venons de définir est utilisée aussi pour qualifier l'algèbre de Grassmann : l'algèbre est dite graduée. Si  $\wedge^k(E)$  désigne l'ensemble des éléments de grade  $k$  alors :

$$\mathcal{G}_E = \wedge^0(E) \oplus \wedge^1(E) \oplus \dots \oplus \wedge^n(E).$$

Chaque ensemble  $\wedge^k(E)$  forme un espace vectoriel de dimension  $\binom{n}{k}$ . Les éléments de cette algèbre sont appelés des *multivecteurs*. Ils sont engendrés par combinaisons linéaires des  $k$ -vecteurs.

Dans la suite, les vecteurs sont notés en minuscules grasses, les multivecteurs en majuscules grasses et les scalaires en lettres grecques. Sauf mention contraire,  $n$  désigne la dimension de l'espace.

Soient  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  des multivecteurs et  $\alpha$  un scalaire. Le produit extérieur possède les propriétés suivantes :

- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = -\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$  (antisymétrique)
- $\alpha \wedge \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \alpha$
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})$  (associativité)
- $(\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} = \alpha(\mathbf{A} \wedge \mathbf{C}) + \mathbf{B} \wedge \mathbf{C}$  et  $\mathbf{C} \wedge (\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{C} \wedge \mathbf{A}) + \mathbf{C} \wedge \mathbf{B}$  (bilinéarité)
- $\text{Grade}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = \text{Grade}(\mathbf{A}) + \text{Grade}(\mathbf{B})$  si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont linéairement indépendants.
- $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = 0$  si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont linéairement dépendants.

Cette dernière propriété est très importante car il en découle que *le produit extérieur peut être considéré comme un indicateur de dépendance linéaire*. En effet, le vecteur  $\mathbf{x}$  appartient au plan généré par les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est équivalent au fait que  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ . D'une manière générale, si  $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k = 0$  alors il existe au moins un des vecteurs  $\mathbf{x}_i$  qui est linéairement indépendant des autres. Dans le cas contraire si  $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k \neq 0$  alors  $\mathbf{x}_1 \wedge \mathbf{x}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_k$  est un représentant du sous-espace de dimension  $k$  généré par les vecteurs  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ .

Un des intérêts<sup>3</sup> des algèbres géométriques, nous l'avons vu, est de s'abstraire des coordonnées notamment pour le raisonnement comme par exemple pour exprimer des objets ou des transformations. Cependant, quand des calculs sont nécessaires, il est possible de munir les algèbres géométriques d'une base. Elle est construite à partir d'une base de l'espace  $E$ .

**Exemples .** Soit  $(\mathbf{e}_i)_{i=1\dots n}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ .

- En dimension 2, une base de l'algèbre géométrique associée à  $\mathbb{R}^2$  est donnée par :

$$\left\{ \underbrace{1}_{\text{Base des 0-vecteurs}}, \underbrace{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}_{\text{Base des 1-vecteurs}}, \underbrace{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2}_{\text{Base des 2-vecteurs}} \right\}. \quad (\text{B.1})$$

La base est de dimension  $2^2 = 4$ .

2. L'espace vectoriel  $E$  est canoniquement inclus dans l'espace vectoriel  $\mathcal{G}_E$ . Il s'agit en fait de l'espace des 0-vecteurs et des 1-vecteurs.

3. Le fait de pouvoir s'abstraire des coordonnées est un des intérêts des algèbres géométriques. Rappelons que les algèbres géométriques permettent une représentation géométrique et donc une meilleure compréhension des objets que l'on manipule. Par exemple, un bivecteur décomposable représente un plan. De plus, les éléments de l'algèbre représentent aussi bien des objets (droites, plans) que des transformations comme les rotations.

- En dimension 3, une base de l'algèbre géométrique est donnée par :

$$\left\{ \underbrace{1}_{\text{Base des 0-vecteurs}}, \underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\text{Base des 1-vecteurs}}, \underbrace{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3}_{\text{Base des 2-vecteurs}}, \underbrace{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3}_{\text{Base des 3-vecteurs}} \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Elle est de dimension  $2^3 = 8$ .

Le produit extérieur entre les vecteurs  $e_i$  et  $e_j$  noté  $e_i \wedge e_j$  est parfois noté  $e_{ij}$ . De même,  $e_i \wedge e_j \wedge e_k$  est parfois noté  $e_{ijk}$ .

En dimension  $n$ , chaque  $k$ -vecteur de la base est le produit extérieur de  $k$  éléments choisis parmi les  $n$  éléments de la base de  $E$ . Il en résulte que la base formée par tous les  $k$ -vecteurs pour  $k$  fixé tel que  $0 \leq k \leq n$  est de dimension  $\binom{n}{k}$  où  $\binom{n}{k}$  est le coefficient binomial correspondant aux nombres de combinaisons de  $k$  éléments qu'il est possible de former à partir d'un ensemble à  $n$  éléments. Par exemple, en dimension 3, pour former la base des 2-vecteurs (appelés aussi *bivecteur*) on doit former des produits de deux éléments parmi les trois ; la base des 2-vecteurs est de dimension  $\binom{3}{2} = 3$ . Comme  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ , dans le cas de la dimension  $n$ , l'algèbre  $\mathcal{G}_n$  est de dimension  $2^n$ .

Certains multivecteurs peuvent se réécrire comme le produit extérieur de  $p$  vecteurs, ils sont qualifiés de *multivecteurs décomposables*. Si  $p = n$ , le multivecteur décomposable donné par  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  est appelé *pseudo-scalaire*. Il est noté  $\mathbf{I}$ . Seuls les multivecteurs décomposables peuvent être interprétés comme des sous-espaces. Ceux qui ne le sont pas, ne sont pas géométriquement représentables car il n'existe pas de moyen permettant de visualiser la somme d'un scalaire et d'un bivecteur. En revanche, les multivecteurs non décomposables sont utilisés par exemple pour représenter des transformations.

**Exemples .** Dans  $\mathcal{G}_4$ , le multivecteur  $e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_3$  peut se décomposer c'est-à-dire se réécrire comme  $(e_1 + e_3) \wedge (e_2 + e_3)$ . Il s'agit donc d'un multivecteur décomposable car il est le produit extérieur des deux vecteurs  $e_1 + e_3$  et  $e_2 + e_3$ . Par contre, le multivecteur  $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$  ne peut pas être mis sous la forme  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  avec  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  : il n'est pas décomposable car les deux produits extérieurs  $e_1 \wedge e_2$  et  $e_3 \wedge e_4$  n'ont pas d'élément en commun.

Le multivecteur  $\cos \theta + \sin \theta (e_1 \wedge e_2)$  n'est pas décomposable mais intervient notamment dans le calcul des rotations.

Dans ce contexte, un 1-vecteur représente un sous-espace orienté de dimension 1 ; sa direction est donnée par sa droite support, il est muni d'une orientation (cf. figure B.1(a)). Un bivecteur  $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  non nul est considéré comme une portion orientée d'un sous-espace de dimension 2 c'est-à-dire une portion orientée de plan. Son orientation est donnée par l'ordre des vecteurs (ici  $\mathbf{u}$  puis  $\mathbf{v}$ ). Le bivecteur  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  est orienté dans le sens opposé comme sur la figure B.2. Ce changement d'orientation est une conséquence de l'antisymétrie du produit extérieur. D'une manière générale, tout multivecteur  $\mathbf{P}$  non nul décomposable de grade  $p$  est représenté comme une portion orientée du sous-espace vectoriel  $P$  de dimension  $p$  de  $E$  généré par les vecteurs formant sa décomposition comme nous le montre la figure B.1. Comme il existe une correspondance bi-univoque entre les sous-espaces et leurs représentations, l'amalgame est souvent fait entre le sous-espace  $P$  et son représentant : le multivecteur  $\mathbf{P}$ .

La Figure B.3 fournit une représentation géométrique des  $k$ -vecteurs des bases de  $\mathcal{G}_2$  et  $\mathcal{G}_3$  données respectivement par (B.1) et (B.2) pour  $1 \leq k \leq 3$ .

Nous concluons cette partie en donnant deux exemples concrets de calcul du produit extérieur, l'un en dimension 2, l'autre en dimension 3 :

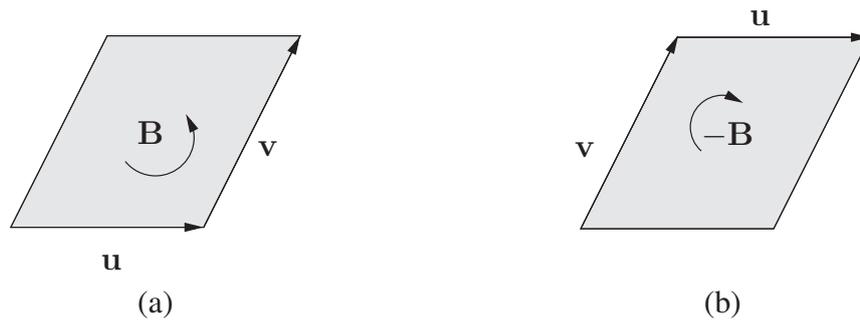


FIGURE B.2 – L'ordre des vecteurs intervenant dans le produit extérieur est important. Les bivecteurs  $\mathbf{B} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  et  $-\mathbf{B} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$  génèrent la même portion de plan mais l'orientation est différente. Cela est une conséquence de l'antisymétrie du produit extérieur.

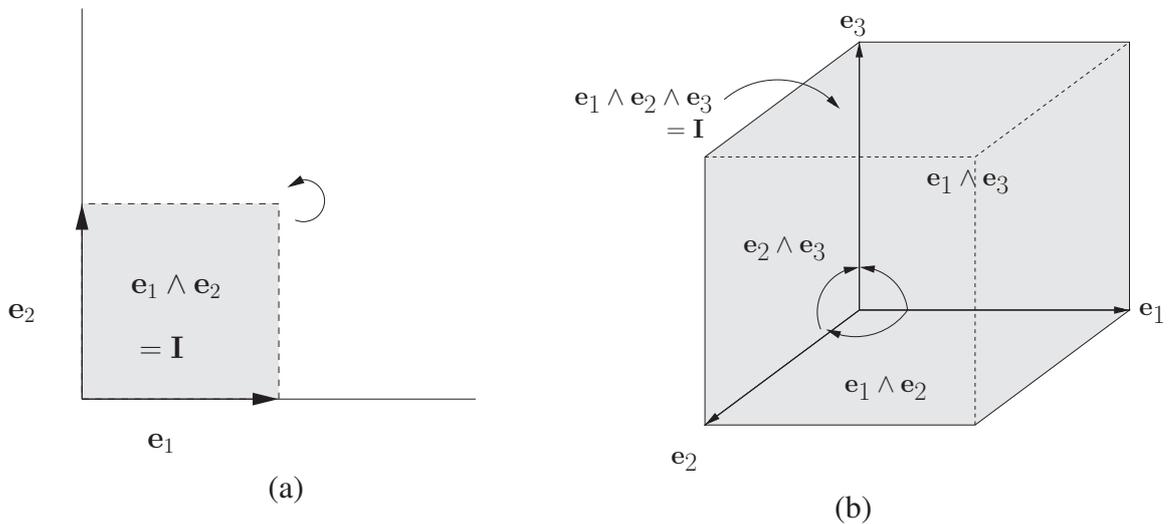


FIGURE B.3 – Interprétation géométrique, dans des espaces de dimension  $n = 2$  (a) et  $n = 3$  (b), de la base des  $k$ -vecteurs pour  $1 \leq k \leq n$ . Les pseudo-scalaires  $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$  pour (a) et  $\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$  pour (b) représentent l'espace entier.

**Exemples .** Soit l'algèbre géométrique associée à  $\mathbb{R}^2$  notée  $\mathcal{G}_2$  dont une base est donnée par (B.1). Considérons les vecteurs  $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$  et  $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$ . Le produit extérieur  $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$  de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= a_1b_1\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + a_1b_2\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_2b_1\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 + a_2b_2\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 = 0$  et que  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1$  (par antisymétrie) alors :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \tag{B.3}$$

Cette dernière égalité fait le lien avec l'algèbre linéaire où ce déterminant est connu pour représenter l'aire de la surface orientée générée par  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  par rapport à l'aire générée par les vecteurs de la base  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_2$ .

