

THÈSE

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS
UFR des sciences fondamentales et appliquées
Laboratoire de mathématiques et applications - LMA (Poitiers)
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et ingénierie pour l'information, mathématiques - S2IM
(Poitiers)

Secteur de recherche : Mathématiques et leurs interactions

Cotutelle : Université de Tunis-El Manar (Tunisie)

Présentée par :
Kais Ammari

Sur la stabilité des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple

Directeur(s) de Thèse :
Pierre Torasso, Mohamed Salah Khargui

Soutenue le 01 mars 2014 devant le jury

Jury :

Président	Said Zarati	Professeur, Université de Tunis-El Manar, Tunisie
Rapporteur	Rupert Wei Tze Yu	Professeur des Universités, Université de Reims
Rapporteur	Hechmi Ben Messaoud	Professeur, Université de Monastir, Tunisie
Membre	Pierre Torasso	Professeur des Universités, Université de Poitiers
Membre	Mohamed Salah Khargui	Professeur, Université de Tunis-El Manar, Tunisie
Membre	Jean-Yves Charbonnel	Directeur de recherche, Université Paris 7

Pour citer cette thèse :

Kais Ammari. *Sur la stabilité des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple* [En ligne]. Thèse Mathématiques et leurs interactions. Poitiers : Université de Poitiers, 2014. Disponible sur Internet <<http://theses.univ-poitiers.fr>>



THÈSE

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE

Faculté des Sciences de Tunis

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées, Poitiers
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

DOMAINE DE RECHERCHE : Mathématiques

Présentée par

Kais Ammari

Sur la Stabilité des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple

Directeurs de thèse : **Pr. Mohamed Salah Khalgui**
: **Pr. Pierre Torasso**

Soutenue le 1 mars 2014

Devant la Commission d'Examen

JURY

M. Said Zarati	Professeur à l'Université de Tunis El-Manar	Président
M. Hechmi Ben Messaoud	Professeur à l'Université de Monastir	Rapporteur
M. Rupert Wei Tze Yu	Professeur à l'Université de Reims	Rapporteur
M. Jean-Yves Charbonnel	Directeur de Recherches CNRS à Paris	Examineur
M. Mohamed Salah Khalgui	Professeur à l'Université de Tunis El-Manar	Examineur
M. Pierre Torasso	Professeur à l'Université de Poitiers	Examineur

Remerciements

Cette thèse de doctorat a été réalisée dans le cadre d'une convention de cotutelle entre la Faculté des Sciences de Tunis et l'Université de Poitiers avec le soutien financier du Ministère Tunisien de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique et du projet Erasmus Mundus Al-Idrisi.

Je tiens tout d'abord à remercier spécialement mes directeurs de thèse Mohamed Salah KHALGUI et Pierre TORASSO pour m'avoir suggéré et dirigé ce travail. Je leur exprime toute ma reconnaissance pour leurs idées enrichissantes suite à nos multiples discussions, pour leurs encouragements, mais également pour leurs qualités humaines qui m'a poussé jusqu'au bout pour que je donne le meilleur de moi-même. Je garderai dans mon cœur leur générosité, leur compréhension,... Pour tout ce qu'ils m'ont donné, je les remercie très sincèrement.

Je remercie les professeurs Hechmi Ben Messaoud (faculté des sciences de Monastir) et Rupert Wei Tze Yu (Université de Reims) d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde considération. Je suis heureux que Monsieur Jean-Yves Charbonnel (Directeur de Recherches CNRS à Paris) a accepté de faire partie de mon jury. Je le remercie, ainsi que Said Zarati (Professeur à l'Université de Tunis El-Manar), d'avoir accepté de juger ce travail en tant que président de jury.

Je tiens à remercier énormément Michel Duflo pour ses précieuses remarques et suggestions suite à nos discussions.

Remerciements

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Tunis. Je cite en particulier Néjib Ben Salem, Ahmed Fitouhi, Mohamed Sifi, Sami Baraket, Hela Khalgui, Dorra Bourguiba, Najoua Gamara et Saloua Aouadi.

Je remercie très chaleureusement l'ensemble des enseignants-chercheurs du laboratoire de Mathématiques et Applications à Poitiers pour leur sympathie et leur aide qu'ils ont témoigné durant mes séjours au sein du laboratoire en particulier : Pol Vanhaecke (directeur du laboratoire), Abderrazak Bouaziz, Anne Moreau, ...

Je remercie également les doctorants et les ex-doctorants du laboratoire : Anis (pour ton aide et ton accueil), Appolinaire (avec qui j'ai passé des bons moments), Guilnard, Florent, Houssem, Jules, Frederic, Kévin, Yasmine, Paola, Claire...d'avoir partagé du savoir et des jolis moments avec moi. Je souhaite une bonne continuation à tous.

