

UNIVERSITÉ DE POITIERS

THÈSE

pour l'obtention du grade de **Docteur** de l'Université de Poitiers,
spécialité « **Mathématiques et leurs interactions** »

préparée au **Laboratoire de Mathématiques et Applications, UMR 6086**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences de l'Ingénieur et
l'Information S2I**

présentée et soutenue publiquement
le 10 Décembre 2010 par

CAROLINE PINTOUX

CALCULS STOCHASTIQUE ET DE MALLIAVIN APPLIQUÉS AUX MODÈLES DE TAUX D'INTÉRÊT ENGENDRANT DES FORMULES FERMÉES

Directeur de thèse: **Marc Arnaudon**

Directeur de thèse: **Nicolas Privault**

Thèse soutenue devant la commission d'examen

JURY

M.	LARBI ALILI	Associate Professor, Warwick University	(Rapporteur)
M.	MARC ARNAUDON	Professeur, Université de Poitiers	(Directeur)
M.	CLÉMENT DOMBRY	Maître de Conférences, Université de Poitiers	(Examineur)
M.	JULIEN MICHEL	Professeur, Université de Poitiers	(Examineur)
M.	NICOLAS PRIVAULT	Professeur, Nanyang Technological University, Singapour	(Directeur)
M.	THOMAS SIMON	Professeur, Université de Lille 1	(Rapporteur)
M.	ANTON THALMAIER	Professeur, Université du Luxembourg	(Examineur)

REMERCIEMENTS

REMERCIER chaleureusement les personnes qui m'ont soutenue ou au moins côtoyée pendant ces 3 années, 3 mois et 7 jours (précisément) est un exercice compliqué, voire périlleux *. Mais le protocole étant ce qu'il est, je m'y plie de bonne grâce, en espérant occuper un moment les gens qui assistent à ma soutenance et qui s'y embêtent un peu. Merci d'être là, j'apprécie.

Je tiens d'abord à exprimer ma gratitude aux membres du jury, qui me font l'honneur d'évaluer mon travail : merci à messieurs les Professeurs Larbi Alili de Warwick et Thomas Simon de Lille d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs remarques, questions et suggestions m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de ce document. Merci également aux professeurs Julien Michel de Poitiers et Anton Thalmaier de l'Université du Luxembourg, ainsi qu'à Clément Dombry de Poitiers pour avoir accepté d'examiner mon mémoire et de faire partie de mon jury de thèse.

Marc Arnaudon et Nicolas Privault m'ont témoigné une grande confiance en acceptant de diriger cette thèse. Marc, la sollicitude et le soutien que tu m'as témoignés en toutes circonstances pendant ces 3 années (3 mois et 7 jours, encore) m'ont été précieux. En m'incitant énergiquement à prendre des initiatives et des "risques", Nicolas Privault m'a appris l'autonomie et a façonné mon profil de chercheuse, je lui en suis reconnaissante. Malgré l'éloignement, sa contribution et ses conseils avisés ont été indispensables au bon déroulement de la thèse.

À Pol Vanhaecke, directeur du laboratoire de Mathématiques et Applications de Poitiers, je dois l'excellent accueil dont j'ai été gratifiée au sein de l'équipe. Mentions spéciales aux *fondamentaux* Mustapha Raïs, Pierre Torasso, Patrice Tauvel, Abderrazak Bouaziz, Alain Miranville et Claude Quitté qui ne sont pas étrangers à mon entêtement mathématique. Je tiens évidemment à remercier l'ensemble des enseignants-chercheurs ainsi que Nathalie Mongin, Benoît Métrot et Brigitte Brault pour leur gentillesse et leur efficacité lors des difficultés administratives ou logistiques que j'ai pu rencontrer. Les documentalistes Jocelyne Attab et Nathalie Marlet sont aussi charmantes que remarquables, elles m'ont sauvé la mise de nombreuses fois et ont fait preuve d'une patience infinie envers ma médiocre gestion des retours d'ouvrages. Elles sont toujours ravies de recevoir de la visite, passez donc leur faire coucou à l'occasion.

Des remerciements pour les copains thésards qui m'ont aidée au cours des 3 ans (3 mois et 7 jours...) de cette thèse : les aînés et docteurs Marie-Eve Modolo (encore merci pour tes bons plans de 2006!), Guilhem Coq (sans qui cette thèse serait sans doute toujours en « état de sortie 1 » sous Kile), Koléhé Coulibaly (ton "tapage" manque ici), et également Armel, Idriss, Sami, Toufic et Khaoula. Je remercie aussi Mikaël qui n'est pas *de la maison* mais tout aussi docteur que ceux-là, et un ami très cher. Delphine, Anthony et Benjamin, en tant que *demi-frères et soeur* de thèse, vous êtes importants. Une pensée pour les "cadets", dont la future réussite ne fait aucun doute : Paul, Wesam, Gang, Houssam, Haïdi, Jules, Apollinaire, Florent, Le, Brice, Anouar, Batoul, Alice, Anis, Frédéric et Guilnard. Je termine par les deux copines de 0-29, dont le soutien sans faille est remarquable : Caroline, ton organisation sans pli me sidère, je suis pas loin d'être jalouse, mais n'étant pas une brute, je te souhaite toute la réussite possible. Hélène, en septembre, ça fera une

*préséance, exhaustivité ...

décennie qu'on se connaît, ce qui fait accessoirement de nous deux vieilles peaux. Du groupe de khôlle à la thèse, en passant par le *compagnonnage agrégatif*, nous avons eu maintes occasions de nous serrer les coudes, et je crois que ce n'est pas fini. Merci pour le pot les filles, à charge de revanche.

Il reste une bonne dose de gratitude à distribuer aux amis-copains non thésards et pourtant infiniment précieux : Cathy, la détentrice du record de longévité (tout à son honneur), l'amie de toujours ; Benjamin, le plus officiel de mes amis et le plus barbu aussi ; Marine l'unique, au rire magique ; Ondine, la fidèle ('rings a bell ?) ; Stéphane, l'irremplaçable ténor, toujours prêt à m'accorder l'asile politique ; Double-M, la fée, qui récemment a su veiller sur moi quand il y avait besoin, et l'air de rien en plus ; Cloé, l'abonnée au sau-mon, aux calembours et à l'humour approximatif que je préfère ; Anabelle la voyageuse et Anaëlle aux yeux azur, les benjamines mais non moins musiciennes ; Tata, je ne t'oublie pas, ce serait vulgaire ; et puis les trois mousquetaires Nico, Benjamin et Fabien et leurs moitiés non respectives Amandine et Ludmilla, primordiaux ; et enfin D'Artagnan, qui se reconnaîtra, essentiel.

On a plus souvent l'occasion de l'écrire que de le dire, mais ça reste rare : je vous sais gré d'être mes amis.

Quant aux copains musiciens, vous m'en voyez confuse, mais vous êtes trop nombreux pour que je me risque à vexer vos sensibilités d'artistes en oubliant de vous citer individuellement ; sans vous, la vie serait moins drôle, sachez-le, mais je ne suis pas assez téméraire pour risquer l'incident diplomatique.

Un gros, énorme merci à ma petite et inversement proportionnellement merveilleuse famille, que je ne changerais pour rien au monde. Les parents, c'est sans doute creux de vous l'écrire, mais sans vous je ne serais pas là. C'est l'une des seules certitudes que j'ai, tiens. Vous êtes de loin les plus méritants étant donné que vous me supportez depuis avant la victoire de Yannick Noah à Roland Garros, c'est dire. Je conclurai en dédiant cette thèse à Pinllau.

Lieu, le 2 décembre 2010.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
1 INTRODUCTION	1
1.1 CONTEXTE	3
1.1.1 Enjeux et motivations	3
1.1.2 Objectifs et présentation générale	3
1.2 FONCTIONNELLES EXPONENTIELLES DU MOUVEMENT BROWNIEN	4
1.3 FONCTIONNELLES PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT BROWNIEN	12
1.4 CALCUL DE SENSIBILITÉS VIA LE CALCUL DE MALLIAVIN	18
1.4.1 Calcul de sensibilités : le B.A.-BA	19
1.4.2 Calcul de Malliavin pour des diffusions à générateur infinitésimal hypoelliptique	20
2 LE MODÈLE DE DOTHAN REVISITÉ	29
2.1 INTRODUCTION	31
2.2 THE DOTHAN PDE	34
2.3 PDE SOLUTION USING BESSEL FUNCTIONS	36
2.4 PDE SOLUTION USING THE GAMMA FUNCTION	41
2.5 APPENDIX	45
3 FONCTIONNELLES EXPONENTIELLES DU MOUVEMENT BROWNIEN	49
3.1 INTRODUCTION	51
3.2 MAIN RESULT AND ITS CONSEQUENCES	54
3.3 INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BESSEL FUNCTIONS	56
3.4 APPENDIX	62
4 FONCTIONNELLES PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT BROWNIEN	65
4.1 INTRODUCTION	67
4.2 MATHIEU FUNCTIONS AND SPECTRAL DECOMPOSITION	69
4.3 SOLUTIONS TO THE TIME-DEPENDENT MATHIEU'S EQUATIONS	72
4.4 BOND PRICING WITH PERIODIC RATES	74
4.5 PERIODIC POTENTIALS IN TIME-DEPENDENT SCHRÖDINGER EQUATIONS	76
4.6 APPENDICE	77
4.6.1 Généralités sur les groupes de Lie	77
4.6.2 Taux d'intérêt sur le cercle	79
4.6.3 Tentative de généralisation à $SO(3)$	80
4.6.4 Taux d'intérêt sur $SL(2)$	84
5 CALCUL DE SENSIBILITÉS VIA LE CALCUL DE MALLIAVIN	87
5.1 INTRODUCTION	89
5.2 THEORY	90
5.3 FINANCIAL APPLICATIONS	91
5.3.1 A particular hypoelliptic diffusion for Asian options	91
5.3.2 Langevin process	93
5.3.3 Geometric Brownian motion and Black-Scholes model	97
5.3.4 Vasicek interest rate model	103
5.4 APPENDIX	113

PERSPECTIVES	115
LISTE DES FIGURES	116
NOTATIONS	117
BIBLIOGRAPHIE	119

INTRODUCTION

1

SOMMAIRE

1.1	CONTEXTE	3
1.1.1	Enjeux et motivations	3
1.1.2	Objectifs et présentation générale	3
1.2	FONCTIONNELLES EXPONENTIELLES DU MOUVEMENT BROWNIEN	4
1.3	FONCTIONNELLES PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT BROWNIEN	12
1.4	CALCUL DE SENSIBILITÉS VIA LE CALCUL DE MALLIAVIN	18
1.4.1	Calcul de sensibilités : le B.A.-BA	19
1.4.2	Calcul de Malliavin pour des diffusions à générateur infinitésimal hypoelliptique	20

C Le premier chapitre présente les notions et les thèmes abordés dans ce travail de thèse.

1.1 CONTEXTE

1.1.1 Enjeux et motivations

La construction de modèles de taux d'intérêt fiables et adaptés à la fois à l'utilisation pratique et à l'économie représente un enjeu majeur de la théorie actuelle des mathématiques et probabilités appliquées. Les taux d'intérêt apparaissent dans toutes les transactions, y compris les plus simples comme les emprunts ou les prêts. Depuis quelques décennies, leur importance et les instruments financiers connexes se sont développés en suivant l'évolution de l'économie mondiale, et la nécessité pour les investisseurs de pouvoir prédire avec acuité le niveau futur des taux d'intérêt s'est par conséquent elle aussi accrue. En particulier, il est aujourd'hui d'une importance cruciale de savoir comprendre et gérer les risques associés aux divers taux d'intérêt (courts, instantanés, longs etc...) qui ont souvent des comportements eux-mêmes très variables.

Depuis environ 40 ans, la modélisation des taux d'intérêt est un problème de recherche à part entière. Jusqu'à présent, aucun modèle *satisfaisant* n'a pu être élaboré au sens où pas un seul modèle ne permet d'expliquer tous les comportements des taux observés sur le marché ainsi que leurs interactions théoriques et pratiques, tout en impliquant une utilisation pratique aisée.

1.1.2 Objectifs et présentation générale

Les principaux objets d'étude de cette thèse sont les modèles de taux d'intérêt à un seul facteur, donnant lieu à des résultats numériques explicites et fermés, et notamment le modèle de Dothan [22].

Ce travail est constitué de 6 chapitres et d'un appendice, dont nous allons détailler le contenu dans la suite de cette introduction. Nous présentons maintenant les résultats obtenus ainsi que les objets mathématiques considérés dans les chapitres suivants. Nous rappelons également quelques rudiments de vocabulaire relatifs aux mathématiques financières, et notamment aux domaines des taux d'intérêt et de l'analyse de sensibilités d'options.

Les chapitres 2 et 3 sont d'abord consacrés à l'étude des fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien et au modèle de Dothan. Nous donnons une preuve intégrale et directe qui complète celle du résultat établi dans [22]. Nous utilisons pour ce faire des noyaux de la chaleur ainsi qu'une nouvelle représentation pour le module au carré de la fonction Gamma d'Euler.

Nous nous intéressons ensuite, dans le chapitre 4, aux fonctionnelles périodiques du mouvement brownien. Nous suivons la même méthode que dans les chapitres précédents

afin d'obtenir des expressions explicites de transformées de Laplace de densités de telles fonctionnelles et d'appliquer ces résultats aux mathématiques financières et à la physique. Nous évoquons, en appendice de ce chapitre, le projet d'élaboration de nouveaux modèles de taux sur des groupes de Lie, inspiré par l'étude du modèle de Dothan. Nous y présentons les quelques résultats obtenus et les perspectives de cette recherche.

Dans le dernier chapitre, nous abordons le problème du calcul de sensibilités par le calcul de Malliavin. Nous cherchons plus particulièrement à donner des expressions explicites de l'indicateur *delta* pour les prix d'options asiatiques et d'obligations dont le modèle de taux court sous-jacent a été étudié dans les chapitres précédents.

1.2 FONCTIONNELLES EXPONENTIELLES DU MOUVEMENT BROWNIEN

Les chapitres 2 et 3 de cette thèse sont consacrés aux fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien, et en particulier à l'étude de l'équation aux dérivées partielles donnant le prix de l'obligation zéro coupon basée sur un taux d'intérêt court modélisé par un mouvement brownien géométrique. On pose pour $\sigma > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{A}_T = \int_0^T \exp(\sigma B_t - \sigma^2 t/2 + \lambda t) dt, \quad T \geq 0,$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement brownien réel standard.

Ces fonctionnelles exponentielles jouent un rôle important dans la physique statistique des systèmes désordonnés, où $\mathcal{A}_T$ est la fonction de partition et $\log \mathcal{A}_T$ représente l'énergie libre du système, cf. [17]. Nous nous intéresserons ici à leurs implications en mathématiques financières, telles qu'elles apparaissent dans les références [7], [14], [24], ou [50].

Le modèle de taux à un facteur que nous allons considérer a été introduit pour la première fois dans [22] et c'est un cas particulier du modèle général présenté dans [16].

Le processus de taux d'intérêt court $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ y est représenté par un mouvement brownien géométrique

$$dr_t = \lambda r_t dt + \sigma r_t dB_t, \tag{1.2.1}$$

où la volatilité $\sigma > 0$ et le drift $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des constantes, et où $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien standard. Le taux court r_t demeure positif, tandis que le terme de volatilité proportionnelle σr_t rend compte de la sensibilité de la volatilité du taux par rapport au niveau du taux r_t lui-même.

Par ailleurs, le modèle de Dothan est le seul modèle de taux court lognormal qui permette d'obtenir une formule analytique pour le prix de l'obligation zéro coupon d'échéance T , au temps t

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

cf. [22], et il est bien souvent cité dans la littérature, cf. [12] ou [11].

Par commodité, nous posons $p = 1 - 2\lambda/\sigma^2$, ce qui permet de réécrire l'équation différentielle stochastique (1.2.1) sous la forme

$$dr_t = (1 - p)\frac{1}{2}\sigma^2 r_t dt + \sigma r_t dB_t, \quad (1.2.2)$$

avec pour solution

$$r_t = r_0 \exp\left(\sigma B_t - p\sigma^2 t/2\right), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où $p\sigma/2$ s'identifie au prix de marché du risque (en anglais, *market price of risk*), cf. [55], Section 4.2. Par la propriété de Markov de $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, le prix de l'obligation $P(t, T)$ est une fonction $F(\tau, r_t)$ du temps restant avant l'échéance $\tau = T - t$ et du taux r_t ,

$$P(t, T) = F(\tau, r_t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| r_t \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.2.3)$$

Le prix d'obligation zéro coupon est donné page 64 dans [22], cf. aussi [12] page 63, par

$$\begin{aligned} F(\tau, r) = & \frac{x^{p/2}}{\pi^2} e^{-\sigma^2 \tau p^2 / 8} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty u \sin(ua) e^{-u^2 \sigma^2 \tau / 8} \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 du da \\ & + \frac{2x^{p/2}}{\Gamma(p)} K_p(2\sqrt{x}), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

avec $x = 2r/\sigma^2$ et où

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) > 0,$$

est la fonction Gamma, et

$$K_w(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh z} \cosh(wz) dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \cosh z + wz} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2.5)$$

est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre $w \in \mathbb{C}$, aussi appelée fonction de MacDonald, cf. [1] page 376 ou [63] page 181 ou encore [6]. Une preuve de (1.2.4) est donnée dans [22] pour le cas où $p = 1$, mais l'argument fourni n'est pas complet pour le cas général $p \in \mathbb{R}$.

Nous montrons en particulier dans le chapitre 2 que (1.2.4) ne satisfait pas correctement à la condition initiale $F(0, r) = 1$ pour toutes les valeurs du paramètre p . Plus précisément, lorsque $p \in (-1, 0)$, la formule (1.2.4) devient en $\tau = 0$

$$F(0, r) = 1 + \frac{2x^{p/2}}{\Gamma(p)} K_p(2\sqrt{x}) \neq 1,$$

alors que (1.2.4) est vraie pour $p = 1$.

Dans [64], Proposition 2, la densité de probabilité jointe du couple

$$\left(\int_0^\tau e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds, B_\tau \right), \quad \tau > 0,$$

est calculée dans le cas où $\sigma = 2$, cf. aussi [45]. Dans la proposition suivante, nous établissons à nouveau ce résultat pour un paramètre de variance σ arbitraire, par changement d'échelle brownienne.

Soit $\theta(v, t)$ la fonction définie par

$$\theta(v, t) = \frac{ve^{\pi^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi^3t}} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2t)} e^{-v \cosh \xi} \sinh(\xi) \sin(\pi\xi/t) d\xi, \quad v, t > 0. \quad (1.2.6)$$

Proposition 1.2.1 *Pour tout $\tau > 0$, on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\int_0^\tau e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds \in du, B_\tau \in dy \right) \\ = \frac{\sigma}{2} e^{-p\sigma y/2 - p^2\sigma^2\tau/8} \exp \left(-2 \frac{1 + e^{\sigma y}}{\sigma^2 u} \right) \theta \left(\frac{4e^{\sigma y/2}}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{du}{u} dy, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$u > 0, y \in \mathbb{R}$.

En calculant l'espérance conditionnelle (1.2.3) avec (1.2.7), nous obtenons facilement le résultat qui suit.

Proposition 1.2.2 *Le prix d'obligation zéro coupon $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p \in \mathbb{R}$ par*

$$F(\tau, r) = e^{-\sigma^2 p^2 \tau/8} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ur} \exp \left(-\frac{2(1+z^2)}{\sigma^2 u} \right) \theta \left(\frac{4z}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{du}{u} \frac{dz}{z^{p+1}}. \quad (1.2.8)$$

La formule ci-dessus fait apparaître une intégrale triple, qui est compliquée à utiliser en pratique dès qu'il s'agit de faire des calculs de prix. Dans le chapitre 2, ainsi que dans [51], nous présentons des formules alternatives de représentation de la solution qui font plus simplement intervenir une intégrale double et des fonctions spéciales, ce qui les rend plus appropriées pour les calculs numériques. On remarque que les techniques associées s'appliquent à la détermination de prix d'options asiatiques, cf. [7], [14], [24] et les références contenues dans ces articles.

Par un argument très classique d'arbitrage, ou en utilisant le calcul stochastique et la formule de Markov appliquée à $P(t, T)$, on peut montrer que $F(\tau, r)$ vérifie l'EDP suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, r) = \frac{1}{2} \sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\tau, r) + \lambda r \frac{\partial F}{\partial r}(\tau, r) - rF(\tau, r) \\ F(0, r) = 1, \quad r \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Décrivons la méthode de noyau de la chaleur utilisée dans le chapitre 2. Il est bien connu que l'EDP de Black-Scholes (voir par exemple [55] ou [35])

$$\begin{cases} rf(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \\ f(T, x) = h(x) \end{cases}$$

peut être changée en une équation standard de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) \\ g(0, y) = h(e^{\sigma y}), \end{cases}$$

après la transformation

$$g(t, y) = e^{rt} f(T - t, e^{\sigma y + (\frac{\sigma^2}{2} - r)t}).$$

Dans ce chapitre 2, nous procédons sensiblement de la même manière afin de réécrire (1.2.9) comme une équation de la chaleur avec potentiel de Sturm-Liouville.

Proposition 1.2.3 Soit $U(s, y)$ la solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s}(s, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(s, y) - \frac{1}{2}(e^{2y} + p^2)U(s, y) \\ U(0, y) = e^{-py}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2.10)$$

Alors

$$F(\tau, r) := \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right)^p U \left(\frac{\sigma^2 \tau}{4}, \log \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right) \right)$$

est solution de (1.2.9).

Remarquons que (1.2.10) se réécrit sous la forme

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s, y) = - \left(H + \frac{p^2}{2} \right) U(s, y)$$

où

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} e^{2y}$$

est un opérateur hamiltonien avec potentiel de Sturm-Liouville, cf. [30], donc la solution $U(s, y)$ de (1.2.10) est donnée par

$$U(s, y) = e^{-sp^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(y, x) e^{-px} dx, \quad (1.2.11)$$

où $q_s(x, y)$ est le noyau de $(e^{-sH})_{s \in \mathbb{R}_+}$.

Par conséquent, le prix de l'obligation zéro coupon $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p \in \mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right)^p U \left(\frac{\sigma^2 \tau}{4}, \log \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right) \right) \\ &= \frac{2^p (2r)^{p/2}}{\sigma^p} \exp \left(-\frac{\sigma^2 p^2 \tau}{8} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-py} q_{\sigma^2 \tau / 4} \left(\log \left(\frac{2\sqrt{2r}}{\sigma} \right), y \right) dy. \end{aligned}$$

Dans la suite du chapitre, nous discutons de l'usage de plusieurs représentations intégrales du noyau $q_t(x, y)$ qui permettent de réduire le calcul de $F(\tau, r)$ à celui d'une intégrale double sous certaines conditions d'intégrabilité.

Nous retrouvons ensuite le résultat (1.2.8) ainsi que d'autres formules de représentation pour le prix de l'obligation zéro coupon $P(t, T)$ en utilisant des noyaux de la chaleur, comme en particulier dans les deux corollaires suivants, qui reposent sur l'identité

$$K_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} \int_0^\infty \exp\left(-u - \frac{z^2}{4u}\right) \frac{du}{u^{\nu+1}}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (1.2.12)$$

pour les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce, cf. [63] page 183, pourvu que $\mathcal{R}(z^2) > 0$.

Corollaire 1.2.4 *Le prix de l'obligation zéro coupon $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p \in \mathbb{R}$ par*

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \frac{8\sqrt{r}}{\sigma^2 \sqrt{\pi^3 \tau}} e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8 + 2\pi^2 / (\sigma^2 \tau)} \\ &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2\xi^2 / (\sigma^2 \tau)} \frac{\sinh(\xi) \sin(4\pi\xi / (\sigma^2 \tau))}{\sqrt{(z + \xi)(z + \xi^{-1})}} K_1\left(\sqrt{8r} \sqrt{(z + \xi)(z + \xi^{-1})} / \sigma\right) d\xi \frac{dz}{z^p}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Le corollaire suivant fournit une autre expression pour le prix de l'obligation contenant une intégrale double, mais cette formule n'est cette fois valide que pour $p < 1$. Nous y utilisons la majoration

$$|\theta(v, t)| \leq C(t) v e^{-v}, \quad v, t > 0, \quad (1.2.14)$$

où

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{e^{\pi^2 / (2t)}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty e^{-\xi^2 / (2t)} \sinh(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} e^{t/2 + \pi^2 / (2t)} \int_0^{\sqrt{t/2}} e^{-x^2} dx < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Corollaire 1.2.5 *Le prix de l'obligation $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p < 1$ par*

$$F(\tau, r) = 2e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^\infty \left(v^2 + 8r / \sigma^2\right)^{p/2} \theta\left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) K_p\left(\sqrt{v^2 + 8r / \sigma^2}\right) \frac{dv}{v^{p+1}}. \quad (1.2.15)$$

Puis, par le même argument que dans le Corollaire 1.2.4, nous avons une formule analytique pour le prix d'une option sur une obligation avec fonction de rétribution $h(x)$

$$\mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) h(F(S - T, r_T)) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T < S,$$

en utilisant la fonction densité de probabilité (1.2.7).

Proposition 1.2.6 *Le prix d'une option sur une obligation avec pour fonction de rétribution $h(x)$ est donné pour tout $p \in \mathbb{R}$ par*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) h(F(S - T, r_T)) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{8\sqrt{r_t}}{\sigma^2 \sqrt{\pi^3 \tau}} e^{2\pi^2 / (\sigma^2 \tau) - p^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty z^{-p-1} h(F(S - T, r_t e^{-p\sigma^2 \tau / 2} z^2)) \\ &\quad \times \int_0^\infty e^{-2\xi^2 / (\sigma^2 \tau)} \frac{\sinh(\xi) \sin(4\pi\xi / (\sigma^2 \tau))}{\sqrt{(z + e^\xi)(z + e^{-\xi})}} K_1\left(\frac{\sqrt{8r_t}}{\sigma} \sqrt{(z + e^\xi)(z + e^{-\xi})}\right) d\xi dz. \end{aligned}$$

Dans la proposition suivante, nous donnons l'expression du noyau de la chaleur, qui apparaît dans l'article [2] p.24, et que nous utilisons immédiatement après pour établir une autre formule de représentation intégrale de la solution de l'équation (1.2.9).

Proposition 1.2.7 Pour $t > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$, le noyau $q_t(x, y)$ est donné par

$$q_t(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty u e^{-u^2 t/2} \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) du. \quad (1.2.16)$$

En utilisant cette dernière représentation intégrale (1.2.16) du noyau $q_t(x, y)$, il vient directement la proposition suivante.

Proposition 1.2.8 Le prix de l'obligation zéro coupon $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p \in \mathbb{R}$ par

$$F(\tau, r) = \frac{2^{p+1}(\sqrt{2r})^p}{\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 \tau/8} \int_0^\infty e^{-py} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) e^{-u^2 \sigma^2 \tau/8} K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) K_{iu}(e^y) du dy, \quad (1.2.17)$$

$r > 0, \tau > 0$.

Nous obtenons encore en corollaire une autre représentation intégrale pour la solution de l'EDP donnant le prix de l'obligation pour $p \in (-\infty, 0)$, et qui se rapproche de la formule originale de Dothan (1.2.4). Pour $p < 0$, ce résultat ne coïncide clairement pas avec celui de Dothan (1.2.4), et cela est dû à l'absence du terme $\frac{2x^{p/2}}{\Gamma(p)} K_p(2\sqrt{x})$ dans la formule (1.2.18) ci-dessous.

Corollaire 1.2.9 Le prix de l'obligation zéro coupon $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ est donné pour tout $p < 0$ par

$$F(\tau, r) = \frac{x^{p/2}}{\pi^2} e^{-p^2 s/4} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty u e^{-u^2 s/4} \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 \sin(ua) du da, \quad (1.2.18)$$

$r > 0, \tau > 0$, avec $x = 2r/\sigma^2$ et $s = \sigma^2 \tau/2$.

Dans la Proposition 1.2.10 ci-dessous, nous vérifions de plus que la condition $F(0, r) = 1$ est satisfaite par la fonction donnée par (1.2.18) pour tout $p \in (-1, 0)$, ce qui confirme que la formule de Dothan (1.2.4) ne satisfait pas la bonne condition initiale pour tout $r > 0$, bien qu'elle satisfasse $F(\tau, 0) = 1$ pour tous $p \geq 0$ et $\tau \geq 0$. Plus précisément, la formule (1.2.4) de Dothan vérifie

$$F(0, r) = 1 + \frac{2^{p/2+1} r^{p/2}}{\sigma^p \Gamma(p)} K_p\left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma}\right) \neq 1, \quad p < 0. \quad (1.2.19)$$

Proposition 1.2.10 Pour tout $p \in (-1, 0)$, la fonction $F(T - t, r)$ donnée par (1.2.18) satisfait la condition initiale $F(0, r) = 1$ pour tout $r \geq 0$.

Dans le chapitre 3, nous poursuivons le travail du chapitre 2 et nous nous intéressons toujours à la fonctionnelle exponentielle du mouvement brownien

$$\mathcal{A}_T = \int_0^T e^{\sigma W_s - \sigma^2 s/2 + \lambda s} ds, \quad T \geq 0,$$

dont la transformée de Laplace

$$F(\tau, r) = E \left[\exp \left(-r \int_0^\tau e^{\sigma W_s - \sigma^2 s/2 + \lambda s} ds \right) \right], \quad r \in \mathbb{R}_+, \tau \geq 0,$$

est solution de l'EDP (1.2.9), et nous cherchons à prolonger à $\mathbb{R}$ le résultat (1.2.18) obtenu en Corollaire 1.2.9 pour $p = 1 - 2\lambda/\sigma^2 < 0$.

La densité de probabilité $\Psi(t, y)$ de $\mathcal{A}_t$, définie par

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} \Psi(t, y) dy, \quad t, x \in \mathbb{R}_+,$$

est solution de l'équation de Fokker-Planck

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, y) = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^2 \Psi(t, y)) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (y \Psi(t, y)) - \frac{\partial \Psi}{\partial y}(t, y), \\ \Psi(0, y) = \delta_0(y). \end{cases} \quad (1.2.20)$$

La solution de l'équation (1.2.20) est donnée dans [59] grâce à des développements spectraux, et cette solution est notamment citée dans [2, (0.5) p.16] et communément utilisée aussi bien dans la littérature de la physique mathématique, cf. [17], [18], [19] et les références qu'ils contiennent, qu'en finance, cf. [44].

Cependant, le calcul complet des constantes de normalisation associées au spectre continu n'est pas clairement détaillé dans [59], cf. page 1641 où le résultat y est simplement énoncé; cela est dû à de grandes complications analytiques lors du calcul de ces constantes, avec l'apparition de fonctions spéciales de Meijer. Récemment, le calcul du développement en série de fonctions propres a été fait dans [44] par le biais d'un passage à la limite dans des versions approchées de l'équation (1.2.20). Néanmoins, cette méthode repose sur un argument délicat et complexe de passage à la limite.

Nous proposons dans le chapitre 3 de donner une solution directe de (1.2.9) et (1.2.20) via un argument simple basé sur les noyaux de la chaleur, comme dans le chapitre 2, ainsi qu'une nouvelle représentation intégrale (1.2.21) pour le carré du module de la fonction Gamma

$$\left| \Gamma \left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2} \right) \right|^2 = 4 \int_0^\infty \left(\frac{2}{x} \right)^p K_{is}(x) \left(1 - \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(x) \right) \frac{dx}{x}. \quad (1.2.21)$$

Cette approche repose sur des arguments de prolongement analytique, des développements asymptotiques et sur des identités combinatoires pour les fonctions de Bessel modifiées qui présentent un intérêt scientifique pour elles-mêmes, telles

$$\sum_{k=0}^p \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, il vient la proposition suivante, qui donne la solution de l'équation (1.2.9), valable pour tout paramètre réel p .

Proposition 1.2.11 *Pour tout $p \in \mathbb{R}$ la solution de (1.2.9) est*

$$F_p(\tau, r) = \frac{(2r)^{p/2}}{2\pi^2\sigma^p} \int_0^\infty u e^{-\sigma^2(p^2+u^2)\tau/8} \sinh(\pi u) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}\left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma}\right) du \\ + \frac{(2r)^{p/2}}{\sigma^p} \sum_{k=0}^\infty \frac{2(p-2k)^+}{k!(p-k)!} e^{\sigma^2 k(k-p)\tau/2} K_{p-2k}\left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma}\right), \quad (1.2.22)$$

$r > 0, \tau > 0$.

Par inversion de la transformée de Laplace, nous obtenons dans la proposition suivante la densité de probabilité Ψ de $\mathcal{A}_t$, solution de l'équation de Fokker-Planck (1.2.20). Cela fournit une autre expression pour la densité d'une fonctionnelle exponentielle $\mathcal{A}_t$, que l'on peut comparer avec celles de [64], Proposition 2, et de [45], comme il est noté dans [17], [18] ou encore [19].

Proposition 1.2.12 *Pour tous $t, z > 0$, nous avons*

$$\Psi_p(t, z) = \frac{e^{-1/(\sigma^2 z)}}{4z\pi^2} \left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right)^{(p-1)/2} \int_0^\infty s \sinh(\pi s) e^{-\sigma^2(p^2+s^2)t/8} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 W_{\frac{p+1}{2}, \frac{is}{2}}\left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right) ds \\ + e^{-2/(\sigma^2 z)} \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{(-1)^m}{z} \left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right)^{p-m} \frac{p-2m}{(p-m)!} e^{-\sigma^2 m(p-m)t/2} L_m^{p-2m}\left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right), \quad (1.2.23)$$

où $W_{(p+1)/2, is/2}$ et L_m^{p-2m} sont respectivement une fonction de Whittaker et un polynôme de Laguerre généralisé.

Afin de retrouver la forme (1.2.4) pour le prix d'obligation dans le modèle de [22], la Proposition 1.2.11 permet d'écrire

$$\begin{aligned}
F_p(\tau, r) = & \frac{(2r)^{p/2}}{2\pi^2\sigma^p} \int_0^\infty \sin\left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma} \sinh a\right) \int_0^\infty u e^{-\sigma^2(p^2+u^2)\tau/8} \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left|\Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right)\right|^2 \sin(ua) du da \\
& + \frac{(2r)^{p/2}}{\sigma^p} \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2(p-2m)}{m!(p-m)!} e^{\sigma^2 m(m-p)\tau/2} K_{p-2m}\left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma}\right), \tag{1.2.24}
\end{aligned}$$

pour tous $p \in \mathbf{R}$, $r > 0$, et $\tau > 0$. La formule ci-dessus étend le Corollaire 1.2.9, qui est aussi le Corollaire 3.2 de [50], à tout paramètre $p \geq 0$, et elle corrige le prix d'obligation zéro-coupon (1.2.4) donné dans [22] page 64, cf. aussi [12] page 63, qui est seulement valable pour $p \in (0, 2]$, cf. [50].

1.3 FONCTIONNELLES PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT BROWNIEN

Le chapitre 4 traite essentiellement des fonctionnelles périodiques du mouvement brownien standard $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ de la forme

$$\mathcal{A}_T = \int_0^T (\beta + \alpha \cos(wB_t + \mu)) dt.$$

Comme nous le détaillons dans la suite de cette introduction, on trouve des applications aussi bien en mécanique qu'en mathématiques financières de la fonctionnelle $\mathcal{A}_T$. Le chapitre 4 met en évidence les applications aux mathématiques financières, sous la forme d'un article en préparation, puis dans une courte section, nous présentons les implications mécaniques et physiques de l'étude de telles fonctionnelles. La dernière section est consacrée à la modélisation des taux d'intérêt sur les groupe de Lie, en tant que prolongement du travail mené dans les sections précédentes.

Depuis environ 20 ans, les fonctionnelles du mouvement brownien sont largement étudiées avec bien souvent des applications financières en ligne de mire : en effet, les prix d'options exotiques telles que les options asiatiques dépendent d'un processus stochastique sur un intervalle de temps complet $[0, T]$, d'où le qualificatif de *dépendant du chemin* (*path-dependent* en anglais) qu'on donne généralement à ces options, et l'utilité de l'étude de fonctionnelles de la forme

$$\mathcal{A}_T^\varphi = \int_0^T \varphi(B_t) dt,$$

ainsi que de leurs propriétés mathématiques.

Par exemple, on est souvent amené à considérer le mouvement brownien géométrique comme processus régissant une option asiatique, c'est à dire avec $\varphi(x) = \exp(\sigma x)$, où on cherche à expliciter des quantités telles que

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{t} \left(\int_0^t \exp(\sigma B_s + \mu s) ds \right) - K \right)_+ \right].$$

Pour ce faire, on peut simuler ou faire des approximations mathématiques en appliquant les techniques numériques des équations aux dérivées partielles, voir [24] et les références

qu'il contient. Une autre façon de procéder est de déterminer les lois explicites pour les processus qui apparaissent lorsqu'on cherche à expliciter des prix d'options. En ce qui concerne le mouvement brownien géométrique, nous nous référons à [10] qui rassemble un grand nombre de formules associées à des fonctionnelles du mouvement brownien, ainsi qu'aux articles [64], [45] et les références qu'ils contiennent.

En théorie de la modélisation des taux d'intérêt, si le processus de taux instantané est noté $(r_s)_s$, alors nous rappelons que le prix de l'obligation zéro coupon associée au temps t pour l'échéance $T > t$ est donné par la formule

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right],$$

qui se calcule à partir du moment où on connaît de façon explicite la distribution de $\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$, ou lorsqu'on peut au moins la caractériser en fonction des dynamiques du processus r , conditionnellement à l'information disponible au temps t . Pour un modèle donné de taux court r , la formule de Feynman-Kac (voir par exemple [57]) permet de construire des algorithmes numériques et de calculer des prix en utilisant des simulations de Monte-Carlo. Cependant, il subsiste toujours un gouffre entre les implications théoriques et pratiques de n'importe quel modèle de taux, et tout le problème est de trouver des modèles de taux qui puissent à la fois représenter fidèlement la réalité des marchés et permettre de calculer des prix explicitement et rapidement.

Les modèles classiques les plus connus pour le processus r de taux court instantané donnent avec l'hypothèse d'absence d'arbitrage des formules explicites pour les prix d'obligations $P(t, T)$. Ces prix proviennent de la résolution d'une équation aux dérivées partielles que le processus de prix d'obligation satisfait. Certains modèles donnent donc des prix explicites et utilisables en pratique (comme celui de Vasicek, 1977), mais ils ont l'inconvénient majeur de permettre aux taux de devenir négatifs ou non bornés, alors que d'autres modèles sont trop simples ou au contraire ne permettent aucun calcul utile en pratique, voir par exemple [12], [51], [52] et les références contenues dans ces documents. Jusqu'à présent, mis à part le mouvement brownien géométrique, d'autres intégrales de chemins browniens ont été étudiées avec des perspectives d'applications financières, et les principaux résultats obtenus sont regroupés dans [34]. Récemment, le cas général des fonctionnelles $\varphi(x) = |x|^p$ a été traité, montrant que des lois faisant intervenir uniquement des fonctions spéciales usuelles ne pouvaient être explicitées que dans les cas $p = 1$ et $p = 2$, voir à nouveau [34], ainsi que [36] ou encore [62]. Il semble qu'assez peu de choses aient été dites sur les fonctionnelles périodiques et hyperboliques du mouvement brownien en termes de lois explicites. Par conséquent, il paraît raisonnable de creuser un peu cette question de taux d'intérêt positifs et bornés de la forme

$$r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t + \mu) \geq 0, \tag{1.3.1}$$

avec $\eta \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\beta > \alpha \geq 0$, $\mu \in [0, \pi]$ et $w > 0$, qui pourraient donner des prix d'obligations explicites et représentatifs de ceux qu'on trouve sur le marché.

