THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
École nationale supérieure d'ingénieurs (Poitiers)
Laboratoire d'informatique et d'automatique pour les systèmes - LIAS (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016)

École doctorale : Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques, Informatique (Limoges)
Secteur de recherche : Automatique

Présentée par :
Fayrouz Isfoula

Une approche du suivi de consensus pour les systèmes multi-agents

Directeur(s) de Thèse :
Patrick Coirault, Emmanuel Moulay, Emmanuel Bernuau

Soutenue le 03 décembre 2019 devant le jury

Jury :

Président	**Franck Plestan**	Professeur, École centrale, Nantes
Rapporteur	**Alexandre Seuret**	Directeur de recherches CNRS, LAAS, Toulouse
Rapporteur	**Michaël Defoort**	Maître de conférences, Université de Valenciennes
Membre	**Patrick Coirault**	Professeur, LIAS, ENSIP, Université de Poitiers
Membre	**Emmanuel Moulay**	Chargé de recherche CNRS, XLIM, Université de Poitiers
Membre	**Emmanuel Bernuau**	Maître de conférences, AgroParisTech, Massy

Pour citer cette thèse :
Fayrouz Isfoula. *Une approche du suivi de consensus pour les systèmes multi-agents* [En ligne]. Thèse Automatique. Poitiers : Université de Poitiers, 2019. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

Thèse

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'université de Poitiers

École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers

Diplôme National - Arrêté du 25 mai 2016

École Doctorale :

Sciences et Ingénierie des Systèmes, Mathématiques, Informatique de la ComUE de l'Université Confédérale Léonard de Vinci

Spécialité :

Automatique

Présentée par

Fayrouz Isfoula

Une approche du suivi de consensus pour les systèmes multi-agents

---

Directeur de thèse	:	Patrick COIRAULT	Université de Poitiers
Co-directeur	:	Emmanuel MOULAY	Université de Poitiers
Co-encadrant	:	Emmanuel BERNUAU	AgroParisTech Paris

Soutenue le 3 décembre 2019

Thèse préparée au sein du
Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes

Composition du Jury

Rapporteurs :	Michael Defoort	Maître de Conférences HdR Université de Valenciennes et Hainaut-Cambrésis
	Alexandre Seuret	Directeur de Recherches CNRS LAAS-CNRS Toulouse
Examinateurs :	Franck Plestan	Professeur des Universités Centrale Nantes
	Emmanuel Bernuau	Maître de Conférences AgroParisTech Paris
	Emmanuel Moulay	Chargé de Recherches CNRS XLIM-CNRS Poitiers
	Patrick Coirault	Professeur des Universités Université de Poitiers

Dédicace

À celui qui a toujours garni mes chemins de force et de lumière.

Mon très cher père.

À la plus belle perle au monde.

Ma tendre mère.

À mes sœurs.

En leur souhaitant tout le succés et tout le bonheur.

À toute ma famille.

Pour l'amour et le respect qu'elle m'a toujours accordés et qui a toujours été là pour moi tout au long de mes études et qui m'a donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. J'espère qu'elle trouvera dans ce travail toute ma reconnaissance et tout mon amour.

À mes encadrants.

Pour leur soutien et conseil qu'ils n'ont cessé d'apporter au cours de cette thèse.

À tous mes amis.

Pour une sincérité si merveilleuse jamais oubliable et pour tous les moments passés ensemble.

Remerciement

Avant de commencer la rédaction de ce manuscrit, j'aimerais bien exprimer ma gratitude envers toutes les personnes qui m'ont bien entouré, durant ces trois années de thèse. Je resterais reconnaissante à la participation de ces personnes à ma formation.

Tout d'abord, je tiens à exprimer mes vifs remerciements à **M. Patrick Coirault**, professeur des universités à l'université de Poitiers, envers qui, je suis profondément reconnaissante pour son soutien, sa disponibilité à tout moment et ses recommandations judicieuses.

J'aimerai aussi présenter toutes mes considérations à **M. Emmanuel Moulay**, ingénieur chercheur au sein du Centre National de Recherche Scientifique(CNRS), qui m'a co-encadré tout au long de cette thèse et qui a partagé avec moi ses brillantes intuitions et propositions. Je le remercie aussi pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour les nombreux encouragements qu'il m'a prodigué.

J'aimerais bien exprimer ma sincére gratitude à **M. Emmanuel Bernuau**, professeur assistant à Agroparitech, qui m'a co-encadré et qui a fait preuve d'énormément de gentillesse, de générosité et de disponibilité pour que je puisse réussir ma thése et qui m'a beaucoup aidé dans la partie théorique de ma thése.

Enfin, je remercie tous mes encadrants d'avoir été la pour moi durant ces trois années et d'avoir fait de cette thèse une expérience professionnelle trés intéressante.

Toute ma gratitude va à **M. Qing Hui**, porfesseur d'université à l'université de Nebraska Lincoln aux États unis, pour l'intérêt qu'il a porté à ma candidature afin de passer un séjour dans son laboratoire et qui a fait de cette expérience une vraie richesse scientifique pour mon parcours.

Mes remerciements vont aussi à **M. Michael Defoort** et **M. Alexandre Seuret** et **Pr. Franck Plestan** Pour l'intérêt qu'ils ont donné à ce travail en acceptant de siéger parmi les membres du jury et d'avoir accepté de lire mes travaux de recherches et de les discuter avec moi. Veuillez accepter l'expression de ma haute considération.

Je tiens aussi à remercier l'équipe enseignante de l'Université de Poitiers et l'équipe de l'école doctorale SISMI, pour leurs engagements et leurs soutiens durant ces trois années universitaires.

Un merci spécial à mon père et ma mère pour tous leurs sacrifices et encouragement tout au long de ce parcours, je suis aujourd'hui ce que je suis graçe à vous, mille merci.

Un grand merci à mes deux soeurs Maryam et Asmae pour tous leurs aides et leurs encouragement tout au long de mes études et pour tout les conseils qu'ils m'ont donné et leur patience tout au long de ce parcours.

Un grand merci à ma grande famille, pour tout les moments de joie et de liesse qu'ils créent et pour tous leurs encouragement et aides.

Un grand merci à toute l'équipe du Laboratoire Informatique et Automatique pour les Systèmes(LIAS) pour leurs conseils, leurs aides et leurs soutiens.

Mes remerciements s'adressent également à mes collégues doctorants, pour leurs soutiens et pour tous les bons moments que nous avons passé ensemble.

Un merci spécial à Ahmad et Abir pour tout les moments innoubliables passés ensemble et pour leur encouragements.

Enfin, j'adresse mes vifs remerciements à toute personne ayant contribué de prés ou de loin à l'accomplissement de cette thése à savoir toutes les personnes travaillant au LIAS ou à l'école doctorale SISMI qui m'ont prodigué toute l'aide dont j'avais besoin ainsi que les stagiaires et doctorants dont j'ai pu faire connaissance.

Table des matières

I Introduction Générale **3**

II État de l'art sur les systèmes multi-agents **7**

1 Etat de l'art sur les systèmes multi-agents **9**
1.1 Définition d'un système multi-agents . . . 9
1.2 Les systèmes multi-agents entre l'approche centralisée, décentralisée et distribuée . . . 10
1.3 Graphes et système multi-agents . . . 11
1.4 Le problème du consensus sans leader . . . 12
1.4.1 Modélisation des agents par un simple intégrateur . . . 14
1.4.2 Modélisation des agents par un double intégrateur . . . 16
1.4.3 Conclusion . . . 18
1.5 Le suivi par consensus . . . 18
1.6 Contributions de la thèse . . . 19
1.7 Conclusion . . . 20

III Développements sur le consensus **21**

2 Suivi par consensus en topologie fixe **23**
2.1 Introduction . . . 24
2.2 Formulation du problème . . . 24
2.3 Résultat principal . . . 25
2.3.1 Préliminaires . . . 26
2.3.2 Suivi par consensus avec un leader non perceptif . . . 27
2.3.3 Suivi par consensus avec un leader perceptif . . . 30
2.4 Simulations . . . 31
2.4.1 Cas d'une référence fixe . . . 32
2.4.2 Cas d'une référence variable . . . 33
2.5 Résultats expérimentaux . . . 35
2.5.1 Plate-forme robotique . . . 35
2.5.2 Modélisation . . . 38
2.5.3 Essais expérimentaux . . . 39
2.6 Conclusion . . . 42

3 Consensus et suivi par consensus en topologie variable **43**
3.1 Introduction . . . 43
3.2 État de l'art . . . 44
3.3 Formulation du problème . . . 44
3.3.1 Voisinage . . . 44
3.3.2 Anti-collision . . . 44
3.3.3 Formation en treillis . . . 45

3.3.4 Fonctions d'appartenance pour une topologie variable 46
3.3.5 Système masse-ressort 47
3.3.6 Hamiltonien d'un SMA 47
3.4 Consensus pour une topologie variable 48
3.5 Consensus pour une topologie variable et barrières de potentiel 52
3.6 Suivi de consensus avec un leader perceptif 57
3.7 Conclusion 70

4 Discrétisation de la commande **73**
4.1 Introduction 73
4.2 Discrétisation 74
4.3 Les SMA et l'échantillonnage de la commande 74
4.4 Formulation du problème 76
4.5 Commande homogène continue 77
4.6 Commande homogène discrétisée 80
4.7 Conclusion 84

IV Conclusion Générale **85**

A Notions mathématiques **89**

B Robotic Operating System **93**

Références **93**

Table des figures

1.3 Commande centralisée 11
1.4 Système distribué 11

2.1 Topologie du graphe 31
2.2 a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre 32
2.3 a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre. En rouge, vitesse du leader ; b) Trajectoires des agents et du leader (en rouge) dans le plan . . . 32
2.4 a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre 33
2.5 a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre ; b) Trajectoires des agents et du leader dans le plan 33
2.6 Trajectoire de référence 34
2.7 a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre 34
2.8 a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre ; b) Trajectoires des agents et du leader dans le plan 35
2.9 a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre 35
2.10 a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre ; b) Trajectoires des agents et du leader dans le plan 36
2.11 Écart de position entre le barycentre des agents et du leader et la position de référence en fonction du temps 36
2.12 Écart de vitesse entre le barycentre des agents et du leader et la vitesse de référence suivant x 37
2.13 le robot Pioneer 3-DX 37
2.14 Position des capteurs 37
2.15 Carte microprocesseur et carte de transmission sans fil 38
2.16 Configuration non holonome d'un robot mobile 38
2.17 Linéarisation du robot non holonome 39
2.18 Position initiale d'une flotte de 4 robots mobiles du type Pioneer 3-DX 40
2.19 Toopologie de la communication des 4 robots et le leader virtuel libellé 0. 40
2.20 Positions dans le cas non perceptif 41
2.21 Évolution des positions et vitesses pour un leader non perceptif 41
2.22 Positions dans le cas du leader perceptif 41
2.23 L'évolution des positions et vitesses pour un leader perceptif 42

3.1 $\mathcal{N}_7 = \{4, 6, 8\}$ 45
3.2 Formation optimale dans le plan 45
3.3 Définition de d, r et R 46
3.4 Évolution de α_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $r = 2$ et $R = 3$ 46
3.5 Système masse-ressort 47

3.6 Système multi-agents équivalent au système masse-ressort 47
3.7 3 agents en limite de connections 49
3.8 Trajectoires pour $p(t_0) = 0$ (traits pleins) et $p(t_0) \neq 0$ (pointillés) de l'agent 1 (noir), de l'agent 2 (vert) et de l'agent 3 (rouge) 50
3.9 Trajectoires pour $p(t_0) \neq 0$ de l'agent 1 (noir), de l'agent 2 (vert) et de l'agent 3 (rouge) 52
3.10 α_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $d = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$. a) $c_{ij} = 0$, b) $c_{ij} = 0.1$ . . . 53
3.11 évolution de ψ_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $d = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$ 55
3.12 évolution de $\alpha_{ij}\psi_{ij}$ en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $d = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$ 55
3.13 a) $\tilde{q}_y$ en fonction de $\tilde{q}_x$, $d = 0.1$, $r = 2$, $R = 6$; b) positions finales des agents par rapport au barycentre 57
3.14 Évolution de α_{ref} en fonction de $\|q_0 - q_{ref}\|\|$. $r = 2$, $R = 3$, $\varepsilon = 0.1$ 58
3.15 Évolution de $\alpha_{ref}\psi_{ref}$ en fonction de $\|q_0 - q_{ref}\|\|$ 61
3.16 Influence de u_{ref} sur la convergence 66
3.17 $\left\|q_c(t) - q_{ref(t)}\right\|$ pour différentes valeurs de u_{ref_x} 67
3.18 Trajectoires des agents (noir), du leader (rouge) et du leader virtuel (vert) 67
3.19 Positions initiales des agents et du leader et mise en formation 68
3.20 Positions finales des agents en formation en treillis 68
3.21 Positions finales des agents en formation en treillis 68
3.22 Erreur de position entre la trajectoire de référence et le barycentre $\|q_c - q_{ref}\|$ 69
3.23 p_{ref_x} et p_{c_x} 69
3.24 Initialisation critique 69
3.25 a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre b) Positions finales des agents dans le référentiel lié au barycentre 70
3.26 a) Vitesses suivant x par rapport au temps des agents et du leader b) Trajectoires des agents et du leader 70
3.27 a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre b) Positions finales des agents dans le référentiel lié au barycentre 71
3.28 a) Vitesses suivant x par rapport au temps des agents et du leader b) Trajectoires des agents et du leader 71

4.1 Contrôle distribué avec échantillonnage des données 75
4.2 $max\left(\|\lambda(A_d)\|\right)$ en fonction de T_k (en seconde) 77
4.3 $q_{i_x}(t)$, $i = 1, \ldots, 5$ pour $T_k = 0.49$s (pointillés) et $T_k = 0.47$s (traits pleins) 78
4.4 Graphe à 5 agents 82
4.5 $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = h$, $\kappa = 0$ 83
4.6 $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = 0.47$ sec., $\kappa = 0$ 83
4.7 $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = 0.48$ sec., $\kappa = 0$ 83
4.8 $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = 1$ sec., $\kappa = -0.5$ 84

B.1 Architecture de ROS 93

Liste des tableaux

2.1 Caractéristique du Pioneer 3-DX 36

Notations

Nous définissons ci-dessous les principales notations utilisées dans ce manuscrit :

- $\mathbb{N}$: Ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
- $\mathbb{C}$: Ensemble des complexes.
- $1_n = (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.
- I_n : Matrice unité d'ordre n.
- $\mathcal{A}$: Matrice d'adjacence.
- $\mathcal{L}$: Matrice laplacienne.
- $|\cdot|$: La valeur absolue dans $\mathbb{R}$.
- $\|\cdot\|$: La norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.
- tanh : Tangente hyperbolique.
- $\mathcal{L}^{\infty}_{Loc}$: Ensemble des fonctions mesurables localement essentiellement bornées.
- $\lfloor x \rceil^{\alpha} = (|x_1|^{\alpha} sign(x_1), \ldots, |x_n|^{\alpha} sign(x_n))^T$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.
- Si P est une matrice symétrique d'ordre $n \times n$, alors :
  - $\lambda(P)$: valeur propre de la matrice P
  - $\lambda_{\min}(P)$: plus petite valeur propre de la matrice P
  - $\lambda_{\max}(P)$: plus grande valeur propre de la matrice P
- Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée de réels et $v_n = sup\{u_k \,|k \geq n\}$, alors

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = inf\,(v_n)_{n\geq 0}$$

Abréviations

- SMA : Système Multi Agent
- LIAS : Laboratoire d'Informatique et d'Automatique pour les Systèmes
- ISS : Input to State Stability
- ROS : Robot Operating System
- EVS : Échantillonnage Variable Synchrone

Première partie

Introduction Générale

CONSENSUS, du latin *cum*, signifiant ensemble et *sensus* signifiant sens. Un *Consensus* est un accord global permettant de prendre une décision [1].

La nature offre un grand nombre d'exemples de consensus, tel qu'un banc de poissons prenant la forme d'un prédateur, le vol en V de certains oiseaux migrateurs ou plus proche de nous, un groupe de personnes s'accordant sur une heure de rendez-vous. Les points communs à ces exemples sont que :

- le groupe s'accorde sur une décision (consensus),
- la décision commune est prise par un ensemble d'individus,
- les informations se propagent de proche en proche (pas de centralisation ni de diffusion générale),
- les individus ont tous la même capacité de décision.

C'est à partir de ces observations qu'est né le concept de Système Multi-Agents (SMA). Un SMA est composé d'agents capables d'interagir entre eux et/ou avec leur environnement pour aboutir à un objectif commun. On parle de SMA homogène lorsque tous les agents ont la même dynamique. Les applications des SMA sont nombreuses et variées et se retrouvent dans des disciplines aussi diverses que la biologie, la physique, la robotique, ...

Historiquement, l'approche multi-agents a été utilisée pour décomposer un système complexe en sous-systèmes plus simples, les agents. Chaque sous-système est commandé dans une approche centralisée, pour laquelle il existe un agent particulier qui centralise les informations et contrôle tous les agents. Cette approche supporte mal le changement d'échelle, c'est à dire l'ajout ou le retrait d'agent dans le système et suppose également un lien de communication entre le superviseur et chaque agent. De ce constat est né le concept de commande décentralisée, pour lequel il n'y a pas de superviseur mais chaque agent dispose des informations de tous les autres agents. C'est une approche plus robuste vis à vis des défaillances de communication que l'approche centralisée mais elle nécessite un réseau maillé. Pour diminuer globalement la connectivité du réseau, l'idée est de ne faire communiquer entre eux que les voisins proches : c'est l'approche distribuée, qui est par nature évolutive. Du fait de l'absence de centralisation de l'information et donc de superviseur, ces SMA sont flexibles et évolutifs : l'ajout ou le retrait d'agents au SMA ne modifient pas les commandes appliquées aux agents.

Cette thèse s'intéresse à la commande des SMA avec une approche distribuée. Les agents se basent sur les informations fournies par leurs voisins pour calculer leur commande de telle sorte qu'ils atteignent soit un consensus, soit un suivi de consensus dans le cas où un des agents est leader et suit une trajectoire de référence.

Les applications sont multiples. On peut citer entre autres :

- en robotique, le consensus permet à un groupe de robots mobiles de se regrouper et éventuellement de se déplacer en formation,
- certains procédés disposent de mesures distribuées d'une même grandeur, obtenues à partir d'un réseau de capteurs. Le consensus correspond au barycentre des mesures. Dans la même idée, un réseau d'observateurs atteint le consensus lorsque la grandeur reconstruite est identique sur chaque agent,
- dans les micro-réseaux d'énergie, le consensus correspond à la meilleure allocation possible des ressources disponibles en énergie.

Pour toutes ces applications, la qualité des informations échangées entre les agents est primordiale. En ce sens, un SMA peut être vu comme un réseau de communication dont les liens entre agents sont modélisés par un graphe.

1. source *google sites*

La théorie des graphes joue un grand rôle dans l'analyse des SMA. En particulier les propriétés de convergence et la rapidité de diffusion de l'information dans le SMA sont directement liées aux valeurs propres de la matrice laplacienne du graphe décrivant les liens entre les agents. Parmi les différentes topologies de graphe pouvant décrire un SMA, on distingue :

- les topologies fixes, lorsque le réseau conserve la même structure de connexion au fil du temps, même pour des agents mobiles,
- les topologies variables, lorsque les liens de communication entre les agents évoluent au cours du temps,
- les topologies non orientées, lorsque les communications entre les agents sont bidirectionnelles,
- les topologies orientées, lorsqu'il existe des communications unidirectionnelles entre agents.

En automatique, les travaux de recherche sur les SMA ont essentiellement porté sur la synthèse de lois de commande permettant d'atteindre le consensus ou le suivi de consensus asymptotiquement ou en temps fini, pour des graphes avec des topologies particulières (orientées, non orientées, fixes ou variables), en prenant éventuellement en compte des communications entre agents dégradées, en supposant le réseau synchrone ou asynchrone. A ces problèmes s'ajoute celui de la mise en formation et du maintien en formation dans le cas de la poursuite d'une trajectoire de référence. Plus récemment, des travaux ont été publiés sur la commande de SMA hétérogènes, principalement pour des modélisations d'agents par des simples et des doubles intégrateurs.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'une loi de commande pour un SMA décrit par un graphe à topologie non orientée, fixe et variable, avec pour objectif d'atteindre asymptotiquement le suivi de consensus.

Dans la littérature, tous les travaux sur le suivi de consensus supposent une communication unidirectionnelle entre le leader et les agents avec qui il est en communication. De son côté, le leader suit une trajectoire de référence qu'il est seul à connaître. Rien n'indique au leader si le reste des agents le suivent ou non.

Nous présentons dans ce mémoire la notion de leader *perceptif*. Le comportement du leader va dépendre à la fois de la trajectoire de référence qu'il doit essayer de suivre et de la capacité des suiveurs et donc du reste des agents à le suivre. Si ces derniers s'éloignent de lui, le leader modifiera sa trajectoire pour rejoindre la flotte et se remettra ensuite à poursuivre sa trajectoire de référence. Sa commande est le fruit d'un compromis entre l'impératif de suivre la trajectoire de référence et la capacité des agents à s'aligner sur le mouvement du leader. L'idée sous-jacente est d'éviter aux agents de saturer leur commande en essayant de suivre un objectif qu'ils ne peuvent pas physiquement atteindre. Dans ce cadre, nous avons développé une première commande linéaire pour un graphe à topologie fixe. Les états des agents et du leader convergent dans un ensemble centré sur l'état de la trajectoire de référence, ce que l'on appelle le suivi de consensus pratique. La taille de cet ensemble dépend directement de l'amplitude de l'accélération de la trajectoire de référence. En particulier, pour une accélération de référence nulle, le suivi de consensus est atteint.

Dans un deuxième temps, nous avons étendu ces résultats pour un SMA dont les liens de communication sont décrits par un graphe à topologie variable. Lorsque les liens de communication reliant les agents varient dans le temps, la difficulté est de s'assurer que le graphe reste connexe. Si le graphe n'est plus connexe, le SMA n'est plus commandable puisque qu'il devient disjoint. L'approche la plus répandue pour assurer cette connexité est de supposer le graphe initial connexe puis de mettre en place un mécanisme qui conserve les liens de voisinage initiaux. Dans ce cas, un agent peut acquérir de nouveaux voisins mais ne peut pas perdre ses voisins initiaux. On a alors l'assurance que le graphe reste connexe. Dans la littérature, ce mécanisme est connu sous le nom de *maintien de connectivité*. Il est généralement mis en oeuvre en érigeant une barrière de potentiel infranchissable à la frontière du voisinage de sorte que deux agents voisins ne puissent pas se séparer. Les commandes de deux agents voisins soumis à une force qui les écartent l'un de l'autre vont croître jusqu'à contre-balancer cette force. Lorsqu'il s'agit d'une force extérieure non contrôlée, les commandes peuvent augmenter

jusqu'à la saturation. Nous proposons de modifier ce mécanisme en jouant sur la forme d'une fonction d'appartenance à un voisinage. Deux agents initialement voisins soumis à une force opposée à leur rapprochement peuvent perdre leur voisinage mais conserveront néanmoins un lien de communication qui leur permet de générer une commande qui s'opposera à cette force. Nous avons également développé un système d'anti-collision qui permet aux agents et au leader, en absence de suivi de trajectoire, de se regrouper sans collisions et de se placer à une distance minimale les uns des autres, ce qui correspond à une formation en treillis. Lorsque le leader perceptif suit une trajectoire de référence dont l'accélération est non nulle, l'erreur entre une formation en treillis et la formation effectivement prise par les agents et le leader converge dans un ensemble centré autour de l'origine. De plus, l'écart entre la trajectoire de référence et le barycentre de la flotte converge également dans un ensemble centré sur l'origine.

Le dernier point que nous avons abordé dans ce mémoire concerne la stabilité du SMA lorsque les liens de communication entre les agents sont dégradés. Nous nous sommes restreints à l'étude du consensus pour une topologie fixe. Nous nous sommes placés dans le cas le plus défavorable où tous les liens ont les mêmes pertes de communication. Cela revient à discrétiser la commande. Entre deux instants de discrétisation, la commande est bloquée à sa valeur passée. Pour une commande linéaire, il existe une valeur limite de la période de discrétisation appelée *période de Schur* pour laquelle le système devient instable. Pour aller au-delà de cette valeur, il faut utiliser une commande non-linéaire. Nous proposons d'appliquer une commande homogène de la littérature pour résoudre le problème du consensus pratique. Sur ce travail, notre contribution a consisté à reformuler le problème du consensus pour se placer dans les hypothèses d'utilisation de cette commande.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre donne un état de l'art sur les problèmes de consensus pour les systèmes multi-agents. Le chapitre deux présente la notion de leader perceptif et la synthèse de la commande permettant d'atteindre le suivi de consensus pratique en utilisant les propriétés de stabilité entrée/état (*Input to State Stability*). Nous présentons également des résultats expérimentaux obtenus avec une flotte de robots Pioneer 3-DX. Les essais ont été effectués à l'Université de Nebraska-Lincoln lors d'un séjour de six mois dans l'équipe du Professeur Qing Hui. Le chapitre trois étend les résultats du chapitre deux pour un graphe à topologie variable. Nous présentons les mécanismes d'anti-collision et de maintien de connectivité et nous donnons une formulation hamiltonienne (*Port-Based Hamiltonian*) basée sur les ports du SMA. Le chapitre quatre aborde le problème des communications dégradées dans un SMA, ce qui revient à discrétiser la commande. Nous proposons une modélisation du SMA basée sur les liens et non plus sur les agents qui permet d'appliquer une commande homogène de degré négatif. Nous montrons en simulation qu'en dépit d'une période de discrétisation lente, les agents restent groupés dans un ensemble dont la taille dépend de cette période.

Deuxième partie

État de l'art sur les systèmes multi-agents

Chapitre 1

Etat de l'art sur les systèmes multi-agents

Ce chapitre présente une vue globale des recherches menées sur les Systèmes Multi-Agents (SMA) avec un focus particulier sur le problème du consensus et du suivi de trajectoire. Nous commencerons par définir ce qu'est un SMA et les différences entre les commandes centralisées, décentralisées et distribuées. Puis nous aborderons le consensus qui a été le premier problème étudié dans le cadre des commandes collaboratives et enfin son extension au suivi de trajectoire.

1.1 Définition d'un système multi-agents

La notion de système multi-agents a été inspirée par l'étude des systèmes biologiques, et en particulier par le comportement de certaines familles d'insectes. Les premiers développements des SMA ont vu le jour en informatique dans le domaine de l'intelligence artificielle distribuée et collective. A l'origine, ces études ont porté sur l'analyse des différentes parties d'un système en tant que sous-systèmes autonomes, et plus particulièrement sur l'impact des interactions de ces sous-systèmes sur le système global. C'est dans ce contexte que le terme SMA est apparu pour caractériser les systèmes biologiques complexes dont les sous-parties sont en interaction. Les exemples classiques qui illustrent ces systèmes sont les vols en formation des oiseaux migrateurs et le déplacement des bancs de poissons [1, 51, 81].



(a) Vol en formation d'oiseaux



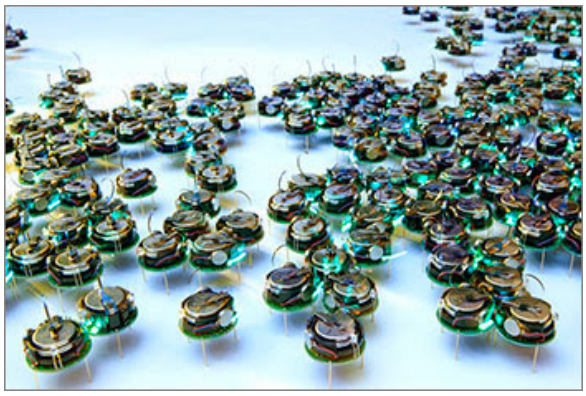
(b) Banc de poissons

En 1995, Vicsek a été le premier à proposer un modèle de coordination pour un groupe d'agents se déplaçant dans le plan [90]. Dans ce modèle, chaque agent met à jour son état en utilisant les informations fournies par ses voisins. Ce modèle est aujourd'hui considéré comme un cas spécial qui explique les déplacements migratoires [74].

Depuis ces premières études, la modélisation des systèmes complexes par les SMA s'est étendue bien au-delà de la biologie puisqu'on les retrouve en physique [27], en mécanique [19], en informatique [22] et en robotique [82]. C'est également un domaine d'étude pour les automaticiens avec le développement d'une théorie du contrôle propre à ces systèmes [69, 73, 77].

Les applications sont multiples. On peut citer parmi les plus remarquables les constellations de

satellites pour réaliser des interféromètres spatiaux, les applications militaires avec les drones de reconnaissance, les réseaux de capteurs, les robots collaboratifs [3].



(a) Groupe de robots



(b) Constellation de satellites

A la base de chaque SMA, il y a un groupe d'agents. Chaque agent est autonome et peut interagir avec ses voisins et son environnement. L'ensemble des agents peut accomplir une tâche complexe qui ne pourrait être réalisée par une seule entité.

Chaque agent reçoit des informations sur l'état de ses proches voisins et agit de façon collaborative avec ses voisins pour contribuer à l'objectif commun. Lorsque cet objectif est atteint, on parle de consensus.

Ce fonctionnement collaboratif peut permettre d'améliorer l'efficacité et les performances du système et d'augmenter sa flexibilité. C'est pour ces raisons que les recherches menées sur les SMA se sont beaucoup développées ces dernières années [35, 64, 70]. Ces recherches portent sur la commande collaborative pour le contrôle de formation, le problème du rendez-vous et le suivi de trajectoire.

1.2 Les systèmes multi-agents entre l'approche centralisée, décentralisée et distribuée

Historiquement, c'est l'approche centralisée qui a été utilisée en premier pour coordonner le fonctionnement d'un ensemble d'agents sur les chaines de production. Dans cette approche, on suppose qu'il existe un agent central qui communique avec l'ensemble des autres agents et qui les contrôle. Les autres agents ne communiquent pas entre eux. L'agent central doit disposer de l'état de chacun des agents. Toute la puissance de calcul doit être à la disposition de l'agent central. Il faut également un système de communication efficace entre l'agent central et chaque agent. Il est clair que cette approche devient complexe à mettre en oeuvre dès lors que le nombre d'agents devient important. De plus, il faut assurer la fiabilité de l'agent central sur lequel repose tout le fonctionnement du système. La figure 1.3 représente le principe de la commande centralisée.

Pour pallier les défauts inhérents à cette approche centralisée, il a été proposé quelques années plus tard le principe de la commande décentralisée ou hiérarchisée [10, 36]. Dans ce cas, chaque agent dispose de la totalité des états des autres agents et calcule localement sa commande. Cette approche a été appliquée avec succès pour le contrôle des systèmes complexes. Elle nécessite néanmoins la diffusion complète des états de chaque agent à travers le réseau. De ce fait, elle souffre, comme la commande centralisée, d'un défaut d'évolutivité : l'ajout ou le retrait d'un agent du réseau impacte directement chaque agent.

L'évolution naturelle de ces approches est de pousser la décentralisation à son extrême en supprimant le rôle d'agent central et en répartissant équitablement les décisions entre tous les agents. L'ensemble du groupe d'agents fonctionne de façon coopérative [69, 73]. Chaque agent ne reçoit des informations que de ses voisins à partir desquelles il calcule une commande locale (1.4).

C'est sur ce principe que fonctionnent les systèmes multi-agents.

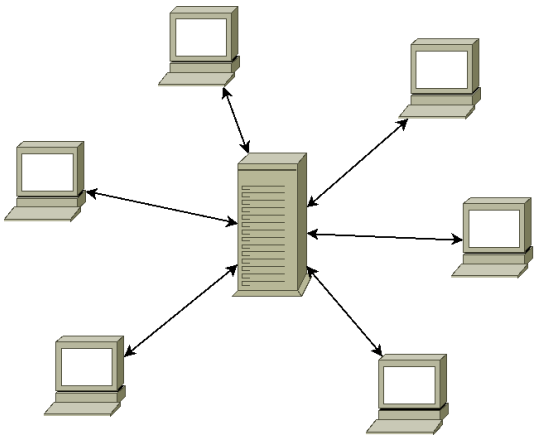


FIGURE 1.3 – Commande centralisée

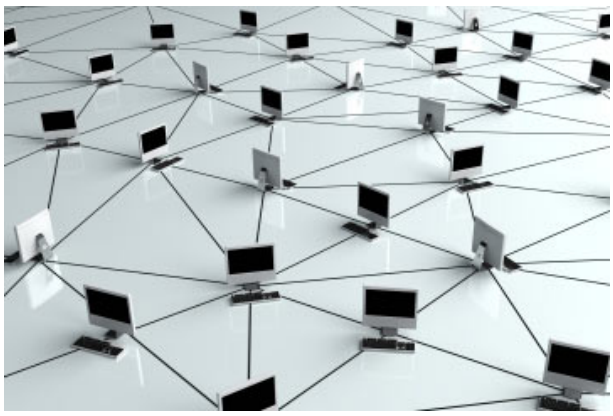


FIGURE 1.4 – Système distribué

1.3 Graphes et système multi-agents

La modélisation des interactions entre les agents par la théorie des graphes a été proposée notamment en 2003 par Vicsek [34] puis par Bullo [8] en 2009. Nous rappelons dans cette section les principales définitions utilisées pour cette modélisation.

Pour atteindre un objectif commun, les agents sont amenés à communiquer entre eux, la communication entre les agents est modélisée par un graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, où $\mathcal{V}$ est l'ensemble des sommets du graphe qui représente les agents et $\mathcal{E}$ est l'ensemble des arêtes du graphe qui représente la communication entre les agents. Le graphe qui modélise la communication entre les agents peut changer de nature selon le type de problème traité. Il est non orienté lorsque la communication entre les agents est bidirectionnelle, c'est-à-dire si les deux agents reçoivent de l'information l'un de l'autre. Ce type de graphe intervient par exemple dans le cadre de certains problèmes de réseaux.

Le graphe peut aussi être orienté lorsque la communication entre certains agents est à sens unique, par exemple lorsqu'un agent ne fait qu'émettre des informations à ses voisins sans en recevoir en retour. Ce type de graphe est utilisé par exemple pour résoudre les problèmes de transport.

Définition 1. *Un graphe orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ est défini par l'ensemble des sommets $\mathcal{V} = \{1, \ldots, N\}$ et par l'ensemble des arêtes $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ qui sont ordonnés. Une arête $(ij) \in \mathcal{E}$ d'un graphe orienté $\mathcal{G}$ modélise la communication unidirectionnelle entre le sommet i et le sommet j, ce qui signifie que l'agent i peut envoyer de l'information à l'agent j, et pas le contraire.*

Définition 2. *Un graphe non orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ se définit de la même manière qu'un graphe orienté en dehors du fait que les arêtes ne sont pas orientées. Cela signifie que pour une arête $(ij) \in \mathcal{E}$, les sommets i et j obtiennent de l'information l'un de l'autre.*

Remarque 3. *Un graphe non orienté est un cas particulier du graphe orienté.*

Définition 4. *L'union de graphes est un graphe, où les ensembles des sommets et des arêtes sont l'union des sommets et des arêtes des graphes de l'union.*

Les agents i et j seront voisins si et seulement si $(ij) \in \mathcal{E}$. On notera $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} : (ij) \in \mathcal{E}\}$ l'ensemble des voisins de l'agent i. Par la suite, nous nous intéresserons uniquement aux graphes non orientés, c'est-à-dire des graphes décrivant des systèmes multi-agents dans lesquels la communications entre agents est toujours bidirectionnelle.

Définition 5. *Un chemin non orienté est une séquence d'arêtes dans un graphe non orienté de la forme* (i_1, i_2), (i_2, i_3),...

Définition 6. *Un graphe non orienté est dit connexe s'il existe un chemin entre toutes paires de sommets distincts.*

Définition 7. *Un arbre non orienté est un graphe non orienté où chaque paire de sommet est connectée avec exactement un chemin non orienté.*

Définition 8. *Un arbre couvrant d'un graphe non orienté et connexe est un arbre qui connecte tous les sommets*

Définition 9. *Un sous graphe* $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$ *du graphe* $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *est un graphe tel que* $\mathcal{V}^s \subset \mathcal{V}$ *et* $\mathcal{E}^s \subset \mathcal{E}$

Définition 10. *Un arbre couvrant* $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$ *d'un graphe non orienté* $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *est un sous graphe de* $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *tel que* $(\mathcal{V}^s, \mathcal{E}^s)$ *est un arbre non orienté et* $\mathcal{V}^s = \mathcal{V}$

Définition 11. *La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté* $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ *est définie par* $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ *où* $a_{ij} = a_{ji} = 1$ *si* $(ij) \in \mathcal{E}$ *et* $a_{ij} = 0$ *si non.*

Définition 12. *La matrice laplacienne d'un graphe non orienté associée avec la matrice d'adjacence* $\mathcal{A}$ *est donnée par* $\mathcal{L} = [\ell_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ *où* $\ell_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^{N} a_{ij}$ *et* $\ell_{ij} = -a_{ij}$ *si* $i \neq j$.

Pour un graphe non orienté, les matrices $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ sont symétriques.