Je tiens à remercier les personnels Ita/iatos du laboratoire : Jocelyne Attab, Brigitte Brault, Nathalie Marlet, Benoît Metrot et Nathalie Mongin pour leur disponibilité et surtout leur gentillesse.

Un merci tout particulier à Sami Kouki, Abdelhalim Hasnaoui, Zouhaier Aouani, Atef Ben Es-said, Maher Bouhani, Cherifa Kochbati, Sabrine Sellami, Ali Ben Ahmed, Anis Younis, Rayaane Maalaoui, Nabila Jebali, Mohamed Beleg, Aimen Ben brik, Bechir Mannoubi...pour leur soutien et leur amitié.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien et l'aide des personnes de ma nombreuse et merveilleuse famille, mes parents Belaid et Aziza, mon frère Riadh et sa petite famille Hajer, Eya, Elaa et mes soeurs Rawdha, Hajer, mes cousins Taoufik, Anis, Mohsen, mes cousines Sihem, Hanen,.. mes très chers oncles et tantes, mes grands parents, et tout le reste de la famille.

Je ne peux malheureusement pas citer toutes les personnes que j'ai rencontré durant mon parcours et qui ont contribué d'une façon ou d'une autre, de près ou de loin, à l'aboutissement de cette thèse, je leur dis à toutes merci d'avoir été là à cette instant précis où je les ai rencontrées et où ils m'ont apportée cette aide qui a surement contribué à aller au bout dans cette thèse.

Table des matières

Introduction générale	1
Références bibliographiques	7
I Définitions et résultats généraux	9
1 Définitions - Préliminaires	9
1.1 Indice d'une algèbre de Lie	9
1.2 Formes fortement régulières	10
3 Algèbres de Lie quasi-réductives	11
3.1 Définitions	11
5.1 Exemples	13
6 Algèbres de Lie stables	13
6.1 Caractérisation algébrique des formes linéaires stables	13
7.1 Exemples	14
8 Relation entre la stabilité et la quasi-réductivité	15
12 Conjecture de Panyushev	16
14 Réduction au cas de rang nul	17
Références bibliographiques	19
II Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques	21
1 Cas des algèbres de Lie $\mathfrak{r}_\gamma$	21

7	Réduction au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale	29
8	Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$	30

Références bibliographiques	47
------------------------------------	-----------

III Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles		49
1	Notations et rappels	49
4	Caractérisation des sous-algèbres paraboliques en terme de système de racines .	54
10	Cas des sous-algèbres paraboliques minimales	56
14	Cas des sous-algèbres paraboliques non minimales	59
18	Présentation des calculs avec GAP4	64

Références bibliographiques	73
------------------------------------	-----------

Introduction générale

On se place sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique nulle. Par algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$, nous entendons une algèbre de Lie qui soit l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique affine connexe G sur $\mathbb{K}$. Depuis les travaux de Kirillov (voir [11] et [12]), il est bien connu que la représentation co-adjointe de G dans $\mathfrak{g}^*$ joue un rôle important en théorie des représentations. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite régulière si son orbite coadjointe $G.g$ est de dimension maximale ou si, de manière équivalente, son stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$ est de dimension minimale. L'indice d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'est autre que la dimension du stabilisateur d'une forme linéaire régulière. Une algèbre de Lie est dite stable si elle possède une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ admettant un voisinage pour la topologie de Zariski dans lequel les stabilisateurs de la représentation co-adjointe de $\mathfrak{g}$ de deux éléments de ce voisinage sont conjugués par le groupe adjoint connexe. Une telle forme est dite stable. La notion de stabilité a été introduite par Kosmann et Sternberg dans [13]. Il est clair que les formes linéaires stables sont régulières. Ainsi, l'étude des formes linéaires stables intervient dans le problème de calcul de l'indice qui a été introduit par Dixmier dans [5] pour son importance dans la théorie des représentations et celle des invariants. Dans [16], Tauvel et Yu ont caractérisé d'une manière purement algébrique les formes linéaires stables :

Lemme 1. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique et si $g \in \mathfrak{g}^*$*

$$g \text{ est stable si et seulement si } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) = \{0\},$$

où $\mathfrak{g}(g)$ désigne le stabilisateur de la forme linéaire g dans $\mathfrak{g}$.

Beaucoup d'algèbres de Lie sont stables. Par exemple, les sous-algèbres de Borel d'une algèbre de Lie simple sont toutes stables. En effet, Tauvel et Yu ont construit dans [16] à l'aide

des cascades de Kostant (voir chapitre 3) une forme linéaire sur une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie simple dont le stabilisateur est inclus dans une sous-algèbre de Cartan et il est clair d'après la caractérisation précédente qu'une telle forme est stable.