Il semble clair en effet que les marchés financiers et d'assurances sont cycliques : en périodes d'expansion ou de récession économiques, les mesures prises par les investisseurs financiers ou les assureurs pour faire du profit sont stratégiquement différentes et ont de l'influence sur les marchés. Par exemple, les taux d'intérêt ont tendance à revenir vers des niveaux moyens variables qui dépendent du cycle des affaires (en anglais, *business cycle*, cf. [21]). La variabilité des taux d'intérêt influence ainsi les décisions économiques et d'investissements. Les investisseurs changent d'attitude vis à vis de la gestion des actifs risqués tels que les actions et les obligations, en fonction de l'état des marchés. Ces différentes attitudes et stratégies peuvent être naturellement représentées mathématiquement par des fonctions périodiques telles que les fonctions trigonométriques, et il paraît donc naturel de calculer des prix d'obligations avec des taux d'intérêt courts sous-jacents modélisés par (1.3.1). Ces implications financières sont détaillées dans le chapitre 4. En particulier, la Relation (1.3.9) nous permet de faire des calculs exacts de prix d'obligations zéro-coupon, et on obtient

$$\begin{aligned} P(t, T) &= F(T - t, r) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\eta\beta + w^2 a_{2n}(4\eta\alpha/w^2)/4)(T-t)} \left\{ \int_0^{\pi} \mathfrak{C}_{2n} \left(x, \frac{4\eta\alpha}{w^2} \right) dx \right\} \mathfrak{C}_{2n} \left(\frac{wr + \mu}{2}, \frac{4\eta\alpha}{w^2} \right). \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Dans le domaine de la physique, comme il en a déjà été question dans le chapitre 3, les fonctionnelles exponentielles du type $\mathcal{A}_L^{\text{exp}}$ apparaissent quand on étudie les propriétés de transport de systèmes chaotiques de longueur finie L , ou quand on s'intéresse aux mouvements d'une particule brownienne dans un potentiel brownien, voir [37], ou encore en physique statistique des systèmes désordonnés, voir [19]. Dans ce contexte, il faut connaître la moyenne de l'énergie libre sur l'ensemble du désordre afin d'obtenir des informations sur les propriétés thermodynamiques du système désordonné concerné. L'énergie libre est une quantité fondamentale de la physique quantique, modélisée par $-\alpha \log(\mathcal{A}_L^{\text{exp}})$, avec $\mathcal{A}_L^{\text{exp}}$ qui représente la fonction de partition du système. La formule de Feynman-Kac (voir par exemple [57]) appliquée à l'équation de Schrödinger permet ensuite de construire des algorithmes numériques et de calculer la moyenne sur le désordre de l'énergie libre d'un système donné, de sorte qu'on obtienne les propriétés thermodynamiques de ce système. Comme cela est proposé en Section 7.2.2 dans [5], nous nous intéressons particulièrement dans le chapitre 5 à des équations de Schrödinger dépendant du temps, faisant apparaître des potentiels trigonométriques, et nous donnons une expression explicite de la transformée de Laplace

$$F(t, y; \eta) = \mathbb{E} \left[\exp \left(-\eta \int_0^t (\beta + \alpha \cos(wB_s + \mu)) ds \right) \right],$$

sous forme d'une série absolument convergente, à vitesse de convergence exponentielle

de fonctions spéciales de Mathieu. Il s'agit des fonctions propres périodiques associées à l'équation dite *de Mathieu*,

$$y''(x) + (a - 2q \cos(2x))y(x) = 0, \quad a \in \mathbf{R}, \quad q \geq 0. \quad (1.3.3)$$

Les fonctions de Mathieu sont notées $\mathfrak{c}_n$ lorsqu'elles sont paires, et $\mathfrak{s}_n$ lorsqu'elles sont impaires, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Initialement, elles ont été introduites par E. L. Mathieu en 1868 afin de résoudre le problème de Dirichlet dans une ellipse, cf. [1], [13] ou encore [32]. L'équation de Mathieu (1.3.3) est fortement liée à l'équation des ondes plane et à l'équation de Schrödinger avec potentiel périodique en temps, voir par exemple [42], [61] ou [30] p.119.

Nous rappelons dans le chapitre 4 quelques éléments importants de la théorie des fonctions de Mathieu, en utilisant [13] et [29, p.950] et en gardant leurs notations. D'après les résultats sur le développement spectral pour des opérateurs de Schrödinger avec potentiel de Sturm-Liouville de [43] et [44], nous pourrons ensuite résoudre l'équation de Mathieu avec dépendance au temps.

À partir de l'équation (1.3.3), notons H_q l'*hamiltonien de Mathieu*, c'est à dire l'opérateur différentiel du second ordre suivant

$$[(\mathbf{H}_q + a)y](x) := y''(x) + (a - 2q \cos(2x))y(x) = 0, \quad a \in \mathbf{R}, \quad q \geq 0. \quad (1.3.4)$$

Des éléments essentiels concernant la théorie des fonctions spéciales associées à cet opérateur seront donnés en Proposition 4.2.1.

Nous résolvons ensuite l'équation de Mathieu standard avec dépendance au temps

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = [(\mathbf{H}_q + a)f](t, x).$$

Pour $t > 0$, $\beta > \alpha \geq 0$, $\mu \in [0, \pi]$ et $w > 0$, soit

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t (\beta + \alpha \cos(wB_s + \mu)) ds, \quad (1.3.5)$$

avec $(B_t)_t$ un mouvement brownien réel standard. Par la Proposition 5.8 p.51 de [56], qui est une version de la formule de Feynman-Kac, pour tout $\eta \geq 0$ fixé, la fonction

$$F(t, y; \eta) = \mathbb{E}_y \left[e^{-\eta \mathcal{A}_t} \right], \quad y \in \mathbf{R}, \quad t \geq 0 \quad (1.3.6)$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, y; \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, y; \eta) - \eta \{ \beta + \alpha \cos(wy + \mu) \} F(t, y; \eta), & t \geq 0, \\ F(0, y; \eta) = 1, & y \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Nous allons donner une solution exacte et explicite de l'équation de Mathieu standard dépendant du temps (1.3.7) sous forme d'un développement en série de fonctions de Mathieu paires et π -périodiques, telles que définies dans la proposition 4.2.1.

L'équation (1.3.7) est une équation de la chaleur avec potentiel de Sturm-Liouville. Pour la résoudre, nous commençons par faire la transformation $R(t, x; \eta) = F(t, y; \eta)$, avec $x = \beta + \alpha \cos(wy + \mu)$, pour nous ramener à sa forme algébrique, ou forme de Fokker-Planck.

Proposition 1.3.1 *Pour tout $\eta \geq 0$ fixé, la fonction R est la solution principale de l'équation*

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, x; \eta) = \frac{w^2}{2} [\alpha^2 - (x - \beta)^2] \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(t, x; \eta) - \frac{w^2}{2} (x - \beta) \frac{\partial R}{\partial x}(t, x; \eta) - \eta x R(t, x; \eta), \quad (1.3.8)$$

avec la condition initiale $R(0, x; \eta) = 1$, pour $x \in (\beta - \alpha, \beta + \alpha)$.

Nous donnons maintenant le résultat principal du chapitre 4.

Proposition 1.3.2 *Soient $\eta \in \mathbb{R}_+$ et $q(\eta) = 4\eta\alpha/w^2$. Pour $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$\begin{aligned} F(t, y; \eta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} A_0^{(2n)}(q) \mathbf{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} \left\{ \int_0^\pi \mathbf{ce}_{2n}(x, q) dx \right\} \mathbf{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Comme application directe de cette Proposition 1.3.2, calculons le prix d'une obligation zéro-coupon dans le cas où le taux court sous-jacent est périodique, ensuite de quoi nous donnerons un résultat important de vitesse de convergence des séries apparaissant dans (1.3.9).

Supposons que le taux court $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ soit modélisé par

$$r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t), \quad \beta > \alpha > 0, \quad w > 0, \quad t > 0,$$

de sorte que $(r_t)_t$ reste positif et borné. Ce genre de taux peut correspondre aux cycles commerciaux qu'on peut observer sur les marchés, cf [21].

Pour $0 \leq t \leq T$, le prix de l'obligation zéro coupon est donné par

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T \{ \beta + \alpha \cos(wB_s) \} ds \right) \middle| B_t \right] = f(T - t, B_t).$$

Proposition 1.3.3 *Pour $0 \leq t \leq T$,*

$$P(t, T) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))(T-t)/4} A_0^{(2n)}(q) \mathbf{ce}_{2n} \left(\frac{wx}{2}, q \right) \Big|_{x=B_t}.$$

Enfin, il nous faut remarquer le résultat de convergence suivant, qui permet de tronquer les séries apparaissant dans la relation (1.3.9) de façon à effectuer des calculs pratiques concrets en des temps raisonnables.

Proposition 1.3.4 *Pour tous paramètres $\beta > \alpha$, w , $\eta \in \mathbb{R}_+$ fixés, avec $q(\eta) = 4\eta\alpha/w^2$, et pour $t > 0$, la relation (1.3.9) définit F comme étant une série absolument et uniformément convergente, et*

plus précisément, pour tout $N \geq 1$, nous avons la majoration

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| F(t, y; \eta) - 2 \sum_{n=0}^N e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} A_0^{(2n)}(q) \text{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right) \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2tw}} e^{-t(\eta\beta + w^2 N^2)}. \quad (1.3.10)$$

La motivation initiale de ce travail de thèse était de considérer de nouveaux modèles de taux d'intérêt sur des groupes de Lie compacts, comme suggéré dans [49] et [33]. Nous avons déjà souligné le fait que le taux court r_t est une quantité fondamentale des mathématiques financières, qui sert notamment à déterminer les prix d'obligations zéro coupon, et dont la modélisation est un problème majeur : en effet, le prix d'une obligation zéro coupon d'échéance $T > 0$, au temps $t \leq T$ est donné par

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \mid \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E}_t \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} \right],$$

et nous constatons bien que la courbe de prix est entièrement caractérisée par l'évolution de la seule quantité r_t : comme nous l'avons déjà dit, de nombreux modèles de taux avec leurs avantages et leurs inconvénients ont été proposés depuis une quarantaine d'années, mais la question de comment concilier théorie et pratique dans le domaine des taux d'intérêt reste ouverte. L'enjeu crucial reste de choisir le bon cadre de travail et le bon modèle pour obtenir des formules permettant des calculs pratiques, des résultats, des prix cohérents en un temps de calcul satisfaisant.

Dans la dernière section du chapitre 4, nous présentons les premiers résultats obtenus dans l'optique d'une modélisation des taux d'intérêt sur les groupes de Lie. Ces modèles font le lien avec le début du chapitre, car ils impliquent des fonctionnelles périodiques de mouvements browniens standards.

Nous commençons avec les taux d'intérêt sur le cercle en posant $G := SO(2)$, $(B_t)_t$ un mouvement brownien réel standard et $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie associée au groupe de Lie.

La solution de l'équation différentielle stochastique sur G suivante

$$dX = X dM \quad (1.3.11)$$

est le processus X , qui s'écrit

$$X_t = \begin{pmatrix} \cos(wB_t + \theta_0) & -\sin(wB_t + \theta_0) \\ \sin(wB_t + \theta_0) & \cos(wB_t + \theta_0) \end{pmatrix},$$

pour tout $t \geq 0$, avec la condition initiale $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Le taux court r_t est ensuite défini par

$$r(X) = \beta + \text{Tr}(SX), \quad S = S^\top, \quad \beta > 0 \quad (1.3.12)$$

et

$$r_t = r(X_t), \quad t \geq 0.$$

Nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 1.3.5 *L'équation régissant l'évolution du processus r_t défini ci-avant par (1.3.11) et (1.3.12) est*

$$dr_t = \frac{1}{2}r(dX_t) - \frac{1}{4}(r_t - \beta)dt.$$

Avec les notations ci-dessus, pour $\beta > 0$, posons $\theta_0 = 0$ et $S = \alpha I_2$ avec $0 < \alpha < \beta$. Alors $r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t)$ la proposition 1.3.3 nous donne immédiatement le prix de l'obligation zéro coupon associée, au temps $t \geq 0$ pour une échéance $T > t$ donnée

$$P(t, T) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2(4\beta/w^2 + \alpha_{2n}(4\alpha/w^2))(T-t)/4} A_0^{(2n)} \left(\frac{4\alpha}{w^2} \right) \mathfrak{C}_{2n} \left(\frac{wx}{2}, \frac{4\alpha}{w^2} \right) \Big|_{x=B_t}.$$

Nous présentons une généralisation du modèle au groupe de Lie $SO(3)$, en posant

$$X_t = \exp(W_t), \quad t > 0$$

avec $W_t := \begin{pmatrix} 0 & W_1(t) & 0 \\ -W_1(t) & 0 & W_2(t) \\ 0 & -W_2(t) & 0 \end{pmatrix}$ un mouvement brownien à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = so(3)$. Ses composantes réelles W_1 et W_2 sont des mouvements browniens de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, avec $0 < \rho < 1$. Nous établissons la proposition suivante.

Proposition 1.3.6 *Le processus X s'écrit*

$$X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{K}{2}(B_1 - B_2)^2 & -\sqrt{2}k(B_1 + B_2) & \frac{K}{2}(B_1^2 - B_2^2) \\ \frac{\sqrt{2}k}{4}(B_1 + B_2) & 1 - K(B_1^2 + B_2^2) & -\frac{\sqrt{2}k}{4}(B_1 - B_2) \\ \frac{K}{2}(B_1^2 - B_2^2) & \sqrt{2}k(B_1 - B_2) & 1 - \frac{K}{2}(B_1 + B_2)^2 \end{pmatrix}, \quad (1.3.13)$$

$$\text{avec } B_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(W_1 + W_2), \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_2 - W_1), \quad k_t = \frac{\sin \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}}{\sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}} \text{ et } K_t = \frac{1 - \cos \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}}{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}, \text{ pour } t \geq 0.$$

L'idée est ensuite de considérer un taux court r_t de la forme

$$r_t = \alpha + \text{Tr}(QX_t),$$

où Q , matrice symétrique à composantes réelles, et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont choisis de sorte que r_t reste positif pour tout $t \geq 0$. Il s'avère que le prix de l'obligation zéro-coupon associée est solution d'une équation aux dérivées partielles en dimension 3 dont l'étude n'a pour l'instant rien donné d'explicite.

Une tentative de modélisation sur le groupe $SL(2)$, bien qu'il s'agisse d'un groupe non compact, offre des perspectives de recherche sur les fonctionnelles hyperboliques.

1.4 CALCUL DE SENSIBILITÉS VIA LE CALCUL DE MALLIAVIN

Dans le chapitre 5, nous appliquons le calcul de Malliavin à quelques exemples pratiques de calculs de sensibilités d'options, aussi appelées *grecques*.

1.4.1 Calcul de sensibilités : le B.A.-BA

Lorsqu'on gère un portefeuille d'options, l'un des buts principaux est de contrôler l'exposition de ce portefeuille aux risques inhérents au marché. Savoir calculer la *sensibilité* du portefeuille ou du contrat aux variations des paramètres du modèle sous-jacent, c'est savoir anticiper ou estimer quantitativement les variations des prix d'options en fonction de facteurs déterminants tels que la volatilité ou la condition initiale. Cela permet surtout de gérer les risques d'évolution défavorable de ces contrats ou portefeuilles.

De manière informelle, on peut voir les sensibilités comme étant des dérivées du prix par rapport à un paramètre λ

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbb{E}[\phi(S(T))],$$

où $\phi(S(T))$ est la fonction de rétribution (ou *payoff*, en anglais) et $S(T)$ est l'actif sous-jacent, qui dépend du paramètre λ et du temps T .

Trois indicateurs de sensibilités jouent un rôle fondamental dans la pratique : le *delta* est la sensibilité du prix d'option par rapport à la valeur initiale de l'actif, $\delta = \frac{\partial}{\partial x_0}$; la *vega* est la sensibilité par rapport à la volatilité implicite, $\mathcal{V} = \frac{\partial}{\partial \sigma}$; et le *theta* est la sensibilité par rapport au temps restant avant l'échéance de l'option, $\theta = \frac{\partial}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial T}$, où $\tau = T - t$. Citons également le *rho* qui mesure la sensibilité de l'option à la variation du taux d'intérêt court, $\rho = \frac{\partial}{\partial r}$; et le *gamma* qui mesure le taux de variation du delta par rapport au prix de l'actif sous-jacent (convexité par rapport au sous-jacent), $\gamma = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}$. On comprend alors aisément d'où vient le qualificatif de *grecques* pour ces différents indicateurs de sensibilités.

Les grecques sont des quantités **non observables** du marché, et afin de les estimer correctement, il faut soigneusement choisir un modèle pour l'actif sous-jacent.

Si on note comme d'habitude $\{r_t\}_{t \geq 0}$ le taux d'intérêt court, et si on considère la fonction de payoff $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, alors la sensibilité δ du prix d'option à la variation de r_0 , le taux court initial, s'écrit

$$\delta = \frac{d \mathbb{E}[f(r_t)]}{dr_0} = \mathbb{E} \left[\frac{f'(r_t) dr_t}{dr_0} \right].$$

De telles quantités sont bien sûr calculables par approximation de Monte-Carlo. Seulement, la convergence est particulièrement lente dans le cas de fonctions f aux dérivées discontinues (ce qui est souvent le cas en pratique), et les estimations ne sont généralement pas satisfaisantes, avec une variance et/ou un biais trop grands (voir [8]), etc...

L'objectif, en utilisant le calcul de Malliavin, est de se ramener à une expression ne faisant plus intervenir la dérivée de la fonction f , de sorte qu'on pourra prendre pour payoff f n'importe quelle fonction d'une régularité non nécessairement $\mathcal{D}^0$.

Les articles de référence en matière de calcul de Malliavin appliqué à l'analyse des grecques sont [27] et [28] qui utilisent pour la première fois, et sur des exemples concrets, la formule d'intégration par parties, pivot du calcul de Malliavin, pour calculer les dérivées du prix d'une option.

1.4.2 Calcul de Malliavin pour des diffusions à générateur infinitésimal hypoelliptique

Dans le chapitre 6, nous nous intéressons particulièrement aux processus régis par une équation différentielle stochastique à générateur infinitésimal hypoelliptique, aux formules d'intégration par parties obtenues dans ce contexte par le calcul de Malliavin, et aux calculs explicites de sensibilités δ qui en résultent.

Soit M une variété lisse de dimension n . On considère l'équation différentielle stochastique au sens de Stratonovich suivante

$$\begin{cases} \delta X_t(x) = A(X_t(x))\delta Z_t + A_0(X_t(x))dt \\ X_0(x) = x. \end{cases} \quad (1.4.1)$$

avec $x \in M$, $A_0 \in \Gamma(TM)$, $A \in \Gamma(\mathbf{R}^r \otimes TM)$ pour tout r et Z un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbf{R}^r$ sur un espace de probabilité filtré donné.

Les solutions de (1.4.1) sont les diffusions de générateur infinitésimal donné par

$$L = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r A_i^2, \quad (1.4.2)$$

avec $A_i = A(\cdot)e_i \in \Gamma(TM)$ où e_i est le i -ème vecteur unité de la base canonique de $\mathbf{R}^r$.

Soit

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E}[(f \circ X_t(x))] \quad (1.4.3)$$

le semi-groupe associé à l'équation (1.4.1), agissant sur les fonctions bornées et mesurables $f : M \rightarrow \mathbf{R}$.

La propriété de Markov forte établit que si on pose $F(t, x) := P_{T-t}f(x)$, alors $F(t, X_t(x))$ est une martingale locale, et $F(T, x) = f(x)$. Par conséquent, le processus dérivé $dF(t, \cdot)T_x X_t$ est encore une martingale locale. Ces fonctionnelles sont très utiles en mathématiques financières pour le calcul des grecques, en particulier celles associées aux options asiatiques et aux prix d'obligations, voir par exemple [12], [15], [24], [50] ainsi que les références contenues dans ces articles. Dans certains cas, $F(T, x)$ est un prix d'option asiatique, et si on souhaite calculer des grecques, une relation de la forme suivante s'avère pertinente

$$d_x P_t f(v) = \mathbb{E}[f(X_t(x))\phi_t v],$$

avec ϕ_t un poids qui ne fait intervenir ni la fonction f ni ses dérivées. En effet, cela nous permet de choisir une fonction de payoff f non nécessairement régulière. Nous

développons cet intérêt financier dans le chapitre 6 sur des exemples concrets de prix d'obligations associés à des modèles usuels de taux d'intérêt.

Nous adoptons dans la suite les notations de [4]. Soit $X_t(x)$ la solution de l'équation (1.4.1). Rappelons que la condition d'hypoellipticité de Hörmander, voir par exemple [48] p.49, s'écrit dans notre contexte

$$\text{Lie}(A_i, [A_0, A_i] : i = 1, \dots, r)(x) = T_x M \quad \text{pour tout } x \in M. \quad (1.4.4)$$

Le théorème de Hörmander (voir [48] p.50) dit que (1.4.3) est, sous la condition (1.4.4), un semi-groupe de Feller fort qui envoie les fonctions bornées mesurables sur M sur les fonctions bornées continues sur M . Le but est à présent d'obtenir des représentations stochastiques pour la différentielle de ce semi-groupe $d(P_t f)$ qui ne fassent pas apparaître les dérivées de la fonction f , toujours sous la condition (1.4.4).

Définition 1.4.1 La matrice de Malliavin de $X_t(x)$ ou matrice de covariance de Malliavin est définie par

$$C_t(x) := \int_0^t (X_s^{-1} A)_x (X_s^{-1} A)_x^* ds.$$

Soient $\lambda \in T_x^* M$ et $dB^\lambda = dB + a\lambda dt$ avec

$$a_s = (X_s^{-1} A)_x^*. \quad (1.4.5)$$

Le théorème suivant, établi et démontré dans [4], Theorem 3.2 p.5, donne une expression pour $d(P_t f)$ qui ne fait pas intervenir la dérivée de la fonction f .

Théorème 1.4.2 Soit M une variété compacte, $f \in C^1(M)$ et $x \in M$. Supposons que la condition (1.4.4) soit vérifiée. Alors pour chaque $v \in T_x M$,

$$d(P_t f)_x v = \mathbb{E}[(f \circ X_t(x)) \phi_t v],$$

où ϕ est un processus adapté prenant ses valeurs dans $T_x^* M$, tel que ϕ_t soit L^p pour tous $1 \leq p < \infty$ et $t > 0$, et donné par

$$\begin{aligned} \phi_t v &= \left(\int_0^t (X_s^{-1} A)_x dB_s \right) C_t^{-1}(x) v \\ &+ \sum_{i,k} \left(C_t^{-1}(x) \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_i} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) \right] C_t^{-1}(x) \right)_{ik} v^k. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

En guise d'application, nous commençons par considérer des options asiatiques. Un actif S_t dirige une option de la forme

$$V = \mathbb{E} \left[f \left(\int_0^T S_t dt \right) \right],$$

pour une échéance $T > 0$ et une fonction mesurable f de croissance au plus exponentielle à l'infini données. Par exemple, dans le cas d'un *Call*, on pose $f(x) = (x - K)_+$, où $K > 0$ est fixé et correspond au prix d'exercice de l'option (en anglais, le *strike*).

On veut calculer le *delta*

$$\delta_0 = \frac{\partial V}{\partial S_0}. \quad (1.4.7)$$

On pose $A_T = \int_0^T S_t dt$. Supposons aussi que le couple (S_t, A_t) soit régi par le système d'EDS suivant

$$\begin{cases} dS_t = \sigma(S_t)dB_t + \mu(S_t)dt \\ dA_t = S_t dt, \quad t \geq 0, \\ S_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.4.8)$$

où les fonctions σ et μ appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et B est un mouvement brownien réel standard. Ainsi, le processus $X_t = (S_t, A_t)$ est une diffusion hypoelliptique avec $(S_0, 0)$ pour condition initiale, mais il peut aussi être vu comme une extension du cas elliptique traité dans [27] et [28].

Proposition 1.4.3 Pour tous $T > 0$ et $S_0 \in \mathbb{R}$, la matrice de Malliavin de X_T est donnée par

$$C_T(S_0) = \int_0^T y_t^{-2} \sigma(S_t)^2 \begin{pmatrix} 1 & -\int_0^t y_s ds \\ -\int_0^t y_s ds & \left(\int_0^t y_s ds\right)^2 \end{pmatrix} dt, \quad (1.4.9)$$

avec $y_t = \exp\left(\int_0^t \sigma'(S_s)dB_s + \int_0^t \mu'(S_s)ds\right)$ pour $t > 0$.

Dans [27] p.404, le delta est calculé dans le cas elliptique unidimensionnel sous la forme

$$\delta_0 = \mathbb{E}_{S_0} \left[f(A_T) \int_0^T \frac{2Y(t)^2}{\sigma(S_t)} \left(\int_0^T Y(s)ds \right)^{-1} dB_t \right], \quad (1.4.10)$$

où $(Y(t), t \geq 0)$ est le processus de variation du premier ordre, donné par

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \mu'(S_t)dt + \sigma'(S_t)dB_t, \quad Y(0) = 1.$$

Cette formule plutôt générale conduit à l'obtention d'expressions simples pour le poids ϕ_T sur de nombreux exemples, comme nous le détaillons dans le chapitre 6. Cependant, ϕ_T est donné sous la forme d'une intégrale de Skorohod, alors que le Théorème 1.4.2 donne un poids sous forme d'intégrales d'Itô, qui peuvent être calculées numériquement dans tous les cas via des sommes de Riemann ou des méthodes de Monte-Carlo. En outre, le Théorème 1.4.2 permet de considérer des fonctions de rétribution plus générales du couple (S_T, A_T) et reste valable dans n'importe quelle dimension, tandis que (1.4.10) ne s'applique qu'en dimension 1 et à des fonctions de rétributions du seul processus A_T .

Dans le cas *trivial* du processus de Langevin, évoqué p.19 dans [4], le processus (S_t, A_t) est solution d'un système d'équations différentielles stochastiques qui n'est autre que (1.4.8) avec $\sigma(S_t) = \sigma > 0$ et $\mu \equiv 0$.

Proposition 1.4.4 *Le processus de Langevin (A_t, S_t) , avec $(0, S_0)$ pour condition initiale, est un processus gaussien donné par*

$$\begin{cases} S_t = \sigma B_t + S_0, \\ A_t = \sigma \int_0^t B_s ds + tS_0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

avec pour fonction de densité

$$p(u, v; S_0) dudv = \mathbb{P}_{S_0}((A_t, S_t) \in dudv) \quad (1.4.11)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sigma^2 \pi t^2} \exp \left\{ -\frac{6(u - tS_0)^2}{\sigma^2 t^3} + \frac{6(u - tS_0)(v - S_0)}{\sigma^2 t^2} - \frac{2(v - S_0)^2}{\sigma^2 t} \right\} dudv.$$

Dans le corollaire suivant, pour toute fonction f mesurable et à partir des relations (1.4.7), $\mathbb{E}[f(A_T, S_T)] = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) p(u, v; S_0) dudv$ et (5.3.3), nous obtenons le même résultat que celui donné par le Théorème 1.4.2.

Corollaire 1.4.5 *Pour tout $T > 0$,*

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \mathbb{E}[f(A_T, S_T)\phi_T] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \frac{\partial p}{\partial S_0}(u, v; S_0) dudv \\ &= \frac{6}{\sigma^2 T} \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \left(\frac{u}{T} - \frac{2S_0 + v}{3} \right) p(u, v; S_0) dudv \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{\sigma^4 T^3 \pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \left(\frac{u}{T} - \frac{2S_0 + v}{3} \right) \exp \left\{ -\frac{6(u - tS_0)^2}{\sigma^2 t^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(u - tS_0)(v - S_0)}{\sigma^2 t^2} - \frac{2(v - S_0)^2}{\sigma^2 t} \right\}, \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

avec ϕ_T explicitement donnée par

$$\phi_T = \frac{6}{\sigma T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T B_t dt - \frac{1}{3} B_T \right).$$

Comme nous l'avons déjà dit, les fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien jouent un rôle important en mathématiques financières, notamment pour établir des prix d'options asiatiques ainsi que dans certains modèles de prix d'obligations. En effet, si le processus de taux court $\{r_t\}_{t \geq 0}$ est modélisé par un mouvement brownien géométrique, alors on se situe dans le cadre suivant :

$$\begin{cases} dr_t = \sigma r_t dB_t + \mu r_t dt \\ dX_t = r_t dt, \quad t \geq 0, \\ (r_0, X_0) \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (1.4.13)$$

où B est un mouvement brownien réel standard, $\sigma > 0$ est la volatilité du modèle, $\mu \in \mathbb{R}$ est le drift et la condition initiale est $x = (r_0, X_0) \in \mathbb{R}^2$.

Proposition 1.4.6 La solution de (1.4.13) est

$$\begin{cases} r_t = r_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \\ X_t = X_0 + \int_0^t r_s ds = X_0 + r_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.14)$$

Notons

$$y_t := \exp \left\{ \sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \quad \text{et} \quad z_t = \int_0^t y_s ds, \quad (1.4.15)$$

de sorte que $r_t(x) = r_0 y_t$ et $X_t(x) = X_0 + r_0 z_t$. D'après les relations (1.4.3) et (1.4.14), il vient

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E} [\exp(-X_t(x))] = e^{-X_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(-r_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds \right) \right],$$

et par le Théorème 1.4.2, nous obtenons

$$d(P_t f)_x v = e^{-X_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(-r_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds \right) \phi_t v \right],$$

avec un poids ϕ_t donné par la Proposition 1.4.7 ci-après. Cela correspond au calcul de

$$\frac{\partial P(\tau, \tau + t)}{\partial r_t}.$$

Proposition 1.4.7 Soient $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ et z donné par (1.4.15), alors

$$\phi_t v \quad (1.4.16)$$

$$\begin{aligned} &= r_0^{-1} \alpha_t \left\{ \sigma^{-1} \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) z_s dB_u ds \right. \\ &\quad + \alpha_t \int_0^t \int_0^t \int_0^s \{ (z_s - z_x)(z_\tau + 2z_u) + z_\tau(z_s - z_u) \} z_x(z_s - z_\tau) d\tau ds dx du \Big\} v_1 \\ &\quad + r_0^{-1} \alpha_t \left\{ \sigma^{-1} \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) dB_u ds \right. \\ &\quad + \alpha_t \int_0^t \int_0^t \int_0^s \{ (2z_s - z_x)(z_x - z_\tau) + z_x(z_\tau - z_u) \} d\tau ds dx du \Big\} v_2, \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_t = \left[t \int_0^t z_s^2 ds - \left(\int_0^t z_s ds \right)^2 \right]^{-1} = \left[2 \int_0^t (t-s) y_s \int_0^s \tau y_\tau d\tau ds \right]^{-1}.$$

Le modèle de Black-Scholes pour les options asiatiques correspond au cas où $\sigma(S) = \sigma S$ et $\mu(S) = \mu S$ avec $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbb{R}$ dans l'équation (1.4.8). En d'autres termes (S_t, A_t) est solution de (1.4.13) avec $(S_0, 0)$ pour condition initiale. D'après (1.4.14), on a

$$\begin{cases} S_t = S_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \\ A_t = S_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.17)$$

La proposition suivante est alors conséquence de la relation (1.4.10).

Proposition 1.4.8 Le delta $\frac{\partial V}{\partial S_0} = \mathbb{E} \left[f \left(\int_0^T S_t dt \right) \pi \right] = \mathbb{E} [f(A_T) \pi]$ est explicite, avec le poids π donné par

$$\pi = \frac{2}{S_0 \sigma^2} \frac{S_T - S_0}{A_T} + \frac{2\mu}{\sigma^2 S_0}.$$

Nous pouvons finalement écrire une formule explicite permettant de calculer δ_0 , comme dans le Corollaire 1.4.5.

Proposition 1.4.9 Soient $\sigma > 0$ et $\mu \in \mathbf{R}$. Pour $T > 0$, nous avons

$$\mathbb{E}[f(A_T)] = \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{2p} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p\tau/2}}{(uv)^{p+1}} f(u) \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma^2 uv^2}{8}\right) \theta(v, \tau) dudv, \quad (1.4.18)$$

et pour toute condition initiale S_0 ,

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E}[f(A_T)] \\ &= \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{2p+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p\tau/2}}{u^p v^{p+1}} f(u) \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma^2 uv^2}{8}\right) \theta(v, \tau) \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma^3 v^2}{16} e^{2p\tau} + \frac{\sigma(p+1)}{2S_0 u} - \frac{1}{\sigma u^2}\right) dudv, \end{aligned} \quad (1.4.19)$$

avec $p = 2\mu/\sigma^2 - 1$, $\tau = \sigma^2 T/4 > 0$ et θ défini par (1.2.6).

La fin du chapitre 6 est consacrée au calcul de grecques pour des prix d'obligations zéro coupon avec des taux courts suivant le modèle de Vasicek à un ou plusieurs paramètres. Soient d'abord B un mouvement brownien réel standard, σ , a et b des constantes réelles $a \neq 0$ et $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$. On considère le processus de à deux composantes réelles $X_t = (X_t^1, X_t^2)$, solution de l'EDS suivante

$$\begin{cases} dX_t^1 = \sigma dB_t + a(b - X_t^1)dt \\ dX_t^2 = X_t^1 dt, \quad t \geq 0, \\ X_0^1 = x_1 \text{ et } X_0^2 = x_2. \end{cases} \quad (1.4.20)$$

Proposition 1.4.10 Pour toute condition initiale $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ et pour tout $t \geq 0$, la solution $X_t(x)$ de l'EDS (1.4.20) est donnée par

$$\begin{cases} X_t^1 = x_1 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s \\ X_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds = x_2 + bt + \frac{1 - e^{-at}}{a} (x_1 - b) + \sigma \int_0^t e^{-as} \int_0^s e^{a\tau} dB_\tau ds, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.21)$$

Toujours grâce au Théorème 1.4.2, nous obtenons le poids suivant.

Proposition 1.4.11 Soit $v \in \mathbf{R}^2$, alors pour tout $t > 0$

$$\phi_t v = \frac{\alpha_t}{\sigma^2} \begin{pmatrix} (1 - e^{at})^2 B_t + 2(1 + at - e^{at}) \int_0^t e^{as} dB_s \\ a(e^{2at} - 1)B_t + 2a(1 - e^{at}) \int_0^t e^{as} dB_s \end{pmatrix}^* v, \quad (1.4.22)$$

avec

$$\alpha_t = \left[ate^{2at} - 2e^{2at} - at - 2 + 4e^{at} \right]^{-1}.$$

Une application pratique intéressante au calcul du delta est donnée dans le corollaire suivant.

Corollaire 1.4.12 *On considère un taux court défini par*

$$dr_t = \sigma dB_t + a(b - r_t)dt,$$

alors pour tout $T > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial}{\partial r_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \frac{a\alpha_T}{\sigma^2} \left\{ (1 - e^{aT})^2 B_T + 2(1 + aT - e^{aT}) \int_0^T e^{as} dB_s \right\} \right]. \end{aligned}$$

Puis, nous donnons une formule analytique pour δ .

Proposition 1.4.13 *Pour tout $T > 0$, posons $R_T = \int_0^T r_t dt$. Alors la grecque δ est donnée explicitement sous forme d'intégrale double par*

$$\delta = \frac{a\alpha_T}{\sigma^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x} \left\{ (1 + 2aTe^{aT} - e^{2aT})y - \frac{2a}{\sigma} (aTe^{aT} + e^{aT} - e^{2aT})(x - m_T) \right\} f_{(R_T, B_T)}(x, y) dx dy, \quad (1.4.23)$$

où $m_T = \frac{r_0}{a}(1 - e^{-aT}) + \frac{b}{a}(aT + e^{-aT} - 1)$ et la densité jointe $f_{(R_T, B_T)}$ du couple (R_T, B_T) est donnée par

$$f_{(R_T, B_T)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|M_T|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M_T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

avec

$$M_T = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - \frac{3}{2a} + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} \right) & \frac{\sigma}{a} \left(T - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-aT} \right) \\ \frac{\sigma}{a} \left(T - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-aT} \right) & T \end{pmatrix}.$$

Dans la fin du chapitre 6, nous généralisons ces résultats sur le modèle de Vasicek au cas de la dimension $n \geq 2$. On considère le système d'équations différentielles stochastiques suivant

$$\begin{cases} dX_t^{(1)} = a_1(b_1 - X_t^{(1)})dt + \sigma_1 dB_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} = a_2(b_2 - X_t^{(2)})dt + \sigma_2 dB_t^{(2)} \\ \dots \\ dX_t^{(n)} = a_n(b_n - X_t^{(n)})dt + \sigma_n dB_t^{(n)}, \\ dX_t^{(n+1)} = (X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \dots + X_t^{(n)})dt, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.4.24)$$

Ici les paramètres $\sigma_i > 0$, a_i et b_i sont des constantes réelles avec $a_i \neq 0$, for all $i \in \{1, \dots, n\}$ et $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(n)})$ désigne un vecteur brownien de dimension n avec pour matrice de corrélation $\Sigma_n \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$. Le Théorème 1.4.2 nous permet d'obtenir le poids explicite suivant.

Proposition 1.4.14 *Pour tout $t > 0$, le poids ϕ_t est un élément de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ et s'écrit*

$$[\phi_t]_k = D_t \sigma_k \left\{ \frac{\sigma_k^2}{a_k^3} [1 + a_k t - e^{a_k t}] \prod_{j \neq k} \alpha_j + \sum_{i \neq k} \frac{\sigma_i^4}{2a_i^4} [(a_i t - 2)e^{2a_i t} + 4e^{a_i t} - (2 + a_i t)] \prod_{j \neq k, i} \alpha_j \right\} \int_0^t e^{a_k s} dB_s^{(k)}$$

$$+ D_t \beta_k \sum_{i \neq k} \left\{ \frac{\sigma_i^3}{a_i^2} (e^{a_i t} - 1) \prod_{j \neq k, i} \alpha_j \right\} \int_0^t e^{a_i s} dB_s^{(i)} \\ - D_t \beta_k \prod_{j \neq k} \alpha_j \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{a_i} B_t^{(i)}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

et

$$[\phi_t]_{n+1} = D_t \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{a_i} \left[\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \right) B_t^{(i)} + \frac{\sigma_i^2}{a_i} (1 - e^{a_i t}) \prod_{j \neq i} \alpha_j \int_0^t e^{a_i s} dB_s^{(i)} \right],$$

$$\text{avec } \alpha_i = \frac{\sigma_i^2}{2a_i} (e^{2a_i t} - 1), \beta_i = \frac{-\sigma_i^2}{2a_i^2} (e^{a_i t} - 1)^2 \text{ pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et}$$

$$D_t = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^4}{2a_i^4} \left\{ (a_i t - 2) e^{2a_i t} + 4e^{a_i t} - (a_i t + 2) \right\} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (e^{2a_j t} - 1) \right\}^{-1}.$$

LE MODÈLE DE DOTHAN REVISITÉ

2

SOMMAIRE

2.1	INTRODUCTION	31
2.2	THE DOTHAN PDE	34
2.3	PDE SOLUTION USING BESSEL FUNCTIONS	36
2.4	PDE SOLUTION USING THE GAMMA FUNCTION	41
2.5	APPENDIX	45

Ce chapitre, écrit en collaboration avec Nicolas Privault, est la version augmentée d'un article à paraître dans la revue *Mathematical Finance* sous une forme plus synthétique et intitulé *The Dothan pricing model revisited* (voir [\[50\]](#)).

