THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM
Secteur de recherche : Mathématiques et leurs applications

Présentée par :
Brice Landry Doumbé Bangola

Étude de modèles de champ de phase de type Caginalp

Directeur(s) de Thèse :
Alain Miranville

Soutenue le 03 mai 2013 devant le jury

Jury :

Président	**Luc Molinet**	Professeur des Universités, Université de Tours
Rapporteur	**Monica Conti**	Professore, Scuola Politecnica di Milano
Rapporteur	**Ramon Quintanilla**	Profesor, Universidad Politécnica de Cataluña
Membre	**Luc Molinet**	Professeur des Universités, Université de Tours
Membre	**Laurence Cherfils**	Maître de conférences, Université de La Rochelle
Membre	**Morgan Pierre**	Maître de conférences, Université de Poitiers

Pour citer cette thèse :
Brice Landry Doumbé Bangola. *Étude de modèles de champ de phase de type Caginalp* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs applications . Poitiers : Université de Poitiers, 2013. Disponible sur Internet <http://theses.univ-poitiers.fr>

Table des matières

Table des matières i

Notations principales **1**

1 Introduction générale **3**
1.1 Historique 3
1.2 Dérivation du modèle de Caginalp 5
1.2.1 Généralisations du système de Caginalp 8
1.3 Présentation de la thèse 9
1.4 Présentation des résultats 9
1.5 Plan de la thèse 11

2 Préliminaires et Rappels **13**
2.1 Espaces et définitions de bases 13
2.1.1 Espaces duaux 14
2.2 Inégalités et Injections 14
2.2.1 Inégalité de Young 14
2.2.2 Inégalité de Hölder 14
2.2.3 Inégalité de Poincaré 14
2.2.4 Injections de Sobolev 16
2.2.5 Inégalités d'Agmon 16
2.3 Lemmes de Gronwall 16
2.4 Attracteurs et systèmes dynamiques 17
2.5 Dimension de l'attracteur global 18

I Généralisation de type Maxwell-Cattaneo du modèle de champ de phase de Caginalp **21**
2.6 Introduction 23
2.6.1 Dérivation du modèle 23

3 Système de champ de phase de type Caginalp avec un potentiel à croissance polynomiale **27**
3.1 Cadre abstrait pour la résolution. 27
3.1.1 Formulation faible. 28
3.2 Solutions et Semi-groupe. 29
3.3 Dissipativité et Régularité. 39
3.4 Existence de l'attracteur global 45
3.5 Dimension de l'attracteur global 52

3.6 Comportement spatial des solutions 60

4 Système de champ de phase de type Caginalp avec un terme non linéaire logarithmique 65
4.1 Estimations à priori 66
4.2 Existence et unicité de la solution 68
4.3 Dissipativité et attracteur global 73
4.3.1 Dissipativité 73

5 Attracteurs pour un modèle de champ de phase de type Caginalp dans un domaine non borné 79
5.1 Hypothèses. 79
5.1.1 Formulation faible. 81
5.2 Existence et unicité de solutions. 81
5.3 Dissipativité. 86
5.4 Attracteur Global. 88

II Généralisation de type Chen-Gurtin d'un système de champ de phase de type Caginalp 101
5.5 Introduction 103
5.5.1 Motivations physiques 103

6 Modèle de champ de phase de type Caginalp avec un couplage linéaire 105
6.1 Cadre fonctionnel 105
6.1.1 Hypothèses 105
6.1.2 Notations 106
6.2 Estimations à priori 106
6.3 Existence et unicité de solutions 109
6.4 Ensembles absorbants et Régularité 112
6.4.1 Régularité de la solution 113
6.5 Existence de l'attracteur global 115
6.6 Attracteur exponentiel 117
6.7 Comportement spatial de solutions. 122

7 Problème de champ de phase conservatif avec un couplage linéaire 127
7.1 Existence et Unicité de solutions. 128
7.2 Dissipativité et Attracteur global. 136
7.3 Attracteurs exponentiels 144

8 Modèle de champ de phase de type Caginalp avec un couplage non linéaire 151
8.1 Estimations à priori 151
8.2 Caractère bien posé du problème 153
8.3 Ensembles absorbants 157
8.4 Comportement spatial des solutions 159

Conclusion et perspectives 165

Bibliographie **167**

Notations principales

$\mathbb{R}^d$	Espace euclidien de dimension d.
Ω	Domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$.
$\partial\Omega$	Frontière du domaine Ω.
$\overline{\Omega}$	Adhérence de Ω.
$\|\Omega\|$	Volume du domaine Ω.
$\mathbb{R}^+$	$= [0, +\infty[$.
$\rightarrow$	Convergnce forte.
$\rightharpoonup$	Convergence faible.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergence faible étoile.
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	Injection compacte.
$\hookrightarrow$	Injection continue.
δ_{ij}	Symbole de Kronecker.
B_r	Boule ouverte de centre 0 et de rayon r.
$\langle ., . \rangle$	Crochet de dualité.
X'	Espace dual de X.
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue.
$C^1(X; \mathbb{R})$	Fonctions C^1-différentiables de X dans $\mathbb{R}$.
$L^2(\Omega)$	Espace de Lebesgue pour $p = 2$.
$C^\infty(X; \mathbb{R})$	Fonctions C^∞-differentiables de X dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distributions.
$\|.\|$	Norme sur l'espace $L^2(\Omega)$.
$(., .)$	Produit scalaire sur l'espace $L^2(\Omega)$.
$C_c^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions C^∞ à support compact.
Γ	Interface entre la phase solide et la phase liquide.
ℓ	La chaleur latente (par unité de masse).
σ	La tension de surface.
K	La diffusivité themique.
T_E	La température de fusion à l'équilibre.
ρ	La densité.
c_m	La chaleur spécifique par unité de masse.
v	La vitesse normale de l'interface.
$[\nabla T]$	La différence de gradients de la température entre la phase solide et la phase liquide.
$\mathcal{A}$	L'attracteur global.
$\mathcal{M}$	Attracteur exponentiel.
$[s]$	Différence d'entropies entre les phases à l'équilibre.

Chapitre 1

Introduction générale

La thématique générale des travaux rassemblés dans ce manuscrit est l'étude théorique de systèmes de champ de phase, notamment le système de champ de phase de Caginalp qui a été proposé par Gunduz Caginalp (voir [1]) pour modéliser les phénomènes de transitions de phase dans certaines classes de matériaux. Ces travaux sont motivés par leurs potentielles applications en Sciences de matériaux, dans l'industrie.... . Dans cette introduction, nous faisons un historique non exhaustif de certains modèles mathématiques en transitions de phase, puis nous nous intéressons à la dérivation du modèle de champ de phase de Caginalp (voir, par exemple, [2] et les références citées pour plus de détails). Enfin, nous décrivons de façon succinte la structure générale du document.

1.1 Historique

Dès **1831**, G. Lamé et B.P. Clapeyron étudient le phénomène de congélation du sol (voir [3]), cette étude ouvre des perspectives immenses. En **1889**, le problème introduit par G. Lamé et B.P. Clapeyron est reformulé par J. Stefan ; ce dernier introduit des équations connues sous le nom de problème de Stefan (voir [4]), qui peuvent être écrites sous la forme suivante :

Trouver la température $T = T(t,x)$ et l'interface $\Gamma = \Gamma(t),\ t \in \mathbb{R}_+,\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \in \mathbb{N}^*$, telles que

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} = K\Delta T,\ c_m, K, \rho > 0, \tag{1.1}$$

$$\rho \ell \upsilon = K\nu.[\nabla T],\ \text{sur } \Gamma(t),\ \ell > 0, \tag{1.2}$$

$$T - T_E = 0,\ \text{sur } \Gamma(t),\ T_E > 0, \tag{1.3}$$

où ν, v, $[\nabla T]$, K, ρ, c_m, T_E et ℓ représentent le vecteur normal unitaire à l'interface, la vitesse normale de l'interface, la différence des gradients de température entre les phases solide et liquide, la conductivité, la densité, la chaleur spécifique par unité de masse, la température de fonte à l'équilibre et la chaleur latente, respectivement.

Remarque 1.1. *1. Une des caractéristiques de ce modèle est que la phase est fonction du signe de $T - T_E$, à savoir $T - T_E > 0$ correspond à la phase liquide, alors que $T - T_E < 0$ correspond à celle solide. D'un point de vue*

mathématique, résoudre le problème de Stefan tel que formulé ci-dessus est très difficile, particulièrement en dimension supérieure ou égale à 2. En **1947**, *L. Rubinstein a établi l'existence d'une solution en dimension 1 (voir [5]), mais il a fallu attendre* **1980**, *pour étendre ce résultat d'existence à des espaces de dimensions supérieures ; on le doit notamment à A.M. Meirmanov (voir [6]).*

2. *En réalité, le problème ci-dessus est connu sous le nom de problème classique de Stefan ; cette formulation est basée sur le fait que les phases sont séparées par une interface régulière inconnue, qui évolue de façon régulière. A contrario, la formulation faible du problème de Stefan ne fait aucunement mention d'une interface qui pourrait exister ou non, ce qui permet par exemple de considérer la situation où les phases solide et liquide sont séparées par un ensemble de mesure non nulle dans lequel les deux phases co-existent (par exemple, de la boue) et est ainsi plus générale, bien qu'elle exclut les états métastables.*

Toutefois, le problème de Stefan ainsi énoncé ne tient pas compte de tous les aspects physiques des phénomènes de transitions de phase. A cet effet, on peut mentionner J.W. Gibbs, qui suggère dans ses travaux sur la pression et les liquides que la température à l'équilibre d'une interface curviligne diffère de T_E par un terme proportionnel à la somme des courbures principales, κ, et la tension de surface σ (voir [7]) ; des expérimentations en science des matériaux suggèrent également la présence d'un terme additionnel proportionnel à la vitesse normale à l'interface (voir [8]), ce qui nous amène à considérer une condition sur l'interface de la forme

$$T - T_E = -\frac{\sigma}{[s]}\kappa - \beta v, \text{ sur } \Gamma(t) \quad \beta \geq 0, \tag{1.4}$$

où $[s]$ est la différence d'entropie entre les phases à l'équilibre et β est une constante qui dépend du matériau.

Dans le problème généralisé de Stefan correspondant à (1.1), (1.2) et (1.4), les phases du matériau ne sont plus déterminées par le signe de $T - T_E$; par conséquent, il faut parcourir l'interface d'une certaine façon pour déterminer la phase en chaque point, d'où une différence fondamentale avec le problème classique de Stefan. D'un point de vue mathématique, le problème généralisé est très compliqué à étudier (voir [9]). Afin de surmonter cette difficulté, O.A. Oleinik a proposé une approche (voir [10]) consistant à combiner l'équation de la chaleur (1.1) et l'équation de la chaleur latente (1.2) en une seule équation,

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{\ell}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = K \Delta T, \tag{1.5}$$

où φ est une fonction de Heaviside prenant les valeurs -1 dans la phase solide et 1 dans la phase liquide (il faut en fait penser à une formulation faible de (1.1) et (1.2)). Maintenant, une question naturelle est celle de savoir si on peut définir une « véritable » variable ϕ (l'idée étant de remplacer φ par ϕ dans l'équation (1.5)) représentant la phase et remplaçant l'argument utilisé pour obtenir (1.4), d'autant plus que les phases ne sont plus fonction du signe de $T - T_E$.

Une possibilité a été de considérer la théorie de la matière condensée en Physique et en Mécanique statistique, plus précisément, la théorie de champ moyen introduite par P. Weiss et L.D. Landau (voir [11]). Cette dernière est basée sur

l'idée de moyenne, au lieu du changement rapide des variables de spin, permettant ainsi une simplification du problème de base de la somme sur tous les états possibles.

L.D. Landau a appliqué la théorie de champ moyen aux phénomènes critiques afin de calculer les exposants pour lesquels les quantités thermodynamiques divergent au point critique (par exemple, la température à laquelle la distinction entre l'état liquide et l'état gazeux disparaît). Cela correspond à une troncature des modes supérieurs de Fourier. En particulier, la théorie de champ moyen conduit, dans les phénomènes critiques, à des calculs d'exposants avec le bon ordre de grandeur, mais ne permet pas d'avoir les valeurs numériques correctes.

On est alors en droit de se demander si le champ moyen (encore appelé paramètre d'ordre) dans les phénomènes critiques peut être utilisé pour résoudre les problèmes dynamiques loin du point critique, comme c'est le cas pour une transition de phase ordinaire (c'est en particulier le cas pour une transition solide-liquide). Une réponse satisfaisante à cette question a été donnée par G. Caginalp qui a montré que la raison pour laquelle on néglige les modes supérieurs de Fourier vient du fait que la longueur de transition dans le paramètre d'ordre est très petite comparée aux échelles macroscopiques pertinentes (voir [12]).

G. Caginalp a ainsi proposé, en considérant la théorie de transition de phase de Ginzburg-Landau (voir [11]), le modèle de champ de phase suivant (voir [1] et [12]) :

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} + \rho \frac{\ell}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = K \Delta T, \tag{1.6}$$

$$\epsilon^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta \phi - f'(\phi) + \epsilon [s] \sigma^{-1} g'(\phi)(T - T_E),\ \epsilon, \xi > 0, \tag{1.7}$$

où, typiquement,

$$f(s) = \frac{1}{8}(s^2 - 1)^2,\ g(s) = s - \frac{s^3}{3}.$$

Ici, l'interface $\Gamma_\epsilon(t)$ est définie par

$$\Gamma_\epsilon(t) = \{x \in \Omega, \phi(t, x) = 0\}.$$

1.2 Dérivation du modèle de Caginalp

On commence par rappeler le problème classique de Stefan

$$\rho c_m \frac{\partial T}{\partial t} = K \Delta T,\ \text{dans } \Omega \setminus \Gamma(t), \tag{1.8}$$

$$\rho \ell \upsilon = K \nu . [\nabla T],\ \text{sur } \Gamma(t), \tag{1.9}$$

$$T - T_E = 0,\ \text{sur } \Gamma(t). \tag{1.10}$$

Nous allons poser $u = T - T_E$ (u est ainsi la température relative), d'où

$$\Gamma(t) = \{x \in \Omega, u(t, x) = 0\}.$$

En outre, $u < 0$ correspond à la phase solide, alors que $u > 0$ correspond à la phase liquide. On a vu aussi que pour résoudre le problème de Stefan, on peut introduire la fonction

$$H(u) = \rho c_m u + \rho \frac{\ell}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

où

$$\begin{cases} \varphi = 1 & \text{si} \quad u > 0, \\ \varphi = -1 & \text{si} \quad u < 0. \end{cases}$$

Par suite, l'équation de la chaleur (1.8) et celle de la chaleur latente (1.9) sont équivalentes (dans un sens faible) à l'équation de la chaleur généralisée

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \Delta u.$$

On suppose maintenant qu'on a la relation plus précise de l'interface (au lieu de $u = 0$)

$$u = -\frac{\sigma}{[s]} \kappa - \beta v \text{ sur } \Gamma(t), \ \beta \geq 0. \tag{1.11}$$

Remarque 1.2. *La relation de Gibbs-Thomson définie par* (1.11) *est basée sur l'épaisseur finie de l'interface, c'est-à-dire sur une interface diffuse, à savoir que la transition de la phase solide vers la phase liquide se fait de façon continue.*

On considère ainsi la fonction enthalpie H,

$$H(u, \phi) = \rho c_m u + \rho \frac{\ell}{2} \phi, \tag{1.12}$$

où ϕ n'est plus une fonction étagée, et on suppose que l'on a encore l'équation de la chaleur généralisée

$$\frac{\partial H}{\partial t} = K \Delta u. \tag{1.13}$$

Nous allons maintenant déterminer l'équation constitutive du paramètre d'ordre ϕ en se basant sur la théorie de Ginzburg-Landau et, plus précisément, en considérant l'énergie totale libre de Ginzburg-Landau suivante :

$$\psi_{GL}(\phi, \nabla \phi, u) = \int_\Omega \Big(\frac{\epsilon^2}{2} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) - \epsilon [s] \sigma^{-1} g(\phi) u \Big) dx, \ \epsilon > 0. \tag{1.14}$$

Ici, f est le potentiel double puits habituel (dont chaque puits correspond aux phases pures) ; typiquement, on prend

$$f(s) = \frac{1}{8}(s^2 - 1)^2, \tag{1.15}$$

mais on peut également considérer le potentiel logarithmique suivant :

$$f(s) = k(1+s)\ln(1+s) + k(1-s)\ln(1-s) - \frac{\lambda}{2} s^2, \ 0 < \lambda < k, \tag{1.16}$$

potentiel qui est pertinent en thermodynamique.

De plus, un choix typique pour g est

$$g(s) = s - \frac{s^3}{3}, \tag{1.17}$$

bien que l'on puisse également considérer une fonction g linéaire, à savoir,

$$g(s) = \lambda s, \ \lambda > 0. \tag{1.18}$$

A l'équilibre (c'est-à-dire, dans le cas stationnaire), la fonction ϕ est celle qui minimise l'énergie libre ψ_{GL}, ce qui donne l'équation d'Euler-Lagrange

$$\epsilon^2 \Delta\phi - f'(\phi) + \epsilon[s]\sigma^{-1} g'(\phi) u = 0, \tag{1.19}$$

associée à l'équation stationnaire de la chaleur

$$\Delta u = 0. \tag{1.20}$$

Lorsque le système n'est pas à l'équilibre, la fonction ϕ ne minimise plus l'énergie libre et on admet plutôt une relaxation dynamique de la forme

$$\tau \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\delta \psi_{GL}}{\delta \phi}, \tag{1.21}$$

où $\tau > 0$ est un paramètre de relaxation et $\frac{\delta}{\delta\phi}$ représente une dérivée variationnelle. En posant $\tau = \epsilon^2 \xi$, $\xi > 0$ (ce qui est l'échelle correcte si l'on tient à avoir une interface limite précise lorsque $\epsilon \to 0$, voir [13], [14] et [15]), on obtient le système ci-dessous :

$$\epsilon^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta\phi - f'(\phi) + \epsilon[s]\sigma^{-1} g'(\phi) u, \tag{1.22}$$

$$\rho c_m \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\ell}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = K \Delta u. \tag{1.23}$$

Maintenant, on peut voir que l'équation de la chaleur généralisée (1.13) est obtenue en considérant la loi classique de Fourier de la conduction de chaleur. Plus précisément, on a

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -divq, \tag{1.24}$$

où q est le vecteur flux thermique, et, en supposant la loi de Fourier, à savoir,

$$q = -K \nabla u, \tag{1.25}$$

on trouve (1.13).

1.2.1 Généralisations du système de Caginalp

La loi de Fourier présente un inconvénient majeur, à savoir elle prédit que les signaux thermiques se propagent à une vitesse infinie, ce qui viole le principe de causalité (le fameux « paradoxe de la conduction de la chaleur », voir [16]).

Une possibilité pour corriger ce défaut est de considérer, au lieu de la loi de Fourier, celle de Maxwell-Cattaneo, à savoir,

$$(1+\eta\frac{\partial}{\partial t})q = -K\nabla u,\ \eta > 0. \tag{1.26}$$

En écrivant

$$(1+\eta\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial H}{\partial t} = -div\Big((1+\eta\frac{\partial}{\partial t})q\Big),$$

on a alors

$$\eta\rho c_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho c_m\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = -\eta\rho\frac{\ell}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho\frac{\ell}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}, \tag{1.27}$$

ce qui est une équation de type équation des ondes.

On peut également considérer la généralisation de la loi de Maxwell-Cattaneo suivante (voir [17]) :

$$(1+\eta\frac{\partial}{\partial t})q = -K\nabla u - K^*\nabla\frac{\partial u}{\partial t},\ K^* > 0. \tag{1.28}$$

Dans ce cas, l'équation pour la température relative u s'écrit

$$\eta\rho c_m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho c_m\frac{\partial u}{\partial t} - K^*\Delta\frac{\partial u}{\partial t} - K\Delta u = -\eta\rho\frac{\ell}{2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \rho\frac{\ell}{2}\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{1.29}$$

Une autre possibilité (voir [18]) est de se baser sur un traitement alternatif pour une théorie thermo-mécanique de milieu déformable proposée par A.E. Green et P.M. Naghdi (voir [19]) ; cette théorie est basée sur une loi d'équilibre pour l'entropie plutôt que sur l'inégalité d'entropie habituelle. Ces derniers ont proposé trois différentes théories, en ce qui concerne la conduction de la chaleur, qu'ils ont appelées type I, type II et type III, respectivement. En particulier, lorsque le type I est linéarisé, on recouvre la théorie classique basée sur la loi de Fourier. Les versions linéarisées des deux autres théories donnent les équations constitutives suivantes :

$$q = -K\nabla\alpha,\ K > 0 \text{ (type } II) \tag{1.30}$$

et

$$q = -K\nabla\alpha - K^*\nabla u,\ K, K^* > 0 \text{ (type } III), \tag{1.31}$$

où

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau + \alpha_0, \tag{1.32}$$

est appelé la variable déplacement thermique (donc, $u = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$). On obtient, en notant que $H = \rho c_m\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \rho\frac{\ell}{2}\phi$ dans ce cas, les équations suivantes pour α :

$$\rho c_m \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - K\Delta\alpha = -\rho \frac{\ell}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{1.33}$$

pour le type II et

$$\rho c_m \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - K^* \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - K\Delta\alpha = -\rho \frac{\ell}{2} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \tag{1.34}$$

pour le type III. En outre, on réécrit l'équation pour le paramètre d'ordre sous la forme

$$\epsilon^2 \xi \frac{\partial \phi}{\partial t} = \epsilon^2 \Delta\phi - f'(\phi) + \epsilon[s]\sigma^{-1} g'(\phi) \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \tag{1.35}$$

1.3 Présentation de la thèse

Cette thèse de doctorat fait suite à des travaux de recherche que j'ai menés au sein de l'équipe d'Equations aux Dérivées Partielles et Applications (EDPA) au Laboratoire des Mathématiques et Applications (LMA) de l'Université de Poitiers. Elle est constituée de deux parties :

1. Une généralisation de type Cattaneo du modèle de champ de phase de Caginalp ;
2. Une généralisation de type Chen-Gurtin d'un modèle de champ de phase de type Caginalp.

La première partie se compose de trois chapitres, à savoir,
- **Chapitre 3** : Système de champ de phase de type Caginalp avec un potentiel à croissance polynomiale ;
- **Chapitre 4** : Système de champ de phase de type Caginalp avec un terme non linéaire logarithmique ;
- **Chapitre 5** : Attracteurs pour un modèle de champ de phase de type Caginalp dans un domaine non borné.

La seconde partie se compose également de trois chapitres,
- **Chapitre 6** : Problème de champ de phase de type Caginalp avec un couplage linéaire ;
- **Chapitre 7** : Problème de champ de phase conservatif avec un couplage linéaire ;
- **Chapitre 8** : Problème de champ de phase de type Caginalp avec un couplage non linéaire.

1.4 Présentation des résultats

Dans un premier temps, on a considéré le modèle de champ de phase suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1.36}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1.37}$$

où Ω est le domaine occupé par le matériau (domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, d entier), Δ est le Laplacien et f est un potentiel régulier, plus précisément à croissance polynomiale. Les fonctions inconnues u et α sont le paramètre d'ordre et la variable déplacement thermique, respectivement.

(a) Pour f régulier, typiquement $f(s) = \sum_{i=1}^{2p+1} a_i x^i$, $a_{2p+1} > 0$,

1. on a établi des résultats d'existence et d'unicité de solutions à l'aide des méthodes classiques. Nous avons également pu étudier le comportement asymptotique de solutions en termes d'attracteurs de dimension fractale finie. Enfin, pour motiver l'étude de (1.36)-(1.37) dans un domaine non borné, on s'est intéressé au comportement spatial de solutions dans un cylindre semi-infini.
2. Dans le cas où le domaine Ω est non borné, $\Omega = \mathbb{R}^3$ dans notre cas, nous avons été amené à modifier légèrement le modèle de départ en introduisant un terme supplémentaire dans l'équation pour la variable déplacement thermique (1.37), à savoir $\lambda\alpha$, où $\lambda > 0$. Cette modification nous a permis d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité de solutions, mais également l'existence d'un attracteur global.

(b) Pour f singulier, typiquement logarithmique, à savoir $f(s) = k_1 \ln(1+s) - k_1 \ln(1-s) - k_0 s$, avec $s \in (-1, +1)$ et $0 < k_1 < k_0$, une des difficultés a été de prouver que le paramètre d'ordre u reste dans l'intervalle $(-1, +1)$. Nous avons obtenu des résultats d'existence et d'unicité de solutions avant d'étudier le comportement asymptotique de celles-ci.

Dans un second temps, on s'est intéressé au système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = g(u)(\varphi - \Delta\varphi),\ x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1.38}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = -g(u)\frac{\partial u}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1.39}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné, $d = 2$ ou 3, Δ est le Laplacien, f est un potentiel à croissance polynomiale et g est une fonction non linéaire (typiquement $g(s) = c' - cs^2),\ c > 0,\ c' \geq 0$). Les fonctions inconnues u et φ représentent respectivement le paramètre d'ordre et la température de conduction de chaleur.

Pour ce modèle, nous avons regardé deux cas :

(a) le cas où la fonction g est une fonction constante, plus précisément, nous avons considéré le cas $g = 1$, nous conduisant ainsi au modèle plus simple suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \varphi - \Delta\varphi,\ x \in \Omega,\ t \geq 0, \tag{1.40}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t},\ x \in \Omega,\ t \geq 0. \tag{1.41}$$

Nous avons obtenu le caractère bien posé du problème, puis nous avons étudié le comportement asymptotique de solutions (existence d'attacteurs globaux de dimension finie) et le comportement spatial de celles-ci dans un cylindre semi-infini :

1. avec des conditions aux bords de type Dirichlet homogènes
2. avec des conditions aux bords de type Neumann homogènes

Dans le second cas, une loi de conservation apparaît, laquelle loi nous amène à analyser les propriétés dissipatives du système dans des sous-espaces de l'espace des phases. En effet, une telle analyse n'est plus possible sur l'espace des phases tout entier.

(b) le cas où la fonction g est non constante, ce qui revient à traiter le problème (1.38)-(1.39). Nous avons également eu des résultats théoriques (existence et unicité de solutions, comportement asymptotique, comportement spatial des solutions).

1.5 Plan de la thèse

Le deuxième chapitre a pour objectif d'introduire les notions de base d'analyse fonctionnelle et des systèmes dynamiques dissipatifs ainsi que de rappeler des résultats classiques sans en donner les démonstrations, résultats qui seront par la suite appliqués tout au long de ce document.

Les troisième, quatrième et cinquième chapitres, qui constituent la première partie, ont pour objet une généralisation de type Maxwell-Cattaneo du modèle de champ de phase de Caginalp.

Tout d'abord, on propose une introduction qui donne les motivations physiques du modèle qui fait l'objet de l'étude.

Par suite, on se propose dans le troisième chapitre, de considérer un potentiel régulier, puis de faire une étude théorique (existence, unicité, comportement asymptotique, comportement spatial) du modèle.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude du modèle associé à un potentiel singulier, typiquement un potentiel logarithmique.

Le cinquième chapitre est dédié à l'étude du modèle en domaine non borné ; on s'intéresse notamment au comportement asymptotique des solutions.

Les sixième, septième et huitième chapitres composant la seconde partie, sont consacrés à une généralisation d'un modèle de champ de phase de type Caginalp basée sur la théorie de la conduction de chaleur introduite par Gurtin et Chen.

On commence par un propos introductif, donnant la dérivation du modèle.

Le sixième chapitre étudie un modèle de champ de phase avec un couplage linéaire. On propose une étude théorique (existence et unicité, comportement asymptotique et spatial des solutions) du modèle.

Le septième chapitre reprend le Chapitre 6 avec des conditions aux limites de Neumann. On obtient des résultats d'existence et d'unicité de solutions. On analyse aussi le comportement asymptotique et spatial des solutions.

Le dernier chapitre quant à lui concerne un modèle de champ de phase avec un couplage non linéaire. On prouve dans ce cas que le problème est bien posé, Enfin, on regarde le comportement spatial de solutions dans un cylindre semi-infini, en supposant que de telles solutions existent.

Chapitre 2

Préliminaires et Rappels

Ce chapitre introductif a pour but de rappeler quelques notions et résultats utiles pour la suite.

2.1 Espaces et définitions de bases

Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_X$.

Définition 2.1. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'espace noté $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p \leq +\infty$ désigne l'espace de classes de fonctions $f : (a,b) \to X$ mesurables telles que*

$$\int_b^a \|f(t)\|_X^p dt < +\infty$$

et $L^\infty(a,b;X)$ celui des fonctions bornées presque sûrement sur (a,b). Autrement dit, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|f(t)\|_X \leq M, \ \ p.p.\ t \in (a,b).$$

Propriété 2.1. *Si $p < \infty$, alors*

$$f \mapsto \Big(\int_a^b \|f(s)\|_X^p ds \Big)^{1/p} = \|f\|_{L^p(a,b;X)};$$

sinon

$$f \mapsto \sup_{s \in (a,b)} \|f(s)\|_X = \|f\|_{L^\infty(a,b;X)},$$

est une norme sur $L^\infty(a,b;X)$ qui en fait un espace de Banach.

Propriété 2.2. *Soit X et Y deux espaces de Banach tel que X s'injecte de façon dense dans Y. Alors $L^p(a,b;X)$ est dense dans $L^p(a,b;Y)$ pour $1 \leq p < +\infty$.*

Remarque 2.1. *La Propriété 2.2 n'est pas vraie pour $p = +\infty$.*

Propriété 2.3. *Soit $1 < p < +\infty$. Si l'espace X est réflexif, alors $L^p(a,b;X)$ l'est également.*

Corollaire 2.1. *A partir d'une suite bornée, on peut extraire une sous suite faiblement convergente.*

2.1.1 Espaces duaux

Théorème 2.1. *Soit $(X, \|.\|_X)$ un espace de Banach et X' son espace dual. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec $1 \leq p, q < +\infty$. On considère l'application T définie par :*

$$\begin{aligned} L^q(a,b;X') &\to L^p(a,b;X) \\ f &\mapsto T(f)v = \int_a^b \langle f(t), v(t)\rangle_{X',X} dt. \end{aligned}$$

Alors T est un isomorphisme (une isométrie surjective) à valeur dans le dual de $L^p(a,b;X)$, noté $(L^p(a,b;X))'$.

Corollaire 2.2. *A la lumière du Théorème 2.1, on peut ainsi identifier $(L^p(a,b;X))'$ à $L^q(a,b;X')$.*

2.2 Inégalités et Injections

2.2.1 Inégalité de Young

Théorème 2.2. *Soit $1 < p < +\infty$. Soit q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $a, b \in (0, +\infty)$. Alors*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2.2.2 Inégalité de Hölder

Théorème 2.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert quelconque, $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Corollaire 2.3 (voir [20], [21] et [22])**.** *(Inégalités d'interpolation) Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, avec $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a l'inégalité suivante :*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta},$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

2.2.3 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$. On rappelle que l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont la dérivée au sens de distribution est également dans $L^2(\Omega)$. Sa norme naturelle est

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2)^{1/2}.$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est définit comme l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$. Lorsque Ω est suffisamment régulier, on peut montrer que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H^1(\Omega)$ s'annulant sur $\partial\Omega$.

Théorème 2.4. *(voir [20]) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, par exemple $\{(x_1, x_2, \cdots x_d), |x_1| \leq a\}, a > 0$. Alors il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω telle que :*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \leq c \int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx,$$

où $1 \leq p \leq +\infty$.

Cette inégalité peut être généralisée. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Notons $W^{1,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^p(\Omega)$ dont la norme suivante est finie :

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{1/p} < +\infty.$$

On définit maintenant l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ comme étant l'adhérence des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 2.5. *Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ borné dans une seule direction ou de mesure finie. Alors il existe une constante C dépendant de Ω et p telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \ \forall \ u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Remarque 2.2. *Une autre généralisation est l'inégalité de Poincaré-Wirtinger. Elle a l'avantage d'être valable pour toutes les fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$, et pas simplement celles qui s'annulent au bord.*

Théorème 2.6. *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^d$ de classe C^1 et de mesure finie, et soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors il existe une constante C telle que*

$$\|u - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}.$$

En particulier, pour $p = 2$, on a le résultat suivant :

Théorème 2.7. *(voir [23]) Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$. Il existe une constante $c > 0$ qui ne dépend que de Ω telle que :*

1. $$\|u(x) - < u(x) > \| \leq c \|\nabla u(x)\|, \ \forall \ u \in H^1(\Omega);$$

2. $$\|u(x) - < u(x) > \|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla u(x)\|, \ \forall \ u \in H^1(\Omega);$$

3. *De plus, si Ω est convexe ou si $\partial\Omega$ est suffisamment régulier, disons par exemple, C^2, on a*

$$\|u(x) - < u(x) > \|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\Delta u(x)\|, \ \forall \ u \in H^2(\Omega),$$

où

$$< u >:= \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx.$$

2.2.4 Injections de Sobolev

Théorème 2.8. *(voir [20], [24] et [25]) – Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert de classe C^1. Soit $n \geq 1$ un entier et $p \in [0, +\infty[$ un reél. Alors*

1. *si $1 \leq p \leq \frac{d}{n}$, on a $W^{n,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\ q \in [1, \overline{p}],\quad \overline{p} = \frac{dp}{d-np}$;*
2. *si $p = \frac{d}{n}$, on a $W^{n,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall\ 1 \leq q \leq +\infty$;*
3. *si $p > \frac{d}{n}$, on a $W^{n,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, avec $0 \leq k \leq n - \frac{d}{n}$. En particulier, $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ si $d \leq 3$. Les inclusions ci-dessus sont toutes compactes pour $n = 1$.*

Remarque 2.3. *Sans l'hypothèse de régularité sur Ω, les injections restent valables localement. Elles restent globalement vraies si on remplace $W^{n,p}(\Omega)$ par $W_0^{n,p}(\Omega)$.*

2.2.5 Inégalités d'Agmon

Théorème 2.9. *(voir [23]) – Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de classe C^d. Il existe une constante $c > 0$ dépendant de Ω telles que :*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \begin{cases} c\|u\|^{1/2}_{H^{(d/2)-1}(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^{(d/2)+1}(\Omega)},\ \forall\ u \in H^{(d/2)+1}(\Omega) & \text{si } n \text{ est pair}, \\ c\|u\|^{1/2}_{H^{(d-1)/2}(\Omega)}\|u\|^{1/2}_{H^{(d+1)/2}(\Omega)},\ \forall\ u \in H^{(d+1)/2}(\Omega) & \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$$

2.3 Lemmes de Gronwall

Lemme 2.1. *(de Gronwall). Soit φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité*

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)y(s)ds,\ \forall\ t \in [a, b].$$

Alors

$$y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \varphi(s)\psi(s)exp\Big(\int_s^t \psi(u)du\Big)ds,\ \forall\ t \in [a, b].$$

Lemme 2.2. *(de Gronwall uniforme (voir [23])). Soit g, h et y trois fonctions positives localement intégrables sur $(t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, telles que y' est localement intégrable sur $(t_0, +\infty)$, où y' est la dérivée de y par rapport à t. On suppose que*

$$y' \leq gy + h,\ \forall\ t \geq t_0, \tag{2.1}$$

et que

$$\int_t^{t+r} g(s)ds \leq a_1(r), \int_t^{t+r} h(s)ds \leq a_2(r),$$

$$\int_t^{t+r} y(s)ds \leq a_3(r),\ \forall\ t \geq t_0,$$

où $r > 0$ est un nombre donné. Alors,

$$y(t + r) \leq (\frac{a_3}{r} + a_2)\exp(a_1),\ \forall\ t \geq t_0. \tag{2.2}$$

2.4 Attracteurs et systèmes dynamiques

Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$. On considère un semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, défini de E dans lui-même,

$$S(t) : E \to E, \ \forall\ t \geq 0, \tag{2.3}$$

$$S(0) = Id, \tag{2.4}$$

$$S(t+s) = S(t) \circ S(s), \ \forall\ t, s \geq 0, \tag{2.5}$$

où Id est l'opérateur identité. Nous aurons besoin que le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, soit continu. C'est pourquoi, on prend $S(t)$ continu de E dans lui-même, $\forall\ t \geq 0$.

Définition 2.2. *Un ensemble $X \subset E$ est invariant pour le semi-groupe $S(t)$ si*

$$S(t)X = X, \ \forall\ t \geq 0.$$

Si $S(t)X \subset X$, $\forall\ t \geq 0$ (respectivement $X \subset S(t)X, \forall\ t \geq 0$), on dit que X est positivement invariant (respectivement X est négativement invariant).

Définition 2.3. *Soit $u_0 \in E$. L'ensemble oméga-limite de u_0 est l'ensemble*

$$\omega(u_0) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)u_0},$$

où l'adhérence est prise dans E. De la même façon, pour tout ensemble borné B de E, l'ensemble oméga-limite de B est l'ensemble

$$\omega(B) := \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B}.$$

Remarque 2.4. *L'ensemble $\omega(B)$ est caractérisé par :*

$$x \in \omega(B) \Longleftrightarrow \exists \text{ une suite } \{x_k, k \in \mathbf{N}\}, x_k \in B, \forall\ k \in \mathbf{N}$$

et

$$t_k \to +\infty \text{ lorsque } k \to +\infty \text{ tels que } S(t_k)x_k \to x \text{ lorsque } k \to +\infty.$$

Proposition 2.1. *(voir, [23], [26, Proposition 2.5]) On suppose que $B \subset E$, $B \neq \emptyset$, et qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)B$ est relativement compact dans E. Alors $\omega(B)$ est non vide, compact et invariant.*

Définition 2.4. *Un ensemble X satisfait la propriété d'attraction si, pour tout $B \subset E$ borné,*

$$dist_E(S(t)B, X) \to 0 \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

où $dist_E$ est la semi-distance de Hausdorff entre les ensembles, définie par

$$dist_E(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|_E.$$

Définition 2.5. *1. Un ensemble borné $\mathcal{B}_0 \subset E$ est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, si pour tout borné B de E, il existe $t_0 = t_0(B)$ tel que $t \geq t_0$ implique que $S(t)B \subset \mathcal{B}_0$.*

2. Un ensemble $K \subset E$ est attractif si, pour tout borné B de E

$$\lim_{t\to+\infty} dist_E(S(t)B, K) = 0,$$

où $dist_E$ est la semi-distance de Hausdorff entre les ensembles, définie comme ci-dessus.

Définition 2.6. *Le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, est dissipatif dans E s'il possède un ensemble borné absorbant $B \subset E$. En pratique, cette propriété est habituellement vérifiée en prouvant une estimation dissipative (au sens mathématique du terme) de la forme*

$$\|S(t)u_0\|_E \leq Q(\|u_0\|_E)e^{-\alpha t} + C_*, \ \forall\ t \geq 0,$$

où Q est une fonction monotone et les constantes positives α et C_* sont indépendantes de $u_0 \in E$.

Définition 2.7. *Soit B un sous-ensemble borné de E. La mesure de non compacité de Kuratowski de B est la quantité*

$$\begin{aligned}\kappa(B) := \ & \inf\{d, B \text{ a un recouvrement fini de boules de } E \\ & \text{dont les diamètres sont plus petits que } d\}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Définition 2.8. *On dit que le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, est asymptotiquement compact si, pour tout ensemble borné $B \subset E$, la mesure de non compacité de Kuratowski de l'image $S(t)B$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, c'est-à-dire*

$$\lim_{t\to+\infty} \kappa(S(t)B) = 0, \ \forall \ \text{ borné } B \text{ dans } E\ .$$

Définition 2.9. *Un ensemble $\mathcal{A} \subset E$ est un attracteur global pour le semi-groupe $S(t)$ sur E si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. *c'est un sous-ensemble compact de E ;*
2. *il est invariant, $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}\ \forall\ t \geq 0$;*
3. *c'est un ensemble attractif pour $S(t)$ sur E.*

Remarque 2.5. *La propriété d'invariance satisfaite par l'attracteur global $\mathcal{A}$ nous assure son unicité (s'il existe). De plus, $\mathcal{A}$ est le plus petit (pour l'inclusion) ensemble fermé qui satisfait la propriété d'attraction et apparaît ainsi comme un objet qui permet de cerner le comportement asymptotique du système.*

Théorème 2.10. *(voir [26, Théorème 2.19.]) On suppose que le semi-groupe $S(t)$ est continu, dissipatif (c-à-d., il possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_0$), et asymptotiquement compact (au sens de la Définition 2.8). Alors, il possède l'attracteur global connexe $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B}_0)$.*

2.5 Dimension de l'attracteur global

La dimension de l'attracteur global est une propriété géométrique intéressante dans la mesure où elle nous donne des informations sur le nombre de paramètres physiques ou de degrés de liberté définissant le système dynamique considéré. Nous nous intéressons ici aux dimensions de recouvrement telles que la dimension de Hausdorff et la dimension fractale.

Définition 2.10. *Soit $X \subset E$ un espace relativement compact. Pour $\epsilon > 0$, soit $N_\epsilon(X)$ le nombre minimal de boules de rayon ϵ nécessaires pour recouvrir X. Alors la dimension fractale de X est la quantité*

$$dim_F(X) := \lim_{\epsilon \to 0^+} \sup \frac{\ln N_\epsilon(X)}{\ln(\frac{1}{\epsilon})}$$

(noter que $dim_F(X) \in [0, +\infty]$). En outre, la quantité $\mathcal{H}_\epsilon(X) := \ln N_\epsilon(X)$ est appelée ϵ-entropie de Kolmogorov de X.

Une façon de démontrer que l'attracteur global $\mathcal{A}$ existe et est de dimension fractale finie est de prouver par exemple l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$. La notion d'attracteur exponentiel, encore appelé ensemble inertiel, fut introduite par Eden, Foias, Nicolaenko, et Temam dans [27], dans le but de corriger certains défauts de l'attracteur global, notamment la vitesse d'attraction et la robustesse.

Définition 2.11. *Un ensemble compact $\mathcal{M}$ est un attracteur exponentiel pour le semi-groupe $S(t)$ si :*

(i) *il est de dimension fractale finie, $dim_F(\mathcal{M}) < +\infty$;*

(ii) *il est positivement invariant, $S(t)\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, $\forall\ t \geq 0$;*

(iii) *il attire de façon exponentielle les sous-ensembles bornés de E au sens suivant :*

$$\forall\ B \subset E \text{ borné },\ dist_E(S(t)B, \mathcal{M}) \leq Q(\|B\|_E)e^{-ct},\ t \geq 0,$$

où la constante positive c et la fonction monotone Q sont indépendantes de B, et $dist_E$ est donnée par la Définition 2.5.

Remarque 2.6. **(a)** *Un attracteur exponentiel lorsqu'il existe n'est pas unique, cela est dû à la propriété d'invariance positive de celui-ci. Ainsi, l'existence d'un attracteur exponentiel implique en fait l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels.*

(b) *La dimension finie de l'attracteur global signifie que la dynamique du système peut être décrite par un nombre fini de degrés de liberté, et ce en dépit du fait que l'espace des phases initial est de dimension infinie (voir à ce propos, [28]).*

(c) *Il est à noter que l'attracteur global peut être extrêmement sensible aux perturbations aussi minimes soient elles. Cela est liée à la vitesse d'attraction de trajectoires de l'attracteur global qui peut être lente, contrairement à l'attracteur exponentiel qui lui, est robuste face aux perturbations (voir [26] pour plus de détails).*

Première partie

Généralisation de type Maxwell-Cattaneo du modèle de champ de phase de Caginalp

2.6 Introduction

Cette partie a pour objet l'étude d'une généralisation du système de champ de phase de Caginalp qui décrit certains phénomènes de transition de phase. Cette généralisation est obtenue grâce à la loi de Maxwell-Cattaneo ou plutôt une généralisation de celle-ci de la conduction de chaleur.

Tout d'abord, le modèle est analysé sur un domaine borné de dimension 2 ou 3 avec des conditions aux bords de Dirichlet homogènes. On considère un potentiel régulier avec une croissance polynomiale dans le Chapitre 3 (certaines restrictions sur le degré sont nécessaires en dimension 3). Au Chapitre 4, on considère un potentiel non régulier, typiquement logarithmique. L'existence, l'unicité, et la régularité de solutions sont établies, mais également l'existence de l'attracteur global. En particulier, dans le Chapitre 3, on montre que l'attracteur global est de dimension fractale finie, en prouvant l'existence d'attracteurs exponentiels, et on étudie le comportement spatial des solutions lorsque le domaine spatial est un cylindre semi-infini de dimension 3.

Ensuite, le modèle est analysé sur un domaine non borné, $\mathbb{R}^3$ en l'occurrence. On prouve également l'existence, l'unicité de solutions puis l'existence de l'attracteur global.

2.6.1 Dérivation du modèle

Dans cette partie, nous sommes concernés par le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \text{ dans } \Omega, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ dans } \Omega. \tag{2.8}$$

Le système défini par (2.7)-(2.8) provient de la théorie de transition de phase de Ginzburg-Landau (voir [1], [11] et [12]). Plus précisément, on considère l'énergie libre totale de Ginzburg-Landau donnée comme suit :

$$\Psi(u, \theta) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) - u\theta - \frac{1}{2}\theta^2) dx, \tag{2.9}$$

où $\theta := \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ est la température relative et Ω est le domaine occupé par la substance subissant la transition de phase. On introduit l'enthalpie H définie par

$$H = -\partial_\theta \Psi, \tag{2.10}$$

où ∂ désigne une dérivée variationnelle, ce qui donne

$$H = u + \theta. \tag{2.11}$$

Les équations constitutives de u et θ sont données respectivement par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\partial_u \Psi \tag{2.12}$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \mathrm{div} q = 0, \tag{2.13}$$

où q représente le vecteur flux thermique. Noter que le modèle de champ de phase de Caginalp est obtenu en considérant la loi classique de Fourier (voir l'introduction générale). Par contre, nous considérons dans notre cas, une généralisation de la loi de Maxwell-Cattaneo (les constantes physiques étant prises égalent à 1), à savoir

$$(1 + \frac{\partial}{\partial t})q = -\nabla \frac{\partial \theta}{\partial t} - \nabla \theta. \tag{2.14}$$

De telles considérations ont été introduites pour corriger la caractéristique invraisemblable prédite par la loi classique de Fourier, à savoir que les signaux thermiques se propagent avec une vitesse infinie (« le paradoxe de la conduction de la chaleur »), ce qui nous donne compte tenu de (2.13),

$$(1 + \frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial H}{\partial t} - \Delta\theta - \Delta \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \tag{2.15}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{2.16}$$

En intégrant (2.16) entre 0 et t, on obtient

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u + g, \tag{2.17}$$

où

$$g = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(0) + \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) + \frac{\partial u}{\partial t}(0) + u(0). \tag{2.18}$$

Remarque 2.7. *Afin d'obtenir des estimations dissipatives, on prend* $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}(0)$ *telle que* $g = 0$*, ce qui revient à considérer à la place de* (2.17)*, l'équation*

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -\frac{\partial u}{\partial t} - u. \tag{2.19}$$

En associant à (2.7)-(2.8), les conditions aux bords de Dirichlet homogènes

$$u = \alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

et les conditions initiales

$$u_{/t=0} = u_0,\ \alpha_{/t=0} = \alpha_0,\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}_{/t=0} = \alpha_1.$$

On est amené à traiter le problème aux limitites suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \text{ dans } \Omega, \\
\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta\alpha &= -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ dans } \Omega, \\
u = \alpha &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\
u_{/t=0} = u_0,\ \alpha_{/t=0} &= \alpha_0,\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}_{/t=0} = \alpha_1.
\end{aligned}$$

Remarque 2.8. *Dans le Chapitre 5, on considère une version modifiée du modèle étudié dans les Chapitres 3 et 4, en introduisant un terme additionnel, à savoir* $\lambda\alpha$, $\lambda > 0$, *dans l'équation pour la variable déplacement thermique* α. *Cette légère modification est liée au caractère non borné du domaine et nous permet d'obtenir les propriétés dissipatives du système.*

Chapitre 3

Système de champ de phase de type Caginalp avec un potentiel à croissance polynomiale

On considère dans ce chapitre une généralisation de type Cattaneo du modèle de champ de phase de Caginalp (cf, par exemple, [1], [18], [2], [29], [30] et les références qui y sont citées pour des détails aussi bien sur le modèle de Caginalp que sur ses généralisations). On s'interesse au comportement asymptotique de solutions du problème pour des temps grand ; typiquement on prouve l'existence d'attracteurs pour le système. Auparavant, nous montrons que le problème ainsi défini est bien posé, à savoir, l'existence et l'unicité de la solution et la continuité par rapport aux données initiales. Nous étudions également le comportement spatial des solutions dans un cylindre semi-infini (cf. par exemple, [29] et [31] où ces questions sont abordées).