Dans l'algèbre associée à  $\mathbb{R}^3$  dont une base est donnée par (B.2) si le multivecteur  $\mathbf{A}$  a pour coordonnées  $\alpha_i$  et le multivecteur  $\mathbf{B}$  a pour coordonnées  $\beta_i$  alors  $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$  a pour coordonnées :

$\alpha_0$	$\beta_0$	$\wedge \rightarrow$	$\alpha_0\beta_0$
$\alpha_1$	$\beta_1$		$\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1$
$\alpha_2$	$\beta_2$		$\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0$
$\alpha_3$	$\beta_3$		$\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0$
$\alpha_{12}$	$\beta_{12}$		$\alpha_{12}\beta_0 + \alpha_0\beta_{12} + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$
$\alpha_{13}$	$\beta_{13}$		$\alpha_{13}\beta_0 + \alpha_0\beta_{13} + \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1$
$\alpha_{23}$	$\beta_{23}$		$\alpha_{23}\beta_0 + \alpha_0\beta_{23} + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2$
$\alpha_{123}$	$\beta_{123}$		$\alpha_{123}\beta_0 + \alpha_0\beta_{123} + \alpha_1\beta_{23} - \alpha_2\beta_{13} + \alpha_3\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_3 - \alpha_{13}\beta_2 + \alpha_{23}\beta_1$

Les indices  $i = 0, 1, \dots, 12, \dots, 123$  indiquent le coefficient des multivecteurs dans la base donnée par (B.2). Par exemple,  $\alpha_{12}$  est le coefficient correspondant à  $\mathbf{e}_{12} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ .

Jusqu'ici, le produit extérieur ne nous a permis que de générer des sous-espaces. Pour pouvoir établir des mesures quantitatives (mesures de longueur de segment, d'aire dans un plan, de volume dans un espace, ...) dans les sous-espaces formés à partir de ce produit nous devons introduire une métrique. Cette métrique nous permettra aussi d'utiliser la notion d'isométrie et d'orthogonalité sur ces sous-espaces. Contrairement à l'algèbre de Grassmann qui n'en est pas pourvue, l'algèbre de Clifford, grâce à son produit (le produit géométrique) en induit une.

## 2 L'algèbre de Clifford

Dans cette section, nous allons construire une autre algèbre géométrique, celle de Clifford, compatible avec celle de Grassmann au sens où les éléments de l'une peuvent s'exprimer en fonction des éléments de l'autre [Cha07]. Il est possible d'y définir des transformations (isométries) et en particulier les rotations.

Nous nous plaçons comme précédemment sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ . Nous nous donnons une forme quadratique<sup>4</sup>  $\mathcal{Q}$ . Cette forme quadratique permet de définir un produit scalaire  $\mathcal{B}$  permettant de définir une notion d'orthogonalité entre deux vecteurs par exemple. La métrique sur  $E$  est définie par :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})^2 = \mathcal{B}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

où  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est la distance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  et  $\mathcal{B}$  est la forme bilinéaire symétrique<sup>5</sup> associée à la forme quadratique  $\mathcal{Q}$ . Dans le cadre de notre étude des rotations, nous considérons une forme quadratique définie positive<sup>6</sup> telle que la distance définie soit la distance euclidienne usuelle<sup>7</sup>.

Dans le cas de l'algèbre de Clifford  $\mathcal{C}_E$ , le produit de l'algèbre, le produit géométrique est construit à partir de la forme quadratique  $\mathcal{Q}$ . Dans cette algèbre, il est donc possible de

4. Une forme quadratique est une fonction  $\mathcal{Q}$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant pour tout scalaire  $\lambda$  l'égalité  $\mathcal{Q}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ .

5. Les formes bilinéaire et quadratique sont liées par la relation :  $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathcal{Q}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathcal{Q}(\mathbf{x}) - \mathcal{Q}(\mathbf{y}))$  où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs de  $E$ .

6. Une forme quadratique est dite définie positive si  $\forall \mathbf{x} \in E, \mathcal{Q}(\mathbf{x}) \geq 0$  &  $[\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0]$ .

7. La distance entre deux points est définie comme la racine carrée de la somme des carrés de la différence des coordonnées. Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$  alors la distance euclidienne entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est définie par  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$

manipuler les entités géométriques en tenant compte de cette métrique. En particulier, cela est vrai pour les isométries et plus précisément les rotations.

Ce produit n'est pas noté avec un symbole, il est simplement noté par juxtaposition de ses opérands. Il permet de définir l'inverse de multivecteurs. Cette notion d'inverse est notamment utilisée pour coder les transformations que nous utilisons dans la suite de ce manuscrit.

Pour  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux vecteurs, le produit géométrique vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^2 = \mathcal{Q}(\mathbf{u}); \\ \mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{u} &= 2\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}); \\ \mathbf{u}\mathbf{v} &= \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\star)\end{aligned}$$

avec  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u})$ . La relation  $(\star)$  est appelée *décomposition canonique du produit géométrique*. Elle permet notamment de faire le lien entre l'algèbre de Grassmann et celle de Clifford. Ces deux algèbres sont donc compatibles entre elles.

Dans le cas particulier de deux vecteurs orthogonaux, leur produit géométrique est réduit à un bivecteur. Il est donc antisymétrique. Si les deux vecteurs sont colinéaires, il est réduit à un scalaire et est donc symétrique. Généralement, il n'est ni commutatif, ni anti-commutatif. Le produit géométrique possède les propriétés suivantes :

- $\alpha\mathbf{A} = \mathbf{A}\alpha$  (commutativité des scalaires)
- $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$  (associativité)
- $(\alpha\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \alpha(\mathbf{A}\mathbf{C}) + \mathbf{B}\mathbf{C}$  et  $\mathbf{C}(\alpha\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{C}\mathbf{A}) + \mathbf{C}\mathbf{B}$  (bilinéarité)

où  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  sont des multivecteurs et  $\alpha$  un scalaire.

L'ensemble composé par les scalaires, les vecteurs de  $E$  et le produit géométrique de  $k$  vecteurs de  $E$  forme un espace vectoriel. Cet ensemble muni du produit géométrique définit l'*algèbre<sup>8</sup> de Clifford*  $\mathcal{C}(E)$ . Pour ne pas alourdir les notations, si  $E = \mathbb{R}^n$ , plutôt que de noter l'algèbre  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$  elle est notée plus simplement  $\mathcal{C}_n$ .

Dans cette algèbre comme dans celle de Grassmann, nous pouvons nous abstraire des coordonnées notamment pour exprimer les isométries. Mais lorsque des calculs s'avèrent nécessaires, ils peuvent être effectués dans une base construite à partir de celle de l'espace  $E$ .

**Exemples .** Soit  $(\mathbf{e}_i)_{i=1\dots n}$  une base de  $\mathbb{R}^n$ .

- En dimension 2, une base de l'algèbre géométrique de Clifford associée à  $\mathbb{R}^2$  notée  $\mathcal{C}_2$  est donnée par :

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\}. \quad (\text{B.4})$$

La base est de dimension  $2^2 = 4$ .

- En dimension 3, une base de l'algèbre géométrique dite de Clifford  $\mathcal{C}_3$  est donnée par :

$$\{1, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\}. \quad (\text{B.5})$$

Elle est de dimension  $2^3 = 8$ .

Comme l'algèbre de Grassmann, l'algèbre de Clifford est une algèbre graduée. L'ensemble des 0-vecteurs noté  $\mathcal{C}^0$  forme un espace vectoriel. Il en est de même pour l'ensemble des  $k$ -vecteurs (avec  $k$  fixé) noté  $\mathcal{C}^k$ . Pour un  $k$  fixé ( $0 \leq k \leq n$ ), former une base de l'espace vectoriel

8. Comme dans le cas de l'algèbre de Grassmann, l'algèbre de Clifford est une algèbre graduée.

$\mathcal{C}^k$ , revient à choisir  $k$  vecteurs parmi les  $n$  qui forment une base de  $E$ . Il en résulte que l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^k$  est de dimension  $\binom{n}{k}$ . Une base de  $\mathcal{C}_n$  est de dimension  $2^n$ . La justification est la même que dans le cas de l'algèbre de Grassmann.

Le produit géométrique permet de définir une notion importante : l'*inverse des multivecteurs*. Celle-ci est par exemple utilisée pour coder des transformations et en particulier les rotations. Certains multivecteurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de l'algèbre sont tels que leur produit géométrique vaut 1 :  $\mathbf{A}\mathbf{B} = 1$ . Dans ce cas, le multivecteur  $\mathbf{A}$  (resp.  $\mathbf{B}$ ) est dit inversible d'inverse  $\mathbf{B}$  (resp.  $\mathbf{A}$ ). L'inverse d'un multivecteur (s'il existe) est noté par l'exposant  $-1$ . Dans le cas des algèbres géométriques on peut ainsi « diviser » des (multi)vecteurs. La notation  $\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$  n'est cependant pas utilisée car elle est ambiguë : elle peut aussi bien désigner  $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$  que  $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ . Dans le premier cas, on dit que  $\mathbf{B}$  est l'inverse droit de  $\mathbf{A}$ . Dans le deuxième cas, on parle d'inverse gauche.

Comme le produit géométrique n'est pas commutatif, les inverses droit et gauche ne sont pas, dans le cas général, égaux.

L'inverse du vecteur  $\mathbf{a}$  et celui d'un  $k$ -vecteur décomposable  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{k-1} \wedge \mathbf{a}_k$  où les  $(\mathbf{a}_i)_{i=1..p}$  sont des vecteurs sont donnés par :

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \text{ et } \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{k-1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{A}\|^2}$$

où  $\cdot$  représente le produit scalaire.

Parmi ces éléments inversibles, certains sont appelés *verseurs*. Ils s'écrivent comme produits géométriques de vecteurs. Soit  $\mathbf{V}$  le verseur défini par :

$$\mathbf{V} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_p$$

où les  $(\mathbf{a}_i)_{i=1..p}$  sont des vecteurs. L'inverse  $\mathbf{V}^{-1}$  de ce verseur est donné par

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{a}_p \mathbf{a}_{p-1} \dots \mathbf{a}_1.$$

Dans le cas des verseurs, les inverses droit et gauche sont égaux. Ces verseurs jouent un rôle très important au sein des algèbres de Clifford. Ils permettent en effet de représenter et de manipuler les transformations orthogonales et en particulier les rotations qui sont au coeur de nos travaux.

Néanmoins tous les multivecteurs ne sont pas inversibles. Ceux qui le sont servent notamment à coder les transformations (comme les verseurs), les autres ne représentent pas de transformations mais sont quand même utilisés dans les calculs en tant qu'auxiliaires ou pour représenter des objets géométriques.

## 2.1 Le produit interne

L'algèbre de Clifford est munie aussi d'un produit interne noté «  $\cdot$  » [DFM07, Dor02]. Il étend aux multivecteurs de  $\mathcal{C}(E)$  le produit scalaire usuellement appliqué aux vecteurs de  $E$  (le produit scalaire<sup>9</sup> étant défini à partir de la forme bilinéaire symétrique  $\mathcal{B}$  que nous avons fixée dans le chapitre 2).

Il permet notamment de calculer des aires mais aussi permet de déterminer si deux « objets », des vecteurs par exemple, sont orthogonaux. Ce produit interne est un indicateur de

9. Rappelons que le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est défini par  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

l'orthogonalité. En effet, appliqué à deux vecteurs, il est nul si les deux vecteurs sont perpendiculaires.

D'une manière plus générale, en étendant la notion de produit scalaire usuel, le produit interne permet de définir des distances ou des normes. En effet, la norme du  $k$ -vecteur  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_{k-1} \wedge \mathbf{a}_k$  est calculée à partir de  $|\mathbf{A}| = \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}}$  avec  $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{a}_k \wedge \mathbf{a}_{k-1} \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}_1$ . La norme d'un 1-vecteur est en fait la norme classique du vecteur. La norme d'un 2-vecteur  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  correspond à l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ . D'une manière générale, la norme d'un multivecteur  $\mathbf{M} = \mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p$  est définie comme le « volume » occupé par le sous-espace engendré (norme classique du vecteur si  $p = 1$ , aire de la surface si  $p = 2$ , volume du solide si  $p = 3$ ...). Nous rappelons ici quelques unes des propriétés du produit interne.