Lemme 13. *[58] Toutes les valeurs propres non nulles de la matrice laplacienne* $\mathcal{L}$ *sont réelles et positives pour un graphe non orienté. Zéro est une valeur propre simple de* $\mathcal{L}$ *et le vecteur propre associé est* 1_N *si et seulement si le graphe non orienté est connexe.*

Remarque 14. *Pour un graphe non orienté, soit* $\lambda_i(\mathcal{L})$ *la* i^{eme} *valeur propre de la matrice* $\mathcal{L}$ *avec* $\lambda_1(\mathcal{L}) \leq \lambda_2(\mathcal{L}) \leq \cdots \leq \lambda_i(\mathcal{L})$. *Alors,* $\lambda_1(\mathcal{L}) = 0$. $\lambda_2(\mathcal{L})$ *représente la connectivité algébrique.*

1.4 Le problème du consensus sans leader

Le problème de contrôle le plus étudié dans le cadre des systèmes multi-agents est celui du consensus du fait du grand nombre d'applications qu'il représente. Il est utilisé dans plusieurs disciplines et en particulier en informatique, en théorie des automates et pour le calcul distribué [48]. C'est un thème de recherche qui est toujours d'actualité malgré les nombreux travaux dont il a fait l'objet. Il intéresse également les automaticiens en théorie du contrôle [11, 26, 39, 69]. Le problème du consensus peut être défini de la façon suivante :

Définition 15. *Soit* $x_i \in \mathbb{R}^m$ *l'état de l'agent* i *et* $x = \begin{pmatrix} x_1, & \ldots, & x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{Nm}$ *l'état du système multi-agents solution de*

$$\dot{x} = f(x)$$

pour une condition initiale $x(0)$. *Posons*

$$\begin{array}{l}\chi : \mathbb{R}^{Nm} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto y\end{array}$$

telle que $y = \chi(x)$*. On dira que les agents du SMA atteignent asymptotiquement le consensus si et seulement si* $x_i = x_j$ *pour tout* i, j *et*

$$x_i(t) \to \chi\left(x(0)\right) \qquad quand \quad t \to +\infty$$

La fonction $\chi(x)$ peut par exemple être définie par :

$$\begin{array}{l}\chi(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \chi(x) = max\left(\ x_1, \ \ \ldots, \ \ x_N \ \right) \\ \chi(x) = min\left(\ x_1, \ \ \ldots, \ \ x_N \ \right)\end{array}$$

La première définition de la fonction χ correspond à un consensus dans lequel les états de tous les agents convergent vers le barycentre. Ce type de consensus est utilisé en robotique pour :

- Le problème du rendez-vous [34,50,52,58,61,66,69,71,72] qui consiste à assurer une coordination entre les agents de façon à ce que leurs états s'égalisent. Il est courant de prendre l'exemple d'un groupe de personnes cherchant à fixer une heure de rendez-vous commune, chaque membre du groupe ne communiquant qu'avec ses connaissances proches [15, 42, 69],

- Le problème du suivi de leader [73] : les états des agents deviennent égaux à celui du leader, l'état du leader suivant une certaine référence,

- Le problème du suivi de formation [18, 20, 21, 37, 45, 55–57, 59, 60, 74, 75, 78, 84, 85, 88, 90, 91] qui consiste à imposer un regroupement en formation des agents autour d'un leader.

La résolution du problème de consensus dépend des hypothèses faites sur le type de graphe utilisé pour modéliser les échanges entre les agents du SMA (graphe orienté, non orienté, à topologie fixe ou variable), du modèle dynamique utilisé pour représenter un agent [70] (simple intégrateur, double intégrateur, modèle dynamique non-linéaire, ...), de la qualité de la communication entre les agents (perturbations, retards, ...) et du type de convergence souhaitée (asymptotique, à temps fini [11, 38, 93], ...). Lorsque les agents communiquent toujours avec les mêmes agents, le graphe garde la même structure au fil du temps. On parlera alors d'un graphe à topologie fixe. Dans le cas contraire, c'est à dire lorsque les interlocuteurs des agents changent au cours du temps, on parle d'un graphe à topologie variable, puisque les arêtes du graphe évoluent et ne sont plus fixes [14, 24, 53, 61, 63, 95].

Dans la suite de la thèse, on considérera des systèmes multi-agents constitués de N agents libellés de 1 à N où tous les agents ont le même modèle. Les agents peuvent être modélisés par une équation différentielle à temps continu :

$$\dot{x}_i = f(x_i, \{x_j, j \in \mathcal{N}_i\}) \tag{1.1}$$

ou par une équation aux différences :

$$x_{i,k+1} = g(x_{i,k}, \{x_{j,k}, j \in \mathcal{N}_i\}) \tag{1.2}$$

avec x_i (resp. $x_{i,k}$) $\in \mathbb{R}^m$.

Beaucoup de travaux sur le consensus ont considéré des agents modélisés par un simple intégrateur ou un double intégrateur. Les sections suivantes présentent une synthèse des études réalisées dans ce cadre.

1.4.1 Modélisation des agents par un simple intégrateur

Nous nous intéressons ici au problème du consensus lorsque les agents peuvent être modélisés par un simple intégrateur. La dynamique du SMA est décrite par (1.3) :

$$\dot{x_i} = u_i \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1.3}$$

où $x_i \in \mathbb{R}^m$ représente l'état de l'agent i et $u_i \in \mathbb{R}^m$ sa commande.

Définition 16. *Le consensus est atteint pour (1.3) si, pour toutes valeurs initiales $x_i(0)$ et pour tout $i, j = 1, \ldots, N$, on a $\|x_i(t) - x_j(t)\| \to 0$ quand $t \to \infty$.*

La solution au problème du consensus pour un graphe orienté et non orienté dans le cas continu et discret a été donnée dans [69]. Dans le cas continu, la commande est donnée par :

$$\dot{x}_i(t) = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)[x_i(t) - x_j(t)] \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1.4}$$

où a_{ij} est la composante (i, j) de la matrice d'adjacence $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ associée au graphe $\mathcal{G}$. Le même problème a été traité dans [34] dans le cas discret où la communication entre les agents est non orientée :

$$x_i[k+1] = \sum_{j=1}^{N} d_{ij}[k]x_j[k] \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1.5}$$

où $d_{ij}[k]$ est la composante (i, j) de la matrice $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^{N \times N}$. Les éléments de $\mathcal{D}$ sont tels que $d_{ii}[k] > 0$ pour tout i et $d_{ij}[k] > 0$ pour tout $i \neq j$ si $(ij) \in \mathcal{E}$, $d_{ij}[k] = 0$ sinon. $\mathcal{D}$ a comme propriété que la somme des éléments de chacune de ses lignes est égale à 1.

En 2004, Olfati-Saber et Murray [61] ont étudié le problème du consensus pour un SMA dans le cas d'un graphe à topologie fixe et variable puis en prenant en compte le retard de communication pour le cas du graphe non orienté à topologie fixe. Ils ont montré que le SMA (1.3) sans retard de communication atteint le consensus avec la commande suivante :

$$u_i = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}[x_i - x_j] \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1.6}$$

Ils ont ensuite résolu le consensus avec retard de communication pour des graphes non orientés avec une topologie fixe en considérant la commande suivante :

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}[x_i(t - \tau_{ij}) - x_j(t - \tau_{ij})] \tag{1.7}$$

où $\tau_{ij} > 0$ représente le retard de communication pour le lien (i, j) correspondant à l'arête $(ij) \in \mathcal{E}$. Ils ont montré qu'il suffisait d'avoir un retard fixe $\tau_{ij} = \tau$, $\tau > 0$ et un graphe connexe pour que le consensus soit assuré.

Les liens de communications entre les agents peuvent évoluer au cours du temps, en particulier lorsque les agents sont mobiles. Le consensus dépend alors des propriétés du graphe à topologie variable. Dans [67], Ren et Randal ont étudié le problème du consensus pour un SMA avec un graphe orienté à topologie variable. Ils ont réussi à relaxer les conditions sur le graphe en montrant que si l'union des graphes au fil du temps contenait un arbre couvrant, alors le consensus du système (1.3) était atteint avec la commande suivante :

$$u_i(t) = -\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}(t)a_{ij}(t)[x_j(t) - x_i(t)] \qquad i = 1, \ldots, N$$

où $\sigma_{ij}(t) > 0$ est un facteur de pondération variable dans le temps. L'ajout de pondérations variables sur les liens entre agents ajoute une flexibilité supplémentaire à cette modélisation.

En 2008, Xiao et Wang [95] ont étudié le cas d'une topologie variable due à des problèmes de communications entre agents. La solution proposée est de prendre une commande échantillonnée asynchrone : chaque agent met à jour son état indépendamment des autres agents. Cette solution est inspirée des travaux de [7, 89] où les auteurs considèrent le consensus asynchrone avec une application pour les systèmes de prise de décisions.

Ils ont supposé que la transmission d'information entre agents peut être retardée avec des temps de retard variables mais bornés. Ils ont montré que si l'union des graphes contient un arbre couvrant, alors le consensus du système (1.3) est assuré avec la commande :

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sum\limits_{j\in N(t_k^i,i)} \alpha_{ij}(t_k^i)} \sum\limits_{j\in N(t_k^i,i)} \alpha_{ij}(t_k^i)(x_j(t_k^i) - x_i(t_k^i)) & si \quad N(t_k^i, i) \neq \varnothing \\ 0 \quad \text{si non} \end{cases}$$

où chaque agent met à jour son état à des instant $t_0^i, t_1^i, \ldots, t_k^i, \ldots$ avec $t_0^i = 0$ et $\tau_{min} < t_{k+1}^i - t_k^i < \tau_{max}$. α_{ij} modélise une pondération variable sur le lien de communication entre l'agent i et l'agent j. Ils ont également traité le cas où le retard de communication apparaît dans la transmission de l'information, en prenant le temps de retard de transmission τ_{ij}^k. Le protocole qui assure le consensus est :

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sum\limits_{j\in N(t_k^i,i)} \alpha_{ij}(t_k^i)} \sum\limits_{j\in N(t_k^i,i)} \alpha_{ij}(t_k^i)(x_j(t_k^i - \tau_{ij}^k) - x_i(t_k^i)) & si \quad N(t_k^i, i) \neq \varnothing \\ 0 \quad \text{si non} \end{cases}$$

La même année, Tian et Liu [86] ont étudié le problème du consensus avec deux types de retard, un retard de communication entre deux agents et un retard lié à la connexion qui représente la latence propre à chaque agent, nommé retard de donnée. Ils ont étudié le cas du retard de donnée pour des graphes orientés en prenant la commande suivante :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(k - D_i) - x_i(k - D_i))$$

où D_i représente le retard de donnée. Ils ont ensuite étendu leurs travaux à des SMA en présence des deux types de retard pour un graphe orienté en prenant l'algorithme suivant :

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(k - \tau_{ij} - D_i) - x_i(k - D_i))$$

Ces résultats peuvent être étendus au cas continu.

Dans [46], le consensus avec un temps de retard variant a été obtenu en prenant la commande suivante :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{v_j\in N_i} a_{ij}[x_j(t - \tau_{ij}(t)) - x_i(t)]$$

Dans [94], Jian et Yang ont résolu dans le cas discret le problème du consensus avec des retards aléatoires pris dans un ensemble fini d'entiers et pouvant être modélisés par une chaine de Markov, dans le cas où le graphe est orienté et fixe et contient un arbre couvrant.

Dans le même cadre d'étude, la robustesse du consensus avec retard et une topologie variable a été étudié dans [53] où il est montré que le consensus est atteint même pour des retards importants mais constants.

Tous les travaux cités précédemment se sont intéressés à des commandes amenant asymptotiquement le SMA vers un consensus. Pour certaines applications, il peut être intéressant d'atteindre le consensus en un temps fini.

Wang et Xiao [92] ont obtenu un consensus pour le système (1.3) en temps fini pour un graphe orienté et non orienté à topologie variable avec la commande suivante :

$$u_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} \lfloor x_j - x_i \rceil^{\alpha_{ij}}$$

avec $0 < \alpha_{ij} < 1$.

Dans [103], une nouvelle classe de commandes non-linéaires est proposée afin de résoudre le consensus en temps fini dans le cas d'un graphe non orienté. Dans [40], une commande adaptative est proposée. Enfin, dans [76, 102], des commandes basées sur l'*event trigger* sont proposées : chaque agent décide de lui-même quand transmettre des informations à ses voisins.

Tous ces travaux sur le consensus pour un simple intégrateur montrent la richesse du sujet. Cependant, de nombreux systèmes réels nécessitent un modèle plus complexe que celui du simple intégrateur. En particulier, la modélisation des agents mobiles sort du cadre du simple intégrateur. C'est pourquoi, rapidement, il a été nécessaire de faire évoluer le modèle de l'agent pour pouvoir prendre en compte la position et la vitesse dans l'espace d'état.

1.4.2 Modélisation des agents par un double intégrateur

Ce paragraphe donne une vue d'ensemble des principaux résultats obtenus sur le consensus lorsque les agents sont modélisés par un double intégrateur. La dynamique du SMA est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \dot{q}_i & = & p_i & i = 1, \ldots, N \\ \dot{p}_i & = & u_i & \end{array} \right. \tag{1.8}$$

où $q_i \in \mathbb{R}^m$ représente la position, $p_i \in \mathbb{R}^m$ la vitesse et $u_i \in \mathbb{R}^m$ la commande de l'agent i.

Définition 17. *Le système multi-agents (2.1) atteint le consensus si, pour toutes conditions initiales $p_i(0)$ et $q_i(0)$, on a $\|q_i(t) - q_j(t)\| \to 0$ et $\|p_i(t) - p_j(t)\| \to 0$ quand $t \to \infty$ pour tous $i, j = 1, \ldots, N$.*

Dans [69], Ren a proposé la commande suivante pour assurer le consensus du système (2.1) pour un graphe non orienté à topologie variable :

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)[(q_j - q_i) + \gamma(p_j - p_i)] \tag{1.9}$$

où a_{ij} est la composante (i, j) de la matrice d'adjacence et γ est un scalaire positif.

En 2009, Lin et Jia [43] ont étudié le problème du consensus pour un SMA en temps discret avec des temps de retard τ_{ij} non uniformes et pour une topologie variable. L'algorithme du consensus utilisé dans cet article est linéaire et discret, il est donné par :

$$u_i(k) = -a_0 p_i(k) + a_1 \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij}(k)(q_j(k - \tau_{ij}) - q_i(k)) + a_2 \sum_{j \in N_i(k)} a_{ij}(k)(p_j(k - \tau_{ij}) - p_i(k))$$

Ces premières études sur le consensus supposaient une transmission de l'état complet des agents à leurs voisins. En pratique, certaines grandeurs telles que les vitesses peuvent être difficilement mesurables. Il est donc intéressant de développer des algorithmes de consensus lorsque seule une partie de l'état est transmise, typiquement la position.

En 2008, Ren [65] a proposé la commande bornée suivante pour le système (2.1)

$$u_i = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}[\tanh(q_i - q_j) + \gamma \tanh(p_i - p_j)]$$

et a abordé le cas où les vitesses p_i n'étaient pas mesurées. Dans [25], les auteurs ont étudié le consensus pour un graphe orienté à topologie variable avec une commande échantillonnée et en supposant que seules les positions étaient accessibles.

A la suite de ces travaux, Lin et Jia [44] ont étudié le consensus lorsqu'il y a un retard aléatoire et borné τ dans les communications entre agents. Ils ont montré la convergence du consensus pour un retard aléatoire borné en utilisant la commande suivante :

$$u_i(t) = -k_1 p_i(t) + \sum_{j \in N_i(t)} a_{ij}(t)[q_j(t-\tau) - q_i(t-\tau)]$$

Dans [100], le cas d'un consensus moyen avec du bruit, un retard aléatoire et borné τ et des pertes de données est traité pour un graphe non orienté.

Yu, Chen et Cao [98] ont montré que la commande suivante permettait d'atteindre le consensus avec des retards de communication bornés et un graphe orienté :

$$u_i(t) = -\alpha \sum_{j=1}^{N} a_{ij} q_j(t-\tau) - \beta \sum_{j=1}^{N} a_{ij} p_j(t-\tau).$$

Dans [24], Gao et Wang analysent le consensus pour un SMA avec une topologie variable et orientée, en supposant que le graphe peut ne pas contenir d'arbre couvrant mais que l'union des graphes construit un arbre couvrant et en considérant des données échantillonnées asynchrones. Ils proposent la commande suivante :

$$u_i(t) = -k_1 \sum_{j \in N_i(t_s^i)} a_{ij}(t_s^i)(q_i(t_s^i) - q_j(t_s^i)) - k_2 \sum_{j \in N_i(t_s^i)} a_{ij}(t_s^i)(p_i(t_s^i) - p_j(t_s^i))$$

$t_s^i < t < t_{s+1}^i,\ s \geq 0,\ i = 1, \ldots, N$ où $t_s^i = t_0 + sh_i$ et $h_i = l_i h$, avec $l_i \in \mathbb{Z}^+$ et $h > 0$.

Dans [63], les auteurs proposent une solution au problème du consensus pour un SMA sous une topologie orientée et variable, avec et sans retard de communication. Le consensus est atteint pour des retards faibles.

[13] aborde le cas d'un SMA à topologie fixe et fortement bruité. La commande qui est proposée est à gains variables. Il est montré que dans un environnement de communication bruyant, un consensus moyen peut être atteint si et seulement si la topologie de communication est un graphe équilibré et fortement connexe.

En 2012, dans [47], un algorithme de consensus est proposé pour des SMA à temps continu avec des données échantillonnées apériodiques en topologie variable. La même année, les auteurs de [96] ont proposé un consensus en temps discret pour une topologie fixe. L'article [62] propose un consensus en temps discret avec des retards de communication non uniformes et variables pour une topologie variable avec des données échantillonnées. Il est montré que, en faisant certaines hypothèses sur le gain et la période d'échantillonnage, le consensus peut être obtenu pour des retards de communication variables mais bornés à condition que l'union des graphes contienne un arbre couvrant. L'algorithme qui résout le problème du consensus pour ce cas est :

$$u_i(k) = -\alpha p_i(k) + \sum_{j \in N_i(k)} \alpha_{ij}(k)(q_j(k - \tau_{ij}(k)) - q_i(k))$$

Dans [40], les auteurs proposent deux types de protocoles de consensus dynamiques adaptatifs distribués, conçus pour garantir le consensus de manière totalement distribuée pour des graphes de communication connexe et non orientés.

L'article [14] traite le cas du consensus moyen avec une topologie variable et sous communication bruitée avec des données échantillonnées. Les auteurs montrent que le consensus est atteint si le graphe de communication est à chaque instant équilibré et couvrant.

Dans [99], les auteurs étudient le consensus pour des données de positions et de vitesses échantillonnées. Un protocole de consensus linéaire distribué est proposé permettant d'atteindre le consensus en choisissant de manière appropriée la période d'échantillonnage déterminée par un polynôme d'ordre trois. Le cas des graphes non orientés avec retards est ensuite discuté.

Des études plus approfondies ont été réalisées dans [97], en recherchant les conditions où le consensus est atteint avec des temps de retard identiques notés τ. La commande résolvant le consensus optimal est donnée par :

$$u_i = -\sum_{j=1}^{N} a_{ij}[(q_i(t) - q_j(t-\tau)) + \eta(p_i(t) - p_j(t))].$$

Dans [83], le problème du consensus pour les SMA avec une communication orientée et des retards de communication variables et non uniformes est étudié. Le cas d'agents à dynamiques non-linéaires est présenté dans [32] en utilisant une approche à base d'observateurs. Enfin, le cas du $n-$intégrateur a été abordé dans [87], où les auteurs ont étudié le problème du consensus d'ordre élevé pour les systèmes multi-agents hétérogènes avec des délais de communication inconnus.

1.4.3 Conclusion

Le consensus a fait l'objet d'un nombre très important de travaux et est à la base de tous les développements sur le contrôle des SMA. On peut citer entre autres le suivi de trajectoire ou le déplacement en formation qui sont des extensions du consensus.

1.5 Le suivi par consensus

Le problème du suivi du leader, appelé aussi suivi de trajectoire ou suivi par consensus, est un sujet de recherche très actif, où l'objectif est d'amener les états des agents sur l'état du leader.

Le leader est un agent particulier de la flotte qui a une dynamique indépendante des autres agents, appelés suiveurs. Il est en lien avec au moins un agent de la flotte et lui transmet tout ou partie de son état. Le leader envoie des informations à ses voisins mais ne reçoit aucune information de la part des autres agents. C'est pourquoi la plupart des graphes qui modélisent la communication d'un SMA avec leader sont orientés. Dans le cas général, le leader suit une trajectoire de référence. L'objectif principal de la commande distribuée est de faire converger l'état de chaque agent vers celui du leader.

Soit x_0 l'état du leader dont la dynamique est donnée par :

$$\dot{x}_0 = f(x_0, x_r)$$

où x_r est l'état d'une trajectoire de référence. On considère un SMA constitué de N agents indicés de $i = 1$ à N et d'un leader indicé 0. La dynamique de chaque agent i est donnée par

$$\dot{x}_i = f\left(x_i, \{x_j, j \in \mathcal{N}_i\}\right) + f^{\gamma}\left(x_0, \{x_i, i \in \mathcal{N}_0\}\right) \tag{1.10}$$

où $\mathcal{N}_0$ est l'ensemble des voisins du leader. f^{γ} est nul si l'agent i n'est pas en lien avec le leader. La définition la plus simple du suivi par consensus correspond à la convergence asymptotique des états des agents vers celui du leader.

Définition 18. *Le suivi par consensus est atteint pour (1.10) si, pour toutes valeurs initiales $x_i(0)$ et pour tout $i = 1, \ldots, N$, on a $\|x_i(t) - x_0(t)\| \to 0$ quand $t \to \infty$.*

Un certain nombre de travaux sont basés sur cette définition du consensus. Dans [54], les auteurs considèrent un modèle linéaire pour les SMA avec une topologie variable et une dynamique simple pour le leader donnée par :

$$\dot{x}_0 = Ax_0$$

Dans le cas du double intégrateur, qui est une modélisation très fréquente, cela revient à considérer une accélération du leader nulle. Les agents sont modélisés par

$$\begin{cases} \dot{x}_i = Ax_i + Bu_i & i = 1, \ldots, N \\ \dot{x}_0 = Ax_0 \end{cases}$$

Le protocole proposé pour résoudre le problème du suivi par consensus du leader est donné par :

$$u_i = k \sum_{j \in N_i} (x_j - x_i) + k a_{i0}(t)(x_0 - x_i)$$

Dans ce cas, la commande est linéaire. Lorsque le leader suit une trajectoire de référence quelconque, c'est-à-dire lorsque

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu_r$$

où u_r est un terme variable, le problème devient beaucoup plus compliqué. Une solution consiste à implémenter un observateur de l'état du leader sur chaque agent [23, 30]. Une autre solution est d'utiliser une commande discontinue [40] :

$$u_i = C_1 K \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x_i - x_j) + C_2 \operatorname{sign}(K \sum_{j=0}^{N} a_{ij}(x_i - x_j)).$$

En robotique, les agents sont couramment décrits par un double intégrateur, modélisant la dynamique de leur position et de leur vitesse. Pour des raisons pratiques évidentes, les agents doivent se regrouper autour du leader sans que leurs positions deviennent égales. De même, il faut mettre en place un mécanisme d'évitement de collision entre agents. C'est la notion de déplacement en essaim, pour laquelle le graphe est à topologie variable. Olfati-Saber a proposé dans [57] une solution au problème du regroupement en essaim en supposant que tous les agents étaient en lien avec le leader. Reprenant ces travaux, Cao et Ren [9] ont étendu ce résultat en relaxant la condition de connectivité du leader avec tous les agents. Ils ont proposé une commande discontinue couplée à un observateur qui estime pour chaque agent l'accélération du leader.

1.6 Contributions de la thèse

Cet état de l'art met en évidence la diversité et la profusion des travaux des automaticiens sur le consensus et le suivi de consensus. Cependant, les commandes présentées ne prennent pas toujours en compte les possibles limitations physiques des agents. Qu'un agent représente une microgrid incluse dans un cluster d'énergie ou un robot mobile parmi une flotte, il présente des limitations inhérentes à sa fonction (capacité à échanger des flux d'énergie, accélération, ..). Dans le cas d'un suivi de consensus, le leader suit une trajectoire de référence sans connaissance des possibilités et des états des agents.

L'idée maîtresse des chapitres 2 et 3 est de résoudre le problème du suivi par consensus d'un SMA pour lequel le leader est perceptif tient compte des états de ses suiveurs. La commande du leader perceptif dépend pour une partie des états des suiveurs, et dépend pour l'autre partie de la trajectoire de référence qu'il doit essayer de suivre. Nous avons montré dans les deux chapitres, pour le cas de la topologie fixe dans le chapitre 2 et avec une topologie variable dans le chapitre 3, que le SMA résout le problème du suivi par consensus pratique.

Nous avons développé le concept du leader perceptif en utilisant une commande linéaire continue dans le chapitre 2. La preuve de stabilité du système est obtenue en utilisant une fonction de Lyapunov ISS (Input to State Stability). Nous avons ensuite étendu ce concept pour le regroupement en essaim des agents de la flotte, en prenant en compte les possibles collisions entre agents.

Enfin, une étude du problème du consensus avec une commande homogène échantillonnée est proposée dans le chapitre 4. Dans ce chapitre, nous avons démontré que le SMA résout le problème du consensus pratique même si la période d'échantillonnage est grande.

1.7 Conclusion

Nous avons présenté un état de l'art sur les deux principaux problèmes portant sur les SMA, à savoir le consensus et le suivi de consensus. Nous avons fait une tentative de classification des nombreux résultats de la littérature basée sur :

- le type de communications entre agents : bidirectionnelles (graphe non orienté) ou directionnelles (graphe orienté) ;
- la nature du voisinage : est-ce que les agents gardent toujours les mêmes voisins (graphe à topologie fixe) ou bien de nouveaux voisins rejoignent le voisinage en fonction de l'évolution du système (graphe à topologie variable) ;
- la nature des échanges entre voisins : périodique synchrone (tous les agents ont une même horloge synchronisée), périodique asynchrone (tous les agents ont la même horloge mais désynchronisée) ; apériodique synchrone (les agents ont des horloges différentes mais émettent et reçoivent tous de façon synchrone), apériodique asynchrone (les agents ont des horloges différentes et émettent et reçoivent sans synchronisme) ;
- le type de modèle dynamique utilisé pour représenter les agents : linéaire, non-linéaire, simple intégrateur, double intégrateur, etc. ;
- dans le cas du suivi par consensus, le leader peut avoir une vitesse fixe ou variable.

Troisième partie

Développements sur le consensus

Chapitre 2

Suivi par consensus en topologie fixe

Ce chapitre présente les résultats obtenus sur la stabilité d'un système multi-agents pour le problème du suivi par consensus en topologie fixe et a été présenté dans la conférence [33]. L'étude est réalisée dans le cas où le graphe décrivant les communications entre agents est à topologie fixe et est non-dirigé. Le leader suit une trajectoire de référence quelconque. La première partie du chapitre porte sur l'étude de la stabilité du SMA avec un leader qui ne prend pas en compte l'évolution des états des suiveurs. La deuxième partie présente un leader dont la commande permet de prendre en compte l'état des suiveurs auxquels il est connecté. Dans les deux cas, nous proposons une commande linéaire continue pour résoudre le problème du suivi par consensus.

Contents

2.1 Introduction 24
2.2 Formulation du problème 24
2.3 Résultat principal 25
2.3.1 Préliminaires 26
2.3.2 Suivi par consensus avec un leader non perceptif 27
2.3.3 Suivi par consensus avec un leader perceptif 30
2.4 Simulations 31
2.4.1 Cas d'une référence fixe 32
2.4.2 Cas d'une référence variable 33
2.5 Résultats expérimentaux 35
2.5.1 Plate-forme robotique 35
2.5.2 Modélisation 38
2.5.3 Essais expérimentaux 39
2.6 Conclusion 42

2.1 Introduction

Le consensus décrit l'objectif atteint par un groupe d'agents échangeant des informations entre voisins. Le suivi par consensus suppose que le SMA comporte un agent particulier appelé leader. Le leader est le seul à disposer d'une information sur l'objectif à atteindre, souvent appelé *trajectoire de référence*. Il échange des informations avec au moins un agent du SMA.

L'étude de la stabilité du suivi par consensus a fait et fait encore l'objet de nombreuses recherches. Toutes les études réalisées jusqu'à maintenant utilisent des lois de commandes discontinues ou non linéaires [9, 23, 30, 40, 41, 50, 54, 79, 101]. L'originalité de ce travail est double :

- nous proposons une loi de commande linéaire inspirée de [69] pour assurer la stabilité dans un ensemble, ce que nous appellerons par la suite le suivi de consensus pratique,
- le leader cherche à suivre une trajectoire de référence mais tient compte de l'état des agents avec lesquels il est en communication. C'est le concept de *leader perceptif*.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Nous présenterons tout d'abord la formulation mathématique du suivi de consensus. Nous donnerons ensuite la preuve de stabilité pour ce problème dans le cas d'un leader non perceptif puis nous étendrons ce résultat au cas d'un leader perceptif. Nous montrerons dans les deux cas que l'on obtient le suivi de consensus pratique, c'est à dire la convergence des états des agents et du leader dans un ensemble centré sur l'objectif. Cette notion de consensus pratique a déjà été étudiée dans [16, 17].

Ces résultats théoriques seront illustrés par des simulations sous Matlab et par des expérimentations sur des robots réels qui ont été conduites à l'Université de Nebraska-Lincoln.

2.2 Formulation du problème

On considère un système multi-agents constitué de $N+1$ agents libellés $0, 1, \ldots, N$. L'agent libellé 0 est appelé le leader tandis que les autres agents, libellés de 1 à N, sont appelés les suiveurs. Les communications entre les suiveurs sont modélisées par un graphe fixe non orienté $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Le leader cherche à diriger les suiveurs. Il est en communication avec au moins un suiveur. La matrice d'adjacence des suiveurs est noté $\mathcal{A}_f$ et la matrice laplacienne correspondante est notée $\mathcal{L}_f$

Hypothèse 19. *Le graphe $\mathcal{G}$ est fixe, non orienté et connexe.*

Lemme 20 ([58])**.** *Toutes les valeurs propres de la matrice laplacienne $\mathcal{L}$ sont réelles et positives pour un graphe connexe non orienté. Zéro est une valeur propre simple de $\mathcal{L}$ et le vecteur propre à droite associé est 1_N.*

La dynamique des agents est modélisée par un double intégrateur :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{q}_i & = & p_i \\ \dot{p}_i & = & u_i \end{array} \right. \quad i = 0, \ldots, N \tag{2.1}$$

$q_i \in \mathbb{R}^m$ représente la position de l'agent i, $p_i \in \mathbb{R}^m$ sa vitesse et u_i sa loi de commande. m représente la dimension de l'espace dans lequel évolue les agents.

Dans un premier temps, nous allons supposer que seul un sous-groupe de suiveurs peut accéder à l'état du leader et que ce dernier ne reçoit pas d'informations de ses voisins. Le graphe décrivant les liens entre les agents et le leader est orienté au sens ou les suiveurs ne communiquent pas avec le leader, et connexe.

Définition 21. *Soit un ensemble de suiveurs dont les liens sont représentés par le graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ et un leader libellé 0. On définit la matrice $D = \mathrm{Diag}\{a_{10}, \ldots, a_{N0}\}$, où $a_{i0} = 1$ si l'agent i reçoit des informations du leader et $a_{i0} = 0$ sinon.*

Hypothèse 22. *La matrice D admet au moins une composante non nulle.*

L'hypothèse (22) est équivalente à dire que le leader possède au moins un voisin. L'objectif principal du leader est de suivre une certaine trajectoire pré-assignée $(q_{\text{ref}}, p_{\text{ref}})$ définie par

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{ref}} = p_{\text{ref}} \\ \dot{p}_{\text{ref}} = u_{\text{ref}} \end{cases} \tag{2.2}$$

Cette trajectoire de référence n'est connue que du leader. Il est courant dans la littérature de définir q_{ref} et p_{ref} comme l'état d'un leader virtuel.

Définition 23 (Suivi par consensus pratique)**.** *Le* SMA *(2.1) est une solution du problème du suivi par consensus pratique s'il existe $\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$*

$$\limsup_{t \to +\infty} \|q_i(t) - q_{\text{ref}}(t)\| \leq \varepsilon, \qquad et \qquad \limsup_{t \to +\infty} \|p_i(t) - p_{\text{ref}}(t)\| \leq \varepsilon, \tag{2.3}$$

Remarque 24. *Le cas $\varepsilon = 0$ correspond au problème du suivi par consensus.*

Notre objectif est de trouver une solution au problème de suivi par consensus en considérant une commande linéaire

$$u_i = -k_1 \sum_{j=0}^{N} a_{ij}(q_i - q_j) - k_2 \sum_{j=0}^{N} a_{ij}(p_i - p_j), \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.4}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes strictement positives, a_{ij} sont les composantes de la matrice d'adjacence $\mathcal{A}_f$ et a_{i0} sont les composantes de la diagonale de la matrice D.

Dans un premier temps, nous allons considérer un leader non perceptif dont la commande est donnée par

$$u_0 = u_{ref} - k_1(q_0 - q_{ref}) - k_2(p_0 - p_{ref}), \tag{2.5}$$

puis nous nous intéresserons au cas du leader perceptif dont la commande est définie par

$$u_0 = u_{\text{ref}} - \underbrace{k_1(q_0 - q_{\text{ref}}) - k_2(p_0 - p_{\text{ref}})}_{f_{or}} \underbrace{- k_1 \sum_{i=1}^{N} a_{i0}(q_0 - q_i) - k_2 \sum_{i=1}^{N} a_{i0}(p_0 - p_i)}_{f_{oi}} \tag{2.6}$$

Cette commande se décompose en deux termes. Le premier, f_{or}, permet au leader de suivre la trajectoire de référence. Le deuxième terme, f_{oi}, constitue la partie perceptive. Les états des voisins du leader influent sur sa dynamique. Dans ce cas, le leader cherche un compromis entre la trajectoire à suivre et le maintien du lien avec les suiveurs. Le leader a tendance à aller vers les agents pour les rassembler puis les emmènent à la suite du leader virtuel.

2.3 Résultat principal

Nous allons montrer que les deux commandes (2.4-2.5) et (2.4-2.6) permettent de résoudre le problème du suivi de consensus pratique pour le SMA (2.1). Dans ce cas, les agents et le leader convergent vers une boule centrée autour de la trajectoire de référence. Pour prouver la stabilité, nous allons utiliser la notion de stabilité entrée/sortie *(ISS)*.

2.3.1 Préliminaires

Soit un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et f une fonction sur X à valeurs réelles. Un réel a est un *presque majorant* de f si $f(x) \leq a$ pour presque tout élément x de X, autrement dit l'ensemble $\{x \,|f(x) > a\}$ est négligeable, c'est à dire inclus dans un ensemble de mesure nulle. Si f admet des presque majorants, on peut définir sa borne supérieure essentielle comme le plus petit d'entre eux. La fonction f est alors essentiellement bornée. On note alors

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$$

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.7}$$

avec $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ différentiable satisfaisant $f(0, 0) = 0$. On suppose que $u \in \mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}$, où $\mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables localement essentiellement bornées de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 25. *Une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, est dite de classe $\mathcal{K}$ si*

- $\alpha(0) = 0$;
- *α est strictement croissante.*

Si de plus $\alpha(r) \to \infty$ quand $r \to \infty$, α est dite de classe $\mathcal{K}_\infty$.

Définition 26. *Une fonction continue $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est dite de classe $\mathcal{KL}$ si :*

- *Pour tout s, $r \mapsto \beta(r, s)$ est de classe $\mathcal{K}$;*
- *Pour tout r, $s \mapsto \beta(r, s)$ est décroissante et tend vers 0 quand $s \to +\infty$.*

Définition 27. *[80] On dit que le système (2.7) est* ISS *s'il existe une fonction β de classe $\mathcal{KL}$ et une fonction γ de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour toute entrée $u \in \mathcal{L}^\infty_{\text{loc}}$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a*

$$\|x(t)\| \leq \beta(\|x_0\|, t) + \gamma(\operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,t]} \|u(s)\|), \qquad \forall t \geq 0, \tag{2.8}$$

pour toute solution $t \mapsto x(t)$ de (2.7) avec $x(0) = x_0$.

Définition 28. *[49] Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable. On dit que V est une fonction de Lyapunov* ISS *du système (2.7) s'il existe des fonctions α_1, α_2, α_3 de classe $\mathcal{K}$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\alpha_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|), \tag{2.9}$$

et pour tout $u \in \mathbb{R}^m$,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, u) \leq -\alpha_3(\|x\|). \tag{2.10}$$

Théorème 29. *[80] Le système (2.7) est dit* ISS *si et seulement s'il existe une fonction Lyapunov ISS.*

Remarque 30. *Démontrer que le système (2.7) est* ISS *implique que les solutions du système convergent asymptotiquement vers une boule de rayon $\gamma(\operatorname{ess\,sup}_{s\in[0,t]} \|u(s)\|)$ localement essentiellement bornée.*

2.3.2 Suivi par consensus avec un leader non perceptif

Nous allons traiter le problème de suivi par consensus pratique pour un SMA dont les agents suivent une dynamique de double intégrateur donnée par (2.1). La commande des agents est donnée par (2.4) avec un leader non perceptif. La commande du leader est donnée par (2.5).

Le leader essaie de suivre une trajectoire préassignée $(q_{\text{ref}}, p_{\text{ref}})$ vérifiant (2.2). Nous allons montrer que les suiveurs convergent vers l'état du leader et par conséquent vers la trajectoire de référence.