Abstract

We compute zero coupon bond prices in the Dothan model by solving the associated PDE using integral representations of heat kernels and Hartman-Watson distributions. We obtain several integral formulas for the price $P(t, T)$ at time $t > 0$ of a bond with maturity $T > 0$ that complete those of the original paper [22], which are shown not to always satisfy the boundary condition $P(T, T) = 1$.

2.1 INTRODUCTION

In the Dothan [22] model, the short term interest rate process $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is modeled according to a geometric Brownian motion

$$dr_t = \lambda r_t dt + \sigma r_t dB_t, \quad (2.1.1)$$

where the volatility $\sigma > 0$ and the drift $\lambda \in \mathbb{R}$ are constant parameters and $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is a standard Brownian motion. In the Dothan model, the short term interest rate r_t remains always positive, while the proportional volatility term σr_t accounts for the sensitivity of the volatility of interest rate changes to the level of the rate r_t .

On the other hand, the Dothan model is the only lognormal short rate model that allows for an analytical formula for the zero coupon bond price

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T,$$

cf. [22], and this model is commonly referenced in the bond pricing literature, cf. e.g. [12]. Other lognormal interest rate models include the Brace Gatarek Musiela or BGM (or BGM) model, better known in the literature as LIBOR market model, see [11].

For convenience of notation we let $p = 1 - 2\lambda/\sigma^2$ and rewrite (2.1.1) as

$$dr_t = (1 - p) \frac{1}{2} \sigma^2 r_t dt + \sigma r_t dB_t, \quad (2.1.2)$$

with solution

$$r_t = r_0 \exp \left(\sigma B_t - p\sigma^2 t/2 \right), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

where $p\sigma/2$ identifies to the market price of risk, cf. e.g. [55], Section 4.2. Because r and B have the same filtration and by the Markov property of $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, the bond price $P(t, T)$ is a function $F(\tau, r_t)$ of r_t and of the time to maturity $\tau = T - t$:

$$P(t, T) = F(\tau, r_t) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.1.3)$$

The zero coupon bond price given in [22], page 64, cf. also [12] page 63, is

$$F(\tau, r) = \frac{x^{p/2}}{\pi^2} e^{-\sigma^2 \tau p^2/8} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty u \sin(ua) e^{-u^2 \sigma^2 \tau/8} \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 du da$$

$$+\frac{2x^{p/2}}{\Gamma(p)}K_p(2\sqrt{x}), \quad (2.1.4)$$

with $x = 2r/\sigma^2$, where

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) > 0,$$

is the Gamma function and

$$K_w(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh z} \cosh(wz) dz = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x \cosh z + wz} dz, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1.5)$$

is the modified Bessel function of the second kind of order $w \in \mathbb{C}$, cf. page 376 of [1] or page 181 of [63]. A proof of (2.1.4) is given in [22] in case $p = 1$, while the argument given therein is not complete in the general case $p \in \mathbb{R}$.

We will show in particular that (2.1.4) does not satisfy the correct initial condition $F(0, r) = 1$ for all values of the parameter p . More precisely it follows from Proposition 2.4.4 below that when $p \in (-1, 0)$ the formula (2.1.4) yields

$$F(0, r) = 1 + \frac{2x^{p/2}}{\Gamma(p)}K_p(2\sqrt{x}) \neq 1,$$

at $\tau = 0$, while (2.1.4) is valid for $p = 1$.

In [64], Proposition 2, the joint probability density of

$$\left(\int_0^\tau e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds, B_\tau \right), \quad \tau > 0,$$

has been computed in the case $\sigma = 2$, cf. also [45]. In the next proposition we restate this result for an arbitrary variance parameter σ after Brownian rescaling. Let $\theta(v, t)$ denote the function defined as

$$\theta(v, t) = \frac{ve^{\pi^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2t)} e^{-v \cosh \xi} \sinh(\xi) \sin(\pi \xi/t) d\xi, \quad v, t > 0. \quad (2.1.6)$$

Proposition 2.1.1 *For all $\tau > 0$ we have*

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\int_0^\tau e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds \in du, B_\tau \in dy \right) \\ = \frac{\sigma}{2} e^{-p\sigma y/2 - p^2\sigma^2 \tau/8} \exp \left(-2 \frac{1 + e^{\sigma y}}{\sigma^2 u} \right) \theta \left(\frac{4e^{\sigma y/2}}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{du}{u} dy, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

$u > 0, y \in \mathbb{R}$.

By computation of the conditional expectation (2.1.3) using (2.1.7) we easily obtain the following result.

Proposition 2.1.2 *The zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$F(\tau, r) = e^{-\sigma^2 p^2 \tau/8} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ur} \exp \left(-\frac{2(1+z^2)}{\sigma^2 u} \right) \theta \left(\frac{4z}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{du}{u} \frac{dz}{z^{p+1}}. \quad (2.1.8)$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}
F(T-t, r_t) &= P(t, T) \\
&= \mathbf{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\exp \left(-r_t \int_t^T e^{\sigma(B_s - B_t) - \sigma^2 p(s-t)/2} ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-r_t u} \mathbb{P} \left(\int_0^\tau e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds \in du, B_\tau \in dy \right),
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

and the conclusion follows from the change of variable $z = e^{\sigma y/2}$, using (2.1.7). $\square$

The above formula involves a triple integral which is difficult to evaluate in practice. In this paper we present alternative representation formulas that involve only double integrals and special functions as in [22], and are more appropriate for numerical computation. We note that related techniques have been applied to the pricing of Asian options, cf. e.g. [7], [14], [24], and references therein.

In Section 2.2 we state the bond pricing PDE satisfied by $F(\tau, r)$ and transform it into a simpler equation with a Sturm-Liouville potential. In Section 2.3 we recover (2.1.8) as the solution of the bond pricing PDE (2.2.1) and state several double integral representations using heat kernels.

As an example, Figure 2.1 provides a numerical comparison between the result of Corollary 2.3.3 below and Relation (2.1.4) as functions of $\tau > 0$ with $r = 0.06$, $\sigma = 0.5$ and $p = -0.8441$, in which the bond price given by (2.1.4) appears to be an underestimate that can become negative and does not match the terminal condition $P(T, T) = 1$.

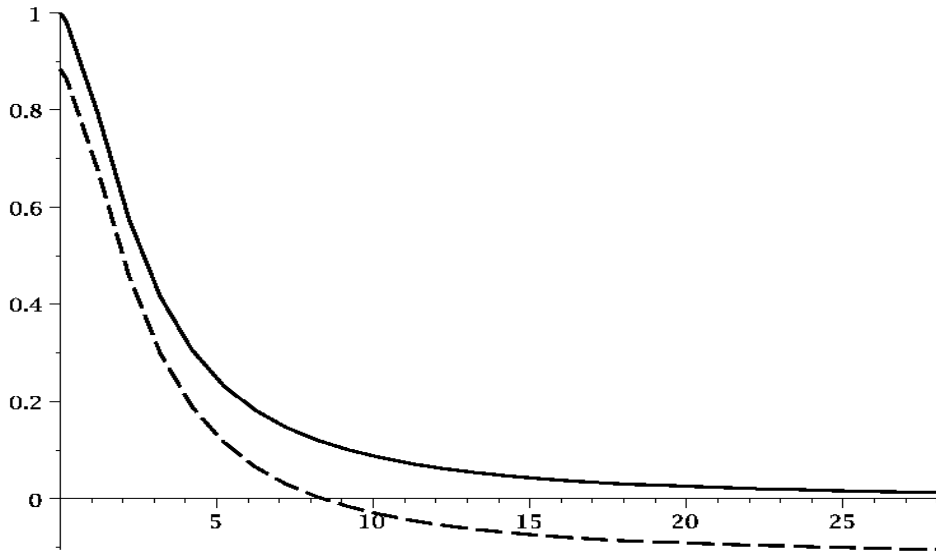


FIG. 2.1 – Comparison between Relations (2.3.7) (straight line) and (2.1.4) (dotted line).

We also prove an analytical formula for the pricing of bond options in Proposition 2.3.4. As can be expected from (2.1.3), tractable expressions for the bond price $P(t, T)$ are more difficult to obtain for large values of $p \in \mathbb{R}$.

In Section 2.4 we present other expressions for $P(t, T)$, which are closer to the original formula (2.1.4) using a heat kernel representation via Gamma functions. This allows us to confirm that the boundary condition $F(0, r) = 1$ is not satisfied by (2.1.4) when $p \in (-1, 0)$. In Proposition 2.4.3 we also obtain another probabilistic interpretation for $P(t, T)$, under the form

$$F(\tau, r) = \Gamma(-p) \frac{2^{3p/2} r^{p/2}}{\pi \sigma^p} e^{-\sigma^2 \tau p^2 / 8} \mathbb{E} \left[Z_p e^{-\sigma^2 \tau Z_p^2 / 8} \sinh(\pi Z_p) K_{iZ_p}(\sqrt{8r}/\sigma) \right],$$

$r > 0$, $\tau > 0$, where Z_p is an hyperbolic cosine random variable with parameter $-p > 0$.

For convenience, some useful identities for special functions that are difficult to find in the literature are proved in the Appendix Section 2.5.

2.2 THE DOTHAN PDE

In this section we transform the bond pricing PDE satisfied by $F(\tau, r)$ into a simpler equation with a Sturm-Liouville potential. By a standard arbitrage argument, or using stochastic calculus and the Markov property applied to $P(t, T)$, one can show that $F(\tau, r)$ satisfies the PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, r) = \frac{1}{2} \sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\tau, r) + \lambda r \frac{\partial F}{\partial r}(\tau, r) - r F(\tau, r) \\ F(0, r) = 1, \quad r \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Let us describe the heat kernel method used in this paper. It is well known that the Black-Scholes PDE

$$\begin{cases} rf(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) + rx \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x), \\ f(T, x) = h(x) \end{cases}$$

can be turned into the standard heat equation

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial t}(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, y) \\ g(0, y) = h(e^{\sigma y}), \end{cases}$$

under the transformation

$$g(t, y) = e^{rt} f(T - t, e^{\sigma y + (\frac{\sigma^2}{2} - r)t}).$$

Here we perform a similar transformation in order to rewrite (2.2.1) as a heat equation with Sturm-Liouville potential.

Proposition 2.2.1 *Let $U(s, y)$ denote the solution of*

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial s}(s, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(s, y) - \frac{1}{2}(e^{2y} + p^2)U(s, y) \\ U(0, y) = e^{-py}, \quad y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Then

$$F(\tau, r) := \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right)^p U \left(\frac{\sigma^2 \tau}{4}, \log \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right) \right)$$

solves (2.2.1).

Proof. Clearly, the condition $U(0, y) = e^{-py}$ is equivalent to $F(0, r) = 1$. Next, under the changes of variables $y = \log(2\sqrt{2r}/\sigma)$ and $s = \sigma^2 \tau / 4$ we get

$$U(s, y) = e^{-py} F(4s/\sigma^2, \sigma^2 e^{2y}/8).$$

Since F is solution of (2.2.1) we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(s, y) - \frac{1}{2}(e^{2y} + p^2)U(s, y) \\ &= e^{-py} \left(\frac{\sigma^4 e^{4y}}{32} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\tau, r) - \frac{(p-1)\sigma^2}{4} e^{2y} \frac{\partial F}{\partial r}(\tau, r) - \frac{e^{2y}}{2} F(\tau, r) \right) \\ &= e^{-py} \left(2r^2 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\tau, r) - 2r(p-1) \frac{\partial F}{\partial r}(\tau, r) - \frac{4r}{\sigma^2} F(\tau, r) \right) \\ &= \frac{4}{\sigma^2} e^{-py} \left(r^2 \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\tau, r) + \lambda r \frac{\partial F}{\partial r}(\tau, r) - r F(\tau, r) \right) \\ &= \frac{4}{\sigma^2} e^{-py} \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, r) \\ &= \frac{\partial U}{\partial s}(s, y). \end{aligned}$$

□

Note that (2.2.2) rewrites as $\frac{\partial U}{\partial s}(s, y) = -\left(H + \frac{p^2}{2}\right) U(s, y)$ where

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} e^{2y}$$

is a Hamiltonian operator with Sturm-Liouville potential, cf. [30], hence the solution $U(s, y)$ of (2.2.2) is given by

$$U(s, y) = e^{-sp^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} q_s(y, x) e^{-px} dx, \quad (2.2.3)$$

where $q_s(x, y)$ is the kernel of $(e^{-sH})_{s \in \mathbb{R}_+}$.

As a consequence the zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right)^p U \left(\frac{\sigma^2 \tau}{4}, \log \left(\frac{2^{3/2} \sqrt{r}}{\sigma} \right) \right) \\ &= \frac{2^p (2r)^{p/2}}{\sigma^p} \exp \left(-\frac{\sigma^2 p^2 \tau}{8} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-py} q_{\sigma^2 \tau/4} \left(\log \left(\frac{2\sqrt{2r}}{\sigma} \right), y \right) dy. \end{aligned}$$

In the sequel we will discuss the use of several integral representations of the kernel $q_t(x, y)$ that can reduce the computation of $F(\tau, r)$ to a double integral, depending on integrability conditions.

2.3 PDE SOLUTION USING BESSEL FUNCTIONS

In this section we recover (2.1.8) using heat kernels, and state other representation formulas for the zero-coupon bond price $P(t, T)$. The heat kernel method will also be used for the integral representations obtained in Section 2.4.

Proposition 2.3.1 *The zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$F(\tau, r) = e^{-\sigma^2 p^2 \tau/8} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(-\frac{4r}{\sigma^2 x} - \frac{x(1+z^2)}{2} \right) \theta \left(xz, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{dx}{x} \frac{dz}{z^{p+1}}, \quad (2.3.1)$$

$r, \tau > 0$.

Proof. From Relation (2.2.3) above and the expression

$$q_t(x, y) = \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\xi}{2} - \frac{e^{2x} + e^{2y}}{2\xi} \right) \theta \left(\frac{e^{x+y}}{\xi}, t \right) \frac{d\xi}{\xi} \geq 0$$

of the kernel of the heat semi-group $(e^{-tH})_{t \in \mathbb{R}_+}$ given in Proposition 2.3.5 below we get

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \frac{2^p (2r)^{p/2}}{\sigma^p} e^{-\sigma^2 p^2 \tau/8} \int_{-\infty}^{\infty} q_{\sigma^2 \tau/4} \left(\log \left(\frac{2\sqrt{2r}}{\sigma} \right), y \right) e^{-py} dy \\ &= e^{-p^2 \sigma^2 \tau/8} \left(\frac{2}{\sigma} \right)^p (\sqrt{2r})^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-py} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi}{2} - \frac{8r/\sigma^2 + e^{2y}}{2\xi}} \theta \left(\frac{2\sqrt{2r}e^y}{\sigma\xi}, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{d\xi}{\xi} dy \\ &= e^{-\sigma^2 p^2 \tau/8} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp \left(-\frac{4r}{\sigma^2 x} - \frac{x(1+z^2)}{2} \right) \theta \left(xz, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) \frac{dx}{x} \frac{dz}{z^{p+1}}, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

after the changes of variables $z = \sigma e^y / (2\sqrt{2r})$ and $x = 8r / (\xi \sigma^2)$. $\square$

Note that (2.3.1) actually involves a triple integral, which can lead to difficult computational issues. In the next corollary we reduce the computation as a double integral under some integrability conditions.

The two following corollaries rely on the identity

$$K_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} \int_0^\infty \exp\left(-u - \frac{z^2}{4u}\right) \frac{du}{u^{\nu+1}}, \quad \nu \in \mathbb{R}, \quad (2.3.3)$$

for modified Bessel functions of the second kind, cf. [63] page 183, provided $\mathcal{R}(z^2) > 0$.

Corollary 2.3.2 *The zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \frac{8\sqrt{r}}{\sigma^2 \sqrt{\pi^3 \tau}} e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8 + 2\pi^2 / (\sigma^2 \tau)} \\ &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2\xi^2 / (\sigma^2 \tau)} \frac{\sinh(\xi) \sin(4\pi\xi / (\sigma^2 \tau))}{\sqrt{(z + \xi)(z + \xi^{-1})}} K_1\left(\sqrt{8r} \sqrt{(z + \xi)(z + \xi^{-1})} / \sigma\right) d\xi \frac{dz}{z^p}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Proof. From Relation (2.2.3) above and the expression of the kernel $q_t(x, y)$ of the heat semi-group $(e^{-tH})_{t \in \mathbb{R}_+}$ given in Proposition 2.3.6 below we get

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \frac{2^p}{\sigma^p} (2r)^{p/2} e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_{-\infty}^\infty q_{\sigma^2 \tau / 4} \left(\log \left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma} \right), y \right) e^{-py} dy \\ &= \frac{2^{p+3} 2^{p/2} r^{(p+1)/2}}{\sigma^{p+2} \sqrt{\pi^3 \tau}} e^{2\pi^2 / (\sigma^2 \tau) - \sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-2u^2 / (\sigma^2 \tau)} \sinh(u) \sin \left(\frac{4\pi u}{\sigma^2 \tau} \right) \\ &\quad \times \frac{K_1 \left(\sqrt{8r / \sigma^2 + e^{2y} + 2e^y \sqrt{8r} (\cosh u) / \sigma} \right)}{\sqrt{8r / \sigma^2 + e^{2y} + 2e^y \sqrt{8r} (\cosh u) / \sigma}} e^{-py} e^y du dy \\ &= \frac{8\sqrt{r}}{\sigma^2 \sqrt{\pi^3 \tau}} e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8 + 2\pi^2 / (\sigma^2 \tau)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2u^2 / (\sigma^2 \tau)} \frac{\sinh(u) \sin(4\pi u / (\sigma^2 \tau))}{\sqrt{1 + 2z \cosh u + z^2}} \\ &\quad K_1 \left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma} \sqrt{1 + 2z \cosh u + z^2} \right) du \frac{dz}{z^p}, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

after the change of variable $z = \sigma e^y / \sqrt{8r}$. $\square$

The next corollary provides an alternative expression for the bond price using a double integral, which is however valid only for $p < 1$. We will use the bound

$$|\theta(v, t)| \leq C(t) v e^{-v}, \quad v, t > 0, \quad (2.3.6)$$

where

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{e^{\pi^2 / (2t)}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty e^{-\xi^2 / (2t)} \sinh(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi^3}} e^{t/2 + \pi^2 / (2t)} \int_0^{\sqrt{t/2}} e^{-x^2} dx < \infty, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Corollary 2.3.3 *The zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p < 1$ by*

$$F(\tau, r) = 2e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^\infty \left(v^2 + 8r / \sigma^2 \right)^{p/2} \theta \left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4} \right) K_p \left(\sqrt{v^2 + 8r / \sigma^2} \right) \frac{dv}{v^{p+1}}. \quad (2.3.7)$$

Proof. From Proposition 2.3.1 and the change of variable $v = zx$ in (2.3.1) for fixed $z > 0$, we get

$$F(\tau, r) = e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^\infty \int_0^\infty \theta\left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) \exp\left(-\frac{v}{2z}(z^2 + 1) - \frac{4rz}{\sigma^2 v}\right) \frac{dv}{v} \frac{dz}{z^{p+1}},$$

then, (2.3.6) leads to

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty \left| \theta\left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) \exp\left(-\frac{v}{2z}(1 + z^2) - \frac{4rz}{\sigma^2 v}\right) \right| \frac{dv}{v} \frac{dz}{z^{p+1}} \\ & \leq C(\sigma^2 \tau / 4) \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v}{2z}(1 + z^2) - \frac{4rz}{\sigma^2 v}\right) dv \frac{dz}{z^{p+1}} \\ & = \frac{4\sqrt{2r}}{\sigma} C(\sigma^2 \tau / 4) \int_0^\infty K_1\left(\sqrt{8r}\sqrt{1 + z^2}/\sigma\right) \frac{z}{z + 1} \frac{dz}{z^{p+1}} \\ & < \infty, \end{aligned}$$

for all $p < 1$, since from [1] page 378 we have

$$K_1(y) \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}.$$

Hence by the Fubini theorem and by Relation (2.3.3) we get

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^\infty \theta\left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v}{2z} - z\left(\frac{v}{2} + \frac{4r}{\sigma^2 v}\right)\right) \frac{dz}{z^{p+1}} \frac{dv}{v} \\ &= 2e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^\infty \theta\left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) \left(v^2 + \frac{8r}{\sigma^2}\right)^{p/2} K_p\left(\sqrt{v^2 + \frac{8r}{\sigma^2}}\right) \frac{dv}{v^{p+1}}. \end{aligned}$$

□

Figure 2.3 provides a numerical comparison between the result (2.3.7) of Corollary 2.3.3 and (2.1.4) as functions of $r > 0$ with $T - t = 10.8$, $\sigma = 0.6$, and $p = -0.48$. Here the bond price given by (2.1.4) may also become negative and does not match the terminal condition $F(0, r) = 1$. In addition it is numerically less stable than (2.3.7), given that the same numerical algorithm has been used for the discretization of integrals.

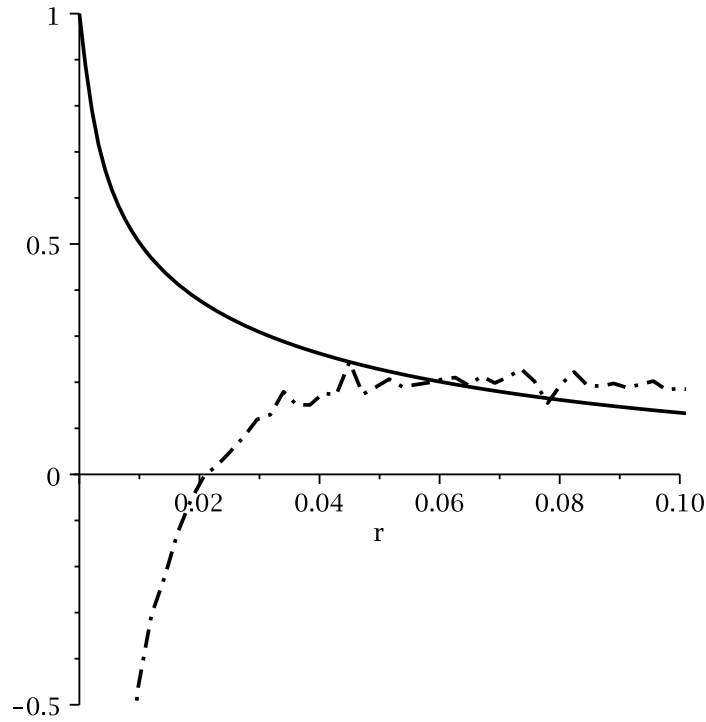


FIG. 2.2 – Comparison between Relations (2.3.7) (straight line) and (2.1.4) (dotted line).

When $r = 0$ we check that, as shown by (2.1.9) and as observed on Figure 2.3, $F(\tau, 0)$ given by (2.3.7) satisfies

$$\begin{aligned}
 F(\tau, 0) &= 2e^{-\sigma^2 p^2 \tau / 8} \int_0^\infty \theta\left(v, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) K_p(v) \frac{dv}{v} \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{\sigma \sqrt{\pi^3 \tau}} \exp\left(\frac{2\pi^2}{\sigma^2 \tau} - \frac{\sigma^2 p^2 \tau}{8}\right) \int_0^\infty \sinh(u) \sin\left(\frac{4\pi u}{\sigma^2 \tau}\right) e^{-2u/\sigma^2 \tau} \int_0^\infty e^{-v \cosh u} K_p(v) dv du \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{\sigma \sin(p\pi) \sqrt{\pi \tau}} \exp\left(\frac{2\pi^2}{\sigma^2 \tau} - \frac{\sigma^2 p^2 \tau}{8}\right) \int_0^\infty \sin\left(\frac{4\pi u}{\sigma^2 \tau}\right) e^{-2u/\sigma^2 \tau} \sinh(pu) du \\
 &= \frac{\sigma \sqrt{\pi \tau}}{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{8}}{\sigma \sin(p\pi) \sqrt{\pi \tau}} \exp\left(\frac{2\pi^2}{\sigma^2 \tau} - \frac{\sigma^2 p^2 \tau}{8}\right) \exp\left(\frac{p^2 \sigma^2 \tau}{8} - \frac{2\pi^2}{\sigma^2 \tau}\right) \sin(p\pi) \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

as long as $p \in (-1, 1)$.

Next, using (2.1.7) and the same argument as in Corollary 2.3.2 we derive an analytical formula for the price

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) h(F(S - T, r_T)) \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T < S,$$

of a bond option with payoff function $h(x)$, using the probability density function (2.1.7).

Proposition 2.3.4 *The price of a bond option with payoff function $h(x)$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) h(F(S - T, r_T)) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{8\sqrt{r_t}}{\sigma^2\sqrt{\pi^3\tau}} e^{2\pi^2/(\sigma^2\tau) - p^2\sigma^2\tau/8} \int_0^\infty z^{-p-1} h(F(S-T, r_t e^{-p\sigma^2\tau/2} z^2)) \\
 &\quad \times \int_0^\infty e^{-2\xi^2/(\sigma^2\tau)} \frac{\sinh(\xi) \sin(4\pi\xi/\sigma^2\tau)}{\sqrt{(z+e^\xi)(z+e^{-\xi})}} K_1\left(\frac{\sqrt{8r_t}}{\sigma} \sqrt{(z+e^\xi)(z+e^{-\xi})}\right) d\xi dz.
 \end{aligned}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}
 &\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) h(F(S-T, r_T)) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\exp \left(-r_t \int_t^T e^{\sigma(B_s-B_t) - p^2\sigma^2(s-t)/2} ds \right) h(F(S-T, r_t e^{-p\sigma^2(T-t)/2 + \sigma(B_T-B_t)})) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= \frac{\sigma}{2} e^{-p^2\sigma^2\tau/8} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-r_t u - p\sigma y/2} h(F(S-T, r_t e^{-p\sigma^2\tau/2} e^{\sigma y})) e^{-\frac{2(1+e^{\sigma y})}{\sigma^2 u}} \theta \left(\frac{4e^{\sigma y/2}}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2\tau}{4} \right) \frac{du dy}{u} \\
 &= e^{-p^2\sigma^2\tau/8} \int_0^\infty z^{-p-1} \int_0^\infty e^{-r_t u} h(F(S-T, r_t e^{-p\sigma^2\tau/2} z^2)) e^{-2\frac{1+z^2}{\sigma^2 u}} \theta \left(\frac{4z}{\sigma^2 u}, \frac{\sigma^2\tau}{4} \right) \frac{du}{u} dz \\
 &= e^{-p^2\sigma^2\tau/8} \int_0^\infty z^{-p-1} \int_0^\infty e^{-4r_t/\sigma^2 v} h(F(S-T, r_t e^{-p\sigma^2\tau/2} z^2)) e^{-v(1+z^2)/2} \theta \left(vz, \frac{\sigma^2\tau}{4} \right) \frac{dv}{v} dz \\
 &= \frac{8\sqrt{r_t}}{\sigma^2\sqrt{\pi^3\tau}} e^{2\pi^2/(\sigma^2\tau) - p^2\sigma^2\tau/8} \int_0^\infty z^{-p-1} h(F(S-T, r_t e^{-p\sigma^2\tau/2} z^2)) \\
 &\quad \times \int_0^\infty e^{-2\xi^2/(\sigma^2\tau)} \frac{\sinh(\xi) \sin(4\pi\xi/\sigma^2\tau)}{\sqrt{1+2z \cosh \xi + z^2}} K_1\left(\frac{\sqrt{8r_t}}{\sigma} \sqrt{1+2z \cosh \xi + z^2}\right) d\xi dz,
 \end{aligned}$$

after the changes of variable $z = e^{\sigma y}/2$ and $v = 4/(\sigma^2 u)$. $\square$

The expression of the heat kernel given in the next proposition has been used in Proposition 2.3.1.

Proposition 2.3.5 *The kernel $q_t(x, y)$ of the semi-group $(e^{-tH})_{t \in \mathbb{R}_+}$ is given by*

$$q_t(x, y) = \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\xi}{2} - \frac{e^{2x} + e^{2y}}{2\xi} \right) \theta \left(\frac{e^{x+y}}{\xi}, t \right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad t \geq 0, \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (2.3.8)$$

Proof. From Lemma 2.5.1 in the Appendix and the relation for the product $I_\mu(x)K_\mu(y)$ of modified Bessel functions of [25] page 53, the Green function $G(x, y; p)$ of $H + p^2/2$ satisfies

$$\begin{aligned}
 G(x, y; p) &= 2I_p(x)K_p(y) \\
 &= \int_0^\infty e^{-\xi/2 - (x^2+y^2)/2\xi} I_p \left(\frac{xy}{\xi} \right) \frac{d\xi}{\xi} \\
 &= \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\xi}{2} - \frac{x^2+y^2}{2\xi} \right) I_p \left(\frac{xy}{\xi} \right) \frac{d\xi}{\xi} \\
 &= \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\xi}{2} - \frac{x^2+y^2}{2\xi} \right) \int_0^\infty e^{-p^2 t/2} \theta \left(\frac{xy}{\xi}, t \right) dt \frac{d\xi}{\xi} \\
 &= \int_0^\infty e^{-p^2 t/2} \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\xi}{2} - \frac{x^2+y^2}{2\xi} \right) \theta \left(\frac{xy}{\xi}, t \right) \frac{d\xi}{\xi} dt, \quad 0 < x \leq y,
 \end{aligned}$$

where we used the relation

$$I_p(r) = \int_0^\infty e^{-p^2 t/2} \theta(r, t) dt, \quad r > 0, \quad p \in \mathbb{R}_+, \quad (2.3.9)$$

cf. page 342 of [45].

We conclude by Laplace transform inversion via the relation

$$G(x, y; p) = \int_0^\infty e^{-p^2 t/2} q_t(x, y) dt, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (2.3.10)$$

which follows from

$$\left(H + \frac{p^2}{2}\right)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t p^2/2} e^{-t H} dt.$$

□

The next proposition has been used in the proof of Corollary 2.3.2.

Proposition 2.3.6 *The kernel $q_t(x, y)$ of the semi-group $(e^{-tH})_{t \in \mathbb{R}_+}$ is given by*

$$\begin{aligned} q_t(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi^3 t}} e^{x+y+\pi^2/(2t)} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2t)} \frac{K_1\left(\sqrt{(e^{x-\xi} + e^y)(e^{x+\xi} + e^y)}\right)}{\sqrt{(e^{x-\xi} + e^y)(e^{x+\xi} + e^y)}} \sinh(\xi) \sin\left(\frac{\pi \xi}{t}\right) d\xi, \\ t &\geq 0, x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proof. From Proposition 2.3.5 and the definition (2.1.6) of $\theta(v, t)$, the integrand defining $q_t(x, y)$ in (2.3.8) as a double integral belongs to $L^1(\mathbb{R}_+^2)$ since it is bounded by

$$(u, \xi) \mapsto \frac{1}{\xi^2} \frac{e^{x+y}}{\sqrt{2\pi^3 t}} e^{(\pi^2 - u^2)/(2t)} \sinh(u) \exp\left(-\frac{\xi}{2} - \frac{e^{2x} + e^{2y}}{2\xi}\right).$$

Next, from the Fubini theorem we have

$$\begin{aligned} q_t(x, y) &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi}{2} - \frac{e^{2x} + e^{2y}}{2\xi}\right) \theta\left(\frac{e^{x+y}}{\xi}, t\right) \frac{d\xi}{\xi} \\ &= \int_0^\infty \exp\left(-\frac{e^{x+y}}{2v} - v \frac{e^{2x} + e^{2y}}{2e^{x+y}}\right) \theta(v, t) \frac{dv}{v} \\ &= \frac{e^{\pi^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2t)} \sin(\pi \xi/t) \sinh(\xi) \\ &\quad \int_0^\infty \exp\left(-\frac{e^{x+y}}{2v} - v \frac{e^{2x} + 2e^{x+y} \cosh \xi + e^{2y}}{2e^{x+y}}\right) dv d\xi, \end{aligned}$$

Fix $\xi > 0$, then from (2.3.3) and the change of variable $2v = e^{x+y}/u$, we obtain

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \exp\left(-\frac{e^{x+y}}{2v} - v \frac{e^{2x} + 2e^{x+y} \cosh \xi + e^{2y}}{2e^{x+y}}\right) dv \\ &= \frac{e^{x+y}}{2} \int_0^\infty \exp\left(-u - \frac{e^{2x} + 2e^{x+y} \cosh \xi + e^{2y}}{4u}\right) \frac{du}{u^2} \\ &= 2e^{x+y} \frac{K_1\left(\sqrt{e^{2x} + 2e^{x+y} \cosh \xi + e^{2y}}\right)}{\sqrt{e^{2x} + 2e^{x+y} \cosh \xi + e^{2y}}}, \end{aligned}$$

hence the proposition. □

2.4 PDE SOLUTION USING THE GAMMA FUNCTION

In this section we derive another integral representation for the solution of the bond pricing PDE for $p \in (-\infty, 0)$, which is closer to Dothan's original formula (2.1.4). Clearly

for $p < 0$ this result does not coincide with Dothan's (2.1.4) due to the absence of the Bessel function term $\frac{2x^{p/2}}{\Gamma(p)}K_p(2\sqrt{x})$ in formula (2.4.2) below.

Using the integral representation (2.4.5) of the kernel $q_t(x, y)$ proved in Proposition 2.4.5 below we directly obtain the following proposition.

Proposition 2.4.1 *The zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$F(\tau, r) = \frac{2^{p+1}(\sqrt{2r})^p}{\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty e^{-py} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) e^{-u^2 \sigma^2 \tau / 8} K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) K_{iu}(e^y) dy du, \quad (2.4.1)$$

$r > 0, \tau > 0$.

From a computational point of view the above formula actually involves a triple integral of a Bessel function, which can be simplified to a double integral of a Gamma function under some additional conditions on p . Note the absence of the additional Bessel function term in (2.4.2) below compared to (2.1.4).

Corollary 2.4.2 *The zero-coupon bond price $P(t, T) = F(T - t, r_t)$ is given for all $p < 0$ by*

$$F(\tau, r) = \frac{x^{p/2}}{\pi^2} e^{-p^2 s / 4} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty u e^{-u^2 s / 4} \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 \sin(ua) du da, \quad (2.4.2)$$

$r > 0, \tau > 0$, with $x = 2r/\sigma^2$ and $s = \sigma^2 \tau / 2$.

Proof. First, from (2.4.1), after the change of variable $z = e^y$, we notice that

$$F(\tau, r) = r^{p/2} \frac{2^{1+3p/2}}{\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty \int_0^\infty u e^{-\sigma^2 u^2 \tau / 8} \sinh(\pi u) K_{iu}(z) K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) du \frac{dz}{z^{p+1}},$$

and we note from that Lemma 2.5.2 in the Appendix Section 2.5 we have

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{z^{p+1}} \int_0^\infty \left| u e^{-\sigma^2 u^2 \tau / 8} \sinh(\pi u) K_{iu}(z) K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) \right| du dz \\ & \leq C \int_0^\infty u e^{-\sigma^2 u^2 \tau / 8} \sinh(\pi u) du \times \sup_{w \in \mathbb{R}_+} \int_0^\infty z^{-p-1} \left| K_{iw}(z) \right| dz \\ & < \infty, \end{aligned}$$

where $C > 0$ is a constant. From this bound we can apply the Fubini theorem, hence from Proposition 2.4.1 and Relation (2.5.1) below we get

$$\begin{aligned} F(\tau, r) &= \frac{2^{p+1}(\sqrt{2r})^p}{\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) e^{-u^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_{-\infty}^\infty K_{iu}(e^y) e^{-py} dy du \\ &= \frac{2^{p+1}(\sqrt{2r})^p}{\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) e^{-u^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty K_{iu}(x) \frac{dx}{x^{p+1}} du \\ &= \frac{(\sqrt{2r})^p}{2\pi^2 \sigma^p} e^{-p^2 \sigma^2 \tau / 8} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) K_{iu}(\sqrt{8r}/\sigma) e^{-u^2 \sigma^2 \tau / 8} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 du, \\ &= \frac{x^{p/2}}{2\pi^2} e^{-s p^2 / 4} \int_0^\infty u e^{-s u^2 / 4} \sinh(\pi u) K_{iu}(2\sqrt{x}) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 du \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$= \frac{x^{p/2}}{\pi^2} e^{-sp^2/4} \int_0^\infty u e^{-su^2/4} \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \sin(ua) da \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 du,$$

which yields (2.4.2) for all $p < 0$, where $x = \sqrt{2r}/\sigma$ and we used the integral representation of Lemma 2.5.3 in the Appendix. $\square$

In the next proposition we obtain another probabilistic representation of the bond price which can be useful for Monte Carlo estimation, using the hyperbolic cosine distribution with characteristic function $u \mapsto (\cosh u)^p$, cf. [26], page 476, for $p = -1$, and [53] for $p < 0$.

Proposition 2.4.3 *For all $p < 0$ we have*

$$F(\tau, r) = \Gamma(-p) \frac{2^{3p/2} r^{p/2}}{\pi \sigma^p} e^{-\sigma^2 \tau p^2 / 8} \mathbb{E} \left[Z_p e^{-\sigma^2 \tau Z_p^2 / 8} \sinh(\pi Z_p) K_{iZ_p}(\sqrt{8r}/\sigma) \right],$$

$r > 0$, $\tau > 0$, where Z_p is an hyperbolic cosine random variable with parameter $-p$.