Soient  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  des vecteurs,  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_k, \mathbf{B} = \mathbf{b}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{b}_k$  respectivement un  $a$ -vecteur et un  $b$ -vecteur et  $\alpha, \beta$  des scalaires alors le produit interne vérifie entre autres, les propriétés suivantes :

- $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\text{angle entre } \mathbf{u} \text{ et } \mathbf{v}) \in \mathbb{R}$  (commutativité)
- $(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$  (distributivité)
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$  si  $\text{Grade}(\mathbf{A}) \neq \text{Grade}(\mathbf{B})$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_k & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_{k-1} & \dots & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_k & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_{k-1} & \dots & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_k & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_{k-1} & \dots & \mathbf{a}_k \cdot \mathbf{b}_1 \end{vmatrix}$  si  $\text{Grade}(\mathbf{A}) = \text{Grade}(\mathbf{B})$ .

## 2.2 Les contractions

Certaines expressions combinent les deux produits : le produit extérieur et le produit interne par exemple l'expression  $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$  où  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont des éléments de l'algèbre. Afin d'établir des règles d'« interaction » entre ces deux produits, on définit deux produits [DFM07, Dor02, Cha07] : la contraction à droite et la contraction à gauche notées respectivement  $\rfloor$  et  $\lrcorner$ . Appliquée au problème d'estimation de rotations, la contraction à gauche permet notamment de retrouver à partir des couples vecteurs/images et des plans de rotation les angles de rotation (cf section 2.2). D'une manière générale, la contraction à gauche d'un  $a$ -vecteur  $\mathbf{A}$  (représentant le sous-espace  $A$  de dimension  $a$ ) sur un  $b$ -vecteur  $\mathbf{B}$  (représentant le sous-espace  $B$  de dimension  $b$ ) représente le sous espace de  $B$  de dimension  $b - a$  qui est perpendiculaire à  $A$ . Elle est notée  $\mathbf{A} \lrcorner \mathbf{B}$ . La figure B.4 représente la contraction à gauche d'un 1-vecteur  $\mathbf{x}$  par un 2-vecteur  $\mathbf{P}$ . La contraction à gauche est interprétée comme le vecteur appartenant au plan  $P$  perpendiculaire à  $\mathbf{x}$ .

Soient  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  des  $k$ -vecteurs,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$  des vecteurs et  $\alpha$  un scalaire. La contraction à gauche a les propriétés suivantes :

- $\alpha \lrcorner \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$
- $\mathbf{B} \lrcorner \alpha = 0$  si  $\text{Grade}(\mathbf{B}) > 0$
- $\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
- $\mathbf{a} \lrcorner (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C} + (-1)^{\text{Grade}(\mathbf{B})} \mathbf{B} \wedge (\mathbf{a} \lrcorner \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \lrcorner \mathbf{C} = \mathbf{A} \lrcorner (\mathbf{B} \lrcorner \mathbf{C})$

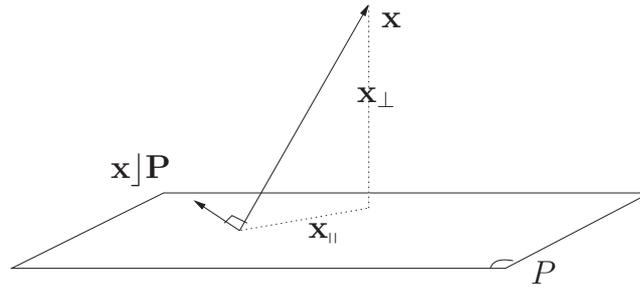


FIGURE B.4 – Projection, réjection et contraction d'un vecteur  $x$  sur le plan  $P$  représenté par le bivecteur  $P$ .

- $(A + B)|C = A|C + B|C$  et  $A|(B + C) = A|B + A|C$  (distributivité)
- $(\alpha A)|B = \alpha(A|B) = A|(\alpha B)$  (bilinéaire).

En utilisant cette contraction une règle d'« interaction » est donnée par :

$$(A \wedge B) \cdot C = A \cdot (B|C).$$

De plus, la contraction à gauche de deux  $k$ -vecteurs de même grade est équivalente au produit scalaire comme nous pouvons le vérifier dans [DFM07]. Il en résulte, d'après la décomposition canonique du produit géométrique, les égalités suivantes :

$$u \wedge v = \frac{1}{2}(uv - vu) \text{ et } u|v = \frac{1}{2}(uv + vu).$$

Ces deux égalités interviennent très souvent dans les calculs.

La contraction à droite s'exprime en fonction des produits extérieur et scalaire. Elle est donnée par :

$$(A \wedge B) \cdot C = A \cdot (B|C)$$

$$\text{et } A \cdot (B \wedge C) = (A|B) \cdot C$$

où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des multivecteurs.

Les deux contractions sont liées par la formule :

$$B|A = (-1)^{a(b+1)} A|B$$

avec  $a$  et  $b$  sont les grades respectifs de  $A$  et  $B$ .

Nous venons de présenter deux algèbres géométriques, l'algèbre de Clifford et l'algèbre de Grassmann. Il existe une autre algèbre : l'algèbre de Grassmann-Cayley qui est définie à partir de l'algèbre de Grassmann. Elle est souvent utilisée pour exprimer des énoncés en géométrie projective. Nous ne la présentons pas ici. Le lecteur intéressé pourra consulter [Cha07, DFM07].

### 3 Lien entre les algèbres géométriques

Nous avons vu dans les sections précédentes que les algèbres géométriques que nous venons de présenter étaient compatibles au sens où il existe un isomorphisme d'espace vectoriel

entre l'espace de l'algèbre de Clifford ( $E$ ) et l'espace des multivecteurs de l'algèbre de Grassmann  $\wedge(E)$ . Cette propriété est démontrée dans [Cha07]. Pour définir la conjonction entre ces deux algèbres nous utilisons une base orthogonale de  $E$ . Soient  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  une base orthogonale de  $E$ , alors  $\Theta$  le morphisme canonique<sup>10</sup> déduit de la base  $B$  est donné par :

$$\begin{aligned} \Theta : \quad \wedge(E) &\rightarrow \mathcal{C}(E) \\ 1 &\mapsto 1 \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} &\mapsto e_{i_1} \dots e_{i_k} \end{aligned}$$

pour toute suite  $(i_j)_{j=1\dots k}$  avec  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ .

## 4 Opérations dans l'algèbre géométrique

Le but de cette partie est de montrer comment sont représentées les rotations dans les algèbres géométriques. Nous montrons comment cette représentation généralise en toute dimension la représentation des rotations par les quaternions que nous avons définis dans la section 1.1.2. Nous y définissons notamment les *projections* et les *réjections*. Ces deux transformations nous permettent, dans le cadre de nos travaux, de déterminer la composante d'un vecteur  $\mathbf{x}$  appartenant au sous-espace représenté par le bivecteur  $\mathbf{P}$  et la composante qui lui est orthogonale. Nous les utilisons pour déterminer les angles de rotations à partir de plans de rotations connus.

### 4.1 Projections et réjections sur des sous-espaces

Dans le formalisme des algèbres géométriques, il est possible de calculer la composante d'un vecteur  $\mathbf{x}$  qui appartient au sous-espace  $P$  représenté par un multivecteur  $\mathbf{P}$  et sa composante qui lui est orthogonale. Ces composantes [DFM07], notées respectivement  $\mathbf{x}_{\parallel}$  et  $\mathbf{x}_{\perp}$  sont la *projection* et de la *réjection* du vecteur  $\mathbf{x}$  relativement au sous-espace  $P$ . La projection et la réjection sont représentées sur la figure B.4. Dans ce cas, tout vecteur  $\mathbf{x}$  de  $E$  peut être décomposé de manière unique :  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}$  où  $\mathbf{x}_{\parallel} \in P$  et  $\mathbf{x}_{\perp}$  appartient au sous-espace noté  $P^{\perp}$ . Ce sous-espace est l'orthogonal au sous-espace  $P$  dans  $E$ . Il est engendré par les vecteurs de  $E$  qui sont orthogonaux aux vecteurs de  $P$ . La notion d'orthogonalité est définie à partir de la forme bilinéaire que nous avons fixée dans le chapitre 2. Formellement, le sous-espace  $P^{\perp}$  est défini par :

$$P^{\perp} = \{\mathbf{x} \in E \mid \forall \mathbf{y} \in P, \mathcal{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}.$$

Les notions de projection et réjection sont calculées à partir des produits interne et géométrique de la manière suivante :

$$\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{P})\mathbf{P}^{-1} \text{ et } \mathbf{x}_{\perp} = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{P})\mathbf{P}^{-1}. \quad (\text{B.6})$$

Elles vérifient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \\ \mathbf{x}_{\perp} \cdot \mathbf{P} &= 0 \text{ et } \mathbf{x}_{\parallel} \wedge \mathbf{P} = 0. \end{aligned}$$

10. Il généralise la décomposition canonique du produit géométrique ( $\star$ ) page 183.

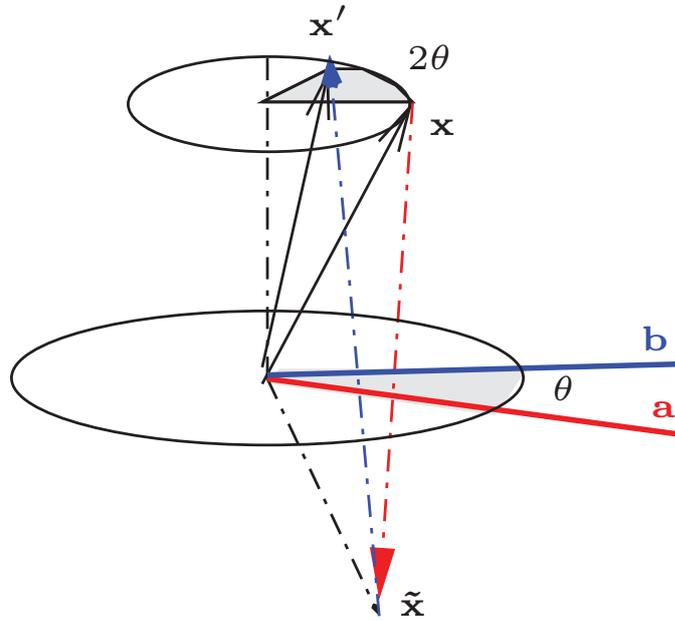


FIGURE B.5 – Décomposition de la rotation en deux réflexions. La rotation de  $x$  en  $x'$  peut être vue comme la composition de la réflexion par rapport à  $a$  puis  $b$ . L'angle de rotation est le double de celui entre  $a$  et  $b$ .

Comme nous le montrent ces équations, ces opérations s'expriment sans recours à un système de coordonnées et de manière très compacte. Dans le cas de  $k$ -vecteurs  $A$  et  $B$ , la projection et la réjection<sup>11</sup> sont respectivement calculées grâce à :

$$A_{||} = (A \cdot B)/B \text{ et } A_{\perp} = A - A_{||}.$$

Le calcul de la projection et la réjection d'un vecteur sur un bivecteur (*cf.* figure B.4) peut se généraliser aux cas de  $k$ -vecteurs  $A$  et  $X$ . La projection  $X_{\text{proj}}$  de  $X$  sur  $A$  est donnée par :

$$X_{\text{proj}} = (X|A)A^{-1}.$$

La réjection  $X_{\text{rej}}$  de  $X$  par  $A$  est donnée par :

$$X_{\text{rej}} = X - (X|A)A^{-1}.$$

## 4.2 Réflexions

D'après le théorème de Cartan-Dieudonné [Aud03], nous savons que toute rotation  $nD$  peut se décomposer en au plus  $n$  réflexions. Par conséquent, composer les réflexions permet de générer les rotations.

La figure B.5 illustre le théorème de Cartan-Dieudonné. La rotation transformant le vecteur  $x$  en  $x'$  peut être décomposée comme une double réflexion, la première par rapport à  $a$ , la seconde par rapport à  $b$ .

11. La formule (B.6) n'est pas généralisable aux  $k$ -vecteurs. Si cela était le cas, nous aurions  $A_{\perp} = (A \wedge B)/B$ . Cette formule n'a pas de sens en 3D car les 4-vecteurs n'existent pas.