Remarque 31. *En l'absence de perturbations, si* $q_0(0) = q_{\text{ref}}(0)$ *et* $p_0(0) = p_{\text{ref}}(0)$*, alors pour tout* $t \geq 0$ *on a* $q_0(t) = q_{\text{ref}}(t)$ *et* $p_0(t) = p_{\text{ref}}(t)$*.*

Théorème 32. *Soit un SMA dont la dynamique est donnée par* (2.1)*, et utilisant la loi de commande* (2.4) *avec un leader non-perceptif dont la commande est donnée par* (2.5)*. On suppose que les hypothèses 19 et 22 sont vérifiées. S'il existe* $u_{\max} > 0$ *tel que* $\sup_{t\geq 0} |u_{\text{ref}}(t)| \leq u_{\max}$*, alors le SMA résout le problème de suivi par consensus pratique.*

Démonstration. Soit $e_{q_i} \in \mathbb{R}^m$ et $e_{p_i} \in \mathbb{R}^m$ tels que $e_{q_i} = q_i - q_{\text{ref}}$ et $e_{p_i} = p_i - p_{\text{ref}}$. Il s'ensuit que le système d'erreur du SMA est décrit par

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dot{e}_{q_i} = \dot{q}_i - \dot{q}_{\text{ref}} & = & p_i - p_{\text{ref}} & \\ \dot{e}_{p_i} = \dot{p}_i - \dot{p}_{\text{ref}} & = & u_i - u_{\text{ref}} & i = 0, \ldots, N \end{array} \right.$$

On définit les vecteurs d'erreurs $e_q \in \mathbb{R}^n$ et $e_p \in \mathbb{R}^n$, $n = m(N+1)$ par :

$$\begin{array}{rcl} e_q & = & \big((q_0 - q_{\text{ref}})^T, (q_1 - q_{\text{ref}})^T, \ldots, (q_N - q_{\text{ref}})^T\big)^T \\ e_p & = & \big((p_0 - p_{\text{ref}})^T, (p_1 - p_{\text{ref}})^T, \ldots, (p_N - p_{\text{ref}})^T\big)^T \end{array}$$

En dérivant le vecteur d'erreur des positions et vitesses, nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} \dot{e}_q & = & \big((\dot{q}_0 - \dot{q}_{\text{ref}})^T, (\dot{q}_1 - \dot{q}_{\text{ref}})^T, \ldots, (\dot{q}_N - \dot{q}_{\text{ref}})^T\big)^T \\ & = & \big((p_0 - p_{\text{ref}})^T, (p_1 - p_{\text{ref}})^T, \ldots, (p_N - p_{\text{ref}})^T\big)^T \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \dot{e}_p & = & \big((\dot{p}_0 - \dot{p}_{\text{ref}})^T, (\dot{p}_1 - \dot{p}_{\text{ref}})^T, \ldots, (\dot{p}_N - \dot{p}_{\text{ref}})^T\big)^T \\ & = & \big((u_0 - u_{\text{ref}})^T, (u_1 - u_{\text{ref}})^T, \ldots, (u_N - u_{\text{ref}})^T\big)^T \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{array}{rcl} \dot{e}_p & = & \begin{bmatrix} [-k_1(q_0 - q_{\text{ref}}) - k_2(p_0 - p_{\text{ref}})]^T \\ [-k_1 \sum_{j=0}^{N} a_{1j}(q_1 - q_j) - k_2 \sum_{j=0}^{N} a_{1j}(p_1 - p_j) - u_{\text{ref}}]^T \\ \vdots \\ [-k_1 \sum_{j=0}^{N} a_{Nj}(q_N - q_j) - k_2 \sum_{j=0}^{N} a_{Nj}(p_N - p_j) - u_{\text{ref}}]^T \end{bmatrix} \\ & = & k_1 \begin{bmatrix} -(q_0 - q_{\text{ref}})^T \\ -[\sum_{j=0}^{N} a_{1j}(q_1 - q_j)]^T \\ \vdots \\ -[\sum_{j=0}^{N} a_{Nj}(q_N - q_j)]^T \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -(p_0 - p_{\text{ref}})^T \\ -[\sum_{j=0}^{N} a_{1j}(p_1 - p_j) -]^T \\ \vdots \\ -[\sum_{j=0}^{N} a_{Nj}(p_N - p_j)]^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_m^T \\ 1_m^T \\ \vdots \\ 1_m^T \end{bmatrix} u_{\text{ref}} \end{array}$$

Posons $b = (0_m^T, 1_{mN}^T)^T \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S} = (\mathcal{L}_f + D) \otimes I_m$ où $\mathcal{L}_f$ est la matrice laplacienne du graphe $\mathcal{G}$ qui modélise les liens entre les suiveurs et D la matrice diagonale qui modélise les liens entre le leader et ses suiveurs. Nous avons :

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{N} a_{1j} & -a_{12} & \dots & \dots & -a_{1N} \\ -a_{21} & \sum_{j=0}^{N} a_{2j} & -a_{23} & \dots & -a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{N1} & \dots & \dots & -a_{N(N-1)} & \sum_{j=0}^{N} a_{Nj} \end{bmatrix}$$

Le système d'erreur obtenu est donné par :

$$\dot{e}_p = k_1 \begin{bmatrix} -I_m & 0_{m\times(Nm)} \\ a \otimes I_m & -\mathcal{S} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -I_m & 0_{m\times(Nm)} \\ a \otimes I_m & -\mathcal{S} \end{bmatrix} - b u_{\text{ref}}$$

avec $a = (a_{10}, \dots, a_{N0})^T$.

Soit la matrice blocs $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} -I_m & 0_{m\times(Nm)} \\ a \otimes I_m & -\mathcal{S} \end{pmatrix}$$

Le système d'erreur peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{e}_q = e_p \\ \dot{e}_p = k_1 M e_q + k_2 M e_p - b u_{\text{ref}} \end{cases} \tag{2.11}$$

avec $b = (0_m^T, 1_{mN}^T)^T \in \mathbb{R}^n$. Posons $e = (e_q^T, e_p^T)^T \in \mathbb{R}^{2n}$. Alors le système (2.11) est équivalent à :

$$\dot{e} = Ae + Bu_{\text{ref}} \tag{2.12}$$

avec $B = -(0_n^T, b^T)^T$ et $A = \begin{bmatrix} 0_n & I_n \\ k_1 M & k_2 M \end{bmatrix}$.

Montrons que toutes les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives. Soit χ_A le polynôme caractéristique de la matrice A. Nous avons :

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda I_{2n} - A) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & -I_n \\ -k_1 M & \lambda I_n - k_2 M \end{bmatrix} \\ &= \det(\lambda^2 I_n - k_2 \lambda M - k_1 M) \\ &= \det \left(\lambda^2 \begin{pmatrix} I_m & 0_{m\times Nm} \\ 0_{Nm} & I_{Nm} \end{pmatrix} - k_2 \lambda \begin{pmatrix} -I_m & 0_{m\times Nm} \\ a \times I_m & -\mathcal{S} \end{pmatrix} - k_1 \begin{pmatrix} -I_m & 0_{m\times Nm} \\ a \times I_m & -\mathcal{S} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} \lambda^2 I_m + k_2 \lambda I_m + k_1 I_m & 0_{m\times Nm} \\ -k_2 \lambda a \otimes I_m - k_1 a \otimes I_m & \lambda^2 I_{Nm} + k_2 \lambda \mathcal{S} + k_1 \mathcal{S} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} (\lambda^2 + k_2 \lambda + k_1) I_m & 0_{m\times Nm} \\ -k_2 \lambda a \otimes I_m - k_1 a \otimes I_m & \lambda^2 I_{Nm} + k_2 \lambda \mathcal{S} + k_1 \mathcal{S} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda^2 + k_2 \lambda + k_1)^m \det \big(\lambda^2 I_{mN} + (k_1 + k_2 \lambda) S \big). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de A sont donc des racines du polynôme $\lambda^2 + k_2\lambda + k_1$ ou des racines de $\pi(\lambda) = \det\big(\lambda^2 I_{mN} + (k_1 + k_2\lambda)S\big)$. Dans la mesure où $\lambda^2 + k_2\lambda + k_1$ est un polynôme de degré 2 à coefficients strictement positifs, on sait que c'est un polynôme de Hurwitz, c'est-à-dire que ses racines sont à partie réelle strictement négative.

Il reste à étudier les racines de π. On note que $\pi(-k_1/k_2) = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{2mN}$ donc $-k_1/k_2$ n'est pas une racine de π. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= (k_1 + k_2\lambda)^{mN} \det\left(-\frac{\lambda^2}{k_1 + k_2\lambda} I_{mN} - \mathcal{S} \right) \\ &= (-1)^{mN} (k_1 + k_2\lambda)^{mN} \chi_{\mathcal{S}} \left(-\frac{\lambda^2}{k_1 + k_2\lambda} \right). \end{aligned}$$

On en déduit que si λ est une racine de π, alors il existe une valeur propre μ de $\mathcal{S}$ telle que $\mu = -\frac{\lambda^2}{k_1+k_2\lambda}$, c'est-à-dire $\lambda^2 + k_2\mu\lambda + k_1\mu = 0$. Or, sous l'hypothèse 19 et selon le lemme 20, la matrice $\mathcal{L}_f$ est symétrique positive et D est diagonale avec tous ses éléments positifs, par conséquent $\mathcal{S}$ est une matrice symétrique définie positive, il s'ensuit que les valeurs propres de $\mathcal{S}$ sont positives. On en déduit à nouveau que le polynôme $\lambda^2 + k_2\mu\lambda + k_1\mu$ est un polynôme de Hurwitz, ce qui nous permet de conclure que A est Hurwitz.

Montrons maintenant que le système (2.12) est ISS par rapport à l'entrée u_{ref}. Soit P et Q, deux matrices symétriques définies positives, telles que

$$PA + A^T P = -Q.$$

On considère la fonction de Lyapunov candidate suivante :

$$V(e) = e^T P e \geq 0.$$

La dérivée temporelle de V est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= (Ae + Bu_{\text{ref}})^T P e + e^T P (Ae + Bu_{\text{ref}}) \\ &= e^T A^T P e + e^T P A e + (B^T P e + e^T P B) u_{\text{ref}}.\end{aligned}$$

Puis, $e^T PB$ et $B^T Pe$ étant des scalaires, on trouve :

$$\dot{V} = -e^T Q e + 2e^T P B u_{\text{ref}}. \tag{2.13}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire $e^T PB = e^T P^{\frac{1}{2}} \cdot P^{\frac{1}{2}} B$, on obtient :

$$e^T PB \leq \sqrt{e^T P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} e} \sqrt{B^T P^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} B} \leq \sqrt{e^T Pe} \sqrt{B^T PB}$$

En utilisant le fait que u_{ref} est bornée par u_{max}, nous obtenons :

$$e^T PB u_{ref} \leq \sqrt{e^T Pe} \sqrt{B^T PB} u_{max}.$$

Il s'ensuit que

$$\dot{V} \leq -\sqrt{e^T Qe} + 2u_{\max} \sqrt{e^T Pe} \sqrt{B^T PB}.$$

D'autre part, nous avons :

$$e^T Qe = e^T P^{\frac{1}{2}} P^{-\frac{1}{2}} Q P^{-\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} e,$$

ce qui donne, en considérant la matrice $P^{-\frac{1}{2}} Q P^{-\frac{1}{2}}$ et le vecteur $P^{\frac{1}{2}} e$:

$$\lambda_{min}(P^{-\frac{1}{2}} Q P^{-\frac{1}{2}}) e^T Pe \leq e^T Qe \leq \lambda_{max}(P^{-\frac{1}{2}} Q P^{-\frac{1}{2}}) e^T Pe.$$

Il s'ensuit que

$$-e^T Qe \leq -\lambda_{min}(P^{-\frac{1}{2}} Q P^{-\frac{1}{2}}) e^T Pe$$

soit finalement :

$$\dot{V} \leq \sqrt{e^T Pe} \left(-c\sqrt{e^T Pe} + 2u_{\max} \sqrt{B^T PB} \right),$$

avec $c = \lambda_{\min}(P^{-1/2} Q P^{-1/2})$.

Ainsi la dérivée de la fonction Lyapunov est négative si la condition suivante est vérifiée :

$$-c\sqrt{e^TPe} + 2u_{max}\sqrt{B^TPB} < 0.$$

Fixons $0 < \varepsilon < 1$. Deux cas sont possibles :

- soit $\sqrt{e^TPe} \geq \frac{2u_{max}\sqrt{B^TPB}}{c(1-\varepsilon)}$ alors $\dot{V} \leq -c\varepsilon\sqrt{e^TPe}$ et on obtient que $V(e(t)) \leq \exp(-\varepsilon ct)V(e(0))$;
- soit $V(e) \leq \left(\frac{2u_{max}\sqrt{B^TPB}}{c(1-\varepsilon)}\right)^2$.

En conclusion,

$$V(e) \leq \max\left\{\exp(-\varepsilon ct)V(e(0)); \left(\frac{2u_{\max}\sqrt{B^TPB}}{c(1-\varepsilon)}\right)^2\right\}.$$

De plus, $\lambda_{\min}(P)\|e\|^2 \leq V(e) \leq \lambda_{\max}(P)\|e\|^2$, ce qui donne donc

$$\lambda_{\min}(P)\|e\|^2 \leq \max\left\{\lambda_{max}(P)\exp(-\varepsilon ct)\|e(0)\|^2; \left(\frac{2u_{\max}\sqrt{B^TPB}}{c(1-\varepsilon)}\right)^2\right\}.$$

Il s'ensuit que

$$\|e\|^2 \leq \max\left\{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\exp(-\varepsilon ct)\|e(0)\|^2; \left(\frac{2u_{\max}\sqrt{B^TPB}}{c\sqrt{\lambda_{min}(P)}(1-\varepsilon)}\right)^2\right\}.$$

En prenant $\gamma = \frac{2\sqrt{B^TPB}}{c(1-\varepsilon)\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}$, nous obtenons :

$$\|e\|^2 \leq \max\left\{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}\exp(-\varepsilon ct)\|e(0)\|^2; (\gamma u_{\max})^2\right\}.$$

soit encore :

$$\|e\| \leq \max\left\{\frac{\sqrt{\lambda_{\max}(P)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}}\exp(-\frac{\varepsilon ct}{2})\|e(0)\|; \gamma\, u_{\max}\right\}$$

On en conclut que le système d'erreur (2.12) est ISS par rapport à l'entrée u_{ref} et on obtient

$$\limsup_{t\to+\infty}\|e(t)\| \leq \gamma\, u_{\max}, \tag{2.14}$$

Les états des agents convergent vers une boule de rayon $\gamma\, u_{\max}$ autour de la trajectoire pré-assignée. En d'autres termes, le SMA (2.1) sous les commandes (2.4)-(2.5) résout le problème du suivi par consensus pratique. □

2.3.3 Suivi par consensus avec un leader perceptif

Le suivi par consensus permet d'imposer, à travers un leader, une trajectoire et donc un objectif prévisible aux agents, ce qui n'était pas possible dans le cas du consensus simple. L'objectif du leader est de suivre la trajectoire préassignée. Le reste des agents suit le leader si le graphe des suiveurs est connexe et si au moins un suiveur est relié au leader.

La condition pour que le graphe reste connexe est que la trajectoire préassignée soit compatible avec la dynamique des agents. En pratique, les agents ont des limitations physiques qui se traduisent en particulier par une vitesse bornée. Il est donc tout à fait possible que le leader, qui suit sa trajectoire préassignée, s'éloigne de plus en plus du reste de la flotte et perde à terme la connectivité avec les agents.

Partant de ce constat, il nous a semblé qu'en pratique, il était plus important de maintenir le graphe connexe en lien avec le leader que d'assurer le suivi du leader sur la trajectoire préassignée.

Pour cela, nous avons développé la notion de leader perceptif : le leader cherche toujours à suivre une trajectoire préassignée mais tient compte de l'état des agents avec lesquels il est connecté. Il y a donc un compromis qui s'établit entre le suivi de la trajectoire et le consensus de la flotte.

Nous allons montrer dans ce paragraphe la stabilité pratique du suivi par consensus avec un leader perceptif.

Hypothèse 33. *Le chemin entre le leader et ses suiveurs est non orienté.*

Théorème 34. *Soit un SMA dont la dynamique est donnée par* (2.1) *avec la loi de commande* (2.4)*, et un leader perceptif qui suit la loi de commande* (2.6)*. On suppose que les hypothèses 19, 22 et 33 sont vérifiées. S'il existe* $u_{\max} > 0$ *tel que* $\sup_{t\geq 0} |u_{\text{ref}}(t)| \leq u_{\max}$*, alors le SMA résout le problème du suivi par consensus pratique.*

Démonstration. On considère le graphe $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{V}, \bar{\mathcal{E}})$ obtenu en ajoutant le leader au graphe des suiveurs. Selon l'hypothèse 33, le graphe $\bar{\mathcal{G}}$ vérifie l'hypothèse 19. On peut modéliser la trajectoire pré-assignée par un leader virtuel que l'on ajoute à la flotte déjà constituée (leader+suiveurs). Le leader virtuel n'est relié qu'au leader.

Il s'ensuit que la matrice D associé au leader virtuel a exactement une seule entrée non nulle situé dans la première ligne et la première colonne ; par conséquent l'hypothèse 22 est vérifié.

On suppose que le leader virtuel suit la dynamique définie par (2.2) avec les conditions initiales $q_{\text{ref}}(0)$ et $p_{\text{ref}}(0)$. Cela signifie que la trajectoire du leader virtuel est celle de la trajectoire de référence.

Comme la commande du leader (2.6) est identique à celles de ses voisins (**??**), on peut appliquer le théorème 32. Il s'ensuit que le SMA résout le problème du suivi par consensus pratique. □

Remarque 35. *Dans la preuve du Théorème 34, la dynamique du leader virtuel n'est connue que du leader. L'utilisation du leader virtuel n'est qu'une technique pour montrer la stabilité pratique.*

2.4 Simulations

Nous allons dans un premier temps valider ces résultats théoriques en simulation sous Matlab pour $m = 2$, $k_1 = k_2 = 1$. On considère un SMA constitué de N agents et un leader libellé 0 modélisés par des doubles intégrateurs. Le graphe non orienté et fixe qui modélise les liens de connexion entre les agents et le leader est donné figure 2.1.

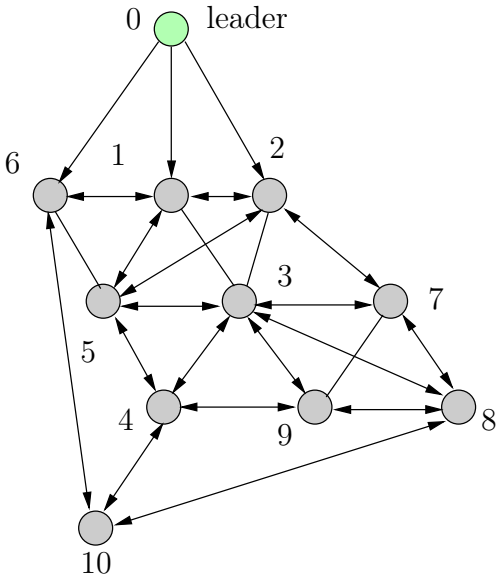


FIGURE 2.1 – Topologie du graphe

2.4.1 Cas d'une référence fixe

On considère le cas particulier où l'objectif à atteindre est un point fixe sur l'origine. La position du leader est initialisée sur ce point. Les positions des agents sont tirées aléatoirement dans l'ensemble $[0; 100] \times [0; 10]$.

Les résultats présentés sur les figures 2.2 et 2.3 ont été obtenus pour un leader perceptif. Le leader est représenté en rouge.

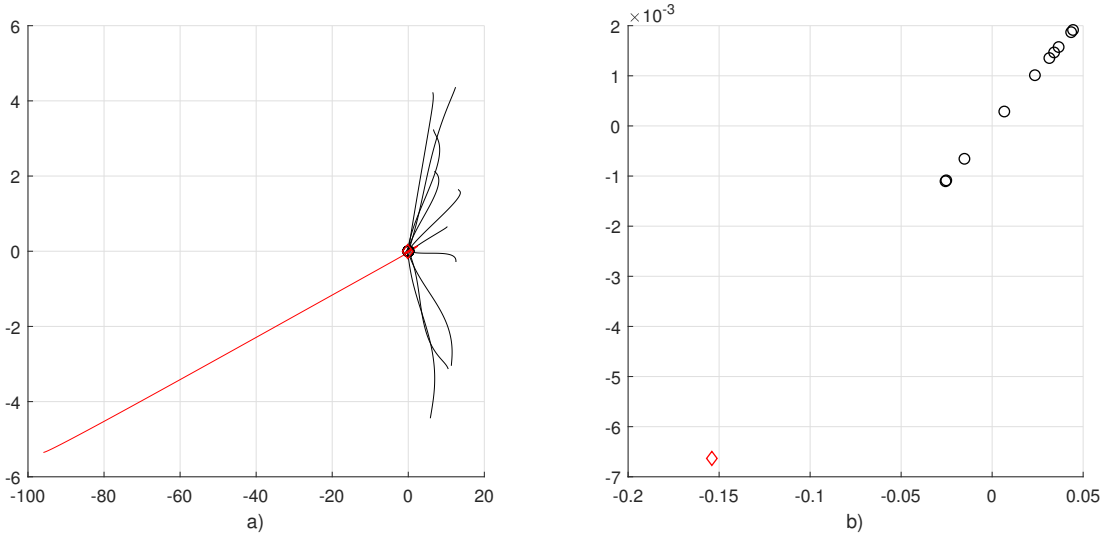


FIGURE 2.2 – a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre

La figure 2.2 a) représente les trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre. Comme $u_{ref} = 0$, le consensus est sur l'origine. La figure 2.2 b) montre la dispersion des agents et du leader autour du barycentre. Comme $u_{ref} = 0$, les agents se regroupent avec une dispersion très faible.

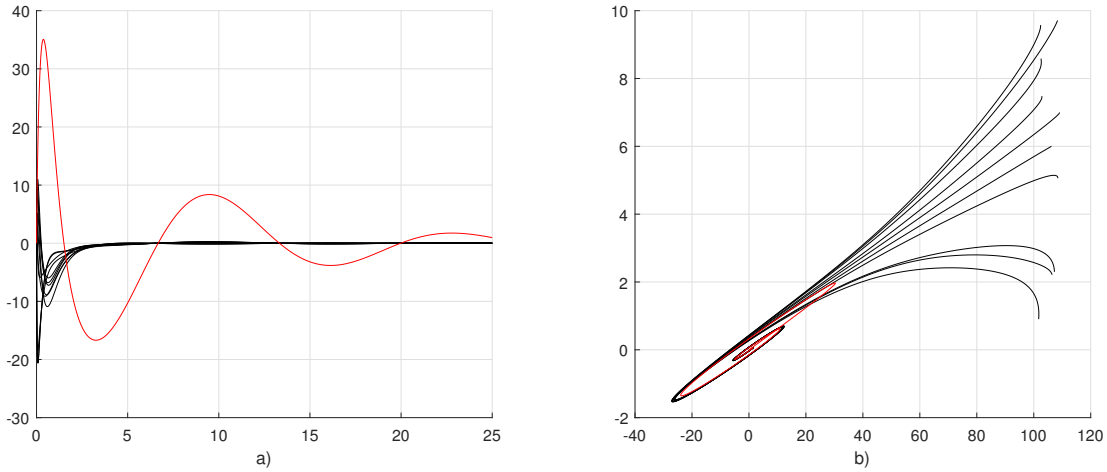


FIGURE 2.3 – a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre. En rouge, vitesse du leader ; b) Trajectoires des agents et du leader (en rouge) dans le plan

La figure 2.3 a) montre les vitesses des agents qui s'annulent toutes asymptotiquement. Sur la figure 2.3 b), on peut voir que le leader, sous l'action de f_{0i}, quitte le point de référence pour aller vers les suiveurs (trajectoire en rouge). le groupe rejoint ensuite l'origine.

Dans un souci de comparaison, nous avons simulé le SMA dans les mêmes conditions mais avec la commande (2.5) qui correspond à un leader non perceptif. Les résultats sont donnés sur les figures 2.4 et 2.5.

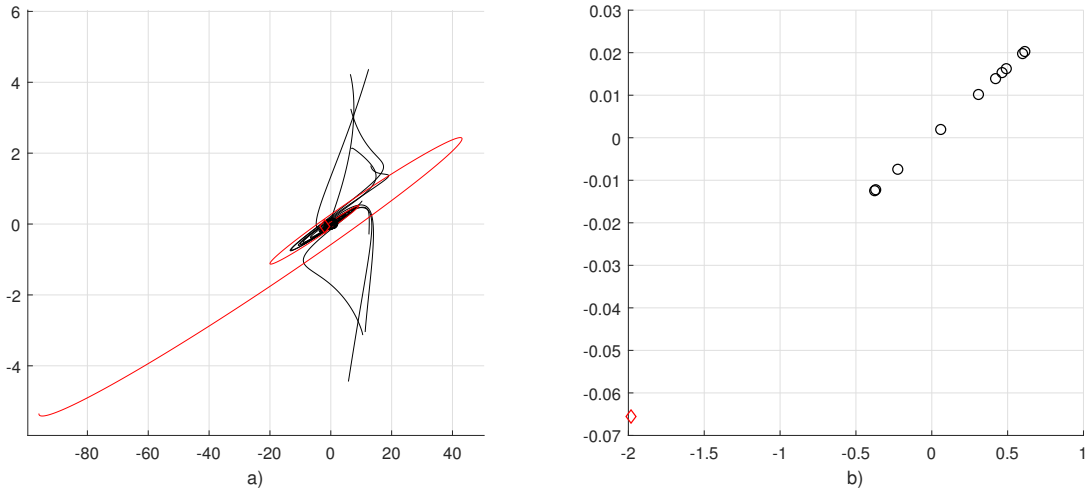


FIGURE 2.4 – a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre

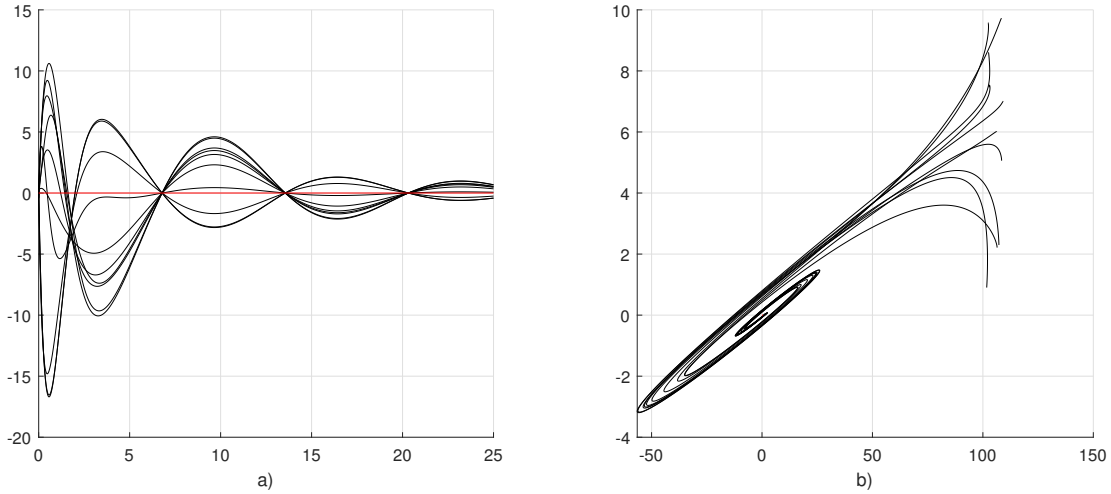


FIGURE 2.5 – a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre ; b) Trajectoires des agents et du leader dans le plan

Le leader reste sur la position de référence à l'origine. Les agents mettent plus de temps à atteindre le consensus. On voit en particulier sur la figure 2.5-a) que les vitesses des agents oscillent fortement avant de se stabiliser sur zéro.

2.4.2 Cas d'une référence variable

La trajectoire de référence est définie par

$$\dot{q}_{ref_x} = Q_x cos(2\pi f_x t) + q_{x0}$$
$$\dot{q}_{ref_y} = Q_y sin(2\pi f_y t) + q_{y0}$$

avec $q_{x0} = 5$, $q_{y0} = 5$, $Q_x = 5$, $Q_y = 10$, $f_x = 0.005Hz$, $f_y = 0.03Hz$, $\dot{q}_{x0} = 0$, $\dot{q}_{y0} = 2\pi f_y Q_y$. C'est un cycle représenté sur la figure 2.6.

La position du leader est initialisée en dehors de la trajectoire de référence. Les positions des agents sont tirées aléatoirement dans l'ensemble $[0; 100] \times [0; 10]$. Les résultats présentés sur les figures 2.7 et 2.8 ont été obtenus pour un leader perceptif. Le leader est représenté en rouge.

Le leader se regroupe avec les autres agents (fig. 2.7-a)), puis la flotte centrée autour du barycentre essaie de se caler sur la trajectoire de référence (fig. 2.8-b)). La vitesse du leader oscille légèrement

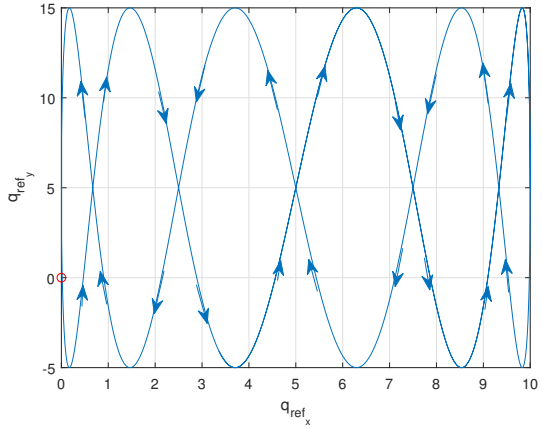


FIGURE 2.6 – Trajectoire de référence

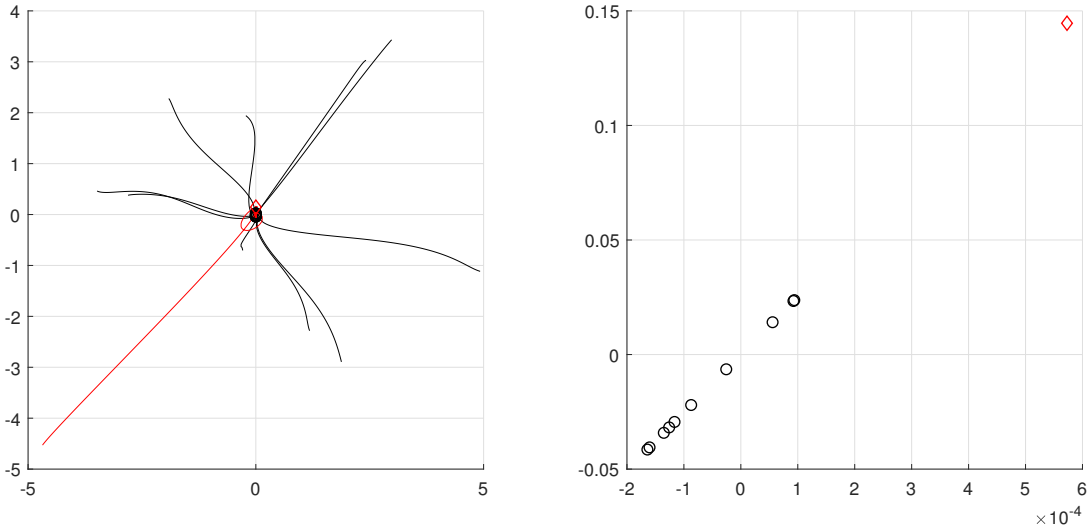


FIGURE 2.7 – a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre

autour de celle du barycentre, en fonction des variations de u_{ref} (fig. 2.8-a)).

Toujours dans un souci de comparaison nous avons fait la même expérience pour un leader non perceptif. Les résultats sont donnés sur les figures 2.9 et 2.10. Le leader rejoint rapidement le trajectoire de référence sans se préoccuper du reste de le flotte (fig. 2.10-b)). La flotte a du mal à se stabiliser autour du barycentre (fig. 2.9-a)).

Dans l'exemple suivant, nous avons considéré une trajectoire de référence avec une accélération constante suivant x. La position du leader est initialisée sur la trajectoire de référence. Toutes les vitesses initiales des agents et du leader sont nulles. Les positions initiales des agents sont tirées aléatoirement dans l'ensemble $[0; 100] \times [0; 10]$. L'objectif est de voir l'écart entre l'état du barycentre et la référence. Nous avons considéré les quatre valeurs d'accélération $\{1, 5, 10, 20\}$ pour u_{ref_x}. La figure 2.11 représente $\|q_c(t) - q_{ref}(t)\|$, l'écart de position entre le barycentre des agents et du leader et la position de référence pour les différentes valeurs de l'accélération de référence.

Ce résultat met en évidence la convergence de l'erreur dans un ensemble centré sur l'origine dont la taille dépend de u_{ref}. Plus u_{ref} est grand et plus l'ensemble de convergence est grand. On voit sur la figure 2.12 que les vitesses des agents et du leader convergent sur la vitesse de référence. Ces résultats sont indépendant du type de leader considéré (perceptif ou non-perceptif). On a dans les deux cas un suivi de consensus pratique.

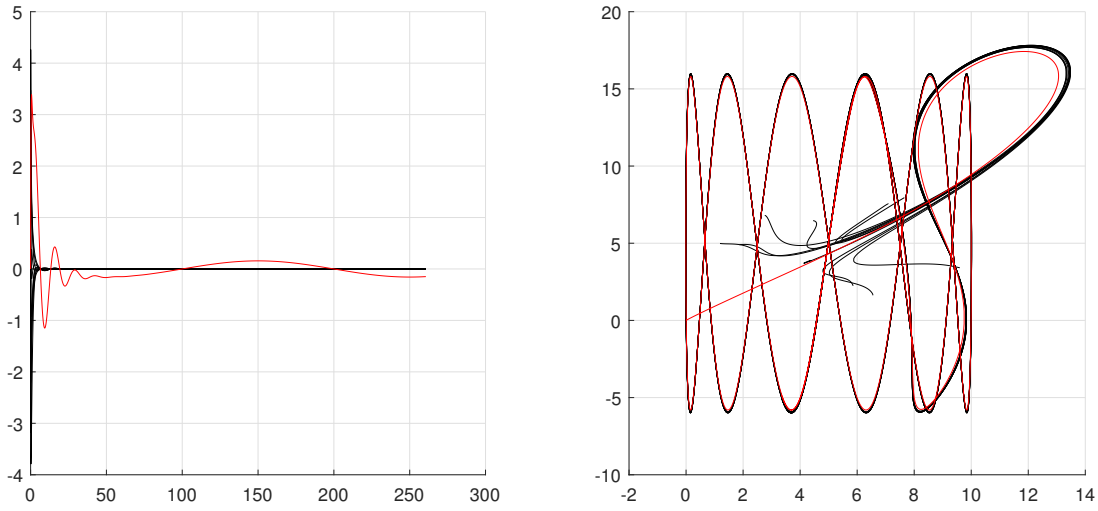


FIGURE 2.8 – a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre ; b) Trajectoires des agents et du leader dans le plan

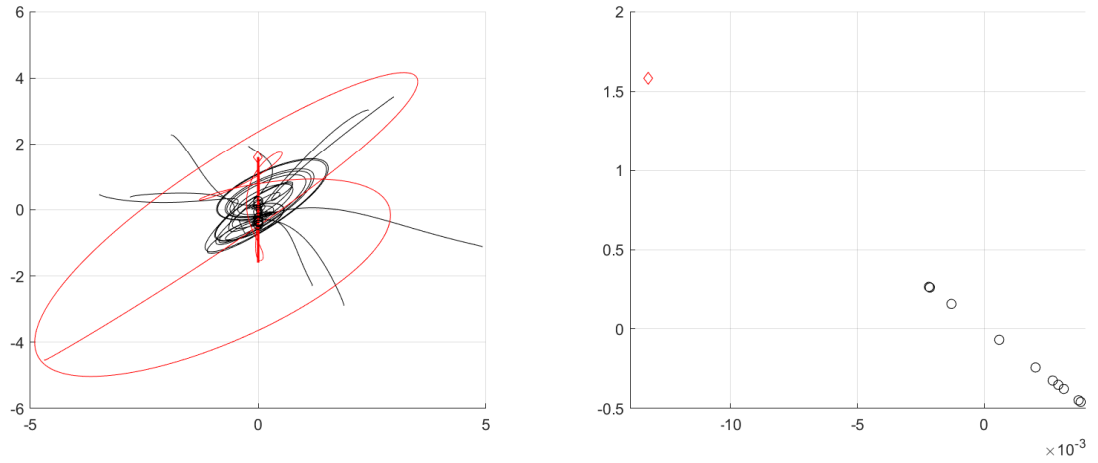


FIGURE 2.9 – a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre ; b) Positions finales des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre

Le leader perceptif permet de diminuer la distance entre les agents et le leader. Dans certaines applications, la qualité de la communication dépend de la distance et il est alors intéressant de conserver des distances relativement faibles entre les agents. Dans ce cas de figure, un leader perceptif sera plus efficace.

2.5 Résultats expérimentaux

2.5.1 Plate-forme robotique

Les résultats expérimentaux ont été obtenus lors d'un séjour de recherche de 6 mois à l'Université de Nebraska-Lincoln, dans l'équipe du Professeur Qing Hui. Les résultats théoriques qui ont été développés dans ce chapitre ont été validés expérimentalement sur une flotte de robots Pioneer 3-DX en utilisant le système d'exploitation ROS (Annexe B).

Le robot Pioneer 3-DX est utilisé pour la recherche et les applications impliquant la cartographie, la téléopération, la localisation, la surveillance, la reconnaissance et autres comportements. Il est caractérisé par un ensemble de fonctionnalités présentées dans le tableau 2.1.