Proof. We use Relation (2.4.3) above and Relation (2.5.2) in the Appendix, which shows that the density of Z_p is given by

$$u \mapsto \frac{2^{-p-2}}{\pi \Gamma(-p)} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} - i\frac{u}{2}\right) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuy} (\cosh y)^p dy, \quad u \in \mathbb{R}.$$

$\square$

In Proposition 2.4.4 below we check in addition that the condition $F(0, r) = 1$ is satisfied by (2.4.1) for all $p \in (-1, 0)$, which confirms that Dothan's formula (2.1.4) does not satisfy the correct boundary condition for any $r > 0$, although it satisfies $F(\tau, 0) = 1$ for all $p \geq 0$ and $\tau \geq 0$. More precisely, the formula (2.1.4) of Dothan satisfies

$$F(0, r) = 1 + \frac{2^{p/2+1} r^{p/2}}{\sigma^p \Gamma(p)} K_p\left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma}\right) \neq 1, \quad p < 0. \quad (2.4.4)$$

Proposition 2.4.4 *For all $p \in (-1, 0)$, the function $F(T - t, r)$ given by (2.4.2) satisfies the initial condition $F(0, r) = 1$ for all $r \geq 0$.*

Proof. From (2.4.2) taken at $\tau = 0$ we have, using Relation (2.5.2) in the appendix,

$$\begin{aligned} F(0, r) &= \frac{x^{p/2}}{\pi^2} \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty u \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 \sin(ua) du da \\ &= x^{p/2} \frac{2^{p+1}}{\pi^2} \Gamma(-p) \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_0^\infty u \sin(ua) \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (\cosh y)^p e^{iuy} dy du da \\ &= x^{p/2} \frac{2^p}{\pi^2} \Gamma(-p) \int_0^\infty \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \int_{-\infty}^\infty u \sin(ua) \cosh\left(\frac{\pi u}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} (\cosh y)^p e^{iuy} dy du da, \end{aligned}$$

for all $r \geq 0$. From the Fourier transform

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^\infty u \sin(ua) \cosh(\pi u/2) e^{iuy} du dy \\ &= \frac{\pi}{2} (\delta'_{-a+i\pi/2}(dy) + \delta'_{-a-i\pi/2}(dy) - \delta'_{a+i\pi/2}(dy) - \delta'_{a-i\pi/2}(dy)), \end{aligned}$$

in distribution sense, where $\delta'_b(dy)$ is the derivative of the Dirac distribution at $b \in \mathbb{C}$, we get

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \sin(ua) \cosh(\pi u/2) e^{iyu} (\cosh y)^p dy du \\
 &= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\cosh(y - i\pi/2))^p \delta'_{-a}(dy) + \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\cosh(y + i\pi/2))^p \delta'_{-a}(dy) \\
 &\quad - \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\cosh(y - i\pi/2))^p \delta'_a(dy) - \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\cosh(y + i\pi/2))^p \delta'_a(dy) \\
 &= -\pi p \sinh(a + i\pi/2) (\cosh(a + i\pi/2))^{p-1} - \pi p \sinh(a - i\pi/2) (\cosh(a - i\pi/2))^{p-1} \\
 &= -p\pi \cosh a (\sinh a)^{p-1} (e^{ip\pi/2} + e^{-ip\pi/2}) \\
 &= -2p\pi \cosh a (\sinh a)^{p-1} \cos(p\pi/2),
 \end{aligned}$$

and as a consequence we have

$$F(0, r) = -\frac{2^{p+1}}{\pi} p \Gamma(-p) \cos(p\pi/2) x^{p/2} \int_0^{\infty} (\sinh(a))^{p-1} \sin(2\sqrt{x} \sinh a) \cosh a da.$$

The change of variable $u = 2\sqrt{x} \sinh a$ leads to

$$\begin{aligned}
 F(r, 0) &= -\frac{2}{\pi} p \Gamma(-p) \cos(p\pi/2) x^{p/2} \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{\sqrt{x}} \right)^{p-1} \sin(u) \frac{du}{\sqrt{x}} \\
 &= -\frac{2}{\pi} p \Gamma(-p) \cos(p\pi/2) \int_0^{\infty} u^{p-1} \sin(u) du \\
 &= -\frac{2^p}{\sqrt{\pi}} p \Gamma(-p) \cos(p\pi/2) \frac{\Gamma((1+p)/2)}{\Gamma(1-p/2)},
 \end{aligned}$$

where the latter integral converges only for $p \in (-1, 1)$, which is the case here since $-1 < p < 0$. Finally from Legendre's duplication formulae

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{p-1}} \Gamma(p) = \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right), \quad \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi p/2)}, \quad p \Gamma(p) \Gamma(-p) = \frac{-\pi}{\sin(\pi p)},$$

cf. [25] pages 3-5, we find

$$F(0, r) = -\frac{2p\Gamma(-p)\Gamma(p)\cos(\pi p/2)}{\Gamma(p/2)\Gamma(1-p/2)} = \frac{2\cos(\pi p/2)\sin(\pi p/2)}{\sin(\pi p)} = 1.$$

□

In addition for $p < 0$ we have the equivalence

$$F(r, \tau) \underset{\tau \rightarrow 0}{\sim} e^{-\sigma^2 \tau p^2 / 8}, \quad r > 0.$$

In the next proposition we compute the expression of the heat kernel used in the proof of Proposition 2.4.1.

Proposition 2.4.5 For $t > 0$ and $x, y \in \mathbb{R}$, the kernel $q_t(x, y)$ is given by

$$q_t(x, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} u e^{-u^2 t / 2} \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) du. \quad (2.4.5)$$

Proof. From Lemma 2.5.1 and the relation

$$I_{|p|}(e^{\min(x,y)}) K_{|p|}(e^{\max(x,y)}) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{u}{u^2 + p^2} \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) du,$$

$p \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cf. [30] page 228, we have

$$G(x, y; p) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{u}{u^2 + p^2} \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) du. \quad (2.4.6)$$

By inversion of the Laplace transform

$$G(x, y; p) = \int_0^\infty e^{-p^2 t/2} q_t(x, y) dt, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

of Relation (2.3.10) and using the Fubini theorem, we get

$$\begin{aligned} q_t(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt} G(x, y; \sqrt{2z}) dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{izt} G(x, y; \sqrt{2iz}) dz \\ &= \frac{2}{\pi^3} \int_{-\infty}^\infty e^{izt} \int_0^\infty \frac{u}{u^2 + 2iz} \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) du dz \\ &= \frac{2}{\pi^3} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) K_{iu}(e^y) K_{iu}(e^x) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{izt}}{u^2 + 2iz} dz du, \end{aligned}$$

and the last integral can be computed as the Fourier transform

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{izt}}{u^2 + 2iz} dz = \pi e^{-u^2 t/2}, \quad u > 0.$$

□

Remark The latter Proposition shows a deep connection between the distribution of an exponential functional with drift and the *Kantorovich-Lebedev transform* (see [41] or 9.6-3 p.516 in [54]). It is indeed defined on $\mathbb{R}_+$ for a given function f by

$$F(\mu) = \int_0^\infty K_{i\mu}(x) f(x) dx,$$

with the *Kantorovich-Lebedev inversion formula*

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2 x} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) K_{iu}(x) F(u) du, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

2.5 APPENDIX

In this appendix we state and prove some useful identities for special functions that are not easy to find in the literature and have been used in the previous sections.

Lemma 2.5.1 *The Green kernel associated to the operator $(H + p^2/2)^{-1}$ is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$G(x, y; p) = 2I_{|p|}(e^x) K_{|p|}(e^y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Proof. For simplicity it suffices to consider the case $p \geq 0$. Let

$$\tilde{G}(x, y; p) = 2y^{p+1} x^{-p} I_p(x) K_p(y), \quad 0 < x \leq y,$$

denote the Green function associated to

$$G_p = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{2x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2},$$

cf. [10], page 115, where I_μ is the modified Bessel function of the first kind and order μ .

Next we note that for all smooth functions f and g on $\mathbb{R}$ we have

$$(\mathbb{G}_p f)(e^y) = -e^{-(p+2)y} \left(H + \frac{p^2}{2} \right) (e^{py} f(e^y)),$$

and

$$\left(\left(H + \frac{p^2}{2} \right)^{-1} g \right) (\log x) = x^p \mathbb{G}_p^{-1}(z^{-p-2} g(\log z)),$$

hence

$$\begin{aligned} \int_0^\infty G(x, y; p) g(x) dx &= \left(H + \frac{p^2}{2} \right)^{-1} g(y) \\ &= e^{py} \mathbb{G}_p^{-1}(y^{-p-2} g(\log y)) \\ &= e^{py} \int_0^\infty \tilde{G}(x, e^y; p) x^{-p-2} g(\log x) dx \\ &= e^{py} \int_{-\infty}^\infty e^{-(p+1)x} \tilde{G}(e^x, e^y; p) g(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

and

$$G(x, y; p) = e^{px} e^{-(p+1)y} \tilde{G}(e^x, e^y; p) = 2I_p(e^x) K_p(e^y).$$

□

Lemma 2.5.2 For all $w \in \mathbb{R}$ and $p < 0$ we have

$$\sup_{w \in \mathbb{R}_+} \int_0^\infty |K_{iw}(t)| \frac{dt}{t^{1+p}} < \infty$$

and the integral representations

$$\left| \Gamma \left(-\frac{p}{2} - i\frac{w}{2} \right) \right|^2 = \frac{1}{2^{-2-p}} \int_0^\infty t^{-1-p} K_{iw}(t) dt, \quad \omega \in \mathbb{R}, \quad (2.5.1)$$

and

$$\left| \Gamma \left(-\frac{p}{2} + i\frac{\mu}{2} \right) \right|^2 = 2^{p+1} \Gamma(-p) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} (\cosh y)^p dy, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.5.2)$$

Proof. Lemma 2.5.2 recalls integral representations for the square modulus of the Gamma function (see [1] p.668 or Relation (6.561.16) p 676 of [29]). We first check the integrability condition. Note that for all $\alpha > 0$, there exists a constant $c_\alpha > 0$ such that $\cosh x > c_\alpha x^\alpha$ for all $x > 0$. Let $\alpha > 1$ and $0 < \beta \leq 1$, then from (2.1.5) and for all $p, w \in \mathbb{R}$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |K_{iw}(t)| \frac{dt}{t^{1+p}} &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t \cosh x} dx \frac{dt}{t^{1+p}} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^\infty e^{-tc_\alpha x^\alpha} dx \frac{dt}{t^{1+p}} + \int_1^\infty \int_0^\infty e^{-tc_\beta x^\beta} dx \frac{dt}{t^{1+p}} \\ &= \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha (c_\alpha)^{1/\alpha}} \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+p+1/\alpha}} + \frac{\Gamma(1/\beta)}{\beta (c_\beta)^{1/\beta}} \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1+p+1/\beta}} \\ &= C(\alpha) \int_0^1 \frac{dt}{t^{1+p+1/\alpha}} + C(\beta) \int_1^\infty \frac{dt}{t^{1+p+1/\beta}}. \end{aligned}$$

Since $\alpha, \beta > 0$ can be chosen arbitrarily, it follows that for all $p < 0$, the integrand $t \mapsto t^{-1-p} K_{iw}(t)$ is in $L^1(\mathbb{R}_+)$, uniformly in $w \in \mathbb{R}$. Then from the integral representation of Bessel functions given in [63] page 183, we have

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty K_{iw}(t) \frac{dt}{t^{1+p}} &= 2^{-iw-1} \int_0^\infty t^{-1-p+iw} \int_0^\infty \exp\left(-x - \frac{t^2}{4x}\right) x^{-iw-1} dx dt \\
 &= 2^{-iw-1} \int_0^\infty x^{-iw-1} e^{-x} \int_0^\infty t^{-1-p+iw} e^{-\frac{t^2}{4x}} dt dx \\
 &= 2^{-2-p} \int_0^\infty x^{-iw-1} e^{-x} x^{-1-p/2+iw/2} \int_0^\infty u^{-1-p/2+iw/2} e^{-u} du dx \\
 &= 2^{-2-p} \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{w}{2}\right) \int_0^\infty x^{-1-p/2-iw/2} e^{-x} dx \\
 &= 2^{-2-p} \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{w}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2} - i\frac{w}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Finally, from (2.1.5) we note that

$$\begin{aligned}
 \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{\mu}{2}\right) \right|^2 &= 2^{p+2} \int_0^{+\infty} t^{-p-1} K_{i\mu}(t) dt \\
 &= 2^{p+1} \int_0^\infty t^{-p-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t \cosh y + i\mu y} dy dt \\
 &= 2^{p+1} \Gamma(-p) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu y} (\cosh y)^p dy, \quad \mu \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

□

Lemma 2.5.3 *We have the integral representation*

$$K_{i\mu}(z) = \frac{1}{\sinh(\pi\mu/2)} \int_0^{+\infty} \sin(z \sinh t) \sin(\mu t) dt, \quad z \in \mathbb{R}_+, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.5.3)$$

Proof. For all $v \in \mathbb{C}$ with $\mathcal{R}(v) \in (-1, 1)$ and for $z \in \mathbb{R}_+^*$, we have

$$\begin{aligned}
 K_v(z) &= \frac{1}{2} e^{-v i \pi / 2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t - vt} dt, \\
 K_v(z) &= \frac{1}{2} e^{v i \pi / 2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz \sinh t - vt} dt,
 \end{aligned}$$

cf. page 182 of [63]. In the particular case $v = i\mu$, with $\mu \geq 0$ we have

$$K_{i\mu}(z) = \frac{1}{2} e^{\mu \pi / 2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t - i\mu t} dt$$

and

$$K_{i\mu}(z) = \frac{1}{2} e^{-\mu \pi / 2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t + i\mu t} dt,$$

which leads to

$$(2e^{\mu \pi / 2} - 2e^{-\mu \pi / 2}) K_{i\mu}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t} (e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}) dt,$$

and

$$K_{i\mu}(z) = \frac{i}{2 \sinh(\pi\mu/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t} \sin(\mu t) dt.$$

Finally, (2.5.3) is obtained by separation of the real and imaginary parts in the latter integral. □

Remark

The result of Corollary 2.4.2 can be extended to all $p \in \mathbb{R}$ using spectral expansions for the Fokker-Planck equation, cf. [52] and the references therein.

FONCTIONNELLES EXPONENTIELLES DU MOUVEMENT BROWNIEN

3

SOMMAIRE

3.1	INTRODUCTION	51
3.2	MAIN RESULT AND ITS CONSEQUENCES	54
3.3	INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BESSEL FUNCTIONS	56
3.4	APPENDIX	62

Ce chapitre, écrit en collaboration avec Nicolas Privault, fait l'objet d'un article intitulé *A direct solution to the Fokker-Planck equation for exponential Brownian functionals* et publié dans la revue *Analysis and Applications*, [52].

Abstract

The solution of the Fokker-Planck equation for exponential Brownian functionals usually involves spectral expansions that are difficult to compute explicitly. In this paper we propose a direct solution based on heat kernels and a new integral representation for the square modulus of the Gamma function. A financial application to bond pricing in the Dothan model is also presented.

3.1 INTRODUCTION

Brownian exponential functionals of the form

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t e^{\sigma W_s - \sigma^2 s/2 + \lambda s} ds, \quad t \geq 0,$$

where $(W_s)_{s \in \mathbb{R}_+}$ is a standard Brownian motion, play an important role in the statistical physics of disordered systems where $\mathcal{A}_t$ is the partition function and $\log \mathcal{A}_t$ represents the free energy of the system. It is also used in financial mathematics for the pricing of Asian options and of bonds, cf. e.g. [7], [14], [24], [50], and references therein.

The Laplace transform

$$F(t, x) = E \left[\exp \left(-x \int_0^t e^{\sigma W_s - \sigma^2 s/2 + \lambda s} ds \right) \right], \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

of $\mathcal{A}_t$ is known to solve the PDE

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) + \lambda x \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) - x F(t, x) \\ F(0, x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (3.1.1)$$

and the probability density $\Psi(t, y)$ of $\mathcal{A}_t$, defined by

$$F(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-xy} \Psi(t, y) dy, \quad x, t \in \mathbb{R}_+,$$

satisfies the Fokker-Planck equation

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, y) = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^2 \Psi(t, y)) - \lambda \frac{\partial}{\partial y} (y \Psi(t, y)) - \frac{\partial \Psi}{\partial y}(t, y), \\ \Psi(0, y) = \delta_0(y). \end{cases} \quad (3.1.2)$$

The solution of (3.1.2) has been given in [59] using spectral expansions, and this solution is commonly used in the mathematical physics literature, cf. e.g. [17], [18], [19] and references therein, as well as in finance [44].

However, the full derivation of the normalization constants in the continuous spectrum was not presented in [59], cf. page 1641 therein, due to severe analytical difficulties in

the computation of the normalization constants in the spectral expansion via the use of Meijer functions. Recently a computation of the spectral expansion has been given in [44] using a limiting procedure, nevertheless this method relies on a complex and delicate limiting argument.

In this paper we propose a direct solution to (3.1.1) and (3.1.2) via a simple argument based on heat kernels and a new integral representation (3.1.9) for the square modulus of the Gamma function. This approach relies on asymptotic expansions, cf. Lemma 3.3.1, and on combinatorial identities for modified Bessel functions such as

$$\sum_{k=0}^p \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{N},$$

cf. Relation (3.3.9) below, which might be of independent interest.

Under the change of variable

$$F_p(t, x) := \left(\frac{\sqrt{8x}}{\sigma} \right)^p U_p \left(\frac{\sigma^2 t}{8}, \frac{\sqrt{8x}}{\sigma} \right), \quad x, t > 0, \quad (3.1.3)$$

and $p = 1 - 2\lambda/\sigma^2$, we can rewrite (3.1.1) as the modified Bessel heat equation

$$\begin{cases} \frac{\partial U_p}{\partial s}(s, y) = (H - p^2) U_p(s, y), & s, y > 0, \\ U_p(0, y) = y^{-p}, \end{cases} \quad (3.1.4)$$

where H is the operator

$$H = y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + y \frac{\partial}{\partial y} - y^2,$$

which is known to admit the modified Bessel function

$$K_w(t) = \int_0^\infty e^{-t \cosh x} \cosh(wx) dx, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.1.5)$$

of the second kind with parameter $w \in \mathbb{C}$ as eigenvector with corresponding eigenvalue w^2 (see e.g. [63] or [6]).

Using the integral representation (3.4.2) of the kernel $q_t(x, y)$ of $(e^{tH})_{t \in \mathbb{R}_+}$ proved in Proposition 3.4.2 below, the solution

$$U_p(s, y) = e^{-p^2 s} \int_{-\infty}^\infty U_p(0, x) q_s(x, y) dx \quad (3.1.6)$$

of (3.1.4) is given by

$$U_p(s, y) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty U_p(0, x) \int_0^\infty u \sinh(\pi u) e^{-(p^2+u^2)s} K_{iu}(x) K_{iu}(y) du \frac{dx}{x}, \quad (3.1.7)$$

$z \in \mathbb{R}, s > 0$. As noted in Relation (3.6) page 640 of [17] and in Corollary 3.2 of [50], when $U_p(0, y) = y^{-p}$ and $p < 0$, the Fubini theorem can be used to derive the expression

$$U_p(s, y) = \frac{2^{-p-1}}{\pi^2} \int_0^\infty u e^{-(p^2+u^2)s} \sinh(\pi u) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}(y) du,$$

based on the integral representation

$$\left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 = 4 \int_0^\infty \left(\frac{2}{y}\right)^{-p} K_{is}(y) dy, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (3.1.8)$$

which is only true for $p < 0$ due to integrability restrictions, cf. Lemma 3.4.1 in the Appendix. In case $p > 0$, the Fubini theorem does not apply and one generally relies on the spectral expansion of the density $\Psi(s, y)$, cf. [17], page 640. Here the problem amounts to decompose the initial condition y^{-p} into an integral series of Bessel eigenfunctions K_ω of H . However, although

$$H = y \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial}{\partial y} \right) - y^2$$

is formally self-adjoint with respect to dy/y , the computation of this expansion involves several divergent terms, cf. Relation (3.2.3) below.

In this paper we give a simple solution to (3.1.1) by noting that the Fubini theorem can still be applied when $p > 0$, provided we use the extension

$$\left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 = 4 \int_0^\infty \left(\frac{2}{x}\right)^p K_{is}(x) \left(1 - \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(x) \right) \frac{dx}{x} \quad (3.1.9)$$

of (3.1.8) to all $p + is \in \mathbb{C}$, $p \notin \mathbb{Z}$, proved in Corollary 3.3.4 below, where $x! = \Gamma(x+1) \in (0, \infty]$, $x \in \mathbb{R}$, denotes the generalized factorial. In particular this allows us to recover the complete spectral expansion of the Hamiltonian H in a simple way, as shown in Proposition 3.2.1 below.

The remaining of this paper is organised as follows. In Section 3.2 we present the main result and its proof, with a financial application to bond pricing in the Dothan model, extending to $p > 0$ the expansions given in [50]. In Section 3.3 we prove the integral representation (3.1.9) and the associated integrability property using combinatorial arguments and analytic continuation. The results of Section 3.3 may be already known, but, since we were not able to find them in the literature, we provide their complete proofs. In the Appendix Section 3.4 we derive some identities for special functions that are used in the paper and might also be difficult to find in the literature.

3.2 MAIN RESULT AND ITS CONSEQUENCES

In the next proposition we provide a simple derivation of the spectral expansion of H using Relation (3.1.9) which is proved in the next sections.

Proposition 3.2.1 *The solution $U_p(s, y)$ of (3.1.4) is given for all $p \in \mathbb{R}$ by*

$$\begin{aligned} U_p(s, y) &= \frac{2^{-p}}{2\pi^2} \int_0^\infty u e^{-(p^2+u^2)s} \sinh(\pi u) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}(y) du \\ &\quad + 2^{-p} \sum_{k=0}^\infty \frac{2(p-2k)^+}{k!(p-k)!} e^{4k(k-p)s} K_{p-2k}(y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Proof. From the integrability property established in Lemma 3.3.2 below we may apply the Fubini theorem, hence from (3.1.6), (3.1.7) and the integral representation (3.1.9) of Corollary 3.3.4 we get, for $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ and $s \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} U_p(s, y) &= e^{-p^2s} \int_0^\infty x^{-p} q_s(x, y) dx \\ &= e^{-p^2s} \int_0^\infty x^{-p} q_s(x, y) \left(1 - \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(x) \right) dx \\ &\quad + e^{-p^2s} \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} \int_0^\infty q_s(x, y) K_{p-2m}(x) dx \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) K_{iu}(y) e^{-(p^2+u^2)s} \\ &\quad \times \int_0^\infty x^{-p} K_{iu}(x) \left(1 - \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(x) \right) \frac{dx}{x} du \\ &\quad + e^{-p^2s} \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} e^{sH} K_{p-2m}(y) \\ &= \frac{2^{-p}}{2\pi^2} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) e^{-(p^2+u^2)s} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}(y) du \\ &\quad + \sum_{0 \leq m < p/2} e^{((p-2m)^2-p^2)s} \frac{2^{1-p}(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(y). \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

The formula extends to $p \in \mathbb{Z}$ by continuity and dominated convergence. $\square$

Taking $s = 0$ in (3.2.1) yields the spectral expansion

$$y^{-p} = \frac{2^{-p}}{2\pi^2} \int_0^\infty u \sinh(\pi u) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}(y) du + 2^{-p} \sum_{k=0}^\infty \frac{2(p-2k)^+}{k!(p-k)!} K_{p-2k}(y), \quad (3.2.3)$$

$y > 0$, of the initial condition y^{-p} in terms of the modified Bessel eigenfunctions of H . The knowledge of this expansion is sufficient to recover Proposition 3.2.1, however (3.2.3) can not be obtained by a simple orthogonality argument because the functions K_{iu} and K_{p-2k} are not in $L^2(\mathbb{R}_+, dy/y)$, cf. e.g. Relation (6.576.4) page 684 of [29].

From the change of variable (3.1.3) we recover the expression of the Laplace transform $F_p(t, x)$ in the next corollary.

Corollary 3.2.2 *For all $p \in \mathbb{R}$ we have*

$$F_p(t, x) = \frac{(2x)^{p/2}}{2\pi^2\sigma^p} \int_0^\infty u e^{-\sigma^2(p^2+u^2)t/8} \sinh(\pi u) \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{u}{2}\right) \right|^2 K_{iu}\left(\frac{\sqrt{8x}}{\sigma}\right) du \\ + \frac{(2x)^{p/2}}{\sigma^p} \sum_{k=0}^\infty \frac{2(p-2k)^+}{k!(p-k)!} e^{\sigma^2 k(k-p)t/2} K_{p-2k}\left(\frac{\sqrt{8x}}{\sigma}\right), \quad (3.2.4)$$

$x > 0, t > 0$.

By inversion of the Laplace transform, in the next proposition we obtain the probability density of $\mathcal{A}_t$ solution of the Fokker-Planck equation (3.1.2). This provides another expression for the density of the exponential functional $\mathcal{A}_t$, to be compared with [64], Proposition 2, and [45], as noted in [17], [18], [19].

Proposition 3.2.3 *For all $t, z > 0$ we have*

$$\Psi_p(t, z) = \frac{e^{-1/(\sigma^2 z)}}{4z\pi^2} \left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right)^{(p-1)/2} \int_0^\infty s \sinh(\pi s) e^{-\sigma^2(p^2+s^2)t/8} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 W_{\frac{p+1}{2}, \frac{is}{2}}\left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right) ds \\ + e^{-2/(\sigma^2 z)} \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{(-1)^m}{z} \left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right)^{p-m} \frac{p-2m}{(p-m)!} e^{-\sigma^2 m(p-m)t/2} L_m^{p-2m}\left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right), \quad (3.2.5)$$

where $W_{(p+1)/2, is/2}$ and L_m^{p-2m} are respectively the Whittaker function and generalized Laguerre polynomials.

Proof. From Relation (9.237.3), page 1028, Relation (13.6.27), page 510, and Relation (7.629.2) page 828 of [29] we get

$$(-1)^m (\sigma^2/2)^{m-p} \int_0^\infty z^{m-p-1} \exp\left(-xz - \frac{2}{\sigma^2 z}\right) L_m^{p-2m}\left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right) dz \\ = (-1)^m \int_0^\infty y^{p-m-1} e^{-y-2x/(\sigma^2 y)} L_m^{p-2m}(y) dy \\ = \frac{1}{m!} \int_0^\infty y^{\frac{p}{2}-\frac{3}{2}} e^{-y/2-2x/(\sigma^2 y)} W_{(p+1)/2, p/2-m}(y) dy \\ = \frac{x^{(p-1)/2}}{m!} \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{(p-1)/2} \int_0^\infty y^{-\frac{p+1}{2}} e^{-y-x/(\sigma^2 y)} W_{(p+1)/2, p/2-m}\left(\frac{2x}{\sigma^2 y}\right) dy \\ = 2 \frac{(2x)^{p/2}}{\sigma^p m!} K_{p-2m}\left(\sqrt{\frac{8x}{\sigma^2}}\right), \quad 0 \leq m < p/2.$$

Next from Fubini's theorem and Relation (7.629.2), page 828 of [29], we have

$$\int_0^\infty e^{-xz} z^{-(p+1)/2} e^{-1/(\sigma^2 z)} W_{(p+1)/2, is/2}\left(\frac{2}{\sigma^2 z}\right) dz$$

$$\begin{aligned}
 &= x^{(p-1)/2} \int_0^\infty e^{-y-x/(\sigma^2 y)} y^{\frac{-p-1}{2}} w_{(p+1)/2, is/2} \left(\frac{2x}{\sigma^2 y} \right) dy \\
 &= \sqrt{\frac{8}{\sigma^2}} x^{p/2} K_{is} \left(\sqrt{\frac{8x}{\sigma^2}} \right).
 \end{aligned}$$

We conclude the proof by Corollary 3.2.2 and uniqueness of the Laplace transform. $\square$

The knowledge of the density $\Psi_p(t, z)$ allows in principle one to compute the prices of Asian options of the form

$$E[\phi(\mathcal{A}_T)] = \int_0^\infty \phi(z) \Psi_p(t, z) dz,$$

where ϕ is a sufficiently integrable payoff function.

We close this section with an application to bond pricing in the Dothan model in which the short term interest rate process $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is given by

$$dr_t = (1-p) \frac{1}{2} \sigma^2 r_t dt + \sigma r_t dB_t,$$

where $p\sigma/2$ identifies to the market price of risk, which is usually non-negative. Using Lemma 3.4.3 below, the zero-coupon bond price

$$P(t, T) = F_p(T-t, r_t) = E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| r_t \right]$$

in the Dothan model [22] is given, from Corollary 3.2.2 and Relation (3.1.3), by

$$\begin{aligned}
 F_p(\tau, r) = & \frac{(2r)^{p/2}}{2\pi^2 \sigma^p} \int_0^\infty \sin \left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma} \sinh a \right) \int_0^\infty u e^{-\sigma^2(p^2+u^2)\tau/8} \cosh \left(\frac{\pi u}{2} \right) \left| \Gamma \left(-\frac{p}{2} + i \frac{u}{2} \right) \right|^2 \sin(ua) du da \\
 & + \frac{(2r)^{p/2}}{\sigma^p} \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2(p-2m)}{m!(p-m)!} e^{\sigma^2 m(m-p)\tau/2} K_{p-2m} \left(\frac{\sqrt{8r}}{\sigma} \right), \tag{3.2.6}
 \end{aligned}$$

for all $p \in \mathbb{R}$, $r > 0$, and $\tau > 0$. The above formula extends Corollary 3.2 of [50] to $p \geq 0$, and it corrects the zero coupon bond price given in [22], page 64, cf. also [12] page 63, which is only valid for $p \in (0, 2]$, cf. [50].

3.3 INTEGRAL REPRESENTATIONS AND BESSEL FUNCTIONS

In this section we prove the extension (3.1.9) of Relation (3.1.8) to $p > 0$ using asymptotic expansions, combinatorial and integrability arguments, as well as analytic continuation.

Consider the modified Bessel function of the first kind, defined for all $p \in \mathbb{C}$ as

$$I_p(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l+p)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{p+2l}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.3.1}$$

cf. Relation (9.6.10), page 375 of [1], where $x! = \Gamma(x+1) \in (0, \infty]$, $x \in \mathbb{R}$, denotes the generalized factorial and $z \mapsto 1/\Gamma(z)$ extends by continuity to all $z \in \mathbb{C}$. Recall that $I_p(x)$ is analytic in both $x \in \mathbb{C}$ and $p \in \mathbb{C}$, and from (3.3.1) we have in particular the equivalence

$$I_p(x) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p + o(x^p), \quad x \rightarrow 0, \quad (3.3.2)$$

for $p > 0$.

Lemma 3.3.1 *Let $n \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{R}$ such that $p < 2n + 2$. We have*

$$\sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) = \frac{\sin(p\pi)}{\pi} \left(\frac{2}{y}\right)^p + o(y^\varepsilon), \quad y \rightarrow 0, \quad (3.3.3)$$

for all $\varepsilon \in (0, 2n + 2 - p)$.

Proof. From (3.3.1) we have, for all $p \in \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) &= \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!(l-(p-2k))!} \left(\frac{y}{2}\right)^{2k+2l} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{2m} \sum_{k=0}^{m \wedge n} \frac{p-2k}{k!(m-k)!(p-k)!(k+m-p)!} \\ &= \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (p-2k) \frac{\Gamma(p-k-m)}{\Gamma(p-k+1)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2m} \\ &\quad + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{y}{2}\right)^{2m} \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(m-k)!(p-k)!(k+m-p)!}, \end{aligned}$$

where we used Euler's reflection formula

$$\frac{1}{(k+m-p)!} = (-1)^{k+m} \frac{\sin(\pi p)}{\pi} \Gamma(p-k-m), \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad (3.3.4)$$

cf. e.g. Relation (6.1.17), page 256 of [1], extended by continuity to all $p \in \mathbb{R}$. Next, using the Pfaff-Saalschütz (or Vandermonde) binomial identity

$$(a+b)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a)_k (b)_{n-k}$$

for the Pochhammer symbol $(x)_n$ defined for $x > 0$ by

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} \quad \text{and} \quad (-x)_n = (-1)^n \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-n)},$$

cf. Theorem 2.2.6 and Remark 2.2.1 of [3], or § 2.7 of [60], we find that for all $m \geq 1$ and $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} (p-2k) \frac{\Gamma(p-k-m)}{\Gamma(p-k+1)} \\ &= p \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \frac{\Gamma(p-k-m)}{\Gamma(p-k+1)} + 2m \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \frac{\Gamma(p-k-m-1)}{\Gamma(p-k)} \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

$$\begin{aligned}
 &= p \frac{\Gamma(p-2m)}{\Gamma(p+1)} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-p)_k (p-2m)_{m-k} \\
 &\quad + 2m \frac{\Gamma(p-2m)}{\Gamma(p)} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} (1-p)_k (p-2m)_{m-1-k} \\
 &= \frac{\Gamma(p-2m)}{\Gamma(p)} ((-2m)_m + 2m(1-2m)_{m-1}) \\
 &= \frac{\Gamma(p-2m)}{\Gamma(p)\Gamma(m+1)} \left((-1)^m \Gamma(2m+1) + 2m(-1)^{m-1} \Gamma(2m) \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

As a consequence, for all $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ we have the identities

$$\sum_{k=0}^m \frac{p-2k}{k!(m-k)!(p-k)!(k+m-p)!} = 0, \quad m \geq 1,$$

which extends to all $p \in \mathbb{R}$ by continuity, and

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) &= \frac{\sin(p\pi)}{\pi} \\
 &\quad + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{y}{2}\right)^{2m} \sum_{k=0}^n \binom{m}{k} \frac{p-2k}{(p-k)!(k+m-p)!},
 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

which is also valid for all $p \in \mathbb{R}$, and proves (3.3.3) when $p < 2n+2$. $\square$

Lemma 3.3.1, Relation (3.3.2) and the identity

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2 \sin(p\pi)} (I_{-p}(x) - I_p(x)), \quad p, x \in \mathbb{R}, \tag{3.3.7}$$

also yield the expansion

$$\sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} K_{-(p-2k)}(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{y}\right)^p + o(y^\varepsilon), \quad y \rightarrow 0, \tag{3.3.8}$$

for all $\varepsilon \in (0, (p-2n) \wedge (2n+2-p))$ and $p \in (2n, 2n+2)$, $n \in \mathbb{N}$.

When $p \in \mathbb{Z}$, Relation (3.3.6) yields

$$\sum_{k=0}^p \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R}. \tag{3.3.9}$$

Next from Lemma 3.3.1 we prove an integrability result which is essential for the application of the Fubini theorem in the proof of Proposition 3.2.1 and for the proof of Lemma 3.3.3 below.

Lemma 3.3.2 *For all $n \in \mathbb{N}$ and $p < 2n+2$ we have*

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \int_0^\infty |K_{is}(y)| \left| \frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right| \frac{dy}{y^{1+p}} < \infty.$$

Proof. For all $\alpha > 0$ there exists a constant $c_\alpha > 0$ such that $\cosh x > c_\alpha x^\alpha$ for all $x > 0$.

Hence by Relation (2.1.5) and Lemma 3.3.1 we have, for all $s \in \mathbb{R}$ and $\alpha > 1/\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K_{is}(y)| \left| \frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right| \frac{dy}{y^{1+p}} \\ \leq c \int_0^1 \int_0^\infty e^{-y \cosh x} dx \frac{dy}{y^{1-\varepsilon}} \\ \leq c \int_0^1 \int_0^\infty e^{-y c_\alpha x^\alpha} dx \frac{dy}{y^{1-\varepsilon}} \\ = c \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha (c_\alpha)^{1/\alpha}} \int_0^1 \frac{dy}{y^{1-\varepsilon+1/\alpha}}, \quad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Finally, the bound $|K_{is}(y)| \leq K_0(y)$, $y, s \in \mathbb{R}_+$, that follows from (3.4.1) below, and the equivalences $K_{is}(y) \simeq e^{-y} \sqrt{\pi/(2y)}$ and $I_{-(p-2k)}(y) \simeq e^y / \sqrt{2\pi y}$ as $y \rightarrow \infty$, show that

$$y \rightarrow \frac{1}{y^{p+1}} K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right)$$

is integrable on $[1, \infty)$, uniformly in $s \in \mathbb{R}$. $\square$

By (3.3.8) and the same argument as in the proof of Lemma 3.3.2, or by Relation (3.3.1) and the equivalence (3.3.2), for all $n \in \mathbb{N}$ and $p + is \in \mathbb{C}$ such that $p < 2n + 2$ we also have

$$\sup_{s \in \mathbb{R}} \int_0^\infty |K_{is}(y)| \left| 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{2(p-2k)}{k!(p-k)!} K_{-(p-2k)}(y) \right| \frac{dy}{y^{1+p}} < \infty. \quad (3.3.10)$$

In particular, the bound (3.3.10) shows that

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty u e^{-u^2 s} \left| \sinh(\pi u) K_{iu}(y) K_{iu}(x) \right| \left| 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{0 \leq m < p/2} \frac{2(p-2m)}{m!(p-m)!} K_{p-2m}(x) \right| du \frac{dx}{x^{p+1}} \\ \leq C_{p,y} \int_0^\infty u e^{-u^2 s} \sinh(\pi u) du \\ < \infty, \end{aligned}$$

where $C_{p,y} > 0$ is a constant, as used in connection with the Fubini theorem in the proof of Proposition 3.2.1 above.

In the next lemma, using analytic continuation, we prove an integral representation formula which will be applied to the proof of Corollary 3.3.4.

Lemma 3.3.3 For all $n \in \mathbb{N}$ and $p + is \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N})$ with $p < 2n + 2$, we have

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right) \frac{dy}{y^{p+1}} \\ = \frac{\sin(p\pi)}{2^{p+2}\pi} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 - \sum_{k=0}^n \frac{2^{-2-p}(p-2k)}{k!((p-2k)^2 + s^2)(p-k)!}. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Proof. First, we check that both sides coincide on $\{p + is : p < 0, s \in \mathbb{R}\}$. This follows from the integral representation (3.1.8) for $p < 0$, and from the relation

$$\int_0^\infty K_{is}(y) I_{-(p-2k)}(y) \frac{dy}{y} = \frac{2^{-2}}{(p-2k)^2 + s^2}$$

which is valid for all $s \in \mathbb{R}$ and $p < 2k \leq 2n$, cf. Lemma 3.4.1 in the Appendix. Next, in order to extend the identity to all $p + is \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N})$ with $p < 2n + 2$, we check that both sides of (3.3.11) are analytic functions on this domain of $\mathbb{C}$. This is clear for the right-hand side, which is analytic in $p + is \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N})$. Concerning the left-hand side, the function

$$y \mapsto \frac{1}{y^{p+1}} K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{k=0}^n \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right)$$

is integrable on $\mathbb{R}^+$ for all $p < 2n + 2$ and $s \in \mathbb{R}$ by Lemma 3.3.2, and by dominated convergence the left-hand side of (3.3.11) is an analytic function on

$$\{p + is : p < 2n + 2, s \in \mathbb{R}, p \notin 2\mathbb{N}\}.$$

Indeed, the integrand is analytic in $p + is \in \mathbb{C}$ for all fixed y , and its derivative remains bounded locally bounded in p and s by an integrable function, as can be checked from Relation (3.3.6) and Lemmas 3.3.1 and 3.3.2. Consequently, the integral remains differentiable in p and s and the Cauchy-Riemann equations remains satisfied after integration, showing that the integral is an holomorphic function of $p + is$. Finally the identity is extended by analytic continuation to all $p + is \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N})$ with $p < 2n + 2$, since both sides are analytic functions that coincide on $\{p + is : p < 0, s \in \mathbb{R}\}$, cf. e.g. Theorem 1.2 of [40]. $\square$

Note that (3.3.9) and (3.3.11) also imply the identity

$$\sum_{k=0}^p \frac{p-2k}{k!((p-2k)^2 + s^2)(p-k)!} = 0$$

for all $p \in \mathbb{Z}$ and $s \neq 0$.

Lemma 3.3.3 shows in particular that for all $p + is \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N})$ we have

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right) \frac{dy}{y^{p+1}} \\ &= \frac{\sin(p\pi)}{2^{p+2}\pi} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 - \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{2^{-2-p}(p-2k)}{k!((p-2k)^2 + s^2)(p-k)!}, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

by choosing $n \in \mathbb{N}$ such that $2n < p < 2n + 2$ when $p > 0$, whereas the formula is known to hold when $p < 0$ by Lemma 3.4.1 in the Appendix.

Next, we prove the integral representation which is used in the proof of Proposition 3.2.1 and extends (3.1.8).