Définition Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dit de type réductif si le quotient $\mathbf{G}(g)/\mathbf{Z}$ du stabilisateur $\mathbf{G}(g) \subset \mathbf{G}$ de g pour l'action coadjointe par le centre $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{G}$ est un groupe réductif.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, un problème classique est de décrire le dual unitaire $\widehat{\mathbf{G}}$ de $\mathbf{G}$, i.e, les classes d'équivalences des représentations unitaires irréductibles de $\mathbf{G}$. Dans ce contexte, les orbites coadjointes jouent un rôle important comme l'illustre la célèbre "méthode des orbites" de Kirillov (voir [11] et [12]). Si la méthode des orbites ne permet pas de décrire tout le dual unitaire d'un groupe de Lie algébrique ou presque algébrique, elle permet d'en construire une partie qui supporte la mesure de Plancherel. En particulier, les représentations unitaires irréductibles de carré intégrable sont associées à des orbites coadjointes de type réductif (voir [6], [7] et [1]). C'est la raison pour laquelle, Duflo, Khalgui et Torasso ont introduit et étudié la classe des algèbres de Lie quasi-réductives (voir [8]) : une algèbre de Lie est dite quasi-réductive si elle possède une forme linéaire de type réductif. De manière équivalente cela revient à demander qu'elle possède une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ dont l'image du stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$ par la représentation adjointe soit une sous-algèbre réductive de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ des endomorphismes linéaires de $\mathfrak{g}$. De nombreuses classes intéressantes d'algèbres de Lie sont quasi-réductives : les algèbres de Lie réductives et beaucoup de leurs sous-algèbres paraboliques (voir ci-après), les sous-algèbres de Borel d'une algèbre de Lie simple d'après un résultat de Kostant (Kostant [14], non publié, voir [10]), etc.

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, on a le résultat suivant :

Lemme 2. *(voir par exemple [8]) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, l'ensemble des formes linéaires régulières de type réductif sur $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des formes linéaires stables, et c'est un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$.*

En particulier, toute algèbre de Lie quasi-réductive possède une forme linéaire stable. Cependant, il existe des algèbres de Lie stables qui ne sont pas quasi-réductives (voir exemple 11 dans le chapitre 1). Se pose la question de savoir, si pour certaines classes particulières d'algèbres de Lie non réductives, il y a équivalence entre ces deux notions.

Une sous-algèbre biparabolique d'une algèbre de Lie semi-simple est l'intersection de deux

sous-algèbres paraboliques dont la somme est l'algèbre de Lie ambiante. Plus généralement, les sous-algèbres biparaboliques forment une classe très intéressante (incluant la classe des sous-algèbres paraboliques et de Levi) d'algèbres de Lie qui ne sont pas toutes réductives. Dans [15, Conjecture 5.6(ii)], Panyushev conjecture que si une sous-algèbre biparabolique est stable, alors son stabilisateur générique est un tore. Cette conjecture peut être reformulée ainsi : *une sous-algèbre de Lie biparabolique est stable si et seulement si elle est quasi-réductive*. Pour le cas des sous-algèbres paraboliques, cette conjecture a été énoncée également dans [8, Introduction] sous forme d'une question.

Les sous-algèbres biparaboliques des algèbres de Lie simples de type A et C sont toutes quasi-réductives (voir [15]). D'autre part, dans [16] Tauvel et Yu ont donné l'exemple d'une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(8)$ qui n'admet aucune forme linéaire stable. C'est une conséquence de cet exemple que les sous-algèbres biparaboliques des algèbres de Lie simples des autres types ne sont pas toutes quasi-réductives. En fait, dans [8], Duflo, Khalgui et Torasso ont caractérisé les sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives, tandis que dans [4] Baur et Moreau ont fait de même pour les sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples de type exceptionnel.

Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite fortement régulière si elle est régulière, auquel cas $\mathfrak{g}(g)$ est une algèbre de Lie commutative d'après Duflo-Vergne (voir [9]), et si de plus le tore $\mathfrak{j}_g$, unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$, est de dimension maximale lorsque g parcourt l'ensemble des formes régulières. Les $\mathfrak{j}_g$, pour g fortement régulière sont les sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$. Elles sont toutes conjuguées par le groupe adjoint connexe et leur dimension commune est le rang de $\mathfrak{g}$.

Le résultat principal de cette thèse est le théorème suivant :

Théorème 3. *Une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie simple est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.*

Pour établir ce résultat, on commence par montrer que si $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ est stable si et seulement si le centralisateur $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$ est stable (voir 15). Compte tenu des résultats obtenus par Panyushev pour les cas de type A et C , il suffit de montrer le théorème pour les sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie orthogonales et des algèbres de Lie simples de type exceptionnel.