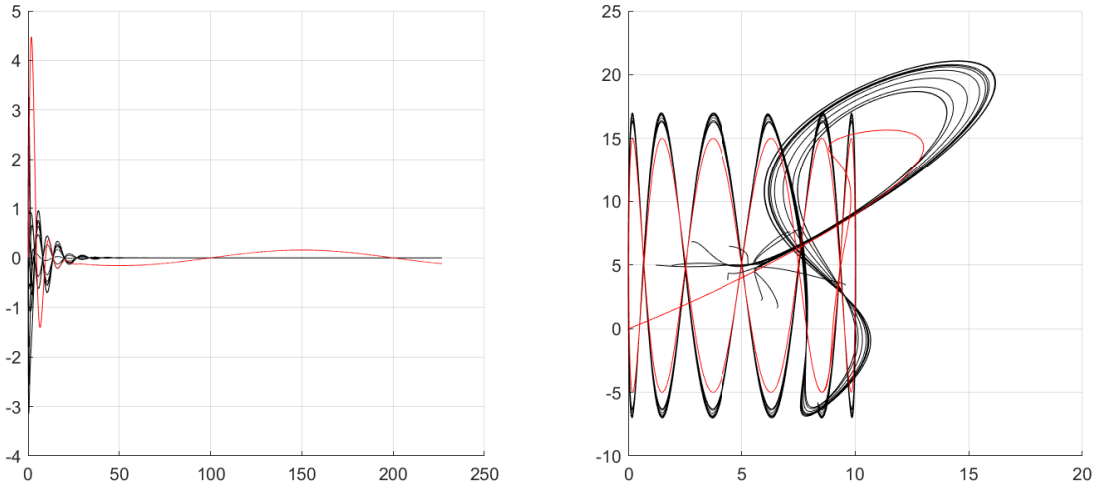


FIGURE 2.10 – a) Évolution des vitesses suivant l'axe x dans le référentiel lié au barycentre ; b) Trajectoires des agents et du leader dans le plan

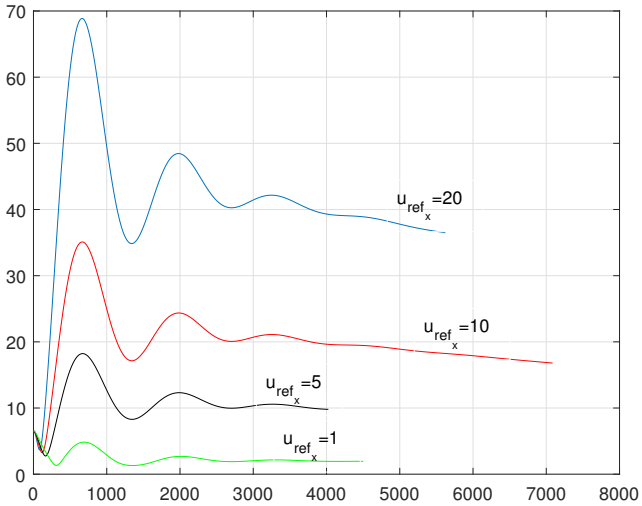


FIGURE 2.11 – Écart de position entre le barycentre des agents et du leader et la position de référence en fonction du temps

Caractéristiques	**Valeurs**
Longueur	485 mm
Largeur	381 mm
Hauteur	217 mm
Poids	9 kg
Max. vitesse avant / arrière	1.2 m/s

TABLE 2.1 – Caractéristique du Pioneer 3-DX

Le robot Pioneer 3-DX est assemblé avec des moteurs dotés d'un codeur incrémental de 500 points, ce qui donne une résolution d'angle de 0.72°, de roues de 19 cm, d'un corps en aluminium robuste, de 8 capteurs à ultrasons orientés vers l'avant, de 8 capteurs sonars optionnels orientés vers l'arrière, de 1, 2 ou 3 batteries remplaçables à chaud et d'un kit de développement logiciel complet. Il peut atteindre une vitesse de 1,2 mètre par seconde et supporter une charge utile pouvant atteindre 23 kg.

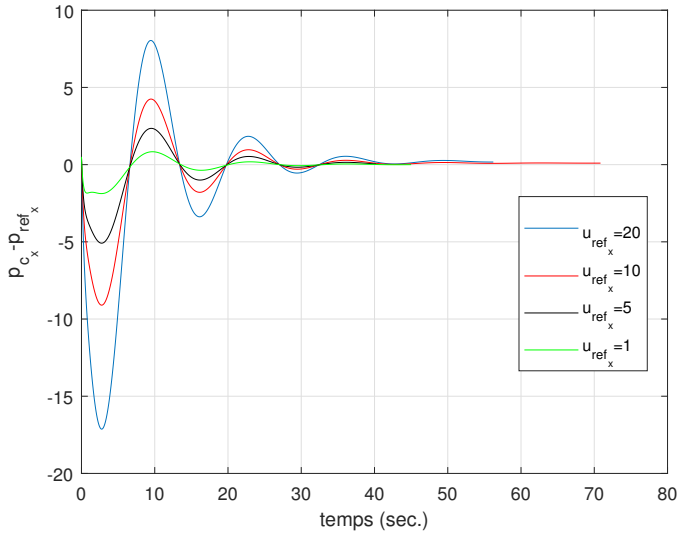


FIGURE 2.12 – Écart de vitesse entre le barycentre des agents et du leader et la vitesse de référence suivant x



FIGURE 2.13 – le robot Pioneer 3-DX

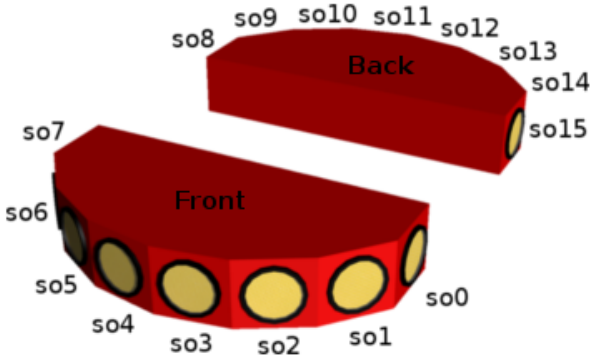


FIGURE 2.14 – Position des capteurs

La connexion entre le microprocesseur local et le robot pioneer est réalisée à l'aide d'un câble USB, comme indiqué dans la Figure 2.15. Ce câble sert de support de connexion entre le microprocesseur local et le robot mobile.

La transmission des données entre le robot et le microprocesseur est câblée, garantissant ainsi la

fiabilité, puisque le retard de transmission et les pertes de données sont négligeables dans ce cas.

La récupération des informations présentes sur les robots et les connexions entre robots se font via un réseau sans fil (Figure 2.15). L'ordinateur qui récupère ces informations peut également servir de leader virtuel.



FIGURE 2.15 – Carte microprocesseur et carte de transmission sans fil

2.5.2 Modélisation

Nous avons jusqu'à présent supposé que les agents étaient modélisables par des doubles intégrateurs. Dans le cas des robots pioneer, la dynamique de l'agent i est donnée par

$$\begin{cases} \dot{q}_{i_x} = v_i \cos(\theta_i) \\ \dot{q}_{i_y} = v_i \sin(\theta_i) \\ \dot{\theta}_i = \omega \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, N \tag{2.15}$$

avec (q_{x_i}, q_{y_i}), θ_i et (v_i, ω_i) les positions du centre d'inertie, l'angle polaire et la vitesse linéaire et angulaire du i-ème robot.

Les robots suivent une dynamique non holonomique telle que

$$\dot{q}_{i_x} \sin\theta_i - \dot{q}_{i_y} \cos\theta_i = 0 \tag{2.16}$$

La contrainte (2.16) associée au système (2.15) fixe les limites des déplacements admissibles pour le robot. Toutes les commandes que nous avons développé l'ont été pour un double intégrateur. L'idée est de linéariser les dynamiques du robot pour conserver le formalisme du double intégrateur. Une approche possible est de considérer un point positionné à l'avant du robot, comme expliqué sur la Figure 2.16 ([69]- chapitre 10).

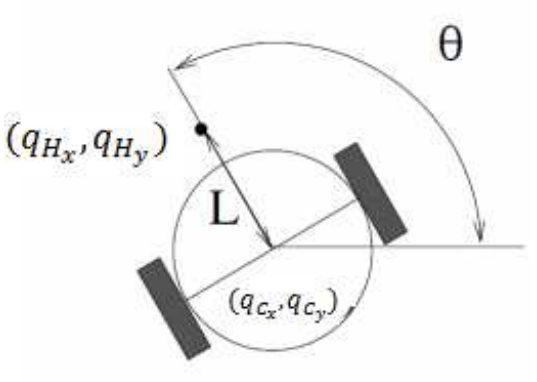


FIGURE 2.16 – Configuration non holonome d'un robot mobile

Soit le point $H(q_{H_x}, q_{H_y})$ situé à une distance L du point d'inertie $C(q_{C_x}, q_{C_y})$. On a :

$$\begin{bmatrix} q_{H_{x_i}} \\ q_{H_{y_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{C_{x_i}} \\ q_{C_{y_i}} \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} \cos\theta_i \\ \sin\theta_i \end{bmatrix}.$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\begin{aligned} \dot{q}_{H_{x_i}} &= \dot{q}_{C_{x_i}} - L\dot{\theta}_i \sin\theta_i \\ &= v_i \cos\theta_i - L\omega_i \sin\theta_i \end{aligned}$$

$\dot{q}_{H_{y_i}}$ est calculé de la même manière. On obtient

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_{H_{x_i}} \\ \dot{q}_{H_{y_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -L\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & L\cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix}$$

Posons $R_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -L\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & L\cos\theta_i \end{bmatrix}$ tel que $\begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = R_i^{-1} \begin{bmatrix} \dot{q}_{H_{x_i}} \\ \dot{q}_{H_{y_i}} \end{bmatrix}$

On a :

$$\begin{bmatrix} v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ \frac{-1}{L}\sin\theta_i & \frac{1}{L}\cos\theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_{H_{x_i}} \\ \dot{q}_{H_{y_i}} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{H_{x_i}} \\ \ddot{q}_{H_{y_i}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{x_i} \\ u_{y_i} \end{bmatrix}$$

Ce développement est résumé par le schéma 2.17.

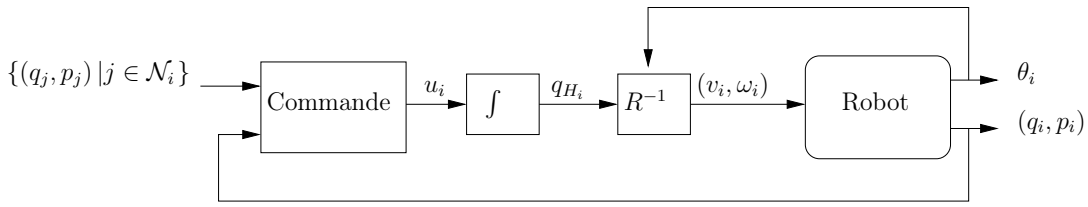


FIGURE 2.17 – Linéarisation du robot non holonome

2.5.3 Essais expérimentaux

On considère une plateforme de 4 robots mobiles Pioneer 3-DX. Les positions initiales des robots sont choisies telles que $q_{1_x} = -0.915\text{m}$, $q_{1_y} = 0.915\text{m}$; $q_{2_x} = 2.205\text{m}$, $q_{2_y} = 0\text{m}$; $q_{3_x} = 1.22\text{m}$, $q_{3_y} = 1.22\text{m}$; $q_{4_x} = -0.62\text{m}$, $q_{4_y} = 2.44\text{m}$. La position initiale de la flotte est visible sur la Fig. 2.18. Toutes les vitesses initiales sont nulles. De plus, on fixe $q_{\text{ref}} = p_{\text{ref}} = (0, 0)$.

Le leader virtuel a été programmé sur l'ordinateur et ne communique qu'avec le robot suiveur 1.

Les robots communiquent entre eux par wifi. L'algorithme est écrit en langage C++, le pas de calcul est de 0.01s. La dynamique des robots est approximée par un double intégrateur. Le graphe qui modélise la communication entre les robots est donné sur la figure 2.19. La matrice laplacienne vaut

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Elle est de rang 3, le graphe est donc connexe.

Les robots mobiles utilisés pour les expériences sont des robots à roues qui peuvent être représentés par un modèle de type monocycle. Le modèle exact de ce robot est toujours complexe, principalement en raison de contraintes non holonomiques.

Cependant, comme il est mentionné auparavant, chaque agent peut être approximé par un double intégrateur.

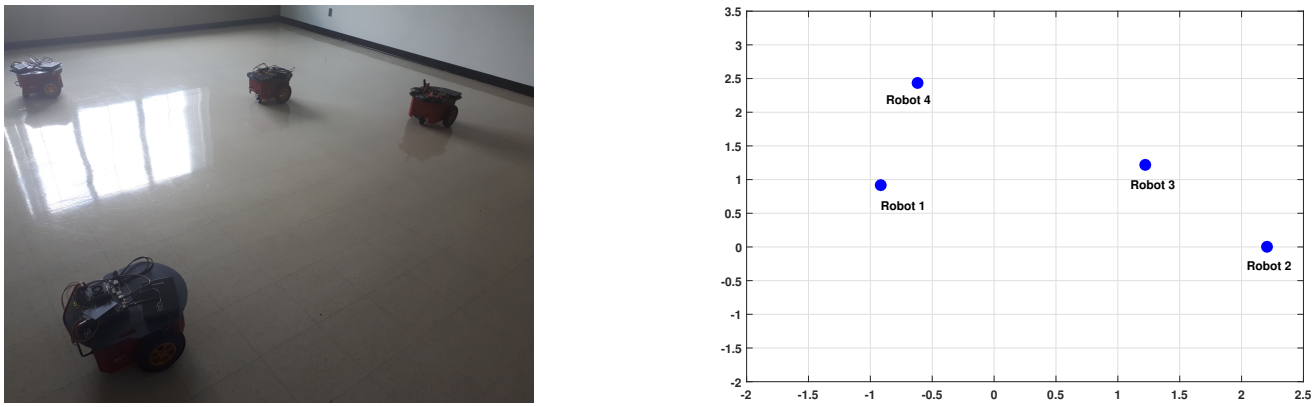


FIGURE 2.18 – Position initiale d'une flotte de 4 robots mobiles du type Pioneer 3-DX

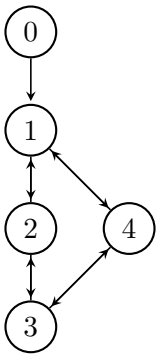


FIGURE 2.19 – Toopologie de la communication des 4 robots et le leader virtuel libellé 0.

Il y a toujours des incertitudes et des perturbations dans les expériences. Généralement, il n'est pas possible de modéliser toutes les dynamiques. Néanmoins, les lois de contrôle doivent fonctionner même en présence de ces dynamiques non modélisées.

Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre montrent que notre algorithme fonctionne correctement en temps réel malgré cette approximation sur le modèle.

Pour des raisons pratiques, on ne peut pas faire converger les suiveurs sur la position du leader. Comme nous n'avons pas mis en place de mécanisme d'anti-collision, on spécifie dans la commande un offset d_{ij} sur les positions des robots :

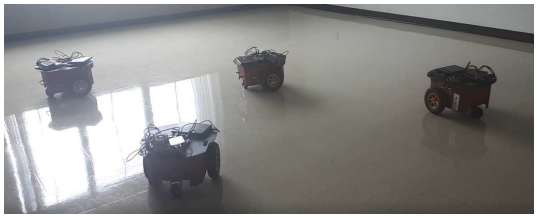
$$u_0 = u_{\text{ref}} - \underbrace{k_1(q_0 - q_{\text{ref}}) - k_2(p_0 - p_{\text{ref}})}_{f_{or}} - \underbrace{k_1 \sum_{i=1}^{N} a_{i0}(q_0 - q_i - d_{0j}) - k_2 \sum_{i=1}^{N} a_{i0}(p_0 - p_i)}_{f_{oi}} \tag{2.17}$$

et

$$u_i = -k_1 \sum_{j=0}^{N} a_{ij}(q_i - q_j - d_{ij}) - k_2 \sum_{j=0}^{N} a_{ij}(p_i - p_j), \quad i = 1, \ldots, N \tag{2.18}$$

Pour cette application, l'offset est le même pour tous les robots et fixé à 1m. Le terme f_{or} dans la commande du leader permet à ce dernier de suivre la trajectoire de référence. Le terme f_{oi} traduit la perception qu'a le leader de ses suiveurs. La Figure 2.20 représente la position de la flotte avec un leader non perceptif ($f_{oi} = 0$) en utilisant la commande (**??**) aux temps $t = 16$s et $t = 37$s.

Les robots se calent sur la trajectoire pré-asisgnée au bout d'un temps $t = 16$s et atteignent le consensus au bout de $t = 37$s. L'évolution des positions et des vitesses des agents sont données sur les figures 2.21a-2.21b.



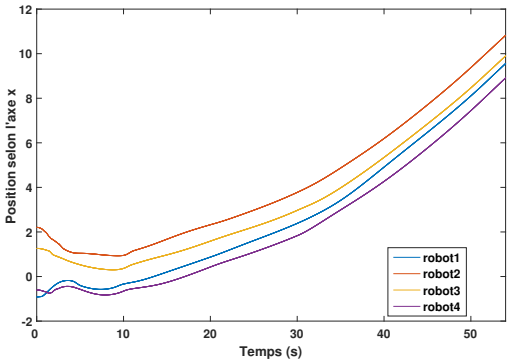
(a) $t = 16s$



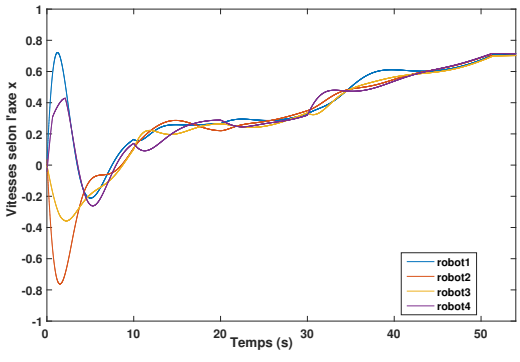
(b) $t = 37s$

FIGURE 2.20 – Positions dans le cas non perceptif

On constate que même en présence des perturbations et des dynamiques non modélisés, le consensus pratique est atteint.



(a) Évolution des positions



(b) Évolution des vitesses

FIGURE 2.21 – Évolution des positions et vitesses pour un leader non perceptif

Dans ce qui suit, nous conservons les mêmes conditions expérimentales et nous considérons un leader perceptif. La position de la flotte est donnée au temps $t = 6$s sur la figure 2.22a et au temps $t = 30$s sur la figure 2.22b.



(a) $6s$

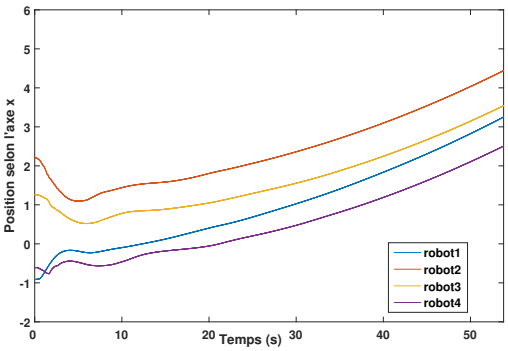


(b) $30s$

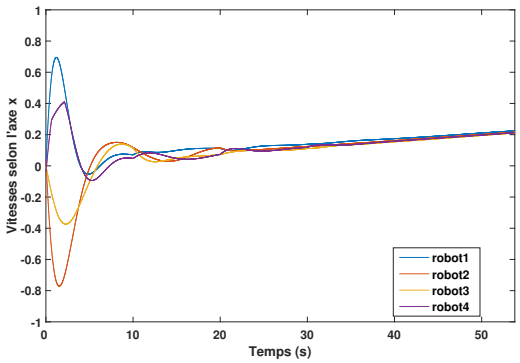
FIGURE 2.22 – Positions dans le cas du leader perceptif

La figure 2.22a correspond au moment où les suiveurs se regroupent et la figure 2.22b est obtenue quand le consensus pratique est atteint. Les positions et les vitesses des agents sont représentées sur les figures 2.23a-2.23b.

Comme en simulation, nous observons que l'utilisation du leader non perceptif et du leader perceptif assure la convergence pratique de la flotte, avec une amélioration de la vitesse de convergence dans le cas du leader perceptif. Dans le cas du leader perceptif le suivi par consensus pratique est plus vite atteint car le leader prend en compte l'évolution de la flotte.



(a) Évolution des positions



(b) Évolution des vitesses

FIGURE 2.23 – L'évolution des positions et vitesses pour un leader perceptif

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le suivi par consensus pratique d'un SMA avec des agents modélisés par des doubles intégrateurs et un leader perceptif et non perceptif. Nous avons considéré une topologie fixe et un graphe non orienté. Le leader suit une trajectoire de référence. Dans le cas où il est perceptif, sa commande est un compromis entre un terme dépendant de l'écart entre son état et celui de la référence et d'un terme fonction de l'écart entre son état et celui des agents suiveurs.

Nous avons développé une loi de commande qui permet d'atteindre le suivi de consensus pratique quelque soit la nature du leader. Nous montrons que les états des agents et du leader convergent dans un ensemble centré sur l'état de référence. Lorsque l'accélération de référence est nulle, nous obtenons le suivi de consensus, c'est à dire que l'ensemble se réduit à l'état de référence. Dans le cas contraire, la taille de l'ensemble croît avec l'accélération.

Le leader perceptif permet de réduire dans tous les cas de figure la distance entre les agents et le leader. C'est une propriété intéressante dans les situations où la qualité des transmissions dépend de façon critique de la distance. C'est le cas par exemple dans les environnements complexes tels que les ateliers d'usines où les obstacles sont nombreux.

Ce résultat reste à améliorer en prenant en compte dans la commande d'un mécanisme d'anti-collision entre les agents et en considérant un graphe à topologie variable. Ces deux points font l'objet du chapitre trois.

Chapitre 3

Consensus et suivi par consensus en topologie variable

Contents

3.1 Introduction 43
3.2 État de l'art 44
3.3 Formulation du problème 44
3.3.1 Voisinage 44
3.3.2 Anti-collision 44
3.3.3 Formation en treillis 45
3.3.4 Fonctions d'appartenance pour une topologie variable 46
3.3.5 Système masse-ressort 47
3.3.6 Hamiltonien d'un SMA 47
3.4 Consensus pour une topologie variable 48
3.5 Consensus pour une topologie variable et barrières de potentiel 52
3.6 Suivi de consensus avec un leader perceptif 57
3.7 Conclusion 70

3.1 Introduction

Un point crucial dans l'étude des systèmes multi-agents porte sur le consensus lorsque le graphe varie dans le temps. Nous avons jusqu'à présent considéré qu'un agent conservait les mêmes voisins. La topologie du graphe est alors constante et la stabilité du consensus ne dépend que des états des agents. En pratique, il est plus naturel de définir le voisinage d'un agent sur un critère de distance. Deux agents sont voisins s'ils sont situés à une distance réciproque inférieure à une valeur fixe. Cette définition induit une topologie de graphe qui varie suivant les déplacements des agents. Deux problèmes se posent alors :

- En supposant le graphe initial à $t = 0$ connexe, comment peut-on assurer que tous les graphes commutés resteront connexes au cours du temps ?
- En supposant que tous les graphes commutés sont connexes, quelles sont les conditions à remplir sur ces commutations pour assurer la stabilité du système multi-agents ?

Ces deux points font l'objet de ce chapitre. Nous présenterons tout d'abord une nouvelle formulation d'un SMA en utilisant l'hamiltonien du système. Puis nous dégagerons les conditions de stabilité dans le cas d'un graphe à topologie variable.

3.2 État de l'art

La modélisation d'un SMA par une approche énergétique, c'est à dire en utilisant l'hamiltonien du système, a été initialement développée dans [57] dans le cadre de l'agrégation des agents (*flocking for multi-agent systems*). Dans cet article, les auteurs proposent un système d'anti-collision qui, *in fine*, conduit à la mise en formation des agents en treillis. Nous reprendrons une partie de cette modélisation mais en utilisant des fonctions d'anti-collision différentes. Les auteurs de [57] proposent également une commande permettant le suivi de consensus : la formation suit une trajectoire préassignée. La différence essentielle par rapport à notre travail porte sur la diffusion aux agents de la trajectoire de référence. Dans [57], la trajectoire de référence est transmise à chaque agent. Il n'y a pas de notion de leader, ou plus exactement un leader virtuel dispose de l'information et est connecté à chaque agent. Dans notre travail, nous supposons qu'un leader perceptif suit une trajectoire de référence avec une certaine dynamique. Ce leader dispose initialement d'une connexion bidirectionnelle avec au moins un agent de la flotte.

L'utilisation de fonctions potentielles a été reprise dans [9] pour l'évitement de collision et pour le maintien de connectivité. Les auteurs proposent une commande non linéaire de type modes glissants pour assurer le suivi de consensus avec un leader qui se déplace à vitesse variable. Cependant, la barrière de potentiel qui assure le maintien de connectivité tend vers l'infini sur sa frontière, interdisant à un agent extérieur de pénétrer dans le voisinage. Les auteurs mettent en place en pratique deux fonctions potentielles, suivant qu'initialement l'agent appartient ou non au voisinage d'un autre agent. Ce mécanisme n'assure le maintien de connectivité que pour les agents déjà voisins à $t = 0$. Enfin, les fonctions qui modélisent l'appartenance ou non d'un agent à un voisinage ne sont pas bornées et peuvent tendre vers l'infini.

Nous proposons dans ce chapitre de remédier à ces problèmes en présentant un protocole de suivi de consensus pour un leader perceptif à vitesse variable. Les agents se mettent en formation en treillis et suivent une trajectoire de référence. Nous distinguerons les cas où l'accélération u_{ref} de la trajectoire de référence est nulle de celui où elle peut être quelconque. Pour $u_{ref} = 0$, nous établirons la preuve de stabilité. Dans le cas plus général où $u_{ref} \neq 0$, nous donnerons les conditions pour que la flotte se mette en formation puis suive la trajectoire de référence.

3.3 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le cas où le voisinage d'un agent est défini par une distance euclidienne.

3.3.1 Voisinage

Définition 36. *Soit $R > 0$. On considère que les connections entre les agents sont représentées par le graphe non dirigé $\mathcal{G}(q) = (\mathcal{V}, \mathcal{E}(q))$ défini par $\mathcal{V} = \{1, \ldots, N\}$ et $(i, j) \in \mathcal{E}(q)$ si et seulement si $\|q_i - q_j\| < R$, avec $q = (q_1^T, \ldots, q_N^T)^T$. On notera $\mathcal{N}_i(q) = \{j \in \mathcal{V} : (i, j) \in \mathcal{E}(q)\}$ l'ensemble des voisins de l'agent i.*

Dans l'exemple de la Figure (3.1), $\mathcal{N}_7 = \{4, 6, 8\}$.

Cette définition donne un sens physique à la notion de voisin. Des agents sont voisins s'ils sont dans la même zone d'interaction définie par un disque de rayon R. Par contre, elle implique un graphe à topologie variable puisque l'ensemble des arrêtes $\mathcal{E}(q)$ dépend des positions respectives des agents. La matrice d'adjacence pour un SMA avec une topologie variable devient fonction de q, $\mathcal{A} = \{a_{ij}(q)\}$.

3.3.2 Anti-collision

Jusqu'à présent, nous avons défini le consensus comme la convergence de toutes les positions sur une position de référence et de toutes les vitesses sur une vitesse de référence. Cette définition n'a pas de sens pratique, puisqu'elle suppose que tous les agents convergent vers les mêmes coordonnées.

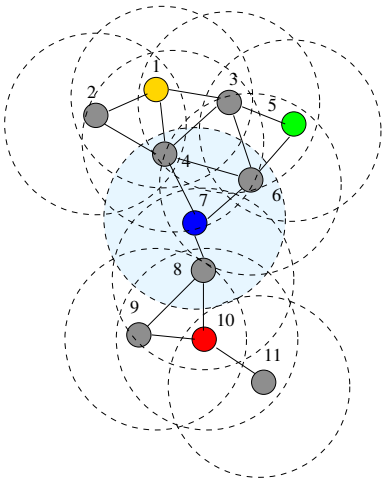


FIGURE 3.1 – $\mathcal{N}_7 = \{4, 6, 8\}$

De même, rien jusqu'à présent n'interdit que les trajectoires des agents se coupent. Pour éviter ces problèmes de collision, il convient d'imposer une formation de la flotte dans laquelle deux agents sont distants à chaque instant d'au moins une distance d_{ij} :

$$\|q_i(t) - q_j(t)\| \geq d_{ij} \quad \forall t \geq 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{V} \tag{3.1}$$

Cette condition plus générale que la formation évite toute collision entre agent.

3.3.3 Formation en treillis

Un des objectifs de la commande est de regrouper les agents. La prise en compte de la condition (3.1) dans la commande va contraindre le SMA à converger vers une forme géométrique particulière constituée de cellules polygonales quasi-régulières. Dans le plan, la configuration optimale est obtenue lorsque les distances entre les agents sont minimales, ce qui correspond à une répartition des agents suivant la figure 3.2.

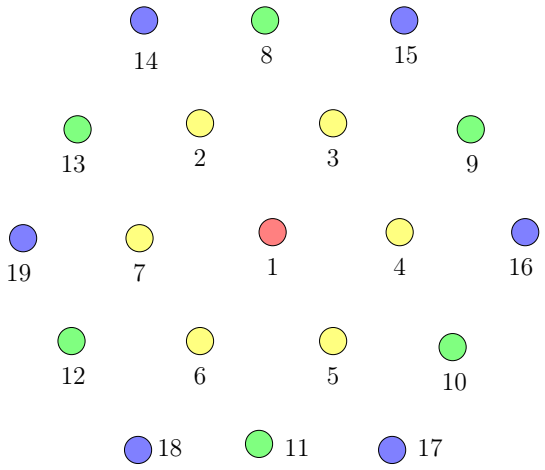


FIGURE 3.2 – Formation optimale dans le plan

Olfati-Saber a donné dans [57] une définition du treillis pour une flotte :

$$0 \leq \|q_i - q_j\| - d_{ij} \leq \delta \qquad \forall j \in \mathcal{N}_i(q) \tag{3.2}$$

avec $\delta << d_{ij}$. Cette mise en formation des agents nécessite une nouvelle définition du consensus.

Définition 37. *(Cohésion) Soit (q, p) la trajectoire d'un groupe de N agents sur l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$. Le groupe est dit **cohésif** si pour $t \geq t_0$ il existe une boule $\mathcal{B}$ de rayon $R_{\mathcal{B}} \in]0, R_{max}]$ centrée*

sur le barycentre du groupe $q_c(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} q_i(t)$ *et qui contient les* N *agents.*

Définition 38. *(Consensus pour un groupe cohésif) Un groupe de* N *agents atteint le consensus si et seulement si*

- *le groupe est cohésif*
- $\lim_{t\to+\infty} \|p_i - p_j\| = 0$ *pour tout* i, j

3.3.4 Fonctions d'appartenance pour une topologie variable

En topologie fixe, le voisinage d'un agent i est entièrement défini par les éléments binaires $\{a_{ij}\}$, $j = 1, \ldots, N$ de la matrice d'adjacence. En topologie variable, il est intéressant d'avoir une mesure du degré de voisinage entre les agents i et j. C'est pourquoi nous allons définir la fonction d'appartenance $\alpha_{ij}(\|q_i - q_j\|)$ par :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < \|q_i - q_j\| < r \\ e^{-\frac{\left(\|q_i - q_j\| - r\right)^2}{\left(\|q_i - q_j\| - R\right)^4}} & \text{si} \quad r \leq \|q_i - q_j\| < R \\ 0 & \text{si} \quad \|q_i - q_j\| \geq R \end{cases} \tag{3.3}$$

où les constantes positives r et R sont fixées en fonction des contraintes physiques des agents considérés avec $r < R$ (voir Figure 3.3).

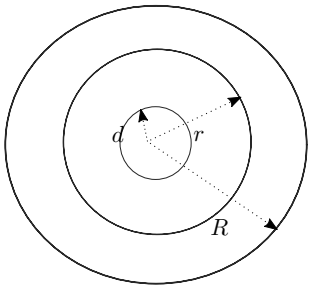


FIGURE 3.3 – Définition de d, r et R

L'évolution de α_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ est donnée sur la Figure 3.4.

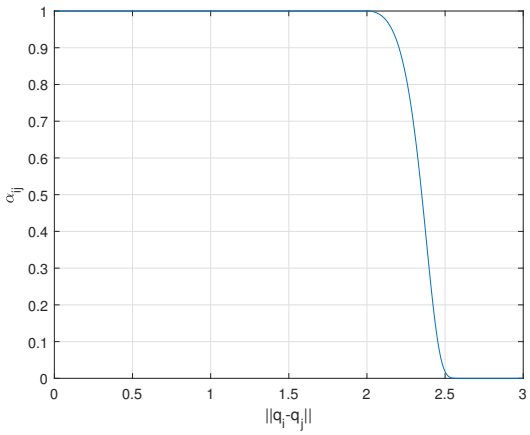


FIGURE 3.4 – Évolution de α_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $r = 2$ et $R = 3$

α_{ij} est une fonction dérivable de $\|q_i - q_j\|$, ce qui permet de définir sans discontinuité l'appartenance d'un agent à un voisinage.

3.3.5 Système masse-ressort

Considérons le système masse-ressort à 3 masses représenté sur la Figure (3.5) dont l'équation d'état est donnée par

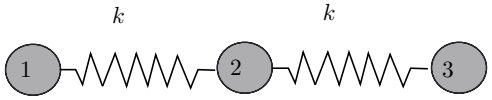


FIGURE 3.5 – Système masse-ressort

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2) - c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - c(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ m\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2) - c(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) \end{cases}$$

où m est la masse de chaque noeud, k est la raideur des ressorts et c un coefficient de frottement (fig. 3.6).

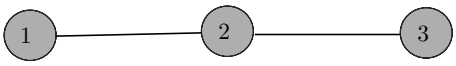


FIGURE 3.6 – Système multi-agents équivalent au système masse-ressort

Il est immédiat de faire l'analogie avec un SMA constitué de 3 agents modélisés par des doubles intégrateurs dont l'équation d'état est

$$\begin{cases} \dot{q}_1 &= p_1 \\ \dot{q}_2 &= p_2 \\ \dot{q}_3 &= p_3 \\ \dot{p}_1 &= u_1 \\ \dot{p}_2 &= u_2 \\ \dot{p}_3 &= u_3 \end{cases}$$

en prenant la commande initialement définie par Ren [68] qui garantie le consensus pour ce système :

$$\begin{cases} u_1 &= -k_1(q_1 - q_2) - k_2(\dot{p}_1 - \dot{p}_2) \\ u_2 &= -k_1(q_2 - q_1) - k_1(q_2 - q_3) - k_2(p_2 - p_1) - k_2(p_2 - p_3) \\ u_3 &= -k_1(q_3 - q_2) - k_2(p_3 - p_2) \end{cases}$$

Cette similitude va nous permettre d'analyser la stabilité du consensus pour un SMA avec une approche énergétique, en définissant l'hamiltonien du système à partir de son énergie potentielle et de son énergie cinétique.

3.3.6 Hamiltonien d'un SMA

Considérons le problème du consensus pour un SMA constitué de N agents, chacun modélisé par un double intégrateur :

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= p_i \\ \dot{p}_i &= u_i \end{cases} \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.4}$$

avec q_i, p_i et $u_i \in \mathbb{R}^m$ et $i \in \mathcal{V}$. Soit une trajectoire de référence définie par $(q_{\text{ref}}, p_{\text{ref}})$ telle que

$$\dot{q}_{\text{ref}} = p_{\text{ref}} \tag{3.5}$$

où $p_{ref} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} p_i(0)$. On note $(\tilde{q}, \tilde{p})$ les coordonnées d'erreur définies par

$$\tilde{q}^T = \left[\; q_1 - q_{\text{ref}}, \quad \ldots, \quad q_N - q_{\text{ref}} \; \right]^T$$

$$\tilde{p}^T = \left[\; p_1 - p_{\text{ref}}, \quad \ldots, \quad p_N - p_{\text{ref}} \; \right]^T$$

Le système d'erreur est défini par :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{q}} & = & \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} & = & u(\tilde{q}, \tilde{p}) \end{array} \tag{3.6}$$

Soit $V(\tilde{q})$ l'énergie potentielle du système d'erreur :

$$V(\tilde{q}) \;\; = \;\; \tfrac{1}{4} k_1 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(\tilde{q}) \, (\tilde{q}_i - \tilde{q}_j)^2$$

où k_1 est un scalaire strictement positif. L'énergie cinétique du système d'erreur est donnée par :

$$\mathcal{K}(\tilde{p}) \;\; = \;\; \tfrac{1}{2} \tilde{p}^T \tilde{p}$$

L'hamiltonien du système (3.6), qui représente l'énergie totale du système, est défini par :

$$\mathcal{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) = V(\tilde{q}) + \mathcal{K}(\tilde{p}). \tag{3.7}$$

3.4 Consensus pour une topologie variable

Soit

$$u_i \;\; = \;\; -k_1 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(q) \, (q_i - q_j) - k_2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(q)(p_i - p_j) \tag{3.8}$$

avec k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. Définissons $u^T = \left[\; u_1, \quad \ldots, \quad u_N \; \right]$. On a :

$$u \;\; = \;\; -k_1 \mathcal{L}(\tilde{q}) \tilde{q} - k_2 \mathcal{L}(\tilde{q}) \tilde{p} \tag{3.9}$$

avec $\mathcal{L}(\tilde{q}) = \{\mathcal{L}_{ij}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ où

$$\begin{array}{l} \mathcal{L}_{ij} = -\alpha_{ij}(\tilde{q}), \quad i \neq j \\ \mathcal{L}_{ii} = \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(\tilde{q}) \end{array}$$

Hypothèse 39. *Soit $\mathcal{G}$ le graphe associé au SMA (3.4). Le graphe $\mathcal{G}$ est connexe à $t = 0$.*

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où la topologie du graphe est fixe, *i.e.* les voisinages ne varient pas au cours du temps.

Proposition 40. *Sous la condition que l'hypothèse 39 soit vérifiée, le système multi-agents (3.4) avec le protocole (3.8) résout le problème de consensus en topologie fixe.*

Démonstration. Nous allons montrer que le système (3.6) avec le protocole (3.9) est un système dissipatif. Notons que, en topologie fixe, on a :

$$u \;\; = \;\; -k_1 \nabla \mathcal{V}(\tilde{q}) - k_2 \mathcal{L} \tilde{p} \tag{3.10}$$

A partir de (3.4) et (3.10), on peut écrire :

$$\begin{array}{rcl} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -k_2 \mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \nabla V(\tilde{q}) \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \\ & = & (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \, \nabla \mathcal{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) \end{array} \tag{3.11}$$

avec $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ et $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_2\mathcal{L} \end{pmatrix}$. On a $\mathcal{J}^T = -\mathcal{J}$ et $\mathcal{R} = \mathcal{R}^T \geq 0$, d'où :

$$\begin{aligned} \nabla\mathcal{H}^T \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} &= \nabla\mathcal{H}^T (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \nabla\mathcal{H} \\ &= -\nabla\mathcal{H}^T \mathcal{R} \nabla\mathcal{H} \qquad \leq 0 \end{aligned}$$

Le système est dissipatif. L'hamiltonien s'annule pour $(\tilde{q}, \tilde{p}) = (0, 0)$. On conclut sur la stabilité du consensus en appliquant le principe d'invariance de Lasalle. □

Remarque 41. *La dérivée par rapport au temps de la fonction potentielle $V(\tilde{q})$ est donnée par :*

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{q}) &= \tilde{p}^T \nabla V(\tilde{q}) \\ &= k_1 \tilde{p}^T \mathcal{L}(\tilde{q}) \tilde{q} + \tfrac{1}{2} k_1 \tilde{q}^T \dot{\mathcal{L}}(\tilde{q}) \tilde{q} \end{aligned}$$

Si la topologie est fixe, le deuxième terme est nul et la dérivée temporelle de la fonction potentielle s'annule pour $\tilde{p}^T \mathcal{L}(q) q = 0$, c'est à dire pour $(q, \tilde{p}) = (q^*(t)\mathbf{1}_n, \mathbf{0}_n)$ où $q^*(t) \in \mathbb{R}$. Cela signifie que la fonction potentielle n'admet qu'un minimum qui est atteint lorsque les positions et les vitesses des agents sont identiques.