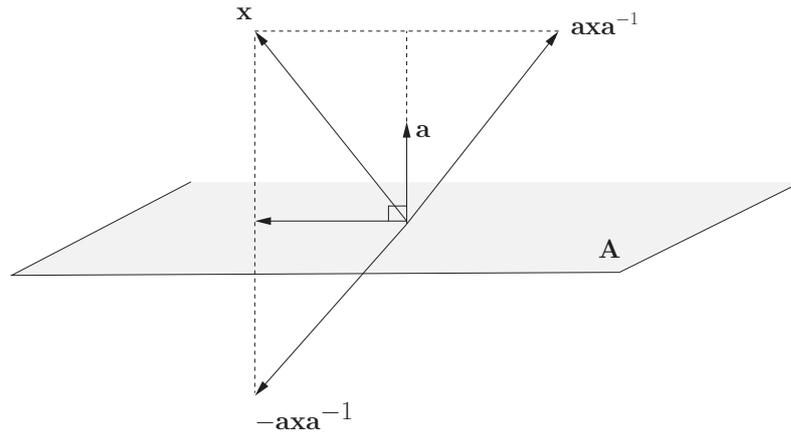


FIGURE B.6 – Le vecteur  $\mathbf{axa}^{-1}$  est l'image du vecteur  $\mathbf{x}$  par la réflexion par rapport à la droite support du vecteur  $\mathbf{a}$  et  $-\mathbf{axa}^{-1}$  celle par rapport à l'hyperplan  $\mathbf{A}$  dual du vecteur  $\mathbf{a}$ .

La réflexion [DFM07]  $\mathbf{x}_{\text{reflex}}$  du vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport à la droite passant par l'origine et de vecteur directeur unitaire (de norme 1)  $\mathbf{a}$  est donnée par :

$$\mathbf{x}_{\text{reflex}} = \mathbf{axa}^{-1}.$$

La figure B.6 représente graphiquement la réflexion du vecteur  $\mathbf{x}$  par rapport au vecteur  $\mathbf{a}$ . En étendant la transformation à un  $k$ -vecteur  $\mathbf{X}$  nous avons :

$$\mathbf{X}_{\text{reflex}} = \mathbf{aXa}^{-1}.$$

De manière encore plus générale, la réflexion de  $\mathbf{X}$  par rapport au sous-espace représenté par  $\mathbf{A}$  est donnée par :

$$\mathbf{X}_{\text{ref}} = (-1)^{x(a+1)} \mathbf{AXA}^{-1}$$

où  $a$  et  $x$  sont respectivement les grades de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{X}$ .

### 4.3 Rotations

Dans cette partie nous reprenons les propriétés de la partie 1.2.3 pour définir les rotations 2D (rotations planes) et  $n$ D dans les algèbres géométriques.

Dans le plan, l'élément  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  (forme exponentielle d'un nombre complexe) permet de calculer les images des vecteurs du plan par une rotation centrée en l'origine. En effet, l'image  $\mathbf{x}'$  d'un point du plan complexe  $\mathbf{x}$  par la rotation centrée en l'origine d'angle  $\theta$  est donnée par :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}e^{i\theta} = \mathbf{x}(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (\text{B.7})$$

En dimension 3, une rotation est déterminée par l'élément  $e^{\mathbf{u}\frac{\theta}{2}} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$  où  $\mathbf{u}$  est l'axe de rotation  $(x, y, z)$  représenté par un quaternion  $q = xi + yj + zk$  supposé unitaire (nombre complexe généralisé (cf. section 1.1.2)) et  $\theta$  l'angle de rotation. Dans cet espace, l'image  $\mathbf{x}'$  du vecteur  $\mathbf{x}$  est donnée par :

$$\mathbf{x}' = e^{\mathbf{u}\frac{\theta}{2}} \mathbf{x} e^{-\mathbf{u}\frac{\theta}{2}}. \quad (\text{B.8})$$

Ici, les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{x}'$  sont considérés comme des quaternions dont la partie réelle est nulle. En dimension supérieure, l'élément qui permet d'effectuer une rotation plane est donné par :

$$\mathbf{R} = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} = \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (\text{B.9})$$

où  $\mathbf{P}$  est un bivecteur décomposable représentant le plan de rotation. L'élément  $\mathbf{R}$  est appelé un *rotor*. Ainsi, en dimension supérieure, les formules (B.7) et (B.8), se généralisent à

$$\mathbf{x}' = e^{-\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} \mathbf{x} e^{\mathbf{P}\frac{\theta}{2}} = \left( \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2} \right) \mathbf{x} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{x}\mathbf{R}^{-1}. \quad (\text{B.10})$$

La formule (B.10) permet donc d'exprimer n'importe quelle rotation plane dans les algèbres géométriques.

Par exemple, l'image du vecteur  $\mathbf{e}_3$  dans la rotation d'angle  $\pi/3$  dans le plan  $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3$  est donnée par  $\mathbf{R}\mathbf{e}_3\mathbf{R}^{-1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{e}_3$  où  $\mathbf{R} = \cos(\frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)$  et  $\mathbf{R}^{-1} = \cos(\frac{\pi}{6}) + \sin(\frac{\pi}{6})(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3)$ .

La formule (B.10) peut être utilisée aussi bien pour des vecteurs que pour des multivecteurs. La rotation d'un multivecteur  $\mathbf{X}$  est donnée par :  $\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}$  où  $\mathbf{R}$  est un rotor.

De manière alternative le rotor représentant une rotation plane peut être exprimé en fonction des deux axes de réflexions qui composent la rotation. Soient  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont deux axes de réflexions formant un angle  $\frac{\theta}{2}$ , soit  $R_1$  la réflexion d'axe  $\mathbf{a}$  et  $R_2$  la réflexion d'axe  $\mathbf{b}$ . L'image  $\mathbf{x}'$  du vecteur  $\mathbf{x}$  par la rotation d'angle  $\theta$  est donnée par  $R_2(R_1(\mathbf{x}))$ . Dans les algèbres géométriques, ces réflexions sont données par  $\mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{a}^{-1})\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{R}\mathbf{x}\mathbf{R}^{-1}$ . Grâce à la formule précédente, nous venons de donner une autre représentation<sup>12</sup> du rotor :

$$\mathbf{R} = \mathbf{b}\mathbf{a}. \quad (\text{B.11})$$

Nous allons maintenant montrer comment sont définis les rotors exprimant les rotations  $nD$ . D'après la proposition 1 [Aud03], les rotations  $nD$  sont la composition de rotations planes. Ainsi si  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  sont des rotors codant respectivement la rotation d'angle  $\theta_1$  dans le plan  $P_1$  représenté par  $\mathbf{P}_1$  et  $\theta_2$  dans le plan  $P_2$  de représentant  $\mathbf{P}_2$  alors l'image  $\mathbf{p}'$  de  $\mathbf{p}$  par la composition de ces deux rotations est donnée par :

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{p}(\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1)^{-1} = \mathbf{R}_2\mathbf{R}_1\mathbf{p}\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{R}_2^{-1}.$$

Cette formule se généralise à un nombre quelconque de rotations. Le rotor associé à la composition de  $k$  rotations est le produit (dans l'ordre inverse de composition) des rotors. Comme la multiplication dans les algèbres géométriques n'est pas commutative, l'ordre des éléments intervenant dans ce produit est important.

Pour conclure cette partie sur les rotations, nous pouvons rappeler que dans les algèbres géométriques, toute rotation  $nD$  s'écrit sous la forme compacte :  $\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{R}^{-1}$  où le rotor  $\mathbf{R}$  est soit un rotor associé à une rotation plane soit un produit de rotors (dans le cas de composition de rotations planes) et  $\mathbf{X}$  est un élément de l'algèbre dont nous cherchons l'image. L'élément  $\mathbf{R}$  est un élément de l'algèbre. Ainsi, les éléments de l'algèbre représentent aussi bien des objets géométriques (vecteurs, multivecteurs) que des transformations (rotors).

12. Comme l'inverse  $\mathbf{a}^{-1}$  d'un vecteur  $\mathbf{a}$  est donnée par  $\mathbf{a}^{-1} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$  et que les axes de réflexions sont souvent normés, certains expriment, de manière équivalente, le rotor sous la forme  $\mathbf{R} = \mathbf{b}\mathbf{a}^{-1}$ .

#### 4.4 Notion de dualité

Géométriquement la notion de *dual* peut être vue comme le complément orthogonal (dans le sous-espace de dimension  $n$  représenté par le pseudo-scalaire) au sous-espace représenté par un multivecteur. Avant d'expliciter cette notion nous allons commencer par donner quelques propriétés du pseudo-scalaire.

Rappelons que le pseudo-scalaire est l'unique élément (normé) de grade  $n$  (grade le plus élevé)<sup>13</sup> et est généralement noté  $\mathbf{I}$ . Il correspond au produit extérieur des  $n$  1-vecteurs de la base. En dimension  $n$ , le pseudo-scalaire est donné par :

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n.$$

Dans des espaces de dimensions  $n$  impaires, il commute avec tous les éléments. Dans ceux de dimensions paires, il anti-commute avec ceux de grades impairs et commute avec ceux de grades pairs. En d'autres termes :

$$\mathbf{I}\mathbf{A}_k = (-1)^{k(n-1)} \mathbf{A}_k \mathbf{I}$$

où  $\mathbf{A}_k$  est un  $k$ -vecteur simple. Géométriquement, le pseudo-scalaire peut être interprété comme le sous espace de dimension  $n$  dans lequel nous nous sommes placé.

En algèbre linéaire, un plan est défini par un point et un vecteur non nul qui lui est orthogonal : sa normale. Dans les algèbres géométriques, les bivecteurs peuvent être interprétés comme des sous-espaces de dimension 2 : des plans. La notion de pseudo-scalaire permet de comprendre la relation entre ces deux représentations notamment via la notion de *dual*. Le dual d'un  $k$ -vecteur  $\mathbf{A}$  noté  $\mathbf{A}^*$  est donné par :

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}\mathbf{I}^{-1}.$$

où  $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{e}_n \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_1$ . Par exemple, dans un espace de dimension 3, le dual d'un 2-vecteur représentant un plan est un 1-vecteur représentant sa normale. En dimension 3, un plan c'est-à-dire un 2-vecteur peut être caractérisé de manière duale par un 1-vecteur. Cette propriété ne s'applique qu'à la dimension 3. En dimension 4 le dual d'un 2-vecteur est un 2-vecteur. La figure B.7 illustre la dualité dans les espaces 2D et 3D.

13. Les éléments de grade  $n - 1$  sont appelés pseudo-vecteurs.

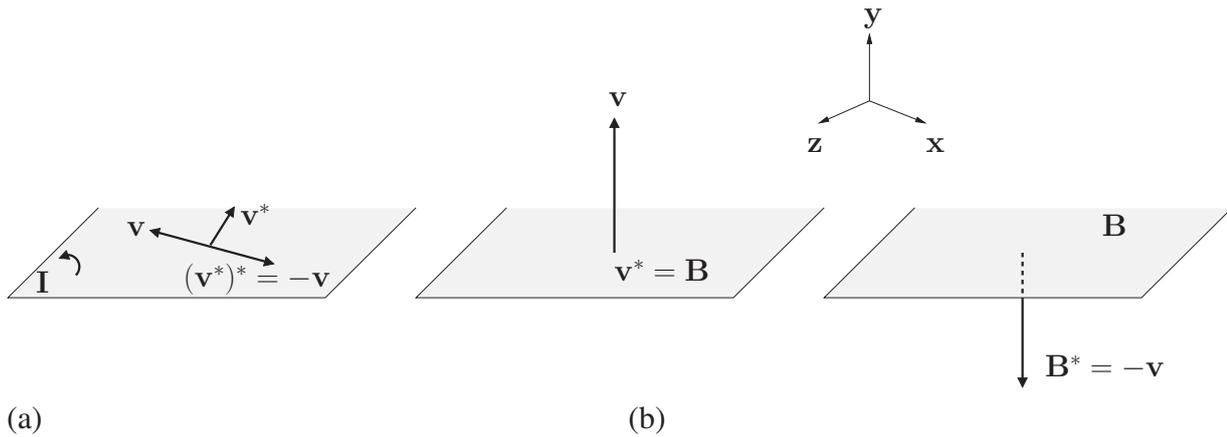


FIGURE B.7 – (a) Soit  $I$  le pseudo-scalaire de l'espace 2D. Le plan est orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Le dual du vecteur  $v$  par rapport à  $I$  est noté  $v^*$ . Il s'agit du vecteur  $v$  ayant subi une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . Le dual du dual du vecteur est l'opposé de ce dernier ; (b) L'espace 3D est supposé respecter la règle de la main droite<sup>15</sup>. Le dual d'un 1-vecteur est un 2-vecteur et inversement.

15. La règle de la main droite permet de se représenter facilement un repère orthonormal direct. Les trois vecteurs de la base  $x, y, z$  peuvent être représentés respectivement par le pouce, l'index et le majeur de la main droite.