Le problème se présente comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, && (3.1)\\
\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -u - \frac{\partial u}{\partial t}, && (3.2)\\
u = \alpha &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, && (3.3)\\
u|_{t=0} = u_0, \alpha|_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}|_{t=0} &= \alpha_1, && (3.4)
\end{aligned}$$

où u est le paramètre d'ordre ou champ de phase, α représente la variable de déplacement thermique, c'est-à-dire une primitive de la température relative notée θ ($\alpha(t) := \int_0^t \theta(\tau)d\tau + \alpha_0$), $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2 \text{ ou } 3)$ est un domaine borné régulier, $\partial\Omega$ désigne le bord régulier, disons de classe C^2 de Ω.

3.1 Cadre abstrait pour la résolution.

On introduit les espaces de Hilbert ci-dessous :

$$H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega) \text{ et } W = H^2(\Omega).$$

On note $(.,.)$ et $((.,.))$ les produits scalaires de H et V ; $\|.\|$ et $\|.\|_V$ désignent les normes associées. Le symbole $\langle .,. \rangle$ désigne le produit de dualité entre V' et V. On identifie H et H' (via le théorème de Riesz), où H' est l'espace dual de H. On a alors

$$V \hookrightarrow\hookrightarrow H \hookrightarrow V',$$

avec les injections continues et denses. En particulier, la première injection, à savoir $V \hookrightarrow\hookrightarrow H$, est compacte (via le théorème de Rellich-Kondrachoff). Nous considérons, dans le cadre de notre problème, l'espace des phases suivant :

$$\Phi = V \times V \times H,$$

muni de la norme $\|.\|_\Phi$ définie de la manière suivante :

pour tout $(x, y, z) \in \Phi$,

$$\|(x, y, z)\|_\Phi = \|x\|_V + \|y\|_V + \|z\|.$$

Hypothèses sur le potentiel f : - On suppose que :

$$f \text{ est de classe } C^1, \tag{3.5}$$
$$f(0) = 0, \tag{3.6}$$
$$-c_0 \leq F(s) \leq f(s)s + c_1,\ c_0, c_1 \geq 0,\ s \in \mathbb{R}, \tag{3.7}$$

où $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$,

$$|f'(s)| \leq c_2(|s|^{2p} + 1),\ c_2 > 0,\ s \in \mathbb{R},\ p \geq 0, \tag{3.8}$$
$$f'(s) \geq -c_3,\ c_3 \geq 0,\ s \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

3.1.1 Formulation faible.

Pour tout $v \in V$, en prenant le produit scalaire dans H des équations (3.1)-(3.2) avec v, on obtient :

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle + ((u, v)) + (f(u), v) = \langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, v \rangle, \tag{3.10}$$
$$\langle \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, v \rangle + \langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, v \rangle + ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, v)) + ((\alpha, v)) = -(u, v) - \langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \rangle. \tag{3.11}$$

on associe à (3.10)-(3.11) les egalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} u(0) = u_0 & \text{dans } H, \\ \alpha(0) = \alpha_0 & \text{dans } V, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1 & \text{dans } H. \end{array} \tag{3.12}$$

Définition 3.1. *Pour tout $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \Phi$. Un triplet $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ est dit solution faible de (3.1)-(3.4) s'il satisfait la formulation faible (3.10)-(3.12) de (3.1)-(3.4) et $u \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$, $\alpha \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; V)$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in C([0, T]; H) \cap L^2(0, T; V)$.*

3.2 Solutions et Semi-groupe.

Cette section est consacrée à l'existence et à l'unicité de solutions du problème (3.1)-(3.4). On a le résultat d'existence suivant :

Théorème 3.1. - *Soit* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \Phi$ *et* $F(u_0) < \infty$. *On suppose* (3.5) *et* (3.7) *vérifiées. Alors si* $p \leq 2$ *quand* $d = 3$ *dans* (3.8), *le problème* (3.1)-(3.4) *admet au moins une solution* $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ *avec* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V')$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$ *et* $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$.

Démonstration:
Nous appliquerons la méthode de Faedo-Galerkin en en donnant les grandes lignes.

Problème approché : L'opérateur $-\Delta$ associé aux conditions aux bords de Dirichlet homogènes de domaine $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est autoadjoint, borné et strictement positif ; il possède un inverse compact. On peut ainsi considérer une famille $\{\omega_j\}_{j \geq 1}$ de vecteurs propres de $-\Delta$ associés aux valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ qui forme une base orthonormée dans H et orthogonale dans V. En posant

$$V_m = Vect\{\omega_1, \cdots, \omega_m\}$$

et

$$\beta_m = \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \text{ (respectivement } \beta = \frac{\partial \alpha}{\partial t}).$$

On considère le problème approché suivant, écrit sous forme fonctionnelle :

$$\frac{du_m}{dt} - \Delta u_m + f(u_m) = \beta_m, \tag{3.13}$$

$$\frac{d\beta_m}{dt} + \beta_m - \Delta \beta_m - \Delta \alpha_m = -u_m - \frac{du_m}{dt}, \tag{3.14}$$

$$\begin{array}{l} u_m(0) = P_m u_0, \\ \alpha_m(0) = P_m \alpha_0, \\ \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} = \beta_m, \\ \beta_m(0) = P_m \alpha_1, \end{array} \tag{3.15}$$

où P_m est la projection orthogonale de H sur V_m pour le produit scalaire dans H, ce qui équivaut à

$$(\frac{\partial u_m}{\partial t}, v) + ((u_m, v)) + (f(u_m), v) = (\beta_m, v), \tag{3.16}$$

$$(\frac{\partial \beta_m}{\partial t}, v) + (\beta_m, v) + ((\beta_m, v)) + ((\alpha_m, v)) = -(u_m, v) - (\frac{\partial u_m}{\partial t}, v), \tag{3.17}$$

associé aux conditions (3.15).

Solution locale en temps : - On cherche des fonctions u_m, α_m et β_m sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} u_{jm}(t) \omega_j,$$

$$\alpha_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jm}(t) \omega_j$$

et

$$\beta_m(t) = \sum_{j=1}^{m} \beta_{jm}(t)\omega_j,$$

où les coefficients $u_{jm}(t)$, $\alpha_{jm}(t)$ et $\beta_{jm}(t)$ appartiennent à $C^1(\mathbb{R}^+)$ et vérifient

$$\begin{aligned} u_{jm}(0) &= (u_0, \omega_j),\ j = 1, \cdots, m, \\ \alpha_{jm}(0) &= (\alpha_0, \omega_j),\ j = 1, \cdots, m, \\ \beta_{jm}(0) &= (\alpha_1, \omega_j),\ j = 1, \cdots, m. \end{aligned}$$

Ainsi, résoudre (3.13)-(3.15) revient à trouver les coefficients u_{jm}, α_{jm} et β_{jm} tels que u_m, α_m et β_m vérifient (3.13)-(3.15). Pour ce faire, on pose

$$v = \omega_i,\ i = 1, \cdots, m \text{ dans (3.13)-(3.15) et on a :}$$

$$(\frac{\partial u_m}{\partial t}, \omega_i) + ((u_m, \omega_i)) + (f(u_m), \omega_i) = (\beta_m, \omega_i), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \beta_m}{\partial t}, \omega_i) + (\beta_m, \omega_i) + ((\beta_m, \omega_i)) + ((\alpha_m, \omega_i)) \\ = -(u_m, \omega_i) - (\frac{\partial u_m}{\partial t}, \omega_i). \end{aligned} \tag{3.19}$$

En notant que

$$(\frac{\partial u_m}{\partial t}, \omega_i) = u'_{im}(t) \tag{3.20}$$

et que

$$\begin{aligned} ((u_m, \omega_i)) &= (-\Delta u_m, \omega) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} u_{jm}(t)(-\Delta\omega_j, \omega_i) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} u_{jm}(t)(\lambda_j\omega_j, \omega_i) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_{jm}(t)(\omega_j, \omega_i) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_{jm}(t)\delta_{ij} \\ &= \lambda_i u_{im}(t), \end{aligned} \tag{3.21}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker défini comme suit :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon }, \end{cases} \tag{3.22}$$

puis que

$$(\frac{\partial \beta_m}{\partial t}, \omega_i) = \beta'_{im}(t), \tag{3.23}$$

$$(\beta_m, \omega_i) = \beta_{im}(t), \tag{3.24}$$

par analogie avec (3.21), on a que

$$((\beta_m, \omega_i)) = \lambda_i \beta_{im}(t) \tag{3.25}$$

et

$$((\alpha_m, \omega_i)) = \lambda_i \alpha_{im}(t). \tag{3.26}$$

Alors (3.18)-(3.20) s'écrit

$$(E.D.O.)\begin{cases} u'_{im}(t)+\lambda_i u_{im}(t)+(f(u_m),\omega_i)=\beta_{im}(t),\ i=1,\cdots,m,\\ \beta'_{im}(t)+\beta_{im}(t)+\lambda_i\beta_{im}(t)+\lambda_i\alpha_{im}(t)\\ =-u_{im}(t)-u'_{im}(t),\ i=1,\cdots,m,\\ \alpha'_{im}(t)=\beta_{im}(t),\ i=1,\cdots,m. \end{cases} \tag{3.27}$$

On s'est ramené à un système de $3m$ équations différentielles ordinaires que l'on peut écrire sous la forme :

$$y'=\varphi(y).$$

D'après le Théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution (u_m,α_m) sur un intervalle $(0,T_m)$, pour un certain $T_m>0$.

Solution globale en temps : – On considère maintenant une solution maximale définie sur $[0,T_m[$; nous allons prouver que $T_m=T$. Autrement dit, la solution locale en temps obtenue précédemment est globale en temps. Pour cela, on cherche des estimations à priori uniformes.

On multiplie (3.18) par u'_{im} et on somme sur $i=1,\cdots,m$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m\|^2+2\int_\Omega F(u_m)dx)+\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2=(\beta_m,\frac{\partial u_m}{\partial t}). \tag{3.28}$$

On multiplie (3.18) par u_{im} et on somme sur $i=1,\cdots,m$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2+\|\nabla u_m\|^2+\int_\Omega f(u_m)u_m dx=\langle\frac{\partial\alpha_m}{\partial t},u_m\rangle. \tag{3.29}$$

On multiplie maintenant (3.20) par β'_{im} et on somme sur $i=1,\cdots,m$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\beta_m\|^2+\|\beta_m\|^2+\|\nabla\beta_m\|^2+((\alpha_m,\beta_m))=-(\frac{\partial u_m}{\partial t}+u_m,\beta_m). \tag{3.30}$$

On rappelle que $\beta_m=\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}$. On obtient en sommant (3.28), (3.29) et (3.30)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u_m\|^2+\|\nabla u_m\|^2+\|\nabla\alpha_m\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2+2\int_\Omega F(u_m)dx\big)+\|\nabla u_m\|^2\\ &+\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+\int_\Omega f(u_m)u_m dx+\left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2=0.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Par l'hypothèse (3.7), on a :

$$F(u_m)-c_1\le f(u_m)u_m. \tag{3.32}$$

On déduit de (3.31)-(3.32) que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u_m\|^2+\|\nabla u_m\|^2+\|\nabla\alpha_m\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2+2\int_\Omega F(u_m)dx\big)+\|\nabla u_m\|^2\\ &+\int_\Omega F(u_m)dx+\left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2\le c_1|\Omega|.\end{aligned} \tag{3.33}$$

On multiplie (3.20) par α_{im} et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\alpha_m\|^2 + \|\nabla\alpha_m\|^2 + 2\langle\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}, \alpha_m\rangle) + \|\nabla\alpha_m\|^2 \\ = -(u_m, \alpha_m) - (\frac{\partial u_m}{\partial t}, \alpha_m) + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

En additionnant (3.33) et δ(3.34), avec $\delta > 0$ à préciser, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d\psi_m}{dt} + \|\nabla u_m\|^2 + \delta\|\nabla\alpha_m\|^2 + \int_\Omega F(u_m)dx + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2 \\ &\leq c_1|\Omega| - \delta(u_m, \alpha_m) - \delta(\frac{\partial u_m}{\partial t}, \alpha_m) + \delta\left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2, \end{aligned} \tag{3.35}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_m(t) =&\|u_m(t)\|^2 + \|\nabla u_m(t)\|^2 + \delta\|\alpha_m(t)\|^2 + (1+\delta)\|\nabla\alpha_m(t)\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t)\right\|^2 \\ &+ 2\delta\langle\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t), \alpha_m(t)\rangle + 2\int_\Omega F(u_m(t))dx, \end{aligned} \tag{3.36}$$

satisfait, en choisissant $\delta > 0$ tel que

$$1 - \delta > 0 \tag{3.37}$$

et

$$\begin{aligned} 2\delta\langle\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t), \alpha_m(t)\rangle + \delta\|\alpha_m(t)\|^2 + (1+\delta)\|\nabla\alpha_m(t)\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t)\right\|^2 \\ \geq c\big\{\|\alpha_m(t)\|^2 + \|\nabla\alpha_m(t)\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t)\right\|^2\big\}, \end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} &c\big(\|u_m(t)\|_V^2 + \|\alpha_m(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t)\right\|^2\big) \leq \psi_m(t) \\ &\leq c'\big(\|u_m(t)\|_V^2 + \|\alpha_m(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t)\right\|^2\big). \end{aligned} \tag{3.39}$$

On en déduit, grâce à l'inégalité de Hölder, au lemme de Poincaré et la condition (3.37), une inégalité de la forme :

$$\frac{d\psi_m}{dt} + \kappa\psi_m + c\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}\right\|^2 \leq c', \quad \kappa, c > 0 \text{ et } c' \geq 0. \tag{3.40}$$

En particulier, on écrit

$$\frac{d\psi_m}{dt} + \kappa\psi_m \leq c'. \tag{3.41}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (3.41) donne

$$\psi_m(t) \leq e^{-\kappa t}\psi_m(0) + \frac{c'}{\kappa}, \tag{3.42}$$

ce qui implique en particulier que

$$\psi_m(t) \leq \psi_m(0) + \frac{c'}{\kappa}, \tag{3.43}$$

avec

$$\begin{aligned}\psi_m(0) =&\|u_m(0)\|^2 + \|\nabla u_m(0)\|^2 + \|\alpha_m(0)\|^2 + (1+\delta)\|\nabla\alpha_m(0)\|^2 \\ &+ \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(0)\right\|^2 + 2\delta\langle\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(0), \alpha_m(0)\rangle + 2\int_\Omega F(u_m(0))dx,\end{aligned} \tag{3.44}$$

$u_m(0)$, $\alpha_m(0)$ et $\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(0)$ étant les projections orthogonales de u_0, α_0 et α_1, respectivement. On a alors que

$$\|u_m(0)\| \leq \|u_0\|,$$

$$\|\alpha_m(0)\|_V \leq \|\alpha_0\|_V$$

et

$$\left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(0)\right\| \leq \|\alpha_1\|.$$

De plus, on a, grâce à (3.8), pour $p \leq 2$ lorsque $d = 3$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega F(u_m(0))dx\right| &\leq c(\|u_m(0)\|^{2p+2}_{L^{2p+2}} + 1) \\ &\leq c(\|u_m(0)\|^6_V + 1) \\ &\leq c(\|u_0\|^6_V + 1),\end{aligned}$$

d'où

$$\psi_m(0) \leq \|u_0\|^2_V + \|\alpha_0\|^2_V + \|\alpha_1\|^2 + c(\|u_0\|^6_V + 1).$$

Ainsi

$$\sup_{t\in[0,T]}\{\|u_m(t)\|^2_V + \|\alpha_m(t)\|^2_V + \left\|\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(t)\right\|^2\} \leq c', \tag{3.45}$$

où la constante c ne dépend pas de m. On conclut que la solution est globale en temps et $T_m = T$.

Le passage à la limite : – Cette étape consiste à obtenir un problème limite en faisant tendre m vers l'infini. Quitte à considérer une sous suite, on a, par l'estimation (3.45) que

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(0,T;V), \tag{3.46}$$

$$\alpha_m \overset{*}{\rightharpoonup} \alpha \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(0,T;V), \tag{3.47}$$

et

$$\frac{\partial\alpha_m}{\partial t} \overset{*}{\rightharpoonup} \frac{\partial\alpha}{\partial t} \text{ faiblement étoile dans } L^\infty(0,T;H), \tag{3.48}$$

On intègre (3.40) entre 0 et t, on a

$$\psi_m(t) + \int_0^t \{ \left\| \frac{\partial u_m}{\partial t}(s) \right\|^2 + \left\| \nabla \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(s) \right\|^2 \} ds \leq c, \quad \forall t \in [0,T] \quad c \geq 0, \tag{3.49}$$

la constante c est bien sûr indépendante de m. Il en découle que

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H) \tag{3.50}$$

et que

$$\nabla \frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \rightharpoonup \nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;H). \tag{3.51}$$

Les convergences (3.48) et (3.51) mises côte à côte nous permettent d'écrire

$$\frac{\partial \alpha_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \alpha}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0,T;V). \tag{3.52}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la convergence du terme non linéaire $f(u_m)$.

Remarque 3.1. *Les hypothèses* (3.6) *et* (3.8) *entraînent que*

$$|f(s)| \leq c_2(|s|^{2p+1} + 1). \tag{3.53}$$

En effet, par (3.6), on écrit

$$f(s) = \int_0^s f'(\tau) d\tau,$$

enfin, par (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq \int_0^s |f'(\tau)| d\tau \\ &\leq c_2 \int_0^s (|\tau|^{2p} + 1) d\tau \\ &\leq c_2 (\frac{1}{2p+1} |s|^{2p+1} + |s|) \\ &\leq c_2 (|s|^{2p+1} + 1), \end{aligned}$$

d'où la remarque. On a, grâce à un théorème de compacité de type Aubin-Lions,

$$u_m \to u \text{ p.p} \quad \text{(pour une suite extraite)},$$

d'où

$$f(u_m) \to f(u) \text{ p.p dans } \Omega \times (0,T)$$

et

$$f(u_m) \text{ est borné dans } L^q(\Omega \times (0,T)) \text{ (d'après la Remarque 3.1)}$$

d'où

$$f(u_m) \rightharpoonup f(u) \text{ dans } L^q(\Omega \times (0,T)) \text{(pour une suite extraite)}$$

et on peut prendre $q = \frac{2p+1}{2p}$. Des convergences (3.46), (3.47) et (3.48), on a écrit que

$$u \in L^\infty(0,T;V) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V'),$$

$$\alpha \in L^\infty(0,T;V) \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V).$$

On conclut par le Théorème de Lions que

$$u \in C([0,T];H), \alpha \in C(0,T;V).$$

En outre, le triplet $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ étant solution de (3.1)-(3.2), on a alors que

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H) + L^2(0,T;V'),$$

ce qui entraîne que

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in C([0,T];H).$$

Ceci permet de donner du sens aux données initiales du problème.

Retour au problème initial : –Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $v \in V_n$. Par construction, $\forall\ n \leq m$, $V_n \subset V_m$ et le problème faible s'écrit

$$(\upsilon_m) \begin{cases} (\frac{\partial u_m}{\partial t}, v) + ((u_m, v)) + \langle f(u_m), v\rangle = (\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, v), \\ (\frac{\partial^2 \alpha_m}{\partial t^2}, v) + (\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, v) + ((\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, v)) + ((\alpha_m, v)) \\ = -(u_m, v) - (\frac{\partial u_m}{\partial t}, v), \\ (u_m(0), \alpha_m(0), \frac{\partial \alpha_m}{\partial t}(0)) = (u_{0m}, \alpha_{0m}, \alpha_{1m}),\ \forall\ v \in V_n,\ \forall\ m \geq n. \end{cases}$$

Soit la fonction $\phi \in C^1(0,T;V)$ telle que $\phi(T) = 0$.

On multiplie $(\upsilon_m)_1$ par ϕ et on intègre sur $[0,T]$. On a

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\frac{\partial u_m}{\partial t}, \phi)dt + \int_0^T ((u_m, \phi))dt + \int_0^T \langle f(u_m), \phi\rangle dt \\ &= \int_0^T (\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, \phi)dt. \end{aligned} \tag{3.54}$$

On multiplie $(\upsilon_m)_2$ par ϕ et on intègre sur $[0,T]$. On a

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\frac{\partial^2 \alpha_m}{\partial t^2}, \phi)dt + \int_0^T (\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, \phi)dt + \int_0^T ((\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, \phi))dt \\ &+ \int_0^T ((\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, \phi))dt = -\int_0^T (u_m, \phi)dt - \int_0^T (\frac{\partial u_m}{\partial t}, \phi)dt. \end{aligned} \tag{3.55}$$

On intègre par parties le premier terme de (3.54). On écrit

$$\begin{aligned} &-(u_m(0), \phi(0)) - \int_0^T (u_m, \frac{\partial \phi}{\partial t})dt + \int_0^T ((u_m, \phi))dt + \int_0^T \langle f(u_m), \phi\rangle dt \\ &= \int_0^T (\frac{\partial \alpha_m}{\partial t}, \phi)dt. \end{aligned} \tag{3.56}$$

On intègre maintenant par parties les deux premiers termes de (3.55). On obtient

$$\begin{aligned} &-(\alpha_m(0),\phi(0))-(\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(0),\phi(0))-\int_0^T(\alpha_m,\frac{\partial\phi}{\partial t})dt-\int_0^T(\frac{\partial\alpha_m}{\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial t})dt\\ &+\int_0^T((\frac{\partial\alpha_m}{\partial t},\phi))dt+\int_0^T((\alpha_m,\phi))dt=-\int_0^T(u_m,\phi)dt-\int_0^T(\frac{\partial u_m}{\partial t},\phi)dt. \end{aligned} \tag{3.57}$$

On sait que $u_m(0)$, $\alpha_m(0)$ et $\frac{\partial\alpha_m}{\partial t}(0)$ sont respectivement les projections orthogonales de u_0 dans H, de α_0 dans V et de α_1 dans H. Ainsi, en passant à la limite dans (3.56)-(3.57), on obtient

$$-(u_0,\phi(0))-\int_0^T(u,\frac{\partial\phi}{\partial t})dt+\int_0^T((u,\phi))dt+\int_0^T\langle f(u),\phi\rangle dt=\int_0^T(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\phi)dt \tag{3.58}$$

et

$$\begin{aligned} &-(\alpha_0,\phi(0))-(\alpha_1,\phi(0))-\int_0^T(\alpha,\frac{\partial\phi}{\partial t})dt-\int_0^T(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial t})dt\\ &+\int_0^T((\frac{\partial\alpha}{\partial t},\phi))dt+\int_0^T((\alpha,\phi))dt=-\int_0^T(u,\phi)dt-\int_0^T(\frac{\partial u}{\partial t},\phi)dt, \end{aligned} \tag{3.59}$$

$\forall\, v\in V_n,\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$. Ce qui est vérifié pour tout $v\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}V_m$. Par densité, on a la validité du résultat dans V. En particulier, si on prend

$$\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(0,T;V)\subset\{\phi\in C^1(0,T;V);\phi(T)=0\},$$

on en déduit les équations (3.1)-(3.2). En repétant les opérations qui nous ont conduit à (3.58) puis (3.59) pour les équations (3.1) et (3.2), on arrive à

$$\begin{aligned} -(u(0),\phi(0))-\int_0^T(u,\frac{\partial\phi}{\partial t})dt+\int_0^T((u,\varphi))dt+\int_0^T\langle f(u),\phi\rangle dt\\ =\int_0^T(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\phi)dt \end{aligned} \tag{3.60}$$

et

$$\begin{aligned} &-(\alpha(0),\phi(0))-(\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0),\phi(0))-\int_0^T(\alpha,\frac{\partial\phi}{\partial t})dt-\int_0^T(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\phi}{\partial t})dt\\ &+\int_0^T(\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t},\nabla\phi)dt+\int_0^T((\alpha,\phi))dt=-\int_0^T(u,\phi)dt-\int_0^T(\frac{\partial u}{\partial t},\phi)dt. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Enfin, en comparant deux à deux les expressions (3.58) et (3.60) puis (3.59) et (3.61), on écrit par identification les égalités suivantes :

$$(u(0)-u_0,\phi(0))=0,\forall\phi\in C^1(0,T;V)$$

et

$$(\alpha(0)-\alpha_0,\phi(0))+(\frac{\partial\alpha}{\partial t}(0)-\alpha_1,,\phi(0))=0,\forall\phi\in C^1(0,T;V),$$

ϕ étant quelconque, on conclut que

$$u(0)=u_0 \text{ dans } H,$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ dans } V$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1 \text{ dans } H,$$

d'où le théorème.

■

Le résultat qui suit nous fournit l'unicité de la solution de notre problème.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, avec $p \leq 1$ pour $d = 3$, le problème* (3.1)-(3.4) *admet une et une seule solution avec la régularité ci-dessus et qui est continue par rapport aux données initiales du problème.*

Démonstration:
On sait déjà qu'il existe au moins une solution pour notre problème d'après le Théorème 3.1. Il reste à prouver l'unicité de celle-ci et sa continuité par rapport aux données intiales. Pour cela, on suppose qu'il en existe deux puis on montre qu'elles sont nécessairement égales lorsqu'elles ont les mêmes données initales. Soit donc $(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t})$ deux solutions de (3.1)-(3.2) et $(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$ et $(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)})$ leurs données initiales associées. On pose

$$u = u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}.$$

Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{3.62}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.63}$$

$$u = \alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.64}$$

$$u(0) = u_0^{(1)} - u_0^{(2)}, \alpha(0) = \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}. \tag{3.65}$$

On multiplie (3.62) par u. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))u dx = \int_\Omega \frac{\partial \alpha}{\partial t} u dx. \tag{3.66}$$

On multiplie (3.62) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + ||\frac{\partial u}{\partial t}||^2 + \int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_\Omega \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} dx. \tag{3.67}$$

On multiplie maintenant (3.62) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ et on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla \alpha\|^2 + \|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\|^2) + \|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\|^2 + \|\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t}\|^2 \\ &= -\int_\Omega \frac{\partial \alpha}{\partial t} u dx - \int_\Omega \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} dx. \end{aligned} \tag{3.68}$$

On additionne (3.66), (3.67) et (3.68). On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2\Big)+\|\nabla u\|^2+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\\&=-\int_\Omega(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))u dx-\int_\Omega(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))\frac{\partial u}{\partial t}dx.\end{aligned}\tag{3.69}$$

Grâce à (3.9), on a :

$$-\int_\Omega(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))u dx\le c_3\|u\|^2,\tag{3.70}$$

puis, (3.8) et l'inégalité de Hölder entraînent que (on traite le cas le plus difficile : $p=1$ quand $d=3$) :

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|&\le c\int_\Omega(1+|u^{(1)}|^2+|u^{(2)}|^2)|u|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx\\&\le c(\|u\|+[\|u^{(1)}\|^2_{L^6(\Omega)}+\|u^{(2)}\|^2_{L^6(\Omega)}]\|u\|_{L^6(\Omega)})\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\\&\le c(1+\|u^{(1)}\|^2_V+\|u^{(2)}\|^2_V])\|u\|_V\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\end{aligned}\tag{3.71}$$

En considérant (3.69)-(3.71), on aboutit à une inégalité du type

$$\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\le c\Upsilon,\tag{3.72}$$

où

$$\Upsilon(t)=\|u(t)\|^2+\|\nabla u(t)\|^2+\|\nabla\alpha(t)\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|^2\tag{3.73}$$

satisfait, grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned}c(\|u(t)\|^2_V+\|\alpha(t)\|^2_V+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|^2)&\le\Upsilon(t)\\&\le c'(\|u(t)\|^2_V+\|\alpha(t)\|^2_V+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|^2).\end{aligned}\tag{3.74}$$

En particulier,

$$\frac{\partial\Upsilon}{\partial t}\le c\Upsilon\tag{3.75}$$

et le lemme de Gronwall et (3.74) donnent

$$\begin{aligned}&\|u^{(1)}(t)-u^{(2)}(t)\|^2_V+\|\alpha^{(1)}(t)-\alpha^{(2)}(t)\|^2_V+\left\|\frac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t}(t)-\frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}(t)\right\|^2\\&\le c\Big\{\|u_0^{(1)}-u_0^{(2)}\|^2_V+\|\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}\|^2_V+\|\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}\|^2\Big\},\end{aligned}\tag{3.76}$$

où la constante c dépend seulement de T.

On conclut l'unicité pour $u_0^{(1)} = u_0^{(2)}$, $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)}$ et $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)}$, puis la continuité par rapport aux données initiales sinon, ce qui prouve le théorème.

■

Les Théorèmes 3.1 et 3.2, nous amènent à considérer un semi-groupe continu $S(t)$ pour tout $t \geq 0$ (voir le Chapitre 2), qui est défini sur Φ de la façon suivante :

$$S(t) : \Phi \to \Phi, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)); \tag{3.77}$$

ici le triplet $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ est l'unique solution de notre problème de départ.

3.3 Dissipativité et Régularité.

Dans cette section, on prouve l'existence d'ensembles bornés absorbants pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, associé à notre problème.

On commence par donner le

Théorème 3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, est dissipatif sur Φ. Autrement dit, le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant β_0 dans Φ (voir la Définition 2.5).*

Démonstration:
On prend les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans un borné de Φ. Disons que, pour tout $\rho > 0$, on a $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_\rho$, B_ρ étant la boule de Φ de centre 0 et de rayon ρ. On rappelle ici que tous les calculs ci-dessous peuvent être justifiés par la méthode de Galerkin.

On multiplie (3.1) par u. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega f(u)u dx = (\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u). \tag{3.78}$$

On multiplie (3.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 = (\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}). \tag{3.79}$$

On multiplie (3.2) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$. on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla \alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 = -(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u) - (\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t}). \tag{3.80}$$

En additionnant les trois équations, à savoir (3.78), (3.79) et (3.80), on arrive à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla \alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx\Big\} \\ &+ \|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 = -\int_\Omega f(u)u dx. \end{aligned} \tag{3.81}$$

L'hypothèse (3.7) nous assure que

$$-f(u)u \leq -F(u) + c_2,$$

par conséquent, on écrit

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx\big\}\\&+ \|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega F(u)dx + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c_2|\Omega|.\end{aligned} \tag{3.82}$$

On multiplie cette fois (3.7) par α. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + 2\langle\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\rangle) + \|\nabla\alpha\|^2\\&= -(u,\alpha) - \langle\frac{\partial u}{\partial t},\alpha\rangle + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned} \tag{3.83}$$

Soit $\delta > 0$ assez petit. On somme maintenant (3.82) et δ(3.83). On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \delta\|\alpha\|^2 + (1+\delta)\|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\delta\langle\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\rangle + 2\int_\Omega F(u)dx\Big\}\\&+ \|\nabla u\|^2 + \delta\|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega F(u)dx + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\\&\leq c_2|\Omega| - \delta(u,\alpha) - \delta\langle\frac{\partial u}{\partial t},\alpha\rangle + \delta\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned} \tag{3.84}$$

On a, d'après les inégalités de Hölder et Poincaré

$$\begin{aligned}-\delta(u,\alpha) &\leq \delta|(u,\alpha)|\\&\leq \delta\|u\|\|\alpha\|\\&\leq \frac{\delta}{2}\|u\|^2 + \frac{\delta}{2}\|\alpha\|^2\\&\leq \frac{\delta}{2\lambda_1}\|\nabla u\|^2 + \frac{\delta}{2\lambda_1}\|\nabla\alpha\|^2\end{aligned} \tag{3.85}$$

et

$$\begin{aligned}-\delta\langle\frac{\partial u}{\partial t},\alpha\rangle &\leq \delta|\langle\frac{\partial u}{\partial t},\alpha\rangle|\\&\leq \delta\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\|\alpha\|\\&\leq \frac{\delta}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{\delta}{2}\|\alpha\|^2\\&\leq \frac{\delta}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{\delta}{2\lambda_1}\|\nabla\alpha\|^2,\end{aligned} \tag{3.86}$$

où λ_1 désigne la première valeur propre associée à l'opérateur moins Laplacien avec les conditions aux limites de Dirichlet homogènes (cf. la preuve du Théorème 3.1).

On choisit $\delta > 0$ de sorte que :

$$\delta < 1 \text{ et } \delta < 2\lambda_1 \tag{3.87}$$

et

$$c(\|\alpha\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2) \leq \delta\|\alpha\|^2 + (1+\delta)\|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\delta\langle\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \alpha\rangle. \tag{3.88}$$

En prenant en compte (3.84)-(3.88), on aboutit ainsi à une inégalité de la forme

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \nu\psi_1 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c,\ \nu > 0,\ c \geq 0, \tag{3.89}$$

où

$$\begin{aligned}\psi_1(t) =& \|u(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \delta\|\alpha(t)\|^2 + (1+\delta)\|\nabla\alpha(t)\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2 \\ &+ 2\delta\langle\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t), \alpha(t)\rangle + 2\int_\Omega F(u(t))dx\end{aligned} \tag{3.90}$$

satisfait

$$\begin{aligned}&c(\|u(t)\|_V^2 + \int_\Omega F(u)dx + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2) \leq \psi_1(t) \\ &\leq c'(\|u(t)\|_V^2 + \int_\Omega F(u)dx + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2).\end{aligned} \tag{3.91}$$

En particulier, on écrit

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \nu\psi_1 \leq c, \tag{3.92}$$

le lemme de Gronwall appliqué à (3.92) donne

$$\psi_1(t) \leq e^{-\nu t}\psi_1(0) + c,\ \forall\ t \geq 0. \tag{3.93}$$

Par (3.88) et le fait que les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ sont dans un borné, l'estimation (3.93) devient

$$\psi_1(t) \leq \mu e^{-\nu t} + c, \tag{3.94}$$

avec $\mu = \mu(\rho) > 0$.

Soit maintenant $\eta > 0$ assez grand pour que

$$\mu e^{-\nu t} + c \leq \eta.$$

On a alors que la boule de centre 0 et de rayon η est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$. En d'autres termes,

$$\|u(t)\|_V^2 + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2 \leq \eta,\ \forall t \geq t_0, \tag{3.95}$$

avec $t_0 = t_0(\rho) := \max\{0, -\frac{1}{\nu}\log\left(\frac{\eta - c}{\mu}\right)\}$.

■

Théorème 3.4. *On suppose vraies* (3.6) *et* (3.9) *et que* $p \in [0,1]$ *dans* (3.8) *lorsque* $d = 3$. *Alors, si les données initiales* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ *appartiennent à* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, *le problème* (3.1)-(3.4) *possède une solution unique telle que* $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *et* $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\forall\ T > 0$.

Démonstration:
L'existence et l'unicité étant vérifiées, il ne reste plus qu'à établir la régularité de la solution. Pour cela, nous ferons appel aux lemmes de Gronwall puis Gronwall uniforme. On multiplie l'équation (3.1) par $-\Delta u$, on intègre sur Ω et par parties, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2 dx = -(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \Delta u), \tag{3.96}$$

l'inégalité de Hölder et (3.9) entraînent

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leq 2c_3\|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2. \tag{3.97}$$

Soit $\epsilon > 0$ suffisamment petit que l'on précisera plus loin. On additionne (3.89) et ϵ(3.97) et on obtient

$$\frac{d\psi_2}{dt} + \nu\psi_1 + \epsilon\|\Delta u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c + 2c_3\epsilon\|\nabla u\|^2 + \epsilon\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2, \tag{3.98}$$

où

$$\psi_2(t) = \psi_1 + \epsilon\|\nabla u\|^2 \tag{3.99}$$

satisfait

$$\begin{aligned} c(\|u(t)\|_V^2 + \int_\Omega F(u)dx + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2) &\leq \psi_2(t) \\ &\leq c'(\|u(t)\|_V^2 + \int_\Omega F(u)dx + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2). \end{aligned} \tag{3.100}$$

En prenant $\epsilon > 0$ tel que :

$$\epsilon < \frac{\nu}{2c_3},\ c_3 > 0,$$

on est conduit à une inégalité du type

$$\frac{d\psi_2}{dt} + c\psi_2 + c'\|\Delta u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c''. \tag{3.101}$$

Ainsi,

$$u \in L^2(0,T; H^2(\Omega)). \tag{3.102}$$

En effet, en intégrant (3.101) entre 0 et t, et compte tenu de (3.100), on obtient (3.102). On multiplie maintenant (3.1) par $-\Delta\frac{\partial u}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx = ((\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial t})). \tag{3.103}$$

On multiplie cette fois (3.2) par $-\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta\alpha\|^2+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2\Big)+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2+\Big\|\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2=((u,\frac{\partial\alpha}{\partial t}))-((\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial t})). \quad (3.104)$$

En additionnant les équations (3.103) et (3.104), on arrive à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u\|^2+\|\Delta\alpha\|^2+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2\Big)+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2+\Big\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2\\&+\Big\|\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2=((u,\frac{\partial\alpha}{\partial t}))-\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx.\end{aligned} \quad (3.105)$$

On a alors grâce à (3.8)

$$\Big|\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx\Big|\le c\int_\Omega(|u|^{2p}+1)|\nabla u|\,\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\,dx. \quad (3.106)$$

Par ailleurs, si $d=2$, on a, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega|u|^{2p}|\nabla u|\,\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\,dx\le c\|u\|_{H^1}^{2p}\|u\|_{H^2}\,\Big\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big\| \quad (3.107)$$

et si $d=3$, dans ce cas $p\le 1$, on a, en utilisant l'inégalité de Hölder (pour $p=1$)

$$\int_\Omega|u|^{2}|\nabla u|\,\Big|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big|\,dx\le c\|u\|_{H^1}^{2}\|u\|_{H^2}\,\Big\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|. \quad (3.108)$$

Ainsi, de (3.106)-(3.108), on en déduit que

$$\Big|\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx\Big|\le c\|u\|_{H^1}^{q'}(\|u\|_{H^2}+1)\,\Big\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|,\ q'\ge 0. \quad (3.109)$$

Enfin, de (3.105) et (3.109), on écrit

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u\|^2+\|\Delta\alpha\|^2+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2\Big)+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2+\Big\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2\\&+\Big\|\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2\le c\|u\|_{H^1}^{q}(\|u\|_{H^2}^2+1),\ q\ge 0.\end{aligned} \quad (3.110)$$

En sommant (3.101) et (3.110), on obtient une inégalité de la forme

$$\frac{d\psi_3}{dt}+\Big\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\Big\|^2+\Big\|\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\Big\|^2\le c\|u\|_{H^1}^{q}(\|u\|_{H^2}^2+1)(\psi_3+1)+c', \quad (3.111)$$

avec

$$\psi_3(t)=\psi_2(t)+\|\Delta u(t)\|^2+\|\Delta\alpha(t)\|^2+\Big\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\Big\|^2 \quad (3.112)$$

vérifiant

$$\begin{aligned}&c\Big(\|u(t)\|_{H^2}^2+\int_\Omega F(u(t))dx+\|\alpha(t)\|_{H^2}^2+\Big\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\Big\|_{H^1}^2\Big)-c''\le\psi_3(t)\\&\le c'\Big(\|u(t)\|_{H^2}^2+\int_\Omega F(u(t))dx+\|\alpha(t)\|_{H^2}^2+\Big\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\Big\|_{H^1}^2\Big)+c''.\end{aligned} \quad (3.113)$$

En appliquant le lemme de Gronwall à (3.111) et compte tenu de (3.102) et le fait que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V)$, on obtient que

$$u \in L^\infty(0, T; W \cap V), \forall\ T > 0. \tag{3.114}$$

Nous allons maintenant utiliser le lemme de Grownwall uniforme. Pour cela, on doit vérifier les inégalités ci-dessous (cf. Chapitre 2, Lemme 2.2) :

$$\int_t^{t+r} \psi_3(s)ds \leq c \text{ et } \int_t^{t+r} c\|u\|_{H^1}^q(\|u\|_{H^2}^2 + 1) \leq c'\ \forall t \geq t_0, \forall r > 0,$$

où t_0 est tel que :

$$\forall B \subset \Phi \text{ borné }, S(t)B \subset \beta_0, \forall\ t \geq t_0.$$

D'après (3.101) et le Théorème 3.3, on écrit

$$\int_t^{t+r} c\|u\|_{H^1}^q(\|u\|_{H^2}^2 + 1) \leq c, \forall\ t \geq t_0. \tag{3.115}$$

Pour montrer l'autre inégalité, il suffit de prouver que

$$\int_t^{t+r} \|\Delta\alpha(s)\|^2 ds \leq c,\ \forall t \geq t_0. \tag{3.116}$$

En effet,

$$\psi_3(t) = \psi_2(t) + \|\Delta u(t)\|^2 + \|\Delta\alpha(t)\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|^2$$

et, grâce à (3.101) et le Théorème 3.3, on a

$$\int_t^{t+r} \psi_2(s)ds \leq c,\ \forall\ t \geq t_0,$$

$$\int_t^{t+r} \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq c,\ \forall\ t \geq t_0$$

et

$$\int_t^{t+r} \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}(s)\right\|^2 ds \leq c,\ \forall\ t \geq t_0.$$

Il reste donc à prouver (3.116). Pour ce faire, on multiplie l'équation (3.2) par $-\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties pour avoir

$$\frac{d}{dt}\Big(\left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \|\Delta\alpha\|^2\Big) + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq \|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2. \tag{3.117}$$

On a, d'après le Théorème 3.3,

$$\int_t^{t+r} \Big(\|\nabla u(s)\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(s)\right\|^2\Big)ds \leq c,\ \forall\ t \geq t_0. \tag{3.118}$$

On déduit de (3.117), (3.118) et du lemme de Gronwall uniforme que

$$\|\alpha(t)\|_{H^2}^2 \leq c', \ \forall\ t \geq t_0 + r. \tag{3.119}$$

Ainsi, (3.111), (3.115), (3.119) et le lemme de Gronwall uniforme donnent

$$\psi_3(t) \leq c, \ \forall\ t \geq t_0 + 2r, \tag{3.120}$$

ce qui veut dire que

$$u \in L^\infty(t_0 + 2r, +\infty; W \cap V). \tag{3.121}$$

En associant (3.114) et (3.121), on a alors que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W \cap V).$$

De façon analogue, on montre que

$$\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^+; W \cap V) \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(\mathbb{R}^+; V).$$

On déduit de (3.111) que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V) \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^2(0, T; W \cap V),$$

ce qui achève la preuve du théorème.

■

Remarque 3.2. *Le Théorème 3.4 nous amène à définir le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, sur l'espace $(W \cap V) \times (W \cap V) \times V$. On a alors*

$$S(t) : \Phi_1 = (W \cap V) \times (W \cap V) \times V \to \Phi_1$$
$$(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \mapsto (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)),$$

avec $(u, \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial t})$ l'unique solution du problème (3.1)-(3.4).

Corollaire 3.1. *Le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, possède un ensemble borné absorbant que l'on note $\mathcal{B}_1$ dans $(W \cap V) \times (W \cap V) \times V$.*

Démonstration:
La preuve est immédiate d'après les Théorèmes 3.3 et 3.4.

■

Nous allons maintenant prouver l'existence de l'attracteur global.

3.4 Existence de l'attracteur global

L'attracteur global est, par définition, le plus petit ensemble (pour l'inclusion) compact de l'espace des phases qui est invariant par le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, et attire tous les ensembles bornés des données initiales lorsque le temps t va à l'infini ; il apparaît ainsi comme un bon objet en vue de la description du comportement asymptotique de notre système dynamique. Pour plus de détails sur le sujet, on peut voir par exmple [26], [23], [32], mais également les nombreuses références qui y figurent.

On commence par énoncer le

Théorème 3.5. *Sous les hypothèses du Théorème 3.3, en supposant en plus* (3.6) *et* (3.9) *satisfaites, le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, défini de Φ dans lui-même possède l'attracteur global noté $\mathcal{A}$ dans Φ_1.*

Avant de donner la preuve du Théorème 3.5, on fait les remarques suivantes :

Remarque 3.3. *L'absence d'effet régularisant des données initiales liée au terme $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$, va nous amener à décomposer le semi-groupe (cf. par exemple, [26]) en une somme de deux familles d'opérateurs, la première famille tendant vers zéro lorsque t tend vers l'infini et la seconde famille étant asymptotiquement compacte au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski (voir les Définitions 2.7 et 2.8 du Chapitre 2).*

En d'autres termes,

$$S(t) = S_1(t) + S_2(t),$$

où les opérateurs

$$S_1(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty$$

et les opérateurs $S_2(t)$ sont asymptotiquement compacts.

Remarque 3.4. *D'après la section précédente, on sait que le semi-groupe possède un ensemble borné absorbant β_0 dans Φ. Pour prouver l'existence de l'attracteur global $\mathcal{A}$, il suffit montrer que le semi-groupe $S(t)$ est asymptotiquement compact au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski (cf. le Théorème 2.10, cf. aussi par exemple, [23]).*

Démonstration:
Au vue de la Remarque 3.3, on considère la décomposition suivante :

$$(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) = (u^d, \alpha^d, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}) + (u^c, \alpha^c, \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}),$$

où $(u^d, \alpha^d, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t})$ est solution de

$$\frac{\partial u^d}{\partial t} - \Delta u^d = \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \tag{3.122}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^d}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} - \Delta \alpha^d = -u^d - \frac{\partial u^d}{\partial t}, \tag{3.123}$$

$$u^d = \alpha^d = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.124}$$

$$u^d/_{t=0} = u_0, \alpha^d/_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}/_{t=0} = \alpha_1, \tag{3.125}$$

et $(u^c, \alpha^c, \frac{\partial \alpha^c}{\partial t})$ est solution de

$$\frac{\partial u^c}{\partial t} - \Delta u^c + f(u) = \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \tag{3.126}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^c}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} + \Delta \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} - \Delta \alpha^c = -u^c - \frac{\partial u^c}{\partial t}, \tag{3.127}$$

$$u^c = \alpha^c = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.128}$$

$$u^c/_{t=0} = \alpha^c/_{t=0} = \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}/_{t=0} = 0. \tag{3.129}$$

On va maintenant faire un certain nombre d'estimations à priori. On multiplie (3.122) par u^d puis par $\frac{\partial u^d}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a respectivement

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 = (u^d, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}) \tag{3.130}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 = (\frac{\partial u^d}{\partial t}, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}). \tag{3.131}$$

En sommant (3.130) et (3.131), on écrit

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2\big) + \|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 = (u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}). \tag{3.132}$$

On multiplie maintenant (3.123) par $\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\nabla \alpha^d\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2\big) + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -(u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}).\end{aligned} \tag{3.133}$$

En additionnant (3.132) et (3.133), on arrive à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 + \|\nabla \alpha^d\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2\Big) + \|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 = 0.\end{aligned} \tag{3.134}$$

On multiplie enfin (3.123) par α^d, on intègre sur Ω et par parties pour avoir

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\alpha^d\|^2 + \|\nabla \alpha^d\|^2 + 2(\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \alpha^d)\big) + \|\nabla \alpha^d\|^2 \\ &= -(u^d, \alpha^d) - (\frac{\partial u^d}{\partial t}, \alpha^d) + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned} \tag{3.135}$$

On additionne (3.134) et ϵ_1(3.135), où $\epsilon_1 > 0$ est suffisamment petit. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d\psi_4}{dt} + \|\nabla u^d\|^2 + \epsilon_1\|\nabla \alpha^d\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -\epsilon_1(u^d, \alpha^d) - \epsilon_1(\frac{\partial u^d}{\partial t}, \alpha^d) + \epsilon_1\left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2,\end{aligned} \tag{3.136}$$

où

$$\begin{aligned}\psi_4(t) =&\|u^d(t)\|^2 + \|\nabla u^d(t)\|^2 + \|\alpha^d(t)\|^2 + (1+\epsilon_1)\|\nabla \alpha^d(t)\|^2 \\ &+ \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}(t)\right\|^2 + 2\epsilon_1(\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}(t), \alpha^d(t))\end{aligned} \tag{3.137}$$

satisfait pour $\epsilon_1 > 0$ pris tel que

$$\|\alpha^d(t)\|^2 + (1+\epsilon_1)\|\nabla\alpha^d(t)\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t)\right\|^2 + 2\epsilon_1(\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t), \alpha^d(t)) \geq c\Big(\|\alpha^d(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t)\right\|^2\Big)$$

et

$$1 - \epsilon_1 > 0,$$

l'estimation

$$\psi_4(t) \geq c\Big(\|u^d(t)\|_V^2 + \|\alpha^d(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t)\right\|^2\Big). \tag{3.138}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne (en notant que $f \equiv 0$ dans ce cas) une inégalité de la forme

$$\frac{d\psi_4}{dt} + c\psi_4 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}\right\|^2 \leq 0. \tag{3.139}$$

En particulier

$$\frac{d\psi_4}{dt} + c\psi_4 \leq 0. \tag{3.140}$$

Le lemme de Gronwall implique alors que

$$\psi_4(t) \leq e^{-ct}\psi_4(0). \tag{3.141}$$

Grâce à (3.138), on écrit

$$\|u^d(t)\|_V^2 + \|\alpha^d(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t)\right\|^2 \leq e^{-ct}(\|u_0\|_V^2 + \|\alpha_0\|_V^2 + \|\alpha_1\|^2). \tag{3.142}$$

En posant

$$S_1(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u^d(t), \alpha^d(t), \frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t)),$$

on voit que les opérateurs $S_1(t)$ tendent vers zéro lorsque t tend vers l'infini (uniformément par rapport aux ensembles bornés des conditions initiales).