Si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie parabolique et $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo, on vérifie que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ est le produit direct d'un tore et de sous-algèbres paraboliques de rang nul. On se ramène donc à démontrer ce théorème pour les sous-algèbres paraboliques de rang nul,

pour lesquelles les stabilisateurs de la représentation coadjointe sont génériquement unipotents. Les démonstrations sont différentes d'une part dans le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie orthogonales et d'autre part dans celui des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles.

Dans le chapitre 2 (voir également [2]), grâce aux résultats de [8], nous étudions le premier cas. Au passage, nous montrons également qu'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ qui stabilise une forme bilinéaire alternée de rang maximal et un drapeau en position générique est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.

Soit E un espace vectoriel de dimension $q \geq 3$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B . On désigne par $\mathfrak{so}(E)$ l'algèbre de Lie du groupe orthogonal correspondant. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E avec $r = \dim V \geq 1$. On désigne par $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(E)$ constituée des endomorphismes de E stabilisant le drapeau $\mathcal{V}$: c'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(E)$ et les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$ sont toutes obtenues ainsi.

En se basant sur le théorème 29 de [8], on montre que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition :

(*) pour $1 \leq i \leq t - 1$ entre deux sous-espaces consécutifs V_i et V_{i+1} le saut de dimension est 2 s'ils sont tous deux de dimension impaire et 1 sinon, et (q, r) vérifie l'une des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & q \in \{2r, 2r + 1\}. \\ \text{(b)} \quad & r \text{ est impair et } q = 2r + 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Les algèbres $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ pour $\mathcal{V}$ vérifiant la condition (*) ont une structure particulièrement simple et des calculs astucieux permettent d'en déterminer le stabilisateur d'une forme linéaire générique et de conclure en utilisant le lemme 1.

Dans le chapitre 3 (voir également [3]), grâce aux résultats de [4], nous étudions le deuxième cas. On renvoie à [17] et [4] pour les concepts généraux utilisés :

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et Δ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On fixe une base Π de Δ (que l'on notera Δ_{Π}), et on

désigne par Δ_{Π}^+ (resp. Δ_{Π}^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) associé. Si $\alpha \in \Delta_{\Pi}$, $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est le sous-espace radiciel associé à α . On pose

$$\mathfrak{n}^{\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\Pi}^{\pm}} \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad \mathfrak{b}^{\pm} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^{\pm}.$$

Pour Π' une partie de Π , on désigne par $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{b}^+$ et les $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\alpha \in \Pi'$: c'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et toutes les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ sont à conjugaison près obtenues ainsi.

Une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ est dite de Frobenius s'il existe une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\mathfrak{g}(g) = \{0\}$. De manière équivalente, cela revient à demander que l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ admette une orbite coadjointe ouverte. Lorsque $\mathfrak{g}$ est de type G_2, F_4, E_7 ou E_8 , la sous-algèbre de Borel associée est une algèbre de Frobenius. Dans ce cas, on ramène l'étude de la stabilité au cas connexe (la notion de connexité est relative au diagramme de Dynkin) qui nous sera utile pour la suite, à l'aide du résultat suivant :

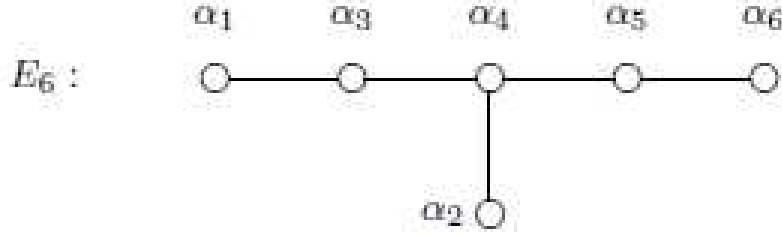
Proposition 4. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle et Π', Π'' deux parties non liées de Π , i.e. α est orthogonal à β , pour tout $(\alpha, \beta) \in \Pi' \times \Pi''$. On suppose que la sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ est de Frobenius. Si $\mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}^+$ est stable alors $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ et $\mathfrak{p}_{\Pi''}^+$ le sont.*

Pour ce qui concerne les sous-algèbres paraboliques minimales dans le cas considéré, la démonstration du théorème 3 se base sur un lemme qui nous a été suggéré par Duflo dont l'énoncé est le suivant :

Lemme 5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre algébrique. On suppose que $\mathfrak{b}$ est une algèbre de Frobenius et que $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b} = 1$. Soit $\lambda \in \mathfrak{b}^*$ une forme régulière et $h \in \mathfrak{b}$ l'unique élément tel que $h \cdot \lambda = -\lambda$. Alors si $\text{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} h = \text{Id}$, $\mathfrak{g}$ n'est pas stable.*

Notons ici que les sous-algèbres paraboliques minimales considérées sont d'indice 1 et de rang nul.