---

## ANNEXE C

---

# RELATIONS ENTRE LES DIFFÉRENTES REPRÉSENTATIONS DES ROTATIONS EN DIMENSION 3

---

Dans cette annexe, nous regroupons et synthétisons les liens qui existent entre les différentes représentations des rotations 3D que nous avons présentées dans la section 1 : les matrices, les quaternions, les rotors, les angles d'Euler. Ces liens sont extraits de différentes sources [DFM07, Kui02, Ebe02].

### Des angles d'Euler à la matrice de rotation

En dimension 3, la matrice de rotation peut se décomposer en trois matrices de rotations autour des axes du repère. Les trois angles correspondant à ces rotations sont appelés les *angles d'Euler*. Nous montrons, dans cette section, comment retrouver la matrice de la rotation à partir des angles d'Euler.

Connaissant les trois angles d'Euler  $\theta, \phi, \psi$  et la configuration (successions des axes de rotation) parmi les suivantes :

$$\begin{array}{cccc} xyz & xzy & xyx & xzx \\ yzx & yxz & yzy & yxy \\ zxy & zyx & zxz & zyz. \end{array} \quad (1.7)$$

la matrice de rotation peut être obtenue par multiplication des matrices élémentaires :

$$R_{\mathbf{X}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$R_{\mathbf{Y}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$R_{\mathbf{Z}}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

## De la matrice de rotation au quaternion

À partir d'une matrice de rotation 3D, il est possible de retrouver le quaternion associé à la rotation.

Si la trace<sup>1</sup>  $t$  de la matrice de rotation  $(M_{ij})_{i,j=1\dots n}$  est positive le quaternion  $q$  associé est donné par :

$$q = \frac{1}{4s} + [(M_{21} - M_{12})s]i + [(M_{02} - M_{20})s]j + [(M_{10} - M_{01})s]k \text{ avec } s = \frac{1}{2t}$$

Si la trace  $t$  est négative ou nulle, on appelle  $g$  la quantité  $g = \max(M_{00}, M_{11}, M_{22})$ . Le quaternion est ensuite calculé en fonction de  $g$  :

Si  $g = M_{00}$ , posons  $s = 2\sqrt{1 + M_{00} - M_{11} - M_{22}}$  le quaternion est donné par :

$$q = \left( \frac{M_{12} - M_{10}}{s} \right) + \left[ \frac{1}{2s} \right] i + \left[ \frac{M_{01} - M_{10}}{s} \right] j + \left[ \frac{M_{02} - M_{20}}{s} \right] k.$$

Si  $g = M_{11}$ , posons  $s = 2\sqrt{1 - M_{00} + M_{11} - M_{22}}$  le quaternion est donné par :

$$q = \left( \frac{M_{02} - M_{20}}{s} \right) + \left[ \frac{M_{01} - M_{10}}{s} \right] i + \left[ \frac{1}{2s} \right] j + \left[ \frac{M_{12} - M_{10}}{s} \right] k;$$

Si  $g = M_{22}$ , posons  $s = 2\sqrt{1 - M_{00} - M_{11} + M_{22}}$  le quaternion est donné par :

$$q = \left( \frac{M_{01} - M_{10}}{s} \right) + \left[ \frac{M_{02} - M_{20}}{s} \right] i + \left[ \frac{M_{12} - M_{10}}{s} \right] j + \left[ \frac{1}{2s} \right] k.$$

## Du quaternion à la matrice de rotation

Soit  $q = (w, x, y, z)$  un quaternion unitaire. La matrice de rotation  $M$  associée à ce quaternion est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 - 2y^2 - 2z^2 & 2xy - 2zw & 2xz + 2yw \\ 2xy + 2zw & 1 - 2x^2 - 2z^2 & 2yz - 2xw \\ 2xz - 2yw & 2yz + 2xw & 1 - 2x^2 - 2y^2 \end{pmatrix}.$$

## Du quaternion à la représentation axe/angle

Soit  $q = \text{Re}(q) + \text{Im}(q)$  un quaternion unitaire. L'angle  $\theta$  et l'axe  $\mathbf{a}$  de la rotation associée sont donnés par :

$$\theta = 2 \arctan \left( \frac{|\text{Im}(q)|}{\text{Re}(q)} \right) \text{ et } \mathbf{a} = \frac{\text{Im}(q)}{|\text{Im}(q)|}.$$

1. La trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux.

## De la représentation axe/angle au quaternion

De manière réciproque, le quaternion associé à la rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  normé est donné par :

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{a}.$$

## Du quaternion aux angles d'Euler

Nous donnons ici la méthode donnée dans [Kui02] pour retrouver les angles  $\psi, \theta$  et  $\phi$  associés à la configuration  $zyx$ . Dans le cas des autres configurations, les valeurs des angles peuvent être retrouvées de manière similaire. Soit  $q = w + xi + yj + zk$  un quaternion. Posons  $A = 2w^2 + 2x^2 - 1, B = 2xy + wz, C = 2xz - 2wz, D = 2yz + 2wx$  et  $E = 2w^2 + 2z^2 - 1$ . Les angles sont donnés par :

$$\tan \psi = \frac{A}{B}, \quad \sin \theta = -C \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{D}{E}$$

ou encore

$$\psi = \arctan \frac{A}{B}, \quad \theta = \arcsin(-C) \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{D}{E}.$$

Si  $B$  est nul ou  $E$  est nul, l'arc tangente n'est pas définie. On utilise alors la fonction à deux arguments  $\text{atan2}(y, x)$  [Org66] qui donne l'angle en radians entre la partie positive de l'axe des  $x$  d'un plan et le point de ce plan aux coordonnées  $(x, y)$ . Elle est définie par :

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y \geq 0, x < 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & y < 0, x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0 \\ \text{non définie} & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

Si  $B$  (resp.  $E$ ) est nul alors  $\psi = \text{atan2}(0, A)$  avec  $A \neq 0$  (resp.  $\phi = \text{atan2}(0, D)$  avec  $D \neq 0$ ) prouvant ainsi que dans notre cas la fonction  $\text{atan2}$  est toujours définie.

## Des angles d'Euler au quaternion

Connaissant la configuration parmi (1.7) et les trois angles d'Euler  $\theta, \phi, \psi$ , chaque rotation peut être codée par un quaternion (*cf.* partie quaternions vs représentation axe/angle). Le quaternion codant la rotation finale est le produit de ces trois quaternions.

## De la représentation axe/angle à la matrice de rotation

La matrice de rotation  $M$  d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$  normé est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} a_x^2 + (1 - a_x^2)c\theta & a_x a_y (1 - c\theta) - a_z s\theta & a_x a_z (1 - c\theta) + a_y s\theta \\ a_x a_y (1 - c\theta) + a_z s\theta & a_y^2 + (1 - a_y^2)c\theta & a_y a_z (1 - c\theta) - a_x s\theta \\ a_x a_z (1 - c\theta) - a_y s\theta & a_y a_z (1 - c\theta) + a_x s\theta & a_z^2 + (1 - a_z^2)c\theta \end{pmatrix}$$

où  $c\theta = \cos \theta$  et  $s\theta = \sin \theta$ .

## De la matrice de rotation à la représentation axe/angle

Les valeurs propres<sup>2</sup> de la matrice sont 1 et  $\cos \theta \pm \sin \theta$ . L'axe de rotation est le vecteur propre associé à la valeur propre 1 et l'angle  $\theta$  est calculé grâce aux valeurs propres.

## De la représentation axe/angle au rotor

Si la rotation 3D est une rotation d'angle  $\frac{\theta}{2}$  autour d'un axe unitaire  $\mathbf{a}$ , alors le rotor  $\mathbf{R}$  associé à la rotation est donné par :

$$\mathbf{R} = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2}.$$

## Du rotor au quaternion

Soit la rotation d'angle  $\theta$  dans un plan représenté par le bivecteur  $\mathbf{P}$  dont son vecteur normal est représenté par le quaternion pur (sans partie réelle) et unitaire  $\mathbf{a}$ . Soient  $Q$  et  $\mathbf{R}$  respectivement le quaternion et le rotor qui représentent cette rotation. Ils sont donnés par :

$$Q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{a} \sin \frac{\theta}{2} \text{ et } \mathbf{R} = \cos \frac{\theta}{2} - \mathbf{P} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Nous avons donc par identification les relations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(Q) = \langle \mathbf{R} \rangle_0 \\ \operatorname{Im}(Q) = - \langle \mathbf{R} \rangle_2 \mathbf{I} \end{cases}$$

où  $\mathbf{I}$  est le pseudo-scalaire (élément de grade  $n$ ) et  $\langle \mathbf{R} \rangle_i$  est la partie de grade  $i$  du rotor  $\mathbf{R}$ . Cette relation exprime la dualité entre le plan de rotation (ici le plan représenté par le bivecteur  $\mathbf{P}$ ) et son vecteur normal c'est-à-dire l'axe de rotation (ici le vecteur  $\mathbf{a}$ ).

## Du rotor à la matrice de rotation

Si  $\mathbf{R}$  désigne le rotor associé à une rotation 3D alors la matrice de rotation associée est telle que sa  $i^{\text{ème}}$  colonne pour  $i = 1, 2, 3$  est donnée par  $\mathbf{R} \mathbf{e}_i \mathbf{R}^{-1}$ .

---

2. Le vecteur  $\mathbf{x}$  est un vecteur propre de l'application  $f$  si  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ . Le réel  $\lambda$  est appelé valeur propre de l'application  $f$  associé au vecteur propre  $\mathbf{x}$ .

---

## ANNEXE D

---

# MÉTHODE D'ARITHMÉTISATION DANS LE CAS DE FONCTIONS DE CLASSE $C^1$

---

Le but de cette annexe est d'appliquer la méthode d'arithmétisation pour une fonction  $f$  de classe  $C^1$  dans le cas du schéma d'Euler et de Heun. Ces schémas généralisent donc ceux obtenus dans les chapitres 4 et 5 dans le cas du cercle. Comme dans le chapitre 4, les variables qui servent pour le tracé sont écrites en rouge.

## 1 Le schéma d'Euler

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction  $C^1$  avec  $U$  ouvert de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  et considérons le problème de Cauchy continu suivant :

$$\begin{cases} z(a) = b \\ z'(t) = f(t, z) \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}^n$

Approchons-le par le schéma d'Euler :

$$\begin{cases} t_0 = a \\ z_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + h \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Nous posons  $h = \frac{1}{\beta}$  avec  $\beta$  infiniment grand. Ainsi, le pas d'intégration  $h$  est infiniment petit. Nous obtenons :

$$\begin{cases} t_0 = a \\ z_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\beta} \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{\beta}f(t_n, z_n) \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Nous nous fixons  $\omega \sim +\infty$ , multiple de  $\beta$  (nous pouvons donc écrire  $\omega = \alpha\beta$ ).

Par analogie, nous proposons (D.4) qui est une adaptation en variables entières de (D.3) :

**Schéma numérique 7.** *Arithmétisation du schéma d'Euler- Cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  - Interprétation à l'échelle  $\omega$*

$$\begin{cases} T_0 = \lfloor \omega a \rfloor = A \\ Z_0 = \lfloor \omega b \rfloor = B \\ T_{n+1} = T_n + \alpha \\ Z_{n+1} = Z_n + \lfloor \frac{F(T_n, Z_n)}{\beta} \rfloor \end{cases} \quad (D.4)$$

Posons  $t'_n = \frac{T_n}{\omega}$ ,  $z'_n = \frac{Z_n}{\omega}$ ,

Lorsque nous divisons toutes les variables de (D.4) par  $\omega$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} t'_0 = \frac{1}{\omega} \lfloor \omega a \rfloor \\ z'_0 = \frac{1}{\omega} \lfloor \omega b \rfloor \\ t'_{n+1} = t'_n + \frac{1}{\beta} \\ z'_{n+1} = z'_n + \frac{1}{\beta} g(t'_n, z'_n) \end{cases} \quad (D.5)$$

avec  $g(t'_n, z'_n) = \frac{1}{\alpha} \lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \rfloor$ .