On considère maintenant le problème (3.126)-(3.129). On multiplie (3.126) par u^c, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^c\|^2 + \|\nabla u^c\|^2 + \int_\Omega f(u)u^c dx = (\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}, u^c). \tag{3.143}$$

On multiplie (3.126) par $\frac{\partial u^c}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^c\|^2 + \left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t}dx = (\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}, \frac{\partial u^c}{\partial t}). \tag{3.144}$$

On multiplie cette fois (3.127) par $\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\nabla\alpha^c\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\big) + \left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -(u^c + \frac{\partial u^c}{\partial t}, \frac{\partial\alpha^c}{\partial t}).\end{aligned} \tag{3.145}$$

En sommant (3.143), (3.144) et (3.145), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u^c\|^2+\|\nabla u^c\|^2+\|\nabla\alpha^c\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\|\nabla u^c\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\\&+\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2=-\int_\Omega f(u)u^c dx-\int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t}dx.\end{aligned}\tag{3.146}$$

Par (3.7), on a

$$f(u)=\int_0^u f'(s)ds,$$

on a alors

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(u)u^c dx\right|&\le c\int_\Omega(|u|^{2p+1}+|u|)|u^c|dx\\&\le c'\int_\Omega(|u|^{2p+1}+1)|u^c|dx\end{aligned}\tag{3.147}$$

de plus, si $d=2$, on a alors, grâce aux inégalités de Hölder et de Poincaré,

$$\int_\Omega|u|^{2p+1}|u^c|dx\le c\|u\|_V^{2p+1}\|\nabla u^c\|\tag{3.148}$$

et, si $d=3$, on a, en utilisant l'inégalité de Hölder et l'inclusion $V\subset L^6(\Omega)$ et en notant que $p\le 1$ dans ce cas (on prendra $p=1$),

$$\begin{aligned}\int_\Omega|u|^3|u^c|dx&\le\|u\|_{L^6}^3\|u^c\|\\&\le c\|u\|_V^3\|\nabla u^c\|.\end{aligned}\tag{3.149}$$

Compte tenu de (3.148) et (3.149), l'estimation (3.147) devient

$$\left|\int_\Omega f(u)u^c dx\right|\le c(\|u\|_V^{\gamma_1}+1)\|\nabla u^c\|,\ \gamma_1\ge 0.\tag{3.150}$$

De façon analogue, on obtient

$$\left|\int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\right|\le c(\|u\|_V^{\gamma_2}+1)\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|,\ \gamma_2\ge 0.\tag{3.151}$$

On déduit de (3.146)-(3.151) et de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|u^c\|^2+\|\nabla u^c\|^2+\|\nabla\alpha^c\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\|\nabla u^c\|^2\\&+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\le c\|u\|_V^\gamma,\ \gamma\ge 0.\end{aligned}\tag{3.152}$$

On multiplie (3.127) par α^c, on intègre sur Ω et par parties, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\alpha^c\|^2+\|\nabla\alpha^c\|^2+2(\frac{\partial\alpha^c}{\partial t},\alpha^c)\big)+\|\nabla\alpha^c\|^2\\&=-(u^c,\alpha^c)-(\frac{\partial u^c}{\partial t},\alpha^c)+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned}\tag{3.153}$$

On somme maintenant (3.152) et ϵ_2(3.153), où $\epsilon > 0$ est petit. On a

$$\begin{aligned}&\frac{d\psi_5}{dt} + \|\nabla u^c\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 + 2\epsilon_2\|\nabla\alpha^c\|^2 \\ &\leq c\|u\|^{2(2p+1)} - 2\epsilon_2(u^c, \alpha^c) - 2\epsilon_2(\frac{\partial u^c}{\partial t}, \alpha^c) + 2\epsilon_2\left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2,\end{aligned} \tag{3.154}$$

avec

$$\begin{aligned}\psi_5(t) =&\|u^c(t)\|^2 + \|\nabla u^c(t)\|^2 + \epsilon_2\|\alpha^c(t)\|^2 + (1+\epsilon_2)\|\nabla\alpha^c(t)\|^2 \\ &+ \left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2 + 2\epsilon_2(\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t), \alpha^c(t)).\end{aligned} \tag{3.155}$$

On prend $\epsilon_2 > 0$ telles que

$$1 - \epsilon_2 > 0$$

et

$$\begin{aligned}&\epsilon_2\|\alpha^c(t)\|^2 + (1+\epsilon_2)\|\nabla\alpha^c(t)\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2 \\ &+ 2\epsilon_2(\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t), \alpha^c(t)) \geq c\Big(\|\alpha^c(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2\Big).\end{aligned}$$

Alors ψ_5 vérifie

$$\psi_5(t) \geq c\Big(\|u^c(t)\|_V^2 + \|\alpha^c(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2\Big) \tag{3.156}$$

et, grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient une inégalité du type

$$\frac{d\psi_5}{dt} + c\psi_5 + \left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 \leq c'\|u\|_{H^1}^{\gamma}. \tag{3.157}$$

On multiplie maintenant (3.126) par $-\Delta u^c$ puis par $-\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^c\|^2 + \|\Delta u^c\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla u^c dx = -(\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \Delta u^c) \tag{3.158}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^c\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}dx = -(\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}), \tag{3.159}$$

respectivement.

On multiplie enfin (3.127) par $-\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\Delta\alpha^c\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2\big) + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ \left\|\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 = (\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \Delta u^c) + (\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}).\end{aligned} \tag{3.160}$$

Le caractère autoadjoint de l'opérateur $-\Delta$ permet d'avoir en sommant (3.158), (3.159) et (3.160) l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u^c\|^2+\|\Delta u^c\|^2+\|\Delta\alpha^c\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\|\Delta u^c\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\\ +\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2=-\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla u^c dx-\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}dx.\end{aligned} \tag{3.161}$$

On a d'après les hypothèses du théorème que

$$f'(u)\nabla u\in L^2(0,T;L^2(\Omega)^d),$$

où d est la dimension de l'espace ($d=2$ ou 3), $\forall\ T>0$.

En effet,

$$\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u dx\right|\le c\int_\Omega(|u|^{2p}+1)|\nabla u|dx,$$

si $d=2$, et l'inégalité de Hölder donne

$$\int_\Omega|u|^{2p}|\nabla u|dx\le c'\|u\|_V^{2p}\|\nabla u\|. \tag{3.162}$$

Si $d=3$, alors pour le cas le plus difficile, à savoir $p=1$, l'inégalité de Hölder donne

$$\int_\Omega|u|^2|\nabla u|dx\le\|u\|_{L^4}^2\|\nabla u\|\le c\|u\|_V^3, \tag{3.163}$$

dans tous les cas, on a

$$\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u dx\right|\le c'(\|u\|_V^{p'}+1),\ p'\ge 0. \tag{3.164}$$

D'après la preuve du Théorème 3.4, plus précisément, l'estimation (3.101) apparaissant dans cette preuve, on conclut que

$$\|f'(u)\nabla u\|_{L^2(0,T;H^d)}\le Q(T,\|u_0\|_V,\|\alpha_0\|_V,\|\alpha_1\|), \tag{3.165}$$

pour une certaine fonction monotone Q indépendante des données initiales. En sommant (3.157) et (3.161), on obtient, via l'inégalité de Hölder, une inégalité de la forme :

$$\frac{d\psi_6}{dt}+c\psi_6+c'\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|_V^2+\left\|\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\le c''\|u\|_V^\gamma+\|f'(u)\nabla u\|^2, \tag{3.166}$$

où

$$\psi_6(t)=\psi_5(t)+\|\nabla u^c(t)\|^2+\|\Delta u^c(t)\|^2+\|\Delta\alpha^c(t)\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2 \tag{3.167}$$

satisfait

$$\psi_6(t)\ge c\Big(\|u^c(t)\|_W^2+\|\alpha^c(t)\|_W^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(t)\right\|_V^2\Big). \tag{3.168}$$

On a en particulier

$$\frac{d\psi_6}{dt} \leq c\|u\|_V^\gamma + \|f'(u)\nabla u\|^2. \tag{3.169}$$

On déduit ainsi, de (3.165), (3.168) et (3.169),

$$\|u^c(t)\|_W^2 + \|\alpha^c(t)\|_W^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|_V^2 \leq Q(t, \|u_0\|_V, \|\alpha_0\|_V, \|\alpha_1\|). \tag{3.170}$$

En prenant

$$S_2(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) := (u^c(t), \alpha^c(t), \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)),$$

on a clairement, via (3.170), que les opérateurs $S_2(t)$ sont asyptotiquement compacts au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski (cf. par exemple, [26]). On conclut à l'existence d'un ensemble compact attractif qui est borné dans Φ_1, ce qui termine la preuve du théorème.

■

Maintenant que l'on a établit que l'attracteur global existe, nous allons nous intéresser à sa dimension. Il s'agit ici de dimensions de recouvrement telles que la dimension de Hausdorff et la dimension fractale. La section suivante a pour but de prouver que cet attracteur global est de dimension fractale finie.

3.5 Dimension de l'attracteur global

Dans cette section, on prouve que l'attracteur global de notre système est de dimension fractale finie, en établissant l'existence d'attracteurs exponentiels, ce qui nous fournira une borne supérieure de la dimension de l'attracteur global. Pour cela, on montre que le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, associé à notre problème est Lipschitz continu et, possède la propriéte de régularisation et qu'il vérifie également une condition de Hölder en temps (voir, par exemple, [23], [33], [34], [35] et les références qui y figurent). Une difficulté supplémentaire est apportée par la présence du terme $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$, empêchant ainsi l'application des méthodes classiques. Pour surmonter la difficulté, nous allons décomposer la différence de deux trajectoires du problème en deux parties, une première partie tendant vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini, et une deuxième partie compactifiante pour tout t positif (voir, par exemple, [36], [37] et les références qui y figurent). On rappelle que la définition d'un attracteur exponentiel peut être trouvée au Chapitre 2, Définition 2.11.

On commence par énoncer un résultat qui sera utile dans la suite (voir, par exemple, [26] et [38])

Théorème 3.6. *Soit V et H deux espaces de Banach tels que V s'injecte de façon compacte dans H et $S(t) : X \to X$ un semi-groupe agissant sur un sous-ensemble fermé X de H. On suppose que*

(i)

$$S(t)u - S(t)v = \varphi^1(t) + \varphi^2(t), \ \forall \ u, v \in X,$$

où

$$\|\varphi^1(t)\|_H^2 \leq d(t)\|u-v\|_H^2,$$

d continue, $t \geq 0$, $d(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, et

$$\|\varphi^2(t)\|_V^2 \leq h(t)\|u-v\|_H^2,\ t>0,\ h \text{ continue};$$

(ii) *l'application $(t,x) \mapsto S(t)x$ est Lipschitz en espace et Hölder en temps sur $[0,T]\times B$, $\forall\ T>0$, $\forall\ B \subset X$ borné.*

Alors $S(t)$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$ sur X.

Nous allons utiliser ce résultat.
On introduit tout d'abord l'ensemble invariant suivant :

$$\mathcal{X} = \overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\beta_0},$$

où β_0 est l'ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, dans Φ. On sait, d'après le Théorème 3.4 que $\mathcal{X}$ est borné dans Φ_1. On restreint dans toute la suite le semi-groupe $S(t)$ à $\mathcal{X}$.

Théorème 3.7. *On suppose que $p=1$ quand $d=3$ dans (3.8). Alors, le semi-groupe $S(t)$ defini de $\mathcal{X}$ dans lui-même satisfait une décomposition analogue à celle donnée dans le Théorème 3.6.*

Démonstration:
On considère deux trajectoires pour notre problème (3.1)-(3.3) $(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t})$, leurs données initiales respectives $(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$ et $(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)})$ appartenant à $\mathcal{X}$. On pose

$$u = u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \text{ et } \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{\partial\alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial\alpha^{(2)}}{\partial t}.$$

Par suite, $(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t})$ est solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}) = \frac{\partial\alpha}{\partial t}, \tag{3.171}$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} - \Delta\frac{\partial\alpha}{\partial t} - \Delta\alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.172}$$

$$u = \alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.173}$$

$$u(0) = u_0, \alpha(0) = \alpha_0, \frac{\partial\alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{3.174}$$

où

$$u_0 = u_0^{(1)} - u_0^{(2)}, \alpha_0 = \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)} \text{ et } \alpha_1 = \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}.$$

On considère maintenant la décomposition suivante :

$$(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}) = (\nu, \eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}) + (\omega, \xi, \frac{\partial\xi}{\partial t}),$$

où

$$(\nu, \eta, \frac{\partial\eta}{\partial t}) \text{ et } (\omega, \xi, \frac{\partial\xi}{\partial t}),$$

sont solutions de

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} - \Delta \nu = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \tag{3.175}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \eta}{\partial t} - \Delta \eta = -\nu - \frac{\partial \nu}{\partial t}, \tag{3.176}$$

$$\nu = \eta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.177}$$

$$\nu/_{t=0} = u_0, \eta/_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \eta}{\partial t}/_{t=0} = \alpha_1 \tag{3.178}$$

et

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta \omega + f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}) = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \tag{3.179}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta \xi = -\omega - \frac{\partial \omega}{\partial t}, \tag{3.180}$$

$$\omega = \xi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{3.181}$$

$$\omega/_{t=0} = \xi/_{t=0} = \frac{\partial \xi}{\partial t}/_{t=0} = 0, \tag{3.182}$$

respectivement. Nous allons maintenant établir quelques estimations à priori. Soit le problème (3.175)-(3.178). On multiplie (3.175) par ν puis par η, on intègre sur Ω et par parties, et on somme les équations résultantes. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nu\|^2 + \|\nabla \nu\|^2) + \|\nabla \nu\|^2 + \left\|\frac{\partial \nu}{\partial t}\right\|^2 = (\nu + \frac{\partial \nu}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}). \tag{3.183}$$

On multiplie (3.176) par η puis $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\eta\|^2 + \|\nabla \eta\|^2 + 2(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \eta)\big) + \|\nabla \eta\|^2 = -(\nu, \eta) - (\frac{\partial \nu}{\partial t}, \eta) + \left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2 \tag{3.184}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla \eta\|^2 + \left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2 = (\nu + \frac{\partial \nu}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}), \tag{3.185}$$

respectivement. On additionne (3.183), ϵ_3(3.184) et (3.185). On obtient en choisissant $\epsilon_3 > 0$ comme ϵ_1 apparaissant dans la démonstration du Théorème 3.5 de la Section 4

$$\frac{d\psi_7}{dt} + c\psi_7 + \left\|\frac{\partial \nu}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2 \leq 0, \tag{3.186}$$

où

$$\psi_7 = \|\nu\|^2 + \|\nabla \nu\|^2 + \epsilon_3 \|\eta\|^2 + (1 + \epsilon_3)\|\nabla \eta\|^2 + \left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2 + 2\epsilon_3(\frac{\partial \eta}{\partial t}, \eta) \tag{3.187}$$

satisfait

$$\psi_7 \geq c\Big(\|\nu\|_V^2 + \|\eta\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}\right\|^2\Big). \tag{3.188}$$

En particulier,

$$\frac{d\psi_7}{dt} + c\psi_7 \leq 0 \tag{3.189}$$

et le lemme de Gronwall donne

$$\psi_7(t) \leq e^{-ct}\psi_7(0). \tag{3.190}$$

Par suite, grâce à (3.188), on écrit

$$\|\nu(t)\|_V^2 + \|\eta(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \eta}{\partial t}(t)\right\|^2 \leq e^{-ct}(\|u_0\|_V^2 + \|\alpha_0\|_V^2 + \|\alpha_1\|^2), \tag{3.191}$$

en posant $d(t) = e^{-ct}$, $t \geq 0$, on a bien que $d(t)$ est continue et $d(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

On considère cette fois le problème (3.179)-(3.182). On multiplie (3.179) par ω puis par $\frac{\partial \omega}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties, on somme les égalités obtenues et on écrit

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\omega\|^2 + \|\nabla\omega\|^2) + \|\nabla\omega\|^2 + \left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\omega dx \\ &+ \int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx = (\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial t}).\end{aligned} \tag{3.192}$$

On multiplie (3.180) par $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla\xi\|^2 + \left\|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|^2 = -(\omega + \frac{\partial \omega}{\partial t}, \frac{\partial \xi}{\partial t}). \tag{3.193}$$

En sommant (3.192) et (3.193), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\omega\|^2 + \|\nabla\omega\|^2 + \|\nabla\xi\|^2 + \left\|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|^2) + \|\nabla\omega\|^2 + \left\|\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ \left\|\nabla\frac{\partial \xi}{\partial t}\right\|^2 = -\int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\omega dx - \int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx.\end{aligned} \tag{3.194}$$

On a alors, grâce à (3.8),

$$\left|\int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\omega dx\right| \leq c\int_\Omega (|u^{(1)}|^{2p} + |u^{(2)}|^{2p} + 1)|u||\omega|dx, \tag{3.195}$$

si $d = 2$, alors l'inégalité de Hölder donne

$$\int_\Omega |u^{(i)}|^{2p}|u||\omega|dx \leq c\|u^{(i)}\|_V^{2p}\|u\|\|\nabla\omega\|, \ i = 1, 2 \tag{3.196}$$

si $d = 3$, dans ce cas $p \leq 1$. On considère le cas le plus difficile $p = 1$, alors l'inégalité de Hölder implique

$$\int_\Omega |u^{(i)}|^2|u||\omega|dx \leq c\|u^{(i)}\|_V^2\|u\|\|\nabla\omega\|, \tag{3.197}$$

d'où, (3.195) devient

$$\left|\int_\Omega (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\omega dx\right| \leq c(\|u^{(1)}\|_V^{q_1} + \|u^{(2)}\|_V^{q_1} + 1)\|u\|\|\nabla\omega\|, \ q_1 \geq 0. \tag{3.198}$$

De façon analogue, on obtient

$$\left|\int_\Omega (f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))\frac{\partial\omega}{\partial t}dx\right| \le c(\|u^{(1)}\|_V^{q_2}+\|u^{(2)}\|_V^{q_2}+1)\|u\|_V \left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|,\ q_2\ge 0. \quad (3.199)$$

Enfin, de (3.194), (3.198) et (3.199), on écrit

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\|\omega\|^2+\|\nabla\omega\|^2+\|\nabla\xi\|^2+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\big)+\|\nabla\omega\|^2+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2\\&+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2 \le c(\|u^{(1)}\|_V^q+\|u^{(2)}\|_V^q+1)\|u\|_V^2,\ q\ge 0.\end{aligned} \quad (3.200)$$

On multiplie (3.180) par ξ, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\xi\|^2+\|\nabla\xi\|^2+2(\frac{\partial\xi}{\partial t},\xi)\big)+\|\nabla\xi\|^2=-(\omega,\xi)-(\frac{\partial\omega}{\partial t},\xi)+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2. \quad (3.201)$$

On additionne (3.200) et ϵ_4(3.201), où $\epsilon_4>0$ est choisi comme ϵ_2 apparaissant dans (3.154), et on a donc

$$\frac{d\psi_8}{dt}+c\psi_8+\left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2 \le c'(\|u^{(1)}\|_V^q+\|u^{(2)}\|_V^q+1)\|u\|_V^2, \quad (3.202)$$

où

$$\psi_8=\|\omega\|^2+\|\nabla\omega\|^2+\epsilon_4\|\xi\|^2+(1+\epsilon_4)\|\nabla\xi\|^2+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2+2\epsilon_4(\frac{\partial\xi}{\partial t},\xi) \quad (3.203)$$

satisfait

$$\psi_8 \ge c\Big(\|\omega\|_V^2+\|\xi\|_V^2+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\Big). \quad (3.204)$$

On multiplie maintenant (3.179) par $-\Delta\omega$ puis par $-\Delta\frac{\partial\omega}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a respectivement

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2-\int_\Omega\{f(u^{(1)})-f(u^{(2)})\}\Delta\omega dx=-(\frac{\partial\xi}{\partial t},\Delta\omega) \quad (3.205)$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\omega\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2+\int_\Omega\{f'(u^{(1)})\nabla u^{(1)}-f'(u^{(2)})\nabla u^{(2)}\}\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}dx\\&=-(\frac{\partial\xi}{\partial t},\Delta\frac{\partial\omega}{\partial t}).\end{aligned} \quad (3.206)$$

On multiplie enfin (3.180) par $-\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta\xi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2)+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\\&=(\omega,\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t})+(\frac{\partial\omega}{\partial t},\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}).\end{aligned} \quad (3.207)$$

Maintenant, en sommant (3.205), (3.206) et (3.207), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\Big)\\
&+\|\Delta\omega\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\\
&=\int_\Omega\{f(u^{(1)})-f(u^{(2)})\}\Delta\omega dx-\int_\Omega\{f'(u^{(1)})\nabla u^{(1)}-f'(u^{(2)})\nabla u^{(2)}\}\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}dx.
\end{aligned}\tag{3.208}$$

Par (3.8), on écrit

$$\left|\int_\Omega\{f(u^{(1)})-f(u^{(2)})\}\Delta\omega dx\right|\le c\int_\Omega(|u^{(1)}|^{2p}+|u^{(2)}|^{2p}+1)|u||\Delta\omega|dx.$$

Pour le cas le plus difficile, à savoir $p=1$ quand $d=3$, on a, grâce à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega\{f(u^{(1)})-f(u^{(2)})\}\Delta\omega dx\right|&\le c(\|u^{(1)}\|_V^2+\|u^{(2)}\|_V^2+1)\|u\|_V\|\Delta\omega\|\\
&\le c(\|u^{(1)}\|_V^4+\|u^{(2)}\|_V^4+1)\|u\|_V^2+\frac{1}{2}\|\Delta\omega\|^2.
\end{aligned}\tag{3.209}$$

En remarquant que :

$$f'(u^{(1)})\nabla u^{(1)}-f'(u^{(2)})\nabla u^{(2)}=(f'(u^{(1)})-f'(u^{(2)}))\nabla u^{(1)}+f'(u^{(2)})\nabla u,$$

on écrit alors, grâce à (3.8)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega\{f'(u^{(1)})\nabla u^{(1)}-f'(u^{(2)})\nabla u^{(2)}\}\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}dx\right|\\
&\le c\int_\Omega(|u^{(1)}|^{2p-1}+|u^{(2)}|^{2p-1}+1)|u||\nabla u^{(1)}|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx\\
&+c\int_\Omega(|u^{(2)}|^{2p}+1)|\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx.
\end{aligned}\tag{3.210}$$

On a, par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega(|u^{(1)}|+|u^{(2)}|+1)|u||\nabla u^{(1)}|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx\\
&\le(\|u^{(1)}\|_{L^\infty}+\|u^{(2)}\|_{L^\infty}+1)\int_\Omega|u||\nabla u^{(1)}|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx\\
&\le c(\|u^{(1)}\|_W+\|u^{(2)}\|_W+1)\|u\|_V\|u^{(1)}\|_W\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|\\
&\le c(\|u^{(1)}\|_W^2+\|u^{(2)}\|_W^2+1)\|u\|_V^2\|u^{(1)}\|_W^2+\frac{1}{4}\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2
\end{aligned}\tag{3.211}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|u^{(2)}|^2+1)|\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx &\le c(\|u^{(2)}\|^2_{L^\infty}+1)\|u\|_V\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\| \\ &\le c(\|u^{(2)}\|^2_W+1)\|u\|_V\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\| \\ &\le c(\|u^{(2)}\|^4_W+1)\|u\|^2_V+\frac{1}{4}\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2\end{aligned} \tag{3.212}$$

En collectant les estimations (3.209)-(3.212), l'inégalité (3.208) devient

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\Big) \\ &+\|\Delta\omega\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2 \\ &\le c(\|u^{(1)}\|^{q'}_W+\|u^{(2)}\|^{q'}_W+1)\|u\|^2_V,\ q'\ge 0.\end{aligned} \tag{3.213}$$

Enfin, la somme de (3.202) et (3.213) nous conduit à une inégalité de la forme

$$\frac{d\psi_9}{dt}+c\psi_9+\left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2_V+\left\|\Delta\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2\le c'(\|u^{(1)}\|^q_W+\|u^{(2)}\|^q_W+1)\|u\|^2_V, \tag{3.214}$$

où

$$\psi_9=\psi_8+\|\nabla\omega\|^2+\|\Delta\omega\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2 \tag{3.215}$$

satisfait

$$\psi_9\ge c\Big(\|\omega\|^2_W+\|\xi\|^2_W+\left\|\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\|^2_V\Big). \tag{3.216}$$

On conclut, grâce au lemme de Gronwall que

$$\psi_9(t)\le h(t)(\|u_0\|^2_V+\|\alpha_0\|^2_V+\|\alpha_1\|^2)$$

avec

$$h(t)=c'\int_0^t e^{-c(t-s)}(\|u^{(1)}(s)\|^q_W+\|u^{(2)}(s)\|^q_W+1)ds,\ q\ge 0,$$

La fonction h est bien continue. Conclusion, par application du Théorème 3.6, le semi-groupe $S(t)$, $t\ge 0$, associé à notre problème et défini sur $\mathcal{X}$ satisafait la propriété de régularisation.

■

Remarque 3.5. *Le caractère Lipschtzien en espace du semi-groupe $S(t)$ est une conséquence de l'unicité donnée dans la preuve du Théorème 3.2.*

Le résultat ci-dessous donne une condition de Hölder en temps du semi-groupe.

Théorème 3.8. *Soit $B \subset \Phi_1$ un ensemble borné. Le semi-groupe $S(t)$ engendré par les équations* (3.1)-(3.4) *est Hölder continu sur $[0,T] \times B$.*

Démonstration:
Soit deux instants distincts t_1 et t_2. Pour toute donnée initiale $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ appartenant à B, on sait alors qu'il existe un $R > 0$ tel que $\|(u_0, \alpha_0, \alpha_1)\|_\Phi \leq R$. On écrit alors, grâce à (3.111) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
&\|S(t_1)(u_0,\alpha_0,\alpha_1) - S(t_2)(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\|_\Phi \\
&= \|(u(t_1)-u(t_2), \alpha(t_1)-\alpha(t_2), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t_1) - \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t_2))\|_\Phi \\
&\leq \|(u(t_1)-u(t_2)\|_V + \|\alpha(t_1)-\alpha(t_2)\|_V + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t_1) - \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t_2)\right\| \\
&= \left\|\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial t}(\tau)d\tau\right\|_V + \left\|\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial\alpha}{\partial t}(\tau)d\tau\right\|_V + \left\|\int_{t_2}^{t_1} \frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(\tau)d\tau\right\| \\
&\leq \int_{t_2}^{t_1} \left\|\frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|_V d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(\tau)\right\|_V d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \left\|\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(\tau)\right\| d\tau \\
&\leq c|t_1-t_2|^{1/2} + \Big(\int_{t_2}^{t_1} \left\|\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(\tau)\right\|^2 d\tau\Big)^{1/2} |t_1-t_2|^{1/2},
\end{aligned}$$

où la constante c est dépendante de T. Nous allons maintenant estimer le terme

$$\int_{t_2}^{t_1} \left\|\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(\tau)\right\| d\tau.$$

Pour cela, on multiplie l'équation (3.2) par $\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}$, on intègre sur Ω et par parties. On arrive alors, grâce à l'inégalité de Hölder, à

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big\{\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2((\alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t}))\Big\} + c\left\|\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}\right\|^2 \\
&\leq c'\Big(\|u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\Big).
\end{aligned} \tag{3.217}$$

En intégrant (3.217) entre 0 et t_2 puis entre t_2 et t_1, on deduit, grâce aux estimations précédentes que

$$\int_{t_2}^{t_1} \left\|\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}(\tau)\right\| d\tau \leq c, \tag{3.218}$$

où c est une constante positive qui dépend de T et R. Enfin, on conclut que

$$\|S(t_1)(u_0,\alpha_0,\alpha_1) - S(t_2)(u_0,\alpha_0,\alpha_1)\|_\Phi \leq C|t_1-t_2|^{1/2}, \tag{3.219}$$

avec la constante positive C qui dépend de T et R, ce qui achève la preuve.

■

On a ainsi démontré le

Théorème 3.9. *Le semi-groupe $S(t)$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$.*

Remarque 3.6. *L'attracteur exponentiel contenant l'attracteur global, on voit que l'attracteur global est aussi de dimension fractale finie. Par conséquent, la dynamique du système peut être décrite par un nombre fini de degrés de liberté.*

3.6 Comportement spatial des solutions

On se propose maintenant d'étudier le comportement spatial des solutions pour le système d'équations (3.1)-(3.2). Pour ce faire, on introduit certaines notations. On considère la région $R = (0, +\infty) \times D$, dans l'espace $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, où D représente un domaine borné dans $\mathbb{R}^{d-1}$. On suppose que R est suffisamment régulier pour y appliquer le théorème de la divergence. Dans le cas où $d = 2$, on est reduit à une bande rectangulaire suivant la direction x_1 (voir, par exemple, [31] et les références qui y sont citées pour une description physique détaillée). Par ailleurs, pour le cas $d = 3$, R est un cylindre semi-infini suivant la direction x_1. C'est en effet ce dernier cas qui fera l'objet de notre analyse (voir, par exemple, [30], [29], [39] et les nombreuses références qui s'y trouvent). On considère alors le système d'équations (3.1)-(3.2) dans le cylindre semi-infini R associé aux conditions aux limites

$$u = \alpha = 0 \text{ sur } (0, +\infty) \times \partial D \times (0, T), \tag{3.220}$$

$$\begin{cases} u(0, x_2, x_3, t) = p(x_2, x_3, t), \\ \alpha(0, x_2, x_3, t) = q(x_2, x_3, t) \text{ sur } \{0\} \times D \times (0, T), \end{cases} \tag{3.221}$$

où ∂D désigne la frontière du domaine D et $T > 0$ est fixé. On considère aussi les conditions initiales suivantes :

$$u/_{t=0} = \alpha/_{t=0} = \frac{\partial \alpha}{\partial t}/_{t=0} = 0 \text{ sur } R. \tag{3.222}$$

On admet le caractère bien posé de notre problème. On commence notre analyse en considérant la fonction

$$F_\omega(z, t) = \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)\Big(u_{,1}(u + u_s) + \alpha_s(\alpha_{,1} + \alpha_{,1s})\Big) dads, \tag{3.223}$$

où $D(z) = \{x \in R, x_1 = z\}$ et ω est une constante positive arbitraire que l'on précisera plus tard. Les notations v_s et $v_{,1}$ désignent respectivement $\frac{\partial v}{\partial s}$ et $\frac{\partial v}{\partial x_1}$. En utilisant le théorème de la divergence et grâce aux conditions aux limites et initiales (3.220)-(3.222), on écrit

$$\begin{aligned} &F_\omega(z + h, t) - F_\omega(z, t) \\ &= \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{R(z,z+h)} (|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\alpha_t|^2 + 2F(u)) dx \\ &+ \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + |u_s|^2 + |\alpha_s|^2 + |\nabla \alpha_s|^2 + f(u)u) dxds \\ &+ \frac{\omega}{2} \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla \alpha|^2 + |\alpha_s|^2 + 2F(u)) dxds, \end{aligned} \tag{3.224}$$

où $R(z,z+h)=\{x\in R; z<x_1<z+h\}$. En divisant par h et en faisant tendre h vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_\omega}{\partial z}(z,t)\\&=\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{D(z)}(|u|^2+|\nabla u|^2+|\alpha_t|^2+2F(u))da\\&+\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\alpha_s|^2+|\nabla\alpha_s|^2+f(u)u)dads\\&+\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|\nabla\alpha|^2+|\alpha_s|^2+2F(u))dads.\end{aligned}\tag{3.225}$$

On considère maintenant une seconde fonction, à savoir

$$G_\omega(z,t)=\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)uu_{,1}dads.\tag{3.226}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$\begin{aligned}&G_\omega(z+h,t)-G_\omega(z,t)\\&=\int_0^t\int_{R(z,z+h)}\exp(-\omega s)[|\nabla u|^2+f(u)u-u\alpha_s+\frac{\omega}{2}|u|^2]dxds\\&+\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z,z+h)}|u|^2dx\end{aligned}\tag{3.227}$$

et un calcul direct de la différentielle de G_ω par rapport à z donne

$$\begin{aligned}&\frac{\partial G_\omega}{\partial z}(z,t)\\&=\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)[|\nabla u|^2+f(u)u-u\alpha_s+\frac{\omega}{2}|u|^2]dads\\&+\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{D(z)}|u|^2da.\end{aligned}\tag{3.228}$$

On peut toujours choisir $\omega>0$ assez grand pour que l'on ait

$$f(u)u+\frac{\omega}{2}|u|^2\geq C_1,\ C_1>0,\ \omega>2.\tag{3.229}$$

On pose $H_\omega=F_\omega+\tau G_\omega$, où la constante positive τ est prise suffisamment grande de sorte que

$$|u|^2+|\nabla u|^2+|\alpha_t|^2+2F(u)+\tau|u|^2\geq\frac{C_2}{2}(|u|^2+|\nabla u|^2+|\alpha_t|^2)\tag{3.230}$$

et

$$\begin{aligned}&|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\alpha_s|^2+|\nabla\alpha_s|^2+f(u)u+\tau(|\nabla u|^2+f(u)u-u\alpha_s)\\&+\frac{\omega}{2}\Big(|u|^2+|\nabla u|^2+|\nabla\alpha|^2+|\alpha_s|^2+2F(u)+\tau|u|^2\Big)\\&\geq\frac{C_2}{2}\Big(|u|^2+|\nabla u|^2+|\nabla\alpha|^2+|\alpha_s|^2+|u_s|^2+|\nabla\alpha_s|^2\Big),\end{aligned}\tag{3.231}$$

où C_2 est une constante strictement positive. En notant que

$$\frac{\partial H_\omega}{\partial z} = \frac{\partial F_\omega}{\partial z} + \tau \frac{\partial G_\omega}{\partial z},$$

on a alors pour les constantes ω et τ choisies comme ci-dessus

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_\omega}{\partial z}(z,t) \\ &\geq C_2 \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)\Big(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla \alpha|^2 + |\alpha_s|^2 + |u_s|^2 + |\nabla \alpha_s|^2\Big). \end{aligned} \tag{3.232}$$

L'étape suivante consiste à donner une estimation de $|H_\omega|$ en fonction de $\frac{\partial H_\omega}{\partial z}$. Pour cela, nous estimons séparément $|F_\omega|$ et $|G_\omega|$. Une application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire

$$\begin{aligned} &|F_\omega| \\ &\leq \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) u_{,1}^2 dads\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) u_s^2 dads\Big)^{1/2} \\ &+ \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) u_{,1}^2 dads\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) u^2 dads\Big)^{1/2} \\ &+ \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) \alpha_s^2 dads\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) \alpha_{,1}^2 dads\Big)^{1/2} \\ &+ \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) \alpha_s^2 dads\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) \alpha_{,1s}^2 dads\Big)^{1/2} \\ &\leq C_3 \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)\Big(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla \alpha|^2 + |\alpha_s|^2 + |u_s|^2 + |\nabla \alpha_s|^2\Big) dads, \end{aligned} \tag{3.233}$$

où C_3 est une constante positive que l'on peut écrire de façon explicite (voir, par exemple, [31]). De façon analogue, on écrit que

$$\begin{aligned} &|G_\omega| \\ &\leq \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) u^2 dads\Big)^{1/2} \Big(\int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s) u_{,1}^2 dads\Big)^{1/2} \\ &\leq C_4 \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla u|^2) dads, \end{aligned} \tag{3.234}$$

où C_4 est une constante strictement positive.

Remarque 3.7. *Les constantes positives C_3 et C_4 peuvent être déterminées en fonction des paramètres et de la géométrie de la section transversale.*

On conclut des estimations (3.233) et (3.234) que

$$|H_\omega| \leq C_5 \frac{\partial H_\omega}{\partial z}(z,t), \tag{3.235}$$

avec $C_5 = \frac{C_3 + \tau C_4}{C_2} > 0$. L'inégalité (3.235) est bien connue dans l'étude d'estimations spatiales (voir, [31], [40]). Ceci nous donne une alternative de Phragmén-Lindelöf.

En particulier, s'il existe $z_0 \geq 0$ tel que $H_\omega(z_0,t) > 0$, alors la solution satisfait l'estimation

$$H_\omega(z,t) \geq H_\omega(z_0,t)\exp(\frac{z-z_0}{C_5}),\ z \geq z_0. \tag{3.236}$$

Cette estimation donne des informations en termes de la mesure définie dans le cylindre. De plus, on a que l'expression

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}(|u|^2+|\nabla u|^2+|\alpha_t|^2+2F(u))dx+\tau\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}|u|^2dx\\
&+\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\alpha_s|^2+|\nabla\alpha_s|^2+f(u)u)dxds\\
&+\tau\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)|\nabla u|^2+f(u)u-u\alpha_s dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|\nabla\alpha|^2+|\alpha_s|^2+2F(u))dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)|u|^2dxds
\end{aligned} \tag{3.237}$$

tend vers l'infini de façon exponentielle. Par contre, lorsque $H_\omega(z,t) \leq 0$, pour tout $z \geq 0$, on en déduit que la solution est décroissante et on obtient une inégalité de la forme

$$-H_\omega(z,t) \leq -H_\omega(0,t)\exp(-\frac{z}{C_5}),\ z \geq 0. \tag{3.238}$$

L'estimation (3.238) entraîne que $H_\omega(z,t)$ tend vers zéro lorsque z tend vers l'infini, et on a

$$E_\omega(z,t) \leq E_\omega(0,t)\exp(-\frac{z}{C_5}),\ z \geq 0, \tag{3.239}$$

où

$$\begin{aligned}
&E_\omega(z,t)\\
&=\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}(|u|^2+|\nabla u|^2+|\alpha_t|^2+2F(u))dx+\tau\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}|u|^2dx\\
&+\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\alpha_s|^2+|\nabla\alpha_s|^2+f(u)u)dxds\\
&+\tau\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+f(u)u-u\alpha_s)dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|\nabla\alpha|^2+|\alpha_s|^2+2F(u))dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_{R(z)}\exp(-\omega s)|u|^2dxds
\end{aligned} \tag{3.240}$$

et $R(z) = \{x \in R, x_1 > z\}$. Finalement, en posant

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\omega(z,t) = &\frac{1}{2}\int_{R(z)}(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\alpha_t|^2 + 2F(u))dx + \tau\frac{1}{2}\int_{R(z)}|u|^2dx \\ &+ \int_{R(z)}(|\nabla u|^2 + |u_s|^2 + |\alpha_s|^2 + |\nabla\alpha_s|^2 + f(u)u)dxds \\ &+ \tau\int_{R(z)}(|\nabla u|^2 + f(u)u - u\alpha_s)dxds \\ &+ \tau\frac{\omega}{2}\int_{R(z)}(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla\alpha|^2 + |\alpha_s|^2 + 2F(u))dxds \\ &+ \tau\frac{\omega}{2}\int_{R(z)}|u|^2dxds,\end{aligned} \tag{3.241}$$

on a le résultat suivant :

Théorème 3.10. *Soit $(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t})$ une solution régulière pour le problème défini par* (3.1)-(3.2)*, les conditons aux limites* (3.220)-(3.221) *et les conditions initiales* (3.222)*. Alors, soit la solution satisfait la condition asymptotique* (3.237)*, soit elle satisfait l'estimation suivante :*

$$\mathcal{E}_\omega(z,t) \leq E_\omega(0,t)\exp(\omega t - \frac{z}{C_5}),\ z \geq 0, \tag{3.242}$$

où l'énergie $\mathcal{E}_\omega$ est définie en (3.241) *et E_ω est donnée par* (3.240)*.*

Chapitre 4

Système de champ de phase de type Caginalp avec un terme non linéaire logarithmique

On considère comme au chapitre précédent une généralisation du système de champ de phase de Caginalp. Cette fois-ci, le potentiel que nous considérons est de type logarithmique (voir, par exemple, [41], [42] et [43]). Nous examinons l'existence et l'unicité de solutions mais aussi le comportement asymptotique de celles-ci. On prouve ainsi l'existence de l'attracteur global du système.

On considère le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, && (4.1)\\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -u - \frac{\partial u}{\partial t}, && (4.2)\\ u = \alpha &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, && (4.3)\\ u|_{t=0} = u_0, \alpha|_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}|_{t=0} &= \alpha_1, && (4.4) \end{aligned}$$

où, comme précédemment, u est le paramètre d'ordre ou champ de phase, α représente une primitive de la température relative θ (voir le chapitre précédent), $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2$ ou 3, un domaine borné régulier et $\partial\Omega$ désigne le bord régulier, disons de classe C^1, de Ω.

Hypothèses sur le potentiel f :

Le potentiel f est défini comme suit :

$$f(s) = k_1 \ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right) - k_0 s, \tag{4.5}$$

avec $s \in]-1, +1[$ et $0 < k_1 < k_0$. On a alors

$$f'(s) = \frac{2k_1}{1-s^2} - k_0. \tag{4.6}$$

De plus, on voit que

$$f \text{ est de classe } C^\infty, \tag{4.7}$$

$$f(0) = 0, \tag{4.8}$$

$$-c_0 \leq F(s) \leq f(s)s + c_0, \tag{4.9}$$

où $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$ et $c_0 \geq 0$,

$$f'(s) \geq -c_1,\ c_1 \geq 0. \tag{4.10}$$

4.1 Estimations à priori

Remarque 4.1. *Nous ferons des calculs formels ici, mais tout en ayant à l'esprit que tous ces calculs peuvent être rigoureusement justifiés en approchant le potentiel f par une fonction plus régulière de classe C^1, nous permettant ainsi d'obtenir toutes les estimations via la méthode de Galerkin. On suppose à priori que $\|u\|_{L^\infty([0,T]\times\Omega)} < 1$ et que $\|u_0\|_{L^\infty} < 1$.*

On multiplie (4.1) par u puis par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega f(u)udx = (\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u) \tag{4.11}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 = (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}), \tag{4.12}$$

respectivement. On multiplie (4.2) par α puis par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a respectivement

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + 2(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \alpha)\Big) + \|\nabla\alpha\|^2 \\ &= -(u, \alpha) - (\frac{\partial u}{\partial t}, \alpha) + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\end{aligned} \tag{4.13}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -(\frac{\partial\alpha}{\partial t}, u) - (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}).\end{aligned} \tag{4.14}$$

En sommant (4.11), (4.12) et (4.14), on a, grâce à (4.9)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx + \|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega F(u)dx \\ &+ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c_0|\Omega|.\end{aligned} \tag{4.15}$$

On additionne maintenant ϵ_1(4.13) et (4.15), avec $\epsilon_1 > 0$ petit, on a alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{dE_1}{dt} + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega F(u)dx + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \epsilon_1\|\nabla\alpha\|^2 \leq c_0|\Omega| - \epsilon_1(u,\alpha) - \epsilon_1(\frac{\partial u}{\partial t},\alpha) + \epsilon_1\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2,\end{aligned} \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned}E_1 =&\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx + \epsilon_1\|\alpha\|^2 + (1+\epsilon_1)\|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ 2\epsilon_1(\frac{\partial \alpha}{\partial t},\alpha).\end{aligned} \tag{4.17}$$

En choisissant ϵ_1 tel que :

$$1 - \epsilon_1 > 0 \tag{4.18}$$

et

$$\epsilon_1\|\alpha\|^2 + (1+\epsilon_1)\|\nabla\alpha\|^2 + 2\epsilon_1(\frac{\partial \alpha}{\partial t},\alpha) \geq c(\|\alpha\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2), \tag{4.19}$$

E_1 satisfait

$$E_1 \geq c\Big(\|u\|_V^2 + \|\alpha\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega F(u)dx\Big). \tag{4.20}$$

On en déduit alors, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une inégalité de la forme

$$\frac{dE_1}{dt} + cE_1 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c'. \tag{4.21}$$

Le lemme de Gronwall implique que $u, \alpha \in L^\infty(0,T;V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$. On multiplie maintenant (4.1) par $-\Delta u$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2 dx = -(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \Delta u). \tag{4.22}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.9) donnent

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leq c\|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2, \tag{4.23}$$

ce qui donne $u \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;W)$. On multiplie (4.2) par $-\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta\alpha\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -(\nabla u, \nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}) + (\frac{\partial u}{\partial t}, \Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}).\end{aligned} \tag{4.24}$$

L'inégalité de Hölder entraîne

$$\frac{d}{dt}(\|\Delta\alpha\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\Delta\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq \|\nabla u\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2. \tag{4.25}$$

Cela implique que $\alpha \in L^\infty(0,T;W)$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;W)$. On dérive à présent l'équation (4.1) par rapport au temps et on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta \frac{\partial u}{\partial t} + f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}. \tag{4.26}$$

De l'équation (4.2), on tire

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \Delta \alpha - \frac{\partial \alpha}{\partial t} - u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.27}$$

On voit très clairement d'après les estimations ci-dessus que $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H)$, d'où, en multipliant (4.26) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, et en intégrant sur Ω et par parties, on trouve, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{d}{dt}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \leq c(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right\|^2). \tag{4.28}$$

Ceci implique que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$. En associant (4.23) et (4.28), on a alors que $u \in L^\infty(0,T;W)$. En posant

$$q = \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha, \text{ et en notant que } q = 0 \text{ sur } \partial\Omega,$$

l'équation (4.2) devient une équation parabolique de la forme

$$\frac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = -u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{4.29}$$

On sait, d'après les estimations ci-dessus que $u, \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V)$. On déduit, par la H^2-régularité pour les problèmes paraboliques (voir, par exemple, [20]), une estimation de q dans $L^\infty(0,T;W \cap V)$. Puisque $\alpha \in L^\infty(0,T;W \cap V)$, on conclut que $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0,T;W)$ $(W = H^2(\Omega))$. Ainsi,

$$\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2, \ \forall\, t \in [0,T], \tag{4.30}$$

où c_2 dépend seulement de T et des données initiales.