Le cas E_6 est le seul cas pour lequel la sous-algèbre de Borel associée n'est pas une algèbre de Frobenius. D'après [4], $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est l'unique sous-algèbre parabolique minimale non quasi-réductive. Un calcul direct permet de calculer le stabilisateur d'une forme linéaire générique dans $(\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+)^*$ et de conclure en utilisant le lemme 1.



Pour ce qui concerne les sous-algèbres paraboliques non minimales, on ramène l'étude de la stabilité de ces sous-algèbres au même problème pour des paraboliques d'une algèbre de Lie simple orthogonale ou bien d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_k , $k = 6, 7$ (voir démonstration de la proposition 16). Ainsi et compte tenu des résultats du chapitre 2, le cas E_7 se déduit du cas E_6 puis le cas E_8 du cas E_7 .

Compte tenu de ce qui précède et des résultats de [4] concernant la classification des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles qui sont quasi-réductives, la démonstration du théorème 3 dans le cas des sous-algèbres paraboliques non minimales se base sur le résultat suivant :

Proposition 6. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_6 et $\Pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$ (resp. $\Pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$) une partie de Π . Alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est non stable.*

Enfin, on donne des exemples permettant au lecteur d'illustrer la démonstration du théorème précédent dans ce dernier cas. Notons qu'on peut utiliser des calculs explicites effectués avec le logiciel GAP4 pour vérifier quelques résultats dans ce chapitre.

Nous espérons pouvoir étudier la question de la stabilité pour les sous-algèbres biparaboliques (qui ne sont pas des paraboliques) des algèbres de Lie simples, qui reste ouverte.

Références bibliographiques

- [1] N. H. AHN – « Algebraic groups with square-integrable representations », Bull. Amer. Math. Society **80** (1974), p. 539–542. [2](#)
- [2] K. AMMARI – « Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n)$ », J. Lie Theory **24** (2013), p. 97–122. [4](#)
- [3] —, « Stabilité des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles », à paraître dans Bull. Sci. Math (<http://dx.doi.org/10.1016/j.bulsci.2013.09.001>.) (2013). [4](#)
- [4] K. BAUR et A. MOREAU – « Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras in reductive Lie algebras », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 2, p. 417–451. [3](#), [4](#), [5](#), [6](#)
- [5] J. DIXMIER – Enveloping algebras, Graduate Studies in Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Revised reprint of the 1977 translation. [1](#)
- [6] M. DUFLO – « Construction de représentations unitaires d’un groupe de Lie », Harmonic Analysis and Group Representations (A. F. Talamanca, éd.), CIME, 1980, Liguori Editori, Napoli, 1982, p. 129–221. [2](#)
- [7] —, « Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques », Acta. Math. **149** (1982), p. 153–213. [2](#)
- [8] M. DUFLO, M. S. KHALGUI et P. TORASSO – « Algèbres de Lie quasi-réductives », Transformation Groups **17** (2012), no. 2, p. 417–470. [2](#), [3](#), [4](#)
- [9] M. DUFLO et M. VERGNE – « Une propriété de la représentation co-adjointe d’une algèbre de Lie », C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **268** (1969), p. A583–A585. [3](#)
- [10] A. JOSEPH – « A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra », J. Algebra **48** (1977), no. 2, p. 241–289. [2](#)

- [11] A. A. KIRILLOV – « Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents », *Uspehi Mat. Nauk* **17** (1962), p. 57–110, en Russe. [1](#), [2](#)
- [12] — , « Characters of unitary representations of Lie groups. », *Funct. Anal. Appl.* **2** (1968), p. 40–55. [1](#), [2](#)
- [13] Y. KOSMANN et S. STERNBERG – « Conjugaison des sous-algèbres d’isotropie », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **279** (1974), p. 777–779. [1](#)
- [14] B. KOSTANT – « The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group », preprint arXiv :1101.5382 (2011). [2](#)
- [15] D. I. PANYUSHEV – « An extension of Raïs’ theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 3, p. 693–715. [3](#)
- [16] P. TAUVEL et R. W. T. YU – « Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie », *J. Algebra* **273** (2004), no. 2, p. 507–516. [1](#), [3](#)
- [17] — , *Lie algebras and algebraic groups*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005. [4](#)