Corollary 3.3.4 *For all $p + is \in \mathbb{C}$ with $p \notin \mathbb{Z}$ we have*

$$\left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 = 2 \int_0^\infty K_{is}(y) \left(1 - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{2(p-2k)}{k!(p-k)!} K_{p-2k}(y) \right) \left(\frac{2}{y}\right)^{p+1} dy. \quad (3.3.13)$$

Proof. First we note that the integrability follows from the bound (3.3.10) above. Next, from Relations (3.3.7), (3.3.12), and Lemma 3.4.1 we have, for all $p + is \in \mathbb{C}$, $p \notin \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty K_{is}(y) \left(1 - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{2(p-2k)}{k!(p-k)!} K_{p-2k}(y) \right) \frac{dy}{y^{p+1}} \\ &= \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \int_0^\infty K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{p-2k}(y) \right) \frac{dy}{y^{p+1}} \\ &= \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \int_0^\infty K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right) \frac{dy}{y^{p+1}} \\ & \quad + \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} \int_0^\infty K_{is}(y) I_{p-2k}(y) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{\pi}{\sin(p\pi)} \int_0^\infty K_{is}(y) \left(\frac{\sin(p\pi)}{\pi} - \left(\frac{y}{2}\right)^p \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!(p-k)!} I_{-(p-2k)}(y) \right) \frac{dy}{y^{p+1}} \\ & \quad + 2^{-2-p} \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!((-p+2k)^2 + s^2)(p-k)!} \\ &= 2^{-p-2} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 - 2^{-2-p} \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!((p-2k)^2 + s^2)(p-k)!} \\ & \quad + 2^{-2-p} \sum_{0 \leq k < p/2} \frac{p-2k}{k!((-p+2k)^2 + s^2)(p-k)!} \\ &= 2^{-p-2} \left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2. \end{aligned}$$

□

Corollary 3.3.4 can be extended by continuity to all $p + is \in \mathbb{C}$ with $p \notin 2\mathbb{N}$, although this is not necessary for the proof of Proposition 3.2.1. The extension to all $p + is \in \mathbb{C} \setminus (2\mathbb{N})$ should be more difficult, for example when $p = 0$ and $s \neq 0$, Relation (3.3.13) reads

$$\left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 = 4 \int_0^\infty K_{is}(y) \frac{dy}{y},$$

but the function $y \mapsto K_{is}(y)/y$ does not appear to be in $L^1(\mathbb{R}_+)$.

3.4 APPENDIX

In this appendix we give the proof of some basic identities that have been used in this paper. In particular, the second part of Lemma 3.4.1 provides a simplified version of Relation (6.576.5) page 684 of [29] in a particular case.

Lemma 3.4.1 *For all $p < 0$ and $s \in \mathbb{R}$ we have the integral representations*

$$\left| \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \right|^2 = 4 \int_0^\infty K_{is}(y) \left(\frac{2}{y}\right)^p \frac{dy}{y} \quad \text{and} \quad \frac{1}{p^2 + s^2} = 4 \int_0^\infty K_{is}(y) I_{-p}(y) \frac{dy}{y}.$$

Proof. From the integral representation of Bessel functions

$$K_{is}(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2}\right)^{is} \int_0^\infty x^{-is-1} e^{-x-y^2/(4x)} dx, \quad (3.4.1)$$

cf. [63] page 183, and the Fubini theorem, we have

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{is}(t) \frac{dt}{t^{1+p}} &= 2^{-is-1} \int_0^\infty t^{-1-p+is} \int_0^\infty e^{-x-t^2/(4x)} x^{-is-1} dx dt \\ &= 2^{-is-1} \int_0^\infty x^{-is-1} e^{-x} \int_0^\infty t^{-1-p+is} e^{-t^2/(4x)} dt dx \\ &= 2^{-2-p} \int_0^\infty x^{-is-1} e^{-x} x^{-p/2+is/2} \int_0^\infty u^{-1-p/2+is/2} e^{-u} du dx \\ &= 2^{-2-p} \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \int_0^\infty x^{-1-p/2-is/2} e^{-x} dx \\ &= 2^{-2-p} \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2} - i\frac{s}{2}\right). \end{aligned}$$

This relation is also given in Relation (6.561.16) p.676 of [29]. By the equivalence (3.3.2) and the above argument, $y \mapsto K_{is}(y) I_{-p}(y)/y$ is integrable on $\mathbb{R}_+$ for all $p < 0$, and we have

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K_{is}(y) I_{-p}(y) \frac{dy}{y} &= 2^{-is-1} \int_0^\infty y^{-1+is} I_{-p}(y) \int_0^\infty e^{-x-y^2/(4x)} x^{-is-1} dx dy \\ &= 2^{-is-1} \int_0^\infty y^{-1+is} \int_0^\infty e^{-x-y^2/(4x)} x^{-is-1} I_{-p}(y) dx dy \\ &= 2^{-is-1} \int_0^\infty x^{-is-1} e^{-x} \int_0^\infty y^{-1+is} e^{-y^2/(4x)} I_{-p}(y) dy dx \\ &= 2^{-2} \int_0^\infty x^{-is-1/2} e^{-x} \int_0^\infty z^{-1+is/2} e^{-z} I_{-p}(2\sqrt{zx}) dz dx \\ &= 2^{-2} \frac{\Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(1-p)} \int_0^\infty x^{-p/2-is/2-1} e^{-x} \Phi\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}, 1-p, x\right) dx \\ &= \frac{2^{-2} \Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{p}{2} - i\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2} - i\frac{s}{2}\right)} \\ &= \frac{2^{-2}}{p^2 + s^2}. \end{aligned}$$

In the above calculations we have used the relations

$$\Phi\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}, 1-p, x\right) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}\right)} x^{p/2} \int_0^\infty e^{-zx} z^{-1+is/2} I_{-p}(2\sqrt{xz}) dz,$$

cf. (6.643-2) and (9.220-2), pages 709 and 1024 of [29], and

$$\int_0^\infty z^{-p/2-is/2-1} e^{-z} \Phi\left(-\frac{p}{2} + i\frac{s}{2}, 1-p, z\right) dz = \frac{\Gamma(1-p)\Gamma\left(-\frac{p}{2} - i\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{p}{2} - i\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{2} - i\frac{s}{2}\right)},$$

cf. (7.621-7) page 822 of [29], where $\Phi(a, b, z)$ is the degenerate hypergeometric function, which are valid for all $p < 0$ and $s \in \mathbb{R}$. $\square$

In the next proposition we compute the expression of the heat kernel used in the proof of Relation (3.1.6).

Proposition 3.4.2 For $t > 0$ and $x, y \in \mathbb{R}$, the kernel $q_t(x, y)$ of $\exp(tH)$ is given by

$$q_t(x, y) = \frac{2}{x\pi^2} \int_0^\infty u e^{-u^2 t} \sinh(\pi u) K_{iu}(x) K_{iu}(y) du. \quad (3.4.2)$$

Proof. We start by computing the Green kernel associated to the operator $(H - p^2)^{-1}$, and for simplicity it suffices to consider the case $p \geq 0$. From [10], page 115, the Green function associated to

$$\tilde{H}_p := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2p+1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - 1$$

is given by

$$\tilde{G}(x, y; p) = x^{p+1} y^{-p} I_p(x) K_p(y), \quad 0 < x \leq y.$$

Next, noting that for all smooth functions f on $\mathbb{R}$ we have

$$(\tilde{H}_p f)(y) = y^{-p-2} (H - p^2) (y^p f(y)),$$

we get

$$G(x, y; p) = y^p x^{-p-2} \tilde{G}(x, y; p) = \frac{1}{x} I_p(x) K_p(y).$$

On the other hand, from the relation

$$I_p(\min(x, y)) K_p(\max(x, y)) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{u}{u^2 + p^2} \sinh(\pi u) K_{iu}(y) K_{iu}(x) du,$$

$p \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cf. [30] page 228, we get

$$G(x, y; p) = \frac{2}{x\pi^2} \int_0^\infty \frac{u}{u^2 + p^2} \sinh(\pi u) K_{iu}(x) K_{iu}(y) du. \quad (3.4.3)$$

By inversion of the Laplace transform

$$G(x, y; p) = - \int_0^\infty e^{-p^2 t} q_t(x, y) dt, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

that follows from

$$(H - p^2)^{-1} = - \int_0^\infty e^{-p^2 t} e^{tH} dt,$$

and using the Fubini theorem, we get

$$\begin{aligned}
 q_t(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt} G(x, y; \sqrt{z}) dz \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} G(x, y; \sqrt{iz}) dz \\
 &= \frac{1}{x\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} \int_0^{\infty} \frac{u}{u^2 + iz} \sinh(\pi u) K_{iu}(x) K_{iu}(y) du dz \\
 &= \frac{1}{x\pi^3} \int_0^{\infty} u \sinh(\pi u) K_{iu}(x) K_{iu}(y) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{u^2 + iz} dz du,
 \end{aligned}$$

and the last integral can be computed as the Fourier transform

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{izt}}{u^2 + iz} dz = 2\pi e^{-u^2 t}, \quad u > 0.$$

□

The next lemma has been used in the proof of Relation (3.2.6) above.

Lemma 3.4.3 *We have the integral representation*

$$K_{i\mu}(z) = \frac{1}{\sinh(\pi\mu/2)} \int_0^{+\infty} \sin(z \sinh t) \sin(\mu t) dt, \quad z \in \mathbf{R}_+, \quad \mu \in \mathbf{R}. \quad (3.4.4)$$

Proof. For all $\mu \geq 0$ we have

$$K_{i\mu}(z) = \frac{1}{2} e^{\mu\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t - i\mu t} dt$$

and

$$K_{i\mu}(z) = \frac{1}{2} e^{-\mu\pi/2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t + i\mu t} dt,$$

cf. page 182 of [63], which leads to

$$\left(2e^{\mu\pi/2} - 2e^{-\mu\pi/2} \right) K_{i\mu}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t} \left(e^{i\mu t} - e^{-i\mu t} \right) dt,$$

and

$$K_{i\mu}(z) = \frac{i}{2 \sinh(\pi\mu/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz \sinh t} \sin(\mu t) dt.$$

Finally, (3.4.4) is obtained by separation of the real and imaginary parts in the latter integral. □

FONCTIONNELLES PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT BROWNIEN

4

SOMMAIRE

4.1	INTRODUCTION	67
4.2	MATHIEU FUNCTIONS AND SPECTRAL DECOMPOSITION	69
4.3	SOLUTIONS TO THE TIME-DEPENDENT MATHIEU'S EQUATIONS	72
4.4	BOND PRICING WITH PERIODIC RATES	74
4.5	PERIODIC POTENTIALS IN TIME-DEPENDENT SCHRÖDINGER EQUATIONS	76
4.6	APPENDICE	77
4.6.1	Généralités sur les groupes de Lie	77
4.6.2	Taux d'intérêt sur le cercle	79
4.6.3	Tentative de généralisation à $SO(3)$	80
4.6.4	Taux d'intérêt sur $SL(2)$	84

CE chapitre regroupe plusieurs travaux autour des fonctionnelles périodiques du mouvement brownien. Les trois premières sections correspondent à un article en préparation, avec pour titre provisoire *Periodic functionals of Brownian motion and cyclic interest rates*. La section suivante contient quelques remarques sur l'interprétation physique des résultats précédents. En appendice, nous présentons en français quelques résultats concernant la modélisation des taux d'intérêt sur les groupes de Lie.

4.1 INTRODUCTION

Let $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ be a standard real Brownian motion starting from 0. Brownian functionals of the form

$$\mathcal{A}_T^\varphi = \int_0^T \varphi(B_t) dt, \quad T \geq 0$$

play an important role in financial mathematics through Asian options pricing and interest rate modelling.

In this paper, we derive explicit zero-coupon bond prices associated to short interest rates modelled according to a trigonometric functional of $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$,

$$\mathcal{A}_T = \int_0^T (\beta + \alpha \cos(wB_t + \mu)) dt.$$

For about 20 years, functionals of Brownian motion have been widely studied with mathematical finance purpose : indeed, financial option prices such as Asian option prices depend on the values of a stochastic process over a whole time interval $[0, T]$, whence the qualification of *path-dependent* given to these options and the utility of studying $\mathcal{A}_T^\varphi$ functionals and their mathematical properties.

More precisely, when the matter is to compute prices for Asian options, we have to deal with the so-called geometric Brownian motion, i.e. $\varphi(x) = \exp(\sigma x)$, for a given $\sigma > 0$. We then have to calculate quantities such as

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{t} \left(\int_0^t \exp(\sigma B_s + \mu s) ds \right) - K \right)_+ \right].$$

To this aim, one can simulate or do some mathematical approximations as well as apply numerical partial differential equation techniques (see [24] and references therein). Another way is to give explicit laws for processes appearing when prospecting explicit values for Asian options. Concerning exponential Brownian motion, we refer to [10] which gathers a large number of formulae associated to functionals of Brownian motion and to [64], [45] and references therein.

Within the theory of interest rate modelling, if the instantaneous spot rate process is denoted by $(r_s)_s$, the zero-coupon bond price at time t for the maturity T is given by the formula

$$P(t, T) = \mathbb{E}_t \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \right],$$

which can be easily computed whenever we explicitly know or are at least able to characterize the distribution of $\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right)$ in terms of the dynamics of the process r , conditionally on the information available at time t . For a given model of rate, Feynman-Kac formula, see e.g. [57], enables to construct numerical algorithms and compute prices via Monte-Carlo simulation. However, the gap between theoretical and practical implications of any interest rate model is often huge and the point is to provide some tractable models that both fit reality of the market and allow for explicit prices computations at the same time.

Famous classical models for the instantaneous short rate process r allow for explicit formulae for bond prices, with hypothesis of no arbitrage. Those prices come from solving a partial differential equation to be satisfied by the bond price process. Some models give tractable explicit prices (such as Vasicek model, 1977) but allows for negative or unbounded rates, when other ones are too simple or hardly analytically tractable, cf. e.g. [12], [50], [52] and references therein. So far, apart from geometric Brownian motion, some other Brownian paths laws have been studied with relation to financial applications and results are gathered in e.g. [34]. It seems that only few work has been done in studying periodic and hyperbolic functionals of Brownian motion with explicit law densities. Therefore, it seems reasonable to investigate further on positive and bounded short rate models leading to explicit zero-coupon bond prices, such as

$$r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t + \mu) \geq 0, \quad (4.1.1)$$

with $\eta \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\beta > \alpha \geq 0$, $\mu \in [0, \pi]$ and $w > 0$. It is indeed obvious that business and insurance markets are cyclical : during economic recession or expansion, the measures taken by the financial investors or insurers to make profit are noticeably different and have influence on the market. For instance, interest rates are pulled back to various reversion levels that depend on the business cycle, cf. [21]. The variability of interest rates affects decisions about how to save and invest. Investors differ in their willingness to hold risky assets such as stocks and bonds. That behaviour can be naturally handled by periodic functions such as trigonometric functions, and it seems natural to price bonds with an underlying short-term interest rate given as in (4.1.1).

In this paper, we consider trigonometric functionals of Brownian motion, and more precisely, we obtain the Laplace transform in η

$$F(t, y; \eta) = \mathbb{E} \left[\exp \left(-\eta \int_0^t (\beta + \alpha \cos(wB_s + \mu)) ds \right) \right]$$

in terms of explicit exponentially convergent series of periodic eigenfunctions, denoted *Mathieu functions*, that are associated to the so-called *Mathieu's equation*

$$y''(x) + (a - 2q \cos(2x))y(x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad q \geq 0. \quad (4.1.2)$$

Mathieu functions are either even functions then denoted by $\mathfrak{ce}_n$, or odd functions then denoted by $\mathfrak{se}_n$, for $n \in \mathbb{N}$. They were initially introduced by E. L. Mathieu in 1868 to solve the Dirichlet problem in an ellipse, cf. e.g. [1], [13] or [32]. Mathieu's equation (4.1.2) is closely related to plane wave equation and Schrödinger equation with a time-periodic potential, see e.g. [42], [61] or [30] p.119.

Thus Relation (4.3.5) of Section 4.3 allows for tractable exact computations. In particular we get associated zero-coupon bond prices as

$$P(t, T) = F(T - t, r) \quad (4.1.3)$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\eta\beta + w^2 \mathfrak{a}_{2n}(4\eta\alpha/w^2)/4)(T-t)} \left\{ \int_0^\pi \mathfrak{ce}_{2n} \left(x, \frac{4\eta\alpha}{w^2} \right) dx \right\} \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wr + \mu}{2}, \frac{4\eta\alpha}{w^2} \right).$$

The sequel is organized as follows. In Section 4.2, we give some theoretical essential tools concerning Mathieu functions in order to get an explicit solution of the time-dependent standard Mathieu equation in Proposition 4.3.2 of Section 4.3. In Section 4.4, we give a speed of convergence for Relation (4.3.5) in Proposition 4.3.2 then, as applications of that result, we compute explicit bond prices associated to trigonometric functionals of a standard Brownian motion as a short rate.

4.2 MATHIEU FUNCTIONS AND SPECTRAL DECOMPOSITION

In that Section, we recall important elements of Mathieu functions' theory, following [13] and [29, p.950] with the same notations. From [43] and [44], we hereafter recall results on spectral expansion for Schrödinger operators with Sturm-Liouville potential that shall enable us to solve in upcoming Section 4.3 the so-called time-dependent Mathieu's equation. As we shall see in upcoming Section 4.5, equation (4.1.2) is closely related to Schrödinger equation with a time-periodic potential, as well as to monochromatic plane wave equation, see e.g. [42], [5], [61] or [30] p.119.

From Mathieu's equation (4.1.2), let us denote by H_q the *Mathieu Hamiltonian*, that is the following second order operator

$$[(\mathbf{H}_q + a)y](x) := y''(x) + (a - 2q \cos(2x))y(x) = 0, \quad a \in \mathbb{R}, q \geq 0. \quad (4.2.1)$$

Proposition 4.2.1 1. For $q \in \mathbb{R}_+^*$, Mathieu's equation (4.1.2) has four distinct series of periodic solutions given by

$$\mathfrak{ce}_{2n}(y, q) = \sum_{r=0}^{+\infty} A_{2r}^{(2n)} \cos(2ry), \quad \mathfrak{ce}_{2n+1}(y, q) = \sum_{r=0}^{+\infty} A_{2r+1}^{(2n+1)} \cos(2r+1)y,$$

and

$$\mathfrak{se}_{2n+1}(y, q) = \sum_{r=0}^{+\infty} B_{2r+1}^{(2n+1)} \sin(2r+1)y, \quad \mathfrak{se}_{2n+2}(y, q) = \sum_{r=0}^{+\infty} B_{2r+2}^{(2n+2)} \cos(2r+2)y,$$

where coefficients $A_{2r}^{(2n)}$, $A_{2r+1}^{(2n+1)}$, $B_{2r+1}^{(2n+1)}$ and $B_{2r+2}^{(2n+2)}$ depend on parameter q and follow recursion relations. These four types of functions are the so-called Mathieu functions.

2. Periodic solutions of (4.1.2) exist for special values of parameter $a = a(q)$ that are solutions of a transcendental equation or characteristic equation. Mathieu functions are indeed eigenfunctions for equation (4.1.2) and we denote by $\mathfrak{a}_{2n}$, $\mathfrak{a}_{2n+1}$, $\mathfrak{b}_{2n+1}$ and $\mathfrak{b}_{2n+2}$ their associated eigenvalues which are also called characteristic numbers. They all continuously depend on parameter q .
3. Mathieu functions $\mathfrak{ce}_{2n}$ are the only π -periodic and even eigenfunctions for Mathieu hamiltonian $\mathbf{H}_q$.

4. The recursion relations between coefficients $A_{2r}^{(2n)}$ of Mathieu function $\mathfrak{ce}_{2n}$ are

$$\begin{cases} \mathfrak{a}_{2n}(q)A_0^{(2n)}(q) - qA_2^{(2n)}(q) = 0 \\ \{\mathfrak{a}_{2n}(q) - 4\}A_{2r}^{(2n)}(q) - q\{2A_0^{(2n)}(q) + A_{2r}^{(4)}(q)\} = 0 \\ \{\mathfrak{a}_{2n}(q) - 4r^2\}A_{2r}^{(2n)}(q) - q\{A_{2r-2}^{(2n)}(q) + A_{2r+2}^{(2n)}(q)\} = 0. \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Proof. These well-known results on Mathieu functions can be found in pp. 950-952 of [29]. The recursion relations between Mathieu coefficients in particular are gathered in relations (8.62) p.951 of [29]. For the proof, we refer to [13, pp.15-23]. $\square$

Now we give some key tools to state the main result (4.3.5) which is related to spectral expansion of a certain adjoint operator in a Hilbert space. We begin with defining the second order differential operator

$$\mathbf{H}^{(\eta)} = \frac{w^2}{2} [\alpha^2 - (x - \beta)^2] \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{w^2}{2}(x - \beta) \frac{\partial}{\partial x} - \eta x, \quad (4.2.3)$$

for parameters $\eta \in \mathbb{R}_+$, $\beta > \alpha \geq 0$ and $w \in \mathbb{R}$. As it is done in [43], our aim is to give an explicit spectral representation for the solution R^f of the following partial differential equation

$$\begin{cases} \frac{\partial R^f}{\partial t} = (\mathbf{H}^{(\eta)} R^f)(t, x), \\ R^f(0, x) = f(x), \quad x \in (\beta - \alpha, \beta + \alpha), \end{cases} \quad (4.2.4)$$

for a given $f \in L^2(I)$, with $I = (\beta - \alpha, \beta + \alpha)$ endowed with the inner product

$$\langle f, g \rangle = \frac{2}{w^2} \int_I f(x)g(x)(\alpha^2 - (x - \beta)^2)^{-1/2} dx.$$

Lemma 4.2.2 Let $f \in L^2(I, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ and $\mathbf{H}^{(\eta)}$ be given by (4.2.3). Solution R^f of Equation (4.2.4) writes

$$R^f(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{\lambda_n^{(\eta)} t} \varphi_n^{(\eta)}(x), \quad c_n = \langle \varphi_n^{(\eta)}, f \rangle \quad x \in I, \quad t \geq 0, \quad (4.2.5)$$

with $(\varphi_n^{(\eta)})_n$ the orthonormal set of eigenfunctions for operator $\mathbf{H}^{(\eta)}$ in $L^2(I, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ with associated eigenvalues $(\lambda_n^{(\eta)})_n$.

Proof. We follow [43] pp.343-349 to study operator $\mathbf{H}^{(\eta)}$ and give the exact solution of equation (4.2.4) in terms of series expansion of eigenfunctions for operator $\mathbf{H}^{(\eta)}$. We set the Fokker-Planck framework with

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(\eta)} f(x) &= \frac{1}{2} a^2(x) f''(x) + b(x) f'(x) - r(x) f(x) \\ &= \frac{1}{m(x)} \left[\frac{f'(x)}{s(x)} \right]' - r(x) f(x), \quad x \in I \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

and

$$\begin{aligned} a(x) &= w \sqrt{\alpha^2 - (x - \beta)^2} \\ b(x) &= -\frac{w^2}{2}(x - \beta) \\ r(x) &= \eta x \\ s(x) &= (\alpha^2 - (x - \beta)^2)^{-1/2} \\ m(x) &= \frac{2}{w^2} s(x) = \frac{2}{w^2} (\alpha^2 - (x - \beta)^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Solution R^f of Equation (4.2.4) is given by

$$R^f(\tau, x) = \int_I f(y) p(\tau; x, y) dy,$$

p being the transition density. From [44] p.345 and Theorem 3.1 in [46], the spectrum of operator $\mathbf{H}^{(\eta)}$ is simple and purely discrete with negative eigenvalues : since functions $a(x)$, $b(x)$ and $r(x)$ are continuous on I and $a(x) > 0$ and $r(x) \geq 0$ on I , we can apply the Spectral Theorem for self-adjoint semigroups in Hilbert space, see [43, p.378], to produce a spectral representation for $R^f(t, x)$. With $\{\lambda_n^{(\eta)}\}_{n=0}^\infty$, $0 \geq \lambda_0^{(\eta)} > \dots > \lambda_n^{(\eta)} > \dots$, $\lim_{n \uparrow \infty} \lambda_n^{(\eta)} = -\infty$, the eigenvalues of $\mathbf{H}^{(\eta)}$ and $\{\varphi_n^{(\eta)}\}_{n=0}^\infty$ the corresponding eigenfunctions normalized so that $\|\varphi_n^{(\eta)}\|^2 = 1$, we get the following spectral representation for the transition density

$$p(t; x, y) = m(y) \sum_{n=0}^\infty e^{\lambda_n^{(\eta)} t} \varphi_n^{(\eta)}(x) \varphi_n^{(\eta)}(y), \quad x, y \in I, \quad t > 0 \quad (4.2.8)$$

and therefore we have Lemma 4.2.2. $\square$

Lemma 4.2.3 *Eigenelements $(\varphi_n^{(\eta)}, \lambda_n^{(\eta)})_n$ for operator $\mathbf{H}^{(\eta)}$ are given by*

$$\begin{cases} \varphi_n^{(\eta)}(\beta + \alpha \cos(2z)) = \frac{w}{\sqrt{\pi}} \mathfrak{ce}_{2n}(z, q), \quad z \in (0, \pi/2), \\ \lambda_n^{(\eta)} = -\eta \left(\beta + \frac{\alpha}{2q} \mathfrak{a}_{2n}(q) \right) = -\frac{w^2}{4} \left(\frac{q\beta}{\alpha} + \mathfrak{a}_{2n}(q) \right). \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Proof. For each $n \geq 0$, the couple of eigenelements $(\varphi_n^{(\eta)}, \lambda_n^{(\eta)})$ satisfies

$$\mathbf{H}^{(\eta)} \varphi_n^{(\eta)}(x) = \lambda_n^{(\eta)} \varphi_n^{(\eta)}(x), \quad (4.2.10)$$

and from this latter relation (4.2.10), by performing the Liouville transformation $\varphi_n^{(\eta)}(x) = \phi_n^{(\eta)}(z)$ (see [44] p.349) with

$$z = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{x - \beta}{\sqrt{\alpha^2 - (x - \beta)^2}} \right), \quad z \in (0, \pi/2) \Leftrightarrow x = \beta + \alpha \cos(2z), \quad x \in I,$$

we get a Mathieu equation (4.1.2) for $\phi_n^{(\eta)}$ with $q = 4\eta\alpha/w^2$ and $a = a_n^{(\eta)} = -8(\beta\eta + \lambda_n^{(\eta)})/w^2$. For $n \geq 0$, from its definition and Theorem 4.2.1, $\phi_n^{(\eta)}$ is clearly an even and π -periodic function, so it is necessarily a $\mathfrak{ce}_{2n}$ Mathieu function, and its associated eigenvalue is its associated characteristic number $a_n^{(\eta)} = \mathfrak{a}_{2n}(q)$, which is a function of $q = 4\eta\alpha/w^2$. Hence we get as eigenelements the couples

$$(\lambda_n^{(\eta)}; \phi_n^{(\eta)}(z)) = \left(\eta \left\{ \beta - \frac{\alpha}{2q} \mathfrak{a}_{2n}(q) \right\}; \alpha_n \mathfrak{ce}_{2n}(z, q) \right),$$

with α_n a normalization constant coming from the orthonormality of the $(\varphi_n^{(\eta)})$ family. Indeed,

$$\delta_{m,n} = \int_{\beta-\alpha}^{\beta+\alpha} \varphi_n^{(\eta)}(x) \varphi_m^{(\eta)}(x) m(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{w^2} \int_0^{\pi/2} \varphi_n^{(\eta)}(\beta + \alpha \cos(2z)) \varphi_m^{(\eta)}(\beta + \alpha \cos(2z)) dz \\
 &= \frac{4}{w^2} \int_0^{\pi/2} \phi_n^{(\eta)}(z) \phi_m^{(\eta)}(z) dz \\
 &= \frac{\alpha_m \alpha_n}{w^2} \int_0^{2\pi} \mathbf{ce}_{2n}(z, q) \mathbf{ce}_{2m}(z, q) dz \\
 &= \frac{\alpha_n^2}{w^2} \pi \delta_{m,n},
 \end{aligned}$$

so $\alpha_n = \frac{w}{\sqrt{\pi}}$ and we get (4.2.9). $\square$

4.3 SOLUTIONS TO THE TIME-DEPENDENT MATHIEU'S EQUATIONS

Now, using technics presented in the previous Section 4.2, we solve the time-dependent standard Mathieu's equation

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = [(\mathbf{H}_q + a)f](t, x).$$

The key result of that paper is given in Proposition 4.3.2. For $t > 0$, $\beta > \alpha \geq 0$, $\mu \in [0, \pi]$ and $w > 0$, let

$$\mathcal{A}_t = \int_0^t (\beta + \alpha \cos(wB_s + \mu)) ds, \quad (4.3.1)$$

with $(B_t)_t$ a standard real Brownian motion. From Proposition 5.8 p.51 in [56], which is a version of the Feynman-Kac formula, for fixed $\eta \geq 0$, function

$$F(t, y; \eta) = \mathbb{E}_y \left[e^{-\eta \mathcal{A}_t} \right], \quad y \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (4.3.2)$$

solves the following partial differential equation

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t}(t, y; \eta) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, y; \eta) - \eta \{ \beta + \alpha \cos(wy + \mu) \} F(t, y; \eta), & y \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ F(0, y; \eta) = 1. \end{cases} \quad (4.3.3)$$

In that section, we give an explicit exact solution of the *time-dependent Mathieu's equation* (4.3.3) in terms of series expansion of even and π -periodic Mathieu functions, as defined in previous Section 4.2.

Equation (4.3.3) is written as a heat equation with Sturm-Liouville potential. To solve that latter equation in terms of series expansion, we have to perform the transformation $R(t, \beta + \alpha \cos(wy + \mu); \eta) = F(t, y; \eta)$ to get its algebraic form, or Fokker-Planck form.

Proposition 4.3.1 For fixed $\eta \geq 0$, function R is the principal solution of equation

$$\frac{\partial R}{\partial t}(t, x; \eta) = \frac{w^2}{2} \left[\alpha^2 - (x - \beta)^2 \right] \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}(t, x; \eta) - \frac{w^2}{2} (x - \beta) \frac{\partial R}{\partial x}(t, x; \eta) - \eta x R(t, x; \eta), \quad (4.3.4)$$

with initial condition $R(0, x; \eta) = 1$, for $x \in (\beta - \alpha, \beta + \alpha)$.

Proof. From equation (4.3.3), with $x = \beta + \alpha \cos(wy + \mu)$ and $F(t, y) = R(t, x)$, we immediately get (4.3.4). $\square$

Proposition 4.3.2 *Let $\eta \in \mathbb{R}_+$ and $q(\eta) = 4\eta\alpha/w^2$. For $t > 0, y \in \mathbb{R}$, we have*

$$\begin{aligned} F(t, y; \eta) &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} A_0^{(2n)}(q) \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} \left\{ \int_0^{\pi} \mathfrak{ce}_{2n}(x, q) dx \right\} \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right). \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Proof. From Proposition 4.3.4 it suffices to prove that for $t > 0, x \in (\beta - \alpha, \beta + \alpha)$ with $x = \beta + \alpha \cos(2z), z \in (0, \pi/2)$ and $\eta \in \mathbb{R}_+$, we have

$$R(t, x; \eta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} A_0^{(2n)}(q) \mathfrak{ce}_{2n}(z, q). \quad (4.3.6)$$

We remark that Equation (4.3.4) is exactly Equation (4.2.4) with constant initial condition $f \equiv 1$, which from Section 4.2 admits a discrete eigenfunctions expansion. From Sturm-Liouville theory, as detailed in Lemma 4.2.2, operator $\mathbf{H}^{(\eta)}$ admits a purely discrete and simple spectrum with negative eigenvalues $(\lambda_n^{(\eta)})_n$. Associated eigenfunctions $(\varphi_n^{(\eta)})_n$ are normalized in $L^2(I, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. From Lemma 4.2.2, with $f(x) \equiv 1$ we straightly get

$$R(t, x; \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda_n^{(\eta)} t} \langle \varphi_n^{(\eta)}, 1 \rangle \varphi_n^{(\eta)}(x).$$

By performing a Liouville transformation, from Lemma (4.2.3), we obtain Mathieu even and π -periodic functions $\mathfrak{ce}_{2n}(z, q)$ as eigenfunctions and Mathieu characteristic numbers $a_{2n}(q)$ as associated eigenvalues, given in Relation (4.2.9). Besides, from Relations (4.2.9) of Section 4.2 and (6.924.1) p.765 of [29],

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n^{(\eta)}, 1 \rangle &= \frac{2}{w^2} \int_I \varphi_n^{(\eta)}(x) (\alpha^2 - (x - \beta)^2)^{-1/2} dx \\ &= \frac{4}{w^2} \int_0^{\pi/2} \varphi_n^{(\eta)}(\beta + \alpha \cos(2z)) dz \\ &= \frac{4}{w\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \mathfrak{ce}_{2n}(z, q) dz \\ &= \frac{2}{w\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \mathfrak{ce}_{2n}(z, q) dz \\ &= \frac{2\sqrt{\pi} A_0^{(2n)}(q)}{w}. \end{aligned}$$

This gives (4.3.6) and (4.3.5) as a direct consequence of Proposition 4.3.1. $\square$

Remarks 4.3.3 1. For $\mu = 0$, we get

$$\begin{aligned} F(t, y; \eta) &= \mathbb{E}_y \left[\exp \left(- \int_0^t \{ \beta + \alpha \cos(wB_s) \} ds \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} \left\{ \int_0^{\pi} \mathfrak{ce}_{2n}(x, q) dx \right\} \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wy}{2}, q \right). \end{aligned}$$

2. For $\mu = \frac{\pi}{2}$, we get

$$\begin{aligned} F(t, y; \eta) &= \mathbb{E}_y \left[\exp \left(- \int_0^t \{ \beta - \alpha \sin(wB_s) \} ds \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} \left\{ \int_0^{\pi} \mathfrak{ce}_{2n}(x, q) dx \right\} \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wy}{2} + \frac{\pi}{4}, q \right). \end{aligned}$$

4.4 BOND PRICING WITH PERIODIC RATES

In that section, we apply Proposition 4.3.2 on bond pricing in case of a periodic underlying short-term interest rate, then we give an important speed of convergence result for the series appearing in Proposition 4.3.2.

Assume that the short-term interest rate $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is modelled according to

$$r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t), \quad \beta > \alpha > 0, \quad w > 0, \quad t > 0,$$

so that $(r_t)_t$ remains positive and bounded. This kind of rate could realize the business cycles that can be observed on the market, cf [21].

For $0 \leq t \leq T$, let the zero-coupon bond price be given by

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T \{ \beta + \alpha \cos(wB_s) \} ds \right) \middle| B_t \right] = f(T - t, B_t).$$

Proposition 4.4.1 For $0 \leq t \leq T$,

$$P(t, T) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2(q\beta/\alpha + a_{2n}(q))(T-t)/4} A_0^{(2n)}(q) \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wx}{2}, q \right) \Big|_{x=B_t},$$

with $q = 4\alpha/w^2$.

Proof. Function f is the solution of the time-dependent Mathieu equation (4.3.3) with $\eta = 1$ and $\mu = 0$. Hence the proposition. $\square$

Now we have to notice the following convergence result.

Proposition 4.4.2 For all parameters $t > 0$, $\beta > \alpha > 0$, $w, \eta \in \mathbb{R}_+$, with $q(\eta) = 4\eta\alpha/w^2$, Relation (4.3.5) defines F as absolutely and uniformly convergent series. More precisely, we have the bound

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| F(t, y; \eta) - 2 \sum_{n=0}^N e^{-w^2 t(q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} A_0^{(2n)}(q) \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right) \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2tw}} e^{-t(\eta\beta + w^2 N^2)}, \quad N \geq 1. \quad (4.4.1)$$

Proof. Let $n \geq N \geq 1$ and $t \geq 0$. From the orthonormality condition of the Mathieu functions, as stated in e.g. Relation 6.911.2 p.763 of [29], for all values of q we get the following relation for the coefficients

$$2 \left[A_0^{(2n)} \right]^2 + \sum_{r=1}^{\infty} \left[A_{2r}^{(2n)} \right]^2 = 1,$$

which involves $\left| A_0^{(2n)} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ and leads for all y and μ to

$$\begin{aligned} \left| A_0^{(2n)}(q) \mathfrak{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right) \right| &\leq \left| A_0^{(2n)}(q) \right| \sum_{r=0}^{\infty} \left| A_{2r}^{(2n)}(q) \right| \\ &\leq \left| A_0^{(2n)}(q) \right| \sqrt{2 \sum_{r=0}^{\infty} \left| A_{2r}^{(2n)}(q) \right|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left| A_0^{(2n)}(q) \right| \sqrt{2 - 2 \left[A_0^{(2n)}(q) \right]^2} \\
 &\leq \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

Besides, as can be seen in [13], we have

$$a_{2n}(q) \geq a_{2n}(0) = 4n^2,$$

so the bound

$$\begin{aligned}
 &\left| 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} A_0^{(2n)}(q) \operatorname{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right) \right| \\
 &\leq \sqrt{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-w^2 t (q\beta/(4\alpha) + n^2)} = \sqrt{2} e^{-\eta\beta t} \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-w^2 t n^2} \\
 &\leq \sqrt{2} e^{-\eta\beta t} \int_N^{+\infty} e^{-w^2 t x^2} dx = \sqrt{2} e^{-\eta\beta t} \frac{1}{w\sqrt{2t}} \int_{w\sqrt{2t}N}^{+\infty} e^{-y^2/2} dy \\
 &< \sqrt{2} e^{-\eta\beta t} \frac{1}{w\sqrt{2t}} \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{-tw^2 N^2} = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\eta\beta t}}{w\sqrt{2t}} e^{-tw^2 N^2}
 \end{aligned}$$

follows from [29] p.889. □

Remark 4.4.3 Suppose $t \sim 1$, $w \sim 0.1$ and $\eta\beta \sim 0.5$, then according to the above Proposition 4.4.2, error between exact function $F(t, y; \eta)$ and the truncated sum at $N = 30$ is less than 10^{-3} .

From that latter result, using Proposition 4.4.1, we get the following price curves, that are functions of time before maturity $T - t$, with fixed maturity T and varying time t .