**Théorème 17.** *Sous les hypothèses précédentes et  $\omega = \alpha\beta$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \sim +\infty$  : Si  $(T_n, Z_n)$  est solution de (D.4) alors  $t'_n$  et  $z'_n$  sont solutions de (D.5) , infiniment proche de (D.3) au sens où :  $g(t'_n, z'_n) \sim f(t'_n, z'_n)$*

**Remarque 14.** *Nous venons de construire le schéma (D.5) obtenu à partir de (D.3) par passages successifs dans  $\mathbb{Z}$  puis dans  $\mathbb{R}$  au moyen des applications  $\psi_\omega$  et  $\phi_\omega$  définies dans le chapitre 3. D'après le théorème 17, ces solutions sont infiniment proches. Les deux fonctions peuvent être vues comme des changements de variables inverses l'une de l'autre.*

**Preuve .** *Montrons, à l'aide de la définition de  $g(t'_n, z'_n)$  et de celle de la partie entière, que la norme  $\|g(t'_n, z'_n) - f(t'_n, z'_n)\|$  est infiniment proche de zéro.*

$$\begin{aligned} \|g(t'_n, z'_n) - f(t'_n, z'_n)\| &= \left\| \frac{1}{\alpha} \lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \rfloor - f(t'_n, z'_n) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\alpha} \lfloor \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \rfloor - \frac{1}{\alpha} \{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \} - f(t'_n, z'_n) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{\omega} \omega f(t'_n, z'_n) - \frac{1}{\omega} \{ \omega f(t'_n, z'_n) \} - \frac{1}{\alpha} \{ \frac{1}{\beta} \lfloor \omega f(t'_n, z'_n) \rfloor \} - f(t'_n, z'_n) \right\| \leq \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\alpha} \leq \frac{2}{\alpha} \end{aligned}$$

*Comme  $\alpha \sim +\infty$ ,  $\frac{2}{\alpha} \sim 0$  et donc  $\|g(t'_n, z'_n) - f(t'_n, z'_n)\|$  est infiniment proche de 0.  $\square$*

Nous allons maintenant interpréter le schéma obtenu à une échelle intermédiaire, car un affichage à l'échelle  $\omega$  fournit une courbe fortement non connexe. Nous disposons pour cela de deux échelles :  $\alpha$  et  $\beta$ .

En utilisant la même méthode que dans le chapitre 3, nous obtenons les schémas numériques aux échelles  $\alpha$  et  $\beta$  suivants :

---

**Schéma numérique 8.** Arithmétisation du schéma d'Euler- Cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$   
- Interprétation à l'échelle  $\alpha$

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{T}_0 = [\omega a] \div \beta \\ \widehat{T}_0 = [\omega a] \pmod{\beta} \\ \widetilde{Z}_0 = [\omega b] \div \beta \\ \widehat{Z}_0 = [\omega b] \pmod{\beta} \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + (\widehat{T}_n + \alpha) \div \beta \\ \widehat{T}_{n+1} = (\widehat{T}_n + \alpha) \pmod{\beta} \\ F_n = \lfloor \frac{F(T_n, Z_n)}{\beta} \rfloor \\ \widetilde{Z}_{n+1} = \widetilde{Z}_n + (\widehat{Z}_n + F_n) \div \beta \\ \widehat{Z}_{n+1} = (\widehat{Z}_n + F_n) \pmod{\beta} \end{array} \right. \quad (\text{D.6})$$


---

**Schéma numérique 9.** Arithmétisation du schéma d'Euler- Cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$   
- Interprétation à l'échelle  $\beta$

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{T}_0 = [\omega a] \div \alpha \\ \widehat{T}_0 = [\omega a] \pmod{\alpha} \\ \widetilde{Z}_0 = [\omega b] \div \alpha \\ \widehat{Z}_0 = [\omega b] \pmod{\alpha} \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + (\widehat{T}_n + \alpha) \div \alpha \\ \widehat{T}_{n+1} = (\widehat{T}_n + \alpha) \pmod{\alpha} \\ F_n = \lfloor \frac{F(T_n, Z_n)}{\beta} \rfloor \\ \widetilde{Z}_{n+1} = \widetilde{Z}_n + (\widehat{Z}_n + F_n) \div \alpha \\ \widehat{Z}_{n+1} = (\widehat{Z}_n + F_n) \pmod{\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{D.7})$$


---

## 2 Le schéma de Heun

L'approximation par le schéma de Heun du problème de Cauchy (D.1) est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = a \\ z_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + h \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_n + hf(t_n, z_n))) \end{array} \right. \quad (\text{D.8})$$

Nous allons poser à nouveau comme pour (D.3),  $h = \frac{1}{\beta}$  avec  $\beta \sim +\infty$   $h \sim 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_0 = a \\ z_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\beta} \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2\beta}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_n + \frac{1}{\beta}f(t_n, z_n))) \end{array} \right. \quad (\text{D.9})$$

Afin de simplifier l'arithmétisation de (D.9) nous proposons la décomposition suivante :

Après celle-ci (D.9) se réécrit :

$$\begin{cases} t_0 = a \\ z_0 = b \\ t_{n+1} = t_n + \frac{1}{\beta} \\ a_{n+1} = f(t_n, z_n) \\ b_{n+1} = z_n + \frac{1}{\beta} a_{n+1} \\ c_{n+1} = f(t_{n+1}, b_{n+1}) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{2\beta} (a_{n+1} + c_{n+1}) \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

On pose  $\omega \sim +\infty$  tel que  $\omega = \alpha\beta$ .

Par analogie avec (D.10), on propose le schéma suivant :

---

**Schéma numérique 10.** *Arithmétisation du schéma de Heun- Cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  - Interprétation à l'échelle  $\omega$*

---

$$\begin{cases} T_0 = [\omega a] = A \\ Z_0 = [\omega b] = B \\ T_{n+1} = T_n + \alpha \\ A_{n+1} = F(T_n, Z_n) \\ B_{n+1} = Z_n + A_{n+1} \div \beta \\ C_{n+1} = F(T_{n+1}, B_{n+1}) \\ Z_{n+1} = Z_n + (A_{n+1} + C_{n+1}) \div 2\beta \end{cases} \quad (\text{D.11})$$

---

On pose  $t'_n = \frac{T_n}{\omega}$ ,  $z'_n = \frac{Z_n}{\omega}$ ,  $a'_n = \frac{A_n}{\omega}$ ,  $b'_n = \frac{B_n}{\omega}$ ,  $c'_n = \frac{C_n}{\omega}$   
Avec ces nouvelles variables, on obtient :

$$\begin{cases} t'_0 = \frac{1}{\omega} [\omega a] \\ z'_0 = \frac{1}{\omega} [\omega b] \\ t'_{n+1} = t'_n + \frac{1}{\beta} \\ a'_{n+1} = g(t'_n, z'_n) \\ b'_{n+1} = z'_n + \frac{1}{\beta} \alpha_{n+1} \\ c'_{n+1} = h(t'_{n+1}, b'_{n+1}) \\ z'_{n+1} = z'_n + \frac{1}{2\beta} l(a'_{n+1}, c'_{n+1}) \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

avec  $g(t'_n, z'_n) = \frac{1}{\omega} [\omega f(t'_n, z'_n)]$ ,  $\alpha_{n+1} = \frac{\beta}{\omega} [\frac{\omega a'_{n+1}}{\beta}]$ ,  
 $h(t'_{n+1}, b'_{n+1}) = \frac{1}{\omega} [\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1})]$ ,  
 $l(a'_{n+1}, c'_{n+1}) = \frac{2\beta}{\omega} [\frac{\omega(a'_{n+1} + c'_{n+1})}{2\beta}]$ .

**Théorème 18.** *Sous les hypothèses précédentes et  $\omega = \alpha\beta$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}$ ,*

$\alpha \sim +\infty$  : *Si  $(T_n, Z_n)$  est solution de (D.11) alors  $t'_n$  et  $z'_n$  sont solutions de (D.12), infiniment proche de (D.10) au sens où :  $g(t'_n, z'_n) \sim f(t'_n, z'_n)$*

$\alpha_{n+1} \sim a_{n+1}$

$h(t'_{n+1}, b'_{n+1}) \sim f(t'_{n+1}, b'_{n+1})$

$l(a'_{n+1}, c'_{n+1}) \sim a'_{n+1} + c'_{n+1}$

*Autrement dit, les solutions de (D.10) et de (D.12) sont infiniment proches.*

**Preuve .** *Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer les quatre équivalences. A l'aide du schéma (D.12) et de la définition de la partie entière, nous avons :*

$$\begin{aligned}
* \quad g(t'_n, z'_n) &= \frac{1}{\omega} [\omega f(t'_n, z'_n)] = \frac{1}{\omega} (\omega f(t'_n, z'_n) - \{\omega f(t'_n, z'_n)\}) \\
&= f(t'_n, z'_n) - \frac{1}{\omega} \{\omega f(t'_n, z'_n)\} \\
\text{or } \frac{1}{\omega} \{\omega f(t'_n, z'_n)\} &\sim 0 \text{ donc } g(t'_n, z'_n) \sim f(t'_n, z'_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* \quad \alpha_{n+1} &= \frac{\beta}{\omega} \left[ \frac{\omega a'_{n+1}}{\beta} \right] = \frac{\beta}{\omega} \left( \frac{\omega a'_{n+1}}{\beta} - \left\{ \frac{\omega a'_{n+1}}{\beta} \right\} \right) = a'_{n+1} - \frac{\beta}{\omega} \left\{ \frac{\omega a'_{n+1}}{\beta} \right\} \\
&= a'_{n+1} - \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\omega a'_{n+1}}{\beta} \right\} \\
\text{or } \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\omega a'_{n+1}}{\beta} \right\} &\sim 0 \text{ donc } \alpha_{n+1} \sim a_{n+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* \quad h(t'_{n+1}, b'_{n+1}) &= \frac{1}{\omega} [\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1})] = \frac{1}{\omega} (\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1}) - \{\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1})\}) \\
&= f(t'_{n+1}, b'_{n+1}) - \frac{1}{\omega} \{\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1})\} \\
\text{or } \frac{1}{\omega} \{\omega f(t'_{n+1}, b'_{n+1})\} &\sim 0 \text{ donc } h(t'_{n+1}, b'_{n+1}) \sim f(t'_{n+1}, b'_{n+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* \quad l(a'_{n+1}, c'_{n+1}) &= \frac{2\beta}{\omega} \left[ \frac{\omega}{2\beta} (a'_{n+1} + c'_{n+1}) \right] \\
&= \frac{2\beta}{\omega} \left( \frac{\omega}{2\beta} (a'_{n+1} + c'_{n+1}) - \left\{ \frac{\omega}{2\beta} (a'_{n+1} + c'_{n+1}) \right\} \right) = a'_{n+1} + c'_{n+1} - \frac{2}{\alpha} \left\{ \frac{\omega}{2\beta} (a'_{n+1} + c'_{n+1}) \right\} \\
\text{or } \frac{2}{\alpha} \left\{ \frac{\omega}{2\beta} (a'_{n+1} + c'_{n+1}) \right\} &\sim 0 \text{ donc } i(a'_{n+1}, c'_{n+1}) \sim a'_{n+1} + c'_{n+1} \\
\text{Ainsi les quatre équivalences sont vérifiées } &\square
\end{aligned}$$

Aux échelles intermédiaires  $\alpha$  et  $\beta$ , les schémas numériques sont les suivants :

---

**Schéma numérique 11.** *Arithmétisation du schéma de Heun- Cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  - Interprétation à l'échelle  $\alpha$*

---

$$\left\{ \begin{array}{l}
\tilde{T}_0 = [\omega a] \div \beta \\
\widehat{T}_0 = [\omega a] \pmod{\beta} \\
\tilde{Z}_0 = [\omega b] \div \beta \\
\widehat{Z}_0 = [\omega b] \pmod{\beta} \\
\tilde{T}_{n+1} = \tilde{T}_n + (\widehat{T}_n + \alpha) \div \beta \\
\widehat{T}_{n+1} = (\widehat{T}_n + \alpha) \div \beta \\
A_{n+1} = [\alpha\beta f(\frac{\tilde{T}_n\beta + \widehat{T}_n}{\alpha\beta}, \frac{\tilde{Z}_n\beta + \widehat{Z}_n}{\alpha\beta})] \\
B_{n+1} = \tilde{Z}_n\beta + \widehat{Z}_n + A_{n+1} \div \beta \\
C_{n+1} = [\alpha\beta f(\frac{\tilde{T}_{n+1}\beta + \widehat{T}_{n+1}}{\alpha\beta}, \frac{B_{n+1}}{\alpha\beta})] \\
F_n = (A_{n+1} + C_{n+1}) \div 2\beta \\
\tilde{Z}_{n+1} = \tilde{Z}_n + (\widehat{Z}_n + F_n) \div \beta \\
\widehat{Z}_{n+1} = (\widehat{Z}_n + F_n) \pmod{\beta}
\end{array} \right. \quad (D.13)$$