Considérons maintenant le cas où la topologie est variable. On a :

$$\nabla V(\tilde{q}) = k_1 \mathcal{L}(\tilde{q}) \tilde{q} + \tfrac{1}{2} k_1 \tilde{q}^T \tfrac{\partial L(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \tilde{q}$$

Le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -k2\mathcal{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \nabla V(\tilde{q}) \\ \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{1}{2} k_1 \tilde{q}^T \frac{\partial L(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \tilde{q} \end{pmatrix} \\ &= (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \nabla\mathcal{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) + g(\tilde{q}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

En multipliant (3.12) à droite et à gauche par $\nabla\mathcal{H}^T$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}(\tilde{q}, \tilde{p}) &= -\nabla\mathcal{H}^T \mathcal{R} \nabla\mathcal{H} + \nabla\mathcal{H}^T g(\tilde{q}) \\ &= -\nabla\mathcal{H}^T \mathcal{R} \nabla\mathcal{H} + \tilde{p}^T \tfrac{1}{2} k_1 \tilde{q}^T \tfrac{\partial L(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \tilde{q} \end{aligned}$$

En notant que $\tilde{p}_i \frac{1}{2} k_1 \tilde{q}^T \frac{\partial L(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q} = \tilde{q}^T \dot{\mathcal{L}}(\tilde{q}) \tilde{q}$, on a :

$$\dot{\mathcal{H}}(\tilde{q}, \tilde{p}) = -\nabla\mathcal{H}^T \mathcal{R} \nabla\mathcal{H} + \tilde{q}^T \dot{\mathcal{L}}(\tilde{q}) \tilde{q}$$

La commutation d'une topologie à une autre intervient comme une perturbation à travers le terme $\tilde{q}^T \dot{\mathcal{L}}(\tilde{q}) \tilde{q}$. Les éléments de la matrice $\dot{\mathcal{L}}(\tilde{q})$ sont non nuls pour des agents i et j tels que $r \leq \|q_i - q_j\| < R$ (entrée ou sortie du voisinage). Lorsque le consensus est atteint, la matrice $\mathcal{L}(\tilde{q})$ est constante et le système est dissipatif. Cependant, il est toujours possible de trouver des conditions initiales telles que le consensus ne puisse pas s'établir, comme sur l'exemple suivant.

Example 42. *Les agents 1 et 3 ont comme voisin l'agent 2, celui-ci se trouvant à la bordure de leur voisinage (fig. 3.7). Le graphe est connexe à $t = 0$.*

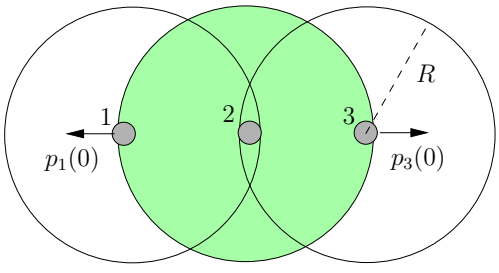


FIGURE 3.7 – 3 agents en limite de connections

Les trajectoires dans le plan des trois agents sont représentées sur la figure 3.8. Les trajectoires en traits pleins ont été obtenues pour des vitesses initiales nulles. Dans ce cas, les positions des agents 1 *et* 3 *convergent sur celle de l'agent* 2 *et les vitesses s'annulent. Le consensus est atteint.*
Les trajectoires en pointillés ont été obtenues pour des vitesses initiales non nulles pour les agents 1 *et* 3*, telles que :*

$$p_1(0) = (-0.1, 0) \quad p_3(0) = (0.1, 0)$$

Dans ce cas, la commande n'arrive pas à compenser le mouvement initial des deux agents qui s'écartent de l'agent 2*. Comme ils sont en limite de voisinage, les agents* 1 *et* 3 *sortent très vite du voisinage de l'agent* 2*. Le graphe n'est plus connexe et les trajectoires divergent.*

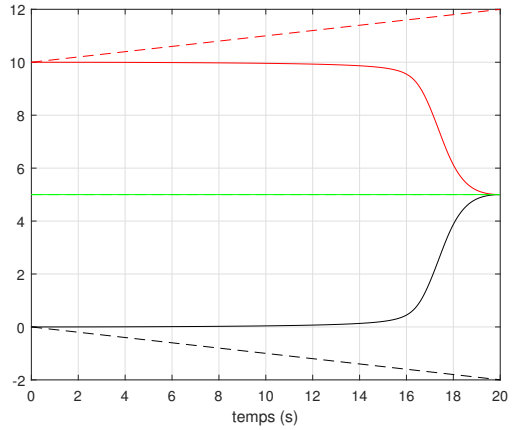


FIGURE 3.8 – Trajectoires pour $p(t_0) = 0$ (traits pleins) et $p(t_0) \neq 0$ (pointillés) de l'agent 1 (noir), de l'agent 2 (vert) et de l'agent 3 (rouge)

Cet exemple simple montre que le protocole (3.8) ne permet pas de résoudre le problème du consensus pour le SMA (3.4) en topologie variable. La stabilité dépend des conditions initiales.

Le système d'erreur (3.11) s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -k_1\mathcal{L}(\tilde{q}) & -k_2\mathcal{L}(\tilde{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}(\tilde{q}) \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Proposition 43. *La matrice $\mathcal{M}(\tilde{q})$ est semi-définie négative si le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.*

Démonstration. Pour un graphe $\mathcal{G}$ connexe, la somme des éléments de chaque ligne de la matrice $\mathcal{L}(\tilde{q})$ est nulle quelque soit $\tilde{q}$. 0 est une valeur propre de $\mathcal{L}(\tilde{q})$ associée au vecteur propre à droite $\mathbf{1}_N$. Tous les éléments diagonaux de $\mathcal{L}(\tilde{q})$ sont positifs. Il s'ensuit de [31] (Théorème 6.1.1, p. 344) que les $N-1$ valeurs propres non nulles de $\mathcal{L}(\tilde{q})$ sont à partie réelle positive.

Le déterminant de $\lambda I - \mathcal{M}(\tilde{q})$ est donné par :

$$\begin{aligned} |\lambda I - \mathcal{M}| &= |\lambda I\,(\,\lambda I + k_1\mathcal{L}) + k_2\mathcal{L}| \\ &= \left|\lambda^2 I + (k_1\lambda + k_2)\mathcal{L}\right| \\ &= (k_1\lambda + k_2)^n \left|\tfrac{\lambda^2}{k_1\lambda + k_2} I + \mathcal{L}\right| \\ &= (k_1\lambda + k_2)^n \chi_{\mathcal{L}}\left(-\tfrac{\lambda^2}{k_1\lambda + k_2}\right) \end{aligned}$$

si $\frac{-k_2}{k_1}$ n'est pas une valeur propre de $\mathcal{M}$. Si $\frac{-k_2}{k_1}$ était une valeur propre de $\mathcal{M}$, on aurait

$$|\lambda I - \mathcal{M}| = \left|\lambda^2 I\right| = (\frac{k_2}{k_1})^2$$

donc ce n'est pas une valeur propre de $\mathcal{M}$. Soit r une racine de $|\lambda I - \mathcal{M}|$, alors r doit satisfaire $r = -\frac{\lambda^2}{k_1\lambda+k_2} \geq 0$, soit encore

$$\lambda^2 + k_1 r\lambda + k_2 r = 0$$

Ce polynôme a toutes ses racines à parties réelles négatives ou nulles. Comme $\mathcal{L}$ a une valeur propre nulle qui correspond au consensus (égalité des positions et égalité des vitesses), on en déduit que $\mathcal{M}$ a une valeur propre nulle et toutes les autres à parties réelles strictement négatives. □

Proposition 44. *Soit $\mathcal{G}(q(t=0))$ un graphe connexe pour le SMA (3.4) avec des fonctions d'appartenance définies par (3.3). Si tous les graphes $\mathcal{G}(q)$ restent connexes au cours du temps, alors le protocole (3.8) résout le problème du consensus.*

Démonstration. La preuve est immédiate en considérant la proposition 43 et en appliquant le principe d'invariance de Lasalle. Le vecteur d'état s'annule lorsque le consensus est atteint, ce qui correspond à la valeur propre nulle de $\mathcal{M}(\tilde{q})$. □

L'instabilité que l'on observe pour certaines valeurs initiales, comme montré dans l'exemple 42, provient du fait qu'à partir d'un certain temps, le graphe n'est plus connexe. La matrice $\mathcal{L}(\tilde{q})$ a son rang qui diminue et donc $\mathcal{M}(\tilde{q})$ a au moins une autre de ses valeurs propres qui s'annule. Cette valeur propre n'est pas associée comme précédemment à l'égalité des positions et l'égalité des vitesses, et donc le principe d'invariance de Lasalle ne s'applique plus. Le système est instable et on observe bien une divergence des positions.

Il faut s'assurer que les différents graphes commutés restent connexes au cours du temps, le graphe initial étant connexe. Une condition suffisante est que chaque agent conserve *a minima* ses voisins initiaux et puisse enrichir son voisinage quelles que soit les conditions initiales. C'est une condition restrictive au sens où on impose que le nombre de connexions dans le graphe ne peut qu'augmenter et en aucun cas diminuer. Il est clair que, suivant le graphe, il est tout à fait possible de supprimer des connexions tout en gardant un graphe connexe. Cependant, deux agents voisins n'ont pas connaissance du graphe et ne connaissent pas la criticité de connexion de leur liaison. En d'autres termes, ils n'ont aucun moyen de savoir si la perte de leur connexion engendrera ou non la perte de connexité du graphe.

Le maintien des voisinages initiaux dépend des fonctions d'appartenance. Une solution est de définir une fonction d'appartenance α_{ij} telle que les commandes u_i et u_j des agents $(ij) \in \mathcal{E}$ tendent vers l'infini lorsque $\|q_i - q_j\| \to R$. Cela revient à ériger une barrière infranchissable sur la frontière du voisinage d'un agent.

Cao et Ren ont proposé dans [9] d'utiliser une barrière de potentiel qui garde captifs les agents appartenant à un voisinage. Lorsqu'un agent s'éloigne du centre d'un voisinage et va vers la frontière, il subit une force de répulsion qui augmente à mesure que la distance à la frontière diminue, pour atteindre théoriquement une valeur infinie sur la frontière. Le principal défaut est qu'un agent extérieur au voisinage doit théoriquement appliquer une force infinie pour franchir cette barrière et rentrer dans le voisinage, ce qui est impossible. La solution proposée par les auteurs est de définir une fonction de potentiel V_{ij} différente suivant que $(ij) \in \mathcal{E}$ ou non. Outre le fait qu'il n'existe pas de preuve de stabilité dans ce cas, d'un point de vue pratique, il est complexe de définir des fonctions potentielles différentes sur chaque agent suivant que le lien (ij) est établit ou non à $t = 0$.

Nous proposons dans ce travail d'utiliser une fonction potentiel permettant aux agents d'intégrer un nouveau voisinage. Cela suppose que le potentiel n'est pas infini sur la frontière, et par voie de conséquence, un agent peut être expulsé d'un voisinage s'il subit une force suffisamment forte. L'agent j peut quitter le voisinage initial de l'agent i, *i.e.* lorsque $\|q_i(t) - q_j\| > R$, mais dans ce cas la fonction d'appartenance α_{ij} ne s'annulera pas, ce qui permet de conserver la connexité du graphe. Les nouvelles

fonctions d'appartenance sont définies par :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < \|q_i - q_j\| < r \\ (1 - c_{ij})\, e^{-\frac{\left(\|q_i - q_j\| - r\right)^2}{\left(\|q_i - q_j\| - R\right)^4}} + c_{ij} & \text{si} \quad r \leq \|q_i - q_j\| < R \\ c_{ij} & \text{si} \quad \|q_i - q_j\| \geq R \end{cases} \tag{3.14}$$

où

$$c_{ij} = \begin{cases} cte > 0 & si \quad (ij) \in \mathcal{E}(t=0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

Proposition 45. *Soit $\mathcal{G}(q(t=0))$ un graphe connexe pour le SMA (3.4) avec des fonctions d'appartenance définies par (3.14), alors le protocole (3.8) résout le problème du consensus.*

Démonstration. La preuve est immédiate en remarquant que le rang de la matrice laplacienne $\mathcal{L}(\tilde{q})$ est toujours égal à $N-1$ quel que soit $\tilde{q}$. Le graphe $\mathcal{E}(q)$ reste toujours connexe. On est dans le cas traité par la proposition 44. □

Example 46. *Reprenons le cas de figure décrit dans l'exemple 42. Les vitesses initiales des agents* 1 *et* 3 *sont :*

$$p_1(0) = (-7.5, 0) \quad p_3(0) = (7.5, 0)$$

La figure 3.9 représente les trajectoires des 3 agents.

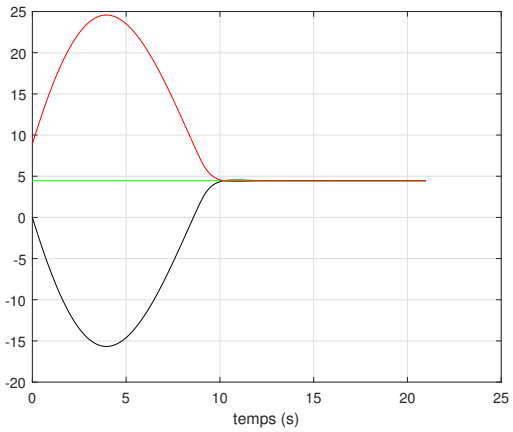


FIGURE 3.9 – Trajectoires pour $p(t_0) \neq 0$ de l'agent 1 (noir), de l'agent 2 (vert) et de l'agent 3 (rouge)

Les agents 1 *et* 3 *s'écartent rapidement de l'agent* 2 *du fait de leurs vitesses initiales opposées. Ils sortent tous les deux du voisinage de l'agent* 2*. Le terme c_{ij} de leur fonction d'appartenance permet de maintenir un graphe connexe et la commande les ramène dans le voisinage de l'agent* 2*. Pour $t > 10s$, le consensus est atteint.*

3.5 Consensus pour une topologie variable et barrières de potentiel

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux problèmes de l'anti-collision et d'un potentiel répulsif/attractif sur la frontière du voisinage. L'anti-collision consiste à doter chaque agent d'une barrière de potentiel répulsive. Le potentiel en frontière du voisinage est :

- attractif entre deux agents issus de voisinages $\mathcal{N}_i$ et $\mathcal{N}_j$ distincts,
- répulsif pour un agent $j \in \mathcal{N}_i$ s'approchant de la frontière de $\mathcal{N}_i$.

Soit le protocole

$$u_i = -k_1 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(q)\psi_{ij}(q)\,(q_i - q_j) - k_2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(q)(p_i - p_j) \tag{3.15}$$

avec k_1 et k_2 deux réels strictement positifs. $\psi_{ij}(q)$ est une fonction continue de $\|q_i - q_j\|$. Les fonctions d'appartenance α_{ij} sont définies par :

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} e^{\frac{\left(\|q_i-q_j\|-d\right)^2}{\|q_i-q_j\|}} & \text{si} \quad 0 < \|q_i - q_j\| \leq d \\ 1 & \text{si} \quad d < \|q_i - q_j\| < r \\ (1-c_{ij})\, e^{-\frac{\left(\|q_i-q_j\|-r\right)^2}{\left(\|q_i-q_j\|-R\right)^4}} + c_{ij} & \text{si} \quad r \leq \|q_i - q_j\| < R \\ c_{ij} & \text{si} \quad \|q_i - q_j\| \geq R \end{cases} \tag{3.16}$$

où

$$c_{ij} = \begin{cases} cte > 0 & si \quad (ij) \in \mathcal{E}(t=0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

La figure 3.10 donne l'allure des fonctions d'appartenance (3.16) pour deux valeurs de c_{ij}.

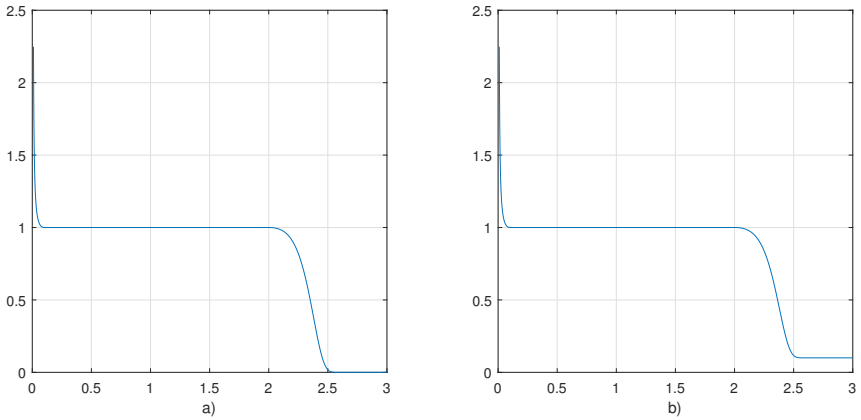


FIGURE 3.10 – α_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $d = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$. a) $c_{ij} = 0$, b) $c_{ij} = 0.1$

Proposition 47. *Le système multi-agents (3.4) avec le protocole (3.15) et les fonctions d'appartenance (3.16) est un système dissipatif pour*

$$\psi_{ij}(\tilde{q}) = 1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j)}{\alpha_{ij}(\tilde{q})}\tfrac{\partial \alpha_{ij}(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} \qquad i, j = 1, \ldots, N$$

Démonstration. Avec ces fonctions d'appartenance, le graphe $\mathcal{G}(q)$ reste connexe. Il reste à montrer que l'énergie du système d'erreur est décroissante. Le système d'erreur lié à (3.4) avec le protocole (3.15) s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{q}} &= \tilde{p} \\ \dot{\tilde{p}} &= -k_1 \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} - k_2 \mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{p} \end{aligned} \tag{3.17}$$

avec $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{1j}\psi_{1j} & -\alpha_{12}\psi_{12} & \dots & -\alpha_{1N}\psi_{1N} \\ -\alpha_{21}\psi_{21} & \sum_{j=1}^{N} \alpha_{2j}\psi_{2j} & & -\alpha_{2N}\psi_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{j=1}^{N} \alpha_{Nj}\psi_{Nj} \end{pmatrix}$.

On considère l'hamiltonien

$$\mathcal{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = \tfrac{1}{4}k_1 \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(\tilde{q})\,(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j)^2 + \tfrac{1}{2}\tilde{p}^T\tilde{p}$$

Posons $\bar{\mathcal{L}}(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{N} \alpha_{1j}(1-\psi_{1j}) & -\alpha_{12}(1-\psi_{12}) & \dots & -\alpha_{1N}(1-\psi_{1N}) \\ -\alpha_{21}(1-\psi_{21}) & \sum_{j=1}^{N} \alpha_{2j}(1-\psi_{2j}) & & -\alpha_{2N}(1-\psi_{2N}) \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sum_{j=1}^{N} \alpha_{Nj}(1-\psi_{Nj}) \end{pmatrix}$.

En notant que

$$\mathcal{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{q} + \tfrac{1}{2}\tilde{p}^T\tilde{p}$$

on a

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{H}}(\tilde{q},\tilde{p}) &= k_1\tilde{p}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{q} + \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\left(\tfrac{d}{dt}\mathcal{L}(\tilde{q})\right)\tilde{q} + \tilde{p}^T\dot{\tilde{p}} \\ &= k_1\tilde{p}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{q} + \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\left(\tfrac{d}{dt}\mathcal{L}(\tilde{q})\right)\tilde{q} - k_1\tilde{p}^T\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} - 2k_2\tilde{p}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{p} \\ &= k_1\tilde{p}^T\left(\mathcal{L}(\tilde{q}) - \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q})\right) + \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\dot{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} - 2k_2\tilde{p}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{p} \\ &= k_1\tilde{p}^T\bar{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} + \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\dot{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} - 2k_2\tilde{p}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{p} \end{aligned}$$

Pour que le système (3.4) avec le protocole (3.15) soit dissipatif, l'hamiltonien du système doit vérifier la condition $\dot{\mathcal{H}} \leq 0$. Comme $-k_2\tilde{p}^T\mathcal{L}(\tilde{q})\tilde{p} \leq 0$, une solution est de prendre

$$k_1\tilde{p}^T\bar{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} + \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\dot{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} = 0$$

On a :

$$\begin{aligned} k_1\tilde{p}^T\bar{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} &= \tfrac{1}{2}k_1\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\tilde{q})(1-\psi_{ij}(\tilde{q}))(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)(\tilde{p}_i-\tilde{p}_j) \\ &= k_1\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\tilde{q})(1-\psi_{ij}(\tilde{q}))(\tilde{q})(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)\tilde{p}_i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}k_1\tilde{q}^T\dot{\mathcal{L}}(\tilde{q})\tilde{q} &= \tfrac{1}{4}k_1\sum_{i,j}\left(\tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i}\tilde{p}_i + \tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_j}\tilde{p}_j\right)(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}k_1\sum_{i,j}\tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i}\tilde{p}_i(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^2 \end{aligned}$$

On choisit donc

$$\psi_{ij}(\tilde{q}) = 1 + \tfrac{1}{2}\tfrac{(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)}{\alpha_{ij}(\tilde{q})}\tfrac{\partial\alpha_{ij}(\tilde{q})}{\partial\tilde{q}_i}$$

□

Avec (3.16), les fonctions $\psi_{ij}^T = \left[\ \ldots, \quad \psi_{ij_k}, \quad \ldots \ \right]^T$, $k = 1, \ldots, m$ s'écrivent :

$$\psi_{ij_k}(q) \quad = \quad \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}\left(q_{i_k} - q_{j_k}\right)^2 \frac{(\|q_i - q_j\| - d)(\|q_i - q_j\| + d)}{(\|q_i - q_j\|)^3} & si \quad \|q_i - q_j\| \leq d \\ 1 & si \quad d < \|q_i - q_j\| < r \\ 1 - \frac{(\alpha_{ij} - c_{ij})}{\alpha_{ij}} \frac{\left(q_{i_k} - q_{j_k}\right)^2 (\|q_i - q_j\| - r)(2r - R - \|q_i - q_j\|)}{(R - \|q_i - q_j\|)^6} & si \quad r \leq \|q_i - q_j\| < R \end{cases} \tag{3.18}$$

La forme de la fonction ψ_{ij} est donnée sur la figure 3.11. Dans l'expression de la commande (3.15), c'est le produit $\alpha_{ij}\psi_{ij}$ qui intervient. L'évolution de ce produit est donnée sur la figure 3.12. Les fonctions $\alpha_{ij}\psi_{ij}$ agissent comme une barrière de potentiel qui, en fonction de la distance $\|q_i - q_j\|$ pour $j \in \mathcal{N}_i(q)$, évite aux agents (i, j) de se rapprocher (anti-collision). Elle agissent également comme un potentiel attractif lorsque deux voisinages s'intersectent, favorisant le rapprochement des deux agents. Elles permettent également de retenir un agent j dans un voisinage $\mathcal{N}_i$ jusqu'à un certain point.

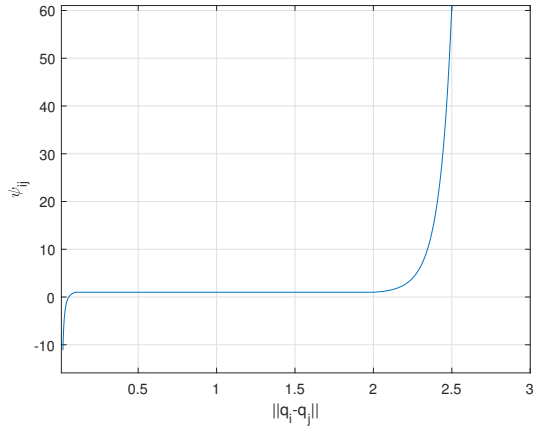


FIGURE 3.11 – évolution de ψ_{ij} en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $d = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$

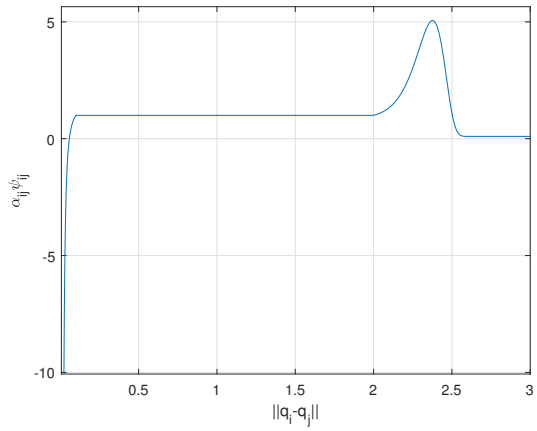


FIGURE 3.12 – évolution de $\alpha_{ij}\psi_{ij}$ en fonction de $\|q_i - q_j\|$ pour $d = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$

Remarque 48. *Avec cette définition des fonctions ψ_{ij}, on a :*

$$\alpha_{ij}(\tilde{q})\psi_{ij}(\tilde{q}) \quad = \quad \alpha_{ij}(\tilde{q}) + \frac{1}{2}(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j)\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \tilde{q}_i}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_i &= -k_1 \sum_{j=1}^{N} \left(\alpha_{ij}(\tilde{q}) + \tfrac{1}{2}(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j)\tfrac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \tilde{q}_i} \right) (\tilde{q}_i - \tilde{q}_j) - k_2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} (\tilde{p}_i - \tilde{p}_j) \\ &= -k_1 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(\tilde{q})(\tilde{q}_i - \tilde{q}_j) - \tfrac{k_1}{2} \sum_{j=1}^{N} \tfrac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \tilde{q}_i} (\tilde{q}_i - \tilde{q}_j)^2 - k_2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} (\tilde{p}_i - \tilde{p}_j) \\ &= -k_1 \tfrac{\partial V(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}_i} - k_2 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} (\tilde{p}_i - \tilde{p}_j) \end{aligned}$$

Le système (3.4) avec le protocole (3.15) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -k_2 \mathcal{L}(\tilde{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \nabla V(\tilde{q}) \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \\ &= (\mathcal{J} - \mathcal{R}) \nabla \mathcal{H}(\tilde{q}, \tilde{p}) \end{aligned} \tag{3.19}$$

On retrouve bien un système dissipatif.

Proposition 49. *Les agents du SMA (3.4) avec le protocole (3.15) forment asymptotiquement un groupe cohésif où tous les agents ont la même vitesse.*

Démonstration. De la proposition 47, on a :

$$\dot{\mathcal{H}}(\tilde{q}, \tilde{p}) = -2k_2 \tilde{p}^T \mathcal{L}(\tilde{q}) \tilde{p}$$

C'est un système dissipatif, c'est à dire que son énergie potentielle et son énergie cinétique décroissent asymptotiquement jusqu'à atteindre un minimum. Le minimum pour l'énergie cinétique est obtenu pour $\tilde{p} = 0$, c'est à dire lorsque les vitesses s'égalisent. Il reste à montrer que les agent forment un groupe cohésif lorsque l'énergie potentielle est minimale.

Un minima q^* de l'énergie potentielle est obtenu lorsque

$$\frac{\partial V(\tilde{q}^*)}{\partial \tilde{q}^*} = 0$$

soit

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}(\tilde{q}^*) \psi_{ij}(\tilde{q}^*)(\tilde{q}_i^* - \tilde{q}_j^*) = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, N \tag{3.20}$$

ce qui s'écrit encore

$$\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q}^*) \tilde{q}^* = 0$$

L'énergie potentielle est invariante par translation et par rotation. Cela signifie qu'il existe a priori une infinité de $\tilde{q}^*$ solution de (3.20).

- Lorsque pour tous les agents on a soit $\|\tilde{q}_i - \tilde{q}_j\| \geq R$, soit $r \leq \|\tilde{q}_i - \tilde{q}_j\| < R$ ou soit $d < \|\tilde{q}_i - \tilde{q}_j\| < r$ avec $i, j = 1, \ldots, , N$, $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q})$ est une matrice laplacienne qui n'admet qu'une valeur propre nulle associée au vecteur propre unitaire. Cela signifie que l'énergie potentielle n'a pas de minima local pour ces cas ;

- Lorsque pour au moins un couple d'agents (ij) on a $0 < \|\tilde{q}_i - \tilde{q}_j\| \leq d$, alors $\tilde{\mathcal{L}}(\tilde{q})$ n'est plus une matrice laplacienne. Elle admet toujours une valeur propre nulle associée au vecteur propre unitaire mais elle peut admettre d'autres valeurs propres nulles. Chacune de ces valeurs propres correspond à un minima local de la fonction potentielle. Les vecteurs propres associés sont des configurations solutions de (3.20).

En dehors des cas simples, les configurations $\tilde{q}^*$ ne sont pas calculables analytiquement. On sait par contre que la fonction potentielle sera minimale lorsque la densité des agents dans un voisinage sera maximale, ce qui correspond à la configuration donnée fig. 3.2. Les distances entre voisins sont minimales. La fonction potentielle correspondante est donc également minimale. Un minima local de l'énergie potentielle correspond donc à la configuration du plus petit groupe cohésif atteignable.

Le graphe $\mathcal{G}(q)$ étant connexe, la matrice $\mathcal{L}(\tilde{q})$ a une seule valeur propre nulle correspondant à $q_i = q_j \ \forall i, j = 1, \ldots, N$. On peut appliquer le principe d'invariance de Lasalle pour conclure sur la stabilité du système d'erreur. □

Example 50. *On considère le SMA (3.4) avec $N = 10$ et le protocole (3.15). Les positions des agents dans le plan sont initialisées aléatoirement dans l'ensemble $[-15, 15]^2$ en imposant un graphe connexe. Les vitesses initiales des agents sont nulles, sauf celle de l'agent 1 qui est telle que $p_1(0) = (10, -20)$. Avec cette vitesse initiale, l'agent 1 sort de son voisinage puis rejoint les autres agents pour former un groupe cohésif (trajectoire en rouge sur la figure 3.13). Les agents se placent en formation et se déplacent en conservant cette formation à la vitesse $p_{ref} = (1, -2)$ qui est bien égale à $\frac{1}{N}\sum p_i(0)$.*

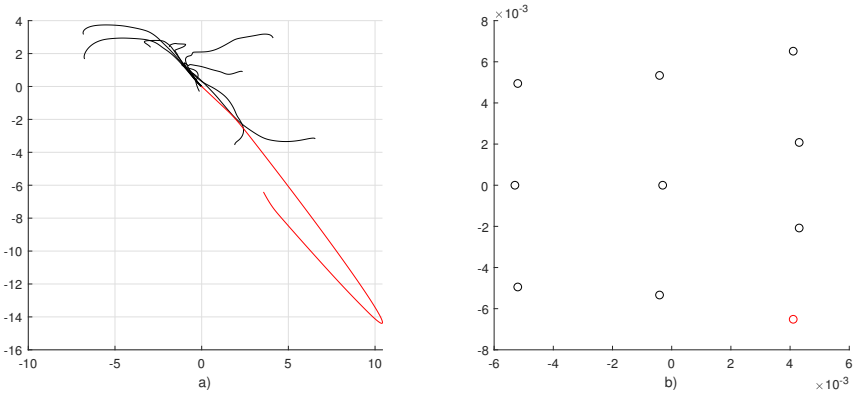


FIGURE 3.13 – a) $\tilde{q}_y$ en fonction de $\tilde{q}_x$, $d = 0.1$, $r = 2$, $R = 6$; b) positions finales des agents par rapport au barycentre

3.6 Suivi de consensus avec un leader perceptif

On considère le système multi-agents (3.4) avec un leader de dynamique

$$\begin{cases} \dot{q}_0 &= p_0 \\ \dot{p}_0 &= u_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

et un leader virtuel d'état

$$\begin{cases} \dot{q}_{ref} &= p_{ref} \\ \dot{p}_{ref} &= u_{ref} \end{cases} \tag{3.22}$$

Soit

$$\tilde{q}_i = q_i - q_{ref}$$
$$\tilde{p}_i = p_i - p_{ref}$$

pour $i = 0, \ldots, N$. On note $\tilde{p}^T = \begin{bmatrix} \tilde{p}_0^T & \ldots & \tilde{p}_N^T \end{bmatrix}^T$ et $\tilde{q}^T = \begin{bmatrix} \tilde{q}_0^T & \ldots & \tilde{q}_N^T \end{bmatrix}^T$.

L'objectif du leader est de suivre une trajectoire de référence (q_{ref}, p_{ref}) tout en maintenant la connexion avec le reste de la flotte. Ce double objectif est pris en compte dans la commande du leader

u_0 définie par :

$$u_0 = \underbrace{-k_1\alpha_{ref}(\tilde{q}_0)\psi_{ref}(\tilde{q}_0)\tilde{q}_0 - k_2\alpha_{ref}(\tilde{q}_0)\tilde{p}_0}_{f_{0_r}} \underbrace{- k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(q)\psi_{0j}(q)(q_0-q_j) - k_2\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(q)(p_0-p_j)}_{f_{0_j}} \tag{3.23}$$

avec $\alpha_{ref}(\tilde{q}_0)$ le coefficient d'adjacence entre le leader et le leader virtuel défini par :

$$\alpha_{ref} = \begin{cases} 1 & si \quad \|q_0 - q_{ref}\| \leq r \\ (1-\varepsilon)e^{\frac{(\|q_0-q_{ref}\|-r)^2}{\|q_0-q_{ref}\|-R}} + \varepsilon & si \quad r < \|q_0 - q_{ref}\| \leq R \\ \varepsilon & si \quad \|q_0 - q_{ref}\| > R \end{cases} \tag{3.24}$$

f_{0_r} représente la force d'attraction entre le leader et la trajectoire de référence. C'est ce terme qui permet au leader de suivre asymptotiquement sa référence. f_{0_j} représente la force d'attraction entre le leader et les agents $j \in \mathcal{N}_0$. C'est ce terme qui traduit le côté perceptif du leader.

La figure 3.14 montre la forme de la fonction d'appartenance α_{ref} en fonction de $\|q_0 - q_{ref}\|$ pour $\varepsilon = 0.1$, $r = 2$ et $R = 3$.

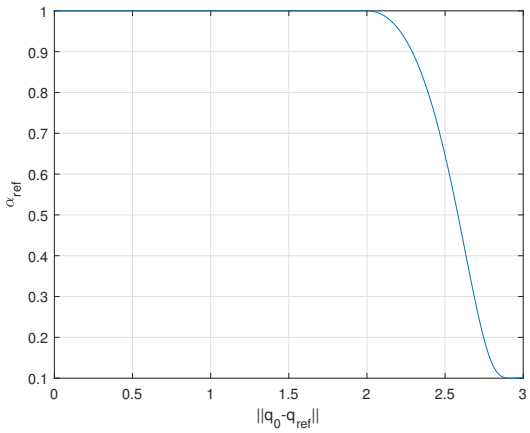


FIGURE 3.14 – Évolution de α_{ref} en fonction de $\|q_0 - q_{ref}\|$. $r = 2$, $R = 3$, $\varepsilon = 0.1$

Lorsque le leader est à une distance supérieure à R de la trajectoire de référence, la fonction d'appartenance α_{ref}, qui traduit la relation de voisinage entre le leader et le leader virtuel, devient égale à $\varepsilon > 0$. Cette valeur non nulle permet de conserver un lien entre la flotte, le leader et le leader virtuel. Même si la trajectoire de référence est très éloignée, la flotte et le leader pourront la rejoindre.

Pour les agents, on considère le protocole suivant :

$$u_i = -k_1\alpha_{0i}(q)\psi_{0i}(q)(q_i-q_0) - k_2\alpha_{0i}(q)(p_i-p_0) - k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}(q)\psi_{ij}(q)(q_i-q_j) - k_2\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}(q)(p_i-p_j) \tag{3.25}$$

Soit $\mathcal{H}(\tilde{q},\tilde{p})$ l'hamiltonien du système d'erreur construit à partir de (3.4) prenant en compte le leader (3.21) avec sa commande (3.23) et le protocole (3.25) :

$$\mathcal{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = V(\tilde{q}) + \mathcal{K}(\tilde{p}) \tag{3.26}$$

avec

$$V(\tilde{q}) = \frac{1}{4}k_1\sum_{i,j}\alpha_{ij}(\tilde{q})(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^2+\frac{1}{2}k_1\sum_{j}\alpha_{0j}(\tilde{q})(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2+\frac{1}{2}k_1\alpha_{ref}(\tilde{q}_0)\tilde{q}_0^T\tilde{q}_0 \quad (3.27)$$

$$\mathcal{K}(\tilde{p}) = \frac{1}{2}\tilde{p}^T\tilde{p} \quad (3.28)$$

Hypothèse 51. *Le leader est en liaison avec au moins un agent de la flotte à $t=0$*

On cherche à montrer dans quelles conditions le système multi-agents (3.4) avec le protocole (3.25) et un leader perceptif (3.21) résout le problème du suivi de consensus pratique. On suppose que les hypothèses (51) et (39) sont vérifiées.