Chapitre I

Définitions et résultats généraux

1 Définitions - Préliminaires

Dans toute la suite et sauf mention du contraire, $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Les algèbres de Lie considérées sont définies et de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et $\mathbf{G}$ un groupe de Lie algébrique affine connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On munit $\mathfrak{g}^*$, l'espace dual de $\mathfrak{g}$, des actions coadjointes de $\mathfrak{g}$ et de $\mathbf{G}$. Étant donnée une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}(g)$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$. On identifie $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$, où $\mathfrak{z}$ désigne le centre de $\mathfrak{g}$, avec son image dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

1.1 Indice d'une algèbre de Lie

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ son dual. On fait opérer $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$ au moyen de la représentation coadjointe. Ainsi, si $X, Y \in \mathfrak{g}$ et $g \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$(X.g)(Y) = g([Y, X]).$$

Avec les notations précédentes, on définit une forme bilinéaire alternée Φ_g sur $\mathfrak{g}$ par :

$$\Phi_g(X, Y) = g([X, Y]).$$

Le noyau de Φ_g est égal à $\mathfrak{g}(g)$. L'entier

$$\text{ind}(\mathfrak{g}) = \inf\{\dim \mathfrak{g}(g); g \in \mathfrak{g}^*\}$$

est appelé l'indice de $\mathfrak{g}$.

L'indice de $\mathfrak{g}$ est donc la dimension minimale des stabilisateurs dans $\mathfrak{g}$ d'un élément de $\mathfrak{g}^*$ pour l'action coadjointe. Il a été introduit par Dixmier dans [4] pour son importance dans la théorie

des représentations et la théorie des orbites. Le problème du calcul de l'indice apparaît également dans la théorie des invariants. En effet, si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie algébrique d'un groupe algébrique G , l'indice de $\mathfrak{g}$ est le degré de transcendance du corps des fractions rationnelles G -invariantes sur $\mathfrak{g}^*$.

Remarque Lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réductive, $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ sont isomorphes et l'indice de $\mathfrak{g}$ est égal au rang de $\mathfrak{g}$. L'étude de l'indice n'a donc d'intérêt que pour les algèbres de Lie non réductives. Il y a au moins deux grandes familles de sous-algèbres non réductives d'une algèbre de Lie semi-simple dont on cherche à étudier l'indice : *a*) les sous-algèbres paraboliques et "assimilées" (radical unipotent, sous-algèbres biparaboliques, etc) ; *b*) les centralisateurs d'un élément nilpotent. Des résultats concernant les algèbres de type *a*) ont été obtenus par Tauvel et Yu (voir [19]), Dvorsky (voir [9]), Dergachev et Kirillov (voir [3]), Elashvili (voir [10]) et Panyushev (voir [15]), etc. Concernant les algèbres de type *b*) voir par exemple [14], [16], [21].

Définition Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite régulière si son orbite coadjointe $G.g$ est de dimension maximale ou si, de manière équivalente, son stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$ est de dimension minimale.

Remarque - Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est régulière si la dimension de son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ pour l'action coadjointe est égale à l'indice de $\mathfrak{g}$.

- Si $g \in \mathfrak{g}^*$ est régulière, son stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$ est algébrique abélienne (voir [8]).
- Il est bien connu que l'ensemble $\mathfrak{g}_{reg}^*$ des éléments réguliers de $\mathfrak{g}^*$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^*$ (voir par exemple [19]).

1.2 Formes fortement régulières

Définition Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et G un groupe algébrique d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite fortement régulière si elle est régulière, auquel cas $\mathfrak{g}(g)$ est une algèbre de Lie commutative (voir [8]), et si de plus le tore j_g , unique facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$, est de dimension maximale lorsque g parcourt l'ensemble des formes régulières.

Cette définition est due à Duflo (voir [6]).

Remarque Il est bien connu que l'ensemble des formes fortement régulières, noté $\mathfrak{g}_r^*$, est un ouvert de Zariski G -invariant non vide de $\mathfrak{g}^*$.

Les tores j_g , $g \in \mathfrak{g}_r^*$ sont appelés les sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$. Ils sont deux à deux conjugués sous l'action du groupe adjoint connexe de $\mathfrak{g}$.

Les deux résultats de la remarque précédente sont énoncés sans démonstration dans [5] (pour la démonstration voir [2]).

Définition Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$. On appelle rang de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ et on note $\text{rang } \mathfrak{g}$ la dimension commune de ses sous-algèbres de Cartan-Duflo.