4.2 Existence et unicité de la solution

Une des difficultés ici, est justement de s'assurer que le paramètre d'ordre u reste dans l'intervalle physique $(-1,+1)$, pour donner un sens aux équations considérées. Il faut noter que les valeurs -1 et $+1$ correspondent aux phases pures. Pour prouver le caractère bien posé de notre problème, il suffit d'obtenir une estimation de $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$ dans $L^\infty((0,T)\times\Omega)$ (voir [2]).On réécrit le problème (4.1)-(4.4) ci dessous :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}, && (4.31)\\
\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha &= -u - \frac{\partial u}{\partial t}, && (4.32)\\
u = \alpha &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, && (4.33)\\
u|_{t=0} = u_0, \alpha|_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}|_{t=0} &= \alpha_1, && (4.34)
\end{aligned}$$

Nous commençons par le résultat suivant :

Lemme 4.1. *On suppose que $u_0 \in W \cap V$ et que $\|u_0\|_{L^\infty} < 1$. Alors le champ de phase u satisfait la propriété de séparation stricte, c'est-à-dire,*

$$\|u(t)\|_{L^\infty} < 1 - \delta,\ t \in [0,T],\ \forall\ T > 0,$$

pour un certain $\delta \in (0,1)$ dépendant de T.

Démonstration:
On sait, d'après la section précédente que $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0,T;W)$ et que $W \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$, d'où $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$.

On pose $v = u - \delta$, où $\delta \in (0,1)$ est à préciser. On a

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v + f(u) - f(\delta) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(\delta). \tag{4.35}$$

Posons maintenant $v^+ = \max(0, v)$. On obtient en réécrivant (4.35) avec v^+ à la place de v, l'équation suivante :

$$\frac{\partial v^+}{\partial t} - \Delta v^+ + f(u) - f(\delta) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(\delta). \tag{4.36}$$

On multiplie (4.36) par v^+ et on intègre sur Ω et par parties. On trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^+\|^2 + \|\nabla v^+\|^2 + \int_\Omega (f(u) - f(\delta))v^+ dx = (\frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(\delta), v^+). \tag{4.37}$$

Notons au passage que par définition, $v^+ = 0$ sur $\partial\Omega$, car $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Alors, grâce à (4.10),

$$\left| \int_\Omega (f(u) - f(\delta))v^+ dx \right| \leq c_1 \|v^+\|^2, \tag{4.38}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v^+\|^2 + \|\nabla v^+\|^2 \leq c_1\|v^+\|^2 + (\frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(\delta), v^+). \tag{4.39}$$

En choisissant δ telle que :

$$f(\delta) \geq \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\|_{L^\infty} \text{ et } \|u_0\|_{L^\infty} < \delta, \tag{4.40}$$

on déduit alors que

$$\frac{d}{dt}\|v^+\|^2 + \|\nabla v^+\|^2 \leq 2c_1\|v^+\|^2. \tag{4.41}$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\|v^+\|^2 + \leq 2c_1\|v^+\|^2, \tag{4.42}$$

le lemme de Gronwall donne, en notant que $v^+(0) = 0$,

$$\|v^+(t)\|^2 \leq 0, \tag{4.43}$$

c'est-à-dire,

$$v^+(t) = 0,\ \forall\ t \geq 0 \tag{4.44}$$

et comme $v \leq v^+$, donc

$$v(t,x) \leq 0, \ \forall\, t \geq 0, \ \text{p.p}\ x \in \Omega \ (t \in [0,T]),$$

d'où

$$u(t,x) \leq \delta, \ \forall\, t \geq 0, \ \text{p.p}\ x \in \Omega. \tag{4.45}$$

La fonction f étant impaire, on pose maintenant $v = u - \lambda$, avec $\lambda = -\delta$. On définit la quantité $v_- = \min(0, v)$. En procédant comme plus haut, remplaçant δ par λ, on obtient

$$\|v_-(t)\|^2 \leq 0, \ \text{car}\ v_-(0) = 0. \tag{4.46}$$

Par suite,

$$v_-(t) = 0, \ \forall\, t \geq 0.$$

Or, $v \geq v_-$ et

$$v(t,x) \geq 0, \ \forall\, t \geq 0 \ \text{p.p}\ x \in \Omega,$$

c'est-à-dire,

$$u(t,x) \geq \lambda,$$

ce qui équivaut à

$$u(t,x) \geq -\delta, \ \forall\, t \geq 0, \ \text{p.p}\ x \in \Omega. \tag{4.47}$$

Finalement,

$$\|u\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq \delta < 1. \tag{4.48}$$

Ainsi, le paramètre d'ordre u est strictement séparé des valeurs singulières de f.

■

Théorème 4.1. *On prend $(u_0, \alpha_0, \alpha_1)$ dans $(W \cap V) \times (W \cap V) \times (W \cap V)$ telle que $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} < 1$. Alors le problème (4.31)-(4.34) a une solution unique $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ telle que $u \in L^\infty(0,T; W \cap V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, $\alpha \in L^\infty(0,T; W \cap V)$ et $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in L^\infty(0,T; W \cap V)$, $\forall\ T > 0$. En outre, il existe une constante $\delta = \delta(T, u_0) \in (0,1)$ telle que*

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \delta, \ \forall\, t \in [0,T], \quad \forall\ T > 0.$$

Démonstration:

Existence. Pour l'existence d'une solution du problème (4.31)-(4.34), on régularise d'abord la fonction f par une fonction de classe C^1 f_δ définie par :

$$f_\delta(s) = \begin{cases} f(-\delta) + f'(-\delta)(s+\delta), & \text{si} \quad s \in (-\infty, \delta], \\ f(s) & \text{si} \quad s \in [-\delta, \delta], \\ f(\delta) + f'(\delta)(s-\delta) & \text{si} \quad s \in [\delta, +\infty), \end{cases}$$

où δ est la constante apparaissant ci-dessus. On peut choisir δ telle que :

$$f'(\delta) \geq 0 \ (\text{ respectivement } f'(-\delta) \leq 0)$$

quitte à prendre δ plus petit.

On considère alors le même problème défini par (4.31)-(4.34) avec f_δ à la place de f et u^δ au lieu de u, à savoir

$$(\mathcal{P}_\delta) \begin{cases} \frac{\partial u^\delta}{\partial t} - \Delta u^\delta + f_\delta(u^\delta) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u^\delta - \frac{\partial u^\delta}{\partial t}, \\ u^\delta = \alpha = 0 \ \text{aux bords}\ , \\ u^\delta/_{t=0} = u_0^\delta, \alpha/_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}/_{t=0} = \alpha_1. \end{cases}$$

On sait que un tel problème admet une solution si les fonctions f_δ et F_δ satisfont les mêmes propriétés que f et F (voir [42]). On énonce pour cela un lemme.

Lemme 4.2. *On pose*

$$F_\delta = \int_0^s f_\delta(\tau)d\tau.$$

Les fonctions f_δ et F_δ possèdent les propriétés suivantes :

$$f'_\delta(s) \geq -c_1, \ \textit{et} \ -c_0 \leq F_\delta(s) \ \forall \ s \in \mathbb{R},$$

où c_0 et c_1 sont les constantes positives qui apparaissent dans (4.10) *et* (4.11) *(à condititon de prendre δ plus petit si besoin).*

Démonstration:
En remarquant que tous les cas se traitent de façon similaire, nous détaillerons un seul cas et omettrons les autres. On considère le cas où $s \in]\delta, +\infty)$ et on a

$$f_\delta(s) = f'(\delta)(s-\delta) + f(\delta).$$

On voit clairement que

$$f'_\delta(s) = f'(\delta) \geq -c_1, \ \forall \ s \in]\delta, +\infty).$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} F_\delta(s) &= \int_0^s f_\delta(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\delta f_\delta(\tau)d\tau + \int_\delta^s f_\delta(\tau)d\tau \\ &= \int_0^\delta f(\tau)d\tau + \int_\delta^s f_\delta(\tau)d\tau \\ &= F(\delta) + \int_\delta^s f_\delta(\tau)d\tau \\ &\geq -c_0 \ (\text{car} \ \int_\delta^s f_\delta(\tau)d\tau \geq 0). \end{aligned}$$

■

Par conséquent, d'après le chapitre précédent, on sait que le problème $(\mathcal{P}_\delta)$ admet au moins une solution u^δ telles que les estimations établies ci-dessus soient valides ici. En particulier,

$$\|u^\delta(t)\|_{L^\infty} \leq \delta, \ \forall \ t \geq 0,$$

par suite,

$$f_\delta(u^\delta) = f(u^\delta)$$

et u^δ est également solution de (4.31)-(4.34).

Unicité. Soit $(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t})$ deux solutions de (4.31)-(4.34) et $(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$ et $(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)})$ leurs données initiales associées. On pose

$$u = u^{(1)} - u^{(2)}, \alpha = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)} \text{ et } \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t} - \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t}.$$

Alors $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ vérifie :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{4.49}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{4.50}$$

$$u = \alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{4.51}$$

$$u(0) = u_0, \alpha(0) = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{4.52}$$

où $u_0 = u_0^{(1)} - u_0^{(2)}$, $\alpha_0 = \alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}$ et $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} - \alpha_1^{(2)}$, ce qui équivaut à

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + l(t)u = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{4.53}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{4.54}$$

$$u = \alpha = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{4.55}$$

$$u(0) = u_0, \alpha(0) = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1, \tag{4.56}$$

où $l(t) = \int_0^1 f'(su_1(t) + (1-s)u_2(t))ds$. La non linéarité f étant de classe C^1, et les u_i strictement séparés de ± 1, $i = 1, 2$, on a

$$\|l(t)\|_{L^\infty} \leq c, \ \forall \ t \geq 0, \tag{4.57}$$

où la constante c dépend de δ_i, $i = 1, 2$. On multiplie (4.53) par u, puis par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On obtient respectivement

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega l(t)u^2 dx = (\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u) \tag{4.58}$$

et

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega l(t)u\frac{\partial u}{\partial t}dx = (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}). \tag{4.59}$$

On multiplie (4.54) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla \alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 = -(\frac{\partial \alpha}{\partial t}, u) - (\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}). \tag{4.60}$$

En additionnant (4.58), (4.59) et (4.60), on aboutit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (4.57) à une inégalité du type

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla \alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) + \|\nabla u\|^2 \\ &+ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 \leq c\|u\|^2, \end{aligned} \tag{4.61}$$

où c dépend de δ. On a en particulier,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla \alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) \leq c\Big(\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla \alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\Big). \tag{4.62}$$

Le lemme de Gronwall nous donne

$$\|u(t)\|_V^2 + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)\right\|^2 \leq e^{(ct)}(\|u_0\|_V^2 + \|\alpha_0\|_V^2 + \|\alpha_1\|^2). \tag{4.63}$$

D'où, l'unicité (pour $u_0^{(1)} = u_0^{(2)}$, $\alpha_0^{(1)} = \alpha_0^{(2)}$ et $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)}$) et à la continue dépendance par rapport aux données initiales, ce qui complète la preuve du théorème. ■

D'après le Théorème 4.1, on peut définir le semi-groupe

$$S(t) : X \to X \; S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \; \forall \, t \geq 0,$$

où $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ est l'unique solution de (4.31)-(4.34) et

$$X = \{(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t}) \in (W \cap V)^3; \|u\|_{L^\infty} < 1\}.$$

4.3 Dissipativité et attracteur global

Cette section est consacrée à l'étude de la dissipativité de notre système ainsi qu'à l'existence de l'attracteur global associé à notre semi-groupe. Par ailleurs, une difficulté survient : celle de la dépendance de δ aux données initiales et au temps T ; ici la constante δ est celle apparaissant dans la propriété de séparation stricte satisfaite par le paramètre d'ordre u, notamment $\|u_0\|_{L^\infty((0,T)\times\Omega)} \leq \delta < 1$. Notre objectif est donc d'avoir une estimation qui ne dépende ni des données initiales, ni du temps. Pour ce faire, on procède comme dans [2] ; on peut également voir par exemple, [42], [44], [45] et les nombreuses références citées.

4.3.1 Dissipativité

Soit $R > 0$ fixé. On suppose que les données initiales satisfont

$$\frac{1}{1 - \|u_0\|_{L^\infty}} + \|u_0\|_W + \|\alpha_0\|_W + \|\alpha_1\|_W \leq R. \tag{4.64}$$

D'après les estimations (4.20)-(4.21) et le lemme de Gronwall, on sait qu'il existe $t_1 = t_1(R) \geq 0$ telle que

$$\|\alpha(t)\|_W \leq R, \; \forall \, t \geq t_1. \tag{4.65}$$

L'injection continue $W \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ donne

$$\|\alpha(t)\|_{L^\infty} \leq R_1, \; \forall \, t \geq 0. \tag{4.66}$$

On pose maintenant

$$y_+(t) = \max(\beta, 1 - \gamma t), \tag{4.67}$$

où $0 < \beta < 1$ et $\gamma > 0$ sont à préciser. En posant

$$t_0 = \frac{1 - \beta}{\gamma}, \tag{4.68}$$

on a alors

$$y_+(t) = \begin{cases} 1-\gamma t, & \text{si} \quad 0 \le t \le t_0, \\ \beta, & \text{si} \quad t \ge t_0. \end{cases} \tag{4.69}$$

On définit enfin la variable θ par :

$$\theta = u - y_+, \tag{4.70}$$

on a alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + f(u) - f(y_+) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(y_+) - y'_+(t), \tag{4.71}$$

où y'_+ est la dérivée de y_+.

Pour le cas $t < t_0$:

l'équation (4.71) s'écrit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + f(u) - f(1-\gamma t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(1-\gamma t) + \gamma. \tag{4.72}$$

On pose maintenant

$$\theta^+ = \max(0, \theta), \tag{4.73}$$

et on réécrit (4.72) avec θ^+ à la place de θ. On a

$$\frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \Delta\theta^+ + f(u) - f(1-\gamma t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(1-\gamma t) + \gamma. \tag{4.74}$$

En multipliant (4.74) par θ^+ et en intégrant sur Ω et par parties, on obtient, en notant que $\theta^+ = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta^+\|^2 + \|\nabla\theta^+\|^2 + \int_\Omega (f(u) - f(1-\gamma t))\theta^+ dx = (\frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(1-\gamma t) + \gamma, \theta^+). \tag{4.75}$$

On a alors, grâce à (4.9)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta^+\|^2 + \|\nabla\theta^+\|^2 \le c\|\theta^+\|^2 + (\frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(1-\gamma t) + \gamma, \theta^+). \tag{4.76}$$

En choisissant γ telle que

$$\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \right\|_{L^\infty} \le f(1-\gamma t) - \gamma, \tag{4.77}$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta^+\|^2 + \|\nabla\theta^+\|^2 \le c\|\theta^+\|^2. \tag{4.78}$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\|\theta^+\|^2 \le c\|\theta^+\|^2. \tag{4.79}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (4.79) implique

$$\|\theta^+(t)\| \le 0, \text{ car } \theta^+(0) = 0, \tag{4.80}$$

d'où

$$\theta^+(t) = 0 \tag{4.81}$$

et

$$u(x,t) \leq 1 - \gamma t, \forall\ t \neq t_0,\ x \in \Omega. \tag{4.82}$$

On fixe maintenant

$$y_-(t) = \min(-\beta, -1 + \gamma t), \tag{4.83}$$

avec $0 < \beta < 1$ et $\gamma > 0$ à préciser. On fixe encore

$$t_0 = \frac{1-\beta}{\gamma}.$$

On a alors

$$y_-(t) = \begin{cases} -1 + \gamma t, & \text{si} \quad 0 \leq t < t_0, \\ -\beta, & \text{si} \quad t \geq t_0. \end{cases} \tag{4.84}$$

On pose cette fois

$$\theta = u - y_-. \tag{4.85}$$

On a alors

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + f(u) - f(y_-) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(y_-) - y_-'(t), \tag{4.86}$$

où y_-' est la dérivée de y_-.

On a dans ce cas,

$$y_-(t) = -1 + \gamma t$$

et (4.86) devient :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta\theta + f(u) - f(-1+\gamma t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(-1+\gamma t) - \gamma. \tag{4.87}$$

On définit maintenant la variable suivante :

$$\theta_- = \min(0, \theta) \tag{4.88}$$

et on réécrit (4.87), avec θ_- en lieu et place de θ. On a

$$\frac{\partial \theta_-}{\partial t} - \Delta\theta_- + f(u) - f(-1+\gamma t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(-1+\gamma t) - \gamma. \tag{4.89}$$

On multiplie (4.89) par θ_-, on intègre sur Ω et par parties. On trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\theta_-\|^2 + \|\nabla\theta_-\|^2 + \int_\Omega (f(u) - f(-1+\gamma t))\theta_- dx = (\frac{\partial \alpha}{\partial t} - f(-1+\gamma t) - \gamma, \theta_-), \tag{4.90}$$

car $\theta_- = 0$ sur $\partial\Omega$. On prend γ telle que

$$\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t) \right\|_{L^\infty} \leq f(-1+\gamma t) + \gamma$$

et on obtient, grâce à (4.9), l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}\|\theta_-\|^2 + \|\nabla\theta_-\|^2 \leq c\|\theta_-\|^2. \tag{4.91}$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\|\theta_-\|^2 \leq c\|\theta_-\|^2. \tag{4.92}$$

On a, par le Lemme de Gronwall et le fait que $\theta_-(0) = 0$,

$$\|\theta_-(t)\| \leq 0. \tag{4.93}$$

Par conséquent,

$$\theta_-(t) = 0, \tag{4.94}$$

c'est-à-dire,

$$u(x,t) \geq -1 + \gamma t, \ \forall\ t \neq t_0\ (t \geq 0). \tag{4.95}$$

On a ainsi

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 - \gamma t, \ \forall\ t < t_0\ (t \geq 0).$$

Pour le cas $t > t_0$:

L'équation (4.71) devient :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta + f(u) - f(\beta) = \frac{\partial\alpha}{\partial t} - f(\beta). \tag{4.96}$$

En procédant comme ci-dessus, avec β pris telle que

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|_{L^\infty} \leq f(\beta),$$

on trouve

$$u(x,t) \leq \beta, \ \forall\ t \neq t_0. \tag{4.97}$$

D'autre part, on déduit dans ce cas que

$$y_-(t) = -\beta$$

et que l'équation (4.85) s'écrit :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - \Delta\theta + f(u) - f(-\beta) = \frac{\partial\alpha}{\partial t} - f(-\beta). \tag{4.98}$$

Par analogie avec ce qui précède, on a

$$u(x,t) \geq -\beta, \ \forall\ t \neq t_0, \ x \in \Omega, \tag{4.99}$$

où β est telle que $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|_{L^\infty} \leq f(-\beta)$. Enfin, pour tout $t \geq 0$, on a bien

$$u(x,t) \geq y_-(t), \ \forall\ t \neq t_0, \ x \in \Omega. \tag{4.100}$$

Par conséquent, de (4.97) et (4.99), on en déduit que

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \beta, \ \forall\ t > t_0. \tag{4.101}$$

En prenant maintenant $t \geq t_0 \geq t_1$, on a alors, d'après (4.20)-(4.21) et le Lemme de Gronwall,

$$\|u(t)\|_{L^\infty} \leq \beta, \tag{4.102}$$

où $\beta = \beta(R)$. En prenant enfin R_2 assez grand (par exemple, $R_2 = \max\{R, R_1\}$), on obtient que la boule

$$\mathcal{B}_0 := B_{R_2} \cap X,$$

est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, sur X (cf, la Définition 2.5), B_{R_2} étant une boule de $(W \cap V)^3$ de centre 0 et de rayon $R_2 > 0$.

On vient de prouver le

Théorème 4.2. *Le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, associé à notre système est dissipatif sur X, c'est-à-dire, qu'il possède un ensemble borné absorbant $\mathcal{B}_0$ dans X.*

Un conséquence immédiate du théorème 4.2 est le

Corollaire 4.1. *L'ensemble*

$$\beta_0 = \bigcup_{t \geq t_0} S(t)\mathcal{B}_0,$$

est borné et invariant pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$; $\mathcal{B}_0$ étant la boule absorbante pour le semi-groupe $S(t)$ dans X dont l'existence a été établie dans le théorème ci-dessus.

Remarque 4.2. *Pour établir l'existence de l'attracteur global $\mathcal{A}$ du système, il suffit de se placer dans le borné absorbant dans l'espace X. On se ramène alors au cas du chapitre précédent.*

Chapitre 5

Attracteurs pour un modèle de champ de phase de type Caginalp dans un domaine non borné

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au même problème considéré dans les deux premiers chapitres (avec une légère modification dans l'équation pour α), cette fois-ci dans un domaine non borné, à savoir $\mathbb{R}^3$ (en fait, $\Omega = \mathbb{R}^3$ est en quelque sorte une approximation lorsque le domaine devient très grand), ce qui rend l'analyse mathématique difficile. Le système d'équations s'écrit,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{R}^3, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha + \lambda \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}, \ \lambda > 0, \text{ dans } [0,T] \times \mathbb{R}^3, \tag{5.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \alpha|_{t=0} = \alpha_0, \frac{\partial \alpha}{\partial t}|_{t=0} = \alpha_1, \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{5.3}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} |u(t,x)| = \lim_{|x| \to \infty} |\alpha(t,x)| = 0, \ \forall \ t \in [0,T], \tag{5.4}$$

où $u = u(t,x)$ est le paramètre d'ordre et $\alpha = \alpha(t,x)$ la température relative. La principale difficulté ici est la perte du caractère compact de l'injection de Sobolev

$$H^1(\mathbb{R}^3) \subset L^p(\mathbb{R}^3), \ \forall \ p \in [2,6[.$$

Dans ce contexte, il nous est impossible de prouver par exemple l'existence d'attracteurs en exploitant directement des résultats de compacité. Pour contourner cette difficulté, nous utiliserons une méthode appliquée avec succès par plusieurs auteurs (voir, par exemple, [46], [47], [48], [49] et [50]), basée en fait sur une décompositon de la solution à l'aide des fonctions « cut-off »appropriées.

Nous établirons le caractère bien posé du système. Par suite, nous discuterons de l'existence d'un ensemble borné absorbant. Enfin, nous étudierons le comportement asymptotique, en termes d'attracteurs, de (5.1)-(5.4).

5.1 Hypothèses.

On fait les hypothèses suivantes sur f :

$$f(0) = 0, \tag{5.5}$$
$$|f'(0)| \leq c_0, c_0 \geq 0, \tag{5.6}$$
$$|f''(s)| \leq c_1(1 + |s|^\gamma), \forall s \in \mathbb{R}, c_1 > 0, \tag{5.7}$$
$$\lim_{|s|\to\infty} \inf \frac{f(s)}{s} \geq 0, \tag{5.8}$$
$$f(s)s \geq c_2 s^2, \forall s \in \mathbb{R}, c_2 > 0, \tag{5.9}$$
$$\lim_{|s|\to\infty} \inf \frac{f(s)s - c_3 F(s)}{s^2} \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}, c_3 > 0, \tag{5.10}$$
$$f'(s) \geq -c_4, \forall s \in \mathbb{R}, c_4 \geq 0, \tag{5.11}$$

où $f = F'$.

Pour $u \in V$, on pose :

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\mathbb{R}^3} F(u(x))dx,$$

La quantité $\mathcal{F}(u)$ est bien définie d'après (5.5)-(5.7) et l'injection $V \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u) &= \int_{\mathbb{R}^3} F(u(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_0^u f(s)dsdx \end{aligned} \tag{5.12}$$

et on a, par (5.5),

$$f(s) = \int_0^s f'(\tau)d\tau. \tag{5.13}$$

En outre, $f'(\tau) = f'(0) + \int_0^\tau f''(\zeta)d\zeta$, par (5.6)-(5.7), et on a donc

$$\begin{aligned} |f'(\tau)| &\leq |f'(0)| + \int_0^\tau |f''(\zeta)|d\zeta \\ &\leq c_0 + c_1 \int_0^\tau (1 + |\zeta|^\gamma)d\zeta \\ &\leq c_0 + c_1(|\tau| + |\tau|^{\gamma+1}). \end{aligned} \tag{5.14}$$

Par suite, (5.13) et (5.14) entraînent

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq \int_0^s [c_0 + c_1(|\tau| + |\tau|^{\gamma+1})]d\tau \\ &\leq c_0|s| + c_1(|s|^2 + |s|^{\gamma+2}). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Enfin, (5.12)-(5.15), impliquent, en notant que tout cela a du sens que si $\gamma \leq 3$,

$$\mathcal{F}(u) \leq c_0\|u\|^2 + c_1(\|u\|^3_{L^3(\mathbb{R}^3)} + \|u\|^6_{L^6(\mathbb{R}^3)}). \tag{5.16}$$

On conclut par l'injection continue $V \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

5.1.1 Formulation faible.

Soit $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{H}$.

$$\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v\rangle + (\nabla u, \nabla v) + \langle f(u), v\rangle = \langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, v\rangle, \ \forall v \in V, \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned} &(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}, w) + \langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, w\rangle + (\nabla \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \nabla w) + (\nabla \alpha, \nabla w) \\ &= -(u, w) - \langle \frac{\partial u}{\partial t}, w\rangle, \ \forall \ w \in V. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ainsi, une solution faible de (5.1)-(5.4) est un triplet $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ tel que : $u \in C([0,T]; H) \cap L^2(0,T;V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V')$, $\alpha \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;V)$, $\frac{\partial \alpha}{\partial t} \in C([0,T];H) \cap L^2(0,T;V')$, $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \in L^2(0,T;H)$, et qui vérifie (5.17)-(5.18) avec

$$u(0) = u_0 \text{ dans } H,$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ dans } V$$

et

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t}(0) = \alpha_1 \text{ dans } H.$$

5.2 Existence et unicité de solutions.

Nous établirons l'existence d'une solution faible du problème (5.1)-(5.4) à l'aide d'approximations de Galerkin. Nous commencerons par énoncer un lemme (voir, [46], [51], [52] et [50]) très utile pour la suite.

Lemme 5.1. *On suppose* (5.5) *et* (5.8)-(5.10) *vraies. Alors, pour tout ν petit, il existe une constante c qui dépend de ν telle que*

$$\langle f(u), u\rangle - c_3 \mathcal{F}(u) \geq -\nu \|u\|^2 - c(\nu); \tag{5.19}$$

on a de plus

$$\mathcal{F}(u) \geq \frac{c_2}{2}\|u\|^2, \tag{5.20}$$

$$\langle f(u), u\rangle \geq c_2 \|u\|^2. \tag{5.21}$$

Démonstration:
Vérifions (5.19) :

Partant de l'hypothèse (5.10), on en déduit que pour tout $\nu > 0$ (petit), il existe une constante $L = L(\nu)$ telle que

$$f(u)u - c_3 F(u) \geq -\nu u^2, \ |u| > L. \tag{5.22}$$

En écrivant $\mathbb{R}^3 = \{|x| \leq r_0\} \cup \{|x| > r_0\}$, $\forall\ r_0 > 0$ et $\forall\ x \in \mathbb{R}^3$, on a alors que $f - c_3 F$ est bornée dans $\{|x| \leq r_0\}$, et donc il existe $c_5 > 0$ dépendante de ν telle que

$$f(u)u - c_3 F(u) \geq -c_5, \ |u| > L, \ |x| \leq r_0. \tag{5.23}$$

Les estimations (5.22) et (5.23) donnent

$$f(u)u - c_3F(u) \geq -\nu u^2 - c_5, \ \forall\ u \in \mathbb{R}, \ |x| \leq r_0. \tag{5.24}$$

D'autre part, grâce à l'hypothèse (5.11), on écrit

$$(f(u) - f(s))(u - s) \geq -c_4(u - s)^2$$

et pour $c_6 = 1 - c_3$, on a

$$\begin{aligned} f(u)u - c_3F(u) &= c_3(f(u) - F(u)) + c_6f(u)u \\ &= c_3\int_0^u (f(u) - f(s))ds + c_6f(u)u \\ &\geq -c_3c_4\int_0^u (u - s)ds + c_6c_2u^2 \\ &\geq \frac{-c_3c_4}{2}u^2 + c_2c_6u^2 \\ &\geq \frac{-c_3c_4}{2}u^2 \ \forall\ u \in \mathbb{R}, \ \forall\ x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{5.25}$$

où on a utilisé (5.9). En particulier

$$f(u)u - c_2F(u) \geq -cu^2, \ |x| > r_0, \forall\ u \in \mathbb{R}, \tag{5.26}$$

d'où, en intégrant (5.24) sur $\{|x| \leq r_0\}$ et (5.26) sur $\{|x| > r_0\}$, puis en additionnant les estimations résultantes, on obtient (5.19).

Vérifions maintenant (5.20).

On sait que

$$F(u) = \int_0^u f(s)ds = \int_0^u \frac{f(s)s}{s}ds.$$

Par (5.9), on a

$$F(u) \geq c_2\int_0^u sds = \frac{c_2}{2}u^2,$$

en intégrant sur $\mathbb{R}^3$, on a (5.20). L'estimation (5.21) s'obtient tout simplement en intégrant l'hypothèse (5.9) sur $\mathbb{R}^3$.

■

On énonce à présent un résultat d'existence

Théorème 5.1. *Sous les conditions* (5.5)-(5.11). *Alors pour tout* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{H}$, *le problème* (5.1)-(5.4) *admet au moins une solution* $(u, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial t})$ *avec la régularité suivante :* $u \in L^2(0,T;V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$, $\alpha \in L^2(0,T;V)$ *et* $\frac{\partial\alpha}{\partial t} \in L^2(0,T;H)$.

Démonstration:
La preuve s'appuie sur la méthode de Galerkin. Le domaine étant non borné, la décomposition spectrale de notre opérateur n'est plus valide. La preuve se fait exactement comme dans le Chapitre 2, excepté le passage à la limite qui diffère légèrement de la preuve du théorème d'existence du Chapitre 3, notamment, pour montrer que le terme non linéaire $f(u_m)$ converge vers $f(u)$ dans un sens à préciser. Nous écrivons les détails de ce passage à la limite ci-dessous.

On prend un élément $v \in V$, on a

$$\begin{aligned} |\langle f(u_m), v\rangle| &\leq c_0 \int_{\mathbb{R}^3} |u_m||v|dx + c_1 \int_{\mathbb{R}^3} (|u_m|^2 + |u_m|^5)|v|dx \\ &\leq c_0 \|u_m\|\|v\| + c_1(\|u_m\|^2_{L^4(\mathbb{R}^3)}\|v\| + \|u_m\|^5_{L^6(\mathbb{R}^3)}\|v\|_{L^6(\mathbb{R}^3)}) \\ &\leq c(\|u_m\|_V + \|u_m\|^2_V + \|u_m\|^5_V)\|v\|_V \\ &\leq c'\|u_m\|^5_V\|v\|_V. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Par conséquent, on en déduit que

$$\|f(u_m)\|_{V'} \leq c, \tag{5.28}$$

où c est une constante qui ne dépend pas de m. On a donc

$$f(u_m) \overset{*}{\rightharpoonup} \chi \text{ dans } L^\infty(0,T;V') \tag{5.29}$$

et on veut établir que

$$\chi = f(u).$$

On fixe $r > 0$. Soit B_r une boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon r et de centre 0. On sait que $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ dans $L^\infty(0,T;V)$. On écrit alors avec $H^1(B_r)$ au lieu de V et $L^2(B_r)$ au lieu de H que :

$$u_m \rightharpoonup u \text{ dans } L^2(0,T;H^1(B_r)) \tag{5.30}$$

et par un résultat classique, on a que l'injection

$$H^1(B_r) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(B_r),$$

est compacte. Donc la convergence (5.30) est forte dans $L^2(0,T;L^2(B_r))$ et on écrit

$$u_m \to u \text{ dans } L^2(0,T;L^2(B_r)), \tag{5.31}$$

autrement dit,

$$u_m \to u \text{ p.p sur } [0,T] \times B_r. \tag{5.32}$$

Par continuité, on a

$$f(u_m) \to f(u) \text{ p.p sur } [0,T] \times B_r. \tag{5.33}$$

Soit $v \in L^6(B_r)$ de norme 1. On a alors par analogie à (5.27)

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_r} f(u_m) v dx \right| \leq & c_0 \|u_m\|_{L^2(B_r)}\|v\|_{L^2(B_r)} + c_1\|u_m\|^2_{L^4(B_r)}\|v\|_{L^2(B_r)} \\ & + c_1\|u_m\|^5_{L^6(B_r)}\|v\|_{L^6(B_r)}. \end{aligned}$$

Comme

$$\|v\|_{L^2(B_r)} \leq c\|v\|_{L^6(B_r)} \leq c,$$

on écrit

$$\begin{aligned} \|f(u_m)\|_{L^{6/5}(B_r)} &\leq c\|u_m\|^5_{L^6(B_r)} \\ &\leq c'\|u_m\|^5_{B_r} \\ &\leq c''\|u_m\|^5_V, \end{aligned} \tag{5.34}$$

et donc

$$\|f(u_m)\|_{L^{6/5}(B_r)} \leq c, \tag{5.35}$$

avec c indépendante de m.

Ainsi,

$$f(u_m) \rightharpoonup f(u) \text{ dans } L^{6/5}([0,T]\times B_r). \tag{5.36}$$

Par unicité de la limite faible dans $\mathcal{D}'$, on conclut que

$$\chi = f(u) \text{ p.p dans } [0,T]\times B_r$$

r étant quelconque, on obtient

$$\chi = f(u) \text{ p.p dans } [0,T]\times \mathbb{R}^3.$$

■

En ce qui concerne l'unicité, on a le

Théorème 5.2. *On suppose* (5.5)-(5.7) *vraies, avec* $\gamma = 1$. *Soit* $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in \mathcal{H}$. *Alors la solution du problème* (5.1)-(5.4) *est unique avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration:
Soit $(u^{(1)}, \alpha^{(1)}, \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial t})$ et $(u^{(2)}, \alpha^{(2)}, \frac{\partial \alpha^{(2)}}{\partial t})$ deux solutions de (5.1)-(5.2) de données initiales $(u_0^{(1)}, \alpha_0^{(1)}, \alpha_1^{(1)})$ et $(u_0^{(2)}, \alpha_0^{(2)}, \alpha_1^{(2)})$ respectivement. On pose

$$u = u^{(1)} - u^{(2)} \text{ et } \alpha = \alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}.$$

Alors (u, α) satisfait :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}) = \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha}{\partial t} - \Delta \alpha + \lambda \alpha = -u - \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5.38}$$

On multiplie (5.37) par u, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))u dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha}{\partial t} u dx. \tag{5.39}$$

On multiplie (5.37) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + ||\frac{\partial u}{\partial t}||^2 + \int_{\mathbb{R}^3} (f(u^{(1)}) - f(u^{(2)}))\frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} dx. \tag{5.40}$$

On multiplie (5.38) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\lambda\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + \|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\|^2) + \|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\|^2 + \|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\|^2 \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha}{\partial t} u dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t} dx. \end{aligned} \tag{5.41}$$

En sommant (5.39), (5.40) et (5.41), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\lambda\|\alpha\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\|^2\Big)\\
&+\|\nabla u\|^2+\|\frac{\partial u}{\partial t}\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\\
&=-\int_{\mathbb{R}^3}(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))u dx-\int_{\mathbb{R}^3}(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))\frac{\partial u}{\partial t}dx.
\end{aligned}\tag{5.42}$$

Par (5.5)-(5.7) avec $\gamma=1$, on a que

$$|f'(u)|\le c(1+|u|^2), c>0$$

et

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathbb{R}^3}(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))\frac{\partial u}{\partial t}dx\\
&\le c\int_{\mathbb{R}^3}(1+|u^{(1)}|^2+|u^{(2)}|^2)|u|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx\\
&\le c(\|u\|+[\|u^{(1)}\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}+\|u^{(2)}\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}]\|u\|_{L^6(\mathbb{R}^3)})\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\\
&\le c(1+\|u^{(1)}\|^2_V+\|u^{(2)}\|^2_V])\|u\|_V\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.
\end{aligned}\tag{5.43}$$

Par (5.11), on a

$$-\int_{\mathbb{R}^3}(f(u^{(1)})-f(u^{(2)}))u dx\le c_4\|u\|^2.\tag{5.44}$$

Ainsi, les estimations (5.42)-(5.44) et l'inégalité de Hölder donnent

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\le c\phi,\tag{5.45}$$

où

$$\phi=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\lambda\|\alpha\|^2+\|\nabla\alpha\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2$$

satisfait

$$\phi\ge c\Big(\|u\|^2_V+\|\alpha\|^2_V+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\Big).$$

Le lemme de Gronwall donne

$$\begin{aligned}
&\|u(t)\|^2_V+\|\alpha(t)\|^2_V+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|^2\\
&\le c(\|u_0^{(1)}-u_0^{(2)}\|^2_V+\|\alpha_0^{(1)}-\alpha_0^{(2)}\|^2_V+\|\alpha_1^{(1)}-\alpha_1^{(2)}\|^2),\quad\forall\, t\ge 0,
\end{aligned}\tag{5.46}$$

d'où l'unicité (pour $u_0^{(1)}=u_0^{(2)}$, $\alpha_0^{(1)}=\alpha_0^{(2)}$ et $\alpha_1^{(1)}=\alpha_1^{(2)}$) et la continuité par rapport aux données initiales.

■

5.3 Dissipativité.

D'après la section précédente, on peut définir le semi-groupe continu

$$S(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, S(t)(u_0, \alpha_0, \alpha_1) = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t)), \forall t \geq 0,$$

où $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ est l'unique solution de notre problème.

Cette section a pour objet d'établir l'existence d'ensembles bornés absorbants pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, sur $\mathcal{H}$.

On a le

Théorème 5.3. *On suppose* (5.5)-(5.11) *vérifiées, avec* $\gamma = 1$. *Alors le semi-groupe* $S(t)$ *possède un ensemble borné absorbant dans* $\mathcal{H}$.

Démonstration:
Nous ferons des calculs formels, en sachant que toutes les estimations peuvent être justifiées par une approximation de Galerkin. Soit $R_0 > 0$ fixé. On suppose que les données initiales $(u_0, \alpha_0, \alpha_1) \in B_{R_0}$, B_{R_0} étant une boule de $\mathcal{H}$ de rayon R_0 et de centre 0. On multiplie (5.1) par u et $\frac{\partial u}{\partial t}$, on obtient en sommant les égalités

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u\|_V^2 + 2\mathcal{F}(u)) + \|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \langle f(u), u\rangle = (u + \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}). \tag{5.47}$$

On multiplie (5.2) par $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\lambda\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 = -(u + \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}). \tag{5.48}$$

L'addition de (5.47) et (5.48) donne

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|u\|_V^2 + \lambda\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\mathcal{F}(u)\Big) \\ &2\Big(|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \langle f(u), u\rangle + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) = 0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

On multiplie enfin (5.2) par α, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 + 2\langle\frac{\partial \alpha}{\partial t}, \alpha\rangle) + \lambda\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2 = -(u + \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha) + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2. \tag{5.50}$$

En sommant (5.49) et ϵ(5.50), où $\epsilon > 0$ est assez petit. On obtient, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} &\frac{d\Phi}{dt} + 2\Big(|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \langle f(u), u\rangle + \left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) \\ &+ 2\epsilon(\lambda\|\alpha\|^2 + \|\nabla\alpha\|^2) = -2\epsilon(u + \frac{\partial u}{\partial t}, \alpha) + 2\epsilon\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\|^2, \end{aligned} \tag{5.51}$$

où

$$\Phi = \|u\|_V^2 + (\lambda+\epsilon)\|\alpha\|^2 + (1+\epsilon)\|\nabla\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\epsilon\langle\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\rangle + 2\mathcal{F}(u) \tag{5.52}$$

satisfait

$$\Phi \geq c\Big(\|u\|_V^2 + \|\alpha\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\Big), \tag{5.53}$$

en notant que l'on a utilisé (5.20) et le fait que :

$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + 2\epsilon\langle\frac{\partial\alpha}{\partial t},\alpha\rangle + (\lambda+\epsilon)\|\alpha\|^2 \geq c\Big(\|\alpha\|^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\Big)$$

(on peut choisir ϵ de cette façon). Le Lemme 5.1 permet d'écrire

$$\langle f(u),u\rangle \geq c_3\mathcal{F}(u) - \nu\|u\|^2 - c(\nu) \tag{5.54}$$

et

$$\langle f(u),u\rangle \geq c_2\|u\|^2, \tag{5.55}$$

ce qui implique

$$2\langle f(u),u\rangle \geq c_3\mathcal{F}(u) + (c_2-\nu)\|u\|^2 - c(\nu). \tag{5.56}$$

L'équation (5.51) devient

$$\begin{aligned}&\frac{d\Phi}{dt} + 2\beta\|u\|^2 + 2\|\nabla u\|^2 + 2\lambda\epsilon\|\alpha\|^2 + 2\epsilon\|\nabla\alpha\|^2 + 2\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 + c_3\mathcal{F}(u)\\ &+ 2\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + 2\left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2 = -2\epsilon(u+\frac{\partial u}{\partial t},\alpha) + 2\epsilon\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2,\end{aligned} \tag{5.57}$$

où $\beta = \frac{1}{2}(c_2-\nu) > 0$. En appliquant l'inégalité de Young, on écrit

$$2\epsilon(u,\alpha) \leq \beta\|u\|^2 + \frac{\epsilon^2}{\beta}\|\alpha\|^2,$$

$$2\epsilon(\frac{\partial u}{\partial t},\alpha) \leq \lambda\epsilon\|\alpha\|^2 + \frac{\epsilon}{\lambda}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2,$$

ce qui conduit à une inégalité de la forme

$$\frac{d\Phi}{dt} + c\Phi + c'\Big(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\Big) \leq c'' \tag{5.58}$$

et le lemme de Gronwall donne

$$\Phi(t) \leq e^{-ct}\Phi(0) + c'',\ \forall\ t \geq 0.$$

On a alors

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\Phi(t) \leq c''.$$

Pour un certain $R > c'$, on a

$$\|u(t)\|_V^2 + \|\alpha(t)\|_V^2 + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|^2 \leq R,\ \forall\ t \geq t_0,$$

où $t_0 = \max\{0, -\frac{1}{c}\log\Big(\frac{R-c''}{K}\Big)\}$, avec $K = K(R_0)$.

■

Remarque 5.1. *D'après le Théorème 5.3, on note que la boule de $\mathcal{H}$ de rayon R et de centre 0, est un ensemble borné absorbant pour le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$.*

Corollaire 5.1. *L'ensemble*

$$\beta_0 = \bigcup_{t\geq 0} S(t)B_R,$$

est un ensemble borné absorbant, connexe et invariant pour le semi-groupe $S(t)$ sur $\mathcal{H}$, où B_R est le borné absorbant du Théorème 5.3.

Démonstration:
La preuve est immédiate.

■

Maintenant qu'on a etabli l'existence d'un ensemble borné absorbant. Il est naturel de s'intéresser à l'existence de l'attracteur global pour notre système. C'est l'objet de la prochaine section.

5.4 Attracteur Global.

Pour avoir une idée claire sur le comportement asymptotique de la solution de notre problème, on pourrait exploiter des résultats de compacité pour prouver l'existence de l'attracteur global. Mais compte tenu du caractère non borné du domaine, on ne saurait obtenir des estimations compactes appropriées. Cette difficulté s'ajoute à celle liée à l'absence d'effet régularisant des données initiales. Pour surmonter ces nombreuses difficultés, nous allons utiliser un argument de décomposition de la solution, en utilisant des fonctions « cut-off ».

Avant de donner le résultat principal de cette section, nous allons énoncer un lemme qui servira dans la suite.

Lemme 5.2. *(voir [51, Lemme 2.7]) Soit $\Phi : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie (au sens des distributions)*

$$\frac{d}{dt}\Phi(z(t)) + \delta\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}} \leq k, \tag{5.59}$$

pour certains $\delta, k > 0$, et $z \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$. On suppose de plus que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \Phi(z(t)) \geq -m, \ \Phi(z(0)) \leq M, \tag{5.60}$$

pour certains $m, M \geq 0$. Alors

$$\Phi(z(t)) \leq \sup_{v\in\mathcal{H}} \{\Phi(v); \delta\|v\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2k\}, \ \forall t \geq t_0, \tag{5.61}$$

où $t_0 = \frac{m+M}{k}$.

Démonstration:
On remarque que pour t fixé, la relation

$$\frac{d}{dt}\Phi(z(t)) \geq -k, \tag{5.62}$$

implique

$$\Phi(z(t)) \leq \sup_{v\in\mathcal{H}} \{\Phi(v); \delta\|v\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2k\}. \tag{5.63}$$

En effet, si (5.62) est vraie, alors de (5.59), on a que $\delta\|z(t)\|^2_{\mathcal{H}} \leq 2k$. On pose maintenant $t_0 = \frac{m+M}{k}$ et on prend $z \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$. Il existe alors $t_1 = t_1(z) \in [0, t_0]$ telle que

$$\frac{d}{dt}\Phi(z(t_1)) \geq -k.$$

Sinon, on aurait

$$\Phi(z(t_0)) < -kt_0 + \Phi(z(0)) < -kt_0 + M = -m,$$

ce qui contrédirait (5.60).

Posons

$$t^* = \sup\{\tau > t_1; (5.63) \text{ soit vraie }, \forall\ t \in [t_1, \tau]\}.$$

Si $t^* < \infty$, alors il existe une suite $(t_n)_n$ que l'on choisit décroissante vers t^*. Donc,

$$\Phi(z(t_n)) - \Phi(z(t)) > 0,$$

ce qui donne,

$$\frac{d}{dt}\Phi(z(t^*)) \geq 0.$$

Par continuité, il existe un voisinage J de t^* telle que (5.62) soit vraie $\forall\ t \in J$ et (5.63) est vérifiée $\forall\ t \in J$, ce qui contrédit la maximalité de t^*. Ainsi, $t^* = \infty$, c'est-à-dire que (5.63) est vérifiée $\forall\ t \geq t_0$.

■

Afin d'alléger les notations, on pose :

$$z_0 = (u_0, \alpha_0, \alpha_1) \text{ et } z(t) = S(t)z_0 = (u(t), \alpha(t), \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)).$$

Nous énonçons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 5.4. *On suppose* (5.5)-(5.11) *satisfaites. Alors le semi-groupe* $S(t)$ *associé à* (5.1)-(5.4) *possède l'attracteur global* $\mathcal{A}$ *(connexe) sur* $\mathcal{H}$.

Le preuve de ce théorème est basée sur le résultat abstrait suivant.

Théorème 5.5. *(voir [23, page 56]) Soit* $(S(t), \mathcal{X})$ *un système dynamique, avec* $\mathcal{X}$ *un espace de Banach. On suppose que :*

(i) *il existe un ensemble borné absorbant* $\beta_0 \subset \mathcal{X}$ *invariant par* $S(t), t \geq 0$ *et*

(ii) *pour tout* $\eta > 0$, *il existe* $t_\eta \geq 0$ *et un ensemble compact* $\mathcal{K}_\eta \subset \mathcal{X}$ *telle que*

$$\delta_{\mathcal{X}}(S(t_\eta)\beta_0, \mathcal{K}_\eta) \leq \eta, \tag{5.64}$$

où $\delta_{\mathcal{X}}$ *est la semidistance de Hausdorff dans* $\mathcal{X}$.

Alors l'ensemble ω*-limite de* β_0 *est l'attracteur global (connexe) de* $S(t), t \geq 0$.