Proposition 52. *Sous la condition que les hypothèses (51) et (39) soient vérifiées, le système multi-agents (3.4) avec le protocole (3.25) et un leader perceptif (3.21) est un système dissipatif pour $u_{ref}=0$ et*

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^T\tfrac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0} &= -\alpha_{0j}(1-\psi_{0j}) \qquad j=1,\dots,N\\
\tfrac{1}{2}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^T\tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i} &= -\alpha_{ij}(1-\psi_{ij}) \qquad i,j=1,\dots,N\\
\tfrac{1}{2}\tilde{q}_0^T\tfrac{\partial\alpha_{ref}}{\partial\tilde{q}_0} &= -\alpha_{ref}(1-\psi_{ref})
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour alléger les notations, nous présentons la démonstration pour $m=1$. Le cas général pour m quelconque se déduit facilement en ayant recours au produit de Kronecker matriciel. La dérivée par rapport au temps de (3.26) donne :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{H}}(\tilde{q},\tilde{p}) &= \tfrac{1}{2}k_1\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_{ij}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)(\tilde{p}_i-\tilde{p}_j)+\tfrac{1}{4}k_1\sum_{i,j=1}^{N}\tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i}\tilde{p}_i(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^2+k_1\alpha_{ref}\tilde{q}_0^T\tilde{p}_0+\tfrac{1}{2}k_1\tfrac{\partial\alpha_{ref}}{\partial\tilde{q}_0}\tilde{p}_0\tilde{q}_0^T\tilde{q}_0\\
&\quad +k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)+\tfrac{1}{2}k_1\sum_{j=1}^{N}\left(\tfrac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}\tilde{p}_0+\tfrac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_j}\tilde{p}_j\right)(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2+\tilde{p}_0^T\dot{\tilde{p}}_0\\
&\quad -\sum_{i=1}^{N}\tilde{p}_i\left(k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\psi_{ij}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)+k_2\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_j)+k_1\alpha_{0i}\psi_{0i}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_0)+k_2\alpha_{0i}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_0)-u_{ref}\right)\\
&= k_1\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_{ij}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)\tilde{p}_i-k_1\sum_{i,j}^{N}\alpha_{ij}\psi_{ij}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)\tilde{p}_i+\tfrac{1}{4}k_1\sum_{i,j=1}^{N}\tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i}\tilde{p}_i(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^2+\tfrac{1}{2}k_1\tfrac{\partial\alpha_{ref}}{\partial\tilde{q}_0}\tilde{p}_0\tilde{q}_0^T\tilde{q}_0\\
&\quad +k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)+\tfrac{1}{2}k_1\sum_{j=1}^{N}\left(\tfrac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}\tilde{p}_0+\tfrac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_j}\tilde{p}_j\right)(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2+k_1\alpha_{ref}\tilde{q}_0^T\tilde{p}_0\\
&\quad -k_2\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_{ij}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_j)\tilde{p}_i-k_1\sum_{i=1}^{N}\alpha_{0i}\psi_{0i}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_0)\tilde{p}_i-k_2\sum_{i=1}^{N}\alpha_{0i}\psi_{0i}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_0)\tilde{p}_i-\sum_{i=1}^{N}\tilde{p}_iu_{ref}\\
&\quad +\tilde{p}_0\left(-k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}\tilde{q}_0-k_2\alpha_{ref}\tilde{p}_0-k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}\psi_{0j}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)-k_2\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)-u_{ref}\right)
\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial q_i}=-\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial q_j}$$

avec en particulier

$$\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial q_0}=-\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial q_j}$$

on a :

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}\tilde{p}_0+\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_j}\tilde{p}_j\right)(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}(\tilde{q},\tilde{p}) &= k_1\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_{ij}(1-\psi_{ij})(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)\tilde{p}_i+\tfrac{1}{4}k_1\sum_{i,j=1}^{N}\tfrac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i}\tilde{p}_i(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^2+k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)\tilde{p}_0\\
&\quad -k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}\psi_{0j}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)\tilde{p}_0+k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{q}_j-\tilde{q}_0)\tilde{p}_j-k_1\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}\psi_{0j}(\tilde{q}_j-\tilde{q}_0)\tilde{p}_j\\
&\quad +k_1\tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\tfrac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2-k_2\left(\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_{ij}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_j)\tilde{p}_i+\sum_{i=1}^{N}\alpha_{0i}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_0)\tilde{p}_i\right)\\
&\quad -k_2\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)\tilde{p}_0-k_2\alpha_{ref}\tilde{p}_0^T\tilde{p}_0\\
&\quad +k_1\alpha_{ref}\tilde{q}_0^T\tilde{p}_0+\tfrac{1}{2}k_1\tfrac{\partial\alpha_{ref}}{\partial\tilde{q}_0}\tilde{p}_0\tilde{q}_0^T\tilde{q}_0-k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}\tilde{q}_0^T\tilde{p}_0-\tilde{p}_0^Tu_{ref}-\sum_{i=1}^{N}\tilde{p}_iu_{ref}\end{aligned}$$

On souhaite avoir

$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(1-\psi_{0j})(\tilde{q}_j-\tilde{q}_0)\tilde{p}_0+\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(1-\psi_{0j})(\tilde{q}_j-\tilde{q}_0)\tilde{p}_j=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^2$$

On choisit donc des fonctions potentielles $\psi_{0i}(q)$ pour le leader vérifiant :

$$\frac{1}{2}(\tilde{q}_0-\tilde{q}_j)^T\frac{\partial\alpha_{0j}}{\partial\tilde{q}_0}=-\alpha_{0j}(1-\psi_{0j}) \tag{3.29}$$

Pour les agents, les fonctions potentielles $\psi_{ij}(q)$ vérifient :

$$\frac{1}{2}(\tilde{q}_i-\tilde{q}_j)^T\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\tilde{q}_i}=-\alpha_{ij}(1-\psi_{ij}) \tag{3.30}$$

et pour le leader par rapport au leader virtuel, on doit avoir :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}_0^T\frac{\partial\alpha_{ref}}{\partial\tilde{q}_0}=-\alpha_{ref}(1-\psi_{ref}) \tag{3.31}$$

En prenant en compte (3.29), (3.30) et (3.31), la dérivée de l'hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{H}}(\tilde{q},\tilde{p}) &= -k_2\left(\sum_{i,j=1}^{N}\alpha_{ij}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_j)\tilde{p}_i+\sum_{i=1}^{N}\alpha_{0i}(\tilde{p}_i-\tilde{p}_0)\tilde{p}_i+\sum_{j=1}^{N}\alpha_{0j}(\tilde{p}_0-\tilde{p}_j)\tilde{p}_0+\alpha_{ref}\tilde{p}_0^T\tilde{p}_0\right)-\sum_{i=1}^{N}p_iu_{ref}\\
&= -k_2\tilde{p}^T\mathbb{M}_2(\tilde{q})\tilde{p}-\tilde{p}^Tu_{ref}\end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{M}_2(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} tr\{\mathcal{D}(\tilde{q})\}+\alpha_{ref} & -diag\{\mathcal{D}(\tilde{q})\}^T\\ -diag\{\mathcal{D}(\tilde{q})\} & \mathcal{L}(\tilde{q})+\mathcal{D}(\tilde{q})\end{pmatrix}$$

Regardons le signe de $\mathbb{M}_2(\tilde{q})$ à un instant t. Notons que $\mathbb{M}_2$ est la somme de deux matrices symétriques, l'une strictement positive et l'autre positive :

$$\mathbb{M}_2(\tilde{q}) = \begin{pmatrix} \alpha_{ref} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \alpha_{01} & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & & \dots & 0 & \alpha_{0N}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} tr\{\mathcal{D}(\tilde{q})\} & -diag\{\mathcal{D}(\tilde{q})\}^T\\ -diag\{\mathcal{D}(\tilde{q})\} & \mathcal{L}(\tilde{q})\end{pmatrix}$$

donc $\mathbb{M}_2(\tilde{q})$ est une matrice symétrique strictement définie positive. Le système d'erreur s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \dot{\tilde{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -k_2\mathbb{M}_2(\tilde{q}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla V \\ \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -bu_{ref} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

avec $b = \mathbf{1}_{(N+1)\times m}$. Pour $u_{ref} = 0$, c'est un système dissipatif. □

A ce stade, pour un u_{ref} quelconque, il n'est pas possible de conclure ni sur la convergence, ni sur la stabilité de (3.32) qui dépendent entre autres de l'interaction entre le leader et le leader virtuel, ce dernier agissant comme une perturbation sur le système. Dans la commande du leader, cette interaction est modélisée par le produit $\alpha_{ref}\psi_{ref}$. En prenant en compte (3.31), on a pour $k = 1, \ldots, m$:

$$\psi_{ref_k} = 1 + \frac{(\alpha_{ref}-\varepsilon)}{\alpha_{ref}} \frac{\tilde{q}_{0_k}^2 (r-R)}{\|q_0 - q_{ref}\|} \frac{\|q_0 - q_{ref}\| - r}{(\|q_0 - q_{ref}\| - R)^2}$$

La figure 3.15 montre la forme de $\alpha_{ref}\psi_{ref}$ en fonction de $\|q_0 - q_{ref}|\|$ pour $r = 2$, $R = 3$ et $\varepsilon = 0.1$. Cette forme particulière permet de privilégier la force d'attraction du leader vers les suiveurs au détriment de la force d'attraction entre le leader et la trajectoire de référence. Le maintien de la cohésion du groupe constitué des N agents et du leader est considéré comme prioritaire par rapport au suivi de trajectoire. Néanmoins, lorsque le leader est à une distance supérieure à R de la trajectoire de référence, le facteur de pondération sur le terme de commande portant sur $\|q_0 - q_{ref}|\|$ vaut ε, ce qui permet au leader de ramener l'ensemble de la flotte vers la trajectoire de référence.

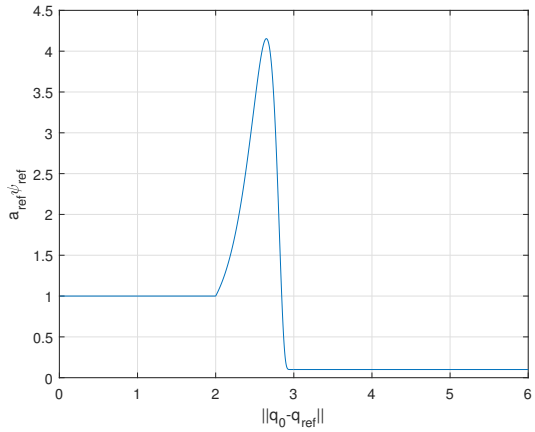


FIGURE 3.15 – Évolution de $\alpha_{ref}\psi_{ref}$ en fonction de $\|q_0 - q_{ref}|\|$ pour $r = 2$, $R = 3$ et $\varepsilon = 0.1$.

Cette prioritisation des tâches du leader va nous permettre de considérer deux dynamiques pour l'étude de la stabilité du SMA :

1. la mise en formation des N agents et du leader
2. le suivi de la trajectoire de référence

Pour cela, on considère un référentiel mobile lié au barycentre. Soit (q_c, p_c) le vecteur d'état du barycentre des $N + 1$ agents :

$$q_c = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} q_i$$
$$p_c = \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} p_i$$

Définissons les coordonnées relatives $x_i = q_i - q_c$, $v_i = p_i - p_c$ et $x_c = q_c - q_{ref}$, $v_c = p_c - p_{ref}$. Dans le référentiel lié au barycentre, les commandes s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{v}_0 &= -\left(\sum_{j=1}^{N} \overbrace{k_1\alpha_{0j}\psi_{0j}(x_0 - x_j) + k_2\alpha_{0j}(v_0 - v_j)}^{f_{oj}}\right) - \tfrac{N}{N+1}\overbrace{(k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_0 + k_2\alpha_{ref}v_0)}^{f_{oc}} \\ &\quad - \tfrac{N}{N+1}\underbrace{(k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_c + k_2\alpha_{ref}v_c)}_{f_{cv}} \\ &= -\sum_{j=1}^{N} f_{oj} - \tfrac{N}{N+1}f_{oc} - \tfrac{N}{N+1}f_{cv}\end{aligned}$$

et pour $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned}\dot{v}_i &= -\left(\sum_{j=1}^{N} \overbrace{k_1\alpha_{ij}\psi_{ij}(x_i - x_j) + k_2\alpha_{ij}(v_i - v_j)}^{f_{ij}}\right) + \tfrac{1}{N+1}\overbrace{(k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_0 + k_2\alpha_{ref}v_0)}^{f_{oc}} \\ &\quad - \left(\overbrace{k_1\alpha_{i0}\psi_{i0}(x_i - x_0) + k_2\alpha_{i0}(v_i - v_0)}^{f_{io}}\right) + \tfrac{1}{N+1}\underbrace{(k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_c + k_2\alpha_{ref}v_c)}_{f_{cv}} \\ &= -f_{io} - \sum_{j=1}^{N} f_{ij} + \tfrac{1}{N+1}f_{oc} + \tfrac{1}{N+1}f_{cv}\end{aligned}$$

f_{oi} représente la force d'attraction entre l'agent i et le leader, f_{ij} est la force d'attraction entre les agents i et j, f_{oc} est la force d'attraction entre le leader et le barycentre et f_{cv} représente la force d'attraction entre le barycentre et le leader virtuel. La dynamique des N agents et du leader dans le référentiel du barycentre est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x} &=& v \\ \dot{v} &=& \mathbf{f} + \mathbf{b}f_{cv}\end{array}\right. \tag{3.33}$$

avec

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} -\sum_{j=1}^{N} f_{oj} - \frac{N}{N+1}f_{oc} \\ -f_{1o} - \sum_{j=1}^{N} f_{1j} + \frac{1}{N+1}f_{oc} \\ \vdots \\ -f_{No} - \sum_{j=1}^{N} f_{Nj} + \frac{1}{N+1}f_{oc} \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{-N}{N+1} \\ \frac{1}{N+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{N+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times m}$.

La dynamique du barycentre par rapport à la trajectoire de référence est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c &= v_c \\ \dot{v}_c &= -\tfrac{1}{N+1}\underbrace{(k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_c + k_2\alpha_{ref}v_c) - u_{ref}}_{f_{cv}-u_{ref}} - \tfrac{1}{N+1}\underbrace{(k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_0 + k_2\alpha_{ref}v_0)}_{f_{oc}} \\ &= -\tfrac{1}{N+1}f_{cv} - u_{ref} - \tfrac{1}{N+1}f_{oc}\end{aligned} \tag{3.34}$$

En posant

$$\mathcal{V}(x) = \frac{1}{4}k_1 \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_{ij}(x)(x_i - x_j)^2 + \frac{1}{2}k_1 \sum_{j=1}^{N} \alpha_{0j}(x)(x_0 - x_j)^2 + \frac{1}{2}\frac{N}{N+1}\alpha_{ref}x_0^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ref}x_j^2$$

et $\mathcal{H} = \mathcal{V} + \frac{1}{2}v^t v$, le système (3.33) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & -k_2\mathcal{L}_x \end{pmatrix} \nabla H + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} f_{cv} \tag{3.35}$$

avec

$$\mathcal{L}_x = \begin{pmatrix} \frac{N}{N+1}\alpha_{ref} + \sum_{i=1}^{N}\alpha_{0i} & -\alpha_{01} & \dots & -\alpha_{0N} \\ -\alpha_{01} & -\frac{1}{N+1}\alpha_{ref} + \sum_{j=1}^{N}\alpha_{1j} & \dots & -\alpha_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_{0N} & \dots & & -\frac{1}{N+1}\alpha_{ref} + \sum_{j=1}^{N}\alpha_{Nj} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{L}_x$ est une matrice strictement définie positive. On a :

$$\dot{\mathcal{H}}(x,v) = -k_2 v^T \mathcal{L}_x v + v^T \mathbf{b} f_{cv} \tag{3.36}$$

On cherche à montrer que, sous la condition que les hypothèses (51) et (39) soient vérifiées et que $\|f_{cv}\| < f_{cv_{max}}$, les N agents du SMA (3.4) avec le protocole (3.25) et le leader perceptif (3.21) forment asymptotiquement un groupe cohésif dans lequel tous les agents se déplacent à la même vitesse.

Le système (3.35) peut s'écrire, en posant $e_v^T = (x, v)^T$, sous la forme :

$$\dot{e}_v = A_v e_v + \mathbf{b} f_{cv} \tag{3.37}$$

avec

$$A_v = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{N+1} & \mathbf{I}_{N+1} \\ -k_1\mathcal{L}_1 & -k_2\mathcal{L}_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\mathcal{L}_1 = \begin{pmatrix} \sum_j \alpha_{0j}\psi_{0j} + \frac{N}{N+1}\alpha_{ref}\psi_{ref} & -\alpha_{01}\psi_{01} & \dots & -\alpha_{0N}\psi_{0N} \\ -\alpha_{10}\psi_{10} - \frac{1}{N+1}\alpha_{ref}\psi_{ref} & \sum_j \alpha_{1j}\psi_{1j} & \dots & -\alpha_{1N}\psi_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_{N0}\psi_{N0} - \frac{1}{N+1}\alpha_{ref}\psi_{ref} & -\alpha_{N1}\psi_{N1} & \dots & \sum_j \alpha_{Nj}\psi_{Nj} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{pmatrix} \sum_j \alpha_{0j} + \frac{N}{N+1}\alpha_{ref} & -\alpha_{01} & \dots & -\alpha_{0N} \\ -\alpha_{10} - \frac{1}{N+1}\alpha_{ref} & \sum_j \alpha_{1j} & \dots & -\alpha_{1N} \\ \vdots & & & \vdots \\ -\alpha_{N0} - \frac{1}{N+1}\alpha_{ref} & -\alpha_{N1} & \dots & \sum_j \alpha_{Nj} \end{pmatrix}$$

La matrice A_v est Hurwitz pour

$$\|q_i - q_j\| \geq d \quad \forall i, j = 1, \dots, N \tag{3.38}$$

c'est à dire tant que le mécanisme d'anti-collision n'est pas actif.

Soit

$$\zeta = \left(\underbrace{\alpha_r\psi_r, \cdots, \alpha_r\psi_r}_{N+1\ termes}, \alpha_{11}\psi_{11}, \cdots, \alpha_{ij}\psi_{ij}, \cdots, \alpha_{NN}\psi_{NN} \right)$$

avec $i = 0, \ldots, N$, $j = i+1, \ldots, N$ et $\|q_i - q_j\| \geq d$. Pour $\ell = 1, \ldots, n_v$, on note ζ_ℓ le ℓ^{ieme} élément de ζ et

$$\bar{\zeta}_\ell = \max(\zeta_\ell), \qquad \underline{\zeta}_\ell = \min(\zeta_\ell).$$

Soit χ l'ensemble des 2^{n_v} éléments constitués des n_v-tuples de $\bar{\zeta}_\ell$ et $\underline{\zeta}_\ell$, i.e.

$$\chi = \left\{ \left(\underline{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \ldots, \underline{\zeta}_{n_v}\right), \left(\bar{\zeta}_1, \underline{\zeta}_2, \ldots, \underline{\zeta}_{n_v}\right), \left(\underline{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \underline{\zeta}_3, \ldots, \underline{\zeta}_{n_v}\right), \ldots, \left(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \ldots, \bar{\zeta}_{n_v}\right) \right\}$$

et $\mathcal{A}$ un polytope de matrice défini par

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^{2^{n_v}} \alpha_k \mathbf{A}_k$$

où $\sum_{k=1}^{2^{n_v}} \alpha_k = 1$, $\alpha_k > 0$ pour tout k et les matrices $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ sont les sommets du polytope définis par

$$\mathbf{A}_k = A_v(\chi_k)$$

avec χ_k le k^{eme} élément de χ. Dans ces conditions, $\mathcal{A}$ est un polytope convexe et A_v satisfait la condition (3.38) et est inclut dans $\mathcal{A}$ quelles que soit les variations de q_i et q_j pour $i, j = 0, \ldots, N$. On suppose qu'il existe une matrice P constante, symmétrique et définie positive solution des 2^{n_v} LMIs :

$$\mathbf{A}_k^T P + P\mathbf{A}_k < 0, \qquad k = 1, \ldots, 2^{n_v}. \tag{3.39}$$

Soit $\delta = \tilde{q}$, alors P est solution de

$$A_v(\delta)^T P + P A_v(\delta) < 0$$

et il existe une matrice $Q(\delta)$ symétrique définie positive telle que

$$A_v(\delta)^T P + P A_v(\delta) = -Q(\delta)$$

Soit $V(e_v) = e_v^T P e_v$ une fonction de Lyapunov candidate. Nous avons

$$\dot{V}(e_v) = -e_v^T Q(\delta) e_v + 2 e_v^T P b f_{cr}$$

Comme

$$e_v^T P b \leq \sqrt{e_v^T P e_v}\sqrt{b^T P b}$$

et

$$e_v^T P b f_{cr} \leq \sqrt{e_v^T P e_v}\sqrt{b^T P b} f_{cr_{\max}}$$

il s'ensuit que

$$\dot{V}(e_v) \leq -e_v^T Q(\delta) e_v + 2 f_{cr_{\max}} \sqrt{e_v^T P e_v}\sqrt{b^T P b}$$

Soit

$$c(\delta) = \lambda_{\min}\left(P^{-\frac{1}{2}} Q(\delta) P^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{3.40}$$

Comme

$$\lambda_{\min}\left(P^{-\frac{1}{2}} Q(\delta) P^{-\frac{1}{2}}\right) e_v^T P e_v \leq e_v^T Q(\delta) e_v \leq \lambda_{\max}\left(P^{-\frac{1}{2}} Q(\delta) P^{-\frac{1}{2}}\right) e_v^T P e_v$$

on obtient

$$\dot{V}(e_v) \leq \sqrt{e_v^T P e_v}\left(-c(\delta)\sqrt{e_v^T P e_v} + 2 f_{cr_{\max}}\sqrt{b^T P b}\right)$$

Considérons les deux cas possibles :

1. $\dot{V}(e_v) < 0$: le système est stable et les positions des $N+1$ agents convergent sur le la position du barycentre en égalisant leurs vitesses avec celle du barycentre. Dans ce cas, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que
$$c(\delta)(1-\varepsilon)\sqrt{e_v^T P e_v} - 2f_{cr_{max}}\sqrt{b^T P b} \geq 0$$
ce qui implique que $\dot{V} \leq -\varepsilon c(\delta) V$ et $V \leq V(0)e^{-\varepsilon \int_0^t c(\delta)d\tau}$.

2. $\dot{V}(e_v) \geq 0$: le système est instable et les positions des $N+1$ agents s'écartent de celle du barycentre. On a
$$\sqrt{e_v^T P e_v} \leq \frac{2f_{cr_{\max}}\sqrt{b^T P b}}{c(\delta)(1-\varepsilon)}$$
et
$$V \leq \left(\frac{2f_{cr_{\max}}\sqrt{b^T P b}}{c(\delta)(1-\varepsilon)}\right)^2$$

Pour conclure, nous avons

$$V(e_v) \leq \max\left\{ V(0)e^{-\varepsilon \int_0^t c(\delta)d\tau} \; ; \; \left(\frac{2f_{cr_{\max}}\sqrt{b^T P b}}{c(\delta)(1-\varepsilon)}\right)^2 \right\}$$

De plus, considérons
$$\lambda_{\min}(P)\left\|e_v\right\|^2 \leq V(e_v) \leq \lambda_{\max}(P)\left\|e_v\right\|^2$$
on obtient
$$\left\|e_v\right\| \leq \max\left\{ \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} e^{-\frac{\varepsilon}{2}\int_0^t c(\delta)d\tau} \left\|e_v(0)\right\| \; ; \; \frac{2f_{cr_{\max}}\sqrt{b^T P b}}{c(\delta)\sqrt{\lambda_{\min}(P)}(1-\varepsilon)} \right\}$$
et
$$\limsup_{t\to+\infty} \left\|e_v(t)\right\| \leq \frac{2f_{cr_{\max}}\sqrt{b^T P b}}{c(\delta)\sqrt{\lambda_{\min}(P)}(1-\varepsilon)}. \tag{3.41}$$

Tant que le mécanisme d'anti-collision est inactif, les positions des $N+1$ agents convergent sur la position du barycentre en adoptant la vitesse du barycentre. Comme les agents se regroupent, il est probable que le mécanisme d'anti-collision s'active ($\delta_{ij} < d$ pour un couple d'agent (ij)) et la matrice $A_v(\delta)$ ne sera plus Hurwitz. Cependant cette condition intervient alors que les agents forment déjà un groupe cohésif. De plus, à ce stade, leurs vitesses sont quasi-identiques et calées sur celle du barycentre. Entre autres, le cas d'un agent tournant avec une vitesse croissante autour d'un autre agent à une distance inférieure à d n'est pas possible. On en conclut que le consensus pratique est établit dans le référentiel lié au barycentre.

La deuxième étape consiste à démontrer la stabilité du système (3.34). En parallèle à la mise en formation, le leader va chercher à suivre la trajectoire de référence, et par la-même, entraîner l'ensemble des agents dans son sillage. Globalement, les N agents et le leader se comportent comme un seul agent situé au barycentre. La dynamique de ce système est celle d'un système d'ordre 2 et donnée par (3.34), qui s'écrit encore :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{v}_c \end{pmatrix} = A_c \begin{pmatrix} x_c \\ v_c \end{pmatrix} + \mathbf{w}_o + \mathbf{b}u_{ref} \tag{3.42}$$

avec $A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{n+1}k_1\alpha_{ref}\psi_{ref} & -\frac{1}{N+1}k_2\alpha_{ref} \end{pmatrix}$, $\mathbf{w}_o = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{N+1}k_1\alpha_{ref}\psi_{ref}x_0 - \frac{1}{N+1}k_2\alpha_{ref}v_0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de la matrice A_c s'écrit

$$\lambda^2 + \frac{k_2\alpha_{ref}}{N+1}\lambda + \frac{k_1}{N+1}\alpha_{ref}\psi_{ref} = 0$$

qui a pour racines

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{k_2}{N+1}\alpha_{ref} + \left[\left(\frac{k_2}{N+1}\alpha_{ref}\right)^2 - 4\frac{k_1}{N+1}\alpha_{ref}\psi_{ref}\right]^{\frac{1}{2}}\right)\\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}\left(-\frac{k_2}{N+1}\alpha_{ref} - \left[\left(\frac{k_2}{N+1}\alpha_{ref}\right)^2 - 4\frac{k_1}{N+1}\alpha_{ref}\psi_{ref}\right]^{\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

Les fonctions α_{ref} et ψ_{ref} étant strictement positives et avec la condition $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$, les parties réelles de λ_1 et λ_2 sont strictement négatives. La matrice A_c est Hurwitz pour tout $q_0 - q_{ref}$.

Soit le vecteur $\delta = q_0 - q_{ref}$. Comme précédemment, nous supposerons qu'il existe une matrice $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ telle que

$$A_c(\delta)^T\tilde{P} + \tilde{P}A_c(\delta) < 0 \quad \forall\delta \tag{3.43}$$

Il existe alors une matrice $\tilde{Q}(\delta)$ symétrique définie positive telle que

$$A_c(\delta)^T\tilde{P} + \tilde{P}A_c(\delta) = -\tilde{Q}(\delta) \quad \forall\delta$$

Soit $V = x_c^T P x_c$ une fonction de Lyapunov candidate. En utilisant le même raisonnement que précédemment, il existe $\tilde{\varepsilon}$

$$\limsup_{t\to+\infty}\|x_c(t)\| \leq \frac{2v_{max}\sqrt{\mathbf{b}^T\tilde{P}\mathbf{b}}}{\tilde{c}(\delta)\sqrt{\lambda_{min}(\tilde{P})}(1-\tilde{\varepsilon})}$$

où v_{max} est le maximum de $\|w_o + b_c u_{ref}\|$. Comme u_{ref} est borné par hypothèse et que le groupe d'agents est cohésif, il s'ensuit que v_{max} est fini.

Il est en général difficile de prouver l'existence d'une matrice P quelque soit la configuration du SMA. La résolution de (3.39) dépend du conditionnement des matrices $\mathbf{A}_k$ qui dépend de la dispersion de leurs valeurs propres. Cependant, $\mathbf{A}_v$ est une matrice bien conditionnée et les variations de ses paramètres sont faibles. Il est donc très probable que les valeurs propres des matrices $\mathbf{A}_k$ soit peu dispersées et que les variations soit faibles.

Les résultats précédents établissent la convergence pratique des trajectoires des N agents et du leader sur celle du barycentre, cette dernière convergeant sur la trajectoire de référence sans jamais l'atteindre (convergence dans un ensemble).

Example 53. *L'exemple suivant illustre le résultat de la proposition 52. Nous avons considéré un agent et un leader dans le même voisinage avec des vitesses initiales nulles. La trajectoire de référence est telle que $u_{ref} = (u_{ref_x}, 0)$ et $\|q_{ref} - q_0\| >> R$ (fig. 3.16).*

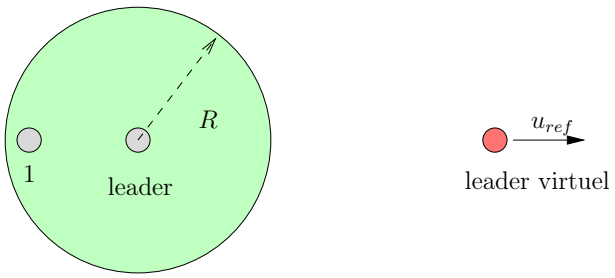


FIGURE 3.16 – Influence de u_{ref} sur la convergence

La figure 3.17 représente l'écart au cours du temps entre la position du barycentre et la position de référence $\|x_c\| = \|q_c(t) - q_{ref}(t)\|$ pour différentes valeurs de u_{ref_x}. Dans la partie asymptotique, le leader est proche du barycentre et le terme $\boldsymbol{w}_0$ est faible. Pour $u_{ref_x} = 0$, la position du barycentre se confond presque avec la position de référence. Dès que $u_{ref_x} \neq 0$, il apparaît un écart constant sur x_c

qui augmente à mesure que u_{ref_x} augmente. Pour toutes les valeurs de u_{ref_x}, la vitesse du leader est asymptotiquement égale à la vitesse de référence, i.e. $\limsup_{t\to+\infty} \|v_c(t)\| = 0$.

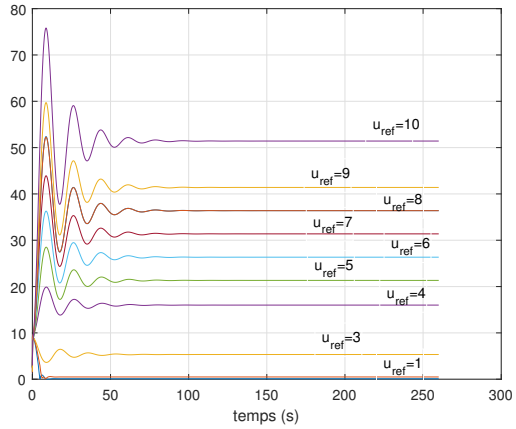


FIGURE 3.17 – $\left\|q_c(t) - q_{ref(t)}\right\|$ pour différentes valeurs de u_{ref_x}

L'état du système (3.42) converge vers un ensemble dont la taille augmente à mesure que v_{max} augmente.

Example 54. *Nous avons simulé un SMA constitué de 6 agents et d'un leader perceptif. La trajectoire de référence décrit un cercle dans le plan. Les vitesses initiales des agents et du leader sont nulles.*

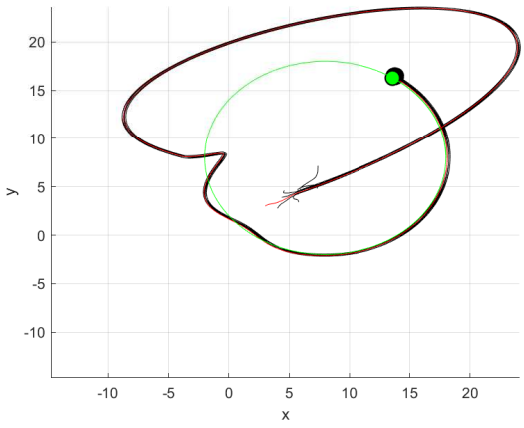


FIGURE 3.18 – Trajectoires des agents (noir), du leader (rouge) et du leader virtuel (vert)

Les figures 3.21 et 3.22 illustrent le suivi de consensus pratique. La première figure montre les positions des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre après la phase de convergence de la formation. Bien que la trajectoire de référence décrive un cercle, la formation reste stable avec des légères variations autour d'une position d'équilibre : chaque agent décrit un cycle de faible amplitude. La deuxième figure représente l'évolution temporelle de l'écart de position entre le leader virtuel et le barycentre. Cet écart ne tend pas vers zéro mais se stabilise autour d'une valeur non nulle.

Enfin, la figure 3.22 compare les composantes suivant x de la vitesse du leader virtuel et de celle du barycentre (p_{ref_x} et p_{c_x}). Les vitesses sont quasi-identiques puisque, contrairement aux positions, l'équilibre est obtenu pour $p_i = p_{ref}$, $i = 0, \ldots, N$.

Example 55. *On considère 5 agents avec le protocole (3.25) et un leader avec le protocole (3.21). Les conditions initiales sont telles que le graphe est connexe à $t = 0$ mais que tous les agents sont en limite*

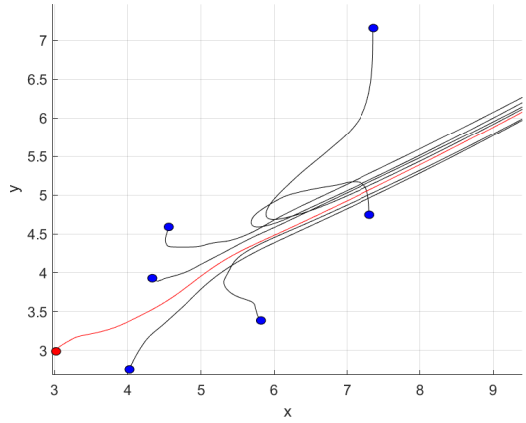


FIGURE 3.19 – Positions initiales des agents et du leader et mise en formation

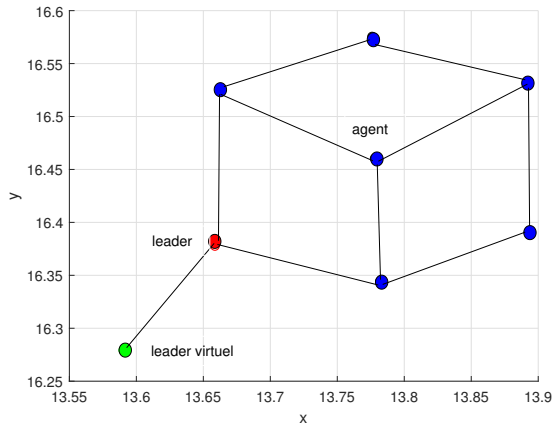


FIGURE 3.20 – Positions finales des agents en formation en treillis

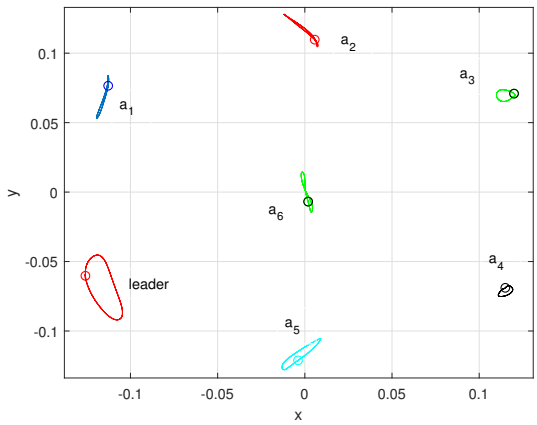


FIGURE 3.21 – Positions finales des agents en formation en treillis

de connectivité. Le choix des vitesses initiales des agents et du leader fait que les agents s'écartent rapidement les uns des autres, si bien qu'ils perdent tous leurs voisins (fig. 3.24). Le leader virtuel est statique et est positionné au point $(-6, -6)$.