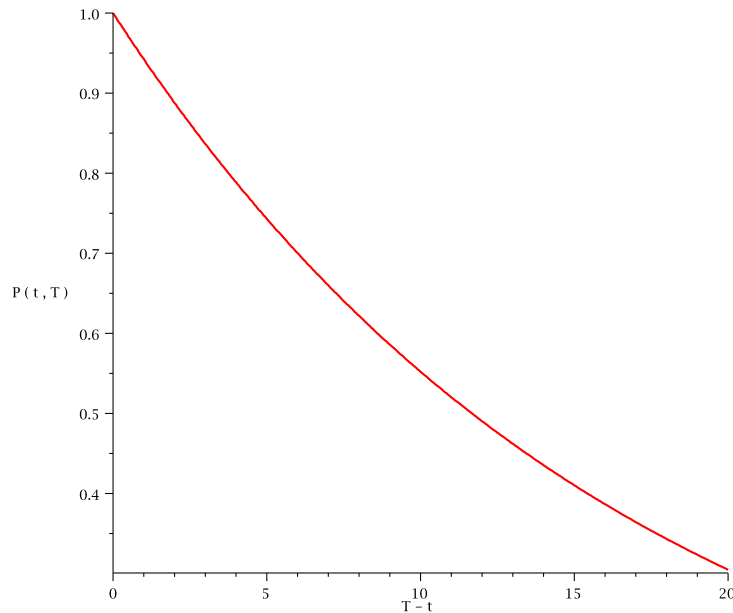
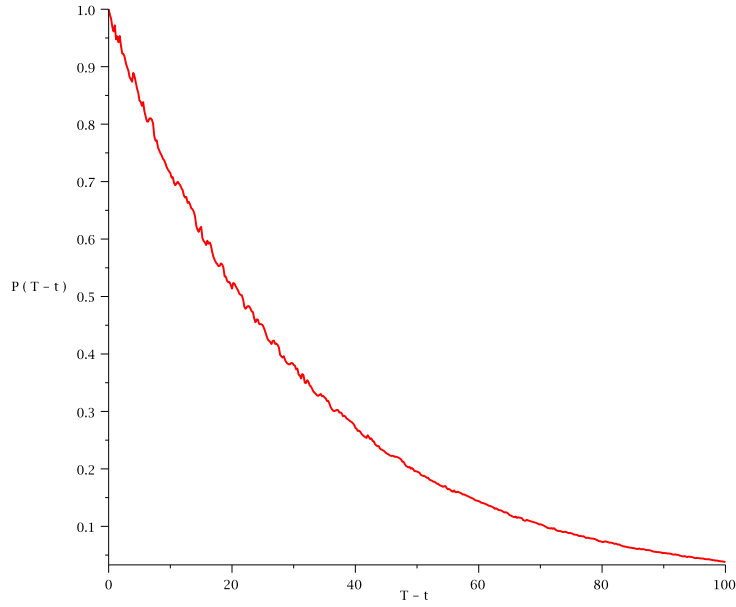
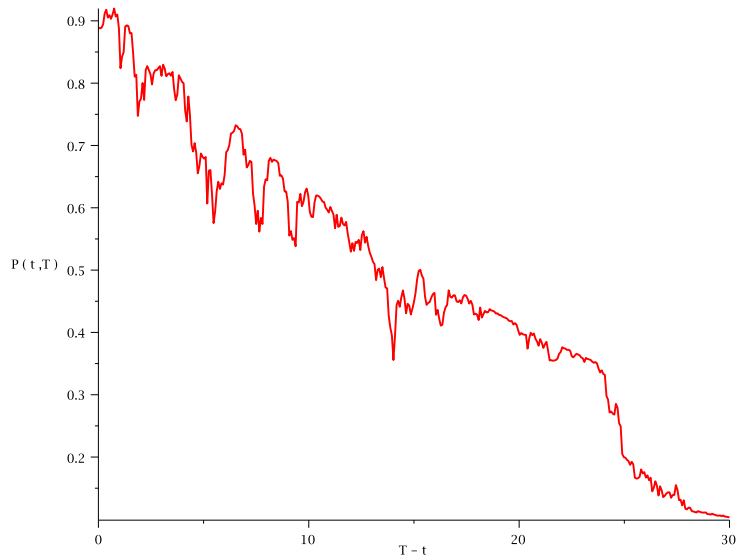


FIG. 4.1 – Bond price, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.22$, $w = 14.7$, $q = 0.001$, $T = 20$; $N = 30$


 FIG. 4.2 – Bond price, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.22$, $w = 2$, $q = 0.03$, $T = 100$; $N = 30$

 FIG. 4.3 – Bond price, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.22$, $w = 0.1$, $q = 1$, $T = 30$; $N = 30$

4.5 PERIODIC POTENTIALS IN TIME-DEPENDENT SCHRÖDINGER EQUATIONS

In physics and mechanics, distributions of exponential functionals $\mathcal{A}_L^{\text{exp}}$ arise when studying the transport properties of disordered systems of finite length L , or the maximum reached by the Brownian particle in a Brownian potential, see e.g. [37], or else in statistical physics of disordered systems, see [19] and [5]. In that context, to obtain thermodynamical properties of the considered system, one has to know the average over the whole disorder of the free energy which is a fundamental quantity of quantum mechanics modelled by $-\alpha \log(\mathcal{A}_L^{\text{exp}})$, with $\mathcal{A}_L^{\text{exp}}$ representing the partition function of the system. Feynman-Kac formula, see e.g. [57], makes it possible to construct numerical algorithms and compute

the average over the disorder of the free energy of a given system, so that we get thermodynamic properties of that system. However, it is worth to provide some tractable models that both fit reality of the system and allow for explicit computations.

Let $\Psi(\theta, t)$ be the probability amplitude for the electronic particle to be found at position θ at time $t \geq 0$. As proposed in Section 7.2.2 of [5], we focus on time-dependent Schrödinger equations

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \theta) = \mathbf{H}\Psi(t, \theta), \quad (4.5.1)$$

with $\hbar$ the well-known reduced Planck constant, $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ the energy operator, and a hamiltonian given as

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}E_{el}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - G_1 \cos(2\theta) + G_2 \sin(2\theta),$$

where θ is an electronic coordinate, $-\frac{1}{2}E_{el}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ is the kinetic energy operator and $V(\theta) = G_2 \sin(2\theta) - G_1 \cos(2\theta)$ is the time-independent potential energy at position θ .

In [5, p.189], the above particular Schrödinger equation clearly involves $\mathbf{H}_q$, as given in equation (4.2.1), as a Hamiltonian. It is solved within a strong approximation of Mathieu periodic functions as simple cosine and sine functions. Such a *time-dependent Mathieu's equation* describes the geometrical phase that a quantum state of any spin (which represents the quantum state of elementary particles) acquires when its hamiltonian varies through a certain circuit with a slow motion (that is adiabatically), as it is stated in [9]. According to [62], this kind of phase can be viewed as a consequence of parallel transport of the considered non-degenerate quantum system in an appropriate curved space.

We now refer to the previous sections for the computation of the Laplace transform

$$F(t, y; \eta) = \mathbf{E} \left[\exp \left(-\eta \int_0^t (\beta + \alpha \cos(wB_s + \mu)) ds \right) \right],$$

with $t > 0$, $\eta \in \mathbf{R}$, $\beta > \alpha \geq 0$, $\mu \in [0, \pi]$, $w > 0$ and $q = 4\eta\alpha/w^2$. It has been given in Relation (4.3.5) by

$$F(t, y; \eta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2 t (q\beta/\alpha + a_{2n}(q))/4} \left\{ \int_0^{\pi} \mathbf{ce}_{2n}(x, q) dx \right\} \mathbf{ce}_{2n} \left(\frac{wy + \mu}{2}, q \right).$$

4.6 APPENDICE

4.6.1 Généralités sur les groupes de Lie

Les modèles de taux d'intérêt définissent toujours explicitement ou implicitement un espace d'état, induit par les dynamiques du taux lui-même ou de la fonction définissant le taux. Généralement, il s'agit de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}_+$ dans les modèles à un facteur. Une idée de recherche est de considérer des espaces d'état plus généraux, comme les groupes de Lie compacts tels que $SO(n)$: la géométrie élaborée de tels espaces combinée à un modèle

régi par des équations *simples* permettrait potentiellement d'obtenir des modèles intéressants et complets aussi bien en théorie qu'en pratique. Nous présentons ici les premiers résultats obtenus dans cette optique.

De préférence, on considère des modèles avec un taux r_t qui suit une équation différentielle stochastique sous la forme classique

$$dr = A r dB,$$

avec B un mouvement brownien sur l'espace d'état considéré dans le modèle. Comme cela est développé dans le chapitre 16 de [33], il n'y a aucune raison de supposer que le véritable espace d'état de r soit un espace vectoriel "simple" comme $\mathbb{R}$. Il est par exemple expliqué p.466 que l'espace d'état peut être muni d'une structure de variété quand on considère des espaces d'états plus généraux et qu'on cherche à faire de la réduction de données. Il est ainsi question de modélisation sur la sphère S^1 . Nous en référons également à [58] (pp.224-238) qui traite des mouvements browniens sur les groupes de Lie matriciels.

Par suite, cela a du sens de travailler avec des modèles de taux définis sur des objets topologiquement plus complexes tels que les variétés ou les groupes de Lie. Si on considère un modèle géométrique sur le groupe orthogonal $SO(2)$ ou $SO(3)$, qui est compact, semi-simple et homogène, alors on peut obtenir des dynamiques stochastiques agréables à manier pour le taux court sous-jacent, faisant intervenir des formes linéaires ou des formes quadratiques définies positives sur l'espace d'état qui permettent ensuite de retrouver une expression de la forme $r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t)$, $\beta > \alpha > 0$, $w > 0$, $t > 0$ pour ce taux court.

Considérons un groupe de Lie linéaire G et notons $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie associée, qui peut aussi être vue comme l'espace tangent $T_e(G)$. On définit sur $\mathcal{G}$ un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on suppose que le taux court r est donné par

$$r(t) = g(X_t),$$

avec $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction fixée et $(X_t)_t$ un processus aléatoire sur le groupe G tel que

$$X_t = \exp(M_t).$$

Le processus $(M_t)_t$ évolue sur l'algèbre $\mathcal{G}$ et dont les dynamiques sont données par l'équation différentielle stochastique suivante

$$dM_t = \mu dt + \sigma dB_t,$$

avec $\sigma \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathcal{G}$ et B_t un mouvement brownien standard sur $\mathcal{G}$.

Par propriété de Markov, le prix $P(t, T)$ de l'obligation zéro coupon s'écrit

$$P(t, T) = F(T - t, W_t) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T g(X_s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

où W_t dénote le processus obtenu à partir de B_t par changement de base et donc de coordonnées dans l'algèbre $\mathcal{G}$. Nous précisons cela sur des exemples détaillés.

Si on suppose que la condition d'absence d'arbitrage est satisfaite, alors le prix actualisé $N_t := e^{-\int_0^t r(s) ds} P(t, T)$ est une martingale sous la mesure dite *sans risque*. Cette propriété permet d'obtenir une équation aux dérivées partielles satisfaite par F , puisque

$$d \left(e^{-\int_0^t r(s) ds} P(t, T) \right) = e^{-\int_0^t r(s) ds} [-r(t) P(t, T) dt + d(P(t, T))],$$

la formule d'Itô conduisant à

$$\begin{aligned} d(P(t, T)) &= d(F(t, W_t)) \\ &= \frac{\partial F}{\partial t}(t, W_t) dt + \langle \nabla_x \partial F(t, W_t) dW_t \rangle + \frac{1}{2} \text{Hess} F(t, W_t) d\langle W, W \rangle_t, \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

et par propriété de martingale de N_t , nous obtenons pour tout $t > 0$ que la fonction $F(\tau, x)$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, W_t) d\tau + \frac{1}{2} \text{Hess} F(\tau, W_t) d\langle W, W \rangle_t + r(t) F(\tau, W_t) d\tau = 0. \quad (4.6.2)$$

Nous allons à présent voir qu'en particulier, à partir de cette dernière équation (4.6.2), nous pouvons retrouver l'équation (4.3.3) sur un groupe de Lie particulier et ainsi calculer les prix d'obligations associés grâce à la Proposition 4.3.2.

4.6.2 Taux d'intérêt sur le cercle

Soient $\mathbb{G} := SO(2)$, $(B_t)_t$ un mouvement brownien réel standard et $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie associée au groupe $SO(2)$, soit $\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbb{R}$. Considérons le processus à valeurs dans $\mathcal{G}$ dont l'évolution est régie par l'équation

$$dM_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} w dB_t, \quad w \in \mathbb{R}.$$

Alors, le processus X satisfaisant l'EDS sur $\mathbb{G}$ suivante

$$dX = X dM \quad (4.6.3)$$

s'écrit

$$X_t = \begin{pmatrix} \cos(wB_t + \theta_0) & -\sin(wB_t + \theta_0) \\ \sin(wB_t + \theta_0) & \cos(wB_t + \theta_0) \end{pmatrix},$$

pour tout $t \geq 0$, avec la condition initiale $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Nous définissons à présent le taux court r_t comme étant une fonction quadratique de l'état X_t , c'est à dire que $r_t : SO(2) \rightarrow \mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$, avec

$$r(X) = \beta + \text{Tr}(SX), \quad S = S^\top, \quad \beta > 0 \quad (4.6.4)$$

et

$$r_t = r(X_t), \quad t \geq 0.$$

Proposition 4.6.1 *L'équation régissant l'évolution du processus r_t défini ci-avant par (4.6.3) et (4.6.4) est*

$$dr_t = \frac{1}{2}r(dX_t) - \frac{1}{4}(r_t - \beta)dt.$$

Preuve. Par la formule d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned} dr_t &= d\text{Tr}(SX_t) \\ &= \frac{1}{2}\langle X_t^\top S, dM_t + \frac{1}{2}dM_t.dM_t \rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle X_t^\top S, dM_t - \frac{1}{2}I_2 dt \rangle \\ &= \frac{1}{2}\text{Tr}\left(SX_t dM_t - \frac{1}{2}SX_t dt\right) \\ &= \frac{1}{2}r(dX_t) - \frac{1}{4}(r_t - \beta)dt, \end{aligned}$$

puisque le produit scalaire usuel sur $\mathbb{G}$ est donné par

$$\langle \Omega_1, \Omega_2 \rangle = \text{Tr}(\Omega_1^\top \Omega_2), \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{G}.$$

□

Avec les notations ci-dessus, pour $\beta > 0$, posons $\theta_0 = 0$ et $S = \alpha I_2$ avec $0 < \alpha < \beta$. Alors $r_t = \beta + \alpha \cos(wB_t)$ et la Relation (4.6.2) nous permet d'obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la fonction de prix F

$$-(\beta + \alpha \cos(wx))F(\tau, x) - \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, x) + \frac{w^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\tau, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tau > 0, \quad (4.6.5)$$

qu'il nous faut comparer avec l'équation (4.3.3). La proposition 4.4.1 nous donne immédiatement le prix de l'obligation zéro coupon associée, au temps $t \geq 0$ pour une échéance $T > t$ donnée

$$P(t, T) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-w^2(4\beta/w^2 + \alpha_{2n}(4\alpha/w^2))(T-t)/4} A_0^{(2n)} \left(\frac{4\alpha}{w^2} \right) \mathbf{ce}_{2n} \left(\frac{wx}{2}, \frac{4\alpha}{w^2} \right) \Big|_{x=B_t}.$$

4.6.3 Tentative de généralisation à $SO(3)$

Il est ensuite naturel de penser à généraliser les modèles de taux d'intérêt sur $SO(2)$ aux groupes orthogonaux en dimensions supérieures, faisant par exemple intervenir des mouvements browniens corrélés. Commençons par examiner ce que cela donne en dimension 3. Afin de simplifier les calculs et de rester *compétitif* par rapport aux modèles à deux facteurs, nous ne considérons que des sous-espaces de dimension 2, donc des modèles faisant intervenir au plus deux mouvements browniens, voir [33].

Soit X_t le processus sur $SO(3)$ donné par

$$X_t = \exp(W_t), \quad t > 0$$

avec $W_t := \begin{pmatrix} 0 & W_1(t) & 0 \\ -W_1(t) & 0 & W_2(t) \\ 0 & -W_2(t) & 0 \end{pmatrix}$ un mouvement brownien à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = \mathfrak{so}(3)$. Ses composantes réelles W_1 et W_2 sont des mouvements browniens de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, avec $0 < \rho < 1$. Commençons par établir deux lemmes de calcul matriciel.

Lemme 4.6.2 *Pour tout $t \geq 0$,*

$$X_t = P \exp(\Lambda B_t) P^{-1},$$

avec $P \in SO(3)$, B un mouvement brownien à valeurs dans l'algèbre et Λ une matrice diagonale.

Preuve. Remarquons que $\langle W, W \rangle_t = tR$ avec

$$R = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \rho \\ 0 & -2 & 0 \\ \rho & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal associé à R est

$$\chi_R(X) = (X + 2)(X + \rho + 1)(X - \rho + 1).$$

Soit $P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors nous avons $P^{-1}RP = D$ avec

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - \rho & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \rho \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant le mouvement brownien sur l'algèbre $\mathcal{G}$

$$B_t := \begin{pmatrix} 0 & B_1(t) & B_2(t) \\ -B_1(t) & 0 & 0 \\ -B_2(t) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $B_1 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(W_1 + W_2)$ et $B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_2 - W_1)$. La matrice de covariance associée à $(B_t)_t$ est D , puisque B_1 et B_2 sont des mouvements browniens indépendants. Posons ensuite

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

alors il vient

$$B = \Lambda^{-1} P^{-1} W P,$$

qui se réécrit $\Lambda B = P^{-1} W P$, et par conséquent

$$\exp(\Lambda B) = P^{-1} \exp(W) P,$$

d'où le lemme. □

Dans le lemme suivant, nous rappelons des résultats sur les exponentielles matricielles dans $SO(3)$.

Lemme 4.6.3 Soit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C := \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

alors les exponentielles de chacune de ces deux matrices sont données par

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 - Ka^2 & ka & Kab \\ -ka & 1 - K(a^2 + b^2) & kb \\ Kab & -kb & 1 - Kb^2 \end{pmatrix} \text{ et } \exp(C) = \begin{pmatrix} 1 - K(a^2 + b^2) & ka & kb \\ -ka & 1 - Ka^2 & Kab \\ -kb & Kab & 1 - Kb^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } k = \frac{\sin \sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } K = \frac{1 - \cos \sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 + b^2}.$$

Preuve. Le groupe de Lie compact $\mathbb{G} = SO(3)$ admet pour algèbre de Lie l'ensemble suivant de matrices à coefficients réels

$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Cette algèbre est de dimension 3 et nous avons de plus la relation suivante

$$\mathbb{G} = \{\exp(M), M \in \mathcal{G}\}.$$

Lorsque la troisième composante est nulle, alors on considère des matrices de la forme de A et on vérifie que

$$A^2 := \begin{pmatrix} -a^2 & 0 & ab \\ 0 & -(a^2 + b^2) & 0 \\ ab & 0 & -b^2 \end{pmatrix}.$$

Une récurrence immédiate donne

$$\begin{cases} A^{2n} = (-1)^{n-1} (a^2 + b^2)^{n-1} A^2 \\ A^{2n+1} = (-1)^n (a^2 + b^2)^n A, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$$

Par suite, en posant $c := \sqrt{a^2 + b^2}$, nous vérifions que

$$\exp(A) = I_3 + \frac{\sin c}{c} A + \frac{1 - \cos c}{c^2} A^2.$$

Si on pose $k := \frac{\sin c}{c}$ et $K := \frac{1 - \cos c}{c^2}$, nous obtenons la première relation du lemme.

Si c'est la deuxième composante qui est nulle, alors les matrices associées sont de la forme de C et nous obtenons cette fois-ci

$$\exp(C) = I_3 + kC + KC^2,$$

avec

$$C^2 := - \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & ab \\ 0 & ab & b^2 \end{pmatrix},$$

d'où le lemme. □

Il résulte des lemmes 4.6.2 et 4.6.3 la proposition suivante.

Proposition 4.6.4 *Le processus X s'écrit*

$$X = \begin{pmatrix} 1 - \frac{K}{2}(B_1 - B_2)^2 & -\sqrt{2}k(B_1 + B_2) & \frac{K}{2}(B_1^2 - B_2^2) \\ \frac{\sqrt{2}k}{4}(B_1 + B_2) & 1 - K(B_1^2 + B_2^2) & -\frac{\sqrt{2}k}{4}(B_1 - B_2) \\ \frac{K}{2}(B_1^2 - B_2^2) & \sqrt{2}k(B_1 - B_2) & 1 - \frac{K}{2}(B_1 + B_2)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.6.6)$$

avec $k_t = \frac{\sin \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}}{\sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}}$ et $K_t = \frac{1 - \cos \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}}{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}$, pour $t \geq 0$.

Preuve. Le lemme 4.6.2 permet de passer de l'exponentielle de matrices faisant intervenir des mouvements browniens corrélés à des browniens indépendants, et inversement. Grâce au lemme 4.6.3, nous avons

$$\exp(\Lambda B_t) = \begin{pmatrix} 1 - K_t(B_1(t)^2 + B_2(t)^2) & k_t\sqrt{2}B_1(t) & k_t\sqrt{2}B_2(t) \\ -k_t\frac{B_1(t)}{\sqrt{2}} & 1 - K_tB_1(t)^2 & K_tB_1(t)B_2(t) \\ -k_t\frac{B_2(t)}{\sqrt{2}} & K_tB_1(t)B_2(t) & 1 - K_tB_2(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 - \frac{K_t}{2}(B_1(t) - B_2(t))^2 & -\sqrt{2}k_t(B_1(t) + B_2(t)) & \frac{K_t}{2}(B_1(t) - B_2(t))(B_1(t) + B_2(t)) \\ \frac{\sqrt{2}k_t}{4}(B_1(t) + B_2(t)) & 1 - K_t(B_1(t)^2 + B_2(t)^2) & -\frac{\sqrt{2}k_t}{4}(B_1(t) - B_2(t)) \\ \frac{K_t}{2}(B_1(t) - B_2(t))(B_1(t) + B_2(t)) & \sqrt{2}k_t(B_1(t) - B_2(t)) & 1 - \frac{K_t}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 \end{pmatrix}.$$

□

Comme nous l'avons fait dans le paragraphe précédent, l'idée est maintenant de considérer un taux court r_t de la forme

$$r_t = \alpha + \text{Tr}(QX_t),$$

où Q , matrice symétrique à composantes réelles, et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont choisis de sorte que r_t reste positif pour tout $t \geq 0$.

Proposition 4.6.5 *Soient $Q = wI_3$, $w > 0$, et B_1, B_2 deux mouvements browniens réels standards, avec pour corrélation $0 \leq \rho \leq 1$, alors $P(t, T) = F(t, B_1(t), B_2(t))$ est solution de*

$$\begin{cases} \frac{1+\rho}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x, y) + \frac{1-\rho}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, x, y) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, x, y) = \left(\alpha + w + 2w \cos \sqrt{x^2 + y^2} \right) F(t, x, y), \\ F(T, x, y) = 1, \end{cases} \quad (4.6.7)$$

pour $0 \leq t \leq T$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve. Dans le groupe des rotations, nous considérons le processus de taux court $r_t = \text{Tr}(QX_t) + \alpha$ avec $Q = wI_3$ et $\alpha > w$. En effet

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X_t) &= 1 - \frac{K_t}{2}(B_1(t) - B_2(t))^2 + 1 - K_t(B_1(t)^2 + B_2(t)^2) + 1 - \frac{K_t}{2}(B_1(t) + B_2(t))^2 \\ &= 3 - 2K_t c_t^2 \\ &= 3 - 2(1 - \cos c_t) \\ &= 1 + 2 \cos c_t, \end{aligned}$$

où nous avons noté $c_t = \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2}$. Rappelons également que

$$t \longmapsto e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r(s) ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

est une martingale sous la mesure sans risque. Nous savons de plus, par propriété de Markov, que $P(t, T) = F(t, B_1(t), B_2(t))$, et la formule d'Itô conduit à

$$\begin{cases} -r_t F(t, B_1, B_2) + \frac{\partial F}{\partial t}(t, B_1, B_2) + \frac{1+\rho}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, B_1, B_2) + \frac{1-\rho}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(t, B_1, B_2) = 0 \\ r_t = \alpha + w \left(1 + 2 \cos \sqrt{B_1(t)^2 + B_2(t)^2} \right), \end{cases}$$

d'où la proposition. $\square$

L'équation aux dérivées partielles (4.6.7) est en dimension 3, ce qui ne nous permet plus d'appliquer les résultats de la proposition 4.3.2. Rien d'explicite ou permettant des calculs rapides n'est pour l'instant sorti de l'étude de ce modèle.

4.6.4 Taux d'intérêt sur $SL(2)$

Une autre idée, exposée dans ce paragraphe, est de considérer le groupe de Lie $SL(2)$, bien qu'il ne soit pas compact, afin d'appliquer les résultats du chapitre 4 sur les fonctionnelles hyperboliques de mouvements browniens réels.

Notons $sl(2)$ l'algèbre de Lie associée à $SL(2)$, munie de son produit scalaire usuel. Alors une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) standard est donnée par

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad e_3 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

avec pour exponentielles matricielles associées

$$\begin{aligned} \exp(e_1) &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ -\sin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}, \\ \exp(e_2) &= \begin{pmatrix} \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & 0 \\ 0 & \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\exp(e_3) = \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \sinh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, nous avons

$$e_2 e_3 = \sqrt{2} e_1 \text{ et } e_3 e_2 = -\sqrt{2} e_1,$$

donc nous obtenons le résultat suivant

Lemme 4.6.6 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $A = \alpha e_2 + \beta e_3$, alors

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \cosh(\delta) + \frac{\alpha \sinh(\delta)}{\delta \sqrt{2}} & \frac{\beta \sinh(\delta)}{\delta \sqrt{2}} \\ \frac{\beta \sinh(\delta)}{\delta \sqrt{2}} & \cosh(\delta) - \frac{\alpha \sinh(\delta)}{\delta \sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } \delta^2 = \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}.$$

Preuve. Remarquons que $A^2 = \left(\frac{a^2}{2} + \frac{\beta^2}{2}\right) I_2$, ce qui nous permet de calculer immédiatement $\exp(A) \in SL(2)$ grâce à l'identité

$$\exp(A) = \cosh \delta I_2 + \frac{1}{\delta} \sinh \delta A.$$

□

À présent, soit $(B_t)_t$ un mouvement brownien réel standard et $M_t \in sl(2)$, le processus défini par l'EDS

$$dM_t = (e_2 + e_3)dB_t, \quad t \geq 0,$$

alors $X = \exp(M)$ est un processus dans $SL(2)$ et d'après le lemme 4.6.6 ci-dessus, en posant $r_t = \text{Tr}(X_t)$, il vient

$$r_t = 2 \cosh \left(\sqrt{2} |B_t| \right) = 2 \cosh \left(\sqrt{2} B_t \right),$$

puisque $\cosh$ est une fonction paire. Les prix d'obligations zéro coupon associés au processus de taux court $\{r_t\}_{t \geq 0}$ pourraient ensuite être calculés via des formules comparables à l'expression (4.3.5), mais liées à l'équation dite de *Mathieu modifiée*, qui fait apparaître un potentiel hyperbolique.

CALCUL DE SENSIBILITÉS VIA LE CALCUL DE MALLIAVIN

5

SOMMAIRE

5.1	INTRODUCTION	89
5.2	THEORY	90
5.3	FINANCIAL APPLICATIONS	91
5.3.1	A particular hypoelliptic diffusion for Asian options	91
5.3.2	Langevin process	93
5.3.3	Geometric Brownian motion and Black-Scholes model	97
5.3.4	Vasicek interest rate model	103
5.4	APPENDIX	113

C E chapitre fait l'objet d'un article en préparation, avec pour titre provisoire *The Malliavin differentiation of hypoelliptic diffusion semigroups applied to interest rate modelling*.

Abstract

From the Malliavin derivative formulas presented in [4] for hypoelliptic heat semigroups, we derive explicit sensitivity formulae in Asian options and bonds pricing frameworks, in case of an underlying asset driven by a Brownian motion or a geometric Brownian motion. Explicit bond formulae are also given for the Vasicek model.

5.1 INTRODUCTION

Let M be a smooth n -dimensional manifold. We consider a globally defined Stratonovich SDE

$$\begin{cases} \delta X_t(x) = A(X_t(x))\delta B_t + A_0(X_t(x))dt \\ X_0(x) = x. \end{cases} \quad (5.1.1)$$

with $x \in M$, $A_0 \in \Gamma(TM)$, $A \in \Gamma(\mathbb{R}^r \otimes TM)$ for some r and B a $\mathbb{R}^r$ -valued standard Brownian motion on some filtered probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, \mathcal{F})$.

Solutions to (5.1.1) are diffusions with infinitesimal generator given by

$$L = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r A_i^2, \quad (5.1.2)$$

with $A_i = A(\cdot)e_i \in \Gamma(TM)$ and e_i is the i th standard unit vector in $\mathbb{R}^r$.

Let

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E}[(f \circ X_t(x))] \quad (5.1.3)$$

be the semi-group associated to (5.1.1) and acting on bounded measurable functions $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. The strong Markov property states that if $F(t, x) := P_{T-t}f(x)$ then $F(t, X_t(x))$ is a local martingale (and $F(T, x) = f(x)$). Therefore the differentiated process $dF(t, \cdot)T_x X_t$ is still a local martingale.

Those functionals appear in financial mathematics to compute option price sensitivities related to Asian options and bonds pricing, usually referred to as *Greeks*, cf. e.g. [24], [12], [15], [50] and references therein.

In some cases, $F(T, x)$ models Asian options prices and if we are getting interested in Greeks computations, it is relevant to get a formula of the following type

$$d_x P_t f(v) = \mathbb{E}[f(X_t(x))\phi_t v],$$

with weight ϕ_t not involving function f or any of its derivatives. Indeed, it enables us to choose a not so smooth function for f , which is of undeniable importance for Greeks computation, as we shall see in Section 5.3.

The paper is organized as follows. In Section 5.2, we recall theoretical results of Malliavin calculus for hypoelliptic diffusions, as stated in [4] before developping their financial interest in Section 5.3. In case of Asian options, we compare our results to those given in [27] and [28] and involving Skorohod integrals. In case of an asset driven by a geometric Brownian motion, we get a general Malliavin weight for the delta sensitivity to the option rate as an Itô integral in Proposition 5.3.7. In particular, we get in Proposition 5.3.9 an analytical tractable formula to compute sensitivities for Asian options in Black Scholes model,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E} \left[f \left(S_0 \int_0^T e^{\sigma B_s + (mu - \frac{\sigma^2}{2})s} ds \right) \right] \\ &= \left(\frac{2}{\sigma} \right)^{2p+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p} \tau^{1/2}}{u^p v^{p+1}} f(u) \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma^2 u v^2}{8} \right) \theta(v, \tau) \\ & \quad \times \left(\frac{\sigma^3 v^2}{16} e^{2p\tau} + \frac{\sigma(p+1)}{2S_0 u} - \frac{1}{\sigma u^2} \right) dudv, \end{aligned}$$

with $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $p = 2\mu/\sigma^2 - 1$ and $\tau = \sigma^2 T/4 > 0$. Then we get the same explicit kind of weight for derivatives of bond prices with regards to initial rates, in case of an underlying one or two parameters Vasicek short rate model.

5.2 THEORY

In this section, we adopt notations of [4]. Let $X_t(x)$ be the solution of equation (5.1.1).

Definition 5.2.1 *An operator L on the manifold M is said to be hypoelliptic if for every distribution u defined on an open subset $U \subset M$ such that Lu is C^∞ , u is also C^∞ .*

We recall the so-called Hörmander's condition of hypoellipticity (see [48] p.49 for instance), given as

$$\text{Lie}(A_i, [A_0, A_i] : i = 1, \dots, r)(x) = T_x M \quad \text{for all } x \in M. \quad (5.2.1)$$

By Hörmander's theorem, see [48] p.50, semigroup (5.1.3) is strongly Feller under condition (5.2.1) and maps bounded measurable functions on M to bounded continuous functions on M . Our aim is now to get stochastic representations for the derivative $d(P_t f)$ which do not involve derivatives of function f , still under hypothesis (5.2.1)

Definition 5.2.2 *We define the Malliavin matrix or Malliavin covariance matrix of $X_t(x)$ by*

$$C_t(x) := \int_0^t (X_s^{-1} A)_x (X_s^{-1} A)_x^* ds.$$

Let $\lambda \in T_x^*M$ and $dB^\lambda = dB + a\lambda dt$ with

$$a_s = (X_{s*}^{-1}A)_x^*. \quad (5.2.2)$$

Remarks 5.2.3 – The process a is predictable and takes its values in $T_xM \otimes (\mathbf{R}^r)^* \equiv T_xM \otimes \mathbf{R}^r$.

– We now write X^λ for the flow to SDE (5.1.1), driven by the perturbed Brownian motion B^λ , and analogously $C^\lambda(x)$.

The following result is established and proved in Theorem 3.2 p.5 of [4].

Theorem 5.2.4 Let M be a compact manifold and $f \in C^1(M)$. Assume that condition (5.2.1) is satisfied.

Then for each $v \in T_xM$,

$$d(P_t f)_x v = \mathbb{E}[(f \circ X_t(x))\phi_t v],$$

where ϕ is an adapted process with values in T_x^*M such that each ϕ_t is L^p for any $1 \leq p < \infty$ and given by

$$\begin{aligned} \phi_t v &= \left(\int_0^t (X_{s*}^{-1}A)_x dB_s \right) C_t^{-1}(x)v \\ &+ \sum_{k,l} \left(C_t^{-1}(x) \left[\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) \right] C_t^{-1}(x) \right)_{kl} v^l. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

5.3 FINANCIAL APPLICATIONS

5.3.1 A particular hypoelliptic diffusion for Asian options

We consider a contingent asset S_t driving an option of the form

$$V = \mathbb{E} \left[f \left(\int_0^T S_t dt \right) \right],$$

for some $T > 0$ and some measurable function f with at most polynomial growth at infinity. For instance, in case of a *Call*, we set $f(x) = (x - K)_+$, where $K > 0$ is fixed and denotes the strike price.

We want to compute so-called *Greek delta* of the form

$$\delta_0 = \frac{\partial V}{\partial S_0}. \quad (5.3.1)$$

Let $A_T = \int_0^T S_t dt$. We suppose that dynamics of the couple (S_t, A_t) are given by

$$\begin{cases} dS_t = \sigma(S_t)dB_t + \mu(S_t)dt \\ dA_t = S_t dt, \quad t \geq 0, \\ S_0 \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

Here σ and μ belong to $\mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ and B is a standard real Brownian motion. As it clearly satisfies Hörmander's condition of hypoellipticity (5.2.1), bidimensional process $X_t = (S_t, A_t)$ is a hypoelliptic diffusion with initial condition $(S_0, 0)$, but it can also be considered as a particular extension of the elliptic case handled in [27] and [28]. Indeed, in [27] p.404, the derivative delta with respect to the initial condition is computed in the one-dimensional elliptic framework as

$$\delta_0 = \mathbb{E}_{S_0} \left[f(A_T) \int_0^T \frac{2Y(t)^2}{\sigma(S_t)} \left(\int_0^T Y(s) ds \right)^{-1} dB_t \right] = \mathbb{E}_{S_0} [f(A_T) \phi_T], \quad (5.3.3)$$

with $(Y(t), t \geq 0)$ the first variation process given by

$$\frac{dY(t)}{Y(t)} = \mu'(S_t)dt + \sigma'(S_t)dB_t, \quad Y(0) = 1.$$

That formula is quite general and leads to quite simple explicit expressions for the weight ϕ_T in various cases, as we shall see in next paragraph 5.3.2. However, ϕ_T is given as a Skorohod integral, whereas Theorem 5.2.4 gives weights that involve Itô's integrals, which can be computed in every case with Riemann sums or Monte-Carlo methods. Moreover, Theorem 5.2.4 allows for more general payoff functions of (S_T, A_T) and is valid in any dimension, whereas (5.3.3) requires a payoff depending only on A_T and only concerns dimension one.

Besides, within the framework of Section 5.2, we get the following expression for the covariance matrix associated to (S_t, A_t) .

Proposition 5.3.1 *For all $T > 0$ and $S_0 \in \mathbf{R}$, the Malliavin matrix of X_T is given by*

$$C_T(S_0) = \int_0^T y_t^{-2} \sigma(S_t)^2 \begin{pmatrix} 1 & -\int_0^t y_s ds \\ -\int_0^t y_s ds & \left(\int_0^t y_s ds \right)^2 \end{pmatrix} dt, \quad (5.3.4)$$

with $y_t = \exp \left(\int_0^t \sigma'(S_s) dB_s + \int_0^t \mu'(S_s) ds \right)$ for $t > 0$.

Proof. To fit with notations of Section 5.2, let $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ be a diffusion in $\mathbf{R}^2$, solution of (5.3.2) with initial condition $x = (S_0, 0)$,

$$Z_t = B_t, \quad A_0(X) = \begin{pmatrix} \mu(X^1) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad A_1(X) = \begin{pmatrix} \sigma(X^1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

From Definition (5.2.2) and Relation (7.10) p. 48 of [48] we have

$$C_t(S_0) = \int_0^t Y_s^{-1} A_1(X_s) A_1(X_s)^* (Y_s^{-1})^* ds,$$

with the first variation process

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_t & 0 \\ \int_0^t y_s ds & 1 \end{pmatrix},$$

hence

$$Y_t^{-1} = y_t^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\int_0^t y_s ds & y_t \end{pmatrix}.$$

Then we get

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} C_t &= Y_t^{-1} A_1(X_t) A_1(X_t)^* (Y_t^{-1})^* \\ &= Y_t^{-1} \begin{pmatrix} \sigma(X_t^1) \\ 0 \end{pmatrix} (\sigma(X_t^1) \quad 0) (Y_t^{-1})^* \\ &= y_t^{-2} \sigma(X_t^1)^2 \begin{pmatrix} 1 & -\int_0^t y_s ds \\ -\int_0^t y_s ds & \left(\int_0^t y_s ds\right)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

hence the proposition. $\square$

Now we compare computation of δ_0 via Theorem 5.2.4 and via the direct method and Relation (5.3.3) when the couple of processes $(S_t, A_t)_t$ is given by equation (5.3.2) and admits an explicit density.

5.3.2 Langevin process

We consider the trivial example of [4, 7.4 p.19], with (S_t, A_t) satisfying stochastic differential equation (5.3.2) with $\sigma(S_t) = \sigma$ and $\mu \equiv 0$, that is

$$\begin{cases} dS_t = \sigma dB_t \\ dA_t = S_t dt, \quad t \geq 0, \\ S_0 \in \mathbb{R}, \quad A_0 = 0. \end{cases} \quad (5.3.5)$$

That also corresponds to the interest rate model of Ho-Lee, see [12] p.72.

Proposition 5.3.2 *The couple (A_t, S_t) of (5.3.5) is a gaussian process given by*

$$\begin{cases} S_t = \sigma B_t + S_0, \\ A_t = \sigma \int_0^t B_s ds + t S_0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

with density function

$$p(u, v; S_0) du dv = \mathbb{P}_{S_0}((A_t, S_t) \in du dv) \quad (5.3.6)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\sigma^2 \pi t^2} \exp \left\{ -\frac{6(u - tS_0)^2}{\sigma^2 t^3} + \frac{6(u - tS_0)(v - S_0)}{\sigma^2 t^2} - \frac{2(v - S_0)^2}{\sigma^2 t} \right\} dudv.$$

Proof. Process A_T is the integral of a standard Brownian motion, and (S_T, A_T) corresponds to the well-known Langevin process (see for instance [47], [39], [38] or the more recent work [31]). The density (5.3.6) is simple to evaluate by computing the covariance matrix of (A_T, S_T) . $\square$

As a consequence of the latter Proposition, we get the following result which holds for any measurable function f .

Corollary 5.3.3 *For $T > 0$ we have*

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \mathbb{E}[f(A_T, S_T)\phi_T] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \frac{\partial p}{\partial S_0}(u, v; S_0) dudv \\ &= \frac{6}{\sigma^2 T} \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \left(\frac{u}{T} - \frac{2S_0 + v}{3} \right) p(u, v; S_0) dudv \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{\sigma^4 T^3 \pi} \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \left(\frac{u}{T} - \frac{2S_0 + v}{3} \right) \exp \left\{ -\frac{6(u - tS_0)^2}{\sigma^2 t^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(u - tS_0)(v - S_0)}{\sigma^2 t^2} - \frac{2(v - S_0)^2}{\sigma^2 t} \right\}, \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

with ϕ_T given explicitly by

$$\phi_T = \frac{6}{\sigma T} \left(\frac{1}{T} \int_0^T B_t dt - \frac{1}{3} B_T \right).$$

Proof. Corollary 5.3.3 is a consequence of the Langevin density (5.3.6) and of Relation

$$\mathbb{E}[f(A_T, S_T)] = \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) p(u, v; S_0) dudv$$

combined with Theorem 5.2.4 and formula (5.3.1), as well as (5.3.3). $\square$

Next we plot several curves showing the behaviour of Asian option prices (straight lines) and Greek δ_0 (dotted lines) as functions of various parameters.