Si G est un groupe algébrique affine, on note par ${}^u G$ son radical unipotent, ${}^u \mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de ${}^u G$. Rappelons que G admet une décomposition dite de Levi : il existe un sous-groupe réductif de $R \subset G$, appelé sous-groupe de Levi de G , dont la classe de conjugaison modulo ${}^u G$ est uniquement déterminée, tel que $G = R {}^u G$. Au niveau des algèbres de Lie, on a la décomposition de Levi $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus {}^u \mathfrak{g}$. On dit que $\mathfrak{r}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{g}$ et que ${}^u \mathfrak{g}$ est son radical unipotent.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique sur $\mathbb{K}$, $\mathfrak{n}$ un idéal de $\mathfrak{g}$ contenu dans ${}^u \mathfrak{g}$, $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme linéaire fortement régulière, n la restriction de g à $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{h}$ le stabilisateur de n dans $\mathfrak{g}$ et h la restriction de g sur $\mathfrak{h}$.

Lemme 2. (Voir [6, I.16]) *On garde les notations précédentes. Alors, on a*

- (i) $\exp(\mathfrak{n}(n)).g = g + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n})^\perp$.
- (ii) $\mathfrak{h}(h) = \mathfrak{g}(g) + \mathfrak{n}(n)$.

3 Algèbres de Lie quasi-réductives

Rappelons que le corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos de caractéristique nulle.

3.1 Définitions

Si G est un groupe algébrique, on désigne par $Z_{\mathfrak{g}}$ ou plus simplement Z le centralisateur dans G de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie de Z est le centre $\mathfrak{z}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G .

Définition Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique. Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est dite de type réductif si le radical unipotent de $\mathfrak{g}(g)$ est central dans $\mathfrak{g}$.

Définition Une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ est dite quasi-réductive si elle possède une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ qui soit de type réductif.

Remarque Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et $\mathfrak{z}$ son centre. Comme $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{g}(g)$ pour tout $g \in \mathfrak{g}^*$, une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est de type réductif si et seulement si ${}^u(\mathfrak{g}(g)) = {}^u \mathfrak{z}$ et, dans ce

Chapitre I. Définitions et résultats généraux

cas, $\mathfrak{g}(g)$ possède un unique facteur réductif, que l'on note $\mathfrak{r}_{\mathfrak{g}}$.

Si une forme linéaire g est de type réductif, il en est de même de toutes celles qui sont contenues dans son orbite sous l'action coadjointe de $\mathbf{G}$: l'orbite sous $\mathbf{G}$ d'une telle forme est dite de type réductif.

On voit alors qu'une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est de type réductif si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(g)/\mathbf{Z} &\text{ est réductif ,} \\ \mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z} &\text{ est réductive ,} \\ {}^u(\mathbf{G}(g)) &\subset \mathbf{Z}, \\ {}^u(\mathfrak{g}(g)) &\subset \mathfrak{z}, \end{aligned} \tag{I.1}$$

où avec les notations précédentes, ${}^u(\mathbf{G}(g))$ désigne le radical unipotent du stabilisateur $\mathbf{G}(g)$ et $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathfrak{g}$ dans $\mathbf{G}$.

La notion de quasi-réductivité a été introduite et étudiée par Duflo, Khalgui et Torasso (voir [7]) pour son importance dans la théorie des représentations. C'est un fait expérimental que l'étude des formes linéaires de type réductif intervient dans la théorie des représentations. Par exemple, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ toute représentation unitaire irréductible de carré intégrable est associée à une orbite coadjointe de type réductif (voir [6]).

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique, on désigne par $\mathfrak{g}_{red}^*$ le sous-ensemble de $\mathfrak{g}^*$ constitué des formes linéaires de type réductif.

Remarque Si $\mathfrak{g}$ est réductive, $0 \in \mathfrak{g}^*$ est de type réductif et $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{g}$. De plus si l'on identifie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ au moyen d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante, les formes de type réductif (resp. régulières de type réductif) sont celles qui s'identifient aux éléments semi-simples (resp. semi-simples réguliers de $\mathfrak{g}$).

Lemme 4. (Voir [7]) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique quasi-réductive et $\mathfrak{z}$ son centre. Alors :

- (i) L'ensemble des formes fortement régulières sur $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des $g \in \mathfrak{g}^*$ telles que $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{j} \oplus {}^u\mathfrak{z}$, avec $\mathfrak{j}$ un tore. En particulier, l'ouvert de Zariski $\mathfrak{g}_r^*$ est contenu dans $\mathfrak{g}_{red}^*$.
- (ii) L'ensemble des formes fortement régulières est égal à l'ensemble des formes régulières de type réductif.
- (iii) Si $g \in \mathfrak{g}_{red}^*$, tout tore maximal de $\mathfrak{g}(g)$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$.

Lemme 5. (Voir [7]) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive.
- (ii) Il existe $g \in \mathfrak{g}^*$ une forme régulière et de type réductif.