Les trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre sont représentées sur la figure 3.25 ainsi que les positions finales pour des vitesses initiales :

$$p_0(0) = (0, 2), \quad p_1(0) = (2, 0), \quad p_2(0) = (-2, 0), \quad p_3(0) = (-1, -1), \quad p_4(0) = (1, -1), \quad p_5(0) = (0, 0)$$

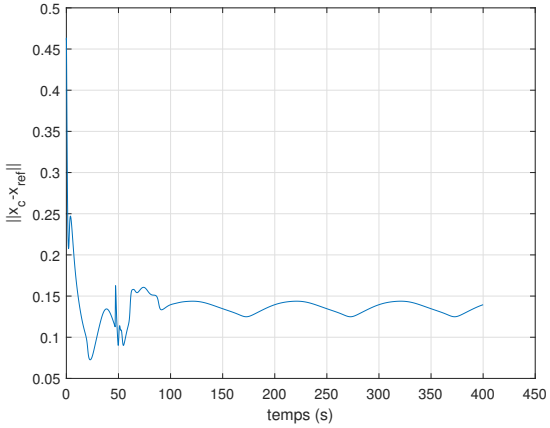


FIGURE 3.22 – Erreur de position entre la trajectoire de référence et le barycentre $\|q_c - q_{ref}\|$

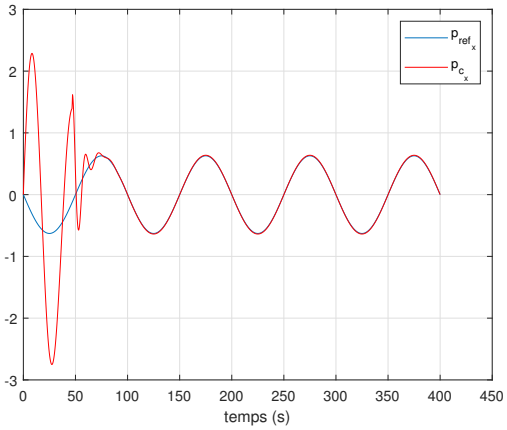


FIGURE 3.23 – p_{ref_x} et p_{c_x}

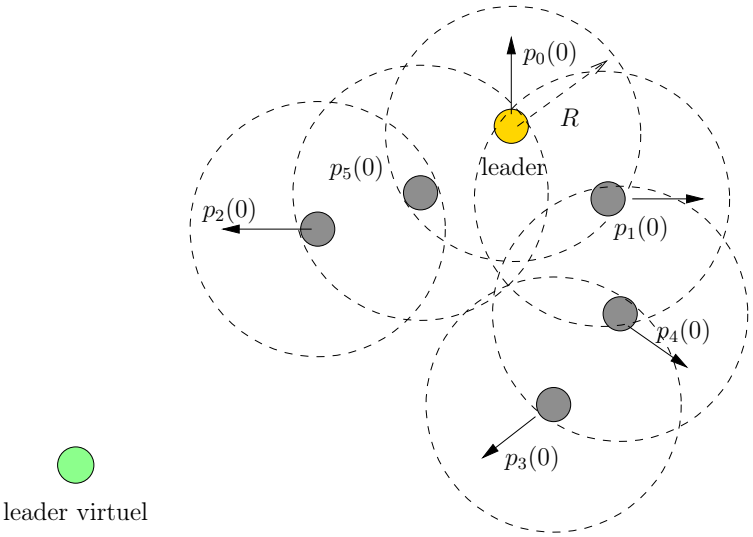


FIGURE 3.24 – Initialisation critique

La figure 3.26 a) montrent l'évolution au cours du temps des vitesses suivant x des agents et du leader. Toutes les vitesses convergent vers celle de la trajectoire de référence, c'est-à-dire une vitesse nulle. Les trajectoires des agents et du leader sont représentées sur la figure 3.26 b). Les agents commencent par s'écarter les uns des autres à cause de leurs conditions initiales, puis forment rapidement un groupe cohésif où tous les agents se déplacent à la même vitesse pour rejoindre la trajectoire de

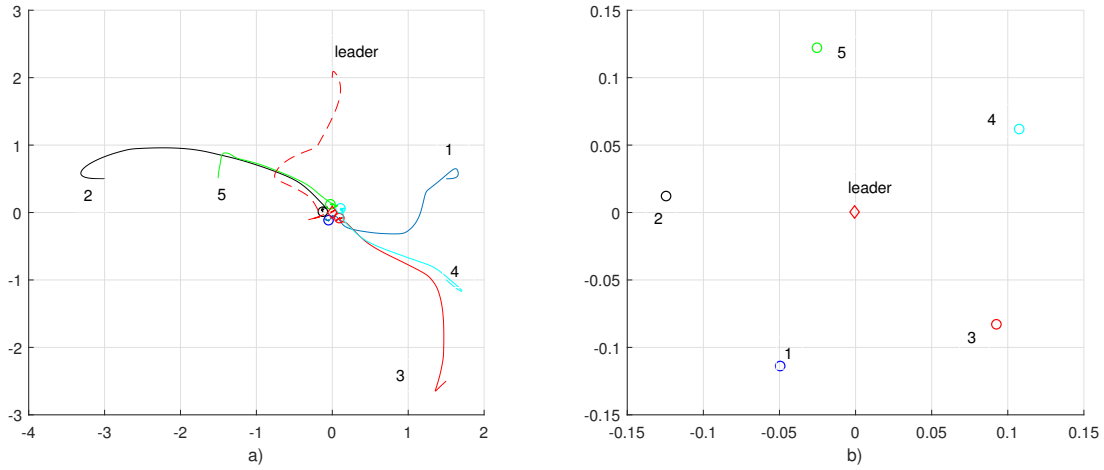


FIGURE 3.25 – a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre b) Positions finales des agents dans le référentiel lié au barycentre

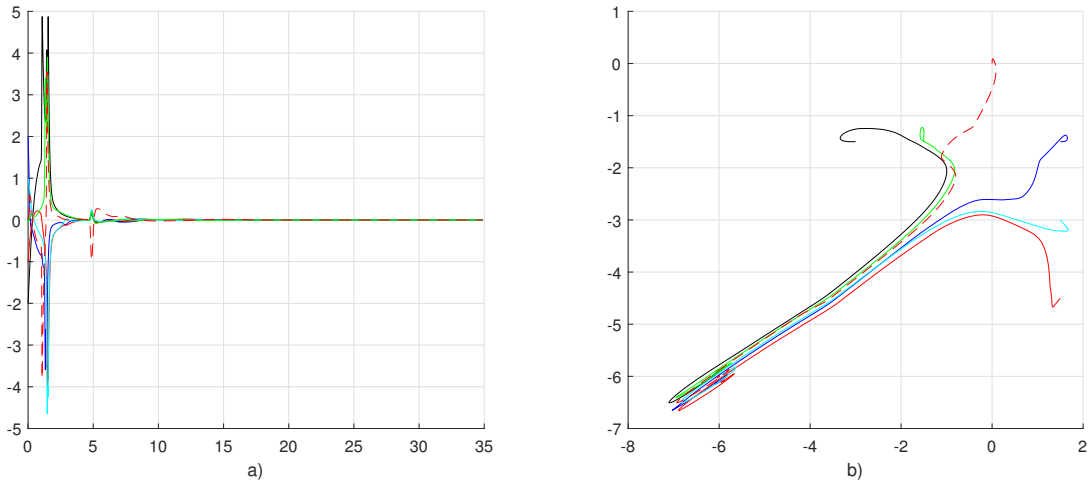


FIGURE 3.26 – a) Vitesses suivant x par rapport au temps des agents et du leader b) Trajectoires des agents et du leader

référence.

On considère maintenant des vitesses initiales cinq fois plus élevées :

$$p_0(0) = (0, 10), \quad p_1(0) = (10, 0), \quad p_2(0) = (-10, 0), \quad p_3(0) = (-5, -5), \quad p_4(0) = (5, -5), \quad p_5(0) = (0, 0)$$

Contrairement au cas précédent, les agents ne se regroupent pas avant de rejoindre le leader virtuel. Les agents $(1, 4, 3)$ *et* $(2, 5)$ *forment deux sous-groupes cohésifs tandis que le leader rejoint seul le leader virtuel. Les deux sous-groupes fusionnent ensuite en un seul groupe cohésif rejoint par le leader, puis l'ensemble converge sur le leader virtuel.*

Cet exemple montre la robustesse du protocole vis-à-vis des conditions initiales.

3.7 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre le problème du suivi de consensus pratique dans le cas d'un leader perceptif associé à un mécanisme d'anti-collision. Chaque agent dispose également d'un potentiel

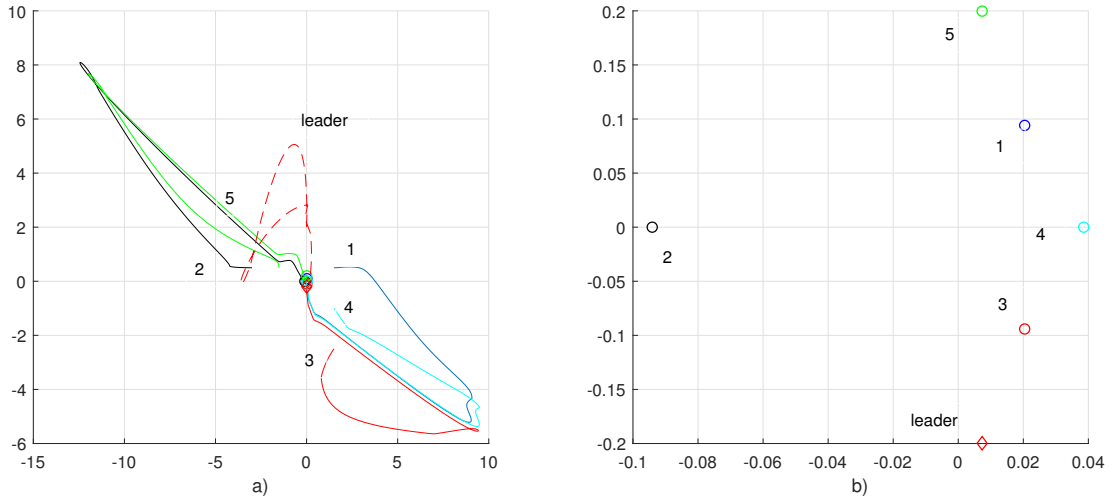


FIGURE 3.27 – a) Trajectoires des agents et du leader dans le référentiel lié au barycentre b) Positions finales des agents dans le référentiel lié au barycentre

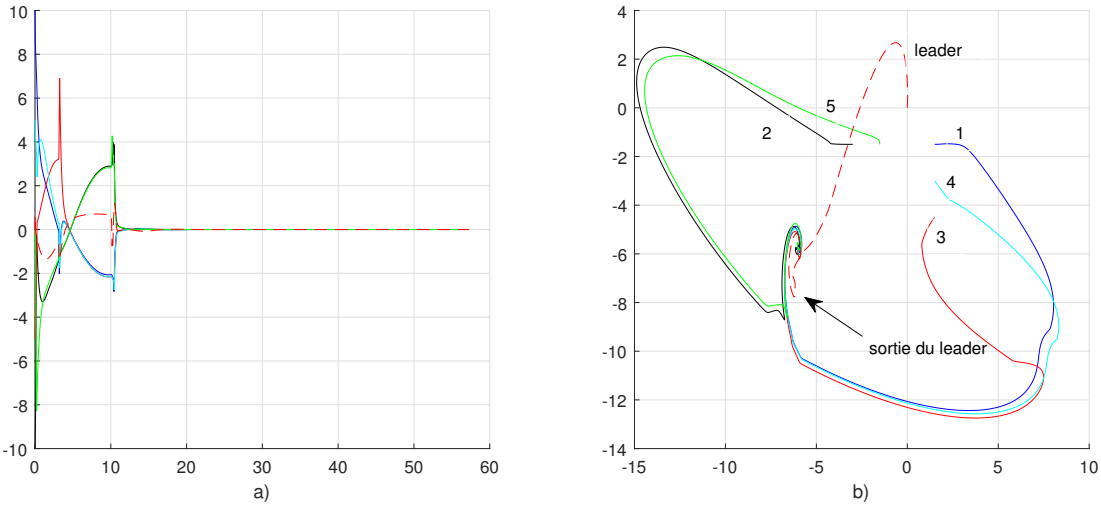


FIGURE 3.28 – a) Vitesses suivant x par rapport au temps des agents et du leader b) Trajectoires des agents et du leader

attractif à la frontière de son voisinage pour les agents extérieurs. Ce potentiel est répulsif mais borné, contrairement aux autres approches citées dans la littérature, pour les agents appartenant au voisinage. Pour assurer que le graphe reste connexe, nous avons supposé qu'un agent arraché à son voisinage conservait un lien avec son voisin. Ce lien lui permet de rejoindre asymptotiquement son voisinage initial.

Chapitre 4

Discrétisation de la commande

Contents

4.1 Introduction 73
4.2 Discrétisation 74
4.3 Les SMA et l'échantillonnage de la commande 74
4.4 Formulation du problème 76
4.5 Commande homogène continue 77
4.6 Commande homogène discrétisée 80
4.7 Conclusion 84

Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet d'un article en revue dans [6].

4.1 Introduction

Pour atteindre leur objectif, que ce soit le consensus ou le suivi de consensus, les systèmes multi-agents sont fortement tributaires des informations qu'ils échangent avec leurs voisins. Ces échanges se font *via* un canal de communication qui, en environnement réel, est loin d'être parfait. De même, pour augmenter l'autonomie énergétique, il est parfois judicieux de limiter au maximum les communications entre agents. La décision de communiquer ou non une information est alors subordonnée à une condition de stabilité (*self-triggered*) ou à un changement d'état (*event-triggered*). Ces fluctuations de la période d'échantillonnage impactent fortement la stabilité de ces systèmes et doivent être prises en compte lors de la conception de la commande.

Les systèmes avec échantillonnage périodique et apériodique constituent le bon cadre d'étude pour comprendre et analyser les problèmes de stabilité liés aux fluctuations des périodes d'échantillonnage. Dans le cas des SMA qui nous intéresse plus particulièrement, on distingue quatre types d'échantillonnage pour l'analyse de la stabilité [26] :

- l'échantillonnage périodique synchrone où tous les agents ont le même instant d'échantillonnage périodique ;
- l'échantillonnage périodique asynchrone où chaque agent a son propre instant d'échantillonnage périodique ;
- l'échantillonnage apériodique synchrone où tous les agents ont le même échantillonnage apériodique ;
- l'échantillonnage apériodique asynchrone où chaque agent a son propre échantillonnage apériodique.

Les systèmes avec échantillonnage apériodique constituent actuellement un sujet d'étude de grande ampleur, de même que les mécanismes d'*event-triggered* et de *self-triggered* [2]. Ces derniers sont utilisés pour diminuer la consommation énergétique des agents, qui sont souvent des systèmes qui embarquent leur source d'énergie.

Le but de ce chapitre est d'étudier le consensus pratique d'un système multi-agents avec des entrées échantillonnées. Pour ce faire, une nouvelle stratégie d'émulation non linéaire basée sur l'homogénéité qui a été développée dans [5] est appliquée aux systèmes multi-agents avec un échantillonnage apériodique synchrone.

4.2 Discrétisation

Comme mentionné précédemment, l'étude des systèmes continus a montré ses limites dès lors que l'on s'intéresse à l'influence de l'échantillonnage sur la stabilité. Cette constatation a poussé les chercheurs en théorie du contrôle à considérer les points suivants :

- La discrétisation de la commande [4] : la discrétisation est la transformation d'un état continu vers son équivalent discret. Ce processus est une étape importante dans la résolution numérique d'un problème ou sa programmation sur machine. Discrétiser des données continues engendre systématiquement une erreur de discrétisation ; minimiser cette erreur est ainsi l'un des problèmes les plus étudiés dans le cadre de la discrétisation de la commande. Le modèle obtenu représente l'évolution de l'état $x(t_k) = x_k$ aux moments d'échantillonnage. L'intervalle d'échantillonnage peut être constant $h_k = T, k \in \mathbb{N}$ ou bien variable, afin de prendre en compte toute possibilité de retard de transmission.
- L'échantillonnage des mesures et éventuellement les latences liées aux transmission de ces données [12]
- L'émulation [29] : l'idée est d'utiliser une commande en temps continu avec des données discrètes. Cette approche consiste à concevoir d'abord une commande à temps continu utilisant des méthodes classiques. Ensuite, la commande à temps discret est obtenue en considérant une fonction constante sur l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$

Les stratégies d'échantillonnage se divisent en deux approches : périodique et apériodique.

- Échantillonnage périodique : les instants d'échantillonnage sont donnés par $t_k = kT$ avec $k \in \mathbb{N}$ et T est la période d'échantillonnage. Ce type d'échantillonnage ne prend pas en compte les caractéristiques du signal et par conséquent capture périodiquement des échantillons. Cela peut mener à une activité inutile du système de traitement et de ses périphériques. Une amélioration pertinente des ressources consiste à choisir un type d'échantillonnage qui prend en compte les caractéristiques du signal.
- Échantillonnage apériodique : l'échantillonnage s'adapte en fonction du signal, il est faible quand le signal varie lentement et augmente quand le signal varie plus rapidement pour éviter toute surcharge inutile de la chaîne de traitement et de ses ressources. Contrairement au cas périodique, les instants d'échantillonnages peuvent avoir n'importe quelle distribution possible.

4.3 Les SMA et l'échantillonnage de la commande

Chaque agent est amené à travailler de manière autonome en se basant uniquement sur les informations de ses voisins. C'est une des raisons pour laquelle le développement de méthodes pertinentes et efficaces pour l'échange d'informations entre les agents est un point crucial de la conception des protocoles de contrôle coopératif distribué. Plusieurs problèmes doivent être traités :

- la nature des informations à envoyer : continue, discrétisée ou bien échantillonnée ;

- la méthode d'échantillonnage utilisée par chaque agent : périodique ou apériodique, synchrone ou asynchrone ;

- l'instant idéal pour la mesure de chaque capteur sur chaque agent, qui pose la question de la périodicité de la commande.

Les protocoles de contrôle sont conçus sur la base de transmissions de données entre agents, ce qui signifie que les échanges d'informations entre les sous-systèmes ou les composants du système s'effectuent généralement sous la forme d'états continus ou de sorties de mesures continues.

Cependant, de nombreux réseaux de communication avancés ne permettent que la diffusion d'informations numériques. Dans cette situation, considérer des interactions continues entre agents n'est plus une représentation valide de la réalité.

D'autre part, il convient de noter que les agents à contrôler évoluent, pour la plupart des applications, dans le monde physique continu. Leurs états ou sorties sont par nature des signaux analogiques. A l'inverse, pratiquement tous les protocoles ou algorithmes de contrôle coopératifs modernes sont implémentés en termes de programmes sur des ordinateurs numériques, nécessitant l'adoption de convertisseurs analogique-numérique et numérique-analogique pour l'acquisition de données, la communication et la commande, comme illustré sur la figure 4.1.

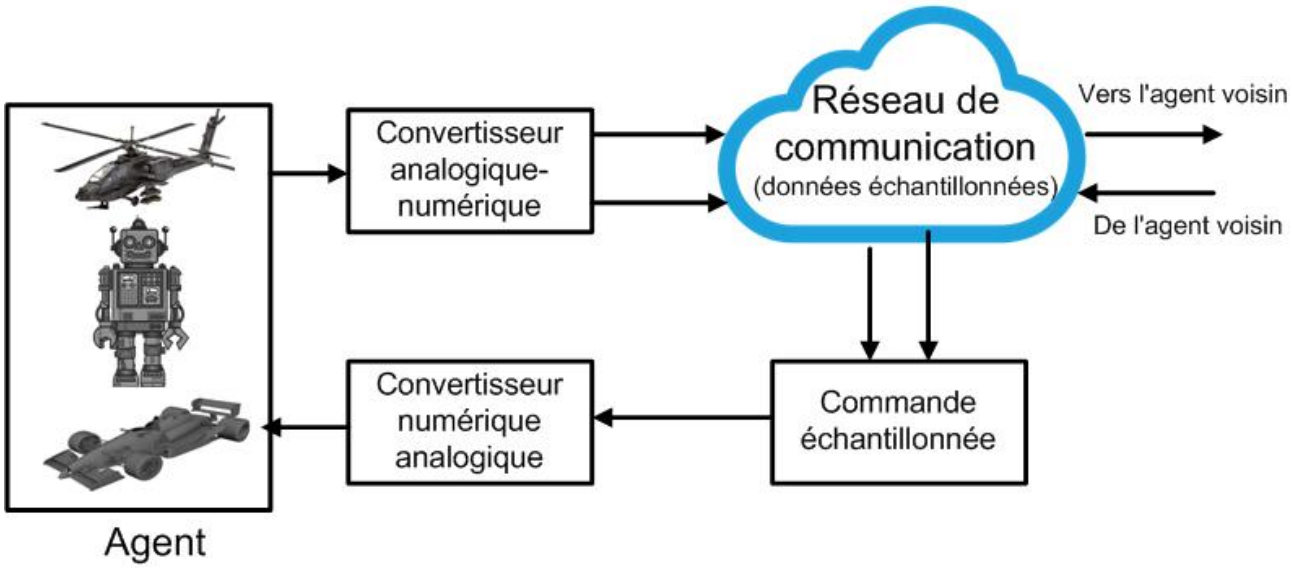


FIGURE 4.1 – Contrôle distribué avec échantillonnage des données

En d'autres termes, les échanges d'informations entre les agents voisins doivent être mis en œuvre sous forme de données échantillonnées et les protocoles ou algorithmes de contrôle coopératif ne doivent fonctionner qu'aux instants d'échantillonnages afin de refléter la réalité, ce qui pose le problème de la stabilité du système en boucle fermée.

L'échantillonnage de la commande peut être synchrone ou asynchrone. D'autre part, en raison des progrès rapides réalisés dans le cadre des technologies de détection et de communication sans fil, certains protocoles avancés de synchronisation temporelle ont été développés pour les capteurs sans fil. Dans ces situations, il semble raisonnable de garder tous les agents synchronisés via des algorithmes de synchronisation logicielle.

Notons $T_k = t_{k+1} - t_k$ la k-ième période d'échantillonnage synchrone pour tous les agents. Les quatre mécanismes d'échantillonnage synchrone sont :

- échantillonnage synchrone périodique, où la période d'échantillonnage de tous les agents est fixée en permanence à une constante connue $T > 0$, c'est-à-dire $T_k = T$;

- échantillonnage synchrone apériodique, où la valeur de la période d'échantillonnage de tous les agents est modifiée arbitrairement à chaque instant k, c'est-à-dire $T_k \in [T_m, T_M] \in \mathbb{R}^+$, où T_m et T_M sont des constantes connues ;
- échantillonnage aléatoire synchrone, où la période d'échantillonnage T_k est régie par un processus stochastique ;
- échantillonnage déclenché par événement synchrone, où la période d'échantillonnage T_k est conçue par une condition de déclenchement d'événement précis.

Vu que les agents sont, pour la plupart des applications, répartis dans l'espace, il est parfois impossible d'utiliser l'échantillonnage synchrone. Dans cette situation, il est pratique d'employer un paradigme d'échantillonnage asynchrone, selon lequel chaque agent a sa propre notion de temps d'échantillonnage. L'état échantillonné de l'agent i est désigné par $x_i(t_k^i)$, où $(t_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante qui représente les instants d'échantillonnage de l'agent i et qui vérifie

$$\lim_{k\to\infty} t_k^i = +\infty \qquad \forall i \in \mathcal{V}.$$

Ainsi la suite $(t_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$ indique à quel moment l'observation ou la mesure de chaque capteur doit être réalisée.

On note par $T_k^i = t_{k+1}^i - t_k^i$ la différence de temps entre deux instants d'échantillonnages consécutifs pour tout $i \in \mathcal{V}$. Alors, T_k^i est appelée la k-ième période d'échantillonnage asynchrone de l'agent i.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons nous placer dans le cas d'un SMA avec échantillonnage apériodique synchrone (tous les agents ont la même référence de temps) et avec une commande discrétisée.

4.4 Formulation du problème

Pour illustrer la perte de stabilité d'un système en boucle fermée dont la commande est discrétisée, nous allons considérer le cas idéal d'un système linéaire avec un retour d'état décrit par :

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0 \tag{4.1}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, $B \in \mathbb{R}^{n\times n_u}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ l'état du système et $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ sa commande. Le système (4.1) est supposé contrôlable et il existe un retour d'état

$$u(t) = Kx(t) \tag{4.2}$$

où $K \in \mathbb{R}^{n_u\times n}$ tel que le système

$$\dot{x} = (A + BK)\, x(t) \tag{4.3}$$

soit asymptotiquement stable, *i.e.* $A + BK$ est Hurwitz.

En pratique, la mesure de l'état du système (4.1) n'est disponible qu'aux instants d'échantillonnage t_k avec $k \in \mathbb{N}$, tels que $t_{k+1} > t_k$, $t_0 = 0$. Les intervalles d'échantillonnage sont définis par $T_k = t_{k+1} - t_k$. La commande (4.2) s'écrit alors

$$u(t) = Kx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1})$$

Le modèle discrétisé du système avec le retour d'état s'écrit alors

$$\begin{aligned} x(t_{k+1}) &= e^{AT_k}x(t_k) + \int_0^{T_k} e^{A\tau}d\tau Bu(t_k) \\ &= \left(e^{AT_k} - \int_0^{T_k} e^{A\tau}d\tau BK\right) x(t_k) \\ &= A_d(T_k)x(t_k), \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $A_d(T_k) = -A^{-1}BK + e^{AT_k}(I + A^{-1}BK)$. Le système (4.3) est stable si, pour une période d'échantillonnage T_k constante, la matrice $A_d(T_k)$ est de type Schur, *i.e.* ses valeurs propres sont incluses dans le disque unité.

Example 56. *Soit le double intégrateur*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

avec $u(t) = -x_1(t) - x_2(t)$. *La figure 4.2 montre l'évolution de la plus grande valeur propre de* A_d, $\max(|\lambda(A_d)|)$, *en fonction de la période d'échantillonnage* T_k. *A partir de* $T_k > 2$ *secondes, une des valeurs propres sort du disque unité et le système devient instable.*

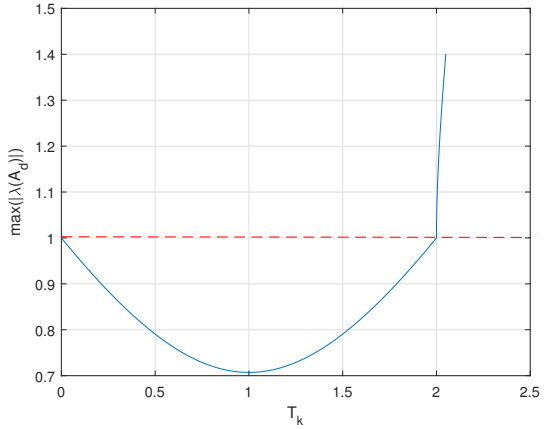


FIGURE 4.2 – $max\,(\|\lambda(A_d)\|)$ en fonction de T_k (en seconde)

Example 57. *On considère un SMA constitué de* N *agents se déplaçant dans un espace de dimension* $m = 2$ *et modélisé par*

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= -\mathcal{L}q - \mathcal{L}p \end{aligned} \tag{4.6}$$

où $q \in \mathbb{R}^{Nm}$ *(resp.* $p \in \mathbb{R}^{Nm}$*) représente le vecteur des positions (resp. des vitesses) des agents.* $\mathcal{L}$ *est la matrice laplacienne du graphe décrivant les connexions entre les agents :*

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Numériquement, le calcul montre que pour $T_k > 0.4797s$, *le système (4.6) devient instable et il n'y a plus de consensus. La figure 4.3 représente les positions* q_{x_i} *des cinq agents en fonction du temps pour* $T_k = 0.49s$ *(traits pointillés) et pour* $T_k = 0.47s$ *(traits pleins) en partant des mêmes conditions initiales. Dans le premier cas, on a bien divergence des positions, le système est instable.*

4.5 Commande homogène continue

On considère un système constitué de n agents dans un graphe non dirigé, connexe et stationnaire. Le système est modélisé par un ensemble de n double-intégrateurs :

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= p_i \\ \dot{p}_i &= u_i \end{aligned} \tag{4.7}$$

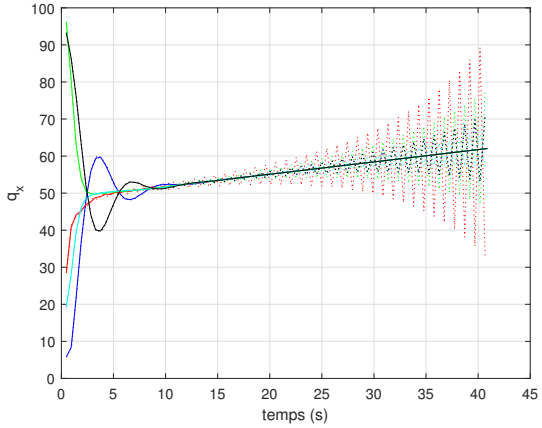


FIGURE 4.3 – $q_{i_x}(t)$, $i = 1, \ldots, 5$ pour $T_k = 0.49$s (pointillés) et $T_k = 0.47$s (traits pleins)

avec $i = 1, \ldots, N$, $q_i \in \mathbb{R}^m$ représente la position de l'agent i et $p_i \in \mathbb{R}^m$ sa vitesse. On notera $A = [a_{ij}]$ la matrice d'interconnexion du graphe décrivant le système multi-agents. Soit $q^T = \left(q_1^T, \ldots, q_n^T\right)$ et $p^T = \left(p_1^T, \ldots, p_n^T\right)$.

Hypothèse 58. *La communication entre les agents est non dirigée et le graphe est connexe.*

Définition 59. *(Consensus pratique) Soit $K \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ un voisinage compact de l'origine, le consensus pratique du SMA* (4.7) *est atteint avec les commandes $u_i(q(t), p(t))$, $i = 1, \ldots, N$ si le système* (4.7) *en boucle fermée satisfait $(q_i(t) - q_j(t), p_i(t) - p_j(t)) \to K$ pour $t \to +\infty$ pour tout $\{q_i(t), p_j(t)\}$ avec $(ij) \in \mathcal{E}$.*

Soit un vecteur $x = \left[\ x_1^T, \ldots, \ \ x_N^T\ \right]^T \in \mathbb{R}^{Nm}$ avec $x_i \in \mathbb{R}^m$ tel que $x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ \vdots \\ x_{im} \end{bmatrix}$. On adoptera la notation suivante :

$$\lfloor x \rceil^\alpha = \begin{bmatrix} \lfloor x_1 \rceil^\alpha \\ \vdots \\ \lfloor x_N \rceil^\alpha \end{bmatrix} \text{ avec } \lfloor x_i \rceil^\alpha = \begin{bmatrix} \lfloor x_{i1} \rceil^\alpha \\ \vdots \\ \lfloor x_{im} \rceil^\alpha \end{bmatrix}.$$

On considère la loi de commande :

$$\begin{aligned} u_i(t) = &- k_1 \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \lfloor q_i(t) - q_j(t) \rceil^\alpha \\ &- k_2 \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \lfloor p_i(t) - p_j(t) \rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}, \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{4.8}$$

avec $0 < \alpha < 1$.

Définition 60. *Les systèmes homogènes constituent une classe de systèmes non linéaires admettant des propriétés de changement d'échelle qui permettent d'étendre globalement des comportements locaux ; ils généralisent notamment les systèmes linéaires et certains systèmes polynomiaux.*

Théorème 61. *Si l'hypothèse* (58) *est vérifiée, alors le consensus est atteint pour le système* (4.7) *avec la commande* (4.8)

Démonstration. Posons

$$e_q^{ij} = q_i - q_j$$
$$e_p^{ij} = p_i - p_j$$

Le système (4.7) en boucle fermée avec la commande (4.8) peut s'écrire sous la forme d'un système d'erreur en posant $e_q = \left\{e_q^{ij}\right\}$ et $e_p = \left\{e_p^{ij}\right\}$ pour tout $(ij) \in \mathcal{E}_s$, où $\mathcal{E}_s$ est constitué des éléments (ij) de $\mathcal{E}$ tels que $i > j$. On a :

$$\begin{aligned}
\dot{e}_q^{ij} &= e_p^{ij} \\
\dot{e}_p^{ij} &= -k_1 \sum_{k=1}^{N} \left(a_{ik} \left\lfloor e_q^{ik} \right\rceil^{\alpha} - a_{jk} \left\lfloor e_q^{jk} \right\rceil^{\alpha} \right) \\
&\quad - k_2 \sum_{k=1}^{N} \left(a_{ik} \left\lfloor e_p^{ik} \right\rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} - a_{jk} \left\lfloor e_q^{jk} \right\rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

Le système d'erreur global s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{e}_q & = e_p \\ \dot{e}_p & = -k_1 \Lambda \left\lfloor e_q \right\rceil^{\alpha} - k_2 \Lambda \left\lfloor e_p \right\rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \end{array} \right. \tag{4.9}$$

où Λ est une matrice symétrique de dimension $n_{\mathcal{E}_s} \times n_{\mathcal{E}_s}$, $n_{\mathcal{E}_s} = \text{card}(\mathcal{E}_s)$.

En prenant $\alpha = 1$ dans l'expression de la commande (4.8), on obtient la commande linéaire présentée par Ren ([69]) qui assure le consensus. Dans ce cas, le système d'erreur (4.9) est stable et l'origine est globalement asymptotiquement stable pour ce système, ce qui implique que la matrice

$$\Delta = \left(\begin{array}{cc} 0 & I \\ -k_1\Lambda & -k_2\Lambda \end{array} \right) \tag{4.10}$$

est Hurwitz pour $k_1, k_2 > 0$. Son polynôme caractéristique est donné par

$$\det(\lambda^2 I + k_2 \lambda \Lambda + k_1 \Lambda) = 0. \tag{4.11}$$

Puisque $\frac{-k_1}{k_2}$ n'est pas racine de ce polynôme, on en déduit que

$$\det(\Lambda + \frac{\lambda^2}{k_2\lambda + k_1} I) = 0,$$

puis que pour toute valeur propre λ de Δ, il existe une valeur propre μ de λ telle que $-\mu = \frac{\lambda^2}{k_2\lambda + k_1}$, c'est-à-dire

$$\lambda^2 + k_2\mu\lambda + k_1\mu = 0.$$

Puisque les racines du polynôme $\lambda^2 + k_2\mu\lambda + k_1\mu$ sont à partie réelle strictement négative, on en déduit qu'il prend des valeurs strictement positives pour $\lambda \geq 0$, d'où $\mu > 0$ et la matrice Λ est bien définie positive.

Posons $|e_q|^{1+\alpha} = \left[\begin{array}{cccc} |e_{q_1}|^{1+\alpha}, & \ldots, & \left|e_{q_{n_{\mathcal{E}_s}}}\right|^{1+\alpha} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{mn_{\mathcal{E}_s}}$. Soit

$$V = \frac{k_1}{1+\alpha} \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{E}_s}} \sum_{j=1}^{m} \left|e_{q_{ij}}\right|^{1+\alpha} + \frac{1}{2} e_p^T \Lambda^{-1} e_p. \tag{4.12}$$

On a

$$\begin{aligned}\dot{V} &= k_1 \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{E}_s}} \sum_{j=1}^{m} e_{p_{ij}} \left\lfloor e_{q_{ij}} \right\rceil^{\alpha} - k_1 e_p^T \left\lfloor e_q \right\rceil^{\alpha} - k_2 e_p^T \left\lfloor e_p \right\rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \\ &= -k_2 \sum_{i=1}^{n_{\mathcal{E}_s}} \sum_{j=1}^{m} |e_{p_{ij}}|^{\frac{1+3\alpha}{1+\alpha}} \leq 0.\end{aligned}$$

Le principe d'invariance de Lasalle permet de conclure que l'origine est globalement asymptotiquement stable pour le système (4.9), ce qui implique le consensus pour le système (4.7). □

Remarque 62. *L'écriture du modèle d'erreur semble plus naturel dès lors que l'on s'intéresse aux liens entre les agents. Cependant, la dimension du problème dépend de la topologie du réseau et non plus du nombre d'agents.*

4.6 Commande homogène discrétisée

On va rappeler ici un résultat essentiel pour la suite de ce chapitre. Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.13}$$

décrit par une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. On suppose connu un retour d'état statique continu $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tel que l'origine est globalement asymptotiquement stable pour le système en boucle fermée

$$\dot{x} = f(x, u(x)). \tag{4.14}$$

Soit un temps d'échantillonnage maximum $0 < h < +\infty$, un temps d'échantillonnage minimum $\eta > 0$ et une séquence d'instants d'échantillonnage $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $t_0 = 0$ et

$$\eta \leq t_{k+1} - t_k \leq h. \tag{4.15}$$

Du fait de l'échantillonnage, la commande devient

$$u(t) = u(x(t_k))$$

pour tout $t \in [t_k, t_{k+1})$. Plus précisément, entre deux instants d'échantillonnage, la commande est constante (échantillonneur/bloqueur d'ordre zéro). Le système en boucle fermée peut se réécrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t_k))), \qquad t \in [t_k, t_{k+1}). \tag{4.16}$$

Quelles propriétés de stabilité basées sur l'homogénéité peut-on avoir pour le système (4.14) ?

Dans [5], les auteurs ont apporté une réponse à ce problème en différenciant les cas d'un degré d'homogénéité positif, négatif et nul pour le système. Nous rappelons ici ce résultat.

Hypothèse 63. *Il existe une matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ telle que $-A$ est Hurwitz et un degré $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que*

$$f(\exp(As)x, u(\exp(As)z)) = e^{\kappa s} \exp(As) f(x, u(z))$$

pour tout $x, z \in \mathbb{R}^n$ et tout $s \in \mathbb{R}$.

Théorème 64. *[5] En supposant que le système échantillonné* (4.16) *est tel que la période d'échantillonnage satisfait (4.15) et que l'hypothèse (63) soit vérifiée. Soit $\nu(x) = Ax$ et N une norme ν-homogène.*

1. *Si $\kappa > 0$ alors l'origine est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable du système* (4.16) *et il existe $\xi > 0$ tel que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq \xi h^{-1/\kappa}\}$ soit un sous-ensemble du domaine d'attraction.*

2. *Si $\kappa = 0$ alors il existe $H > 0$ tel que si $h < H$ alors l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du système* (4.16).

3. *Si* $\kappa < 0$ *alors il existe* $\xi > 0$ *tel que l'ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^n : N(x) \leq \xi h^{-1/\kappa}\}$ *soit globalement asymptotiquement stable pour le système* (4.16).

Nous allons nous intéresser au cas du degré négatif ($\kappa < 0$). En effet, bien que le cas du degré positif soit intéressant puisque l'on assure une stabilité locale à l'origine, on peut voir que la taille du domaine d'attraction dépend de la période d'échantillonnage. Sans surprise, le domaine d'attraction diminue lorsque h augmente. En pratique, pour un SMA, cela signifie que les états initiaux des agents doivent tous être compris dans le domaine d'attraction. En pratique, ce domaine est souvent de taille assez faible et cette stratégie n'aboutit pas au consensus.

Dans le cas d'un degré négatif, l'état du système converge sur un ensemble autour de l'origine quel que soit en théorie l'état initial. La taille de l'ensemble de stabilité dépend bien évidement de h et augmente au fur et à mesure que h augmente. C'est la raison pour laquelle on parlera de consensus pratique pour un degré négatif.

Considérons la commande (4.8) prise aux instants d'échantillonnage (4.15). On a

$$\begin{aligned} u_i(t) = &- k_1 \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \lfloor (q_i(t_k) - q_j(t_k)) \rceil^{\alpha} \\ &- k_2 \sum_{j=1}^{N} a_{ij} \lfloor (p_i(t_k) - p_j(t_k)) \rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}, \quad i = 1, \ldots, N \end{aligned} \tag{4.17}$$

Théorème 65. *En supposant vérifiée les hypothèses (58) et (63), si* $0 < \alpha < 1$ *alors il existe* $\xi > 0$ *tel que le système multi-agents* (4.7) *avec la loi de commande* (4.17) *prise aux instants d'échantillonnage* (4.15) *résout le problème du consensus pratique. On a de plus* $N(e_q, e_p) \leq \xi h^{\frac{2}{1-\alpha}}$.

Démonstration. Le système d'erreur (4.9) avec la loi de commande discrétisée (4.17) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{e}_q &=& e_p \\ \dot{e}_p &=& -k_1 \Lambda \lfloor e_q(t_k) \rceil^{\alpha} - k_2 \Lambda \lfloor e_p(t_k) \rceil^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} \end{array} \right. . \tag{4.18}$$

La démonstration de la stabilité pratique est une application immédiate du Théorème 64. En effet, le système (4.18) satisfait l'hypothèse (63) en considérant une matrice de pondération $A = diag\left(1, \frac{1+\alpha}{2}\right)$ et un degré $\kappa = \frac{\alpha-1}{2}$. De plus, lorsque la commande n'est pas discrétisée, l'origine est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable pour le système (*cf* Théorème 61).