---

---

**Schéma numérique 12.** *Arithmétisation du schéma de Heun- Cas d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  - Interprétation à l'échelle  $\beta$*

---

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{T}_0 = \lfloor \omega a \rfloor \div \alpha \\ \widehat{T}_0 = \lfloor \omega a \rfloor \pmod{\alpha} \\ \widetilde{Z}_0 = \lfloor \omega b \rfloor \div \alpha \\ \widehat{Z}_0 = \lfloor \omega b \rfloor \pmod{\alpha} \\ \widetilde{T}_{n+1} = \widetilde{T}_n + (\widehat{T}_n + \alpha) \div \alpha \\ \widehat{T}_{n+1} = (\widehat{T}_n + \alpha) \div \alpha \\ A_{n+1} = \lfloor \alpha \beta f\left(\frac{\widetilde{T}_n \alpha + \widehat{T}_n}{\alpha \beta}, \frac{\widetilde{Z}_n \alpha + \widehat{Z}_n}{\alpha \beta}\right) \rfloor \\ B_{n+1} = \widetilde{Z}_n \alpha + \widehat{Z}_n + A_{n+1} \div \beta \\ C_{n+1} = \lfloor \alpha \beta f\left(\frac{\widetilde{T}_{n+1} \alpha + \widehat{T}_{n+1}}{\alpha \beta}, \frac{B_{n+1}}{\alpha \beta}\right) \rfloor \\ F_n = (A_{n+1} + C_{n+1}) \div 2\beta \\ \widetilde{Z}_{n+1} = \widetilde{Z}_n + (\widehat{Z}_n + F_n) \div \alpha \\ \widehat{Z}_{n+1} = (\widehat{Z}_n + F_n) \pmod{\alpha} \end{array} \right. \quad (\text{D.14})$$


---

---

# LISTE DES PUBLICATIONS PERSONNELLES

---

## Communications internationales avec actes

- \* Aurélie Richard, Guy Wallet, Laurent Fuchs, Eric Andres, et Gaëlle Largeteau-Skapin. *Arithmetization of a circular arc*. In Proceedings of the 15th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'09, Montréal, Canada, LNCS 5810, pages 350–361, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.  
⇒ Présence à la conférence et présentation du papier.
- \* Aurélie Richard, Laurent Fuchs et Sylvain Charneau. *An algorithm to decompose the  $n$ -dimensional rotations*. In Proceedings of the CompImage 2010, Buffalo, USA, LNCS 6026, pages 60–71, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer-Verlag.  
⇒ Présence à la conférence et présentation du papier.
- \* Agathe Chollet, Guy Wallet, Eric Andres, Laurent Fuchs, Gaëlle Largeteau-Skapin, et Aurélie Richard. *Omega-arithmetization of ellipses* In Proceedings of the CompImage 2010, Buffalo, USA, LNCS 6026, pages 24–35, Berlin, Heidelberg, 2010. Springer-Verlag.  
⇒ Présence à la conférence et présentation du papier.
- \* Aurélie Richard, Gaëlle Largeteau-Skapin, Marc Rodríguez, Eric Andres, Laurent Fuchs et Jean Serge Dimitri Ouattara. *Properties and applications of the Generalized Perpendicular Bisector* In Proceedings of the 16th IAPR International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery, DGCI'11, Nancy, France, LNCS 6607, pages 296–307, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer-Verlag.

## Communications nationales

- \* Marc Rodríguez, Aurélie Richard, Gaëlle Largeteau-Skapin et Eric Andres. *Redimensionnement des voxels et reconnaissance de primitives avec marge d'erreur*. Actes des 23èmes journées de l'Association Française d'Informatique Graphique 2010, Dijon, France.

## Revue

- \* Aurélie Richard, Laurent Fuchs, Eric Andres et Gaëlle Largeteau-Skapin. *Decomposition of  $nD$ -rotations : classification, properties and algorithm*. Graphical Models, Volume 73, Issue 6, November 2011, p346–353.



---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [ABB99] E. Andreson, Z. Bai, and C. Bischof. *LAPACK user's guide*. Software, environments, tools. Society for industrial and applied mathematics, 1999.
- [AGARAVS09] G. Aragón-González, J. Aragón, M. Rodríguez-Andrade, and L. Verde-Star. Reflections, rotations, and pythagorean numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 19 :1–14, 2009.
- [ALSR11] E. Andres, G. Largeteau-Skapin, and M. Rodríguez. Generalized perpendicular bisector and exhaustive discrete circle recognition. *Graphical Models*, Volume 73 Issue 6, 2011.
- [Aud03] M. Audin. *Geometry*. Springer, 2003.
- [Ave09] L. Aveneau. Les coordonnées de Plücker revisitées. *Revue Electronique Francophone de l'Informatique Graphique*, 3(2) :59–68, Jan 2009.
- [BD72] J. Bass and C. Do. *Algèbre : 1. année*. Enseignement supérieur. Masson, 1972.
- [Ber09] D.S. Bernstein. *Matrix mathematics : theory, facts and formulas*. Princeton University Press, 2009.
- [BGVD92] A. Bojanczyk, G. Golub, and P. Van Dooren. The periodic Schur decomposition. Algorithms and applications. In *Proc. SPIE Conference*, volume 250, pages 31–42, 1992.
- [Bie06] M. Bierlaire. *Introduction à l'optimisation différentiable*. Enseignement des mathématiques. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [Bre65] JE. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. *ACM trans.Graphics*, 4(1) :25–30, 1965.
- [Bre77] JE. Bresenham. A linear algorithm for incremental digital display of circular arcs. *Comm. of ACM*, 20(2) :100–106, 1977.
- [Bri99] D.S. Bridges. Constructive mathematics : a foundation for computable analysis. *Theoretical Computer Science*, 219 :95–109, 1999.
- [Cad88] J.A. Cadzow. Signal enhancement : a composite property mapping algorithm. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 36 :39–62, 1988.
- [CAF07] S. Charneau, L Aveneau, and L. Fuchs. Exact, robust and efficient full visibility computation in the Plücker space. *The Visual Computer*, 23(9–11) :773–782, September 2007.
- [CE05] F. Cottet-Emard. *Algèbre linéaire et bilinéaire*. LMD Sciences. Mathématiques. De Boeck, 2005.

- [Cha07] S. Charneau. *Etude et applications des algèbres géométriques pour le calcul de la visibilité globale dans un espace projectif de dimension  $n \geq 2$* . PhD thesis, Université de Poitiers, 2007.
- [Che04] P. L. Cheng. Joint rotation between two attitudes in the spherical rotation coordinate system. *J Biomech*, 37(10) :1475–1482, 2004.
- [Cho10] A. Chollet. *Formalismes non classiques pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète*. PhD thesis, Université de La Rochelle, 2010.
- [CMP00] E. Chailloux, P. Manoury, and B. Pagano. *Développement d'applications avec Objective Caml*. O'Reilly, 2000.
- [CMVSSK11] B. Chandra Mohan, K. Veera Swamy, and S Srinivas Kumar. A comparative performance evaluation of SVD and Schur decompositions for image watermarking. *IJCA Proceedings on International Conference on VLSI, Communications and Instrumentation (ICVCI)*, (14) :25–29, 2011.
- [CNP00] P. L. Cheng, A. C. Nicol, and J. P. Paul. Determination of axial rotation angles of limb segments - a new method. *Journal of Biomechanics*, 33(7) :837–843, jul 2000.
- [CWA<sup>+</sup>10] A. Chollet, G Wallet, E. Andres, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, and A. Richard. Omega-arithmeticization of ellipses. volume LNCS 6026, pages 24–35, Buffalo, USA, May 2010. CompImage.
- [CWF<sup>+</sup>09a] A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, and E. Andres. Insight in discrete geometry and computational content of a discrete model of the continuum. *Pattern recognition*, 2009.
- [CWF<sup>+</sup>09b] A. Chollet, G. Wallet, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, and E. Andres.  $\Omega$ -arithmeticization : a discrete multi-resolution representation of real functions. In P. Wiederhold and R. Barneva, editors, *Combinatorial Image Analysis*, volume 5852 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 316–329. Springer Berlin / Heidelberg, 2009.
- [DCFM07] P. Denis, P. Carré, and C. Fernandez-Maloigne. Spatial and spectral quaternionic approaches for colour images. *Computer Vision and Image Understanding*, 107 :74–87, July 2007.
- [Dem06] J.P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles*. Collection Grenoble sciences. EDP sciences, 2006.
- [Den07] P. Denis. *Quaternions et Algèbres Géométriques, de nouveaux outils pour les images numériques couleur*. PhD thesis, Université de Poitiers, Décembre 2007.
- [DFM07] L. Dorst, D. Fontijne, and S. Mann. *Geometric algebra for computer science : an object oriented approach to geometry*. Morgan Kaufmann Publisher, 2007.
- [Dic19] L.E. Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. *The Annals of mathematics*, 20(3) :155–171, 1919.
- [Die92] M. Diener. Application du calcul de Harthong-Reeb aux routines graphiques. In Salanskis and Sinaceurs [SS92a], pages 424–435.
- [DM02] L. Dorst and S. Mann. Geometric algebra : A computational framework for geometrical applications (part 1). *IEEE Computer Graphics and Applications*, 22 :24–31, 2002.

- [DMB02] L. Dorst, S. Mann, and T Bouma. GABLE : A Matlab tutorial for geometric algebra, 2002.
- [Don77] A. Doneddu. *Espaces euclidiens et hermitiens. Géométries. Tome 3.* Vuibert, 1977.
- [Dor94] C.J.L. Doran. *Geometric algebra and its application to mathematical physics.* PhD thesis, University of Cambridge, 1994.
- [Dor02] L. Dorst. *The inner products of geometric algebra*, chapter 2 (Applications of geometric algebra in computer science and engineering). Birkhäuser (Dorst, L. and Doran, C. and Lasenby, A. eds), 2002.
- [Dor09] L. Dorst. Determining a versor in  $n$ D geometric algebra from the known transformation of  $n$  versors. In V. Skala and D. Hildenbrand, editors, *GraVisMa 2009 Workshop Proceedings, International Workshop on Computer Graphics, Computer Vision and Mathematics*, pages 66–71, 2009.
- [Ebe02] D. Eberly. Rotation representations and performance issues. 2002.
- [EY36] C. Eckart and G. Young. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, 1 :211–218, 1936.
- [FD10] D. Fontijne and L. Dorst. Reconstructing rotations and rigid body motions from points correspondences as a sequence of reflections. University of Amsterdam, 2010. Applied Geometric algebras in computer science and engineering.
- [FLSW<sup>+</sup>08] L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, G. Wallet, E. Andres, and A. Chollet. A first look into a formal and constructive approach for discrete geometry using non-standard analysis. *DGCI 2008*, pages 21–32, 2008.
- [Gar06] E. Garcia. Singular Value Decomposition - a fast track tutorial. <http://www.miislita.com/information-retrieval-tutorial/singular-value-decomposition-fast-track-tutorial>, 2006.
- [GL96] G.H. Golub and C.F.V. Loan. *Matrix computations.* Johns Hopkins studies in the mathematical sciences. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [Har83] J. Harthong. Éléments pour une théorie du continu. *Astérisque*, 109/110 :235–244, 1983.
- [Har89] J. Harthong. Une théorie du continu. In *La mathématique nonstandard*, pages 307–329, 1989.
- [HFDP04] D. Hildebrand, D. Fontijne, C. Perwass, and L. Dorst. Geometric algebra and its application to computer graphics. 2004.
- [HJ90] R.A Horn and C.R. Johnson. *Matrix analysis.* Cambridge University Press, 1990.
- [Hla96] J. Hladik. *Les spineurs en physique : avec exercices corrigés.* Enseignement de la physique. Masson, 1996.
- [Hol89] H. Holin. Harthong-Reeb circles. *Séminaire non standard, Univ. de Paris 7.*, 2 :1–30, 1989.
- [Hol91] H. Holin. Harthong-Reeb analysis and digital circles. *The Visual Computer*, 8 :8–17, 1991.
- [Hol96] H. Holin. Some artefacts of integer computer circles. *Ann. Math. Artif. Intell.*, 16(1) :153–181, 1996.