Nous avons déjà établi l'existence d'un ensemble borné absorbant et invariant $\beta_0 \subset \mathcal{H}$ pour le semi-groupe $S(t)$. Notre objectif est donc de prouver que β_0 satisfait la propriété **(ii)** du Théorème 5.5. Pour ce faire, nous commençons par décomposer la solution $(u, \alpha, \frac{\partial \alpha}{\partial t})$ du problème (5.1)-(5.4) de la manière suivante :

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t),$$

où

$$z_1(t) = (u^d(t), \alpha^d(t), \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}(t))$$

et

$$z_2(t) = (u^c(t), \alpha^c(t), \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t))$$

sont solutions de

$$\frac{\partial u^d}{\partial t} - \Delta u^d + f(u^d) = \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \tag{5.65}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^d}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha^d}{\partial t} - \Delta \alpha^d + \lambda \alpha^d = -u^d - \frac{\partial u^d}{\partial t}, \tag{5.66}$$

$$\lim_{x \to +\infty} |u^d(x,t)| = \lim_{x \to +\infty} |\alpha^d(x,t)| = 0, \tag{5.67}$$

$$u^d(0) = u_0, \alpha^d(0) = \alpha_0, \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}(0) = \alpha_1 \tag{5.68}$$

et

$$\frac{\partial u^c}{\partial t} - \Delta u^c + f(u) - f(u^d) = \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}, \tag{5.69}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha^c}{\partial t^2} + \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} - \Delta \alpha^c + \lambda \alpha^c = -u^c - \frac{\partial u^c}{\partial t}, \tag{5.70}$$

$$\lim_{x \to +\infty} |u^c(x,t)| = \lim_{x \to +\infty} |\alpha^c(x,t)| = 0, \tag{5.71}$$

$$u^d(0) = \alpha^d(0) = \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}(0) = 0, \tag{5.72}$$

respectivement.

Remarque 5.2. *On vérifie assez aisément que les systèmes d'équations* (5.65)-(5.68) *et* (5.69)-(5.72) *sont bien posés et satisfont des résultats de dissipativité similaires à ceux obtenus précédemment pour* (5.1)-(5.4).

Pour montrer que le semi-groupe satisfait la propriété **(ii)** du Théorème 5.5, nous avons besoin des Propositions qui suivent

Proposition 5.1. *Sous les conditions du Théorème 5.4, pour tout $\eta > 0$, il existe un temps $t_\eta > 0$ tel que la solution $z_1(t_\eta)$ de* (5.65)-(5.68) *au temps t_η vérifie l'inégalité*

$$\|z_1(t_\eta)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}\eta, \tag{5.73}$$

pour tout $z_0 \in \beta_0$.

Démonstration:
On multiplie (5.65) par $u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}$, on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u^d\|_V^2 + 2\mathcal{F}(u^d)) + \|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -\int_{\mathbb{R}^3} f(u^d)u^d dx + \int_{\mathbb{R}^3}(u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t})\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}dx,\end{aligned} \tag{5.74}$$

où $\mathcal{F}(u^d) = \int_{\mathbb{R}^3} F(u^d)dx$. Soit $\epsilon > 0$ assez petit. On multiplie (5.66) par $\epsilon\alpha^d + \frac{\partial \alpha^d}{\partial t}$ et on a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big((\lambda+\epsilon)\|\alpha^d\|^2 + (1+\epsilon)\|\nabla\alpha^d\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 + 2\epsilon\langle\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \alpha^d\rangle\Big) \\ &\lambda\epsilon\|\alpha^d\|^2 + \epsilon\|\nabla\alpha^d\|^2 + (1-\epsilon)\left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 \\ &= -\epsilon(u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}, \alpha^d) - \int_{\mathbb{R}^3}(u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t})\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}dx.\end{aligned} \tag{5.75}$$

L'addition de (5.74) et (5.75) donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Phi(z_1) + \|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 + \lambda\epsilon\|\alpha^d\|^2 + \epsilon\|\nabla\alpha^d\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3} f(u^d)u^d dx \\ &+ (1-\epsilon)\left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 = -\epsilon(u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}, \alpha^d),\end{aligned} \tag{5.76}$$

où

$$\begin{aligned}\Phi(z_1) =&\|u^d\|_V^2 + (\lambda+\epsilon)\|\alpha^d\|^2 + (1+\epsilon)\|\nabla\alpha^d\|^2 + \left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ 2\epsilon\langle\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}, \alpha^d\rangle + 2\mathcal{F}(u^d)\end{aligned} \tag{5.77}$$

satisfait, pour $\epsilon < 1$,

$$\Phi(z_1(t)) \geq c\|z_1(t)\|_{\mathcal{H}}^2, \ \forall\ t \geq 0, \ c > 0 \tag{5.78}$$

et

$$\Phi(z_1(0)) \leq c', \tag{5.79}$$

où $c' \geq 0$ ne dépend pas des données initiales. On a aussi

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(u^d)u^d dx \geq c_2\|u^d\|^2$$

et on obtient alors

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Phi(z_1) + c_2\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 + \lambda\epsilon\|\alpha^d\|^2 + \epsilon\|\nabla\alpha^d\|^2 \\ &+ (1-\epsilon)\left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2 = -\epsilon(u^d + \frac{\partial u^d}{\partial t}, \alpha^d).\end{aligned} \tag{5.80}$$

L'inégalité de Young donne

$$\epsilon(u^d,\alpha^d) \leq \frac{c_2}{2}\|u^d\|^2 + \frac{\epsilon^2}{2c_2}\|\alpha^d\|^2,$$
$$\epsilon(\frac{\partial u^d}{\partial t},\alpha^d) \leq \frac{\lambda\epsilon}{2}\|\alpha^d\|^2 + \frac{\epsilon}{2\lambda}\left\|\frac{\partial \alpha^d}{\partial t}\right\|^2$$

et on obtient ainsi, l'inégalité suivante

$$\frac{d}{dt}\Phi(z_1) + \kappa\|z_1\|^2_{\mathcal{H}} \leq \omega,$$

pour un certain $\kappa > 0$ et $\omega \in (0,1)$. On a alors d'après le Lemma 5.2, l'existence d'un temps $t_\eta > 0$ telle que

$$\Phi(z_1(t_\eta)) \leq \sup_{x\in\mathcal{H}}\{\Phi(x); \kappa\|x\|_{\mathcal{H}} \leq 2\omega\},$$

d'où

$$\|z_1(t_\eta)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}\eta, \ \forall\ t_\eta \geq \frac{c' - \frac{\kappa\eta}{2}}{\omega},$$

ce qui achève la preuve.

■

Remarque 5.3. *On voit en particulier, dans le contexte de la Proposition 5.1, que le singleton* $\{0\}$ *est un attracteur.*

Dans la suite, on fixe $\eta > 0$. On choisit $t_\eta > 0$ comme dans la Proposition 5.1. On a alors

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,t_\eta]}\sup_{z_0\in\beta_0}\Big\{&\|\nabla u(t)\| + \left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t)\right\|, \|\nabla\alpha(t)\|, \|\nabla u^d(t)\|,\\ &\|\nabla\alpha^d(t)\|, \left\|\frac{\partial\alpha^d}{\partial t}(t)\right\|, \|\nabla u^c(t)\|, \|\nabla\alpha^c(t)\|, \left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(t)\right\|\Big\} \leq C.\end{aligned} \tag{5.81}$$

Soit $\rho > 0$ donné, on introduit maintenant une famille de fonctions régulières :

$$\psi_\rho : \mathbb{R}^3 \to [0,1] \text{ définie par :}$$

$$\psi_\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad |x| \leq \rho + 1, \\ 1, & \text{si} \quad |x| \geq 2(\rho+1), \end{cases}$$

telles que

$$|\nabla\psi_\rho(x)| \leq \frac{C}{\rho+1},$$
$$|\nabla\psi^2_\rho(x)| \leq \frac{C}{\rho+1}\psi_\rho(x)$$

et

$$|\Delta\psi_\rho(x)| \leq \frac{C}{\rho+1}, C > 0.$$

Alors, pour tout $\rho > 0$ fixé, on décompose la solution $z_2(t)$ de (5.69)-(5.72) comme suit :

$$z_2(t) = \check{z}_\rho(t) + \hat{z}_\rho(t), \tag{5.82}$$

où

$$\check{z}_\rho(t) = \psi_\rho(x) z_2(t)$$

et

$$\hat{z}_\rho(t) = (1 - \psi_\rho(x)) z_2(t).$$

Le résultat qui suit nous dit qu'on peut avoir $\check{z}_\rho(t)$ aussi petit que l'on veut pour ρ assez grand.

Proposition 5.2. *Soit $z_2(t_\eta)$ la solution de (5.69)-(5.72) correspondant à $t = t_\eta$. Alors, il existe une constante $\rho_\eta > 0$ telle que*

$$\|\check{z}_\rho(t)\|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2}\eta, \tag{5.83}$$

pour tout $\rho \geq \rho_\eta$, et pour tout $z_0 \in \beta_0$.

Démonstration:
On multiplie (5.69) par $\psi_\rho^2\big(\frac{\partial u^c}{\partial t} + u^c\big)$ et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\psi_\rho u^c\|^2 + \|\psi_\rho \nabla u^c\|^2) + \|\psi_\rho \nabla u^c\|^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \big(f(u) - f(u^d)\big)\psi_\rho^2 (u^c + \frac{\partial u^c}{\partial t})dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2 \nabla u^c dx + \int_{\mathbb{R}^3} u^c \nabla\psi_\rho^2 \nabla u^c dx = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho^2 \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(u^c + \frac{\partial u^c}{\partial t})dx.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

On multiplie (5.70) par $\psi_\rho^2 \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}$ et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\lambda\|\psi_\rho \alpha^c\|^2 + \|\psi_\rho \nabla\alpha^c\|^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\psi_\rho \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 \\
&+ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2 \nabla\alpha^c dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2 \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho^2 \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(u^c + \frac{\partial u^c}{\partial t})dx.
\end{aligned} \tag{5.85}$$

On somme (5.84) et (5.85). On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\psi_\rho u^c\|^2 + \|\psi_\rho \nabla u^c\|^2 + \lambda\|\psi_\rho \alpha^c\|^2 + \|\psi_\rho \nabla\alpha^c\|^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big) \\
&+ \|\psi_\rho \nabla u^c\|^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\psi_\rho \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 \\
&= -\int_{\mathbb{R}^3} \big(f(u) - f(u^d)\big)\psi_\rho^2 (u^c + \frac{\partial u^c}{\partial t})dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial u^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2 \nabla u^c dx \\
&- \int_{\mathbb{R}^3} u^c \nabla\psi_\rho^2 \nabla u^c dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2 \nabla\alpha^c dx - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2 \nabla \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} dx.
\end{aligned} \tag{5.86}$$

On a d'une part, grâce à (5.11),

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \big(f(u) - f(u^d)\big)\psi_\rho^2 u^c dx \leq c_4 \|\psi_\rho u^c\|^2 \tag{5.87}$$

et d'autre part, on a, grâce à (5.5)-(5.7),

$$|f(u)-f(u^d)|\leq C\big(1+m\big)|u^c|,$$

où

$$m(t)=|u(t)|^2+|u^d(t)|^2$$

et

$$\|m\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}\leq C.$$

On a également

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^3}\Big(f(u)-f(u^d)\Big)\psi_\rho^2\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\right| &\leq c\int_{\mathbb{R}^3}(1+m)|\psi_\rho u^c|\left|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\right|dx\\ &\leq C\big(\|\psi_\rho u^c\|^2+\left\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\big)\\ &+C\|m\|^2_{L^6(\mathbb{R}^3)}\Big(\|\psi_\rho u^c\|^2+\left\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\Big)\\ &\leq C\|\psi_\rho u^c\|^2+C'\left\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\\ &+C''\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+(\frac{C}{\rho+1})^2\Big)\end{aligned}\tag{5.88}$$

et les estimations suivantes :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial u^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2\nabla u^c dx\right| \leq \frac{C}{\rho+1}\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\Big),\tag{5.89}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}u^c\nabla\psi_\rho^2\nabla u^c dx\right| \leq \frac{C}{\rho+1}\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\|u^c\|^2\Big),\tag{5.90}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2\nabla\alpha^c dx\right| \leq \frac{C}{\rho+1}\Big(\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big),\tag{5.91}$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx\right| \leq \frac{C}{\rho+1}\Big(\left\|\psi_\rho\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big).\tag{5.92}$$

En prenant en compte (5.87)-(5.92), l'estimation (5.86) devient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\psi_\rho u^c\|^2+\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\lambda\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+\left\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)\\ &+\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\left\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\psi_\rho\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\\ &\leq c_4\|\psi_\rho u^c\|^2+C\|\psi_\rho u^c\|^2+C'\left\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2+C''\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+(\frac{C}{\rho+1})^2\Big)\\ &+\frac{C}{\rho+1}\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\frac{C}{\rho+1}\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\|u^c\|^2\Big)\\ &+\frac{C}{\rho+1}\Big(\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\frac{C}{\rho+1}\Big(\left\|\psi_\rho\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big).\end{aligned}\tag{5.93}$$

On multiplie enfin (5.70) par $\psi_\rho^2\alpha^c$. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+2\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\rho^2\alpha^c\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx\Big)+\lambda\|\psi_\rho\alpha^c\|^2\\&+\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^c\nabla\psi_\rho^2\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx+\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^c\nabla\psi_\rho^2\nabla\alpha^c dx\\&=-\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\rho^2\alpha^c(u^c+\frac{\partial u^c}{\partial t})dx+\Big\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2,\end{aligned}\tag{5.94}$$

un nouvel usage de l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous conduit à :

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\rho^2\alpha^c(u^c+\frac{\partial u^c}{\partial t})dx\Big|&\le\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\rho^2\alpha^c(u^c+\frac{\partial u^c}{\partial t})dx\Big|\\&\le\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\frac{1}{2}\|\psi_\rho u^c\|^2+\frac{1}{2}\Big\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\Big\|^2\end{aligned}\tag{5.95}$$

et

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\nabla\psi_\rho^2\alpha^c dx\Big|\ \le\ \frac{C}{\rho+1}\Big(\Big\|\psi_\rho\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2+\|\alpha^c\|^2\Big),\tag{5.96}$$

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^3}\alpha^c\nabla\psi_\rho^2\nabla\alpha^c dx\Big|\ \le\ \frac{C}{\rho+1}\big(\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+\|\alpha^c\|^2\big).\tag{5.97}$$

Il vient de (5.94) et (5.95)-(5.97) que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\|\nabla\psi_\rho\alpha^c\|^2+2\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\rho^2\alpha^c\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx\Big)+\lambda\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\|\nabla\psi_\rho\alpha^c\|^2\\&\le\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\frac{1}{2}\|\psi_\rho u^c\|^2+\frac{1}{2}\Big\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\Big\|^2+\Big\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2\\&+\frac{C}{\rho+1}\Big(\Big\|\psi_\rho\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2+\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+2\|\alpha^c\|^2\Big).\end{aligned}\tag{5.98}$$

Enfin, en additionnant (5.93) et (5.98), on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\psi_\rho u^c\|^2+\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+(1+\lambda)\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+2\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+\Big\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2\\&+2\int_{\mathbb{R}^3}\psi_\rho^2\alpha^c\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx\Big)+\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+\Big\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\Big\|^2+\Big\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2\\&+\Big\|\nabla\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2+\|\nabla\psi_\rho\alpha^c\|^2\le\|\psi_\rho\alpha^c\|^2+\frac{1}{2}\|\psi_\rho u^c\|^2+\frac{1}{2}\Big\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\Big\|^2\\&+\Big\|\psi_\rho\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2+c_4\|\psi_\rho u^c\|^2+C\|\psi_\rho u^c\|^2+C'\Big\|\psi_\rho\frac{\partial u^c}{\partial t}\Big\|^2\\&+C''\Big(\|\psi_\rho\nabla u^c\|^2+(\frac{C}{\rho+1})^2\Big)+\frac{C}{\rho+1}\Big(\Big\|\psi_\rho\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Big\|^2+\|\psi_\rho\nabla\alpha^c\|^2+2\|\alpha^c\|^2\Big).\end{aligned}\tag{5.99}$$

Ainsi, en posant

$$\begin{aligned} g(t) =&\|\psi_\rho u^c(t)\|^2 + \|\psi_\rho \nabla u^c(t)\|^2 + (1+\lambda)\|\psi_\rho \alpha^c(t)\|^2 + 2\|\psi_\rho \nabla \alpha^c(t)\|^2 \\ &+ \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^3} \psi_\rho^2 \alpha^c(t) \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t) dx, \end{aligned} \tag{5.100}$$

on obtient une inégalité de la forme

$$\frac{dg}{dt} \leq \lambda g + \frac{C}{\rho+1},\ \lambda > 0, \tag{5.101}$$

avec

$$g(t) \leq c(\|\psi_\rho u^c(t)\|_V^2 + \|\psi_\rho \alpha^c(t)\|_V^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}(t)\right\|^2). \tag{5.102}$$

Puisque $g(0) = 0$, le lemme de Gronwall appliqué à (5.101) sur $[0, t_\eta]$ donne

$$g(t_\eta) \leq c\frac{C}{\rho+1} t_\eta e^{\lambda t_\eta}. \tag{5.103}$$

Notons que

$$\|\psi_\rho u^c\|_V^2 + \|\psi_\rho \alpha^c\|_V^2 + \left\|\psi_\rho \frac{\partial \alpha^c}{\partial t}\right\|^2 \leq 2g(t_\eta) + \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_\rho(x)|^2 |\alpha^c(t)|^2 dx.$$

Par (5.81) et les propriétés de ψ_ρ, on a alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi_\rho(x)|^2 |\alpha^c(t)|^2 dx \leq \frac{C}{\rho+1}. \tag{5.104}$$

On conclut ainsi que

$$\|\check{z}_\rho(t_\eta)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c\frac{C}{\rho+1} t_\eta e^{\lambda t_\eta} + \frac{C}{\rho+1}. \tag{5.105}$$

Puisque C est indépendante de ρ, on peut choisir ρ suffisamment grand telle que

$$c\frac{C}{\rho+1} t_\eta e^{\lambda t_\eta} + \frac{C}{\rho+1} \leq \frac{1}{2}\eta,$$

ce qui nous donne le résultat espéré.

■

Avant d'énoncer la prochaine Proposition qui fournit la partie compacte dans la décomposition de la solution, nous allons introduire des espaces de Sobolev.

Soit $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ un domaine borné régulier. Soit A l'opérateur défini sur $L^2(\mathcal{B})$ par

$$A = -\Delta, \text{ de domaine } \mathcal{D}(A) = H^2(\mathcal{B}) \cap H_0^1(\mathcal{B}).$$

On considère la famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{D}(A^{s/2}), s \in \mathbb{R}$, avec les produits scalaires et normes donnés par

$$\langle ., . \rangle_{\mathcal{D}(A^{s/2})} = \langle A^{s/2}., A^{s/2}. \rangle$$

et

$$\|.\|_{\mathcal{D}(A^{s/2})} = \|A^{s/2}.\|,$$

respectivement.

Remarque 5.4. *Par définition, on a* $\mathcal{D}(A^0) = L^2(\mathcal{B})$ *et* $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\mathcal{B})$.

Posons maintenant

$$\mathcal{H}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Proposition 5.3. *Soit* $z_2(t_\eta)$ *la solution de* (5.69)-(5.72) *correspondant à* $t = t_\eta$. *Soit* $\rho > 0$ *fixé, et on considère la boule* $B_\rho = \Big\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 2\rho + 3\Big\}$. *Alors, il existe une constante* $k_{\eta,\rho} > 0$ *telle que*

$$\|\hat{z}_\rho(t_\eta)\|_{\mathcal{H}(B_\rho)} \leq k_{\eta,\rho},$$

pour tout $z_0 \in \beta_0$.

Démonstration:
Notons que $\hat{z}_\rho$ s'annule pour $|x| \geq 2\rho + 2$, d'où l'on déduit que sa restriction à B_ρ appartient à $H_0^1(B_\rho)$ pour tout $t > 0$. On note cette fois-ci $A := -\Delta$ l'opérateur de domaine $\mathcal{D}(A) = H^2(B_\rho) \cap H_0^1(B_\rho)$, en remarquant que

$$\begin{aligned}
-A\hat{u^c} &= (1-\psi_\rho)\Delta u^c - 2\nabla\psi_\rho\nabla u^c - \Delta\psi_\rho u^c,\\
-A\hat{\alpha^c} &= (1-\psi_\rho)\Delta \alpha^c - 2\nabla\psi_\rho\nabla \alpha^c - \Delta\psi_\rho \alpha^c,\\
-A\frac{\partial\hat{\alpha^c}}{\partial t} &= (1-\psi_\rho)\Delta\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} - 2\nabla\psi_\rho\nabla\frac{\partial \alpha^c}{\partial t} - \Delta\psi_\rho\frac{\partial \alpha^c}{\partial t},
\end{aligned}$$

il suffit, pour démontrer la Proposition, de montrer que

$$\|u^c(t_\eta)\|_W^2 + \|\alpha^c(t_\eta)\|_W^2 + \|\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(t_\eta)\|_V^2 \leq k_{\eta,\rho},$$

pour un certain $k_{\eta,\rho} > 0$ indépendant des données initiales. Ainsi, en considérant (5.81), il nous reste juste à prouver que

$$\|\Delta u^c(t_\eta)\|^2 + \|\Delta\alpha^c(t_\eta)\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(t_\eta)\right\|^2 \leq k_{\eta,\rho}. \tag{5.106}$$

Pour ce faire, on multiplie (5.69) par $-\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}$. On a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u^c\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \int_{\mathbb{R}^3}(f'(u)\nabla u - f'(u^d)\nabla u^d)\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\\
&= -\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}dx,
\end{aligned} \tag{5.107}$$

puis on multiplie (5.70) par $-\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}$ et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta\alpha^c\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2) + \left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\\
&= \int_{\mathbb{R}^3} u^c\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx + \int_{\mathbb{R}^3}\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}dx.
\end{aligned} \tag{5.108}$$

On additionne maintenant (5.107) et (5.108). On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u^c\|^2+\|\Delta\alpha^c\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\\&+\left\|\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2=\int_{\mathbb{R}^3}u^c\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}dx-\int_{\mathbb{R}^3}(f'(u)\nabla u-f'(u^d)\nabla u^d)\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}dx.\end{aligned}\tag{5.109}$$

Mais,

$$f'(u)\nabla u-f'(u^d)\nabla u^d=(f'(u)-f'(u^d))\nabla u^d+f'(u)\nabla u^c$$

et donc, par (5.5)-(5.7), (5.81) et l'inégalité de Hölder, on écrit

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^3}(f'(u)\nabla u-f'(u^d)\nabla u^d)\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^3}[(f'(u)-f'(u^d))\nabla u^d+f'(u)\nabla u^c]\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\right|\\&\leq c\int_{\mathbb{R}^3}(1+|u|+|u^d|)|u^c||\nabla u^d|\left|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right|dx+c\int_{\mathbb{R}^3}(1+|u|^2)|\nabla u^c|\left|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right|dx\\&\leq c+\frac{1}{2}\left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2.\end{aligned}\tag{5.110}$$

Il vient, de (5.109)-(5.110), que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u^c\|^2+\|\Delta\alpha^c\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)+\left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2\\&+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\leq c.\end{aligned}\tag{5.111}$$

En particulier,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u^c\|^2+\|\Delta\alpha^c\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}\right\|^2\Big)\leq c,\tag{5.112}$$

le Lemme de Gronwall et le fait que $u^c(0)=\alpha^c(0)=\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(0)=0$ nous donnent

$$\|\Delta u^c(t_\eta)\|^2+\|\Delta\alpha^c(t_\eta)\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\alpha^c}{\partial t}(t_\eta)\right\|^2\leq c,\tag{5.113}$$

ce qui achève la preuve.

■

Nous allons maintenant donner la preuve du Théorème 5.4.

Démonstration:
La preuve est faite par application directe du Théorème 5.5. On a déjà établi l'existence d'un ensemble borné absorbant pour $S(t)$, que l'on a noté β_0 (cf. Corollaire 5.1). Il reste à prouver le second point du Théorème 5.5. Pour ce faire, on prend pour tout η, r_η et t_η comme précédemment. Soit z_2 la solution de (5.69)-(5.72) correspondant à $r=r_\eta$. On a, d'après la Proposition 5.3 que

$$\mathcal{K}_\eta = \bigcup_{z_0 \in \beta_0} \Big(\hat{z}_{\rho\eta}(t_\eta) \Big),$$

est un ensemble compact dans $\mathcal{H}$. Il vient, d'après les Propositions 5.1 et 5.2 que

$$\delta_{\mathcal{H}}(S(t_\eta)\beta_0, \mathcal{K}_\eta) \leq \eta.$$

Finalement, l'ensemble ω-limite de β_0, à savoir,

$$\omega(\beta_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)\beta_0},$$

est l'attracteur global pour le semi-groupe $S(t)$.

■

Deuxième partie

Généralisation de type Chen-Gurtin d'un système de champ de phase de type Caginalp

5.5 Introduction

Dans cette partie, on traite un problème de champ de phase de type Caginalp basé sur la théorie de la conduction de chaleur introduite par Chen et Gurtin. Nous sommes ainsi conduit à une généralisation du modèle de champ de phase de Caginalp avec un terme de couplage (qui peut être linéaire ou non linéaire). Ce modèle est analysé sur un domaine borné avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes (et Neumann dans le cas d'un couplage linéaire). Le potentiel est pris régulier (à croissance polynomiale). On se propose d'étudier ce modèle sous trois approches :

Dans le Chapitre 6, on considère un terme de couplage linéaire et l'existence, l'unicité mais aussi la régularité de solutions sont analysées. L'existence de l'attracteur global et d'un attracteur exponentiel est montrée également. Enfin, le comportement spatial des solutions dans un cylindre semi-infini est étudié.

Le Chapitre 7 quant à lui considère le modèle avec un terme de couplage linéaire, associé cette fois-ci à des conditions aux limites de Neumann homogènes. Des résultats théoriques sont également obetenus (existence, unicité, existence de l'attracteur global de dimension finie). L'analyse du comportement spatial des solutions est aussi faite.

Dans le Chapitre 8, on considère le cas plus général d'un terme de couplage non linéaire. Des résultats théoriques (existence, unicité, régularité) sont obtenus. Le comportement asymptotique et spatial des solutions sont analysés.

5.5.1 Motivations physiques

Gurtin et Williams ont montré en s'appuyant sur une inégalité connue sous le nom de inégalité de Clausius-Duhem (cf. par exemple, [53], [54], [55] et [56]), que sous certaines hypothèses, la deuxième loi de la thermodynamique (pour des conducteurs de chaleur rigides) peut prendre la forme (voir [57]) :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega s dx \geq -\int_{\partial\Omega}\frac{q.\nu}{\varphi}dx + \int_\Omega \frac{r}{\theta}dx,$$

où s est l'entropie, q le vecteur flux thermique, r la chaleur issue du milieu extérieur, φ la température conductrice et θ la température thermodynamique. Ils ont démontré de façon générale que les températures φ et θ coïncident pour des matériaux simples (voir par exemple, [58] et [59]). C'est ainsi que Chen et Gurtin ont construit une théorie de la conduction de la chaleur impliquant deux températures pour des matériaux non simples, c'est-à-dire des matériaux pour lesquels les deux températures φ et θ ne coïncident pas (voir [60] pour plus d'explications sur le sujet).

On considère le modèle suivant :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= g(u)(\varphi - \Delta\varphi),\\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi &= -g(u)\frac{\partial u}{\partial t}.\end{aligned}$$

Ce système est obtenu via la théorie de conduction de chaleur introduite par Chen et Gurtin (cf. [60]). Plus précisément, on considère la théorie d'approximation linéaire

de la conduction de chaleur et l'énergie totale libre suivante :

$$\psi(u,\varphi) = \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + F(u) + G(u)(\varphi - \Delta\varphi) - \frac{1}{2}\varphi^2\Big)dx, \tag{5.114}$$

où Ω est le domaine occupé par le matériau, F et G étant des primitives de f et g, respectivement. Finalement, l'équation constitutive pour u est donnée par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_u \psi, \tag{5.115}$$

où δ représente une dérivée variationnelle. L'équation constitutive pour φ est obtenue en linéarisant l'équation d'énergie dans le cas isotrope, ce qui donne

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = r,$$

r étant la chaleur provenant du milieu extérieur. En prenant $r = -g(u)\frac{\partial u}{\partial t}$, on arrive alors à

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -g(u)\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.116}$$

Finalement, pour G linéaire, disons, $G(s) = s$, on est conduit au système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \varphi - \Delta\varphi, \tag{5.117}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t}. \tag{5.118}$$

Maintenant, l'hypothèse G linéaire est satisfaisante pour les transitions de phase solide-liquide, mais il existe des situations dans lesquelles une fonction de couplage non linéraire plus générale est attendue. C'est par exemple le cas pour les transitions de phase dans les matériaux férromagnétiques. Dans ce cas, le champ de phase correspond à la fraction de sites du réseau sur lequel les spins s'orientent et une fonction quadratique G, généralement, $G(s) = cs - c's^2,\ c' > 0$, est un choix plus approprié (voir [61]).

Chapitre 6

Modèle de champ de phase de type Caginalp avec un couplage linéaire

6.1 Cadre fonctionnel

Dans ce chaptire, on se propose d'étudier ce modèle dans le cas où g est une fonction constante ; sans perte de généralité, on prend $g \equiv 1$, ce qui nous conduit au modèle plus simple :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = \varphi - \Delta\varphi, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.2}$$

où u et φ représentent le paramètre d'ordre et le champ conducteur de température, respectivement. On associe à (6.1)-(6.2) des conditions aux bords de Dirichlet homogènes

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.3}$$

dans un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2, 3$ et les données initiales

$$u|_{t=0} = u_0, \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{6.4}$$

6.1.1 Hypothèses

On fait les hypothèses suivantes sur f :

$$f \text{ est de classe } C^1, \tag{6.5}$$

$$f(0) = 0, \tag{6.6}$$

$$-c_0 \leq F(s) \leq f(s)s + c_1,\ c_0, c_1 \geq 0,\ s \in \mathbb{R}, \tag{6.7}$$

$$|f'(s)| \leq c_2(|s|^{2p} + 1),\ c_2, p \geq 1,\ s \in \mathbb{R}, \tag{6.8}$$

$$f'(s) \geq -c_3,\ c_3 \geq 0, \tag{6.9}$$

avec $F(s) = \int_0^s f(\tau)d\tau$.

6.1.2 Notations

On introduit les espaces de Hilbert :

$$H = L^2(\Omega), V = H_0^1(\Omega), W = H^2(\Omega)$$

et on note V' l'espace dual de V. On considère le produit d'espaces de Hilbert

$$\mathcal{Y} = V \times W,$$

qui correspond à l'espace des phases de notre modèle. Le symbole $\langle ., . \rangle$ représente le produit de dualité entre V et V' ou entre L^p et L^q, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De plus, $\|.\|_X$ est la norme dans l'espace de Banach X. On munit l'espace $\mathcal{Y}$ de la norme $\|.\|_{\mathcal{Y}}$ définie par :

$$\|(v, \omega)\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_V + \|\omega\|_W, \ \forall \ (v, \omega) \in \mathcal{Y}.$$

On notera dans la suite c, c' et c'' des constantes positives qui pourront varier d'une ligne à l'autre et quelques fois dans la même ligne.

6.2 Estimations à priori

On multiplie (6.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx\big) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 = \int_\Omega (\varphi - \Delta\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}dx. \tag{6.10}$$

On multliplie (6.2) par $\varphi - \Delta\varphi$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big) + \|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = -\int_\Omega \big(\varphi - \Delta\varphi\big)\frac{\partial u}{\partial t}dx. \tag{6.11}$$

En additionnant (6.10) et (6.11), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx + \|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big)\\ &+ \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = 0.\end{aligned} \tag{6.12}$$

On multiplie (6.1) par u, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega f(u)udx = (\varphi, u) + (\nabla\varphi, \nabla u). \tag{6.13}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (6.7) entraînent

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + c\|\nabla u\|^2 + \int_\Omega F(u)dx \leq c'\|\nabla\varphi\|^2 + c''. \tag{6.14}$$

On multiplie (6.2) par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 = -(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial\varphi}{\partial t}). \tag{6.15}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2. \tag{6.16}$$

On somme maintenant (6.12), ϵ_1(6.14) et (6.16), où $\epsilon_1 > 0$ est assez petit. On a

$$\begin{aligned}&\frac{dE_1}{dt} + c\epsilon_1\|\nabla u\|^2 + \epsilon_1\int_\Omega F(u)dx + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq c'\epsilon_1\|\nabla\varphi\|^2 + c'',\end{aligned} \tag{6.17}$$

où

$$E_1 = \epsilon_1\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx + \|\varphi\|^2 + (2+\epsilon_1)\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 \tag{6.18}$$

satisfait

$$E_1 \geq c\Big(\|u\|_V^2 + \|\varphi\|_W^2 + \int_\Omega F(u)dx\Big). \tag{6.19}$$

En prenant $\epsilon_1 > 0$ telle que

$$1 - c'\epsilon_1 > 0, \tag{6.20}$$

on obtient une inégalité de la forme

$$\frac{dE_1}{dt} + cE_1 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq c'. \tag{6.21}$$

On multiplie cette fois (6.1) par $-\Delta u$, on intègre sur Ω et par parties. On a, grâce à (6.6),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_\Omega f'(u)|\nabla u|^2 dx = (\nabla\varphi, \nabla u) + (\Delta\varphi, \Delta u) \tag{6.22}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (6.9) conduisent à

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leq c'\|\nabla u\|^2 + c''(\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2). \tag{6.23}$$

On somme (6.21) et ϵ_2(6.23), avec $c - c'\epsilon_2 > 0$ et $c - c''\epsilon_2 > 0$, et on arrive à

$$\frac{dE_2}{dt} + cE_2 + c'\|\Delta u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq c'', \tag{6.24}$$

où

$$E_2 = E_1 + \epsilon_2\|\nabla u\|^2 \tag{6.25}$$

satisfait

$$E_2 \geq c\Big(\|u\|_V^2 + \|\varphi\|_W^2 + \int_\Omega F(u)dx\Big). \tag{6.26}$$

On multiplie (6.1) par $-\Delta\frac{\partial u}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx\\&=(\nabla\varphi,\nabla\frac{\partial u}{\partial t})+(\Delta\varphi,\Delta\frac{\partial u}{\partial t}).\end{aligned}\tag{6.27}$$

On multiplie maintenant (6.2) par $\Delta^2\varphi$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2)+\|\nabla\Delta\varphi\|^2=-(\Delta\varphi,\Delta\frac{\partial u}{\partial t}).\tag{6.28}$$

La somme de (6.27) et (6.28) implique que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta u\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2)+\|\nabla\Delta\varphi\|^2\\&+\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2=(\nabla\varphi,\nabla\frac{\partial u}{\partial t})-\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx.\end{aligned}\tag{6.29}$$

On a alors, grâce à (6.8),

$$\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|\leq c\int_\Omega(|u|^{2p}+1)|\nabla u||\nabla\frac{\partial u}{\partial t}|dx.\tag{6.30}$$

Si $d=2$, alors, l'inégalité de Hölder donne,

$$\int_\Omega|u|^{2p}|\nabla u||\nabla\frac{\partial u}{\partial t}|dx\leq c\|u\|_{H^1}^{2p}\|u\|_{H^2}\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\tag{6.31}$$

et il n'est pas difficile de voir que $p=1$ quand $d=3$, on a, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega|u|^2|\nabla u||\nabla\frac{\partial u}{\partial t}|dx\leq c\|u\|_{H^1}^2\|u\|_{H^2}\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\tag{6.32}$$

Ainsi, on déduit de (6.29)-(6.32), une inégalité de la forme

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2\Big)\\&+\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2\leq c\|u\|_{H^1}^q(\|u\|_{H^2}^4+1)+c',\ q\geq 0.\end{aligned}\tag{6.33}$$

Et, en sommant (6.24) et (6.33), on obtient une estimation du type

$$\frac{dE_3}{dt}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2\leq c\|u\|_V^q(\|u\|_W^2+1)(E_3+1)+c',\tag{6.34}$$

où

$$E_3=E_2+\|\Delta u\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2\tag{6.35}$$

satisfait

$$E_3\geq c(\|u\|_W^2+\|\varphi\|_{H^3}^2+\int_\Omega F(u)dx).\tag{6.36}$$

On multiplie enfin (6.2) par $-\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\varphi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2=(\frac{\partial u}{\partial t},\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}). \tag{6.37}$$

L'inégalité de Hölder entraîne

$$\frac{d}{dt}\|\Delta\varphi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2\leq\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2. \tag{6.38}$$

Pour finir, on fait la somme de (6.34) et ϵ_3(6.38). On obtient ainsi une inégalité de la même forme que (6.34), à savoir (on choisit ici $\epsilon_3<1$),

$$\begin{aligned}&\frac{dE_4}{dt}+c\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2\\&+\left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2\leq c'\|u\|_V^q(\|u\|_W^2+1)(E_4+1)+c'',\end{aligned} \tag{6.39}$$

où

$$E_4=E_3+\epsilon_3\|\Delta\varphi\|^2 \tag{6.40}$$

satisfait une inégalité similaire à (6.36).

6.3 Existence et unicité de solutions

Dans cette section, on prouve que le problème considéré est bien posé, c'est-à-dire qu'il possède une solution unique qui soit continue par rapport aux données initiales, ce qui permettra de définir un semi-groupe continu.

On énonce notre premier résultat :

Théorème 6.1. *Soit $T>0$ donné. On suppose que $(u_0,\varphi_0)\in V\times W\cap V$, et $F(u_0)<+\infty$. Alors sous les hypothèses* (6.7)-(6.8)*, le problème* (6.1)-(6.4) *admet au moins une solution (u,φ) telle que $u\in L^\infty(\mathbb{R}_+;V)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(0,T;H)$, $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}_+;W\cap V)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t}\in L^2(0,T,V)$.*

Démonstration:
La preuve de ce théorème est basée sur la méthode de Galerkin et l'estimation (6.21). En effet, on considère l'opérateur défini par :

$$\left\{\begin{array}{rcl}Av&=&-\Delta v,\\v&=&0\text{ sur }\partial\Omega,\end{array}\right.$$

de domaine $\mathcal{D}(A)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. L'opérateur A est autoadjoint, borné et positif. Il possède un inverse compact. Par conséquent, on peut considérer une famille $\{\omega_j,j\geq1\}$ de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $0<\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ qui forme une base orthonormale dans H et orthogonale dans V. En posant $V_m=vect\{\omega_1,\cdots,\omega_m\}$, on considère le problème approché suivant, écrit sous forme fonctionnelle,

$$\frac{du_m}{dt}+Au_m+P_mf(u_m)=\varphi_m+A\varphi_m, \tag{6.41}$$

$$\frac{d\varphi_m}{dt}+A\frac{d\varphi_m}{dt}+A\varphi_m=-\frac{du_m}{dt}, \tag{6.42}$$

$$u(0)=P_mu_0,\varphi_m(0)=P_m\varphi_0, \tag{6.43}$$

où P_m est la projection orthogonale de H sur V_m (pour le produit scalaire dans H), ce qui équivaut à

$$\frac{d}{dt}(u_m, v) + \langle Au_m, v\rangle + \langle P_m f(u_m), v\rangle = (\varphi_m, v) + \langle A\varphi_m, v\rangle \tag{6.44}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_m, \omega) + \frac{d}{dt}\langle A\varphi_m, \omega\rangle + \langle A\varphi_m, \omega\rangle = -\frac{d}{dt}(u_m, \omega), \tag{6.45}$$

associé aux conditions (6.43).

La preuve de l'existence d'une solution locale en temps du problème approché est standarde ; en effet, on cherche u_m et φ_m sous la forme :

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} u_{jm}\omega_j \text{ et } \varphi_m = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{jm}\omega_j.$$

Ainsi, résoudre (6.41)-(6.43) revient à trouver les u_{jm} et les φ_{jm} tels que u_m et φ_m vérifient (6.41)-(6.43). Pour cela, en remplaçant v et ω par $\omega_i,\ i = 1, \cdots, m$ dans le problème (6.41)-(6.43), on obtient un système d'équations différentielles ordinaires, que l'on résoud grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz. De plus, on aboutit à une estimation équivalente à (6.21), avec à la place de u et φ, u_m et φ_m, respectivement, ce qui permet de justifier l'estimation obtenue de façon formelle dans la section précédente, mais aussi la caractère global de la solution. On ommet le reste de la preuve, qui se fait sans difficulté (voir par exemple, [62] et [63], cf. aussi le Chapitre 3).

■

Le résultat qui suit traite de l'unicité de la solution

Théorème 6.2. *On fait l'hypothèse supplémentaire $p = 1$ dans (6.8) pour $d = 3$. Alors sous les conditions du Théorème 6.1, la solution du problème (6.1)-(6.4) est unique avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration:
L'existence ayant été établie, il nous reste à vérifier l'unicité de la solution. Pour ce faire, on suppose qu'il en existe deux (u_1, φ_1) et (u_2, φ_2) correspondant respectivement aux conditions initiales (u_{01}, φ_{01}) et (u_{02}, φ_{02}). On pose :

$$u = u_1 - u_2 \text{ et } \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

puis

$$u_0 = u_{01} - u_{02} \text{ et } \varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02},$$

on a alors que le couple (u, φ) satisfait

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = \varphi - \Delta\varphi, \tag{6.46}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.47}$$

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.48}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{6.49}$$

On multiplie (6.46) par $\frac{\partial u}{\partial t}$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx = (\varphi - \Delta\varphi, \frac{\partial u}{\partial t}). \tag{6.50}$$

Puis on mutiplie (6.47) par $\varphi - \Delta\varphi$, on intègre sur Ω et par parties. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big) + \|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = -(\varphi - \Delta\varphi, \frac{\partial u}{\partial t}). \tag{6.51}$$

En sommant les deux équations ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big) + 2\Big(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big)\\ &= -2\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx.\end{aligned} \tag{6.52}$$

On a grâce à (6.8),

$$\left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx\right| \le c\int_\Omega (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p} + 1)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| |u|dx. \tag{6.53}$$

Si $d \le 2$, alors $\forall\ p \ge 0$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p} + 1)|u|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dx &\le c(\|u_1\|_{L^{6p}}^{2p} + \|u_2\|_{L^{6p}}^{2p} + 1)\|u\|_{L^6}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\\ &\le c(\|u_1\|_V^{2p} + \|u_2\|_V^{2p} + 1)\|\nabla u\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\end{aligned}$$

Si $d = 3$, dans ce cas, on considère le cas le plus difficile $p = 1$, et on a, grâce à l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega (|u_1|^2 + |u_2|^2 + 1)|u|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| dx \le c(\|u_1\|_V^2 + \|u_2\|_V^2 + 1)\|\nabla u\|\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.$$

On conclut que

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big) \le c(\|u_1\|_V^q + \|u_2\|_V^q + 1)\|\nabla u\|^2,\ q \ge 0. \tag{6.54}$$

Ce qui donne aussi bien l'unicité (pour $u_{01} = u_{02}$ et $\varphi_{01} = \varphi_{02}$) que la continuité par rapport aux données initiales.

■

On définit ainsi, sous les hypothèses du Théorème 6.2, un semi-groupe continu $S(t)$ comme suit

$$S(t) : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y},\ S(t)(u_0, \varphi_0) = (u(t), \varphi(t)),\ \forall\ t \ge 0,$$

où (u, φ) est l'unique solution de (6.1)-(6.4).

6.4 Ensembles absorbants et Régularité

Notre objectif ici, est d'établir que le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, défini précédemment, possède un ensemble borné absorbant dans l'espace des phases $\mathcal{Y}$, mais également d'avoir plus de régularité sur la solution.

On a le

Théorème 6.3. *Le semi-groupe $S(t)$ associé au problème* (6.1)-(6.4) *possède un ensemble borné absorbant β_0 dans $\mathcal{Y}$.*

Démonstration:
On prouve ce théorème grâce aux estimations (6.19) et (6.21) et le lemme de Gronwall.

En effet :

On réécrit (6.21) ici. On a

$$\frac{dE_1}{dt} + cE_1 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq c'. \tag{6.55}$$

En particulier,

$$\frac{dE_1}{dt} + cE_1 \leq c' \tag{6.56}$$

et le Lemme de Gronwall donne

$$E_1(t) \leq e^{-ct}E_1(0) + \frac{c'}{c}. \tag{6.57}$$

Par (6.19), on déduit que

$$\|u(t)\|_V^2 + \|\varphi(t)\|_W^2 \leq c'e^{-ct}(\|u_0\|_V^2 + \|\varphi_0\|_W^2) + c'' \tag{6.58}$$

et donc, pour que,

$$\|u(t)\|_V^2 + \|\varphi(t)\|_W^2 \leq R,\ R > 0, \tag{6.59}$$

il suffit que

$$ce^{-ct}(\|u_0\|_V^2 + \|\varphi_0\|_W^2) + c' \leq R, \tag{6.60}$$

c'est-à-dire

$$t \geq -\frac{1}{c}\log\Big(\frac{R - c''}{c'E_1(0)}\Big).$$

En prenant les données initiales u_0 et φ_0 dans un borné B de $\mathcal{Y}$, on a

$$\|u(t)\|_V^2 + \|\varphi(t)\|_W^2 \leq R,\ \forall\ t \geq t_0, \tag{6.61}$$

où $t_0 := \max\{0, -\frac{1}{c}\log\left(\frac{R-c''}{c'(B)}\right)\}$. La preuve est ainsi complète.

■

6.4.1 Régularité de la solution

Théorème 6.4. *On suppose* (6.6) *et* (6.9) *vraies. Alors sous les conditions du Théorème 6.1, on a* $u \in L^2(0,T;W),\ \forall\ T>0$.

Démonstration:
La preuve est basée sur les estimations (6.24)-(6.26) et le Lemme de Gronwall. En effet, en réécrivant (6.24) ici,

$$\frac{dE_2}{dt} + cE_2 + c'\|\Delta u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq c'' \tag{6.62}$$

et en particulier,

$$\frac{dE_2}{dt} + cE_2 \leq c', \tag{6.63}$$

on a, d'après le lemme de Gronwall,

$$E_2(t) \leq e^{-ct}E_2(0) + c'. \tag{6.64}$$

On déduit, en intégrant (6.62) entre 0 et t, que

$$\int_0^t \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq e^{-ct}E_2(0) + c',$$

autrement dit, $u \in L^2(0,T;W)$.

■

Théorème 6.5. *On suppose* (6.6)-(6.7) *et* (6.9) *vraies, et* $p \in [0,1]$ *dans* (6.8) *lorsque* $d=3$. *Alors pour tout* $(u_0,\varphi_0) \in (W\cap V)\times(H^3(\Omega)\cap V)$, *le problème* (6.1)-(6.4) *admet une unique solution* (u,φ) *avec* $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;W\cap V)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V)$, $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+;H^3(\Omega)\cap V)$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;W\cap V),\ \forall\ T>0$.