Il reste à montrer que $N(e_q^{ij}, e_p^{ij}) \leq \xi h^{\frac{2}{1-\alpha}}$ pour $(ij) \notin \mathcal{E}$, c'est à dire pour deux agents qui ne sont pas voisins. Toutes les normes homogènes étant équivalentes, on peut choisir en particulier la norme homogène

$$N(e_q, e_p) = \sum_{(ij)\in\mathcal{E}} \|q_i - q_j\| + \|p_i - p_j\|^{\frac{2}{1+\alpha}} \tag{4.19}$$

Pour $(ab) \in \mathcal{E}$, on a

$$\begin{array}{rcl} \|q_a - q_b\| &\leq& N(e_q, e_p) \\ \|p_a - p_b\|^{\frac{2}{1+\alpha}} &\leq& N(e_q, e_p). \end{array}$$

Soit $\mathcal{P}_{ij} \subset \mathcal{E}$ un chemin entre les agents i et j

$$\mathcal{P}_{ij} = \left\{ \begin{array}{cccc} (il_1) & (l_1 l_2) & \ldots & (l_d j) \end{array} \right\}$$

On a, pour $n_{\mathcal{E}} = card\,\{\mathcal{E}\}$

$$\begin{aligned} \|q_i - q_j\| &\leq \|q_i - q_{l_1}\| + \|q_{l_1} - q_{l_2}\| + \ldots + \|q_{l_d} - q_j\| \\ &\leq (d+1)N(e_q, e_p) \\ &\leq n_{\mathcal{E}} N(e_q, e_p) \\ &\leq \xi' h^{-\frac{1}{\kappa}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \|p_i - p_j\|^{\frac{2}{1+\alpha}} &\leq (\|p_i - p_{l_1}\| + \|p_{l_1} - p_{l_2}\| + \ldots + \|p_{l_d} - p_j\|)^{\frac{2}{1+\alpha}} \\ &\leq \left(n_{\mathcal{E}} N(e_q, e_p)^{\frac{1+\alpha}{2}}\right)^{\frac{2}{1+\alpha}} \\ &\leq \xi'' h^{-\frac{1}{\kappa}} \end{aligned}$$

d'où

$$N(e_q^{ij}, e_p^{ij}) \leq (\xi' + \xi'') h^{-\frac{1}{\kappa}}$$

□

Pour illustrer ce résultat, on considère un SMA constitué de 5 agents reliés entre eux suivant le graphe présenté sur la figure 4.4.

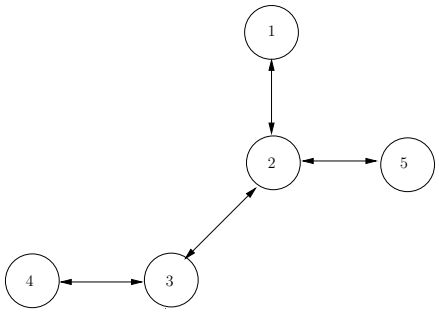


FIGURE 4.4 – Graphe à 5 agents

Le pas de calcul pour les doubles intégrateurs est fixé à $h = 0.01$ sec. Pour une période d'échantillonnage $T_k > T_{shur} = 0.4796$ sec., le système multi-agents devient instable si le degré d'homogénéité κ est égal à 0 (cas d'un système linéaire). Les figures suivantes représentent $\|q_1 - q_c\|$, le module de l'écart entre la position de l'agent 1 et celle du barycentre de la flotte dont les coordonnées sont définies par

$$\begin{aligned} q_c(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} q_i(t) \\ p_c(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \end{aligned}$$

La figure 4.5 représente l'évolution de l'écart en fonction du temps pour $T_k = h$, c'est à dire sans discrétisation de la commande et pour $\kappa = 0$. L'écart tend vers zéro, le consensus s'établit rapidement entre les cinq agents.

Sur la figure suivante (fig 4.6), la commande est discrétisée avec une période d'échantillonnage $T_k = 0.47$ sec., c'est à dire proche de T_{schur} par valeur inférieure et toujours pour un degré d'homogénéité $\kappa = 0$.

Le système reste stable mais des oscillations apparaissent sur les positions des agents. Pour $T_k = 0.48$ sec., la période d'échantillonnage est supérieure à T_{schur} et le système devient instable pour $\kappa = 0$ (fig. 4.7).

En prenant un degré d'homogénéité $\kappa = -0.5$, le système atteint un consensus pratique pour des périodes d'échantillonnage supérieures à T_{schur}, comme l'illustre la figure 4.8 qui a été obtenue pour $T_k = 1$ sec.

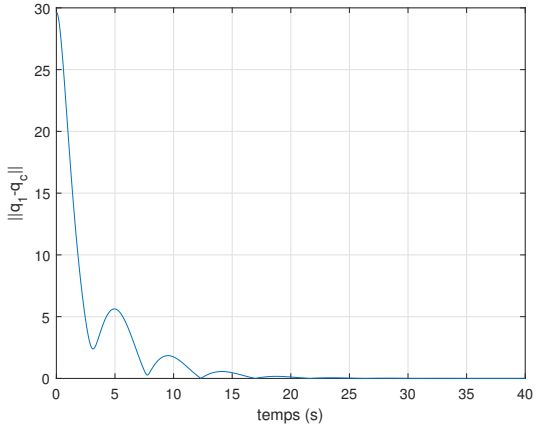


FIGURE 4.5 – $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = h$, $\kappa = 0$

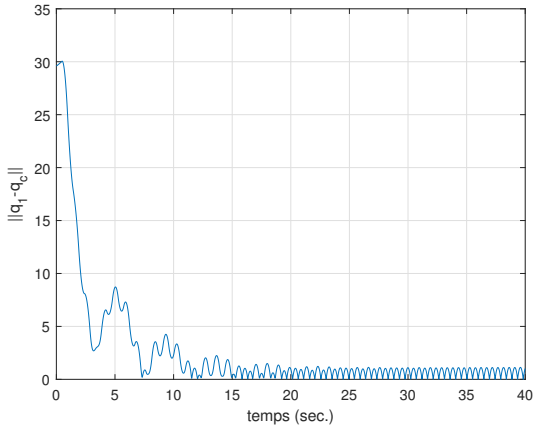


FIGURE 4.6 – $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = 0.47$ sec., $\kappa = 0$

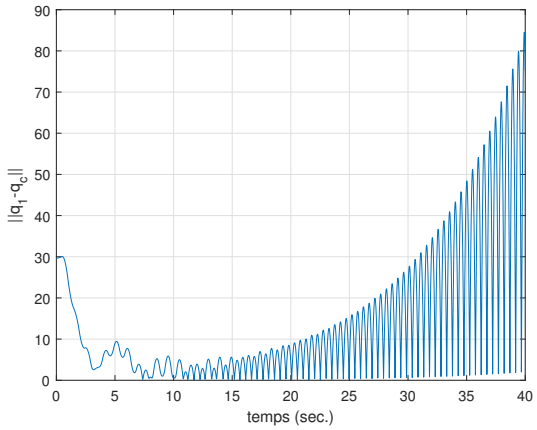


FIGURE 4.7 – $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = 0.48$ sec., $\kappa = 0$

L'utilisation d'une commande qui rend le système homogène avec un degré négatif permet d'obtenir la stabilité pour des périodes d'échantillonnage supérieures à T_{schur}. En contre-partie, plus la période d'échantillonnage est grande par rapport à T_{schur} et plus l'ensemble de convergence est grand.

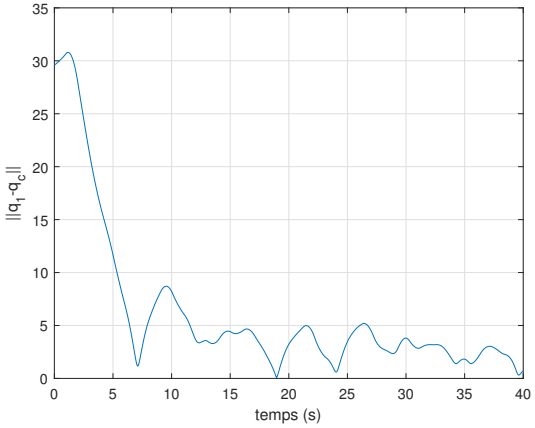


FIGURE 4.8 – $\|q_1 - q_c\|$ pour $T_k = 1$ sec., $\kappa = -0.5$

4.7 Conclusion

Les protocoles qui permettent à un SMA d'atteindre le consensus sont basés sur les échanges d'information entre agents voisins. Une dégradation des échanges ne peut qu'avoir un impact négatif sur le comportement des agents. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à un type particulier de dégradation qui correspond à des pertes d'information dans les échanges. Concrètement, les commandes appliquées aux agents restent bloquées à leur valeur passée pendant un temps T supérieur à la période d'échantillonnage assurant un échange d'information suffisant pour atteindre le consensus. Au-delà d'une limite T_{schur}, le consensus ne peut plus être atteint en considérant un protocole linéaire.

Pour remédier à ce problème, nous proposons d'utiliser une commande non linéaire homogène. La principale contribution de ce chapitre a été de développer un modèle basé sur les liens entre les agents permettant d'appliquer cette commande.

Des exemples de simulation sous MATLAB sont proposés afin de valider les résultats théoriques présentés dans le chapitre.

Quatrième partie

Conclusion Générale

Conclusion principale

Dans cette thèse, nous avons étudié le contrôle coopératif pour les systèmes multi-agents et nous nous sommes principalement concentrés sur les problèmes du consensus et du suivi de consensus.

Le manuscrit présente deux parties : la première partie se compose d'un seul chapitre où nous présentons l'état de l'art sur le consensus et le suivi de consensus pour les SMA. Nous nous sommes intéressés en particulier aux travaux résolvant le problème du consensus et du suivi de consensus pour des dynamiques d'agents de type simple intégrateur et double intégrateur.

La deuxième partie constitue l'apport de la thèse et se compose de trois chapitres :

- le chapitre deux traite le suivi par consensus pratique pour un SMA dont les agents sont modélisés par un double intégrateur. Le graphe modélisant les liens entre les agents est non orienté et fixe. Nous introduisons la notion de leader perceptif, dans laquelle le leader a une connaissance de l'état de ses suiveurs. Sa commande est un compromis entre suivre la trajectoire de référence et ne pas perdre ses suiveurs. Nous avons utilisé une commande linéaire continue et nous avons démontré que le suivi par consensus pratique est atteint à condition que l'accélération de la trajectoire de référence soit bornée. Des simulations sous MATLAB et des expérimentations avec une flotte de robots sont présentées et illustrent ces résultats théoriques.

- le chapitre trois étend les résultats du chapitre deux en considérant un système d'évitement de collision et un graphe à topologie variable. Les agents du SMA conservent leur voisinage initial et peuvent rejoindre un autre voisinage.

- le chapitre quatre aborde le problème de la dégradation des communications au sein du SMA et propose une commande non linéaire homogène permettant d'atteindre le consensus pratique. Nous avons supposé le même échantillonnage sur tous les agents. L'originalité de ce chapitre vient de la modélisation proposée. Cette nouvelle modélisation du SMA permet d'appliquer la commande homogène. Des exemples de simulations réalisés sous MATLAB sont présentés afin de valider les résultats théoriques.

Ces travaux ont donné lieu à une communication [33] et une revue [6]. Au terme de ce travail de thèse, différentes problématiques et extensions sont envisageables. Nous présentons dans le paragraphe suivant une liste non exhaustive de perspectives.

Futurs travaux

- La commande développée au chapitre trois doit pouvoir s'adapter au problème de la fusion et de la scission de graphes avec des leaders multiples. Du fait que l'on utilise une barrière de potentiel bornée pour les agents sortants d'un voisinage, il est tout à fait possible de gérer la séparation du graphe en deux sous-graphes. Pour le problème de la fusion de deux graphes, elle doit se faire naturellement en imposant une trajectoire de référence unique aux deux leaders.

- Il reste quelques points théoriques à consolider dans le chapitre trois. En particulier, nous supposons l'existence d'une matrice de lyapunov P mais rien ne garantit qu'elle existe pour toutes les configurations possibles (nombre d'agents, paramètres des fonctions d'appartenance et des fonctions potentielles).

- Il serait intéressant de refaire les preuves en considérant des agents asynchrones. En effet, en pratique, les horloges embarquées fournissent une période d'échantillonnage identique pour chaque agent mais n'assurent pas le synchronisme.

- Nous considérons au chapitre quatre une commande non linéaire homogène avec un même degré d'homogénéité constant pour tous les agents. Il serait intéressant d'avoir un degré d'homogénéité propre à chaque commande des agents en fonction de la dégradation des communications locales et

de faire varier ce degré : en absence de perturbation, le degré d'homogénéité serait nul (commande linéaire) et deviendrait négatif à mesure qu'il y aurait des pertes de liaison.

- Les travaux actuels sur le contrôle des SMA s'orientent sur des flottes d'agents hétérogènes, ce qui permettra par exemple de prendre en compte des collaborations entre des drones et des robots. Une première approche serait par exemple de considérer des modèles de type double intégrateurs avec des dimensions $m = 2$ et $m = 3$ pour les agents.

- ...

Annexe A

Notions mathématiques

Dans cet annexe, nous présentons les différentes notions mathématiques utilisé dans cette thèse. Soit le système :

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{A.1}$$

où le vecteur x est nommé vecteur d'état du système et la fonction u est son entrée. Dans le manuscrit, on étudie le cas du système autonome ça veut dire que $f(t, x)$ n'est pas une fonction du temps et on écrit

$$\dot{x} = f(x).$$

Définition 66. *On dit qu'un point $x = x_e$ de l'espace d'état est un point d'équilibre pour un système autonome $\dot{x} = f(x)$ si pour n'importe quel instant initiale, si on commence du point d'équilibre x_e, on y retourne. ça veut dire que le point x_e est la solution de l'équation $f(x_e) = 0$*

Définition 67. *(Stabilité d'un point d'équilibre) Le point d'équilibre $x = x_e$ du système est dit stable si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\|x(0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \qquad \forall t \geq t_0 \tag{A.2}$$

Si la stabilité du point d'équilibre x_e est vérifié pour tout état initial on dit que le point d'équilibre est globallement stable. On dit que le système est instable si la condition n'est pas vérifié.

Définition 68. *(Convergence du point d'équilibre) On dit que le point d'équilibre $x = x_e$ du système* (A.1) *est convergent, s'il existe $\delta_1 > 0$:*

$$\|x(0) - x_e\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = x_e \tag{A.3}$$

Définition 69. *(Stabilité asymptotique) On dit qu'un point d'équilibre $x = x_e$ est asymptotiquement stable s'il est en même temps stable et convergent.*

Définition 70. *(Stabilité exponentielle) On dit qu'un point d'équilibre $x = x_e$ du système est (localement) exponentiellement stable s'il existe deux constantes réelles $\alpha, \lambda > 0$ tel que*

$$\|x(t) - x_e\| \leq \alpha \|x(0) - x_e\| e^{\lambda t} \quad \forall t > 0 \quad \textit{pour} \quad \|x(0) - x_e\| < \delta \tag{A.4}$$

On dit qu'il est globalement exponentiellement stable si la condition est vérifé pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

Définition 71. *Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est dite semi définie positive dans D si elle satisfait les conditions suivantes :*

- $0 \in D$ *et* $V(0) = 0$
- $V(x) \geq 0, \qquad \forall V(0) = 0$
- $V(x) \geq 0, \qquad \forall x \in D \setminus \{0\}$

Définition 72. *Une fonction $V : D \to \mathbb{R}$ est dite défini positive dans D si elle satisfait les conditions suivantes :*

- $0 \in D$ *et* $V(0) = 0$
- $V(x) \geq 0, \qquad \forall V(0) = 0$
- $V(x) > 0, \qquad \forall x \in D \setminus \{0\}$

Tous les théorèmes de stabilité de Lyapunov se concentrent sur l'étude de la dérivée temporelle d'une fonction défini positive le long des trajectoires de la solution du système (A.1).

Théorème 73. *(Stabilité au sens de Lyapunov) Soit $x = x_e$ un point d'équilibre de* (A.1) *où $f : D \to \mathbb{R}^n$ et $V : D \to R$ une fonction continue différentiable tel que :*

- $V(0_n) = 0$
- $V(x) > 0, \qquad \forall x \neq 0_n$
- $\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty,$
- $\dot{V}(x) < 0, \qquad \forall x \neq 0_n$

Alors, x est stable

On appele chaque fonction V que nous proposons afin d'étudier la stabilité du système, une fonction Lyapunov candidate et elle est nommée fonction Lyapunov une fois les 3 conditions sont vérifiés.

Définition 74. *un vecteur normé (X,$\|.\|$) est défini par un vecteur X et une norme $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ tel que*

- $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in X$

Définition 75. *On considére $\mathbb{R}^n$, pour tout p, $1 \leq p \leq \infty$, la fonction $\|.\|_p$ est connu par la norme p de $\mathbb{R}^n$ où $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$*
On définit les deux inégalitées suivantes :

- ***Inégalité de Holder** : soit $p \in \mathbb{R}$, $p>1$ et soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $\|x^T y\|_1 \leq \|x\|_p \|x\|_q$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$*
- ***Inégalité de Minkowski** : Soit $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Donc $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$*

Si A est une matrice de taille $m \times n$ et B est une matrice de taille $p \times q$, alors le produit Kronecker $A \otimes B$ est présenté par la matrice bloc de taille $mp \times nq$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

Lemme 76. *[28] On suppose que $A \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times p}$ et $D \in \mathbb{R}^{q \times q}$.*

- $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$
- $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T.$
- *On suppose que A et B sont inversible. Alors $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.*
- *Si A et B sont symétrique, alors $A \otimes B$ est aussi symétrique.*

Annexe B

Robotic Operating System

Robot Operating System (ROS) a été initialement développé par les chercheurs du laboratoire d'intelligence artificielle de Stanford en 2007. Il s'agit d'un framework en accès libre qui fournit des outils logiciels et des bibliothèques spécifiquement développés pour les applications robotiques.

ROS est devenu populaire dans la communauté de la recherche robotique car son approche modulaire a simplifié la conception d'un comportement de robot complexe. L'idée principale de ROS est de fournir un cadre qui rassemble les outils robotiques et permet le partage et la réutilisation de code en définissant les normes de facto de la programmation robotique.

ROS est un framework multi-langage où les modules peuvent être écrits dans divers langages de programmation tels que C++ et Python. Chaque processus dans ROS est appelé un nœud. Chaque nœud peut être conçu et programmé séparément.

Le principal avantage de l'utilisation de ROS est que chaque nœud peut être exécuté sur des ordinateurs différents car ROS fournit un environnement de calcul distribué. Toute information produite par un nœud peut être partagée sur un chemin spécifique appelé topic. Ces informations sont envoyées sous forme de messages. Ces messages sont en fait des structures de données et ROS peut traiter divers types de données pour les messages.

Un nœud peut envoyer et recevoir des informations de plusieurs autres nœuds à la fois. Un ROS master gère la dénomination et l'enregistrement des nœuds dans un système ROS global et assure le suivi des envois et de réception d'information. Tous les nœuds peuvent communiquer avec le ROS master pour l'enregistrement, puis ils peuvent recevoir des informations d'autres nœuds enregistrés.

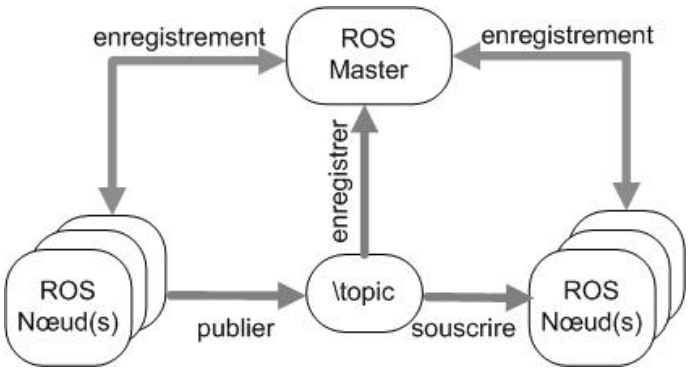


Figure B.1 – Architecture de ROS

Comme ROS travaille dans un environnement distribué, il est facile de traiter avec un système constitué de plusieurs robots utilisant ROS. Chaque robot peut avoir son propre environnement ROS avec un ROS master local et chaque ROS master local peut communiquer avec un autre environnement ROS installé sur un autre robot.

Bibliographie

[1] F. Amigoni and V. Schiaffonati. Multiagent-based simulation in biology. In *Model-Based Reasoning in Science, Technology, and Medicine*, pages 179–191. Springer, 2007.

[2] P. Antsaklis and J. Baillieul. Special issue on technology of networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1) :5–8, 2007.

[3] T. Arai, E. Pagello, L. E. Parker, et al. Advances in multi-robot systems. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(5) :655–661, 2002.

[4] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-controlled systems : theory and design*. Courier Corporation, 2013.

[5] E. Bernuau, E. Moulay, and P. Coirault. Stability of homogeneous nonlinear systems with sampled-data inputs. *Automatica*, 85 :349–355, 2017.

[6] E. Bernuau, E. Moulay, P. Coirault, and F. Isfoula. Practical consensus of homogeneous sampled-data multi-agent systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(11), 2019.

[7] V. Borkar and P. Varaiya. Asymptotic agreement in distributed estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3) :650–655, June 1982.

[8] C. Bullo and Martinez. Distributed control of robotic networks. *Applied Mathematics Series*, 2009.

[9] Y. Cao and W. Ren. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(1) :33–48, 2012.

[10] Y. Cao, W. Ren, and Z. Meng. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking. *Systems & Control Letters*, 59(9) :522–529, 2010.

[11] Y. Cao, W. Yu, W. Ren, and G. Chen. An overview of recent progress in the study of distributed multi-agent coordination. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(1) :427–438, 2013.

[12] T. Chen and B. A. Francis. *Optimal sampled-data control systems*. Springer Science & Business Media, 2012.

[13] L. Cheng, Z.-G. Hou, M. Tan, X. Wang, et al. Necessary and sufficient conditions for consensus of double-integrator multi-agent systems with measurement noises. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(8) :1958–1963, 2011.

[14] L. Cheng, Y. Wang, Z.-G. Hou, M. Tan, and Z. Cao. Sampled-data based average consensus of second-order integral multi-agent systems : Switching topologies and communication noises. *Automatica*, 49(5) :1458–1464, 2013.

[15] J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo. Robust rendezvous for mobile autonomous agents via proximity graphs in arbitrary dimensions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(8) :1289–1298, 2006.

[16] L. Ding and W. X. Zheng. Network-based practical consensus of heterogeneous nonlinear multiagent systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(8) :1841–1851, 2017.

[17] X. Dong, J. Xi, Z. Shi, and Y. Zhong. Practical consensus for high-order linear time-invariant swarm systems with interaction uncertainties, time-varying delays and external disturbances. *International Journal of Systems Science*, 44(10) :1843–1856, 2013.

[18] M. Egerstedt and X. Hu. Formation constrained multi-agent control. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(6) :947–951, 2001.

[19] M. Evans, J. Anderson, and G. Crysdale. Achieving flexible autonomy in multiagent systems using constraints. *Applied Artificial Intelligence an International Journal*, 6(1) :103–126, 1992.

[20] J. A. Fax and R. M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. 2003.

[21] J. A. Fax and R. M. Murray. Information flow and cooperative control of vehicle formations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9) :1465–1476, 2004.

[22] J. Ferber and G. Weiss. *Multi-agent systems : An introduction to distributed artificial intelligence*, volume 1. Addison-Wesley Reading, 1999.

[23] J. Fu and J. Wang. Adaptive consensus tracking of high-order nonlinear multi-agent systems with directed communication graphs. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 12(5) :919–929, 2014.

[24] Y. Gao and L. Wang. Sampled-data based consensus of continuous-time multi-agent systems with time-varying topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(5) :1226–1231, 2011.

[25] Y. Gao, L. Wang, G. Xie, and B. Wu. Consensus of multi-agent systems based on sampled-data control. *International Journal of Control*, 82(12) :2193–2205, 2009.

[26] X. Ge and Q.-L. Han. A brief survey of recent advances in consensus of sampled-data multiagent systems. In *42nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 6758–6763. IEEE, 2016.

[27] X. Ge, Q.-L. Han, D. Ding, X.-M. Zhang, and B. Ning. A survey on recent advances in distributed sampled-data cooperative control of multi-agent systems. *Neurocomputing*, 275 :1684–1701, 2018.

[28] A. Graham. *Kronecker products and matrix calculus with applications*. Courier Dover Publications, 2018.

[29] L. Hetel, C. Fiter, H. Omran, A. Seuret, E. Fridman, J.-P. Richard, and S. I. Niculescu. Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling : An overview. *Automatica*, 76 :309–335, 2017.

[30] Y. Hong, G. Chen, and L. Bushnell. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks. *Automatica*, 44(3) :846–850, 2008.

[31] R. Horn and C. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge UK, 1985.

[32] J. Hu, J. Cao, J. Yu, and T. Hayat. Consensus of nonlinear multi-agent systems with observer-based protocols. *Systems & Control Letters*, 72 :71–79, 2014.

[33] F. Isfoula, P. Coirault, E. Bernuau, E. Moulay, Q. Liu, and Q. Hui. Practical consensus tracking of multi-agent systems with linear controllers. In *European Control Conference, Naples, Italie*, 2019.

[34] A. Jadbabaie, J. Lin, and A. S. Morse. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6) :988–1001, 2003.

[35] A. Kantamneni, L. E. Brown, G. Parker, and W. W. Weaver. Survey of multi-agent systems for microgrid control. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 45 :192–203, 2015.

[36] G. Lafferriere, A. Williams, J. Caughman, and J. Veerman. Decentralized control of vehicle formations. *Systems & Control Letters*, 54(9) :899–910, 2005.

[37] J. R. Lawton, R. W. Beard, and B. J. Young. A decentralized approach to formation maneuvers. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 19(6) :933–941, 2003.

[38] S. Li, H. Du, and X. Lin. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics. *Automatica*, 47(8) :1706–1712, 2011.

[39] Z. Li and Z. Duan. *Cooperative control of multi-agent systems : A consensus region approach*. CRC Press, 2014.

[40] Z. Li, X. Liu, W. Ren, and L. Xie. Distributed tracking control for linear multiagent systems with a leader of bounded unknown input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 58(2) :518–523, 2013.

[41] Z. Li, W. Ren, X. Liu, and L. Xie. Distributed consensus of linear multi-agent systems with adaptive dynamic protocols. *Automatica*, 49(7) :1986–1995, 2013.

[42] J. Lin, A. S. Morse, and B. D. Anderson. The multi-agent rendezvous problem. In *42nd IEEE International Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1508–1513. IEEE, 2003.

[43] P. Lin and Y. Jia. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with nonuniform time-delays and dynamically changing topologies. *Automatica*, 45(9) :2154–2158, 2009.

[44] P. Lin and Y. Jia. Consensus of a class of second-order multi-agent systems with time-delay and jointly-connected topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(3) :778–784, 2010.

[45] Z. Lin, B. Francis, and M. Maggiore. Necessary and sufficient graphical conditions for formation control of unicycles. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1) :121–127, 2005.

[46] X. Liu, W. Lu, and T. Chen. Consensus of multi-agent systems with unbounded time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(10) :2396–2401, 2010.

[47] Z.-W. Liu, Z.-H. Guan, X. Shen, and G. Feng. Consensus of multi-agent networks with aperiodic sampled communication via impulsive algorithms using position-only measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(10) :2639–2643, 2012.

[48] N. A. Lynch. *Distributed algorithms*. Elsevier, 1996.

[49] H. J. Marquez. *Nonlinear control systems : analysis and design*. Wiley, 2002.

[50] Z. Meng, W. Ren, Y. Cao, and Z. You. Leaderless and leader-following consensus with communication and input delays under a directed network topology. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*, 41(1) :75–88, 2011.

[51] E. Merelli, G. Armano, N. Cannata, F. Corradini, M. d'Inverno, A. Doms, P. Lord, A. Martin, L. Milanesi, S. Möller, et al. Agents in bioinformatics, computational and systems biology. *Briefings in Bioinformatics*, 8(1) :45–59, 2006.

[52] L. Moreau. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2) :169–182, 2005.

[53] U. Munz, A. Papachristodoulou, and F. Allgower. Consensus in multi-agent systems with coupling delays and switching topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(12) :2976–2982, 2011.

[54] W. Ni and D. Cheng. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies. *Systems & Control Letters*, 59(3) :209–217, 2010.

[55] K.-K. Oh, M.-C. Park, and H.-S. Ahn. A survey of multi-agent formation control. *Automatica*, 53 :424–440, 2015.

[56] R. Olfati-Saber. Flocking for multi-agent dynamic systems : Algorithms and theory. Technical report, 2004.

[57] R. Olfati-Saber. Flocking for multi-agent dynamic systems : Algorithms and theory. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 51(3) :401–420, 2006.

[58] R. Olfati-Saber, J. A. Fax, and R. M. Murray. Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1) :215–233, 2007.

[59] R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1) :495–500, 2002.

[60] R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Graph rigidity and distributed formation stabilization of multi-vehicle systems. 2002.

[61] R. Olfati-Saber and R. M. Murray. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(9) :1520–1533, 2004.

[62] J. Qin and H. Gao. A sufficient condition for convergence of sampled-data consensus for double-integrator dynamics with nonuniform and time-varying communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(9) :2417–2422, 2012.

[63] J. Qin, H. Gao, and W. X. Zheng. Second-order consensus for multi-agent systems with switching topology and communication delay. *Systems & Control Letters*, 60(6) :390–397, 2011.

[64] J. Qin, Q. Ma, Y. Shi, and L. Wang. Recent advances in consensus of multi-agent systems : A brief survey. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 64(6) :4972–4983, 2017.

[65] W. Ren. On consensus algorithms for double-integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6) :1503–1509, July 2008.

[66] W. Ren. Distributed leaderless consensus algorithms for networked euler–lagrange systems. *International Journal of Control*, 82(11) :2137–2149, 2009.

[67] W. Ren and R. W. Beard. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5) :655–661, 2005.

[68] W. Ren and R. W. Beard. Consensus algorithms for double-integrator dynamics. *Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control : Theory and Applications*, pages 77–104, 2008.

[69] W. Ren and R. W. Beard. *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control*. Communications and Control Engineering. Springer, 2008.

[70] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins. A survey of consensus problems in multi-agent coordination. In *American Control Conference*, pages 1859–1864. IEEE, 2005.

[71] W. Ren, R. W. Beard, and E. M. Atkins. Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control Systems Magazine*, 27(2) :71–82, 2007.

[72] W. Ren, R. W. Beard, and T. W. McLain. Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. In *Cooperative Control*, pages 171–188. Springer, 2005.

[73] W. Ren and Y. Cao. *Distributed coordination of multi-agent networks : Emergent problems, models, and issues*. Springer Science & Business Media, 2010.

[74] C. W. Reynolds. *Flocks, herds and schools : A distributed behavioral model*, volume 21. ACM, 1987.

[75] S. Roy, A. Saberi, and K. Herlugson. Formation and alignment of distributed sensing agents with double-integrator dynamics and actuator saturation, part ii. In *submitted to IEEE Conference on Decision and Control*, 2004.

[76] G. S. Seyboth, D. V. Dimarogonas, and K. H. Johansson. Event-based broadcasting for multi-agent average consensus. *Automatica*, 49(1) :245–252, 2013.

[77] J. Shamma. *Cooperative control of distributed multi-agent systems*. John Wiley & Sons, 2008.

[78] J. Shao, G. Xie, and L. Wang. Leader-following formation control of multiple mobile vehicles. *IET Control Theory & Applications*, 1(2) :545–552, 2007.

[79] Q. Song, J. Cao, and W. Yu. Second-order leader-following consensus of nonlinear multi-agent systems via pinning control. *Systems & Control Letters*, 59(9) :553–562, 2010.

[80] E. D. Sontag and Y. Wang. On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5) :351–359, 1995.

[81] I. Stamatopoulou, M. Gheorghe, and P. Kefalas. Modelling dynamic organization of biology-inspired multi-agent systems with communicating x-machines and population p systems. In *International Workshop on Membrane Computing*, pages 389–403. Springer, 2004.

[82] P. Stone and M. Veloso. Multiagent systems : A survey from a machine learning perspective. *Autonomous Robots*, 8(3) :345–383, 2000.

[83] Z.-J. Tang, T.-Z. Huang, J.-L. Shao, and J.-P. Hu. Consensus of second-order multi-agent systems with nonuniform time-varying delays. *Neurocomputing*, 97 :410–414, 2012.

[84] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas. Stable flocking of mobile agents part i : Dynamic topology. In *42nd IEEE Conference on Decision and Control.*, volume 2, pages 2016–2021, 2003.

[85] H. G. Tanner, A. Jadbabaie, and G. J. Pappas. Flocking in fixed and switching networks. *IEEE Transactions on Automatic control*, 52(5) :863–868, 2007.

[86] Y.-P. Tian and C.-L. Liu. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(9) :2122–2128, 2008.

[87] Y.-P. Tian and Y. Zhang. High-order consensus of heterogeneous multi-agent systems with unknown communication delays. *Automatica*, 48(6) :1205–1212, 2012.

[88] J. Toner and Y. Tu. Flocks, herds, and schools : A quantitative theory of flocking. *Physical Review E*, 58(4) :4828, 1998.

[89] J. Tsitsiklis and M. Athans. Convergence and asymptotic agreement in distributed decision problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(1) :42–50, January 1984.

[90] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles. *Physical Review Letters*, 75(6) :1226, 1995.

[91] R. Vidal, O. Shakernia, and S. Sastry. Formation control of nonholonomic mobile robots with omnidirectional visual servoing and motion segmentation. In *IEEE Conf. Robotics and Automation*, pages 584–589, 2003.

[92] L. Wang and F. Xiao. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :950–955, 2010.

[93] X. Wang and Y. Hong. Finite-time consensus for multi-agent networks with second-order agent dynamics. *IFAC*, 41(2) :15185–15190, 2008. 17th IFAC World Congress.

[94] J. Wu and Y. Shi. Consensus in multi-agent systems with random delays governed by a markov chain. *Systems & Control Letters*, 60(10) :863–870, 2011.

[95] F. Xiao and L. Wang. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(8) :1804–1816, 2008.

[96] D. Xie and S. Wang. Consensus of second-order discrete-time multi-agent systems with fixed topology. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 387(1) :8–16, 2012.

[97] W. Yang, X. Wang, and H. Shi. Fast consensus seeking in multi-agent systems with time delay. *Systems & Control Letters*, 62(3) :269–276, 2013.

[98] W. Yu, G. Chen, and M. Cao. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, 46(6) :1089–1095, 2010.

[99] W. Yu, L. Zhou, X. Yu, J. Lü, and R. Lu. Consensus in multi-agent systems with second-order dynamics and sampled data. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 9(4) :2137–2146, 2013.

[100] Y. Zhang and Y.-P. Tian. Consensus of data-sampled multi-agent systems with random communication delay and packet loss. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(4) :939–943, 2010.

[101] Z. Zhang, L. Zhang, F. Hao, and L. Wang. Leader-following consensus for linear and lipschitz nonlinear multi-agent systems with quantized communication. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 47(8) :1970–1982, 2017.

[102] W. Zhu, Z.-P. Jiang, and G. Feng. Event-based consensus of multi-agent systems with general linear models. *Automatica*, 50(2) :552–558, 2014.

[103] Z. Zuo and L. Tie. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems. *International Journal of Control*, 87(2) :363–370, 2014.

Résumé

Un système multi-agents est composé d'un ensemble d'agents interagissant entre eux et avec leur environnement, un agent étant vu comme un système dynamique autonome. La force des SMA repose sur la capacité des agents à coopérer entre eux pour atteindre un objectif qu'un agent seul ne pourrait atteindre. Chaque agent partage ses informations avec ses voisins, ce qui permet à l'ensemble des agents de s'accorder sur un objectif commun sans qu'il y ait pour autant une centralisation de l'information et de l'objectif. En ce sens, un système multi-agents peut être vu comme un réseau dans lequel l'information est distribuée. L'intérêt croissant pour le contrôle distribué et la coordination des réseaux constitués d'agents autonomes est motivé par l'absence de centralisation de l'information et la possibilité d'avoir une topologie du réseau variable. Les algorithmes de contrôle déployés sur ces réseaux sont de nature distribuée puisqu'ils s'appuient sur des informations locales, et sont robustes vis-à-vis des variations de topologie et de taille du réseau. Le problème le plus étudié dans le cadre de ces systèmes multi-agents est celui du consensus, qui peut être résumé ainsi : étant donné des conditions initiales pour chaque agent, quelles sont les conditions pour que les agents s'accordent asymptotiquement sur une valeur commune en n'échangeant que des informations entre agents voisins. Cette thèse traite du développement de commandes permettant d'atteindre ce consensus pour des topologies fixes et variables, en présence ou non d'un leader (suivi de consensus), et sur la qualité des informations transitant dans le réseau. En suivi de consensus, la notion de leader perceptif est développée et une commande est proposée pour une topologie fixe et variable.

Mot clés : Système multi-agent, Suivi par consensus pratique, leader perceptif, commande échantillonnée.

Summary

An agent is an autonomous dynamics system that can coordinate with the environment as well as with other agents. A group of these autonomous agents working in coordination is called a Multi-agent system (MAS). A MAS has several advantages over single agent operation. The main objective of MAS is to achieve a complex goal which is hard to achieve by a single agent. In MAS, each agent shares its information (states) to the neighbors only to complete the task hence no centralized monitoring systems is required. We can define a multi-agent system as a network in which information is distributed. The interest of researchers in the study of distributed control and distributed coordination of autonomous agent networks is motivated by the fact that it has the ability to cope with the problems associated with centralized communication network and also allow the switching network topologies. The algorithms for distributed networks only use local information, and are robust to variations of network topology and can accommodate network with large size. One of the most studied problems in the field of MAS is the consensus, which can be defined as : for any initial conditions for all agent, what are the conditions that should hold in order that the agents agree on a common value asymptotically while only information is exchanged between neighboring agents ? This thesis deals with the development of control law to achieve the consensus for fixed and switching topologies, with or without a leader (consensus tracking). It also investigates the problem of the quality of information in the network. In consensus tracking, the notion of perceptive leader is developed and a control law is proposed for a fixed and switching topology.

Key words : Multi-agent systems, practical consensus tracking, perceptive leader, sampled data control.