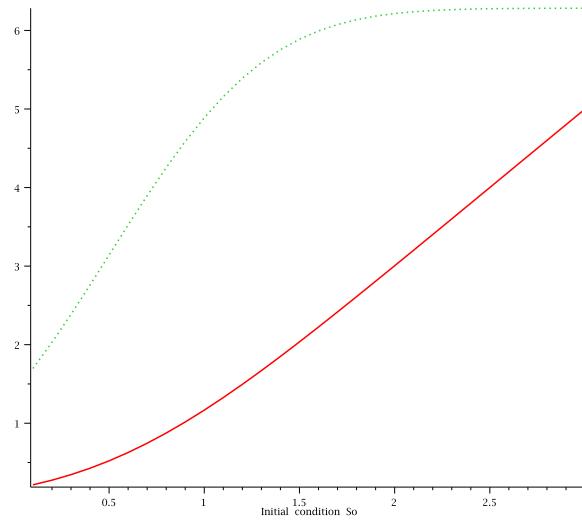


FIG. 5.1 - $f(u, v) = (u - K)^+$; $\sigma = 0.8$; $T = 2$; $K = 1$

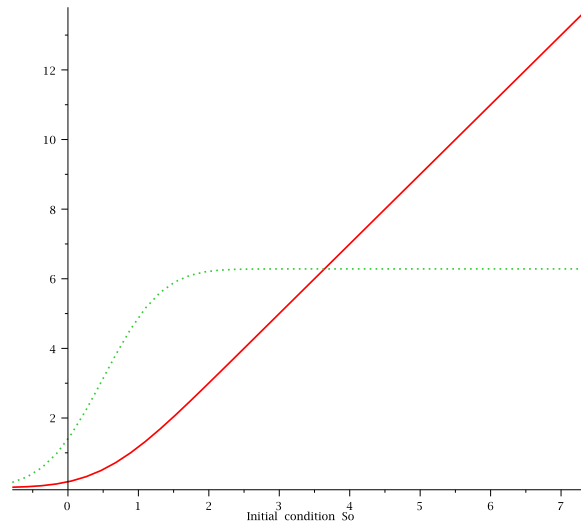


FIG. 5.2 - $f(u, v) = (u - K)^+$; $\sigma = 0.8$; $T = 2$; $K = 1$

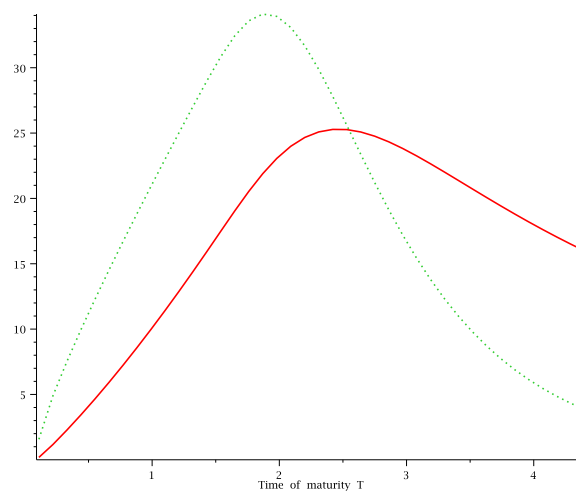


FIG. 5.3 - $f(u, v) = (u - K)^+$; $\sigma = 0.8$; $S_0 = 1$; $K = 1$

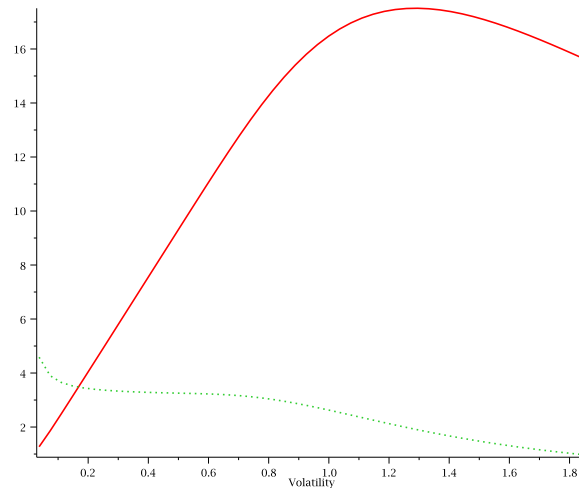


FIG. 5.4 - $f(u, v) = (u - K)^+$; $S_0 = 1$; $T = 2$; $K = 1$

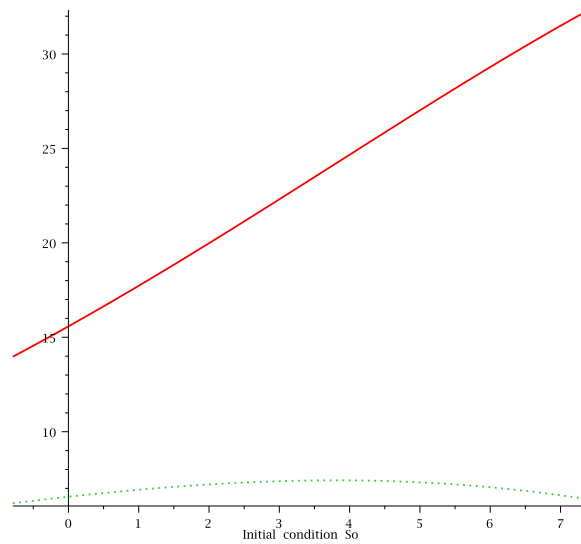


FIG. 5.5 - $f(u, v) = (u - K)^+$; $\sigma = 6.7$; $T = 5$; $K = 1$

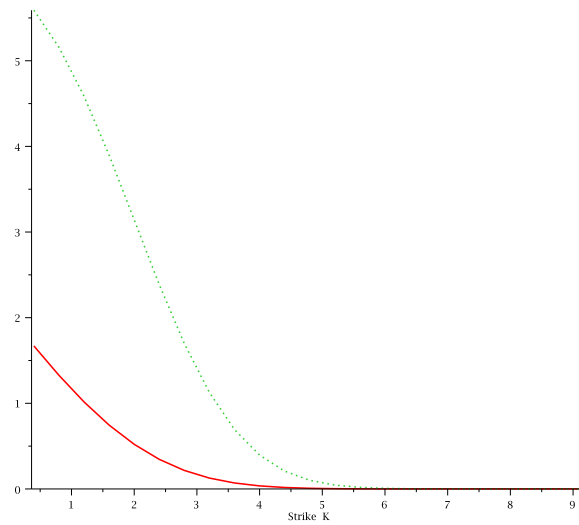


FIG. 5.6 - $f(u, v) = (u - K)^+$; $\sigma = 4$; $T = 2$; $S_0 = 1$

5.3.3 Geometric Brownian motion and Black-Scholes model

If the short term interest rate process $(r_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ is modelled according to a geometric Brownian motion, then we consider the following stochastic differential equation

$$\begin{cases} dr_t = \sigma r_t dB_t + \mu r_t dt \\ dX_t = r_t dt, \quad t \geq 0, \\ (r_0, X_0) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.3.8)$$

Here B is a standard real Brownian motion, $\sigma > 0$ is the volatility and $\mu \in \mathbb{R}$ is the drift. Initial condition is $x = (r_0, X_0) \in \mathbb{R}_+^2$, so that we work with a positive short term interest rate.

Proposition 5.3.4 *Solution of SDE (5.3.8) is given by*

$$\begin{cases} r_t = r_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \\ X_t = X_0 + \int_0^t r_s ds = X_0 + r_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.9)$$

To simplify our incoming formulae, let

$$y_t := \exp \left\{ \sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right\} \quad \text{and} \quad z_t = \int_0^t y_s ds, \quad (5.3.10)$$

so that $r_t(x) = r_0 y_t$ and $X_t(x) = X_0 + r_0 z_t$.

To fit notations of Section 5.2, let $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be given by

$$f(x, y) = \exp(-y),$$

then from (5.1.3) and (5.3.9) we get

$$(P_t f)(x) = \mathbb{E} [\exp(-X_t(x))] = e^{-X_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(-r_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds \right) \right],$$

which is almost the price $P(\tau, \tau + t)$ of a zero-coupon bond driven by the short rate $(r_s)_s$, with $r_\tau = r_0$. Then Theorem 5.2.4 gives

$$d(P_t f)_x v = e^{-X_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(-r_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds \right) \phi_t v \right],$$

with ϕ_t given by Proposition 5.3.7. This corresponds to the computation of

$$\frac{\partial P(\tau, \tau + t)}{\partial r_t}.$$

We now want to determine explicitly adapted process ϕ_t which appears in Theorem 5.2.4.

Proposition 5.3.5 For each $x = (r_0, X_0) \in \mathbb{R}^2$, the Malliavin matrix of $(r_t, X_t)(x)$ as in (5.3.9) is

$$C_t(x) = \sigma^2 r_0^2 \begin{pmatrix} t & -\int_0^t z_s ds \\ -\int_0^t z_s ds & \int_0^t z_s^2 ds \end{pmatrix}. \quad (5.3.11)$$

Proof. To fit notations of Section 5.2, let $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ be a diffusion in $\mathbb{R}^2$, solution of (5.1.1) with a two dimensional Brownian motion $(B_t, \tilde{B}_t)$,

$$A_0(X) = \begin{pmatrix} \mu - \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X, \quad A_1(X) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \text{ and } A_2(X) = 0.$$

Thus processes X^1 and X^2 follow equation (5.3.8) and write as in (5.3.9). From definition (5.2.2) and relation (7.10) p. 48 of [48], with notations (5.3.10), we have

$$C_t(x) = \int_0^t Y_s^{-1} A_1(X_s(x)) A_1(X_s(x))^* (Y_s^{-1})^* ds,$$

where

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_t & 0 \\ z_t & 1 \end{pmatrix}, \text{ so } Y_t^{-1} = y_t^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_t & y_t \end{pmatrix}.$$

Thus

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} C_s(x) &= Y_s^{-1} A_1(X_s(x)) A_1(X_s(x))^* (Y_s^{-1})^* \\ &= y_s^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z_s & y_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma r_0 y_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -z_s \\ 0 & y_s \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 r_0^2 \begin{pmatrix} 1 & -z_s \\ -z_s & z_s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

for $0 \leq s \leq t$, so that

$$\begin{aligned} C_t(x) &= \int_0^t Y_s^{-1} A_1(X_s(x)) A_1(X_s(x))^* (Y_s^{-1})^* ds \\ &= \sigma^2 r_0^2 \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & -z_s \\ -z_s & z_s^2 \end{pmatrix} ds \\ &= \sigma^2 r_0^2 \begin{pmatrix} t & -\int_0^t z_s ds \\ -\int_0^t z_s ds & \int_0^t z_s^2 ds \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Therefore we get the proposition. $\square$

Corollary 5.3.6 For $t > 0$ and $x \in \mathbb{R}^2$,

$$C_t^{-1}(x) = \sigma^{-2} r_0^{-2} \alpha_t \begin{pmatrix} \int_0^t z_s^2 ds & \int_0^t z_s ds \\ \int_0^t z_s ds & t \end{pmatrix}, \quad (5.3.12)$$

with

$$\alpha_t = \left[t \int_0^t z_s^2 ds - \left(\int_0^t z_s ds \right)^2 \right]^{-1} = \left[2 \int_0^t (t-s) y_s \int_0^s \tau y_\tau d\tau ds \right]^{-1}.$$

Proof. From Proposition 5.3.5, we compute

$$\begin{aligned} \det[C_t(x)] &= \sigma^4 r_0^4 \left[t \int_0^t z_s^2 ds - \left(\int_0^t z_s ds \right)^2 \right] \\ &= \sigma^4 r_0^4 \left[2t \int_0^t (t-s) y_s z_s ds - \left\{ \int_0^t (t-s) y_s ds \right\}^2 \right] \\ &= 2\sigma^4 r_0^4 \int_0^t (t-s) y_s \int_0^s \tau y_\tau d\tau ds, \end{aligned}$$

by integration by parts, change of variable then change of integration order by the Fubini theorem. Hence we get Corollary 5.3.6. $\square$

In the following proposition, we get from Theorem 5.2.4 an explicit expression for ϕ_t .

Proposition 5.3.7 *Let $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ and z be given by (5.3.10), then*

$$\begin{aligned} \phi_t v &= r_0^{-1} \alpha_t \left\{ \sigma^{-1} \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) z_s dB_u ds \right. \\ &\quad + \alpha_t \int_0^t \int_0^t \int_0^s \{ (z_s - z_x)(z_\tau + 2z_u) + z_\tau(z_s - z_u) \} z_x(z_s - z_\tau) d\tau ds dx du \Big\} v_1 \\ &\quad + r_0^{-1} \alpha_t \left\{ \sigma^{-1} \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) dB_u ds \right. \\ &\quad + \alpha_t \int_0^t \int_0^t \int_0^s \{ (2z_s - z_x)(z_x - z_\tau) + z_x(z_\tau - z_u) \} d\tau ds dx du \Big\} v_2. \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Proof. We begin with computing the first part of the sum appearing in (5.2.3). With notations of Proposition 5.3.5, we get from Corollary 5.3.6

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^t \left(X_{s*}^{-1} A \right)_x dB_s \right) C_t^{-1}(x) \\ &= \left(\int_0^t A_1(X_s(x))^* (Y_s^{-1})^* dB_s \right) C_t^{-1}(x) \\ &= \left(\int_0^t y_s^{-1} (\sigma r_0 y_s \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & -z_s \\ 0 & y_s \end{pmatrix} dB_s \right) C_t^{-1}(x) \\ &= \sigma r_0 \left(\int_0^t dB_s - \int_0^t z_s dB_s \right) C_t^{-1}(x) \\ &= \frac{\alpha_t}{\sigma r_0} \left(\int_0^t \int_0^t z_s (z_s - z_\tau) dB_\tau ds - \int_0^t \int_0^t (z_s - z_\tau) dB_\tau ds \right). \end{aligned}$$

Besides, from Definition (5.2.2) and Proposition 5.3.4, we have

$$y_t^\lambda(x) = \exp \left(\sigma B_t^\lambda(x) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right),$$

where

$$dB_t^\lambda(x) = dB_t + \left(X_{t*}^{-1} A \right)_x^* \lambda dt$$

$$\begin{aligned}
 &= dB_t + Y_t^{-1} A_1(X_t(x)) \lambda dt \\
 &= dB_t + \sigma r_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & -z_t \end{pmatrix} dt \\
 &= dB_t + \sigma r_0 [\lambda_1 - z_t \lambda_2] dt.
 \end{aligned}$$

So we compute

$$\frac{\partial y_t^\lambda}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0}(x) = \sigma^2 r_0 t y_t,$$

and

$$\frac{\partial y_t^\lambda}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0}(x) = -\sigma^2 r_0 y_t \int_0^t z_s ds.$$

Therefore

$$\frac{\partial z_t^\lambda}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0}(x) = \sigma^2 r_0 \int_0^t s y_s ds = \sigma^2 r_0 \int_0^t (z_t - z_s) ds$$

and

$$\frac{\partial z_t^\lambda}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0}(x) = \sigma^2 r_0 \int_0^t y_s \int_0^s z_\tau d\tau ds = -\sigma^2 r_0 \int_0^t (z_t - z_s) z_s ds.$$

Then, from Proposition 5.3.5, we get

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) \\
 &= \sigma^4 r_0^3 \begin{pmatrix} 0 & -\int_0^t \int_0^s (z_s - z_\tau) d\tau ds \\ -\int_0^t \int_0^s (z_s - z_\tau) d\tau ds & 2 \int_0^t z_s \int_0^s (z_s - z_\tau) d\tau ds \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

and

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) \\
 &= \sigma^4 r_0^3 \begin{pmatrix} 0 & \int_0^t \int_0^s (z_s - z_\tau) z_\tau d\tau ds \\ \int_0^t \int_0^s (z_s - z_\tau) z_\tau d\tau ds & -2 \int_0^t z_s \int_0^s (z_s - z_\tau) z_\tau d\tau ds \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

These two latter relations combined with Theorem 5.2.4 lead to expression (5.3.13). Indeed we have

$$\begin{aligned}
 &\left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{1,1} \\
 &= 2r_0^{-1} \alpha_t^2 \left(\int_0^t z_s ds \right) \left[\int_0^t z_s ds \times \int_0^t \int_0^s z_s (z_s - z_\tau) d\tau ds - \int_0^t z_s^2 ds \times \int_0^t \int_0^s (z_s - z_\tau) d\tau ds \right] \\
 &= 2r_0^{-1} \alpha_t^2 \left(\int_0^t z_s ds \right) \int_0^t \int_0^t \int_0^s (z_s - z_x) z_x (z_s - z_\tau) d\tau ds dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{1,2} \\
 &= \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{2,1} = r_0^{-1} \alpha_t^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (2z_s - z_u - z_x) z_x (z_s - z_\tau) d\tau ds dx du
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{2,2} \\
&= r_0^{-1} \alpha_t^2 \left[-2t \int_0^t z_s ds \times \int_0^t \int_0^s (z_s - z_\tau) d\tau ds - 2t^2 \int_0^t z_s \int_0^s (z_s - z_\tau) d\tau ds \right] \\
&= -2x_1^{-1} \alpha_t^2 t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (z_s - z_x)(z_s - z_\tau) d\tau ds dx.
\end{aligned}$$

We also get

$$\begin{aligned}
\left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{1,1} &= 2r_0^{-1} \alpha_t^2 \left(\int_0^t z_s ds \right) \int_0^t \int_0^t \int_0^s (z_s - z_x) z_x z_\tau (z_s - z_\tau) d\tau ds dx, \\
\left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{1,2} &= \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{2,1} \\
&= r_0^{-1} \alpha_t^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (2z_s - z_u - z_x) z_x z_\tau (z_s - z_\tau) d\tau ds dx du
\end{aligned}$$

and

$$\left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{2,2} = -2r_0^{-1} \alpha_t^2 t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (z_s - z_x) z_\tau (z_s - z_\tau) d\tau ds dx.$$

From Relation (5.2.3), we have

$$\begin{aligned}
& \phi_t v \\
&= \sigma^{-1} r_0^{-1} \alpha_t \left[\int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) z_s dB_u ds v_1 + \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) dB_u ds v_2 \right] \\
&+ \left\{ \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{1,1} + \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{2,1} \right\} v_1 \\
&+ \left\{ \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{1,2} + \left[C_t^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} \Big|_{\lambda=0} C_t^\lambda(x) C_t^{-1} \right]_{2,2} \right\} v_2. \\
&= \sigma^{-1} r_0^{-1} \alpha_t \left[\int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) z_s dB_u ds v_1 + \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) dB_u ds v_2 \right] \\
&+ r_0^{-1} \alpha_t^2 \left[2 \int_0^t z_s ds \times \int_0^t \int_0^t \int_0^s (z_s - z_x) z_x (z_s - z_\tau) d\tau ds dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (2z_s - z_u - z_x) z_x z_\tau (z_s - z_\tau) d\tau ds dx du \right] v_1 \\
&+ r_0^{-1} \alpha_t^2 \left[\int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (2z_s - z_u - z_x) z_x (z_s - z_\tau) d\tau ds dx du \right. \\
&\quad \left. - 2t \int_0^t \int_0^t \int_0^s (z_s - z_x) z_\tau (z_s - z_\tau) d\tau ds dx \right] v_2 \\
&= \sigma^{-1} r_0^{-1} \alpha_t \left[\int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) z_s dB_u ds v_1 + \int_0^t \int_0^t (z_s - z_u) dB_u ds v_2 \right] \\
&+ r_0^{-1} \alpha_t^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^s \{ (z_s - z_x)(z_\tau + 2z_u) + z_\tau(z_s - z_u) \} z_x (z_s - z_\tau) d\tau ds dx du v_1 \\
&+ r_0^{-1} \alpha_t^2 \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^s \{ (2z_s - z_x)(z_x - z_\tau) + z_x(z_\tau - z_u) \} d\tau ds dx du v_2.
\end{aligned}$$

hence Proposition 5.3.7. $\square$

The Black-Scholes model for Asian options corresponds to the case of $\sigma(S) = \sigma S$ and $\mu(S) = \mu S$ with $\sigma > 0$ and $\mu \in \mathbf{R}$ in equation (5.3.2). In other words, (S_t, A_t) solves (5.3.8) with initial condition $(S_0, 0)$, or else from (5.3.9)

$$\begin{cases} S_t = S_0 \exp \left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right) \\ A_t = S_0 \int_0^t e^{\sigma B_s + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) s} ds, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.16)$$

Proposition 5.3.8 *For the Black-Scholes model, with notations of Section 5.3.1, the delta $\frac{\partial V}{\partial S_0} = \mathbb{E} \left[f \left(\int_0^T S_t dt \right) \pi \right] = \mathbb{E} [f(A_T) \pi]$ is explicit with weight π given by*

$$\pi = \frac{2}{S_0 \sigma^2} \frac{S_T - S_0}{A_T} + \frac{2\mu}{\sigma^2 S_0}.$$

Proof. This result is given in [28] p.208. Indeed, the dynamics $dS_t = \sigma S_t dB_t + \mu S_t dt$ imply that the first variation process is $Y(t) = \frac{S_t}{S_0}$, and we get from (5.3.3)

$$\begin{aligned} \pi &= \int_0^T \frac{2Y(t)^2}{\sigma(S_t)} \left(\int_0^T Y(s) ds \right)^{-1} dB_t \\ &= \int_0^T \frac{2S_t}{\sigma S_0} A_T^{-1} dB_t \\ &= \frac{2}{\sigma^2 S_0} A_T^{-1} \int_0^T \sigma S_t dB_t \\ &= \frac{2}{\sigma^2 S_0} A_T^{-1} [(S_T - S_0) - \mu A_T] \\ &= \frac{2}{\sigma^2 S_0} \frac{S_T - S_0}{A_T} - \frac{2\mu}{\sigma^2 S_0}. \end{aligned}$$

□

Above Proposition 5.3.8 obviously provides a more tractable formula for weight ϕ_T than Relation (5.3.13). However, as we already discussed in previous paragraph 5.3.1, formula (5.3.3) requires a payoff depending only on A_T , not on underlying asset S_T and involves a Skorohod integral which can be annoying for practical purpose in many cases.

Let $\theta(v, t)$ be the function defined as

$$\theta(v, t) = \frac{v e^{\pi^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty e^{-\xi^2/(2t)} e^{-v \cosh \xi} \sinh(\xi) \sin(\pi \xi/t) d\xi, \quad v, t > 0. \quad (5.3.17)$$

We now give an analytical expression for δ_0 , as in Corollary 5.3.3.

Proposition 5.3.9 *Let $\sigma > 0$ and $\mu \in \mathbf{R}$. For $T > 0$, we have*

$$\mathbb{E} [f(A_T)] = \left(\frac{2}{\sigma} \right)^{2p} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p \tau/2}}{(uv)^{p+1}} f(u) \exp \left(-\frac{2}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma^2 uv^2}{8} \right) \theta(v, \tau) du dv, \quad (5.3.18)$$

and for all S_0 ,

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \frac{\partial}{\partial S_0} \mathbb{E}[f(A_T)] \\ &= \left(\frac{2}{\sigma}\right)^{2p+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-p\tau/2}}{u^p v^{p+1}} f(u) \exp\left(-\frac{2}{\sigma^2 u} - \frac{\sigma^2 uv^2}{8}\right) \theta(v, \tau) \\ &\quad \times \left(\frac{\sigma^3 v^2}{16} e^{2p\tau} + \frac{\sigma(p+1)}{2S_0 u} - \frac{1}{\sigma u^2}\right) dudv,\end{aligned}\tag{5.3.19}$$

with $p = 2\mu/\sigma^2 - 1$ and $\tau = \sigma^2 T/4 > 0$.

Proof. Let $p = 2\mu/\sigma^2 - 1$ and $T > 0$. From Proposition 5.3.8, greek delta writes

$$\delta_0 = \mathbb{E}\left[f(A_T) \left\{ \frac{2}{S_0 \sigma^2} \frac{S_T - S_0}{A_T} + \frac{2\mu}{\sigma^2 S_0} \right\}\right],$$

with $A_T = \int_0^T S_t dt$ and $S_t = S_0 e^{\sigma B_t - p\sigma^2 t/2}$. Let

$$g(x, y) = f(x) \left\{ \frac{2}{\sigma^2 x} \left(e^{\sigma y + p\sigma^2 T/2} - 1 \right) + \frac{2\mu}{\sigma^2 S_0} \right\},$$

then

$$\delta_0 = \mathbb{E}[g(A_T, B_T)].$$

Besides, from references [45] and [50], we have the density

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\int_0^\tau e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds \in dx, B_\tau \in dy\right) \\ = \frac{\sigma}{2} e^{-p\sigma y/2 - p^2 \sigma^2 \tau/8} \exp\left(-2 \frac{1 + e^{\sigma y}}{\sigma^2 x}\right) \theta\left(\frac{4e^{\sigma y/2}}{\sigma^2 x}, \frac{\sigma^2 \tau}{4}\right) \frac{dx}{x} dy,\end{aligned}$$

$x > 0$, $y \in \mathbb{R}$ and $\tau > 0$. So

$$\mathbb{E}[f(A_T)] = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(u) \mathbb{P}\left(\int_0^T e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds \in du, B_T \in dy\right)$$

and

$$\delta_0 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} g(u, y) \mathbb{P}\left(\int_0^T e^{\sigma B_s - p\sigma^2 s/2} ds \in du, B_T \in dy\right),$$

then the changes of variable $\tau = \sigma^2 T/4$ and $v = 4e^{\sigma y/2}/(\sigma^2 u)$ lead to (5.3.18) and (5.3.19). $\square$

5.3.4 Vasicek interest rate model

One parameter model

Let B be a standard real Brownian motion, $\sigma > 0$, a and b be real constants with $a \neq 0$, and $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. We consider the two dimensional process $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ solution of the following stochastic differential equation

$$\begin{cases} dX_t^1 = \sigma dB_t + a(b - X_t^1)dt \\ dX_t^2 = X_t^1 dt, \quad t \geq 0, \\ X_0^1 = x_1 \text{ and } X_0^2 = x_2. \end{cases}\tag{5.3.20}$$

Proposition 5.3.10 For all $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ and $t \geq 0$, solution $X_t(x)$ of SDE (5.3.20) is given by

$$\begin{cases} X_t^1 = x_1 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s \\ X_t^2 = x_2 + \int_0^t X_s^1 ds = x_2 + bt + \frac{1 - e^{-at}}{a}(x_1 - b) + \sigma \int_0^t e^{-as} \int_0^s e^{a\tau} dB_\tau ds, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.21)$$

Proposition 5.3.11 For all $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ and $t \geq 0$, the Malliavin matrix of $X_t(x)$ is deterministic and independent of initial condition x , with

$$C_t = \frac{\sigma^2}{2a^3} \begin{pmatrix} a^2(e^{2at} - 1) & -a(e^{at} - 1)^2 \\ -a(e^{at} - 1)^2 & a^2(3 + 2at + e^{2at} - 4e^{at}) \end{pmatrix}. \quad (5.3.22)$$

Proof. The result comes immediately from Relation (5.3.4) of Proposition 5.3.1 since $X_t(x)$ follows equation (5.3.20), that is equation (5.3.2) with $\sigma(X_t^1) = \sigma > 0$ and $\mu(X_t^1) = a(b - X_t^1)$.

If we detail the computation, keeping notations of Proposition 5.3.1, we have

$$Y_t = \begin{pmatrix} e^{-at} & 0 \\ \frac{1 - e^{-at}}{a} & 1 \end{pmatrix}, \text{ so } Y_t^{-1} = e^{at} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-at} - 1 & e^{-at} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at} & 0 \\ \frac{1 - e^{at}}{a} & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus for $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} C_s(x) &= Y_s^{-1} A_1(X_s(x)) A_1(X_s(x))^* (Y_s^{-1})^* \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} e^{as} & 0 \\ \frac{1 - e^{as}}{a} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{as} & \frac{1 - e^{as}}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{pmatrix} e^{2as} & \frac{e^{as} - e^{2as}}{a} \\ \frac{e^{as} - e^{2as}}{a} & \frac{(1 - e^{as})^2}{a^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned} C_t(x) &= \int_0^t Y_s^{-1} A_1(X_s(x)) A_1(X_s(x))^* (Y_s^{-1})^* ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2a^3} \begin{pmatrix} a^2(e^{2at} - 1) & -a(e^{at} - 1)^2 \\ -a(e^{at} - 1)^2 & 2at + e^{2at} - 4e^{at} + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Therefore we get the proposition. $\square$

Corollary 5.3.12 For $t > 0$

$$C_t^{-1} = \frac{a}{\sigma^2} \alpha_t \begin{pmatrix} 2at + e^{2at} - 4e^{at} + 3 & a(e^{at} - 1)^2 \\ a(e^{at} - 1)^2 & a^2(e^{2at} - 1) \end{pmatrix}, \quad (5.3.23)$$

with

$$\alpha_t = \left[ate^{2at} - 2e^{2at} - at - 2 + 4e^{at} \right]^{-1}.$$

Proof. From Proposition 5.3.11, we have

$$\det(C_t(x)) = \frac{\sigma^4}{2a^4} (e^{2at}(at - 2) + 4e^{at} - (at + 2)),$$

then (5.3.23) is a direct consequence of Proposition 5.3.11. $\square$

Proposition 5.3.13 *Let $v \in \mathbb{R}^2$, then*

$$\phi_t v = \frac{a\alpha_t}{\sigma^2} \begin{pmatrix} (1 - e^{at})^2 B_t + 2(1 + at - e^{at}) \int_0^t e^{as} dB_s \\ a(e^{2at} - 1)B_t + 2a(1 - e^{at}) \int_0^t e^{as} dB_s \end{pmatrix}^* v. \quad (5.3.24)$$

Proof. Since C_t is deterministic and does not depend on initial condition, then from Theorem 5.2.4 and above Corollary 5.3.12,

$$\begin{aligned} \phi_t v &= \left(\int_0^t (X_s^{-1} A)_x dB_s \right) C_t^{-1}(x) v \\ &= \left(\int_0^t \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{as} & \frac{1 - e^{as}}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dB_s \right) C_t^{-1}(x) v \\ &= \left(\int_0^t e^{as} dB_s \quad \int_0^t \frac{1 - e^{as}}{a} dB_s \right) C_t^{-1}(x) v \\ &= \frac{\alpha_t}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \int_0^t a e^{as} dB_s & \int_0^t (1 - e^{as}) dB_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2at + e^{2at} - 4e^{at} + 3 & a(1 - e^{at})^2 \\ a(1 - e^{at})^2 & a^2(e^{2at} - 1) \end{pmatrix} v \\ &= \frac{\alpha_t}{\sigma^2} \begin{pmatrix} a(2at + e^{2at} + 3 - 4e^{at}) \int_0^t e^{as} dB_s + a(1 - e^{at})^2 \int_0^t (1 - e^{as}) dB_s \\ a^2(1 - e^{at})^2 \int_0^t e^{as} dB_s + a^2(e^{2at} - 1) \int_0^t (1 - e^{as}) dB_s \end{pmatrix}^* v, \end{aligned}$$

hence the proposition. $\square$

Now, here comes an application of that latter proposition to bond pricing.

Corollary 5.3.14 *Let the short rate be given by*

$$dr_t = \sigma dB_t + a(b - r_t)dt,$$

then for $T > 0$, we have

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\partial}{\partial r_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \frac{a\alpha_T}{\sigma^2} \left\{ (1 - e^{aT})^2 B_T + 2(1 + aT - e^{aT}) \int_0^T e^{as} dB_s \right\} \right]. \end{aligned}$$

Proof. By using Proposition 5.3.13, where we set $v = (1, 0)$, the proof is straightforward. $\square$

Now here is an analytical formula for δ .

Proposition 5.3.15 For $T > 0$, let $R_T = \int_0^T r_t dt$. Then we have an explicit value for the greek δ as the following double integral

$$\delta = \frac{a\alpha_T}{\sigma^2} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x} \left\{ (1 + 2aTe^{aT} - e^{2aT})y - \frac{2a}{\sigma}(aTe^{aT} + e^{aT} - e^{2aT})(x - m_T) \right\} f_{(R_T, B_T)}(x, y) dx dy, \quad (5.3.25)$$

where $m_T = \frac{r_0}{a}(1 - e^{-aT}) + \frac{b}{a}(aT + e^{-aT} - 1)$ and the joint density $f_{(R_T, B_T)}$ of the couple (R_T, B_T) is given by

$$f_{(R_T, B_T)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|M_T|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M_T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

with

$$M_T = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^2}{a^2}(T - \frac{3}{2a} + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT}) & \frac{\sigma}{a}(T - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-aT}) \\ \frac{\sigma}{a}(T - \frac{1}{a} + \frac{1}{a}e^{-aT}) & T \end{pmatrix}.$$

Proof. Let $0 \leq t \leq T$. From [12] p.58 and Proposition 5.3.10, r_t is normally distributed, conditional on $\mathcal{F}_s$, for each $0 \leq s \leq t$, with mean and variance respectively given by

$$\mathbb{E}[r_t | \mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)})$$

and

$$\text{Var}(r_t | \mathcal{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-a(t-s)}).$$

Besides, from (5.3.21), we have

$$\begin{aligned} R_T &= \int_0^T r_t dt \\ &= r_0 \int_0^T e^{-at} dt + b \int_0^T (1 - e^{-at}) dt + \sigma \int_0^T e^{-at} \int_0^t e^{as} dB_s dt \\ &= \frac{r_0}{a}(1 - e^{-aT}) + \frac{b}{a}(aT + e^{-aT} - 1) + \sigma \int_0^T e^{as} \int_s^T e^{-at} dt dB_s \\ &= \frac{r_0}{a}(1 - e^{-aT}) + \frac{b}{a}(aT + e^{-aT} - 1) + \frac{\sigma}{a}B_T - \frac{\sigma e^{-aT}}{a} \int_0^T e^{at} dB_t. \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

As a consequence, R_T is gaussian with

$$\mathbb{E}[R_T] = \frac{r_0}{a}(1 - e^{-aT}) + \frac{b}{a}(aT + e^{-aT} - 1) := m_T,$$

$$\text{Var}(R_T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - \frac{3}{2a} + \frac{2}{a}e^{-aT} - \frac{1}{2a}e^{-2aT} \right)$$

and so is the couple (R_T, B_T) , with

$$\text{Cov}(R_T, B_T) = \mathbb{E}[(R_T - m_T)B_T] = \frac{\sigma}{a} \left\{ T + \frac{1}{a}(e^{-aT} - 1) \right\},$$

hence the covariance matrix M_T as given in the proposition, and therefore the density function $f_{(R_T, B_T)}$. Relation (5.3.26) also leads to

$$\int_0^T e^{at} dB_t = e^{aT} B_T - \frac{a}{\sigma} e^{aT} (R_T - m_T),$$

so we get, from Corollary 5.3.14

$$\begin{aligned} \delta &= \mathbb{E} \left[\exp(-R_T) \frac{a\alpha_T}{\sigma} \left\{ (1 - e^{aT})^2 B_T + 2(1 + aT - e^{aT}) \int_0^T e^{as} dB_s \right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp(-R_T) \frac{a\alpha_T}{\sigma^2} \left\{ (1 + 2aTe^{aT} - e^{2aT}) B_T - \frac{2a}{\sigma} (aTe^{aT} + e^{aT} - e^{2aT})(R_T - m_T) \right\} \right], \end{aligned}$$

hence the proposition. $\square$

From [12] p.59,

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right] = A(T) e^{-r_0 C(T)}, \quad (5.3.27)$$

where

$$\begin{aligned} A(T) &= \exp \left\{ \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) (C(T) - T) - \frac{\sigma^2}{4a} C(T)^2 \right\} \\ \text{and } C(T) &= \frac{1}{a} [1 - e^{-aT}]. \end{aligned}$$

From (5.3.27) and above Proposition 5.3.25, we can do some numerical experiments. As an illustration, we plot prices of bonds (continuous lines) with associated delta (dotted lines) as functions of various parameters.

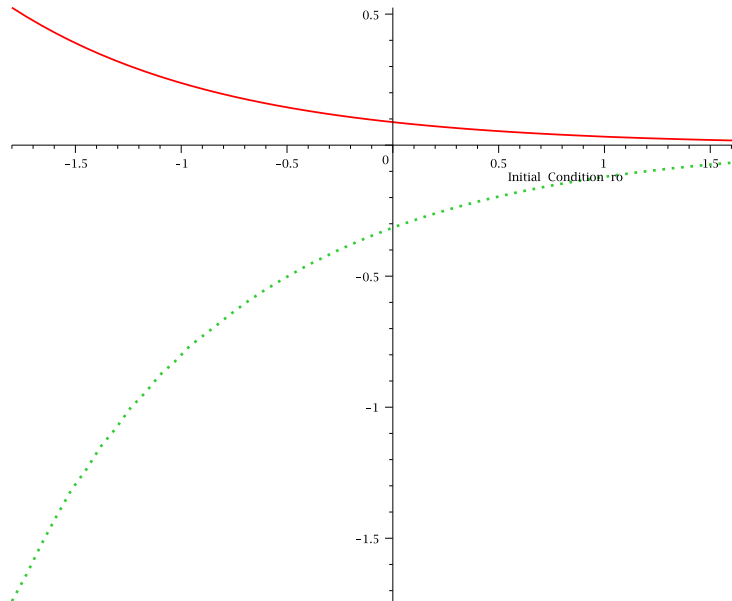


FIG. 5.7 – $a = b = 1, \sigma = 0.7; T = 5$

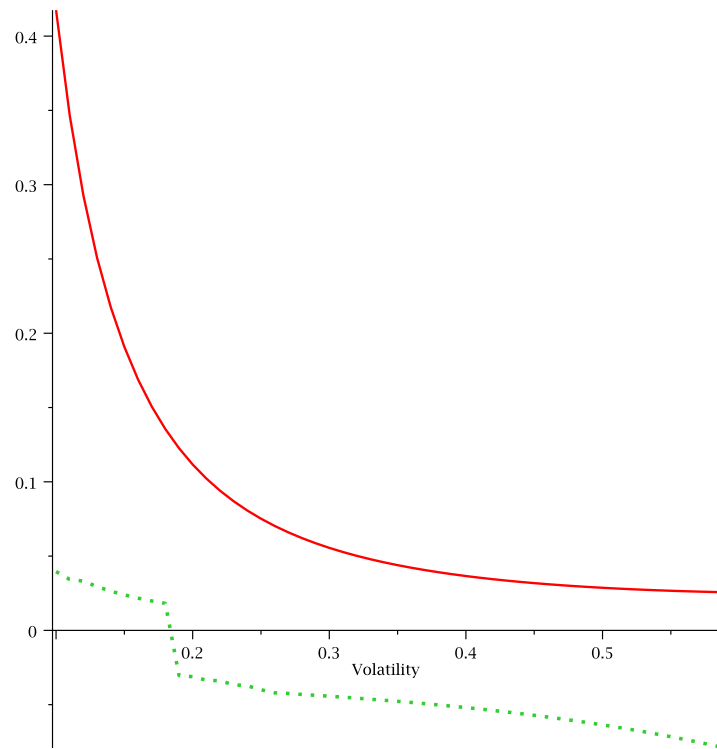


FIG. 5.8 – $a = b = 1$, $T = 6$; $r_0 = 0.5$

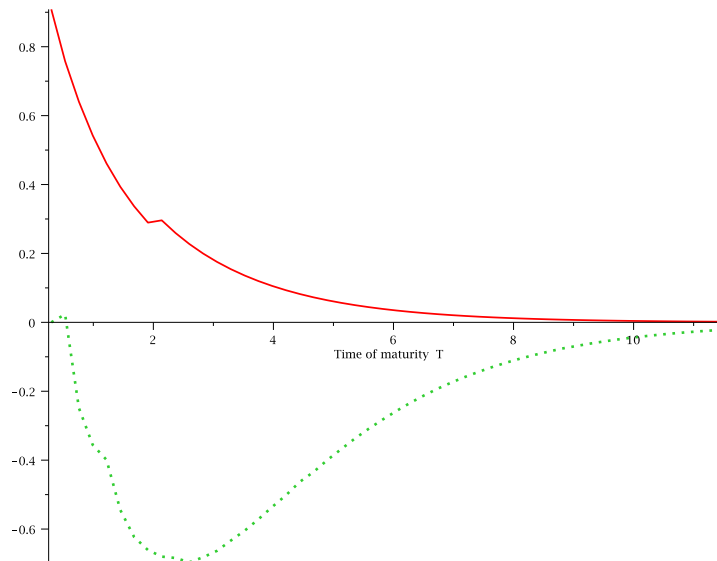


FIG. 5.9 – $a = b = 1$, $\sigma = 0.96$; $r_0 = 0.5$

Multi parameters model

As it is done in [12] p.138 where the so-called two-factors version of the Gaussian Vasicek model is considered, we now generalize that model to a n -factors model, setting the

following dynamics

$$\begin{cases} dX_t^{(1)} = a_1(b_1 - X_t^{(1)})dt + \sigma_1 dB_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} = a_2(b_2 - X_t^{(2)})dt + \sigma_2 dB_t^{(2)} \\ \dots \\ dX_t^{(n)} = a_n(b_n - X_t^{(n)})dt + \sigma_n dB_t^{(n)}, \\ dX_t^{(n+1)} = (X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + \dots + X_t^{(n)})dt, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.28)$$

Here $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)}, \dots, B_t^{(n)})$ is a standard n -dimensional Brownian motion with correlation matrix $\Sigma_n \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ and parameters $\sigma_i > 0$, a_i and b_i are real constants with $a_i \neq 0$, for all i .