Démonstration:
On prouve ce théorème via les lemmes de Gronwall et Gronwall uniforme. Dans cette optique, on remarque grâce à l'estimation (6.24) que

$$\int_t^{t+r} \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq a(r), \forall\ t \geq t_0,\ r>0, \tag{6.65}$$

pour $(u_0,\varphi_0) \in B$, où B est un borné de $\mathcal{Y}$ et t_0 est tel que $t \geq t_0$ implique $S(t)B \subset \beta_0$, β_0 étant l'ensemble borné absorbant obtenu dans le Théorème 6.3. On sait, d'après le Théorème 6.1, que

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+;V), \tag{6.66}$$

mais aussi, par le Théorème 6.4, que

$$u \in L^2(0,T;W),\ \forall\ T>0. \tag{6.67}$$

Par une application du lemme de Gronwall à (6.39) et compte tenu de (6.66) et (6.67), on a alors

$$u \in L^\infty(0,T;W\cap V),\ \forall\ T>0. \tag{6.68}$$

Dans l'optique d'appliquer le lemme de Gronwall uniforme à (6.39), certaines estimatimations sont requises, notamment,

$$\int_t^{t+r} E_4(s)ds \leq c \text{ et } \int_t^{t+r} \|u(s)\|_V^q(\|u(s)\|_W^2+1)ds \leq c',\ \forall\ t \geq t_0,\ \forall\ r>0,$$

où t_0 est tel que $\forall B \subset \mathcal{Y}$ borné, $S(t)B \subset \beta_0$, $\forall\ t \geq t_0$. On note que, d'après le Théorème 6.3 et l'estimation (6.65), on sait dire que

$$\int_t^{t+r} \|u(s)\|_V^q(\|u(s)\|_W^2+1)ds \leq c,\ \forall\ t \geq t_0. \tag{6.69}$$

Pour établir

$$\int_t^{t+r} E_4(s)ds \leq c,$$

il suffit de montrer que

$$\int_t^{t+r} \|\nabla\Delta\varphi(s)\|^2 ds \leq c,\ \forall\ t \geq t_0.$$

Pour ce faire, on a, en intégrant (6.33) entre 0 et t puis entre t et $t+r$ et d'après (6.69), que

$$\begin{array}{ll} \int_t^{t+r} \|\nabla\Delta\varphi(s)\|^2 ds & \leq \int_t^{t+r} \|u(s)\|_V^q(\|u(s)\|_W^4+1)ds \\ & + \int_0^t \|u(s)\|_V^q(\|u(s)\|_W^4+1)ds + \|u_0\|_W^2 + \|\varphi_0\|_{H^3}^2 + cT \\ & \leq c, \forall\ t \geq t_0, \end{array} \tag{6.70}$$

On a donc, par le lemme de Gronwall uniforme,

$$\int_t^{t+r} E_4(s)ds \leq c, \forall\ t \geq t_0 + r, \tag{6.71}$$

c'est-à-dire,

$$u \in L^\infty(t_0+r, +\infty; W \cap V). \tag{6.72}$$

En associant (6.68) et (6.72), on obtient alors

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; W \cap V).$$

De façon similaire, on montre que

$$\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^3(\Omega) \cap V).$$

De (6.39), on déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V) \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T; W \cap V),$$

ce qui termine la preuve.

■

Corollaire 6.1. *Le semi-groupe $S(t)$ possède un ensemble borné absorbant β_1 dans l'espace $\mathcal{Y}_1$, où $\mathcal{Y}_1 := (W \cap V) \times (H^3(\Omega) \cap V)$.*

Démonstration:
On sait, d'après le Théorème 6.2, obtenir la dépendance continue de la solution dans l'espace plus régulier $\mathcal{Y}_1$, ce qui nous permet de définir le semi-groupe $S(t)$ de $\mathcal{Y}_1$ dans lui-même. Par suite, le lemme de Gronwall uniforme appliqué à (6.39) nous fournit l'existence d'un ensemble borné absorbant β_1 dans $\mathcal{Y}_1$ (cf. la preuve du Théorème 6.5), d'où le corollaire.

■

6.5 Existence de l'attracteur global

Dans cette section, on s'appuie sur les résultats ci-dessus pour prouver l'existence de l'attracteur global du système considéré ici. On énonce le résultat principal :

Théorème 6.6. *Sous les hypothèses du Théorème 6.2, en prenant en compte* (6.6) *et* (6.9)*, le semi-groupe $S(t)$ défini sur $\mathcal{Y}$ possède l'attracteur global $\mathcal{A}$ qui est borné dans $\mathcal{Y}_1$.*

Démonstration:
On sait déjà que $S(t)$ possède un ensemble borné absorbant dans $\mathcal{Y}$; il reste à prouver l'existence d'un ensemble compact attractif qui soit borné dans $\mathcal{Y}_1$ (voir, par exemple, [23], [26], [64] et les nombreuses références qui y sont mentionnées). On procède comme dans [18] et on décompose la solution de la manière suivante :

$$(u, \varphi) = (u^d, \varphi^d) + (u^c, \varphi^c),$$

où (u^d, φ^d) est solution de

$$\frac{\partial u^d}{\partial t} - \Delta u^d = \varphi^d - \Delta \varphi^d, \tag{6.73}$$

$$\frac{\partial \varphi^d}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} - \Delta \varphi^d = -\frac{\partial u^d}{\partial t}, \tag{6.74}$$

$$u^d = \varphi^d = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.75}$$

$$u^d|_{t=0} = u_0, \varphi^d|_{t=0} = \varphi_0 \tag{6.76}$$

et (u^c, φ^c) est solution de

$$\frac{\partial u^c}{\partial t} - \Delta u^c + f(u) = \varphi^c - \Delta \varphi^c, \tag{6.77}$$

$$\frac{\partial \varphi^c}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \varphi^c}{\partial t} - \Delta \varphi^c = -\frac{\partial u^c}{\partial t}, \tag{6.78}$$

$$u^c = \varphi^c = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.79}$$

$$u^c|_{t=0} = 0, \varphi^c|_{t=0} = 0. \tag{6.80}$$

On considère le problème (6.73)-(6.76). On a, en répétant les estimations qui ont conduit à (6.10)-(6.21), et en notant que $f \equiv 0$ dans ce cas, une inégalité de la forme

$$\frac{dE_5}{dt} + cE_5 + c'\Big(\Big\| \frac{\partial u^d}{\partial t} \Big\|^2 + \Big\| \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} \Big\|^2 + \Big\| \nabla \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} \Big\|^2 \Big) \leq 0, \tag{6.81}$$

avec

$$E_5 = \epsilon_1\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\varphi\|^2 + (2+\epsilon_1)\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 \tag{6.82}$$

vérifiant

$$E_5 \geq c(\|u\|_V^2 + \|\varphi\|_W^2). \tag{6.83}$$

En particulier,

$$\frac{dE_5}{dt} + cE_5 \leq 0. \tag{6.84}$$

Le lemme de Gronwall nous donne

$$\|(u^d(t), \varphi^d(t))\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq e^{-ct}\|(u_0, \varphi_0)\|_{\mathcal{Y}}^2. \tag{6.85}$$

On considère maintenant le problème (6.77)-(6.80), et on répète les estimations qui nous ont menées à (6.21) et (6.29). On obtient

$$\frac{dE_6}{dt} \leq c\|f'(u)\nabla u\|^2, \tag{6.86}$$

où

$$\begin{aligned} E_6 =& \epsilon_1\|u^c\|^2 + \|\nabla u^c\|^2 + \|\Delta u^c\|^2 + \|\varphi^c\|^2 + (2+\epsilon_1)\|\nabla\varphi^c\|^2 \\ &+ \|\Delta\varphi^c\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi^c\|^2 \end{aligned} \tag{6.87}$$

satisfait

$$E_6 \geq c(\|u^c\|_W^2 + \|\varphi^c\|_{H^3}^2). \tag{6.88}$$

Mais, par (6.8), on écrit

$$\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u dx\right| \leq c\int_\Omega (|u|^{2p}+1)|\nabla u| dx,$$

si $d \leq 2$, alors $\forall\ p \geq 0$, l'inégalité de Hölder implique quelques

$$\begin{aligned} \int_\Omega (|u|^{2p}+1)|\nabla u| dx &\leq (\|u\|_{L^{4p}}^{2p} + 1)\|\nabla u\| \\ &\leq c(\|u\|_V^{2p} + 1)\|\nabla u\| \end{aligned}$$

et si $d = 3$, il n'est pas difficile de voir que $p = 1$, alors l'inégalité de Hölder entraîne que

$$\int_\Omega (|u|^2+1)|\nabla u| dx \leq c(\|u\|_V^2 + 1)\|\nabla u\|.$$

Finalement,

$$\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u dx\right| \leq c(\|u\|_V^q + 1)\|\nabla u\|,\ q \geq 0.$$

Maintenant, de l'estimation (6.62), on en déduit que

$$\|f'(u)\nabla u\|_{L^2(0,T;H^d)}^2 \leq Q(T, \|u_0\|_V, \|\varphi_0\|_W), \tag{6.89}$$

où Q est un polynôme indépendant des données initiales. De (6.86)-(6.88) et (6.89), on déduit que

$$\|(u^c(t), \varphi^c(t))\|_{\mathcal{Y}_1}^2 \leq Q(T, \|u_0\|_V, \|\varphi_0\|_W),\ \forall\ t \in [0,T]. \tag{6.90}$$

On conclut de (6.85) et (6.90), l'existence d'un ensemble compact attractif borné dans $\mathcal{Y}_1$ suivant [23] et [26]. La preuve est ainsi complète.

■

6.6 Attracteur exponentiel

Cette partie discute de la dimension de l'attracteur global $\mathcal{A}$ exhibé précédemment. Pour cette raison, on prouve l'existence d'un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$ qui, par définition, est de dimension fractale finie et contient l'attracteur global $\mathcal{A}$, ce qui permet de conclure que l'attracteur global $\mathcal{A}$ est de dimension fractale finie. Le manque d'effets régularisant des données initiales rend l'analyse plus délicate et les méthodes utilisées dans [34], [33], [35], [65], [66] et [27] pour établir l'existence d'un attracteur exponentiel ne sont plus valides dans ce cas. Pour y parvenir, nous procéderons comme dans [37], [36], [64] et les références citées (voir aussi le Chapitre 3 de ce document).

Nous allons appliquer le Théorème 3.6 énoncé au Chapitre 3, avec $V = \mathcal{Y}$, $H = \mathcal{Y}_1$ et $X = \overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\beta_0}$, où t_0 est tel que $t \geq t_0$ implique que $S(t)B \subset \beta_0$, $\forall\ B \subset \mathcal{Y}$ borné.

Étape I : On montre que le semi-groupe $S(t)$ satisfait une décomposition comme dans le point **(i)** du Théorème 3.6 du Chapitre 3.

On considère deux solutions du problèmes (6.1)-(6.3), (u_1, φ_1) et (u_2, φ_2), avec les conditions initiales respectives (u_{01}, φ_{01}) et (u_{02}, φ_{02}) dans β_1. En posant $(u, \varphi) = (u_1 - u_2, \varphi_1 - \varphi_2)$ et $(u_0, \varphi_0) = (u_{01} - u_{02}, \varphi_{01} - \varphi_{02})$, on a le système d'équations suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = \varphi - \Delta\varphi, \tag{6.91}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.92}$$

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.93}$$

$$u(0) = u_0, \varphi(0) = \varphi_0. \tag{6.94}$$

On déconpose à présent (u, φ) solution du problème (6.91)-(6.94) de la manière suivante :

$$(u, \varphi) = (\vartheta, \zeta) + (\upsilon, \varrho),$$

où (ϑ, ζ) est solution de

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} - \Delta\vartheta = \zeta - \Delta\zeta, \tag{6.95}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta\zeta = -\frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \tag{6.96}$$

$$\vartheta = \zeta = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.97}$$

$$\vartheta(0) = u_0, \zeta(0) = \varphi_0 \tag{6.98}$$

et (υ, ϱ) celle de

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - \Delta \upsilon + f(u_1) - f(u_2) = \varrho - \Delta \varrho, \tag{6.99}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \varrho}{\partial t} - \Delta \varrho = -\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \tag{6.100}$$

$$\upsilon = \varrho = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{6.101}$$

$$\upsilon(0) = \varrho(0) = 0. \tag{6.102}$$

En repétant les estimations qui nous ont conduit à (6.21) pour le système (6.95)-(6.98), en remarquant que $f \equiv 0$ dans ce cas, on obtient une inégalité de la forme

$$\frac{d}{dt} E_7 + cE_7 \leq 0,$$

où

$$E_7 = \epsilon_1 \|\vartheta\|^2 + \|\nabla \vartheta\|^2 + \|\zeta\|^2 + (2+\epsilon_1)\|\nabla \zeta\|^2 + \|\Delta \zeta\|^2$$

satisfait

$$E_7 \geq c(\|\vartheta\|_V^2 + \|\zeta\|_W^2).$$

Le lemme de Gronwall donne

$$\|\vartheta(t)\|_V^2 + \|\zeta(t)\|_W^2 \leq d(t)(\|u_0\|_V^2 + \|\varphi_0\|_W^2),$$

où $d(t) = e^{-ct}$, $t \geq 0$ et $d(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Considérons à présent le système (6.99)-(6.102). On mulitplie (6.99) par $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$ puis (6.100) par $\varrho - \Delta \varrho$ et on additionne les égalités résultantes. On obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla \upsilon\|^2 + \|\varrho\|^2 + 2\|\nabla \varrho\|^2 + \|\Delta \varrho\|^2\Big) + 2(\|\nabla \varrho\|^2 + \|\Delta \varrho\|^2) \\ &2\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|^2 = -2\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \upsilon}{\partial t} dx. \end{aligned} \tag{6.103}$$

De l'hypothèse (6.8), on écrit

$$\left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \upsilon}{\partial t} dx\right| \leq c\int_\Omega (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p} + 1)|u| \left|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right| dx.$$

Pour $d \leq 2$, on a, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p} + 1)|u| \left|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right| dx \leq c(\|u_1\|_V^{2p} + \|u_2\|_V^{2p} + 1)\|\nabla u\| \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|.$$

Pour $d = 3$, on prend $p = 1$ (en fait $p \leq 1$, dans ce cas), l'inégalité de Hölder donne

$$\int_\Omega (|u_1|^2 + |u_2|^2 + 1)|u| \left|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right| dx \leq c(\|u_1|_V^2 + \|u_2\|_V^2 + 1)\|\nabla u\| \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|.$$

On a dans les deux cas l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla v\|^2+\|\varrho\|^2+2\|\nabla\varrho\|^2+\|\Delta\varrho\|^2\Big)\\&+2(\|\nabla\varrho\|^2+\|\Delta\varrho\|^2)+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2\leq c(\|u_1\|_V^{q_1}+\|u_2\|_V^{q_1}+1)\|u\|_V^2,\ q_1\geq 0.\end{aligned}\tag{6.104}$$

On multiplie (6.99) par v. On a

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2+c\|\nabla v\|^2+2\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))v dx\leq c'\|\nabla\varrho\|^2.\tag{6.105}$$

En raisonnant de façon analogue, on est conduit à

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2+c\|\nabla v\|^2\leq c'(\|u_1\|_V^{q_2}+\|u_2\|_V^{q_2}+1)\|u\|_V^2+c''\|\nabla\varrho\|^2,\ q_2\geq 0.\tag{6.106}$$

En sommant (6.104) et ϵ_4(6.106), où $\epsilon_4>0$ est assez petit. On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_8+c\Big(\|\nabla v\|^2+\|\nabla\varrho\|^2+\|\Delta\varrho\|^2\Big)+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2\\&\leq c(\|u_1\|_V^q+\|u_2\|_V^q+1)\|u\|_V^2,\ q\geq 0,\end{aligned}\tag{6.107}$$

où

$$E_8=\epsilon_4\|v\|^2+\|\nabla v\|^2+\|\varrho\|^2+2\|\nabla\varrho\|^2+\|\Delta\varrho\|^2,\tag{6.108}$$

satisfait

$$c(\|v\|_V^2+\|\varrho\|_W^2)\leq E_8.\tag{6.109}$$

Ainsi, (6.107) devient

$$\frac{d}{dt}E_8+cE_8+\left\|\frac{\partial v}{\partial t}\right\|^2\leq c(\|u_1\|_V^q+\|u_2\|_V^q+1)\|u\|_V^2,\ q\geq 0.\tag{6.110}$$

On multiplie maintenant (6.99) par $-\Delta v$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla v\|^2+\|\Delta v\|^2=(\nabla\varrho,\nabla v)+(\Delta\varrho,\Delta v)+\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\Delta v dx.$$

Or, grâce à (6.8), on a

$$\left|\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\Delta v dx\right|\leq c\int_\Omega(|u_1|^{2p}+|u_2|^{2p}+1)|u||\Delta v|dx.$$

Il n'est pas difficile de voir que si $p=1$ quand $d=3$, on a alors, grâce à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|u_1|^2+|u_2|^2+1)|u||\Delta v|dx&\leq c(\|u_1\|_V^2+\|u_2\|_V^2+1)\|\nabla u\|\|\Delta v\|\\&\leq c(\|u_1\|_V^4+\|u_2\|_V^4+1)\|u\|_V^2+\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2.\end{aligned}$$

Finalement, pour $d\leq 3$, on arrive à une inégalité du type

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\upsilon\|^2+\|\Delta\upsilon\|^2 \leq c(\|u_1\|_V^q+\|u_2\|_V^q+1)\|u\|_V^2+c'(\|\nabla\varrho\|^2+\|\Delta\varrho\|^2),\ q\geq 0. \quad (6.111)$$

On additionne (6.110) et ϵ_5(6.111), où $\epsilon_5 > 0$ est suffisamment petit. On trouve

$$\frac{d}{dt}E_9 + cE_9 + \|\Delta\upsilon\|^2 + \left\|\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|^2 \leq c'(\|u_1\|_V^q + \|u_2\|_V^q + 1)\|u\|_V^2, \quad (6.112)$$

où

$$E_9 = E_8 + \epsilon_5\|\nabla\upsilon\|^2 \quad (6.113)$$

satisfait une estimation similaire à (6.109).

On multiplie (6.99) par $-\Delta\frac{\partial\upsilon}{\partial t}$ puis (6.100) par $\Delta^2\varrho$. On a en sommant les équations obtenues

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta\upsilon\|^2 + \|\Delta\varrho\|^2 + \|\nabla\Delta\varrho\|^2\Big) + \|\nabla\Delta\varrho\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|^2\\ &= \int_\Omega (f'(u_1)\nabla u_1 - f'(u_2)\nabla u_2)\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dx + (\nabla\varrho, \nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}).\end{aligned}$$

On a

$$f'(u_1)\nabla u_1 - f'(u_2)\nabla u_2 = (f'(u_1) - f'(u_2))\nabla u_1 + f'(u_2)\nabla u,$$

et donc

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega (f'(u_1)\nabla u_1 - f'(u_2)\nabla u_2)\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dx\right|\\ &\leq \int_\Omega |f'(u_1) - f'(u_2)||\nabla u_1|\left|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|dx + \int_\Omega |f'(u_2)||\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|dx.\end{aligned}$$

On a alors, grâce à (6.8) et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |f'(u_1) - f'(u_2)||\nabla u_1|\left|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|dx\\ &\leq c\int_\Omega (|u_1|^{2p} + |u_2|^{2p} + 1)|u||\nabla u_1|\left|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|dx\\ &\leq c(\|u_1\|_{L^\infty}^{2p} + \|u_2\|_{L^\infty}^{2p} + 1)\|\nabla u\|\|\Delta u_1\|\left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|\\ &\leq c(\|u_1\|_W^{2p} + \|u_2\|_W^{2p} + 1)\|u\|_V\|u_1\|_W\left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|,\end{aligned}$$

de la même façon,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f'(u_2)||\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|dx &\leq c\int_\Omega (|u_2|^{2p} + 1)|\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right|dx\\ &\leq c(\|u_2\|_{L^\infty}^{2p} + 1)\|\nabla u\|\left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|\\ &\leq c(\|u_2\|_W^{2p} + 1)\|u\|_V\left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|.\end{aligned}$$

On obtient enfin une inégalité de la forme

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta\upsilon\|^2+\|\Delta\varrho\|^2+\|\nabla\Delta\varrho\|^2\Big)+\|\nabla\Delta\varrho\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|^2\\&\leq c(\|u_1\|_W^{q'}+\|u_2\|_W^{q'}+1)\|u\|_V^2+c''\|\nabla\varrho\|^2,\ q'\geq 0.\end{aligned}\tag{6.114}$$

L'addition de (6.112) et ϵ_6(6.114), pour $\epsilon_6>0$ petit, donne

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}E_{10}+cE_{10}+c'\Big(\left\|\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right\|^2\Big)\\&\leq c''(\|u_1\|_V^q+\|u_2\|_V^q+1)\|u\|_V^2,\ q\geq 0,\end{aligned}\tag{6.115}$$

où

$$E_{10}=E_9+\epsilon_6(\|\Delta\upsilon\|^2+\|\Delta\varrho\|^2+\|\nabla\Delta\varrho\|^2)\tag{6.116}$$

satisfait

$$E_{10}\geq c(\|\upsilon\|_W^2+\|\varrho\|_{H^3}^2).\tag{6.117}$$

Le lemme de Gronwall entraîne

$$\|\upsilon(t)\|_W^2+\|\varrho(t)\|_{H^3}^2\leq h(t)(\|u_0\|_V^2+\|\varphi_0\|_W^2),\ \forall\ t\in[0,T],\tag{6.118}$$

où

$$h(t)=c'\int_0^t e^{-c(t-s)}(\|u_1(s)\|_V^q+\|u_2(s)\|_V^q+1)ds,$$

d'où le résultat.

Étape II : On prouve que le semi-groupe $S(t)$ est Lipschitz en espace et Hölder continu en temps sur $[0,T]\times B$, $\forall\ T>0$, $\forall\ B$ borné de W.

On a que $S(t)$ est Lipschitz en espace, d'après (6.54), il nous reste à prouver la continuité Höldérienne par rapport au temps du semi-groupe $S(t)$. D'après les estimations (6.33) pour $\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_V^2$ et (6.38) pour $\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|_W^2$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}&\|u(t_1)-u(t_2)\|_V+\|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\|_W\\&\leq\int_{t_2}^{t_1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}(\tau)\right\|_V d\tau+\int_{t_2}^{t_1}\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}(\tau)\right\|_W d\tau\\&\leq c|t_1-t_2|^{1/2},\end{aligned}$$

où c dépend de β_1 et T, $\forall\ t_1,t_2\in[0,T]$.

■

On a démontré le

Théorème 6.7. *Le semi-groupe $S(t)$ possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}$ dans X.*

6.7 Comportement spatial de solutions.

On se propose maintenant d'étudier le comportemment spatial des solutions de notre modèle. Pour ce faire, on introduit les notations suivantes. On considère la région $R = (0, +\infty) \times D$ de l'espace $\mathbb{R}^d, d = 2, 3$, où D est un domaine borné dans $\mathbb{R}^{d-1}$. On suppose que R est suffisamment régulier pour appliquer le théorème de la divergence. Dans le cas $d = 2$, on considère une bande rectangulaire suivant la direction x_1. Par ailleurs, pour $d = 3$, R est un cylindre semi-infini suivant la direction x_1. C'est ce dernier cas qui fera l'objet de notre analyse (voir, [31], [18], [64] et [29]).

On considère le problème défini par (6.1)-(6.2) dans le cylindre semi-infini R associé aux conditions aux bords

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } (0, +\infty) \times \partial D \times (0, T), \tag{6.119}$$

$$\begin{cases} u(0, x_2, x_3, t) = p(x_2, x_3, t), \\ \varphi(0, x_2, x_3, t) = q(x_2, x_3, t) \text{ sur } \{0\} \times D \times (0, T), \end{cases} \tag{6.120}$$

où $T > 0$ est fixé. On a aussi les conditions initiales suivantes

$$u|_{t=0} = \varphi|_{t=0} = 0 \text{ sur } R. \tag{6.121}$$

Il faut noter que l'on admet que ce problème est bien posé au sens de Hadamard. On suppose qu'il existe deux constantes positives d_1, d_2 telles que

$$F(s) + d_1 s^2 \geq 0, f(s)s + d_2 s^2 \geq 0. \tag{6.122}$$

On commence notre analyse en considérant la fonction

$$F_\omega(z, t) = \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)\Big(u_s u_{,1} + \varphi(\varphi_{,1} + \varphi_{,1s}) + \varphi_s \varphi_{,1}\Big) dads, \tag{6.123}$$

où $D(z) = \{x \in R, x_1 = z\}$ et ω est une constante positive arbitraire à préciser ; ici, $v_s = \frac{\partial v}{\partial s}$ et $v_{,1} = \frac{\partial v}{\partial x_1}$. En utilisant le théorème de la divergence et grâce à (6.119)-(6.121), on a

$$\begin{aligned} & F_\omega(z + h, t) - F_\omega(z, t) \\ & = \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{R(z,z+h)} (|\nabla u|^2 + 2F(u)) dx \\ & + \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{R(z,z+h)} (|\varphi|^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) dx \\ & + \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) dxds \\ & + \frac{\omega}{2} \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) dxds, \end{aligned} \tag{6.124}$$

où $R(z, z + h) = \{x \in R, z < x_1 < z + h\}$. En divisant par h, et en faisant tendre h

vers zéro, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\omega}{\partial z}(z,t)\\
&= \frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{D(z)}(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)da\\
&+ \int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dads\\
&+ \frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dads.
\end{aligned} \tag{6.125}$$

On considère maintenant une seconde fonction, à savoir,

$$G_\omega(z,t) = \int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\Big(uu_{,1} + \varphi(\theta_{,1} + \varphi_{,1})\Big)dads, \tag{6.126}$$

où

$$\theta(t) = \int_0^t \varphi(s)ds. \tag{6.127}$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$\begin{aligned}
&G_\omega(z+h,t) - G_\omega(z,t)\\
&= \frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z,z+h)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dx\\
&+ \int_0^t\int_{R(z,z+h)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)dxds\\
&+ \frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z,z+h)}\exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dxds
\end{aligned} \tag{6.128}$$

et un calcul direct de la différentielle de G_ω par rapport à z donne

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial G_\omega}{\partial z}(z,t)\\
&= \frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{D(z)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)da\\
&+ \int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2+)dads\\
&+ \frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dads.
\end{aligned} \tag{6.129}$$

On peut toujours choisir ω assez grand pour que

$$f(u)u + \frac{\omega}{2}u^2 \geq C_1,\ C_1 > 0,\ (\omega > 2). \tag{6.130}$$

On pose $H_\omega = F_\omega + \tau G_\omega$, où τ est assez grand. On a

$$\begin{aligned}
&(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2) + \tau(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)\\
&\geq C_2(|u|^2 + |\nabla u|^2 + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2 + |\nabla\theta|^2)
\end{aligned} \tag{6.131}$$

et

$$\begin{aligned}&(|u_s|^2+|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)+\tau(|\nabla u|^2+f(u)u+u\Delta\varphi+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\\&+\frac{\omega}{2}\Big((|\nabla u|^2+2F(u)+|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)+\tau(|u|^2+|\nabla\theta|^2)\Big)\\&\geq C_2(|u|^2+|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2+|\nabla\theta|^2),\end{aligned}\tag{6.132}$$

où C_2 est une constante strictement positive. En remarquant que :

$$\frac{\partial H_\omega}{\partial z}=\frac{\partial F_\omega}{\partial z}+\tau\frac{\partial G_\omega}{\partial z}$$

et en supposant ω et τ suffisamment grands, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_\omega}{\partial z}(z,t)\\&\geq C_2\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)dads\\&+C_2\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|\Delta\varphi|^2+|\nabla\theta|^2)dads.\end{aligned}\tag{6.133}$$

Notre prochaine étape consiste à établir une estimation de $|H_\omega|$ en fonction de $\frac{\partial H_\omega}{\partial z}$. On a

$$\begin{aligned}&|F_\omega|\\&\leq(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u_s^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1s}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_s^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1}^2dads)^{1/2}\\&\leq C_3\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\varphi_s|^2+|\nabla\varphi_s|^2)dads,\end{aligned}\tag{6.134}$$

où C_3 est une constante positive que l'on peut déterminer explicitement. De même,

$$\begin{aligned}&|G_\omega|\\&\leq(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\theta_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_s^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1}^2dads)^{1/2}\\&\leq C_4\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\nabla\theta|^2)dads,\end{aligned}\tag{6.135}$$

où C_4 peut être explicitement déterminée en fonction des paramètres et de la géométrie de la section transversale. On déduit de (6.134)-(6.135) que

$$|H_\omega| \leq C_5 \frac{\partial H_\omega}{\partial z}(z,t), \tag{6.136}$$

où $C_5 = \frac{C_3+\tau C_4}{C_2} > 0$. L'inégalité (6.136) est bien connue dans l'étude des estimations spatiales (voir, [29], [18], [64], [31], et les références qui y figurent). On conclut alors que soit il existe $z_0 \geq 0$ telle que $H_\omega(z_0,t) > 0$ et

$$H_\omega(z,t) \geq H_\omega(z_0,t)\exp(C_5^{-1}(z-z_0)),\ z \geq z_0, \tag{6.137}$$

soit on obtient l'estimation spatiale

$$-H_\omega(z,t) \leq -H_\omega(0,t)\exp(-C_5^{-1}z),\ z \geq 0. \tag{6.138}$$

L'estimation (6.137) donne des informations en termes de la mesure définie dans le cylindre, et on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)da + \\
&\tau\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dx + \frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}(|\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dx \\
&+ \int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dxds
\end{aligned} \tag{6.139}$$

tend vers l'infini de façon exponentielle. Par ailleurs, l'estimation (6.138) implique que $H_\omega(z,t)$ tend vers zéro lorsque z tend vers l'infini, et on a que

$$E_\omega(z,t) \leq E_\omega(0,t)\exp(-C_5^{-1}z),\ z \geq 0, \tag{6.140}$$

où

$$
\begin{aligned}
&E_\omega(z,t)\\
&=\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}(|\nabla u|^2+2F(u)+|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)da\\
&+\tau\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}(|u|^2+|\nabla\theta|^2)dx+\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}(|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)dx\\
&+\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|u_s|^2+|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+2F(u)+|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)dxds\\
&+\tau\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+f(u)u+u\Delta\varphi+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla\theta|^2)dxds
\end{aligned}
\tag{6.141}
$$

et $R(z)=\{x\in R, x_1>z\}$.

On a prouvé le

Théorème 6.8. *Soit (u,φ) une solution régulière du problème défini par* (6.1)-(6.2)*, les conditions aux bords* (6.119)-(6.120) *et les conditions initiales* (6.121)*. Alors, soit la condition asymptotique* (6.139) *est vraie, soit l'inégalité suivante :*

$$
\varepsilon_\omega(z,t)\le E_\omega(0,t)\exp(\omega t-C_5^{-1}z),
\tag{6.142}
$$

est satisfaite pour $z\ge 0$, où

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_\omega(z,t)\\
&=\frac{1}{2}\int_{R(z)}(|\nabla u|^2+2F(u)+|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)da\\
&+\frac{\tau}{2}\int_{R(z)}(|u|^2+|\nabla\theta|^2)dx+\frac{1}{2}\int_{R(z)}(|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)dx\\
&+\int_0^t\int_{R(z)}(|u_s|^2+|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}(|\nabla u|^2+2F(u)+|\varphi|^2+2|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2)dxds\\
&+\tau\int_0^t\int_{R(z)}(|\nabla u|^2+f(u)u+u\Delta\varphi+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)dxds\\
&+\tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}(|u|^2+|\nabla\theta|^2)dxds.
\end{aligned}
\tag{6.143}
$$

Remarque 6.1. *Le Théorème 6.8 lié à l'estimation* (6.136) *correspond à l'alternative de Phragmén-Lindelöf (voir, par exemple, [40]).*

Chapitre 7

Problème de champ de phase conservatif avec un couplage linéaire

Ce chapitre est consacré à l'étude du modèle de champ de phase avec un couplage linéaire considéré dans le Chapitre 6, cette fois associé aux conditions aux limites de type Neumann homogènes. Nous sommes donc concernés par le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) &= \varphi - \Delta\varphi, && (7.1)\\
\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi &= -\frac{\partial u}{\partial t}, && (7.2)\\
\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= 0 \text{ sur } \partial\Omega, && (7.3)\\
u/_{t=0} = u_0, \varphi/_{t=0} &= \varphi_0, && (7.4)
\end{aligned}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné, régulier, avec $d = 2$ ou 3. Ici, u et φ représentent comme dans le Chapitre 6, le paramètre d'ordre et le champ conducteur de température, respectivement.

Remarque 7.1. *La moyenne (en espace) de $u + \varphi$ dans le problème* (7.1)-(7.4) *est conservée en temps, à savoir*

$$\int_\Omega (u + \varphi)dx = \int_\Omega (u_0 + \varphi_0)dx, \forall t > 0.$$

Pour le voir, il suffit d'intégrer l'équation (7.2) *sur Ω et de tenir compte de* (7.3).

Au vue de la Remarque 7.1, il est tout à fait naturel d'introduire les espaces de fonctions suivants :

$$E_\beta = \{(u, \varphi) \in E; \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (u + \varphi)dx = \beta\},\ \beta \geq 0,$$

et

$$\mathcal{E}_\alpha = \bigcup_{|\beta| \leq \alpha} E_\beta,\ \alpha \geq 0,$$

où $E = H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$. On pose $W = H^2(\Omega) \times H^3(\Omega)$.

Remarque 7.2. *Pour des raisons techniques, on fait des hypothèses sur la non linéarité légèrement différentes que celles considérées au Chapitre 6.*

Hypothèses sur le potentiel f :

$$c_1 s^{2p} - c_2 \leq F(s) \leq f(s)s \leq c_3 s^{2p} + c_4, c_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4, s \in \mathbb{R}, \tag{7.5}$$

où $F' = f$

$$f'(s) \geq -c_5, c_5 \geq 0, s \in \mathbb{R}, \tag{7.6}$$

$$|f'(s)| \leq c_6(|s|^{2p-2} + 1), c_6 > 0, s \in \mathbb{R}. \tag{7.7}$$

7.1 Existence et Unicité de solutions.

On commence par énoncer le résultat suivant :

Théorème 7.1. *Soit $(u_0, \varphi_0) \in E_\beta$. Sous les conditions* (7.5)-(7.6)*, le problème* (7.1)-(7.4) *admet au moins une solution (u, φ) satisfaisant $(u, \varphi) \in L^\infty(0, T; E_\beta) \cap L^2(0, T; E_\beta), u \in L^{2p}(0, T; L^{2p}(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, $\forall T > 0$.*

Démonstration:
La preuve s'appuie de nouveau sur la méthode de Galerkin. L'opérateur $-\Delta$ avec les conditions aux bords de Neumann homogènes a une suite de valeurs propres $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ et soit $\omega_j,\ j = 1, 2, \cdots, k, \cdots$, les vecteurs propres correpondants qui forment une base orthonormée de $L^2(\Omega)$. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on cherche une solution approchée (u_m, φ_m) de la forme :

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} u_{jm}\omega_j, \text{ et } \varphi_m = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{jm}\omega_j$$

vérifiant, en notant que les fonctions $\omega_i, i = 1, \cdots m$, sont très régulières,

$$(\frac{\partial u_m}{\partial t}, \omega_i) + (\nabla u_m, \nabla \omega_i) + \int_\Omega f(u_m)\omega_i dx = (\varphi_m - \Delta\varphi_m, \omega_i), \tag{7.8}$$

$$(\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}, \omega_i) + (\nabla \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}, \nabla \omega_i) + (\nabla \varphi_m, \nabla \omega_i) = -(\frac{\partial u_m}{\partial t}, \omega_i), \tag{7.9}$$

pour $i = 1, \cdots, m$, et

$$\begin{array}{ll} u_m(0) & = u_{0m} \to u_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } m \to +\infty, \\ \varphi_m(0) & = \varphi_{0m} \to \varphi_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ lorsque } m \to +\infty. \end{array} \tag{7.10}$$

On s'est ramené à la résolution d'un système de $2m$ équations différentielles ordinaires pour lequel on sait prouver l'existence d'une solution locale en temps (u_m, φ_m) sur $(0, T_m)$, pour un $T_m > 0$. On verra, grâce aux estimations à priori, qu'en réalité $T_m = T$, c'est-à-dire que (u_m, φ_m) est une solution globale en temps.

On multiplie (7.8) par $\frac{\partial u_{im}}{\partial t}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\nabla u_m\|^2 + 2\int_\Omega F(u_m)dx) + \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 = \int_\Omega (\varphi_m - \Delta\varphi_m)\frac{\partial u_m}{\partial t}dx. \tag{7.11}$$

On multiplie (7.9) par $\varphi_{im} + \lambda_{im}\varphi_{im}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\varphi_m\|^2 + 2\|\nabla\varphi_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2\Big) + \|\nabla\varphi_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2 \\ &= -\int_\Omega \big(\varphi_m - \Delta\varphi_m\big)\frac{\partial u_m}{\partial t}dx. \end{aligned} \tag{7.12}$$

En additionnant (7.11) et (7.12), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u_m\|^2 + 2\int_\Omega F(u_m)dx + \|\varphi_m\|^2 + 2\|\nabla\varphi_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2\Big) \\ &+ 2\Big(\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \|\nabla\varphi_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2\Big) = 0. \end{aligned} \tag{7.13}$$

On multiplie (7.8) par u_{im} et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + \int_\Omega f(u_m)u_m dx = (u_m, \varphi_m) + (\nabla u_m, \nabla\varphi_m). \tag{7.14}$$

Par hypothèse, $f(u_m)u_m \geq c_1 u_m^{2p} - c_2$ et on a alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{2p}^{2p} \leq c_2|\Omega| + (u_m, \varphi_m) + (\nabla u_m, \nabla\varphi_m). \tag{7.15}$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + 2c_1\|u_m\|_{2p}^{2p} \leq 2c_2|\Omega| + 2(u_m, \varphi_m) + \|\nabla\varphi_m\|^2. \tag{7.16}$$

Mais

$$u_m^{2p} \geq \frac{1}{2}u_m^{2p} + cu_m^2 + c',\ c > 0,$$

ce qui implique

$$\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} \leq 2(u_m, \varphi_m) + \|\nabla\varphi_m\|^2 + c'. \tag{7.17}$$

En prenant $i = 0$ dans (7.9) et en notant que ω_0 est constante, on obtient

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u_m + \varphi_m)dx = 0,$$

c'est-à-dire,

$$< u_m + \varphi_m > = < u_0 + \varphi_0 > = \beta. \tag{7.18}$$

Maintenant, en ajoutant $\epsilon < u_m + \varphi_m >^2$ à chacun des membres de (7.17), on a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \epsilon < u_m + \varphi_m >^2 \\ &\leq 2(u_m, \varphi_m) + \|\nabla\varphi_m\|^2 + c'\beta^2. \end{aligned} \tag{7.19}$$

En notant que

$$\epsilon < u_m + \varphi_m >^2 \geq \frac{\epsilon}{2} < \varphi_m >^2 - \epsilon c \|u_m\|^2,$$

on a alors

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c(1-\epsilon)\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \frac{\epsilon}{2} < \varphi_m >^2 \\ &\leq 2(u_m, \varphi_m) + \|\nabla \varphi_m\|^2 + C\beta^2. \end{aligned}$$

En notant également que

$$\begin{aligned} (u_m, \varphi_m) &= (u_m, \varphi_m - < \varphi_m >) + |\Omega| < u_m >< \varphi_m > \\ &= (u_m, \varphi_m - < \varphi_m >) + |\Omega| < u_m > (\beta - < u_m >) \end{aligned}$$

et que

$$|\Omega| < u_m > (\beta - < u_m >) \leq c,$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c(1-\epsilon)\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \frac{\epsilon}{2} < \varphi_m >^2 \\ &\leq 2(u_m, \varphi_m - < \varphi_m >) + \|\nabla \varphi_m\|^2 + C(1+\beta^2). \end{aligned} \tag{7.20}$$

L'inégalité de Young permet d'écrire

$$(u_m, \varphi_m - < \varphi_m >) \leq \frac{c}{4}\|u_m\|^2 + \frac{1}{c}\|\varphi_m - < \varphi_m > \|^2, \ c > 0$$

et on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c(\frac{1}{2} - \epsilon)\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \frac{\epsilon}{2} < \varphi_m >^2 \\ &\leq \frac{2}{c}\|\varphi_m - < \varphi_m > \|^2 + \|\nabla \varphi_m\|^2 + C(1+\beta^2). \end{aligned} \tag{7.21}$$

Par le lemme de Poincaré (voir Théorème 2.7 au Chapitre 2), il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que

$$\|\varphi_m - < \varphi_m > \|^2 \leq C(\Omega)\|\nabla \varphi_m\|^2. \tag{7.22}$$

En injectant (7.22) dans (7.21), on a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c(\frac{1}{2} - \epsilon)\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \frac{\epsilon}{2} < \varphi_m >^2 \\ &\leq c'\|\nabla \varphi_m\|^2 + C(1+\beta^2). \end{aligned} \tag{7.23}$$

En prenant $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $\frac{1}{2} - \epsilon > 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + c\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + c' < \varphi_m >^2 \\ &\leq c''\|\nabla \varphi_m\|^2 + C(1+\beta^2). \end{aligned} \tag{7.24}$$

On multiplie (7.9) par $\frac{\partial \varphi_{im}}{\partial t}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a par l'inégalité de Hölder

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi_m\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 + 2\left\|\nabla\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 \leq \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2. \tag{7.25}$$

En sommant (7.13), ϵ_1(7.16) et (7.25), où $\epsilon_1 > 0$ est assez petit, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_{1m}}{dt} + \epsilon_1\Big(c\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + c_1\|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + c' < \varphi_m >^2\Big) \\
&+ 2(\|\nabla\varphi_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2) + \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 \\
&\leq \epsilon_1 c''\|\nabla\varphi_m\|^2 + C(1+\beta^2),
\end{aligned} \tag{7.26}$$

où

$$V_{1m} = \epsilon_1\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + \|\varphi_m\|^2 + 3\|\nabla\varphi_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2 + 2\int_\Omega F(u_m)dx \tag{7.27}$$

satisfait

$$c(\|u_m\|_{H^1}^2 + \|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \|\varphi_m\|_{H^2}^2) \leq V_{1m} \tag{7.28}$$

et où on a utilisé le fait que $F(u_m) \geq c_1 u_m^{2p} - c_2$. En choisissant $\epsilon_1 > 0$ suffisamment petit pour que $2 - \epsilon_1 c'' > 0$, on arrive à l'inégalité suivante

$$\frac{dV_{1m}}{dt} + cV_{1m} + c'\Big(\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2\Big) \leq C(1+\beta^2), \tag{7.29}$$

en utilisant que $(< \varphi >^2 + \|\nabla\varphi\|^2)^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme usuelle dans $H^1(\Omega)$. En intégrant l'estimation (7.29) entre 0 et T, on obtient que les normes :

$$\|(u_m, \varphi_m)\|_{L^\infty(0,T;E_\beta)}, \|(u_m, \varphi_m)\|_{L^2(0,T;E_\beta)} \text{ et } \|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^{2p}(\Omega))},$$

ainsi que

$$\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \text{ et } \left\|\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))},$$

sont bornées indépendamment de m. On peut donc extraire une sous-suite que l'on renomme (u_m, φ_m) telle que $(u_m, \varphi_m) \rightharpoonup (u, \varphi)$ faiblement dans $L^2(0,T;E_\beta)$ et faiblement étoile dans $L^\infty(0,T;E_\beta)$ lorsque $m \to +\infty$. Nous allons maintenant traiter le terme non linéaire $f(u_m)$. On a que u_m est bornée indépendamment de m dans $L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega))$. De plus, $|f(u_m)| \leq c_3|u_m|^{2p-1} + c_4$, d'où $f(u_m)$ est bornée indépendamment de m dans $L^q(0,T;L^q(\Omega))$, où q est le conjugué de $2p$. Par conséquent, pour une suite extraite encore notée u_m, on a

$$f(u_m) \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^q(0,T;L^q(\Omega)).$$

Par passage à la limite dans (7.8)-(7.10), on a

$$\frac{d}{dt}(u,\omega) + (\nabla u, \nabla\omega) + (\chi,\omega) = (\varphi - \Delta\varphi, \omega), \forall\omega \in H^1(\Omega) \tag{7.30}$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi, v) + (\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \nabla v) + (\nabla\varphi, \nabla v) = -(\frac{\partial u_m}{\partial t}, v), \forall v \in H^1(\Omega). \tag{7.31}$$

En outre, de l'équation (7.30), on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \chi + \varphi - \Delta\varphi \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^q(0,T;L^q(\Omega)),$$

et comme,

$$(L^2(0,T;H^1(\Omega)) \cap L^{2p}(0,T;L^{2p}(\Omega)))' = L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) + L^q(0,T;L^q(\Omega)),$$

par le théorème de Lions, on a $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, d'où, $u(0)$ a un sens et $u(0) = u_0$. On a aussi $\varphi \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial t} \in L^2(0,T;H^1(\Omega))$, avec les arguments classiques dûs à Lions, on voit que $\varphi \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Ainsi, $\varphi(0)$ a un sens et $\varphi(0) = \varphi_0$. Il reste à vérifier que $\chi = f(u)$. On sait que : $u_m \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(0,T;H^1(\Omega))$. L'injection $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ étant compacte, on a que la suite $u_m \to u$ pour presque tout $(t,x) \in (0,T)\times\Omega$, d'où on a alors

$$f(u_m) \to f(u) \text{ p.p. dans } \Omega \times (0,T)$$

et $f(u_m)$ est bornée dans $L^q(\Omega\times(0,T))$. Par conséquent,

$$f(u_m) \to f(u) \text{ dans } L^q(\Omega\times(0,T)) \text{ (pour une suite extraite).}$$

■

En ce qui concerne l'unicité de solutions, on a le

Théorème 7.2. *Sous les conditions du Théorème 7.1 et, de plus, en supposant que* $p \le 2$ *dans* (7.7) *lorsque* $d = 3$*, alors le problème* (7.1)-(7.4) *a une solution unique* (u,φ)*, avec la régularité ci-dessus.*

Démonstration:
On suppose l'existence de deux solutions (u_1,φ_1) et (u_2,φ_2) du problème (7.1)-(7.4) avec respectivement les conditions initiales (u_{01},φ_{01}) et (u_{02},φ_{02}). On pose $u = u_1 - u_2$, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $u_0 = u_{01} - u_{02}$ et $\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$. On a alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = \varphi - \Delta\varphi, \tag{7.32}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7.33}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega, \tag{7.34}$$

$$u/_{t=0} = u_0, \varphi/_{t=0} = \varphi_0. \tag{7.35}$$

On multiplie (7.32) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx = (\varphi - \Delta\varphi, \frac{\partial u}{\partial t}) \tag{7.36}$$

puis, on multiplie (7.33) par $\varphi - \Delta\varphi$ pour obtenir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big) + \|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 = -(\varphi - \Delta\varphi, \frac{\partial u}{\partial t}). \tag{7.37}$$

En sommant (7.36) et (7.37), on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2+\|\varphi\|^2+2\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2\Big)\\&+2\Big(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2+\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2\Big)=-2\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx.\end{aligned}\tag{7.38}$$

De l'hypothèse (7.7), on a

$$\left|\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|\le c\int_\Omega(|u_1|^{2p-2}+|u_2|^{2p-2}+1)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right||u|dx.\tag{7.39}$$

Pour $d\le 2$, on écrit

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(f(u_1)-f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|&\le(\|u_1\|^{2p-2}_{L^{6(p-1)}}+\|u_2\|^{2p-2}_{L^{6(p-1)}}+1)\|u\|_{L^6}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\\&\le c(\|u_1\|^{2p-2}_{H^1}+\|u_2\|^{2p-2}_{H^1})\|u\|_{H^1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\end{aligned}\tag{7.40}$$

Lorsque $d=3$, alors $p\le 2$ dans ce cas. On considère le cas le plus difficile $p=2$, et on a, en utilisant l'inégalité de Hölder avec les exposants 1/3, 1/6 et 1/2,

$$\begin{aligned}\int_\Omega(|u_1|^2+|u_2|^2+1)|u|\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx&\le c(\|u_1\|^2_{L^6}+\|u_2\|^2_{L^6}+1)\|u\|_{L^6}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\\&\le c(\|u_1\|^2_{H^1}+\|u_2\|^2_{H^1}+1)\|u\|_{H^1}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\end{aligned}\tag{7.41}$$

Dans les deux cas, on déduit une inégalité du type

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2+\|\varphi\|^2+2\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2\Big)\le c(\|u_1\|^q_{H^1}+\|u_2\|^q_{H^1}+1)\|u\|^2_{H^1},\ q\ge 0.\tag{7.42}$$

Finalement, on multiplie (7.32) par u pour aboutir grâce à (7.6) et l'inégalité de Hölder à

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+\|\nabla u\|^2\le c\|u\|^2+c'(\|\varphi\|^2+\|\nabla\varphi\|^2).\tag{7.43}$$

En additionnant (7.42) et (7.43) on a

$$\frac{dE}{dt}\le c(\|u_1\|^q_{H^1}+\|u_2\|^q_{H^1}+1)E,\tag{7.44}$$

où

$$E=\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\varphi\|^2+2\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2$$

satisfait

$$E\ge c(\|u\|^2_{H^1}+\|\varphi\|^2_{H^2})$$

et

$$E\le c'(\|u\|^2_{H^1}+\|\varphi\|^2_{H^2}),$$

ce qui donne, en utilisant le lemme de Gronwall, aussi bien l'unicité (pour $u_{01}=u_{02}$ et $\varphi_{01}=\varphi_{02}$) que la continuité par rapport aux données initialles. ■

Pour plus de régularité sur la solution, on a le résultat qui suit

Théorème 7.3. *On suppose maintenant que* (7.7) *est réalisée et que* $p \in [0,3]$ *dans* (7.7) *pour* $d = 3$. *Alors, pour tout* $(u_0, \varphi_0) \in W \cap E_\beta$ *et sous les conditions du Théorème 7.1, le problème* (7.1)-(7.4) *admet au moins une solution* (u, φ), *avec la régularité suivante* $(u, \varphi) \in L^\infty(0,T; W \cap E_\beta) \cap L^2(0,T; W \cap E_\beta)$, $u \in L^\infty(0,T; L^{2p}(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T; H^2(\Omega)), \forall T > 0$.