- [HR89] J. Harthong and G. Reeb. Intuitionnisme 84. In H. Barreau and J. Harthong, editors, *La mathématique nonstandard*, pages 213–252. CNRS, 1989.
- [HS87] D. Hestenes and G. Sobczyk. *Clifford Algebra to Geometric Calculus : A Unified Language for Mathematics and Physics (Fundamental Theories of Physics)*. Kluwer Academic Publishers, 1987.
- [Kui02] J.B. Kuipers. *Quaternions and rotation sequences : a primer with applications to orbits, aerospace and virtual reality*. Princeton University Press, 2002.
- [KW08] M.H. Kalos and P.A. Whitlock. *Monte Carlo methods*. Wiley-Blackwell, 2008.
- [lac] Site web. [http://ocaml.info/home/ocaml\\_sources.html](http://ocaml.info/home/ocaml_sources.html).
- [lap] Site web. <http://www.netlib.org/lapack/lug>.
- [Lau79] AJ Laub. A Schur method for solving algebraic Riccati equations. *Decision and control including the 17th symposium on adaptive processes*, 24(6) :913–921, 1979.
- [Lau83] D. Laugwitz.  $\Omega$ -calculus as a generalization of field extension. In A. Hurd, editor, *Nonstandard Analysis - Recent developments*, Lecture Notes in Mathematics, pages 144–155. Springer, 1983.
- [Lau05] AJ Laub. *Matrix analysis for scientists and engineers*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [Lou09] P. Lounesto. *Clifford algebras and spinors*, volume Lecture Note Series 286. Cambridge University Press- London Mathematical Society, 2009.
- [LS58] D. Laugwitz and C. Schmieden. Eine erweiterung der infinitesimalrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 89 :1–39, 1958.
- [Lut92] R. Lutz. La force modalisatrice des théories infinitésimales faibles. In J-M. Salanskis and H. Sinaceurs, editors, *Le Labyrinthe du Continu*. Springer, 1992.
- [Man14] H.P. Manning. *Geometry of four dimensions*. The MacMillan Company, 1914.
- [MD02] S. Mann and L. Dorst. Geometric algebra : A computational framework for geometrical applications (part 2). *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 22 :58–67, July 2002.
- [Meb94] J.E. Mebius. *Applications of quaternions to dynamical simulation, computer graphics and biomechanics*. PhD thesis, Delft University of Technology, 1994.
- [Mey00] C.D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra : solutions manual*. Number vol. 2. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.
- [Nel77] E. Nelson. Internal set theory : A new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6) :1165–1198, November 1977.
- [Nel87] E. Nelson. *Radically elementary theory*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1987.
- [oca] The Caml language. <http://www.caml.inria.fr/>.
- [Org66] E.I. Organick. *A Fortran IV primer*. Addison-Wesley series in computer science and information processing. Addison-Wesley, 1966.
- [pla] Site web. <http://planetmath.org/encyclopedia/DecompositionOfOrthogonalOperatorsAsRotationsAndReflections.html>.

- [PS02] C. Perwass and G. Sommer. Numerical evaluation of versors with Clifford algebra. In L. Dorst, C. Doran, and J. Lasenby, editors, *Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering*, pages 341–350. Proc. AGACSE 2001, Cambridge, UK, Birkhäuser Boston, 2002.
- [QSS00] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical mathematics*. Springer, 2000.
- [RALSA10] M. Rodríguez, S. Abdoulaye, G. Largeteau-Skapin, and E. Andres. Generalized perpendicular bisector and circumcenter. In R. Barneva, V. Brimkov, H. Hauptman, R. Natal J., and J. Tavares, editors, *Computational Modeling of Objects Represented in Images*, volume 6026 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–10. Springer Berlin / Heidelberg, 2010.
- [Ran10] A.G. Ranade. Some uses of spectral methods in Computer Science, 2010.
- [Rev91] J-P. Reveillès. *Géométrie discrète, Calcul en nombres entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, France, 1991.
- [Rev92a] J.-P. Reveillès. Mathématiques discrètes et analyse non standard. In Salanskis and Sinaceurs [SS92a], pages 382–390.
- [Rev92b] J-P. Reveilles. *Mathématiques discrètes et analyse non-standard*. Volume in [SS92b] of Salanskis and Sinaceurs [SS92a], 1992.
- [RFALS11] A. Richard, L. Fuchs, E. Andres, and G. Largeteau-Skapin. Decomposition of  $n$ D rotations : classification, properties and algorithm. *Graphical Models*, Volume 73 Issue 6, November 2011.
- [RFC10] A. Richard, L. Fuchs, and S. Charneau. An algorithm to decompose  $n$ -dimensional rotations into planar rotations. In R. Barneva, V. Brimkov, H. Hauptman, R. Natal Jorge, and J. Tavares, editors, *Computational Modeling of Objects Represented in Images*, volume 6026 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 60–71. Springer Berlin – Heidelberg, 2010.
- [RLSR<sup>+</sup>11] A. Richard, G. Largeteau-Skapin, M. Rodríguez, E. Andres, L. Fuchs, and J-S. Ouattara. Properties and applications of the simplified generalized perpendicular bisector. In Isabelle Debled-Rennesson, Eric Domenjoud, Bertrand Kerautret, and Philippe Even, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 6607 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 296–307. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
- [RM73] N. Rouche and J. Mawhin. *Équations différentielles ordinaires*. Number vol. 1 à 2 in *Équations différentielles ordinaires*. Masson, 1973.
- [Rob74] A. Robinson. *Non-standard analysis*. American Elsevier, New York, 1974.
- [Rod40] O. Rodrigues. Des lois géométriques qui régissent les déplacements d’un corps solide dans l’espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 380–440, 1840.
- [RR96] J-P. Reveillès and D. Richard. Back and forth between continuous and discrete for the working computer scientist. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, Mathematics and Informatic*, 16(1-4) :89–152, 1996.
- [RRLSA10] M. Rodríguez, A. Richard, G. Largeteau-Skapin, and E. Andres. Redimensionnement des voxels et reconnaissance de primitives avec marge d’erreur. In *Actes des 23èmes journées de l’Association Française d’Informatique Graphique 2010*, Dijon, France, October 2010. AFIG 2010.

- [RWF<sup>+</sup>09] A. Richard, G. Wallet, L. Fuchs, E. Andres, and G. Largeteau-Skapin. Arithmetization of a circular arc. *LNCS n°5810 DGCI 2009*, pages 350–361, 2009.
- [Som01] G. Sommer. *Geometric computing with Clifford algebras*. Springer Verlag, 2001.
- [SS92a] J.-M. Salanskis and H. Sinaceurs, editors. *Le Labyrinthe du Continu*. Springer, 1992.
- [SS92b] J.-M. Salanskis and H. Sinaceurs. *Le labyrinthe du continu*. Colloque de Cerisy. Springer Heidelberg, 1992.
- [SS01] L.G. Shapiro and G.C. Stockman. *Computer vision*. Prentice Hall, 2001.
- [STM10] L.M. Surhone, M.T. Timpledon, and S.F. Marseken. *Helmert transformation*. VDM Verlag Dr. Mueller AG & Co. Kg, 2010.
- [Str03] G. Strang. *Introduction to linear algebra*. Wellesley-Cambridge Press, 2003.
- [Sze10] R. Szeliski. *Computer Vision : Algorithms and Applications*. Texts in Computer Science. Springer, 2010.
- [Thi10] Y. Thibault. *Rotations in 2D and 3D discrete spaces*. PhD thesis, Université Paris-Est, ESIEE, Laboratoire d’informatique Gaspard Monge, September 2010.
- [Vet92] W.T. Vetterling. *Numerical recipes example book (C)*. Number livr. 3 in The Art of Scientific Computings. Cambridge University Press, 1992.
- [Vin11] J. Vince. *Quaternions for Computer Graphics*. Springer, 2011.
- [Wat02] D.S. Watkins. *Fundamentals of matrix computations*. Pure and applied mathematics. Wiley-Interscience, 2002.
- [Wat06] G. Watson. Computing Helmert transformations. *J. Comput. Appl. Math.*, 197 :387–394, December 2006.

---

# INDEX

---

- Algèbre, 172
- Algèbres géométriques, 22
- Angles d'Euler, 14, 193
- Arithmétisation (méthode de), 131
  
- Bilinéaire (forme), 172
- Blocage de cardan, 14
  
- Caractérisation des isométries en dimension finie (théorème de ), 12
- Cauchy (problème de), 138
- Cayley-Hamilton (formule de), 21
- Contraction, 185
  
- Décomposition
  - canonique du produit géométrique, 183
  - isocline, 51
  - Schur (de), 75
- Harthong-Reeb (droite de) , 127
- Dual, 191
  
- Euler (schéma de), 131
- Euler (angles de), 14, 193
  
- Grade, 179
  
- Heun (schéma de), 145
  
- Inverse, 24, 184
- Isométrie, 12
  
- Multivecteurs
  - décomposables, 180
  
- $\Omega$ -arithmétisation, 156
- $\Omega$ -entiers, 128, 156
- $O(n)$ , 12
- Ordre (d'un schéma numérique), 138
- Ordre (du schéma arithmétisé), 142
- Orthogonal(e)
  - matrice, 12
  
- Produit
  - extérieur, 178
  - scalaire, 184
- Projection, 187, 188
- $p$ -rotations, 84
- Pseudo-scalaire, 191
  
- Quaternions, 18, 32, 193
  
- Réjection, 187, 188
- Réflexions, 24, 189
- Rodrigues (formule de), 14
  
- Rotation
  - élémentaire, 55
  - générale, 55
  - isocline, 55
  - matrices (de), 12
  
- Schur (décomposition), 75
- Signature, 173
- $SO(n)$ , 12
- Spineur, 31
  
- Théorème
  - rotations d'Euler (de), 15
  - caractérisation des isométries en dimension finie (de), 12
  - décomposition isocline (de), 51

# Décomposition des rotations $nD$ et arithmétisation des cercles

**Résumé :** Cette thèse est basée sur deux axes principaux : la décomposition des rotations  $nD$  et le processus d'arithmétisation des cercles.

D'une part, estimer les paramètres des rotations est utile dans de nombreux domaines d'applications. Les méthodes existantes ne peuvent pas être étendues à la dimension  $n$  et/ou ne sont pas robustes au bruit. Dans cette thèse, nous étudions les rotations  $nD$  bruitées et nous proposons des algorithmes permettant de les décomposer et d'estimer leurs paramètres. Les deux premières méthodes utilisent respectivement l'algèbre géométrique et la décomposition de Schur des matrices. Elles estiment les paramètres (plans et angles) des rotations à partir de  $n$  vecteurs et leurs images par cette rotation. Notre troisième algorithme décompose les rotations en rotations planes de même angle (rotations isoclines).

D'autre part, le processus d'arithmétisation par des schémas numériques est souvent utilisé en géométrie discrète car il permet de donner un équivalent discret à une courbe continue. Nous étudions l'application de ce processus à l'équation différentielle du cercle dans le cas du schéma de Heun. Nous présentons notamment des résultats sur la connexité des arcs de cercles générés par cette méthode. Des résultats sur l'ordre de l'erreur de la méthode sont finalement proposés.

---

## Decomposition of $nD$ rotations and circle arithmetization

**Abstract :** This thesis deals with the decomposition of  $nD$ -rotations and the arithmetization process applied to circles.

The estimation of rotation parameters is a question with wide range applications. Current methods can not be extended to dimension  $n$  and/or are not robust to noise. The noisy  $nD$ -rotations are studied and algorithms to decompose them and to estimate their parameters are proposed. The first two methods rely on the geometric algebra and the Schur decomposition. They provide the rotation parameters (planes and angles) from  $n$  vectors and their images by this rotation. The third algorithm decomposes  $nD$ -rotations into planar rotations of same angles (isoclinic rotations).

The arithmetization process based on numerical schemes is used in discrete geometry because it provides a discrete equivalent of a continuous curve. This process is applied to the differential equation of the circle with the Heun scheme. Results about the connectedness of the generated circular arcs are presented. The approximation order of the obtained arithmetization process is also defined and studied.

---

**Discipline :** Algèbre Géométrique- Géométrie discrète

---

**Mots clés :** Décomposition de rotations  $nD$ - Estimation de paramètres de rotations  $nD$ - Algèbre géométrique- Décomposition de Schur- Rotation isocline- Médiatrices généralisées- Processus d'arithmétisation

---

Laboratoire XLIM-SIC, UMR CNRS 7252  
Bâtiment SP2MI - Téléport 2, Bd Marie et Pierre Curie  
BP 30179 - 86962 Futuroscope Chasseneuil CEDEX