To keep the same notations as in Section 5.2, we fix $n \in \mathbb{N}^*$ and we rather set

$$\begin{cases} dX_t = \begin{pmatrix} dX_t^{(1)} \\ dX_t^{(2)} \\ \dots \\ dX_t^{(n+1)} \end{pmatrix} = \mathbf{S}dB_t + (\mathbf{A}X_t + \mathbf{C})dt, \quad t \geq 0, \\ X_0 = \begin{pmatrix} X_0^{(1)} \\ X_0^{(2)} \\ \dots \\ X_0^{(n+1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases} \quad (5.3.29)$$

with

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \sigma_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -a_n & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ \vdots \\ a_n b_n \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_t = \begin{pmatrix} B_t^{(1)} \\ B_t^{(2)} \\ \vdots \\ B_t^{(n)} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

With notations of previous section 5.2 and of [48] p.48, let Y_t be the first variation process $\frac{\partial X_t}{\partial X_0}$. In Vasicek model, that process is purely deterministic and we get the following expression for Y_t .

Lemma 5.3.16 For all $t \geq 0$,

$$Y_t = \begin{pmatrix} e^{-a_1 t} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-a_2 t} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{-a_n t} & 0 \\ \frac{1}{a_1}(1 - e^{-a_1 t}) & \dots & \dots & \frac{1}{a_n}(1 - e^{-a_n t}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Proof. It is immediate from $dY_t = \mathbf{A}Y_t dt$ and $Y_0 = I_{n+1}$. $\square$

Proposition 5.3.17 For all $t \geq 0$, with above notations, the covariance matrix C_t is deterministic, does not depend on initial condition X_0 and is given by

$$C_t$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^2}{2a_1}(e^{2a_1t}-1) & 0 & \cdots & 0 & \frac{-\sigma_1^2}{2a_1^2}(e^{a_1t}-1)^2 \\ 0 & \frac{\sigma_2^2}{2a_2}(e^{2a_2t}-1) & \ddots & \vdots & \frac{-\sigma_2^2}{2a_2^2}(e^{a_2t}-1)^2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma_n^2}{2a_n}(e^{2a_nt}-1) & \frac{-\sigma_n^2}{2a_n^2}(e^{a_nt}-1)^2 \\ \frac{-\sigma_1^2}{2a_1^2}(e^{a_1t}-1)^2 & \frac{-\sigma_2^2}{2a_2^2}(e^{a_2t}-1)^2 & \cdots & \frac{-\sigma_n^2}{2a_n^2}(e^{a_nt}-1)^2 & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{2a_i^3}(3+e^{2a_it}-4e^{a_it}+2a_it) \end{pmatrix}.$$

Proof. Let $t \geq 0$. We have

$$C_t = \int_0^t Y_s^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i(\mathbf{S}_i)^T \right] (Y_s^{-1})^T ds,$$

with $\mathbf{S}_i$ denoting column i of matrix $\mathbf{S}$ defined above. We have

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i(\mathbf{S}_i)^T = \text{Diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2, 0),$$

and from Lemma 5.3.16 we have

$$Y_t^{-1} = \begin{pmatrix} e^{a_1t} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{a_2t} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e^{a_nt} & 0 \\ \frac{1}{a_1}(1-e^{a_1t}) & \cdots & \cdots & \frac{1}{a_n}(1-e^{a_nt}) & 1 \end{pmatrix},$$

so that from Relation (7.10) p.48 of [48], we get

$$\frac{d}{ds} C_s = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 e^{2a_1s} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\sigma_1^2}{a_1} e^{a_1s} (1-e^{a_1s}) \\ 0 & \sigma_2^2 e^{2a_2s} & \ddots & \vdots & \frac{\sigma_2^2}{a_2} e^{a_2s} (1-e^{a_2s}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_n^2 e^{2a_ns} & \frac{\sigma_n^2}{a_n} e^{a_ns} (1-e^{a_ns}) \\ \frac{\sigma_1^2}{a_1} e^{a_1s} (1-e^{a_1s}) & \frac{\sigma_2^2}{a_2} e^{a_2s} (1-e^{a_2s}) & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{a_n} e^{a_ns} (1-e^{a_ns}) & \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{a_i^2} (e^{a_is}-1)^2 \end{pmatrix},$$

hence the proposition, with $C_t = \int_0^t \frac{d}{ds} C_s ds$. $\square$

From above Proposition 5.3.17 and Lemma 5.4.1 of upcoming Section 5.4, we compute

$$\det C_t = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^4}{2a_i^4} \left\{ (a_it-2)e^{2a_it} + 4e^{a_it} - (a_it+2) \right\} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (e^{2a_jt}-1), \quad t \geq 0.$$

As well as C_t , matrix C_t^{-1} is symmetric and for $1 \leq i \leq j \leq n+1$,

$$[C_t^{-1}]_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j}}{\det C_t} [\text{Cof} C_t]_{i,j} = [C_t^{-1}]_{j,i}.$$

Let $\alpha_i = \frac{\sigma_i^2}{2a_i}(e^{2a_it} - 1)$ and $\beta_i = \frac{-\sigma_i^2}{2a_i^2}(e^{a_it} - 1)^2$ for $i \in \{1, \dots, n\}$, then

$$\begin{aligned}
 [\text{CofC}_t]_{i,i} &= f(n-1; \alpha_j, j \neq i; \beta_j, j \neq i; \sum_{j=1}^n \frac{\sigma_j^2}{2a_j^3}(3 + e^{2a_jt} - 4e^{a_jt} + 2a_jt)) := c_i, \quad 1 \leq i \leq n, \\
 [\text{CofC}_t]_{i,j} &= \frac{\sigma_i^2 \sigma_j^2}{4a_i^2 a_j^2} (e^{a_it} - 1)^2 (e^{a_jt} - 1)^2 \prod_{k \neq i,j} \frac{\sigma_k^2}{2a_k} (e^{2a_kt} - 1) \\
 &= (-1)^{i+j} \beta_i \beta_j \prod_{k \neq i,j} \alpha_k, \quad 2 \leq i \leq n, j \neq i, \\
 [\text{CofC}_t]_{i,n+1} &= \frac{-\sigma_i^2}{2a_i^2} (e^{a_it} - 1)^2 \prod_{j \neq i} \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (e^{2a_jt} - 1) = (-1)^{n+2-i} \beta_i \prod_{j \neq i} \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq n, \\
 [\text{CofC}_t]_{n+1,n+1} &= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{2a_i} (e^{2a_it} - 1) = \prod_{i=1}^n \alpha_i.
 \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

Therefore we get the following expression for C_t^{-1} .

Corollary 5.3.18 For all $t \geq 0$,

$$C_t^{-1} = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^4}{2a_i^4} \{ (a_it - 2)e^{2a_it} + 4e^{a_it} - (a_it + 2) \} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (e^{2a_jt} - 1) \right\}^{-1} \tag{5.3.31}$$

$$\times \begin{pmatrix} c_1 & \beta_1 \beta_2 \prod_{k \neq 1,2} \alpha_k & \cdots & \beta_1 \beta_n \prod_{k \neq 1,n} \alpha_k & -\beta_1 \prod_{j \neq 1} \alpha_j \\ \beta_1 \beta_2 \prod_{k \neq 1,2} \alpha_k & c_2 & \ddots & \vdots & -\beta_2 \prod_{j \neq 2} \alpha_j \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \beta_n \prod_{k \neq n-1,n} \alpha_k & \vdots \\ \beta_1 \beta_n \prod_{k \neq 1,n} \alpha_k & \cdots & \beta_{n-1} \beta_n \prod_{k \neq n-1,n} \alpha_k & c_n & -\beta_n \prod_{j \neq n} \alpha_j \\ -\beta_1 \prod_{j \neq 1} \alpha_j & -\beta_2 \prod_{j \neq 2} \alpha_j & \cdots & -\beta_n \prod_{j \neq n} \alpha_j & \prod_{i=1}^n \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Now with notations of Theorem 5.2.4, we obtain an analytic expression for the Malliavin weight ϕ_t .

Proposition 5.3.19 For $t > 0$, $\phi_t \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ and

$$\begin{aligned}
 [\phi_t]_k &= D_t \sigma_k \left\{ \frac{\sigma_k^2}{a_k^3} [1 + a_k t - e^{a_k t}] \prod_{j \neq k} \alpha_j + \sum_{i \neq k} \frac{\sigma_i^4}{2a_i^4} [(a_it - 2)e^{2a_it} + 4e^{a_it} - (2 + a_it)] \prod_{j \neq k,i} \alpha_j \right\} \int_0^t e^{a_k s} dB_s^{(k)} \\
 &+ D_t \beta_k \sum_{i \neq k} \left\{ \frac{\sigma_i^3}{a_i^2} (e^{a_it} - 1) \prod_{j \neq k,i} \alpha_j \right\} \int_0^t e^{a_i s} dB_s^{(i)} \\
 &- D_t \beta_k \prod_{j \neq k} \alpha_j \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{a_i} B_t^{(i)}, \quad 1 \leq k \leq n,
 \end{aligned}$$

and

$$[\phi_t]_{n+1} = D_t \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i}{a_i} \left[\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \right) B_t^{(i)} + \frac{\sigma_i^2}{a_i} (1 - e^{a_it}) \prod_{j \neq i} \alpha_j \int_0^t e^{a_i s} dB_s^{(i)} \right],$$

$$\text{with } D_t = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^4}{2a_i^4} \{ (a_it - 2)e^{2a_it} + 4e^{a_it} - (a_it + 2) \} \prod_{j \neq i} \frac{\sigma_j^2}{2a_j} (e^{2a_jt} - 1) \right\}^{-1}.$$

Proof. Let $c_i = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{2a_k^3} (3 + e^{2a_kt} - 4e^{a_kt} + 2a_kt) \prod_{j \neq i} \alpha_j - \sum_{k \neq i} \beta_k^2 \prod_{j \neq i,k} \alpha_j$ for $1 \leq i \leq n$, and

recall that $\alpha_i = \frac{\sigma_i^2}{2a_i}(e^{2a_i t} - 1)$ and $\beta_i = \frac{-\sigma_i^2}{2a_i^2}(e^{a_i t} - 1)^2$. As in the previous section, from Theorem 5.2.4 and Proposition 5.3.17, we have

$$\phi_t v = \left(\int_0^t (X_s^{-1} A)_{X_0} dB_s \right) C_t^{-1}(X_0) v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

For $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} (X_s^{-1} A)_{X_0} dB_s &= \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_k^* (Y_s^{-1})^* dB_s^{(k)} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 e^{a_1 s} dB_s^{(1)} & \sigma_2 e^{a_2 s} dB_s^{(2)} & \dots & \sigma_n e^{a_n s} dB_s^{(n)} & \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k}{a_k} (1 - e^{a_k s}) dB_s^{(k)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

By integration on interval $[0, t]$ and as a consequence of Corollary 5.3.18, we get Proposition 5.3.19. $\square$

Two-factors Vasicek model

Now, as a particular case of the previous paragraph, we consider the two-factors model, that is $n = 2$. From [12] p.143, we assume that the dynamics of the short-rate process $(r_t)_t$ are given by

$$\begin{cases} dX_t^{(1)} = -aX_t^{(1)} dt + \sigma_1 dB_t^{(1)}, \\ dX_t^{(2)} = -bX_t^{(2)} dt + \sigma_2 dB_t^{(2)}, \\ r_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}, \quad r_0 > 0, \\ dX_t^{(3)} = r_t dt, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3.32)$$

Here, r_0 , a , b , σ_1 and σ_2 are positive constants. The two-dimensional Brownian motion $(B_t^{(1)}, B_t^{(2)})$ has correlation $\rho \in]0, 1[$. We denote by $P(t, T)$ the price at time t of a zero-coupon bond with maturity time T ,

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Proposition 5.3.20 For $0 \leq t \leq T$,

$$P(t, T) = \exp \left\{ \frac{1}{2} V(t, T) - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} X_t^{(1)} - \frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} X_t^{(2)} \right\}, \quad (5.3.33)$$

with function V given by

$$\begin{aligned} V(t, T) &= \frac{\sigma_1^2}{a^2} \left[T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ &\quad + \frac{\sigma_2^2}{b^2} \left[T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ &\quad + 2\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{ab} \left[T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Proof. See Theorem 4.2.1 p.145 of [12]. $\square$

Proposition 5.3.21 For $T > 0$, the greek δ is given by

$$\delta = \frac{\partial}{\partial r_0} \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \phi_T \right],$$

with

$$\begin{aligned} \phi_T &= D_T \frac{\sigma_1^3 \sigma_2^2}{4a^2 b} \left\{ \frac{1}{b} (e^{2aT} - 1)(e^{bT} - 1)^2 + \frac{1}{a} (e^{2bT} - 1)(e^{aT} - 1)^2 \right\} B_T^{(1)} \\ &+ D_t \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^3}{4b^2 a} \left\{ \frac{1}{a} (e^{2bT} - 1)(e^{aT} - 1)^2 + \frac{1}{b} (e^{2aT} - 1)(e^{bT} - 1)^2 \right\} B_T^{(2)} \\ &+ D_t \left\{ \frac{\sigma_1^3 \sigma_2^2}{2a^3 b} (e^{2bT} - 1)(1 + aT - e^{aT}) + \frac{\sigma_1 \sigma_2^4}{2b^4} [(bT - 2)e^{2bT} + 4e^{bT} - (2 + bT)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_1^3 \sigma_2^2}{2a^2 b^2} (e^{aT} - 1)(e^{bT} - 1)^2 \right\} \int_0^T e^{at} dB_t^{(1)} \\ &+ D_t \left\{ \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^3}{2b^3 a} (e^{2aT} - 1)(1 + bT - e^{bT}) + \frac{\sigma_2 \sigma_1^4}{2a^4} [(aT - 2)e^{2aT} + 4e^{aT} - (2 + aT)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^3}{2b^2 a^2} (e^{bT} - 1)(e^{aT} - 1)^2 \right\} \int_0^T e^{bt} dB_t^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

with

$$\begin{aligned} D_T &= \left\{ \frac{\sigma_1^4 \sigma_2^2}{4a^4 b^2} \left\{ (aT - 2)e^{2aT} + 4e^{aT} - (aT + 2) \right\} (e^{2bT} - 1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^4}{4b^4 a^2} \left\{ (bT - 2)e^{2bT} + 4e^{bT} - (bT + 2) \right\} (e^{2aT} - 1) \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Proof. It is a direct consequence of Proposition 5.3.19. $\square$

5.4 APPENDIX

Lemma 5.4.1 Let $n \in \mathbb{N}^*$ and $\alpha_i, \beta_i, \gamma \in \mathbb{R}$, for $i = 1, \dots, n$. Then

$$f(n; \alpha_1, \dots, \alpha_n; \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma) := \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots & \beta_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \beta_2 & \dots & \beta_n & \gamma \end{vmatrix} = \gamma \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n - \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \prod_{j \neq i} \alpha_j.$$

Proof. For a fixed $n \in \mathbb{N}^*$, we have $f(1; \alpha_1; \beta_1; \gamma) = \alpha_1 \gamma - \beta_1^2$ and $f(2; \alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma) = \alpha_1 \alpha_2 \gamma - \beta_2^2 \alpha_1 - \alpha_2 \beta_1^2$. By developping f with respect to the first column, we get

$$f(n; (\alpha_i)_i; (\beta_j)_j; \gamma) = \alpha_1 f(n-1; \alpha_2, \dots, \alpha_n; \beta_2, \dots, \beta_n; \gamma) + (-1)^n \beta_1 \begin{vmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \ddots & & \vdots & \beta_2 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n & \beta_n \end{vmatrix},$$

and by iterating that process,

$$f(n; (\alpha_i)_i; (\beta_j)_j; \gamma) = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-2} f(2; \alpha_{n-1}, \alpha_n; \beta_{n-1}, \beta_n; \gamma) - \sum_{i=1}^{n-2} \prod_{j \neq i} \alpha_j \beta_i^2,$$

we hence get the Lemma. □

PERSPECTIVES

Dans la continuité directe de mon travail de thèse, j'espère obtenir d'autres résultats en ce qui concerne l'analyse de sensibilités sur des modèles sur les variétés présentés au chapitre 5. En particulier, le poids ϕ_t qui apparaît dans le Théorème 1.4.2 n'est pas unique et la question de son *optimalité*, dans un sens qui reste à définir (comme par exemple la variance la plus petite) reste ouverte. Il faudrait également chercher des poids analogues à celui associé à la grecque δ , fourni dans ce même théorème, mais pour d'autres grecques impliquant par exemple des dérivées secondes, afin de pousser plus loin l'analyse de sensibilités pour des diffusions à générateurs hypoelliptiques sur les variétés.

La question de la modélisation des taux sur les groupes de Lie reste également ouverte et je compte chercher des applications pertinentes de la théorie des groupes de Lie en modélisation financière, notamment en m'inspirant des références [33], [23] or [20] et en étudiant en détails la théorie des diffusions sur les groupes de Lie, comme il en est question par exemple dans [58].

LISTE DES FIGURES

2.1	Comparison between Relations (2.3.7) (straight line) and (2.1.4) (dotted line).	34
2.2	Comparison between Relations (2.3.7) (straight line) and (2.1.4) (dotted line).	39
4.1	Bond price, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.22$, $w = 14.7$, $q = 0.001$, $T = 20$; $N = 30$	75
4.2	Bond price, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.22$, $w = 2$, $q = 0.03$, $T = 100$; $N = 30$	76
4.3	Bond price, $\alpha = 0.2$, $\beta = 0.22$, $w = 0.1$, $q = 1$, $T = 30$; $N = 30$	76
5.1	$f(u, v) = (u - K)^+ ; \sigma = 0.8 ; T = 2 ; K = 1$	95
5.2	$f(u, v) = (u - K)^+ ; \sigma = 0.8 ; T = 2 ; K = 1$	95
5.3	$f(u, v) = (u - K)^+ ; \sigma = 0.8 ; S_0 = 1 ; K = 1$	95
5.4	$f(u, v) = (u - K)^+ ; S_0 = 1 ; T = 2 ; K = 1$	96
5.5	$f(u, v) = (u - K)^+ ; \sigma = 6.7 ; T = 5 ; K = 1$	96
5.6	$f(u, v) = (u - K)^+ ; \sigma = 4 ; T = 2 ; S_0 = 1$	96
5.7	$a = b = 1, \sigma = 0.7 ; T = 5$	107
5.8	$a = b = 1, T = 6 ; r_0 = 0.5$	108
5.9	$a = b = 1, \sigma = 0.96 ; r_0 = 0.5$	108

NOTATIONS

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels, des entiers strictement positifs
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$	ensembles des nombres réels et réels positifs
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathcal{D}^0, \mathcal{C}^1$	ensemble des fonctions dérivables en tout point, des fonctions continues et à dérivée continue en tout point
$\mathbb{P}, \mathbb{E}$	probabilité et espérance
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$	espace probabilisé
$\mathcal{F}_t, B_t$	filtration et mouvement brownien au temps $t \geq 0$
$\mathbb{E}_t = \mathbb{E}[\cdot \mathcal{F}_t]$	espérance conditionnelle en $t \geq 0$
r_t	taux court au temps $t \geq 0$
$P(t, T)$	prix d'une obligation zéro-coupon au temps $t \geq 0$, d'échéance $T \geq t$
EDS, SDE	Equation Différentielle Stochastique, Stochastic Differential Equation
EDP, PDE	Equation aux Dérivées Partielles, Partial Differential Equation
$\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh$	fonctions exponentielle, cosinus, sinus, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique
$(x - k)_+$	partie positive de $(x - k)$
∇_x	opérateur gradient suivant x
$\frac{\partial}{\partial x}$	dérivée partielle suivant x
$\Gamma(z)$	fonction Gamma suivant $z \in \mathbb{C}$
I_ν, K_ν	fonctions de Bessel modifiées d'indice ν
$\mathbf{ce}_{2n}, \mathbf{ce}_{2n+1}, \mathbf{se}_{2n+1}, \mathbf{se}_{2n+2}$	fonctions de Mathieu d'ordre n
$W_{\mu, \nu}$	fonction de Whittaker d'indices (μ, ν)
L_a^b	polynôme de Laguerre généralisé d'indice a , d'ordre b
$SO(n)$	groupe spécial orthogonal de dimension n
$SL(n)$	groupe spécial linéaire de dimension n

I_n	matrice identité de taille n
χ_A	polynôme minimal de la matrice A
Tr	fonction trace
Hess	matrice hessienne
$ M $	déterminant de la matrice M
A^T	transposée de la matrice A
X^*	adjoint de X
$\mathbf{G}, \mathcal{G}$	groupe de Lie, algèbre de Lie
$\Gamma(TM)$	fibré de l'espace tangent à la variété lisse M
$[A, B]$	crochet de Lie de A et B
δX_t	différentielle du processus X_t au sens de Stratonovich

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Abramowitz et I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 de *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964. (Cité pages 5, 15, 32, 38, 46, 57 et 68.)
- [2] L. Alili et J.-C. Gruet. An explanation of a generalized Bougerol's identity in terms of hyperbolic Brownian motion. Dans *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Bibl. Rev. Mat. Iberoamericana, pages 15–33. Rev. Mat. Iberoamericana, Madrid, 1997. (Cité pages 9 et 10.)
- [3] G. E. Andrews, R. Askey, et R. Roy. *Special functions*, volume 71 de *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. ISBN 0-521-62321-9; 0-521-78988-5. (Cité page 57.)
- [4] M. Arnaudon et A. Thalmaier. The differentiation of hypoelliptic diffusion semi-groups. URL <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00472696/en/>. Primary 58G32, 60H30; Secondary 60H10. (Cité pages 21, 22, 89, 90, 91 et 93.)
- [5] M. Baer. *Beyond Born-Oppenheimer*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2006. ISBN 978-0-471-77891-2; 0-471-77891-5. Conical intersections and electronic nonadiabatic coupling terms. (Cité pages 14, 69, 76 et 77.)
- [6] Á. Baricz. *Generalized Bessel functions of the first kind*, volume 1994 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. ISBN 978-3-642-12229-3. URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-12230-9>. (Cité pages 5 et 52.)
- [7] P. Barrieu, A. Rouault, et M. Yor. A study of the Hartman-Watson distribution motivated by numerical problems related to the pricing of asian options. *J. Appl. Probab.*, 41(4) :1049–1058, 2004. ISSN 0021-9002. URL <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.jap/1101840550>. (Cité pages 4, 6, 33 et 51.)

- [8] F. E. Benth, M. Groth, et P. C. Kettler. A quasi-Monte Carlo algorithm for the normal inverse Gaussian distribution and valuation of financial derivatives. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 9(6) :843–867, 2006. ISSN 0219-0249. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0219024906003810>. (Cité page 19.)
- [9] M. V. Berry. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 392(1802) :45–57, 1984. ISSN 0962-8444. (Cité page 77.)
- [10] A. N. Borodin et P. Salminen. *Handbook of Brownian motion—facts and formulae*. Probability and its Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, second édition, 2002. ISBN 3-7643-6705-9. (Cité pages 13, 46, 63 et 67.)
- [11] A. Brace, D. Gatarek, et M. Musiela. The market model of interest rate dynamics. *Math. Finance*, 7(2) :127–155, 1997. ISSN 0960-1627. (Cité pages 4 et 31.)
- [12] D. Brigo et F. Mercurio. *Interest rate models—theory and practice*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 2006. ISBN 978-3-540-22149-4; 3-540-22149-2. With smile, inflation and credit. (Cité pages 4, 5, 12, 13, 20, 31, 56, 68, 89, 93, 106, 107, 108 et 112.)
- [13] R. Campbell. *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique*. Masson et Cie, Paris, 1955. (Cité pages 15, 68, 69, 70 et 75.)
- [14] P. Carr et M. Schröder. Bessel processes, the integral of geometric Brownian motion, and Asian options. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 48(3) :503–533, 2003. ISSN 0040-361X. URL <http://dx.doi.org/10.1137/S0040585X97980543>. (Cité pages 4, 6, 33 et 51.)
- [15] T.R. Cass et P.K. Friz. The Bismut-Elworthy-Li formula for jump-diffusions and applications to Monte Carlo methods in finance. (Cité pages 20 et 89.)
- [16] K.C. Chan, G.A. Karolyi, F.A. Longstaff, et A.B. Sanders. An empirical comparison of alternative model of the short-term interest rate. *The Journal of Finance*, 47(3) : 1209–1227, 1992. (Cité page 4.)
- [17] A. Comtet et C. Monthus. On the flux distribution in a one dimensional disordered system. *J. Phys. I France*, 4 :635–653, 1994. ISSN 0305-4470. (Cité pages 4, 10, 11, 51, 53 et 55.)

- [18] A. Comtet et C. Monthus. Diffusion in a one-dimensional random medium and hyperbolic Brownian motion. *J. Phys. A*, 29(7) :1331–1345, 1996. ISSN 0305-4470. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/29/7/006>. (Cité pages 10, 11, 51 et 55.)
- [19] A. Comtet, C. Monthus, et M. Yor. Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems. *J. Appl. Probab.*, 35(2) :255–271, 1998. ISSN 0021-9002. URL <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.jap/1032192845>. (Cité pages 10, 11, 14, 51, 55 et 76.)
- [20] A. De Schepper, M. Goovaerts, et F. Delbaen. The Laplace transform of annuities certain with exponential time distribution. *Insurance Math. Econom.*, 11(4) :291–294, 1992. ISSN 0167-6687. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0167-6687\(92\)90017-6](http://dx.doi.org/10.1016/0167-6687(92)90017-6). (Cité page 115.)
- [21] N. A. Doherty et J. R. Garven. Insurance cycles : Interest rates and the capacity constraint model. Risk and insurance, EconWPA, 1994. URL <http://econpapers.repec.org/RePEc:wpa:wuwpri:9407001>. (Cité pages 14, 16, 68 et 74.)
- [22] L. U. Dothan. On the term structure of interest rates. *Jour. of Fin. Ec.*, 6 :59–69, 1978. (Cité pages 3, 4, 5, 11, 12, 31, 32, 33 et 56.)
- [23] D. Dufresne. The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding. *Scand. Actuar. J.*, (1-2) :39–79, 1990. ISSN 0346-1238. (Cité page 115.)
- [24] D. Dufresne. Laguerre series for Asian and other options. *Math. Finance*, 10(4) :407–428, 2000. ISSN 0960-1627. URL <http://dx.doi.org/10.1111/1467-9965.00101>. (Cité pages 4, 6, 12, 20, 33, 51, 67 et 89.)
- [25] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, et F. G. Tricomi. *Higher transcendental functions. Vol. II*. Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, Fla., 1981. ISBN 0-89874-069-X. Based on notes left by Harry Bateman, Reprint of the 1953 original. (Cité pages 40 et 44.)
- [26] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971. (Cité page 43.)
- [27] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, et N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. *Finance Stoch.*, 3(4) :391–412, 1999.

- ISSN 0949-2984. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s007800050068>. (Cité pages 20, 22, 90 et 92.)
- [28] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions, et N. Touzi. Applications of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance. II. *Finance Stoch.*, 5(2) :201–236, 2001. ISSN 0949-2984. URL <http://dx.doi.org/10.1007/PL00013529>. (Cité pages 20, 22, 90, 92 et 102.)
- [29] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, seventh édition, 2007. ISBN 978-0-12-373637-6; 0-12-373637-4. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger, With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). (Cité pages 15, 46, 54, 55, 62, 63, 69, 70, 73, 74 et 75.)
- [30] C. Grosche et F. Steiner. *Handbook of Feynman path integrals*, volume 145 de *Springer Tracts in Modern Physics*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. ISBN 3-540-57135-3. (Cité pages 7, 15, 36, 45, 63, 68 et 69.)
- [31] E. Jacob. Excursions of the integral of the Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré*. (Cité page 94.)
- [32] L. Jager. Fonctions de Mathieu et fonctions propres de l'oscillateur relativiste. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), 7(3) :465–495, 1998. ISSN 0240-2963. URL http://www.numdam.org/item?id=AFST_1998_6_7_3_465_0. (Cité pages 15 et 68.)
- [33] J. James et N. Webber. *Interest Rate Modelling*. Wiley, Financial Engineering, 2000. ISBN 0-471-97523-0. (Cité pages 17, 78, 80 et 115.)
- [34] M. Jeanblanc, J. Pitman, et M. Yor. The Feynman-Kac formula and decomposition of Brownian paths. *Mat. Apl. Comput.*, 16(1) :27–52, 1997. ISSN 0101-8205. (Cité pages 13 et 68.)
- [35] M. S. Joshi. *The concepts and practice of mathematical finance*. Mathematics, Finance and Risk. Cambridge University Press, Cambridge, second édition, 2008. ISBN 978-0-521-51408-8. (Cité page 6.)
- [36] M. Kac. On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus of probability. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 59 :401–414, 1946. ISSN 0002-9947. (Cité page 13.)

- [37] K. Kawazu et H. Tanaka. On the maximum of a diffusion process in a drifted Brownian environment. Dans *Séminaire de Probabilités, XXVII*, volume 1557 de *Lecture Notes in Math.*, pages 78–85. Springer, Berlin, 1993. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BFb0087965>. (Cité pages 14 et 76.)
- [38] A. Lachal. (Cité page 94.)
- [39] A. Lachal. Sur le premier instant de passage de l'intégrale du mouvement brownien. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 27(3) :385–405, 1991. ISSN 0246-0203. URL http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1991__27_3_385_0. (Cité page 94.)
- [40] S. Lang. *Complex analysis*, volume 103 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth édition, 1999. ISBN 0-387-98592-1. (Cité page 60.)
- [41] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Dover Publications Inc., New York, 1972. Revised edition, translated from the Russian and edited by Richard A. Silverman, Unabridged and corrected republication. (Cité page 45.)
- [42] Y. Li et J. He. Exact solution of the Schrödinger equation for the time-dependent harmonic oscillator. *Chinese Sci. Bull.*, 43(13) :1066–1071, 1998. ISSN 1001-6538. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02883074>. (Cité pages 15, 68 et 69.)
- [43] V. Linetsky. The spectral decomposition of the option value. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 7(3) :337–384, 2004. ISSN 0219-0249. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0219024904002451>. (Cité pages 15, 69, 70 et 71.)
- [44] V. Linetsky. Spectral expansions for Asian (average price) options. *Oper. Res.*, 52(6) :856–867, 2004. ISSN 0030-364X. URL <http://dx.doi.org/10.1287/opre.1040.0113>. (Cité pages 10, 15, 51, 52, 69 et 71.)
- [45] H. Matsumoto et M. Yor. Exponential functionals of Brownian motion. I. Probability laws at fixed time. *Probab. Surv.*, 2 :312–347 (electronic), 2005. ISSN 1549-5787. URL <http://dx.doi.org/10.1214/154957805100000159>. (Cité pages 6, 11, 13, 32, 40, 55, 67 et 103.)
- [46] H. P. McKean, Jr. Elementary solutions for certain parabolic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82 :519–548, 1956. ISSN 0002-9947. (Cité page 71.)

- [47] H. P. McKean, Jr. A winding problem for a resonator driven by a white noise. *J. Math. Kyoto Univ.*, 2 :227–235, 1963. ISSN 0023-608X. (Cité page 94.)
- [48] D. Nualart. *Malliavin calculus and its applications*, volume 110 de *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 2009. ISBN 978-0-8218-4779-4. (Cité pages 21, 90, 92, 98, 109 et 110.)
- [49] F. C. Park et C. Chun. Linear Stochastic Systems on Lie Groups : Framework and Applications. *preprint, IEEE transactions on automatic control*. (Cité page 17.)
- [50] C. Pintoux et N. Privault. The Dothan pricing model revisited. *Math. Fin.* (Cité pages 4, 12, 20, 29, 51, 53, 56, 68, 89 et 103.)
- [51] C. Pintoux et N. Privault. The Dothan model revisited. *preprint*, 2009. (Cité pages 6 et 13.)
- [52] C. Pintoux et N. Privault. A direct solution to the Fokker-Planck equation for exponential Brownian functions. *Anal. Appl. (Singap.)*, 8(3) :287–304, 2010. ISSN 0219-5305. URL <http://dx.doi.org/10.1142/S0219530510001655>. (Cité pages 13, 48, 49 et 68.)
- [53] J. Pitman et M. Yor. Infinitely divisible laws associated with hyperbolic functions. *Canad. J. Math.*, 55(2) :292–330, 2003. ISSN 0008-414X. (Cité page 43.)
- [54] A. D. Polyanin et A. V. Manzhirov. *Handbook of integral equations*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, second édition, 2008. ISBN 978-1-58488-507-8; 1-58488-507-6. URL <http://dx.doi.org/10.1201/9781420010558>. (Cité page 45.)
- [55] N. Privault. *An elementary introduction to stochastic interest rate modeling*. Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, 12. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008. ISBN 978-981-283-273-3; 981-283-273-4. (Cité pages 5, 6 et 31.)
- [56] N. Privault. Potential theory in classical probability. Dans *Quantum potential theory*, volume 1954 de *Lecture Notes in Math.*, pages 3–59. Springer, Berlin, 2008. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-69365-9_2. (Cité pages 15 et 72.)
- [57] D. Revuz et M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathemat-*

- cal Sciences*]. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 1999. ISBN 3-540-64325-7. (Cité pages 13, 14, 67 et 76.)
- [58] L. C. G. Rogers et David Williams. *Diffusions, Markov processes, and martingales*. Vol. 2. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. ISBN 0-521-77593-0. Itô calculus, Reprint of the second (1994) edition. (Cité pages 78 et 115.)
- [59] A. Schenzle et H. Brand. Multiplicative stochastic processes in statistical physics. *Phys. Lett. A*, 69(5) :313–315, 1978/79. ISSN 0375-9601. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(79\)90418-3](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(79)90418-3). (Cité pages 10 et 51.)
- [60] J. B. Seaborn. *Hypergeometric functions and their applications*, volume 8 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. ISBN 0-387-97558-6. (Cité page 57.)
- [61] J. Shirley. Solution of the Schrödinger Equation with a Hamiltonian Periodic in Time. *Phys. Rev. Lett.* (Cité pages 15, 68 et 69.)
- [62] T. Simon. A remark on the L_1 -norm of Brownian motion. (Cité pages 13 et 77.)
- [63] G. N. Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. ISBN 0-521-48391-3. Reprint of the second (1944) edition. (Cité pages 5, 8, 32, 37, 47, 52, 62 et 64.)
- [64] M. Yor. On some exponential functionals of Brownian motion. *Adv. in Appl. Probab.*, 24(3) :509–531, 1992. ISSN 0001-8678. URL <http://dx.doi.org/10.2307/1427477>. (Cité pages 5, 11, 13, 32, 55 et 67.)

Titre Calculs stochastique et de Malliavin appliqués aux modèles de taux d'intérêt engendrant des formules fermées

Résumé Cette thèse traite des fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien et porte en particulier sur des calculs explicites de prix de bonds zéro-coupon associés au modèle de taux d'intérêt de Dothan. En utilisant des méthodes de noyaux de la chaleur et de résolution d'équations de Fokker-Planck, nous donnons des formules explicites de densités de probabilités ou de leurs transformées de Laplace. Les différentes formules intégrales obtenues complètent celles de l'article original "On the Term Structure of Interest Rates" (L. U. Dothan). La méthode utilisée est directe et implique notamment une nouvelle représentation intégrale pour le module au carré de la fonction Gamma. Nous étudions ensuite les applications à la physique et aux mathématiques financières des résultats obtenus pour les fonctionnelles périodiques et hyperboliques du mouvement brownien. Nous traitons aussi de calculs de sensibilités d'options par le calcul de Malliavin. Nous donnons des expressions explicites de l'indicateur *delta* pour des prix d'options asiatiques et des obligations reposant sur des taux courts traités dans la première partie de la thèse.

Mots-clés Processus stochastiques, Calcul d'Itô, Calcul de Malliavin, Formule de Feynman-Kac, Fonctions spéciales, Diffusion hypoelliptique, Modèles de taux d'intérêts, Equations de Fokker-Planck

Title Stochastic and Malliavin calculus with applications to interest rates models leading to closed formulae

Abstract In this thesis we first work on exponential functionals of Brownian motion, with explicit computations of zero-coupon bond prices associated to the Dothan short-term interest rate model. Using methods of integral representations for heat kernels and Fokker-Planck framework, we give explicit formulae for probability densities or their Laplace transforms, which complete those of the original paper "On the Term Structure of Interest Rates" (L. U. Dothan). We propose direct solutions based on a new integral representation for the square modulus of the Gamma function. Then we present applications in physics and financial mathematics for the formulae associated to periodic and hyperbolic functionals of Brownian motion. We also focus on sensibility formulae with Malliavin calculus in Asian options and bond pricing frameworks, with explicit computations for the *delta* in case of an underlying asset that has been studied in the first part of the thesis.

Keywords Stochastic processes, Itô calculus, Malliavin calculus, Feynman-Kac formula, Special functions, Hypoelliptic diffusions, Interest rate models, Fokker-Planck equation