Démonstration:
Pour l'existence, confert la preuve du Théorème 7.1. Il reste à vérifier que $(u, \varphi) \in L^\infty(0,T; W) \cap L^2(0,T; W)$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H^1(\Omega))$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T; H^2(\Omega))$, $\forall T > 0$. On multiplie (7.8) par $\lambda_i u_{im}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2 + \|\Delta u_m\|^2 + \int_\Omega f'(u_m)|\nabla u_m|^2 dx \\ &= (\nabla u_m, \nabla \varphi_m) + (\Delta u_m, \Delta \varphi_m). \end{aligned} \tag{7.45}$$

Par (7.7) et l'inégalité de Hölder, on a

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2 + \|\Delta u_m\|^2 \le c\|\nabla u_m\|^2 + c'\|\nabla \varphi_m\|^2 + \|\Delta \varphi_m\|^2. \tag{7.46}$$

On somme (7.29) et ϵ_2(7.46), où $\epsilon_2 > 0$ est assez petit. On a

$$\begin{aligned} &\frac{dV_{2m}}{dt} + cV_{2m} + \|\Delta u_m\|^2 + c'\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 \\ &+ c''\Big(\left\|\frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}\right\|^2\Big) \le C(1+\beta^2), \end{aligned} \tag{7.47}$$

où

$$V_{2m} = V_{1m} + \epsilon_2 \|\nabla u_m\|^2 \tag{7.48}$$

satisfait

$$c(\|u_m\|_{H^1}^2 + \|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \|\varphi_m\|_{H^2}^2) \le V_{2m}. \tag{7.49}$$

On multiplie (7.8) par $\lambda_i \frac{\partial u_{im}}{\partial t}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a

$$\begin{aligned} &\left\|\nabla \frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u_m\|^2 + \int_\Omega f'(u_m)\nabla u_m \nabla \frac{\partial u_m}{\partial t} dx \\ &= -(\varphi_m, \Delta \frac{\partial u_m}{\partial t}) + (\Delta \varphi_m, \Delta \frac{\partial u_m}{\partial t}). \end{aligned} \tag{7.50}$$

On multiplie enfin (7.9) par $\lambda_i^2 \varphi_{im}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On a

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta \varphi_m\|^2 + \|\nabla \Delta \varphi_m\|^2\Big) + \|\nabla \Delta \varphi_m\|^2 = -(\Delta \varphi_m, \Delta \frac{\partial u_m}{\partial t}). \tag{7.51}$$

En additionnant (7.50) et (7.51), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u_m\|^2 + \|\Delta \varphi_m\|^2 + \|\nabla \Delta \varphi_m\|^2\Big) + \left\|\nabla \frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2 + \|\nabla \Delta \varphi_m\|^2 \\ &+ \int_\Omega f'(u_m)\nabla u_m \nabla \frac{\partial u_m}{\partial t} dx = (\nabla \frac{\partial u_m}{\partial t}, \nabla \varphi_m). \end{aligned} \tag{7.52}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u_m\|^2+\|\Delta\varphi_m\|^2+\|\nabla\Delta\varphi_m\|^2\Big)+\left\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2\\&+2\|\nabla\Delta\varphi_m\|^2+2\int_\Omega f'(u_m)\nabla u_m\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}dx\leq\|\nabla\varphi_m\|^2.\end{aligned}\tag{7.53}$$

On a par (7.7),

$$\left|\int_\Omega f'(u_m)\nabla u_m\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}dx\right|\leq c\int_\Omega(|u_m|^{2p-2}+1)|\nabla u_m|\left|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|dx.\tag{7.54}$$

Pour $d\leq 2$:

On a grâce à l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega|u_m|^{2p-2}|\nabla u_m|\left|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|dx\leq c\|u_m\|_{H^1}^{2p-2}\|u_m\|_{H^2}\left\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|.\tag{7.55}$$

Pour $d=3$: On considère le cas le plus difficile $p=3$ et on a, en utilisant l'inégalité de Agmon $\|v\|_{L^\infty}\leq\|v\|_{H^1}^{1/2}\|v\|_{H^2}^{1/2},\ \forall v\in H^2(\Omega)$ (voir le Théorème 2.9), et celle de Hölder

$$\int_\Omega|u_m|^4|\nabla u_m|\left|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right|dx\leq\|u_m\|_{L^\infty}^2\int_\Omega|u_m|^2|\nabla u_m||\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}|dx\tag{7.56}$$

et

$$\begin{aligned}&\|u_m\|_{L^\infty}^2\int_\Omega|u_m|^2|\nabla u_m||\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}|dx\\&\leq c\|u_m\|_{H^1}\|u_m\|_{H^2}\int_\Omega|u_m|^2|\nabla u_m||\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}|dx\\&\leq c\|u_m\|_{H^1}^3\|u_m\|_{H^2}^2\left\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|.\end{aligned}\tag{7.57}$$

Finalement, on déduit de (7.53)-(7.57)

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u_m\|^2+\|\Delta\varphi_m\|^2+\|\nabla\Delta\varphi_m\|^2\Big)+c\left\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+2\|\nabla\Delta\varphi_m\|^2\\&\leq c'\|u_m\|_{H^1}^{p'}(\|u_m\|_{H^2}^4+1)+\|\nabla\varphi_m\|^2,\ p'\geq 0.\end{aligned}\tag{7.58}$$

Ainsi, en sommant (7.47) et (7.58), on obtient une inégalité du type

$$\begin{aligned}&\frac{dV_{3m}}{dt}+c(\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2)+c'(\left\|\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2)\\&\leq c"\|u_m\|_{H^1}^{p'}(\|u_m\|_{H^2}^2+1)(V_{3m}+1)+C(1+\beta^2),\end{aligned}\tag{7.59}$$

où

$$V_{3m} = V_{2m} + \|\Delta u_m\|^2 + \|\Delta\varphi_m\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi_m\|^2 \tag{7.60}$$

satisfait

$$c(\|u_m\|_{H^2}^2 + \|u_m\|_{L^{2p}}^{2p} + \|\varphi_m\|_{H^3}^2) \leq V_{3m}. \tag{7.61}$$

On multiplie enfin (7.9) par $\lambda_i \frac{\partial\varphi_{im}}{\partial t}$ et on somme sur $i = 1, \cdots, m$. On trouve grâce à l'inégalité de Hölder

$$\frac{d}{dt}\|\Delta\varphi_m\|^2 + 2\left\|\nabla\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\Delta\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|^2 \leq \left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|^2. \tag{7.62}$$

On déduit des estimations (7.59), (7.62) et du lemme de Gronwall que

$$\|(u_m, \varphi_m)\|_{L^\infty(0,T;W)} \text{ et } \|(u_m, \varphi_m)\|_{L^2(0,T;W)}$$

puis

$$\left\|\frac{\partial u_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \text{ et } \left\|\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))},$$

sont bornées indépendamment de m, d'où, pour une suite extraite que l'on renomme comme la suite, à savoir (u_m, φ_m), on écrit que (u_m, φ_m) converge vers, disons, (u, φ), faiblement dans $L^2(0,T;W)$ et étoile faiblement dans $L^\infty(0,T;W)$. De la même façon, $\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}$ converge vers $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ faiblement dans $L^2(0,T;H^2(\Omega))$. Ce qui achève la preuve.

■

7.2 Dissipativité et Attracteur global.

Cette section est consacrée à l'existence d'ensembles bornés absorbants pour le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, mais aussi à celle de l'attracteur global $\mathcal{A}_\alpha$.

Remarque 7.3. *Du fait de la conservation de la quantité $\int_\Omega (u+\varphi)dx$, nous ne sommes plus en mesure de prouver l'existence de l'attracteur global dans l'espace des phases E tout entier. Pour cela, nous allons restreindre notre étude à des sous-ensembles de E, à savoir $\mathcal{E}_\alpha$.*

Les résultats de la section précédente nous conduisent à définir un semi-groupe de la manière suivante :

$$S(t) : \mathcal{E}_\alpha \to \mathcal{E}_\alpha, (u_0, \varphi_0) \mapsto (u(t), \varphi(t)),\ \forall\ t \geq 0,$$

continu sur E, où (u, φ) est l'unique solution du problème (7.1)-(7.4).

On a la

Proposition 7.1. *Pour $\alpha > 0$, il existe une constante $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\alpha) > 0$ et une fonction monotone $\mathcal{T}(.)$ telle que*

$$\|S(t)(u_0, \varphi_0)\|_E \leq \mathcal{R}(\alpha), \forall\ t \geq \mathcal{T}(\|(u_0, \varphi_0)\|_E).$$

Démonstration:
La preuve est basée sur l'estimation (7.29) obtenue dans la preuve du Théorème 7.1 avec (u, φ) à la place de (u_m, φ_m) que l'on réécrit

$$\frac{dV_1}{dt} + cV_1 + c' \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + c" \Big(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 + 2 \left\| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 \Big) \leq C(1 + \beta^2), \tag{7.63}$$

où

$$V_1 = \epsilon_1 \|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + 2 \int_\Omega F(u) dx + \|\varphi\|^2 + 3\|\nabla \varphi\|^2 + \|\Delta \varphi\|^2 \tag{7.64}$$

satisfait

$$c(\|u\|^2_{H^1} + \|u\|^{2p}_{L^{2p}} + \|\varphi\|^2_{H^2}) - c'' \leq V_1 \leq c'(\|u\|^2_{H^1} + \|u\|^{2p}_{L^{2p}} + \|\varphi\|^2_{H^2}) + c''. \tag{7.65}$$

En particulier,

$$\frac{dV_1}{dt} + cV_1 \leq C(1 + \beta^2). \tag{7.66}$$

Le lemme de Gronwall et (7.65) nous donnent

$$\|u(t)\|^2_{H^1} + \|u(t)\|^{2p}_{L^{2p}} + \|\varphi(t)\|^2_{H^2} \leq C_1 \big(\|u_0\|^2_{H^1} + \|\varphi_0\|^2_{H^2} \big) e^{-ct} + C_2(1 + \beta^2). \tag{7.67}$$

En prenant $\mathcal{R}(\alpha) = \sqrt{1 + C_2(1 + \alpha^2)}$ et $\mathcal{T}(r) = \frac{1}{c} \ln(r^2 C_1)$, on obtient le résultat cherché.

■

Proposition 7.2. *Le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, est dissipatif dans $W \cap \mathcal{E}_\alpha$.*

Démonstration:
La preuve est basée sur la Proposition 7.1 et les estimations (7.47)-(7.49), (7.58) et (7.59)-(7.61) en mettant u et φ à la place de u_m et φ_m que l'on réécrit ci-après :

$$\begin{aligned} &\frac{dV_2}{dt} + cV_2 + \|\Delta u\|^2 + c' \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \\ &+ c" \Big(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 + \left\| \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|^2 \Big) \leq C(1 + \beta^2), \end{aligned} \tag{7.68}$$

où

$$V_2 = V_1 + \epsilon_2 \|\nabla u\|^2 \tag{7.69}$$

satisfait

$$c(\|u\|^2_{H^1} + \|u\|^{2p}_{L^{2p}} + \|\varphi\|^2_{H^2}) \leq V_2, \tag{7.70}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \Big(\|\Delta u\|^2 + \|\Delta \varphi\|^2 + \|\nabla \Delta \varphi\|^2 \Big) + c \left\| \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \\ &+ 2\|\nabla \Delta \varphi\|^2 \leq c' \|u\|^{p'}_{H^1} (\|u\|^4_{H^2} + 1) + \|\nabla \varphi\|^2, \ p' \geq 0 \end{aligned} \tag{7.71}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{dV_3}{dt} + c(\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2) + c'\Big(\left\|\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\|^2\Big) \\ &\leq c"\|u\|_{H^1}^{p'}(\|u\|_{H^2}^2 + 1)(V_3 + 1) + C(1+\beta^2),\end{aligned} \tag{7.72}$$

où

$$V_3 = V_2 + \|\Delta u\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi\|^2 \tag{7.73}$$

satisfait

$$c(\|u\|_{H^2}^2 + \|u\|_{L^{2p}}^{2p} + \|\varphi\|_{H^3}^2) \leq V_3. \tag{7.74}$$

On déduit de (7.68) que

$$\int_t^{t+r} \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq c, \forall t \geq t_0,\ r > 0, \tag{7.75}$$

pourvu que les données initiales soient dans un sous-ensemble borné B de $\mathcal{E}_\alpha$ et t_0 est tel que $t \geq t_0$ implique $S(t)B \subset \mathcal{B}_0$, avec $\mathcal{B}_0$ l'ensemble borné absorbant pour $S(t)$ dans $\mathcal{E}_\alpha$ donné par la Proposition 7.1, d'où

$$\int_t^{t+r} \|u(s)\|_{H^2}^2 ds \leq c'(r),\ \forall\ t \geq t_0. \tag{7.76}$$

Il vient de (7.71) que

$$\int_t^{t+r} \|\nabla\Delta\varphi(s)\|^2 ds \leq c(r),\ \forall\ t \geq t_0 + r. \tag{7.77}$$

En posant $y = V_3$, $g = c"\|u\|^{p'}(\|u\|_{H^2}^2 + 1)$ et $h = g + C(1+\beta^2)$, on déduit de (7.72) que

$$y' \leq gy + h,\ \forall\ t \geq t_0 + r$$

et grâce aux estimations ci-dessus, on a que y, g et h satisfont les conditions du lemme de Gronwall uniforme (pour $t \geq t_0 + r$), ce qui donne

$$V_3(t) \leq C_{\alpha,r},\ \forall\ t \geq t_0 + 2r,$$

où $C_{\alpha,r}$ est une constante strictement positive qui dépend de α et r. Finalement, grâce à (7.74) et en posant $t_1 = t_0 + 2r$, on arrive à

$$\|u(t)\|_{H^2}^2 + \|\varphi(t)\|_{H^3}^2 \leq c,\ \forall\ t \geq t_1,$$

ce qui complète la preuve.

■

On énonce maintenant le théorème d'existence de l'attracteur global.

Théorème 7.4. *On suppose que $p \in [0,2]$ dans (7.6) lorsque $d = 3$. Le semi-groupe $S(t), t \geq 0$, défini de $\mathcal{E}_\alpha$ dans lui-même, possède l'attracteur global $\mathcal{A}_\alpha$ qui est connexe et borné dans $W \cap \mathcal{E}_\alpha$.*

Démonstration:
La preuve est basée sur une décomposition du semi-groupe $S(t), t \geq 0$ en deux opérateurs : $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, où l'opérateur $S_1(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini et l'opérateur $S_2(t)$ est compact. On considère la décomposition suivante :

$$(u, \varphi) = (u^d, \varphi^d) + (u^c, \varphi^c),$$

où (u^d, φ^d) est solution de

$$\frac{\partial u^d}{\partial t} - \Delta u^d = \varphi^d - \Delta \varphi^d, \tag{7.78}$$

$$\frac{\partial \varphi^d}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} - \Delta \varphi^d = -\frac{\partial u^d}{\partial t}, \tag{7.79}$$

$$\frac{\partial u^d}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi^d}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{7.80}$$

$$u^d/_{t=0} = u_0 - < u_0 >, \varphi^d/_{t=0} = \varphi_0 - < \varphi_0 >, \tag{7.81}$$

et (u^c, φ^c) est solution de

$$\frac{\partial u^c}{\partial t} - \Delta u^c + f(u) = \varphi^c - \Delta \varphi^c, \tag{7.82}$$

$$\frac{\partial \varphi^c}{\partial t} - \Delta \frac{\partial \varphi^c}{\partial t} - \Delta \varphi^c = -\frac{\partial u^c}{\partial t}, \tag{7.83}$$

$$\frac{\partial u^c}{\partial \nu} = \frac{\partial \alpha^c}{\partial t} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{7.84}$$

$$u^c/_{t=0} = < u_0 >, \alpha^c/_{t=0} = < \varphi_0 >, \tag{7.85}$$

avec $< v_0 > := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega v_0 dx$.

Multiplions (7.78) par $\frac{\partial u^d}{\partial t}$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2 = (\varphi^d - \Delta \varphi^d, \frac{\partial u^d}{\partial t}). \tag{7.86}$$

On multiplie (7.79) par $\varphi^d - \Delta \varphi^d$. On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\varphi^d\|^2 + 2\|\nabla \varphi^d\|^2 + \|\Delta \varphi^d\|^2\Big) \\ &+ \|\nabla \varphi^d\|^2 + \|\Delta \varphi^d\|^2 = -(\varphi^d - \Delta \varphi^d, \frac{\partial u^d}{\partial t}). \end{aligned} \tag{7.87}$$

On somme (7.86) et (7.87) pour avoir

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\|\nabla u^d\|^2 + \|\varphi^d\|^2 + 2\|\nabla \varphi^d\|^2 + \|\Delta \varphi^d\|^2) \\ &+ 2\Big(\|\nabla \varphi^d\|^2 + \|\Delta \varphi^d\|^2 + \left\|\frac{\partial u^d}{\partial t}\right\|^2\Big) = 0. \end{aligned} \tag{7.88}$$

Maintenant, en multipliant (7.78) par u^d. On obtient

$$\frac{d}{dt}\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 \leq 2(u^d, \varphi^d) + \|\nabla \varphi^d\|^2. \tag{7.89}$$

On voit que

$$(u^d, \varphi^d) = (u^d - < u^d >, \varphi^d - < \varphi^d >) + |\Omega| < u^d >< \varphi^d > . \tag{7.90}$$

En substituant (7.90) dans (7.89), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 \leq & 2(u^d - < u^d >, \varphi^d - < \varphi^d >) \\ & + 2|\Omega| < u^d >< \varphi^d > + \|\nabla \varphi^d\|^2. \end{aligned} \tag{7.91}$$

En notant que

$$< u^d + \varphi^d >= 0,$$

donc que

$$< u^d >= - < \varphi^d >,$$

on arrive à

$$\frac{d}{dt}\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 + 2|\Omega| < \varphi^d >^2 \leq 2(u^d - < u^d >, \varphi^d - < \varphi^d >) + \|\nabla \varphi^d\|^2. \tag{7.92}$$

Les inégalités de Young et Poincaré pour des fonctions à moyenne nulle donnent

$$\begin{aligned} (u^d - < u^d >, \varphi^d - < \varphi^d >) & \leq \epsilon \|u^d - < u^d > \|^2 + c_\epsilon \|\varphi^d - < \varphi^d > \|^2 \\ & \leq \epsilon C(\Omega)\|\nabla u^d\|^2 + c_\epsilon C(\Omega)\|\nabla \varphi^d\|^2, \end{aligned} \tag{7.93}$$

ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}\|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 + 2|\Omega| < \varphi^d >^2 \leq 2\epsilon C(\Omega)\|\nabla u^d\|^2 + (1 + 2c_\epsilon)\|\varphi^d\|^2. \tag{7.94}$$

Prenant $\epsilon = \frac{1}{4C(\Omega)}$, on a

$$\frac{d}{dt}\|u^d\|^2 + |\Omega| < u^d >^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^d\|^2 + |\Omega| < \varphi^d >^2 \leq c\|\nabla \varphi^d\|^2, \tag{7.95}$$

où on a utilisé le fait que $< u^d >^2 = < \varphi^d >^2$. Enfin, en multipliant (7.79) par $\frac{\partial \varphi^d}{\partial t}$ et en sommant l'estimation résultante avec (7.88) et ϵ_2(7.95), où $\epsilon_2 > 0$ est assez petit, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{dV_4}{dt} + 2(\|\nabla \varphi^d\|^2 + \|\Delta \varphi^d\|^2) + \left\| \frac{\partial u^d}{\partial t} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} \right\|^2 + \left\| \nabla \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} \right\|^2 \\ & + \epsilon_2 \Big(|\Omega| < u^d >^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u^d\|^2 + |\Omega| < \varphi^d >^2 \Big) \leq \epsilon_2 c \|\nabla \varphi^d\|^2, \end{aligned} \tag{7.96}$$

où

$$V_4 = \epsilon_2 \|u^d\|^2 + \|\nabla u^d\|^2 + \|\varphi^d\|^2 + 3\|\nabla \varphi^d\|^2 + \|\Delta \varphi^d\|^2 \tag{7.97}$$

satisfait

$$c(\|u^d\|^2_{H^1} + \|\varphi^d\|^2_{H^2}) \leq V_4. \tag{7.98}$$

Ainsi, pour $\epsilon_2 > 0$ tel que $2 - \epsilon_2 c > 0$, on aboutit à une inégalité de la forme

$$\frac{dV_4}{dt} + cV_4 + c'\Big(\Big\| \frac{\partial u^d}{\partial t} \Big\|^2 + \Big\| \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} \Big\|^2 + \Big\| \nabla \frac{\partial \varphi^d}{\partial t} \Big\|^2 \Big) \leq 0. \tag{7.99}$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (7.99) permet d'écrire

$$\|u^d(t)\|^2_{H^1} + \|\varphi^d(t)\|^2_{H^2} \leq c' e^{-ct} (\|u^d_0\|^2_{H^1} + \|\varphi^d_0\|^2_{H^2}), \ \forall\ t \geq 0. \tag{7.100}$$

On voit que $S_1(t)(u_0, \varphi_0) := (u^d(t), \varphi^d(t))$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

Considérons maintenant le système (7.82)-(7.85). On multiplie (7.82) par $\frac{\partial u^c}{\partial t}$ et (7.83) par $\varphi^c - \Delta\varphi^c$. En additionnant les deux équations résultantes, on obtient alors

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u^c\|^2 + \|\varphi^c\|^2 + 2\|\nabla\varphi^c\|^2 + \|\Delta\varphi^c\|^2 \Big) + 2\|\nabla\varphi^c\|^2 + 2\|\Delta\varphi^c\|^2 \\ &+ 2\Big\| \frac{\partial u^c}{\partial t} \Big\|^2 = -2\int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t} dx. \end{aligned} \tag{7.101}$$

On multiplie (7.82) par u^c. On a

$$\frac{d}{dt}\|u^c\|^2 + \|\nabla u^c\|^2 \leq 2(u^c, \varphi^c) + \|\nabla\varphi^c\|^2 - 2\int_\Omega f(u)u^c dx. \tag{7.102}$$

Ajoutant $\epsilon < u^c + \varphi^c >^2$ ($\epsilon > 0$ petit) à chacun des membres de (7.102), on obtient

$$\frac{d}{dt}\|u^c\|^2 + \|\nabla u^c\|^2 + \epsilon < u^c + \varphi^c >^2 \leq 2(u^c, \varphi^c) + \|\nabla\varphi^c\|^2 - 2\int_\Omega f(u)u^c dx + \epsilon\beta^2. \tag{7.103}$$

Noter que

$$\begin{aligned} (u^c, \varphi^c) &= (u^c - < u^c >, \varphi^c - < \varphi^c >) + |\Omega| < u^c >< \varphi^c > \\ &= (u^c - < u^c >, \varphi^c - < \varphi^c >) + |\Omega| < u^c > (\beta - < u^c >). \end{aligned}$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u^c\|^2 + \epsilon < u^c >^2 + \|\nabla u^c\|^2 + \epsilon < \varphi^c >^2 \\ &\leq 2(u^c - < u^c >, \varphi^c - < \varphi^c >) + \|\nabla\varphi^c\|^2 - 2\int_\Omega f(u)u^c dx + C\beta^2. \end{aligned} \tag{7.104}$$

L'inégalité de Young et celle de Poincaré pour des fonctions à moyenne nulle permettent d'écrire

$$\begin{aligned} (u^c - < u^c >, \varphi^c - < \varphi^c >) &\leq \epsilon_3 \|u^c - < u^c > \|^2 + c_{\epsilon_3}\|\varphi^c - < \varphi^c > \|^2 \\ &\leq \epsilon_3 C(\Omega)\|\nabla u^c\|^2 + c_{\epsilon_3} C(\Omega)\|\nabla\varphi^c\|^2. \end{aligned} \tag{7.105}$$

En injectant (7.105) dans (7.104), et en prenant $\epsilon_3 = \frac{1}{4C(\Omega)}$, nous sommes conduit à

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|u^c\|^2 + c\Big(< u^c >^2 + \|\nabla u^c\|^2 + < \varphi^c >^2 \Big) \\ &\leq c'\|\nabla\varphi^c\|^2 - 2\int_\Omega f(u)u^c dx + C\beta^2. \end{aligned} \tag{7.106}$$

On multiplie (7.83) par $\frac{\partial \varphi^c}{\partial t}$. On a

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi^c\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi^c}{\partial t}\right\|^2 \leq \left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2, \tag{7.107}$$

ce qui, additionné à (7.101) et ϵ_4(7.106) ($\epsilon_4 > 0$ petit), donne

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_5}{dt} + \epsilon_4 c\Big(< u^c >^2 + \|\nabla u^c\|^2 + < \varphi^c >^2 \Big) + 2(\|\nabla\varphi^c\|^2 + \|\Delta\varphi^c\|^2) \\
&+ \left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi^c}{\partial t}\right\|^2 \\
&\leq \epsilon_4 c'\|\nabla\varphi^c\|^2 - 2\int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t}dx - 2\int_\Omega f(u)u^c dx + C\beta^2,
\end{aligned} \tag{7.108}$$

où

$$V_5 = \epsilon_4\|u^c\|^2 + \|\nabla u^c\|^2 + \|\varphi^c\|^2 + 3\|\nabla\varphi^c\|^2 + \|\Delta\varphi^c\|^2 \tag{7.109}$$

satisfait

$$V_5 \geq c(\|u^c\|^2_{H^1} + \|\varphi^c\|^2_{H^2}). \tag{7.110}$$

De (7.7) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\left|\int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\right| \leq c\int_\Omega (|u|^{2p-1} + 1)\left|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right|dx. \tag{7.111}$$

De plus, si $d \leq 2$, on a, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |u|^{2p-1}\left|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right|dx \leq c\|u\|^{2p-1}_{H^1}\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\| \tag{7.112}$$

et, si $d = 3$, on écrit, grâce à l'inégalité de Hölder et pour $p = 2$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u|^3\left|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right|dx &\leq \|u\|^3_{L^6}\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\| \\
&\leq c\|u\|^3_{H^1}\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|.
\end{aligned} \tag{7.113}$$

Finalement, on déduit de (7.111) et (7.113) que

$$\left|\int_\Omega f(u)\frac{\partial u^c}{\partial t}dx\right| \leq c(\|u\|^{q_1}_{H^1} + 1)\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|,\ qq_1 \geq 0. \tag{7.114}$$

De façon analogue, on obtient

$$\left|\int_\Omega f(u)u^c dx\right| \leq c(\|u\|^{q_2}_{H^1} + 1)\|u^c\|,\ q_2 \geq 0, \tag{7.115}$$

d'ou, en prenant $\epsilon_4 > 0$ tel que $2 - \epsilon_4 c' > 0$, on aboutit, compte tenu de (7.114) et (7.115), à une inégalité de la forme

$$\begin{aligned}
&\frac{dV_5}{dt} + cV_5 + c'\Big(\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi^c}{\partial t}\right\|^2\Big) \\
&\leq c''(\|u\|^q_{H^1} + 1) + C(< u^c >^2 + < \varphi^c >^2),\ q \geq 0.
\end{aligned} \tag{7.116}$$

Maintenant, on multiplie (7.82) par $-\Delta u^c$. On a

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u^c\|^2 + \|\Delta u^c\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla u^c dx \leq (\nabla u^c, \nabla \varphi^c) + \|\Delta \varphi^c\|^2. \tag{7.117}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u.\nabla u^c dx\right| &\leq \int_\Omega |f'(u)\nabla u||\nabla u^c| dx \\ &\leq \|f'(u)\nabla u\|\|\nabla u^c\|\end{aligned} \tag{7.118}$$

et

$$\begin{aligned}(< u^c >^2 + < \varphi^c >^2) &= c(\| < u^c > \|^2 + \| < \varphi^c > \|^2 \\ &\leq c(\| < u_0 > \|^2 + \| < \varphi_0 > \|^2) \\ &\leq c(\|u_0\|^2 + \|\varphi_0\|^2) \\ &\leq c'\|(u_0, \varphi_0)\|_E^2,\end{aligned} \tag{7.119}$$

on déduit en sommant (7.116) et ϵ_5(7.117), où $\epsilon_5 > 0$ est assez petit, que

$$\begin{aligned}&\frac{dV_6}{dt} + cV_6 + \epsilon_5\|\Delta u^c\|^2 + c'\Big(\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \varphi^c}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial \varphi^c}{\partial t}\right\|^2\Big) \\ &\leq c''\Big(\|u\|_{H^1}^q + 1 + \|(u_0, \varphi_0)\|_E^2 + \|f'(u)\nabla u\|^2\Big),\end{aligned} \tag{7.120}$$

où

$$V_6 = V_5 + \epsilon_5\|\nabla u^c\|^2 \tag{7.121}$$

satisfait une estimation similaire à (7.110). On multiplie (7.82) par $-\Delta\frac{\partial u^c}{\partial t}$ et (7.83) par $\Delta^2\varphi^c$ puis on somme les egalités résultantes. On trouve alors grâce à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u^c\|^2 + \|\Delta\varphi^c\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi^c\|^2\Big) + c\left\|\nabla\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi^c\|^2 \\ &\leq c'\|f'(u)\nabla u\|^2 + c''\|\nabla\varphi^c\|^2.\end{aligned} \tag{7.122}$$

En sommant maintenant (7.120) et (7.122), on arrive à

$$\begin{aligned}&\frac{dV_7}{dt} + cV_7 + c'\left\|\frac{\partial u^c}{\partial t}\right\|_{H^1}^2 + \left\|\frac{\partial \varphi^c}{\partial t}\right\|_{H^1}^2 \\ &\leq c''(\|u^c\|_{H^1}^q + \|(u_0, \varphi_0)\|_E^2 + \|f'(u)\nabla u\|^2) + c''', q \geq 0,\end{aligned} \tag{7.123}$$

où

$$V_7 = V_6 + \|\Delta u^c\|^2 + \|\Delta\varphi^c\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi^c\|^2 \tag{7.124}$$

satisfait

$$V_7 \geq c(\|u^c\|_{H^2}^2 + \|\varphi^c\|_{H^3}^2). \tag{7.125}$$

De ce qui précède, on a alors

$$\begin{aligned}\|f'(u)\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 &\leq c(\|u\|_{H^1}^q + 1),\ q \geq 0 \\ &\leq c(\alpha^2 T + 1)Q(\|u_0\|_{H^1}, \|\varphi_0\|_{H^2}),\end{aligned} \tag{7.126}$$

où Q est une certaine fonction monotone indépendante des données initiales. Les inégalités (7.123) et (7.126) impliquent que

$$\frac{dV_7}{dt} \leq c\Big(\|u^c\|_{H^1}^q + \|(u_0,\varphi_0)\|_E^2 + \|f'(u)\nabla u\|^2\Big) + c'. \tag{7.127}$$

En intégrant (7.127) entre 0 et t, et en prenant en compte (7.125), on obtient

$$\begin{aligned}\|u^c(t)\|_{H^2}^2 + \|\varphi^c(t)\|_{H^3}^2 \leq & c(\alpha^2 t+1)Q(\|u_0\|_{H^1},\|\varphi_0\|_{H^2}) \\ & + c'(\|u_0^c\|_{H^2}^2 + \|\varphi_0^c\|_{H^3}^2),\ t\geq 0.\end{aligned} \tag{7.128}$$

Mais, on a

$$\begin{aligned}\|u_0^c\|_{H^2}^2 + \|\varphi_0^c\|_{H^3}^2 &= \| < u_0 > \|^2 + \| < \varphi_0 > \|^2 \\ &\leq c(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|\varphi_0\|_{H^2}^2) \\ &\leq cQ(\|u_0\|_{H^1},\|\varphi_0\|_{H^2}).\end{aligned} \tag{7.129}$$

On déduit de (7.128)-(7.129) que

$$\|u^c(t)\|_{H^2}^2 + \|\varphi^c(t)\|_{H^3}^2 \leq c(\alpha^2 T+1)Q(\|u_0\|_{H^1},\|\varphi_0\|_{H^2}). \tag{7.130}$$

Ainsi, l'opérateur $S_2(t)(u_0,\varphi_0) := (u^c(t),\varphi^c(t))$ est asymptotiquement compact au sens de la mesure de non compacité de Kuratowski, d'où le résultat.

■

Soit $\mathcal{B}_\alpha$ la boule absorbante dans $\mathcal{E}_\alpha$ donnée par la Proposition 7.1, on définit l'ensemble invariant

$$\mathcal{X}_\alpha := \overline{\bigcup_{t\geq t_0} S(t)\mathcal{B}_\alpha},\ t_0 = 1+\mathcal{T}(R),$$

$\|(u_0,\varphi_0)\| \leq R$. Dans la suite, nous travaillerons dans le sous-espace $\mathcal{X}_\alpha$ qui est positivement invariant pour $S(t)$.

Maintenant que l'existence de l'attracteur global est avérée, une question naturelle est de savoir si cet attracteur est de dimension finie. C'est l'objet du paragraphe qui suit.

7.3 Attracteurs exponentiels

Dans cette section, nous établissons l'existence d'une famille d'attracteurs exponentiels $\mathcal{M}_\alpha$ pour le semi-groupe $S(t), t\geq 0$, associé au problème (7.1)-(7.4). Pour ce faire, nous allons appliquer le résultat d'existence d'un attracteur exponentiel énoncé au Chapitre 2 (Théorème 3.6).

On le résultat de décomposition suivant :

Théorème 7.5. *Le semigroup $S(t)$, $t\geq 0$, engendré par les équations* (7.1)-(7.4) *défini de $\mathcal{X}_\alpha$ dans lui-même satisfait une décomposition similaire à celle du Théorème 3.6.*

Démonstration:
Soient (u_1, φ_1) et (u_2, φ_2) deux solutions du problème (7.1)-(7.3) et (u_{01}, φ_{01}) et (u_{02}, φ_{02}) leurs données initiales respectives appartenant à $\mathcal{X}_\alpha$.

On pose $(u, \varphi) = (u_1 - u_2, \varphi_1 - \varphi_2)$ et $(u_0, \varphi_0) = (u_{01} - u_{02}, \varphi_{01} - \varphi_{02})$.

Ainsi, (u, φ) est solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) = \varphi - \Delta\varphi, \tag{7.131}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{7.132}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{7.133}$$

$$(u(0), \varphi(0)) = (u_0, \varphi_0) = (u_{01} - u_{02}, \varphi_{01} - \varphi_{02}). \tag{7.134}$$

Maintenant, on décompose la solution (u, φ) comme suit :

$$(u, \varphi) = (v, \eta) + (\omega, \xi),$$

où (v, η) et (ω, ξ) sont solutions de

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \eta - \Delta\eta, \tag{7.135}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \eta}{\partial t} - \Delta\eta = -\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{7.136}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{\partial \eta}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{7.137}$$

$$v(0) = u_0 - < u_0 >, \eta(0) = \varphi_0 - < \varphi_0 > \tag{7.138}$$

et

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \Delta\omega + f(u_1) - f(u_2) = \xi - \Delta\xi, \tag{7.139}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \xi}{\partial t} - \Delta\xi = -\frac{\partial \omega}{\partial t}, \tag{7.140}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \nu} = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{7.141}$$

$$\omega(0) = < u_0 >, \xi(0) = < \varphi_0 >, \tag{7.142}$$

respectivement. En repétant pour (7.135)-(7.138) les estimations qui nous ont conduit à (7.99), on écrit alors

$$\frac{dV_8}{dt} + cV_8 + c'\Big(\Big\| \frac{\partial v}{\partial t} \Big\|^2 + \Big\| \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big\|^2 + \Big\| \frac{\nabla \partial \eta}{\partial t} \Big\|^2 \Big) \leq 0, \tag{7.143}$$

où

$$V_8 = \epsilon_1 \|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|\eta\|^2 + 3\|\nabla\eta\|^2 + \|\Delta\eta\|^2 \tag{7.144}$$

satisfait

$$c(\|v\|^2_{H^1} + \|\eta\|^2_{H^2}) \leq V_8 \leq c'(\|v\|^2_{H^1} + \|\eta\|^2_{H^2}). \tag{7.145}$$

En particulier,

$$\frac{dV_8}{dt} + cV_8 \leq 0. \tag{7.146}$$

Une application du lemme de Gronwall donne

$$\|v(t)\|_{H^1}^2 + \|\eta(t)\|_{H^2}^2 \leq d(t)(\|u_0\|_{H^1}^2 + \|\varphi_0\|_{H^2}^2), \tag{7.147}$$

où $d(t) = e^{-ct}$ et $t \geq 0$. On voit que $d(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Considérons maintenant le système (7.139)-(7.142). Multiplions (7.139) par $\frac{\partial \omega}{\partial t}$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\omega\|^2 + \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx + \left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|^2 = (\frac{\partial \omega}{\partial t}, \xi - \Delta\xi). \tag{7.148}$$

On multiplie (7.140) par $\xi - \Delta\xi$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\xi\|^2 + 2\|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2) + \|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2 = -(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \xi - \Delta\xi). \tag{7.149}$$

En sommant (7.148) et (7.149), on écrit

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla\omega\|^2 + \|\xi\|^2 + 2\|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2\Big) + 2(\|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2) \\ &+ 2\left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|^2 = -2\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx. \end{aligned} \tag{7.150}$$

Grâce à (7.7), on écrit

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx\right| &\leq \int_\Omega |f(u_1) - f(u_2)|\left|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|dx \\ &\leq c\int_\Omega (|u_1|^{2p-2} + |u_2|^{2p-2} + 1)|u|\left|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right|dx. \end{aligned} \tag{7.151}$$

Si $d \leq 2$, alors

$$\left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx\right| \leq c(\|u_1\|_{H^1}^{2(p-1)} + \|u_2\|_{H^1}^{2(p-1)} + 1)\|u\|_{H^1}\left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|.$$

Si $d = 3$, on a alors en prenant $p = 2$, grâce à l'inégalité de Hölder

$$\left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial \omega}{\partial t}dx\right| \leq c(\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 + 1)\|u\|_{H^1}\left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|.$$

Finalement, dans les deux cas, on obtient une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla\omega\|^2 + \|\xi\|^2 + 2\|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2\Big) + 2(\|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2) + 2\left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|^2 \\ &\leq c(\|u_1\|_{H^1}^{r_1} + \|u_2\|_{H^1}^{r_1} + 1)\|u\|_{H^1}\left\|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right\|,\ r_1 \geq 0. \end{aligned} \tag{7.152}$$

On multiplie (7.139) par ω et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 + \|\nabla\omega\|^2 + \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\omega dx = (\xi, \omega) + (\nabla\xi, \nabla\omega). \tag{7.153}$$

Pour les mêmes raisons que pour (7.151),

$$\left|\int_\Omega (f(u_1)-f(u_2))\omega dx\right| \le c\int_\Omega (|u_1|^{2(p-1)}+|u_2|^{2(p-1)}+1)|u||\omega|dx. \tag{7.154}$$

Pour $d\le 2$, pour tout p, on a

$$\int_\Omega |u_i|^{2p-2}|u||\omega|dx \le c\|u_i\|_{H^1}^{2p-2}\|u\|_{H^1}\|\omega\|,\ i=1,2.$$

Pour $d=3$, on obtient alors pour $p=2$, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega |u_i|^{2}|u||\omega|dx \le c\|u_i\|_{H^1}^{2}\|u\|_{H^1}\|\omega\|,\ i=1,2.$$

Ainsi, dans tous les cas, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\omega\|^2+\|\nabla\omega\|^2\\ &\le c(\|u_1\|_{H^1}^{r_2}+\|u_2\|_{H^1}^{r_2}+1)\|u\|_{H^1}\|\omega\|+2(\xi,\omega)+\|\nabla\xi\|^2,\ r_2\ge 0.\end{aligned} \tag{7.155}$$

L'inégalité de Poincaré pour des fonctions à moyenne nulle et l'inégalité de Young entraînent

$$2(\omega,\xi)\le 2\epsilon C(\Omega)\|\nabla\omega\|^2+2c_\epsilon C(\Omega)\|\nabla\xi\|^2+2|\Omega|<\omega><\xi>. \tag{7.156}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\omega\|^2+\|\nabla\omega\|^2\\ &\le c(\|u_1\|_{H^1}^{r_2}+\|u_2\|_{H^1}^{r_2}+1)(\|u_1\|_{H^2}+\|u_2\|_{H^2}+1)\|u\|_{H^1}\|\omega\|\\ &+2\epsilon C(\Omega)\|\nabla\omega\|^2+(1+2c_\epsilon C(\Omega))\|\nabla\xi\|^2+2|\Omega|<\omega><\xi>.\end{aligned} \tag{7.157}$$

Maintenant, en additionnant $\epsilon<\omega+\xi>^2$ à chaque membre de (7.157) et en choisissant $\epsilon=\frac{1}{4C(\Omega)}$, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|\omega\|^2+c(<\omega>^2+\|\nabla\omega\|^2+<\xi>^2)\\ &\le c(\|u_1\|_{H^1}^{r_2'}+\|u_2\|_{H^1}^{r_2'}+1)\|u\|_{H^1}^2+c''\|\nabla\xi\|^2+C<\omega+\xi>^2,\ r_2'\ge 0.\end{aligned} \tag{7.158}$$

La somme de (7.152) et ϵ_6(7.158), où $\epsilon_6>0$ est assez petit, donne

$$\begin{aligned}&\frac{dV_9}{dt}+c\epsilon_6(<\omega>^2+\|\nabla\omega\|^2+<\xi>^2)+2(\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2)+\left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2\\ &\le c'(\|u_1\|_{H^1}^{r}+\|u_2\|_{H^1}^{r}+1)\|u\|_{H^1}^2+c''\epsilon_6\|\nabla\xi\|^2+C<\omega+\xi>^2,\ r\ge 0,\end{aligned} \tag{7.159}$$

où

$$V_9=\epsilon_6\|\omega\|^2+\|\nabla\omega\|^2+\|\xi\|^2+2\|\nabla\xi\|^2+\|\Delta\xi\|^2 \tag{7.160}$$

satisfait

$$c(\|\omega\|_{H^1}^2+\|\xi\|_{H^2}^2)\le V_8\le c'(\|\omega\|_{H^1}^2+\|\xi\|_{H^2}^2). \tag{7.161}$$

En choisissant $\epsilon_6 > 0$ tel que $2 - c''\epsilon_6 > 0$, on arrive à

$$\begin{aligned} &\frac{dV_9}{dt} + cV_9 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|^2 \\ &\leq c'(\|u_1\|_{H^1}^r + \|u_2\|_{H^1}^r + 1)\|u\|_{H^1}^2 + C < \omega + \xi >^2,\ r \geq 0. \end{aligned} \tag{7.162}$$

Multiplions maintenant (7.139) par $-\Delta\omega$. On a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\omega\|^2 + \|\Delta\omega\|^2 - \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\Delta\omega dx \\ &= (\nabla\xi, \nabla\omega) + (\Delta\xi, \Delta\omega). \end{aligned} \tag{7.163}$$

On a

$$\left| \int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\Delta\omega dx \right| \leq c \int_\Omega (|u_1|^{2p-2} + |u_2|^{2p-2} + 1)|u||\Delta\omega| dx. \tag{7.164}$$

On considère le cas $d = 3$ et $p = 2$ (les autres cas se traitent de façon similaire). On a, de l'inégalité de Hölder,

$$\int_\Omega (|u_1|^2 + |u_2|^2 + 1)|u||\Delta\omega| dx \leq c(\|u_1\|_{H^1}^2 + \|u_2\|_{H^1}^2 + 1)\|u\|_{H^1}\|\Delta\omega\|$$

et on arrive alors à une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\|\nabla\omega\|^2 + \|\Delta\omega\|^2 \\ &\leq c'(\|\nabla\xi\|^2 + \|\Delta\xi\|^2) + c''(\|u_1\|_{H^1}^{q_1} + \|u_2\|_{H^1}^{q_1} + 1)\|u\|_{H^1}^2,\ q_1 \geq 0. \end{aligned} \tag{7.165}$$

On a alors, en sommant (7.162) et ϵ_7(7.165), $\epsilon_7 > 0$ petit,

$$\begin{aligned} &\frac{dV_{10}}{dt} + cV_{10} + c'\|\Delta\omega\|^2 + \left\| \frac{\partial \omega}{\partial t} \right\|^2 \\ &\leq c''(\|u_1\|_{H^1}^{q_1'} + \|u_2\|_{H^1}^{q_1'} + 1)\|u\|_{H^1}^2 + C < \omega + \xi >^2,\ q_1' \geq 0, \end{aligned} \tag{7.166}$$

où

$$V_{10} = V_9 + \epsilon_7\|\nabla\omega\|^2 \tag{7.167}$$

satisfait

$$c(\|\omega\|_{H^1}^2 + \|\xi\|_{H^2}^2) \leq V_{10} \leq c'(\|\omega\|_{H^1}^2 + \|\xi\|_{H^2}^2). \tag{7.168}$$

On multiplie (7.139) par $-\Delta\frac{\partial\omega}{\partial t}$ et on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta\omega\|^2 + \left\| \nabla\frac{\partial\omega}{\partial t} \right\|^2 + \int_\Omega (f'(u_1)\nabla u_1 - f'(u_2)\nabla u_2)\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t} dx \\ &= (\nabla\xi, \nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}) - (\nabla\Delta\xi, \nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}). \end{aligned} \tag{7.169}$$

On multiplie enfin (7.140) par $\Delta^2\xi$ et on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|\Delta\xi\|^2 + \|\nabla\Delta\xi\|^2) + \|\nabla\Delta\xi\|^2 = (\nabla\Delta\xi, \nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}). \tag{7.170}$$

On additionne (7.169) et (7.170), on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(\|\Delta\omega\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\|\nabla\Delta\xi\|^2\big)+\|\nabla\Delta\xi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2\\&=-\int_\Omega(f'(u_1)\nabla u_1-f'(u_2)\nabla u_2)\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}dx+(\nabla\xi,\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}).\end{aligned}\tag{7.171}$$

On a

$$f'(u_1)\nabla u_1-f'(u_2)\nabla u_2=(f'(u_1)-f'(u_2))\nabla u_1+f'(u_2)\nabla u$$

et donc

$$\begin{aligned}&\left|\int_\Omega(f'(u_1)\nabla u_1-f'(u_2)\nabla u_2)\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}dx\right|\\&\leq\int_\Omega|f'(u_1)-f'(u_2)||\nabla u_1|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx+\int_\Omega|f'(u_2)||\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx.\end{aligned}$$

On écrit grâce à (7.7) et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|f'(u_1)-f'(u_2)||\nabla u_1|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx\\&\leq c\int_\Omega(|u_1|^{2p-3}+|u_2|^{2p-3}+1)|u||\nabla u_1|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx\\&\leq c(\|u_1\|_{L^\infty}^{2p-3}+\|u_2\|_{L^\infty}^{2p-3}+1)\|u\|_{H^1}\|u_1\|_{H^2}\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|\\&\leq c(\|u_1\|_{H^2}^{2p-3}+\|u_2\|_{H^2}^{2p-3}+1)\|u\|_{H^1}\|u_1\|_{H^2}\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|.\end{aligned}$$

De plus, grâce à (7.7),

$$\begin{aligned}\int_\Omega|f'(u_2)||\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx&\leq c\int_\Omega(|u_2|^{2p-2}+1)|\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|dx\\&\leq c(\|u_2\|_{H^2}^{2p-2}+1)\|u\|_{H^1}\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|.\end{aligned}$$

On est ainsi conduit à une estimation du type

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\big(\|\Delta\omega\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\|\nabla\Delta\xi\|^2\big)+c(\|\nabla\Delta\xi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2)\\&\leq c(\|u_1\|_{H^2}^{q_2}+\|u_2\|_{H^2}^{q_2}+1)\|u\|_{H^1}^2,\ q_2\geq 0.\end{aligned}\tag{7.172}$$

La somme de (7.166) et (7.172), donne une inégalité de la forme

$$\begin{aligned}&\frac{dV_{11}}{dt}+cV_{11}+c'\Big(\left\|\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\omega}{\partial t}\right\|^2\Big)\\&\leq c''(\|u_1\|_{H^2}^q+\|u_2\|_{H^2}^q+1)\|u\|_{H^1}^2+C<\omega+\xi>^2,\ q\geq 0,\end{aligned}\tag{7.173}$$

où

$$V_{11}=V_{10}+\|\Delta\omega\|^2+\|\Delta\xi\|^2+\|\nabla\Delta\xi\|^2\tag{7.174}$$

satisfait

$$c(\|\omega\|^2_{H^2} + \|\xi\|^2_{H^3}) \leq V_{11} \leq c'(\|\omega\|^2_{H^2} + \|\xi\|^2_{H^3}). \tag{7.175}$$

Partant des estimations précédentes, notamment (7.65), on peut voir que

$$\|u\|^2_{H^1} \leq Q(\|u_0\|_{H^1}, \|\varphi_0\|_{H^2})$$

et en notant que

$$\begin{aligned} < \omega + \xi >^2 &=< \omega_0 + \xi_0 >^2 \\ &=< u_0 + \varphi_0 >^2 \leq Q(\|u_0\|_{H^1}, \|\varphi_0\|_{H^2}), \end{aligned}$$

où Q est une fonction monotone qui dépend uniquement du temps. Par conséquent, (7.173) et le lemme de Gronwall donnent

$$\|\omega\|^2_{H^2} + \|\xi\|^2_{H^3} \leq h(t)Q(\|u_0\|_{H^1}, \|\varphi_0\|_{H^2}), \tag{7.176}$$

où

$$h(t) := c' \int_0^t e^{-c(t-s)}(\|u_1(s)\|^q_{H^2} + \|u_2(s)\|^q_{H^2} + 1)ds. \tag{7.177}$$

■

On a le

Lemme 7.1. *Le semi-groupe $S(t)$, $t \geq 0$, associé au problème* (7.1)-(7.4) *est Lipschitz en espace et Hölder en temps sur $[0,T] \times B$, où $B \subset W \cap \mathcal{E}_\alpha$ est un ensemble borné.*

Démonstration:
On sait que le semi-groupe est Lipschitz en espace (cf. Théorème 7.2), il reste à prouver la continuité Höldérienne du semi-groupe par rapport au temps.

On a, grâce aux estimations (7.59) et (7.62),

$$\begin{aligned} &\|S(t_1)(u_0,\varphi_0) - S(t_2)(u_0,\varphi_0)\|_E \\ &= \|(u(t_1) - u(t_2), \varphi(t_1) - \varphi(t_2))\|_E \\ &= \|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^1} + \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\|_{H^2} \\ &\leq \int_{t_2}^{t_1} \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(\tau) \right\|_{H^1} d\tau + \int_{t_2}^{t_1} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau) \right\|_{H^2} d\tau \\ &\leq c|t_1 - t_2|^{1/2}, \end{aligned}$$

où $c > 0$ dépend uniquement de $T > 0$ et du borné absorbant dans $W \cap \mathcal{E}_\alpha$, cela conclut la preuve.

■

On déduit ainsi du Théorème 7.5 et du Lemme 7.1 le résultat suivant

Théorème 7.6. *Le système dynamique $(S(t), \mathcal{X}_\alpha)$ associé au problème* (7.1)-(7.4) *possède un attracteur exponentiel $\mathcal{M}_\alpha$ dans $\mathcal{X}_\alpha$.*

Remarque 7.4. **(a)** *L'attracteur exponentiel $\mathcal{M}_\alpha$ étant de dimension finie et $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{M}_\alpha$, cela implique immédiatement que l'attracteur global $\mathcal{A}_\alpha$ est également de dimension finie.*

(b) *Il n'est pas difficile d'étudier le comportement spatial des solutions dans un cylindre semi-infini, en supposant que celles-ci existent (cf. Chapitre 6).*

Chapitre 8

Modèle de champ de phase de type Caginalp avec un couplage non linéaire

On considère maintenant une fonction g non linéraire, ce qui nous conduit à traiter le problème de couplage non linéaire ci-dessous (voir, par exemple, [29]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u) = g(u)(\varphi - \Delta\varphi), \tag{8.1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -g(u)\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.2}$$

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{8.3}$$

$$u|_{t=0} = u_0, \varphi|_{t=0} = \varphi_0. \tag{8.4}$$

Nous suivront le programme du chapitre précédent, en faisant des hypothèses supplementaires sur la fonction g. Il s'agit de montrer que le problème est bien posé, et d'étudier le comportement asymptotique des solutions lorsque t tend vers l'infini avant d'analyser le comportement spatial de celles-ci dans un cylindre semi-infini, en supposant que de telles solutions existent.

Hypothèses sur la fonction g – On fait les hypothèses suivantes :

$$g \text{ est de classe } C^1, \tag{8.5}$$

$$|g(s)s| \leq c_4(|G(s)| + 1), c_4 \geq 0, s \in \mathbb{R}, \tag{8.6}$$

$$|g(s)| \leq c_5(|s| + 1), c_5 \geq 0, s \in \mathbb{R}, \tag{8.7}$$

$$|g'(s)| \leq c_6,\ c_6 \geq 0,\ s \in \mathbb{R}, \tag{8.8}$$

$$|G(s)|^2 \leq \epsilon F(s) + c_\epsilon,\ \forall\ \epsilon > 0,\ s \in \mathbb{R}, \tag{8.9}$$

où $G(s) = \int_0^s g(t)dt$.

8.1 Estimations à priori

On multiplie (8.1) par $\frac{\partial u}{\partial t}$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx\Big) + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 = \int_\Omega g(u)(\varphi - \Delta\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}dx. \tag{8.10}$$

On multiplie (8.2) par $\varphi - \Delta\varphi$. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\varphi\|^2+2\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2\Big)+\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2 = -\int_\Omega g(u)(\varphi-\Delta\varphi)\frac{\partial u}{\partial t}dx. \tag{8.11}$$

On additionne maintenant (8.10) et (8.11) pour avoir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx\Big)\\ 2\Big(\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\Big) = 0.\end{aligned} \tag{8.12}$$

On multiplie (8.1) par u. On a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m\|^2 + \|\nabla u_m\|^2 + \int_\Omega f(u_m)u_m dx = \int_\Omega g(u_m)u_m(\varphi_m - \Delta\varphi_m)dx.$$

Les hypothèses (6.7) et (8.6) donnent,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + c\int_\Omega F(u)dx \le c'\int_\Omega |G(u)|^2 dx + \|\Delta\varphi\|^2 + c''.$$

On déduit de (8.9),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + c\int_\Omega F(u)dx \le \epsilon c'\int_\Omega F(u)dx + \|\Delta\varphi\|^2 + c''. \tag{8.13}$$

En prenant $\epsilon > 0$ tel que $c - \epsilon c' > 0$, on aboutit à

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|\nabla u\|^2 + 2c\int_\Omega F(u)dx \le c'\|\Delta\varphi\|^2 + c''. \tag{8.14}$$

On somme à présent (8.12) et ϵ_1(8.14), où $\epsilon_1 > 0$ est suffisamment petit. On obtient

$$\begin{aligned}&\frac{dV_1}{dt} + 2\epsilon_1(\|\nabla u\|^2 + c\int_\Omega F(u)dx) + 2\Big(\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\Big)\\ &\le \epsilon_1 c'\|\Delta\varphi\|^2 + c'',\end{aligned} \tag{8.15}$$

où

$$V_1 = \epsilon_1\|u\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + 2\int_\Omega F(u)dx \tag{8.16}$$

satisfait

$$c(\|u\|^2_{H_0^1} + \|\varphi\|^2_{H^2}) - c'' \le V_1 \le c'(\|u\|^2_{H_0^1} + \|\varphi\|^2_{H^2}) + c''. \tag{8.17}$$

Pour $\epsilon_1 > 0$ pris tel que $2 - \epsilon_1 c' > 0$, on obtient

$$\frac{dV_1}{dt} + cV_1 + c' \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 \leq c''. \tag{8.18}$$

On multiplie enfin (8.2) par $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$. On a grâce à (8.7),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 &\leq c\int_\Omega (|u|+1)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| dx \\ &\leq c(\|u\|_{L^4}^2 + 1)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2 \leq c(\|u\|_{H_0^1}^2 + 1)\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2. \tag{8.19}$$

8.2 Caractère bien posé du problème

On commence par énoncer le

Théorème 8.1. *Supposons les hypothèses* (6.7)-(6.8) *et* (8.5)-(8.9) *vraies. Alors pour toutes données initiales* (u_0, φ_0) *appartenant à* $H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *et* $F(u_0) < \infty$, *le problème* (8.1)-(8.4) *admet au moins une solution* (u, φ) *telle que* $(u, \varphi) \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *et* $\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \in L^2(0, T; L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega))$.

Démonstration:
La preuve s'appuie sur la méthode de Galerkin (cf. Chapitre 6 pour plus de détails). ■

On fait l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$|g(s)| \leq c,\ c \geq 0,\ s \in \mathbb{R}. \tag{8.20}$$

On a le

Théorème 8.2. *Sous les conditions du Théorèmes 8.1 et on suppose* (8.20) *satisfaite. Alors, on a de plus* $u \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\forall\ T > 0$.

Démonstration:
On multiplie (8.1) par $-\Delta u$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 + \int_\Omega f(u)u dx = -\int_\Omega g(u)(\varphi - \Delta\varphi)\Delta u dx,$$

ce qui donne, grâce à (6.7) et (8.20),

$$\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 \leq c\|\nabla u\|^2 + c'\|\Delta\varphi\|^2 + c'', \tag{8.21}$$

d'où le théorème.

■

Par suite, on énonce le

Théorème 8.3. *On suppose les hypothèses du Théorème 8.2 vérifiées avec* $p \in [0,1]$ *lorsque* $d = 3$ *dans* (6.8). *Alors si les données initiales* (u_0, φ_0) *sont prises dans* $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *on a de plus* $u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, $\varphi \in L^\infty(0,T; H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ *et* $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L^2(0,T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, $\forall\, T > 0$.

Démonstration:
On multiplie (8.1) par $-\Delta \frac{\partial u}{\partial t}$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2 + \left\|\nabla \frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u \nabla \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= -\int_\Omega g(u)\varphi \Delta \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_\Omega g(u)\Delta\varphi \Delta \frac{\partial u}{\partial t} dx. \end{aligned} \tag{8.22}$$

On multiplie (8.2) par $\Delta^2 \varphi$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Delta\varphi\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi\|^2\right) + \|\nabla\Delta\varphi\|^2 = -\int_\Omega g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\Delta^2\varphi dx. \tag{8.23}$$

En sommant (8.22) et (8.23), on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi\|^2\Big) + \|\nabla\Delta\varphi\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx \\ &= -\int_\Omega g(u)\varphi\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_\Omega g(u)\Delta\varphi\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_\Omega g(u)\frac{\partial u}{\partial t}\Delta^2\varphi dx. \end{aligned} \tag{8.24}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_\Omega g(u)\Delta\varphi\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dx = &-\int_\Omega g'(u)\nabla u.\Delta\varphi\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_\Omega g'(u)\nabla u.\nabla\Delta\varphi\frac{\partial u}{\partial t} \\ &+ \int_\Omega g(u)\Delta^2\varphi\frac{\partial u}{\partial t}dx, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \|\nabla\Delta\varphi\|^2\Big) + \|\nabla\Delta\varphi\|^2 + \left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 + \int_\Omega f'(u)\nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx \\ &= -\int_\Omega g(u)\varphi\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dx - \int_\Omega g'(u)\nabla u.\Delta\varphi\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx + \int_\Omega g'(u)\nabla u.\nabla\Delta\varphi\frac{\partial u}{\partial t}dx. \end{aligned} \tag{8.25}$$

On a alors de (6.8),

$$\left|\int_\Omega f'(u)\nabla u\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx\right| \le c\int_\Omega(|u|^{2p}+1)|\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx,$$

en considérant le cas $d = 3$ et $p = 1$ (les autres cas se traitent de la même manière). On déduit de l'inégalité de Hölder que

$$\left|\int_\Omega(|u|^2+1)|\nabla u|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx\right| \le c(\|u\|_{H^1}^2+1)\|u\|_{H^2}\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|. \tag{8.26}$$

De plus,

$$-\int_\Omega g(u)\varphi\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dx=\int_\Omega g'(u)\nabla u\varphi\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx+\int_\Omega g(u)\nabla\varphi.\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx,$$

alors

$$\left|\int_\Omega g(u)\varphi\Delta\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|\leq\int_\Omega|g'(u)||\nabla u||\varphi|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx+\int_\Omega|g(u)||\nabla\varphi|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx.$$

On a, grâce à (8.8) et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\int_\Omega|g'(u)||\nabla u||\varphi|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx&\leq c\int_\Omega|\nabla u||\varphi|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx\\&\leq c\|u\|_{H^2}\|\nabla\varphi\|\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\end{aligned}\tag{8.27}$$

En outre, on déduit de (8.7) et l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned}\int_\Omega|g(u)||\nabla\varphi|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx&\leq c\int_\Omega(|u|+1)|\nabla\varphi|\left|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx\\&\leq c(\|u\|_{H^1}+1)\|\Delta\varphi\|\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\end{aligned}\tag{8.28}$$

Enfin, grâce à (8.8) et l'inégalité de Hölder,

$$\left|\int_\Omega g'(u)\nabla u.\Delta\varphi\nabla\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|\leq c\|u\|_{H^2}\|\nabla\Delta\varphi\|\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|\tag{8.29}$$

et

$$\left|\int_\Omega g'(u)\nabla u.\nabla\Delta\varphi\frac{\partial u}{\partial t}dx\right|\leq c\|u\|_{H^2}\|\nabla\Delta\varphi\|\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|.\tag{8.30}$$

On déduit ainsi de (8.25)-(8.30) l'inégalité

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\|\Delta u\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2\Big)+\|\nabla\Delta\varphi\|^2+c\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\\&\leq c'\|u\|_{H^2}^2(\|u\|_{H^1}^q+1)(\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2+1),\ q\geq 0.\end{aligned}\tag{8.31}$$

Finalement, en sommant les estimations (8.18), ϵ_2(8.21) et (8.31), où $\epsilon_2>0$ est assez petit. On obtient

$$\frac{dV_2}{dt}+c\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\leq c'\|u\|_{H^2}^2(\|u\|_{H^1}^q+1)(V_2+1),\tag{8.32}$$

où

$$V_2=V_1+\epsilon_2\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+\|\nabla\Delta\varphi\|^2\tag{8.33}$$

satisfait

$$c(\|u\|_{H^2}^2+\|\varphi\|_{H^3}^2)+c''\leq V_2\leq c'(\|u\|_{H^2}^2+\|\varphi\|_{H^3}^2)+c''.\tag{8.34}$$

On multiplie enfin (8.2) $-\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}$. On a, grâce à (8.7) et l'inégalité de Hölder

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\varphi\|^2+\left\|\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2+\left\|\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\|^2\leq c(\|u\|_{H^1}^2+1)\left\|\nabla\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2.\tag{8.35}$$

La preuve découle de (8.34), (8.35) et du lemme de Gronwall uniforme.

■

On a le résultat d'unicité suivant :

Théorème 8.4. *Sous les hypothèses du Théorème 8.1 avec $p \leq 1$ lorsque $d = 3$ dans* (6.8)*, le problème* (8.1)-(8.4) *admet une solution unique avec la regularité ci-dessus.*

Démonstration:
Pour la preuve nous allons considérer deux solutions du problème (8.1)-(8.3) que l'on note (u_1, φ_1) et (u_2, φ_2), (u_{01}, φ_{01}) et (u_{02}, φ_{02}) étant leurs données initiales respectives. On pose maintenant

$$(u, \varphi) = (u_1 - u_2, \varphi_1 - \varphi_2) \text{ et } (u_0, \varphi_0) = (u_{01} - u_{02}, \varphi_{01} - \varphi_{02}).$$

Alors le couple (u, φ) satisfait le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + f(u_1) - f(u_2) \\ &= -\Big(g(u_1) - g(u_2)\Big)(\varphi_1 - \Delta\varphi_1) + g(u_2)(\varphi - \Delta\varphi), \end{aligned} \tag{8.36}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = -\Big(g(u_1) - g(u_2)\Big)\frac{\partial u_1}{\partial t} - g(u_2)\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{8.37}$$

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \tag{8.38}$$

$$(u(0), \varphi(0)) = (u_0, \varphi_0). \tag{8.39}$$

On multiplie (8.36) par $\frac{\partial u}{\partial t}$ puis (8.37) par $\varphi - \Delta\varphi$, on obtient en sommant les équations l'égalité suivante

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u\|^2 + \|\varphi\|^2 + 2\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2\Big) + 2\Big(\|\nabla\varphi\|^2 + \|\Delta\varphi\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\Big) \\ &2\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx \\ &= 2\int_\Omega \Big(g(u_1) - g(u_2)\Big)\Big[(\varphi_1 - \Delta\varphi_1)\frac{\partial u}{\partial t} + (\varphi - \Delta\varphi)\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big]dx. \end{aligned} \tag{8.40}$$

On considère ici le cas $d = 3$ et $p = 1$ (les autres cas se traitent de façon similaire). On a, grâce à (6.8),

$$\begin{aligned} &\left|\int_\Omega (f(u_1) - f(u_2))\frac{\partial u}{\partial t}dx\right| \\ &\leq c(\|u_1\|_{H^1}^4 + \|u_2\|_{H^1}^4 + 1)\|u\|_{H^1}^2 + \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \end{aligned} \tag{8.41}$$

On a, grâce à (8.8) et l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega \Big(g(u_1) - g(u_2)\Big)(\varphi_1 - \Delta\varphi_1)\frac{\partial u}{\partial t}dx\right| &\leq c\int_\Omega |u|(|\varphi_1| + |\Delta\varphi_1|)\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|dx \\ &\leq c\|u\|_{H^1}^2\|\nabla\Delta\varphi_1\|^2 + \frac{1}{4}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2 \end{aligned} \tag{8.42}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \Big(g(u_1)-g(u_2)\Big)(\varphi-\Delta\varphi)\frac{\partial u_1}{\partial t}dx\right| &\le c\int_\Omega |u|(|\varphi|+|\Delta\varphi|)\left|\frac{\partial u_1}{\partial t}\right|dx \\ &\le c\|u\|^2_{H^1}\left\|\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|^2 + c'\|\Delta\varphi\|^2.\end{aligned} \tag{8.43}$$

Ainsi, en tenant compte de (8.41)-(8.43), l'estimation (8.40) s'écrit

$$\frac{dE}{dt} \le c\Big(\|u_1\|^q_{H^1}+\|u_2\|^q_{H^1}+\|\varphi_1\|^2_{H^3}+\left\|\nabla\frac{\partial u_1}{\partial t}\right\|^2+1\Big)E,\ q\ge 0, \tag{8.44}$$

où

$$E=\|\nabla u\|^2+\|\varphi\|^2+2\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2$$

satisfait

$$\|u\|^2_{H^1}+\|\varphi\|^2_{H^2}\le E\le 2(\|u\|^2_{H^1}+\|\varphi\|^2_{H^2}),$$

ce qui donne, en appliquant le lemme de Gronwall, l'unicité de la solution (ainsi que la continuité par rapport aux données initiales).

■

Remarque 8.1. *Les Théorèmes 8.1 et 8.2 nous permettent de définir un semi-groupe continu $S(t)$, $t\ge 0$, comme suit :*

$$\begin{aligned}S(t):\Phi:=H^1_0(\Omega)\times H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)&\to\Phi\\ (u_0,\varphi_0)&\mapsto (u(t),\varphi(t)),\ \forall\ t\ge 0,\end{aligned}$$

où le couple (u,φ) est l'unique solution de notre problème.

8.3 Ensembles absorbants

On a le résultat suivant :

Théorème 8.5. *Le semi-groupe $S(t)$ engendré par le système d'équations* (8.1)-(8.4) *possède un ensemble borné absorbant que l'on note $\boldsymbol{B}_0$ dans l'espace Φ, c'est-à-dire,*

$$\forall\ B\subset\Phi \text{ borné },\exists\ t_0=t_0(B) \text{ tel que } t\ge t_0 \text{ implique } S(t)B\subset \boldsymbol{B}_0.$$

Démonstration:
La preuve s'appuie sur l'estimation (8.18) que l'on réécrit ici,

$$\frac{dV_1}{dt}+cV_1+c'\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2\le c'', \tag{8.45}$$

où

$$V_1=\epsilon_1\|u\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\varphi\|^2+2\|\nabla\varphi\|^2+\|\Delta\varphi\|^2+2\int_\Omega F(u)dx \tag{8.46}$$

satisfait

$$c(\|u\|^2_{H^1_0} + \|\varphi\|^2_{H^2}) \leq V_1 \leq c'(\|u\|^2_{H^1_0} + \|\varphi\|^2_{H^2}). \tag{8.47}$$

En prenant les données initiales dans un borné de Φ, disons, une boule de rayon $R > 0$ et en tenant compte de (8.46), on a alors, grâce au lemme de Gronwall, l'estimation suivante :

$$\|u(t)\|^2_{H^1_0} + \|\varphi(t)\|^2_{H^2} \leq e^{-ct}c(R) + c'. \tag{8.48}$$

Par suite, on a

$$\lim_{t\to\infty} \sup\{\|u(t)\|^2_{H^1_0} + \|\varphi(t)\|^2_{H^2}\} = c'$$

et donc pour $\rho_0 > c'$, on a

$$\|u(t)\|^2_{H^1_0} + \|\varphi(t)\|^2_{H^2} \leq \rho_0, \ \forall\ t \geq t_0,$$

où $t_0 = \max\{0, -\frac{1}{c'}\log\left(\frac{\rho_0 - c'}{c(R)}\right)\}$.

■

Nous allons maintenant établir l'existence d'un ensemble borné absorbant dans l'espace

$$\Phi_1 := H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \times H^3(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

Théorème 8.6. *Le semi-groupe engendré par le système* (8.1)-(8.4) *est dissipatif dans l'espace plus régulier* Φ_1*, c'est-à-dire que* $S(t)$*,* $t \geq 0$*, possède un ensemble borné absorbant* $\boldsymbol{B}_1$ *dans* Φ_1*.*

Démonstration:
La preuve s'appui sur les estimations (8.21), (8.31), (8.32) et (8.34), le Théorème 8.5 et le lemme de Gronwall uniforme.

En effet, grâce au résultat du Théorème 8.5, l'estimation (8.21) permet d'écrire

$$\int_t^{t+r} \|\Delta u(s)\|^2 ds \leq c(r), \ \forall\ t \geq t_0, \ \forall\ r > 0. \tag{8.49}$$

L'estimation (8.31) donne, grâce à (8.34) et (8.49),

$$\int_t^{t+r} \|\nabla\Delta\varphi(s)\|^2 ds \leq c'(r), \ \forall\ t \geq t_0 + r. \tag{8.50}$$

Ainsi, le lemme de Gronwall uniforme appliqué à (8.32) donne

$$\|u(t)\|^2_{H^2} + \|\varphi(t)\|^2_{H^3} \leq c, \ \forall\ t \geq t_1, \tag{8.51}$$

où $t_1 = t_0 + 2r$.

■

Remarque 8.2. *Si on suppose que la dérivée seconde de* g*,* g''*, est bornée, alors il n'est pas difficile de prouver, par des arguments de décomposition standards (voir [67] et [23], cf. aussi les Chapitres 3 et 6) que le semi-groupe* $S(t)$ *possède l'attracteur global* $\mathcal{A}$*.*

8.4 Comportement spatial des solutions

Cette dernière section est motivée par notre volonté d'étendre nos résultats à des domaines non bornés. A cet effet, nous étudierons le comportement des solutions dans un cylindre semi-infini $R = (0, +\infty) \times D$, où D est un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^{d-1}$, d étant la dimension de l'espace. On considère alors le problème déterminé par le système (8.1)-(8.2) dans le cylindre semi-infini R, avec $d = 3$. En outre, on lui associe les conditions aux bords :

$$u = \varphi = 0 \text{ sur } (0, +\infty) \times \partial D \times (0, T), \tag{8.52}$$

$$u(0, x_2, x_3, t) = h(x_2, x_3, t), \varphi(0, x_2, x_3, t) = l(x_2, x_3, t) \text{ sur } \{0\} \times D \times (0, T), \tag{8.53}$$

où $T > 0$ est un temps final donné. On considère également les conditions initiales,

$$u|_{t=0} = \varphi_{t=0} = 0 \text{ sur } R. \tag{8.54}$$

On suppose que de telles solutions existent.

L'analyse est très similaire à celle faite précédemment au Chapitre 6. On pose de nouveau

$$F_\omega(z,t) = \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)\Big(u_s u_{,1} + \varphi(\varphi_{,1} + \varphi_{,1s}) + \varphi_s \varphi_{,1}\Big) da ds, \tag{8.55}$$

on a

$$\begin{aligned}
&F_\omega(z+h,t) - F_\omega(z,t) \\
&= \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{R(z,z+h)} (|\nabla u|^2 + 2F(u)) dx \\
&+ \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{R(z,z+h)} (|\varphi|^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) dx \\
&+ \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) dx ds \\
&+ \frac{\omega}{2} \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) dx ds.
\end{aligned} \tag{8.56}$$

Un calcul direct de la différentielle donne

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F_\omega}{\partial z}(z,t) \\
&= \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{D(z)} (|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) da \\
&+ \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) da ds \\
&+ \frac{\omega}{2} \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) da ds.
\end{aligned} \tag{8.57}$$

On considère à nouveau une seconde fonction, à savoir,

$$G_\omega(z,t) = \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)\Big(u_s u_{,1} + \varphi(\theta_{,1} + \varphi_{,1s})\Big) dads \tag{8.58}$$

et

$$\begin{aligned} &G_\omega(z+h,t) - G_\omega(z,t) \\ &= \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{R(z,z+h)} (|u|^2 + |\nabla\theta|^2) dx \\ &+ \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2) dxds \\ &+ \frac{\omega}{2} \int_0^t \int_{R(z,z+h)} \exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2) dxds. \end{aligned} \tag{8.59}$$

Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G_\omega}{\partial z}(z,t) \\ &= \frac{\exp(-\omega t)}{2} \int_{D(z)} (|u|^2 + |\nabla\theta|^2) da \\ &+ \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + g(u)u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2) dads \\ &+ \frac{\omega}{2} \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2) dads \\ &+ \int_0^t \int_{D(z)} \exp(-\omega s)(G(u) - g(u)u)\varphi dads. \end{aligned} \tag{8.60}$$

On choisit τ suffisamment grand pour que

$$2F(u) + \tau u^2 \geq C_1 u^2,\ C_1 > 0.$$

On s'intéresse maintenant à la partie non linéaire

$$\omega(F(u) + \frac{\tau}{2}|u|^2) + \tau f(u)u + \tau(G(u) - g(u)u)\varphi + \frac{\omega}{2}|\varphi|^2. \tag{8.61}$$

On suppose que $G(s) - g(s)s \leq c(|s|^{k+2} + s^2)$ (voir [29]). Lorsque τ est assez grand, on a $F(u) + \frac{\tau}{2}|u|^2 \geq C_2(|u|^{k+2} + u^2),\ C_2 > 0$. Ainsi, pour $\omega \gg \tau$, on déduit que

$$\begin{aligned} &\omega(F(u) + \frac{\tau}{2}|u|^2) + \tau f(u)u + \tau(G(u) - g(u)u)\varphi + \frac{\omega}{2}|\varphi|^2 \\ &\geq C_3(|u|^2 + |\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2),\ C_3 > 0. \end{aligned} \tag{8.62}$$

En tenant compte des choix précédents, on peut voir que la fonction

$$H_\omega = F_\omega + \tau G_\omega \tag{8.63}$$

satisfait l'estimation

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H_\omega}{\partial z}(z,t)\\&\geq C_4\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\Delta\varphi|^2+|\nabla\theta|^2)dads.\end{aligned}\tag{8.64}$$

Dans la suite, on cherchera une estimation de $|H_\omega|$ en termes de sa différentielle. Pour cela, on note que

$$\begin{aligned}&|F_\omega|\\&\leq(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u_s^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1s}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_s^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1}^2dads)^{1/2}\\&\leq C_5\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2+|u_s|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\varphi_s|^2+|\nabla\varphi_s|^2)dads,\end{aligned}\tag{8.65}$$

où C_5 est une constante positive qui se calcule explicitement. De la même façon, on a

$$\begin{aligned}&|G_\omega|\\&\leq(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)u_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\theta_{,1}^2dads)^{1/2}\\&+(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_s^2dads)^{1/2}(\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)\varphi_{,1}^2dads)^{1/2}\\&\leq C_6\int_0^t\int_{D(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2+|\nabla u|^2+|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2+|\nabla\theta|^2)dads,\end{aligned}\tag{8.66}$$

où C_6 se détermine précisément en fonction des paramètres et de la géométrie de la section transversale. On déduit alors l'existence d'une constante positive $C_7 = (C_5+\tau C_6)/C_4$ telle que

$$|H_\omega|\leq C_7\frac{\partial H_\omega(z,t)}{\partial z}.\tag{8.67}$$

L'inégalité (8.67) est bien connue dans l'étude d'estimations spatiales et donne une alternative de type Phragmén-Lindelöf. En particulier, s'il existe $z_0 \geq 0$ tel que $F(z_0, t) > 0$, alors la solution satisfait l'estimation

$$H_\omega(z,t) \geq H_\omega(z_0,t)\exp(C_7^{-1}(z-z_0)),\ z \geq z_0. \tag{8.68}$$

Cette estimation donne des informations en termes de la mesure définie dans le cylindre. En effet, il vient de (8.68) que

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dx \\
&+ \tau\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(0,z)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dx \\
&+ \int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + g(u)u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)dxds \\
&+ \frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dxds \\
&+ \tau\int_0^t\int_{R(0,z)}\exp(-\omega s)(G(u) - g(u)u)\varphi dxds
\end{aligned}$$

tend vers l'infini de façon exponentielle. En revanche, si $H_\omega(z,t) \leq 0$ pour tout $z \geq 0$, on déduit que la solution décroît et on obtient une inégalité de la forme

$$-H_\omega(z,t) \leq -H_\omega(0,t)\exp(C_7^{-1}z),\ z \geq 0, \tag{8.69}$$

où

$$\begin{aligned}
E_\omega(z,t) = &\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dx \\
&+ \tau\frac{\exp(-\omega t)}{2}\int_{R(z)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dx \\
&+ \int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|u_s|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + f(u)u + g(u)u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)dxds \\
&+ \frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dxds \\
&+ \tau\int_0^t\int_{R(z)}\exp(-\omega s)(G(u) - g(u)u)\varphi dxds
\end{aligned}$$

et $R(z) = \{x \in R, x_1 > z\}$. Finalement, en posant

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\omega(z,t) &= \frac{1}{2}\int_{R(z)}(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dx \\
&+ \tau\frac{1}{2}\int_{R(z)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dx + \int_0^t\int_{R(z)}(|u_s|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\int_0^t\int_{R(z)}(|\nabla u|^2 + f(u)u + g(u)u\Delta\varphi + |\varphi|^2 + |\nabla\varphi|^2)dxds \qquad (8.70) \\
&+ \frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}(|\nabla u|^2 + 2F(u) + |\varphi|^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + |\Delta\varphi|^2)dxds \\
&+ \tau\frac{\omega}{2}\int_0^t\int_{R(z)}(|u|^2 + |\nabla\theta|^2)dxds + \tau\int_0^t\int_{R(z)}(G(u) - g(u)u)\varphi dxds.
\end{aligned}$$

On a le

Théorème 8.7. *Soit le couple de fonctions (u,φ) une solution régulière pour le problème donné par* (8.1)-(8.2)*, les conditions aux limites* (8.52)-(8.53) *et les conditions initiales* (8.54)*. Alors, soit cette solution satisfait l'estimation de croissance* (8.68)*, soit elle satisfait l'estimation de décroissance*

$$\mathcal{E}_\omega(z,t) \leq E_\omega(0,t)\exp(\omega t - C_7^{-1}z),\ z \geq 0,$$

où l'énergie $\mathcal{E}_\omega$ est définie en (8.70)*.*

Conclusion et perspectives

Les travaux contenus dans ce manuscrit ont porté sur des systèmes d'équations qui s'inscrivent dans le contexte de phénomènes de transiton de phase. Ces systèmes d'équations sont des généralisations du système de champ de phase de Caginalp, proposé par Gunduz Caginalp (voir [1]) afin de modéliser les phénomènes de transition de phase dans certaines classes de matériaux, par exemple, les phénomènes de fusion-solidification.

Dans la première partie de ce rapport, nous nous sommes intéressés à l'analyse mathématique du modèle de champ de phase de Caginalp obtenu via la loi de Maxwell-Cattaneo de la conduction de chaleur (ou plutôt une généralisation de celle-ci).

Nous avons étudié les propriétés mathématiques du modèle, à savoir, l'existence, l'unicité, la continuité par rapport aux données initiales et l'existence de l'attracteur global de solutions pour le problème considéré dans les situations suivantes :

- cas d'un potentiel polynomial
- cas d'un potentiel singulier

Dans le cas d'un potentiel polynomial, nous avons analysé le comportement spatial de solutions dans un cylindre semi-infini lorsque celles-ci existent. Nous avons obtenu une alternative de type Phragmén-Lindelöf, à savoir, soit les solutions explosent à l'infini de façon exponentielle, soit elles tendent vers zéro à l'infini avec une vitesse exponentielle. Cette étude est motivée par la possibilité d'étendre l'analyse du comportement asymptotique des solutions faite dans ce rapport pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3), borné régulier, à des domaines non bornés tels que les cylindres semi-infini de dimension trois.

Nous avons achevé cette partie par l'étude du modèle (très légèrement modifié) sur l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier. Nous avons montré l'existence, l'unicité, la continuité par rapport aux données initiales et l'existence de l'attracteur global. L'étude de la dimension de l'attracteur global est un problème ouvert dans ce cas.

La seconde partie a porté sur l'étude théorique d'un modèle de champ de phase provenant de la théorie de la conduction de la chaleur introduite par Chen et Gurtin (voir [60]). On a donc été conduit à un modèle de champ de phase avec un couplage :

- cas d'un couplage linéaire
- cas d'un couplage non linéaire

Dans les deux cas, nous avons établi le caractère bien posé du problème considéré ainsi que l'existence de l'attracteur global de dimension fractale finie dans le premier cas. Ensuite, l'étude du comportement spatial des solutions a été faite.

En particulier, nous avons associé au modèle de champ de phase avec un couplage linéaire, des conditions aux limites de type Neumann homogènes. Ces conditions nous ont permis d'avoir une loi de conservation, puis, avons terminé par l'analyse mathématique du système conservatif ainsi obtenu, suivant le programme ci-dessus (existence, unicité, comportement asymptotique, comportement spatial des solutions). Dans ce cas, on ne peut pas espérer étudier le comportement asymptotique des solutions dans l'espace des phases tout entier du fait de la loi de conservation, ce qui nous a amené à introduire des sous-espaces de l'espace des phases.

Maintenant, d'autres directions de travail pourraient être envisagées. Je citerai quelques pistes plus ou moins précises.

Tout d'abord, dans les Chapitres 3, 6 et 8, nous avons établi que l'attracteur global est de dimension fractale finie. D'un point de vue physique, cela signifie que les systèmes dans ces deux cas pourraient être décrits par un nombre fini de paramètres. Il est donc naturel d'envisager une analyse numérique mais également des simulations de ces modèles.

Enfin, les résultats obtenus dans les Chapitres 6, 7 et 8 pourraient être étendus dans le cas d'un domaine non borné (par exemple, $\mathbb{R}^3$ tout entier). Nous pourrions également considérer les problèmes stationnaires correspondants à nos modèles afin d'étudier, par exemple, la convergence vers des états d'équilibre, notamment, pour le système de champ de phase conservatif du Chapitre 7.

Bibliographie

[1] G. Caginalp. An analysis of a phase field model of a free boundary. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 92(3) :205–245, 1986.

[2] A. Miranville. Some mathematical models in phase transition. Lecture Notes.

[3] G. Lamé and B.P. Clapeyron. Mémoire sur la solidification par refroissiement d'un globe solide. *Ann. Chem. Phys.*, 47 :250–256, 1831.

[4] J. Stefan. Uber einige probleme der theorie der warmeleitung. *Wien Akad. Mat. Natur.*, S.-B. :173–484, 1889.

[5] L. Rubinstein. On the solution of stefan's problem (in russian). *Izvestia Akad. Nauk SSSR*, 11 :37–54, 1947.

[6] A.M. Meirmanov. The classical solution of a multidimensional stefan problem for quasilinear parabolic equations (in russian). *Mat. Sb. (N.S.)*, 112 :170–192, 1980.

[7] J.W. Gibbs. *Collected works.* Yale University Press, New Haven, 1948.

[8] B. Chalmers. *Principles of solidification.* R.E. Krieger publishing, Huntington, New York, 1977.

[9] A. Visintin. Introduction to stefan-type problems. In *Handbook of Differential Equations, Evolutionary Partial Differential Equations*, C.M. Dafermos and M. Pokorny eds., pages 377–484. Elsevier, Amsterdam, 2008.

[10] O.A. Oleinik. A method of solution of the general stefan problem. *Soviet. math. Dokl*, 1 :1350–1353, 1960.

[11] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Statistical Physics (Part 1).* Third edition. New York, 1980.

[12] G. Caginalp. The role of microscopic anisotropy in the macroscopic behavior of a phase boundary. *Ann. Physics*, 172(1) :136–155, 1986.

[13] G. Caginalp. Stefan and hele-shaw type models as asymptotic limits of the phase-field equations. *Phys. Review A*, 39 :5887–5896, 1989.

[14] G. Caginalp and X. Chen. Phase field equations in the singular limit sharp interface problems. In *On the evolution of phase boundaries*, IMA Vol. Math. Appl. 43 M. Gurtin ed., pages 1–27. Springer, New York, 1992.

[15] G. Caginalp and X. Chen. convergence of the phase-field model to its sharp interface limits. *European J. Appli. Math.*, 9 :417–445, 1998.

[16] C.I. Christov and P.M. Jordan. Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moving media. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :154301, 2005.

[17] S.I. Serdyukov, N.M. Voskresenskii, V.K. Bel'nov and I.I. Karpov. Extended irreversible thermodynamics ansd generalization of the dual-phase-lag model in the heat transfer. 28 :1–13, 2003.

[18] A. Miranville and R. Quintanilla. Some generalizations of the Caginalp phase-field system. *Appl. Anal.*, 88(6) :877–894, 2009.

[19] A.E. Green and P.M. Naghdi. A re-examination of hte basic postulates of thermomechanics. 432 :171–194, 1991.

[20] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[21] J.L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Travaux et recherches mathématiques. Dunod, 1968.

[22] *Inégalités : petit recueil.*

[23] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[24] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. Real interpolation of Sobolev spaces on subdomains of $\mathbf{R}^n$. *Canad. J. Math.*, 30(1) :190–214, 1978.

[25] J.E. Rakotoson and J.M. Rakotoson. *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles.* Mathématiques. [Mathematics]. Presses Universitaires de France, Paris, 1999.

[26] A. Miranville and S. Zelik. Attractors for dissipative partial differential equations in bounded and unbounded domains. In *Handbook of differential equations : evolutionary equations. Vol. IV*, Handb. Differ. Equ., pages 103–200. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008.

[27] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko and R. Temam. *Exponential attractors for dissipative evolution equations*, volume 37 of *RAM : Research in Applied Mathematics.* Masson, Paris, 1994.

[28] A.V. Babin and M.I. Vishik. *Attractors of evolution equations*, volume 25 of *Studies in Mathematics and its Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992. Translated and revised from the 1989 Russian original by Babin.

[29] A. Miranville and R. Quintanilla. A Caginalp phase-field system with a nonlinear coupling. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 11(4) :2849–2861, 2010.

[30] A. Miranville and R. Quintanilla. A generalization of the Caginalp phase-field system based on the Cattaneo law. *Nonlinear Anal.*, 71(5-6) :2278–2290, 2009.

[31] R. Quintanilla. Spatial stability for the quasi-static problem of thermoelasticity. *J. Elasticity*, 76(2) :93–105 (2005), 2004.

[32] J.C. Robinson. *Infinite-dimensional dynamical systems.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors.

[33] P.W. Bates and S.M. Zheng. Inertial manifolds and inertial sets for the phase-field equations. *J. Dynam. Differential Equations*, 4(2) :375–398, 1992.

[34] D. Brochet, D. Hilhorst and A. Novick-Cohen. Finite-dimensional exponential attractor for a model for order-disorder and phase separation. *Appl. Math. Lett.*, 7(3) :83–87, 1994.

[35] D. Brochet and D. Hilhorst. Universal attractor and inertial sets for the phase field model. *Appl. Math. Lett.*, 4(6) :59–62, 1991.

[36] A. Miranville. Exponential attractors for a class of evolution equations by a decomposition method. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(2) :145–150, 1999.

[37] A. Miranville. Exponential attractors for a class of evolution equations by a decomposition method. II. The non-autonomous case. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10) :907–912, 1999.

[38] A. Miranville. Exponential attractors for nonautonomous evolution equations. *Appl. Math. Lett.*, 11(2) :19–22, 1998.

[39] A. Miranville and R. Quintanilla. A phase-field model based on a three-phase-lag heat conduction. *Appl. Math. Optim.*, 63(1) :133–150, 2011.

[40] J.N. Flavin, R.J. Knops and L.E. Payne. Decay estimates for the constrained elastic cylinder of variable cross section. *Quart. Appl. Math.*, 47(2) :325–350, 1989.

[41] L. Cherfils and A. Miranville. Some results on the asymptotic behavior of the Caginalp system with singular potentials. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 17(1) :107–129, 2007.

[42] L. Cherfils and A. Miranville. On the Caginalp system with dynamic boundary conditions and singular potentials. *Appl. Math.*, 54(2) :89–115, 2009.

[43] M. Conti, S. Gatti and A. Miranville. Asymptotic behavior of the caginalp phase-field system with coupled dynamic boundary conditions. *Discrete and continuous Dynamical systems*, 5(3) :485–505, June 2012.

[44] M. Grasselli, A. Miranville, V. Pata and S. Zelik. Well-posedness and long time behavior of a parabolic-hyperbolic phase-field system with singular potentials. *Math. Nachr.*, 280(13-14) :1475–1509, 2007.

[45] L. Cherfils, S. Gatti and A. Miranville. A doubly nonlinear parabolic equation with a singular potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 4(1) :51–66, 2011.

[46] V. Belleri and V. Pata. Attractors for semilinear strongly damped wave equations on $\mathbb{R}^3$. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 7(4) :719–735, 2001.

[47] M. Conti, V. Pata and M. Squassina. Strongly damped wave equations on $\mathbb{R}^3$ with critical nonlinearities. *Commun. Appl. Anal.*, 9(2) :161–176, 2005.

[48] F. Morillas and J. Valero. Asymptotic compactness and attractors for phase-field equations in $\mathbb{R}^3$. *Set-Valued Anal.*, 16(7-8) :861–897, 2008.

[49] M. Conti and G. Mola. Attractors for a phase field model on $\mathbb{R}^3$. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 15(2) :527–543, 2005.

[50] B. Doumbé-B. Attractors for a caginalp phase-field model type on the whole space $\mathbb{R}^3$. *Appl. Anal. Comp.*

[51] V. Pata. Attractors for a damped wave equation on $\mathbf{R}^3$ with linear memory. *Math. Methods Appl. Sci.*, 23(7) :633–653, 2000.

[52] V. Belleri. Analisi asintoticadi equazioni delle onde fortemente smortzate in uno dominio illimitato. Master thesis, Politecnico di Milano, Italia.

[53] R. Clausius. *Über eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie*, volume 19. 1854.

[54] R. Clausius. *Über die Anwendung des Satzes von des Äquivalenz der Verwandlungen auf die innere Arbeit*, volume 116. 1862.

[55] R. Clausius. *Über verschiedene für die Anwendung bequeme Formen der Hauptgleinchungen der mecanischen Wärmetheorie*, volume 125. 1865.

[56] C. Truesdell and R.A. Toupin. *The classical Field Theories.*

[57] M.E. Gurtin and Williams O.W. An axiomatic foundation for continuum thermodynamics. 26 :118–141, 1967.

[58] M.E. Gurtin and W.O. Williams. On the clausius-duhem inequality. *Z. angew. Math. Phys.*, 17 :626–633, 1966.

[59] B.D. Coleman and M.E. Gurtin. Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors. *Z. Angew. Math. Phys.*, 18 :199–208, 1967.

[60] P.J. Chen and M.E. Gurtin. On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 19 :614–627, 1968.

[61] M. Brokate and J. Sprekels. *Hysteresis and phase transitions*, volume 121 of *Applied Mathematical Sciences.* Springer-Verlag, New York, 1996.

[62] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov and N.N. Uralceva. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Translattions of Mathematical Monographs*, volume 23. American Mathematical Society, 1968.

[63] M. Marion. Attractors for reaction-diffusion equations : existence and estimate of their dimension. *Appl. Anal.*, 25(1-2) :101–147, 1987.

[64] B. Doumbé-B. A caginalp type phase-field problem with neumann boundary conditions. *Centr. Europ. J. of Math.*, *(*) :*–*, to appear.

[65] D. Hilhorst D. Brochet and X. Chen. Finite-dimensional exponential attractor for the phase field model. *Appl. Anal.*, 49(3-4) :197–212, 1993.

[66] D. Brochet and D. Hilhorst. Universal attractor and inertial sets for the phase field model. *Applied Mathematics Letters*, 4(6) :59 – 62, 1991.

[67] M. Conti, S. Gatti and A. Miranville. Asymptotic behavior of the Caginalp phase-field system with coupled dynamic boundary conditions. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 5(3) :485–505, 2012.