Remarque Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, les formes fortement régulières sont de type réductif, on voit donc que $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si et seulement si $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{rang } \mathfrak{g} + \dim {}^u\mathfrak{z}$

5.1 Exemples

Dans ce numéro, nous donnons quelques exemples d'algèbres de Lie quasi-réductives et de formes de type réductif pour illustrer ces deux notions :

- Une algèbre de Lie algébrique réductive $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive (voir la remarque 3.1).
- Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme symplectique B et $\mathfrak{h}_V$ l'algèbre de Heisenberg construite sur V : $\mathfrak{h}_V = V \oplus \mathbb{K}z$, $\mathfrak{z} = {}^u\mathfrak{z} = \mathbb{K}z$ est le centre de $\mathfrak{h}_V$ et si $v, w \in V$, leur crochet est donné par $[v, w] = B(v, w)z$. Alors $\mathfrak{h}_V$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, les formes linéaires de type réductif sont celles dont la restriction au centre est non nulle et pour toute forme linéaire de type réductif g , on a $\mathfrak{r}_g = 0$.
- Toute algèbre de Lie algébrique préhomogène (i.e. qui possède une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{z}_g$) est quasi-réductive. C'est clair que dans ce cas les formes linéaires de type réductif sont celles qui sont régulières et de plus elles sont toutes fortement régulières.

6 Algèbres de Lie stables

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ son dual. Si $\mathfrak{a}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$, on note $\mathfrak{a}^\perp$ son orthogonal dans $\mathfrak{g}^*$.

6.1 Caractérisation algébrique des formes linéaires stables

Soient $\text{Aut } \mathfrak{g}$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{g}$ et $\mathbf{L}$ un sous-groupe algébrique de $\text{Aut } \mathfrak{g}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}$. Le groupe $\mathbf{L}$ opère rationnellement sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$. Pour $\alpha \in \mathbf{L}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ et $x \in \mathfrak{g}$, on a $\alpha.f(x) = f(\alpha^{-1}(x))$. La différentielle de cette opération définit une action de $\mathfrak{l}$ sur $\mathfrak{g}^*$; si $X \in \mathfrak{l}$, on a $(X.f)(x) = -f(X(x))$. Si $\mathbf{L}$ contient le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, alors $\text{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{g} \subset \mathfrak{l}$, donc $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{l}(f)$.

Définition On dit que $f \in \mathfrak{g}^*$ est $\mathbf{L}$ -stable s'il existe un voisinage W de f dans $\mathfrak{g}^*$ tel que, pour tout $g \in W$, les stabilisateurs $\mathfrak{g}(f)$ et $\mathfrak{g}(g)$ soient $\mathbf{L}$ -conjugués. Si $\mathbf{L}$ est le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$ (resp. si $\mathbf{L} = \text{Aut}\mathfrak{g}$), une forme $\mathbf{L}$ -stable est dite stable (resp. faiblement stable).

Définition Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite "stable" si elle admet une forme linéaire stable.

La notion de stabilité a été introduite par Kosmann et Sternberg dans [12]. Il est clair qu'une forme linéaire stable est régulière. Ainsi, l'étude des formes linéaires stables intervient dans le problème de calcul de l'indice (voir par exemple [19]).

Théorème 7. (voir [20]) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$.

- (i) Si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique, f est stable si et seulement si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(f)] \cap \mathfrak{g}(f) = \{0\}$.
- (ii) Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(f)] \cap \mathfrak{g}(f) = \{0\}$, f est $\mathbf{L}$ -stable pour tout sous-groupe algébrique de $\text{Aut}\mathfrak{g}$ vérifiant $\text{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g} \subset \text{Lie}(\mathbf{L})$, où $\text{Lie}(\mathbf{L})$ désigne l'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{L}$, donc en particulier si $\mathbf{L}$ contient le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$.

Remarque Le résultat précédent est établi dans [12] d'une manière différente.

Remarque Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique, elle est ad-algébrique. Ainsi, l'assertion (i) du théorème précédent est une caractérisation des formes linéaires stables dans le cas algébrique. De plus, il est clair d'après cette caractérisation que lorsque l'algèbre de Lie est stable, l'ensemble des formes linéaires stables, que l'on note $\mathfrak{g}_s^*$, est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^*$.

7.1 Exemples

- Les sous-algèbres de Borel d'une algèbre de Lie simple sont toutes stables. En effet, Tauvel et Yu (voir [18]) ont construit à l'aide des cascades de Kostant (voir chapitre 3) une forme linéaire sur une sous-algèbre de Borel d'une algèbre de Lie simple dont le stabilisateur est inclus dans une sous-algèbre de Cartan et il est clair d'après la caractérisation précédente qu'une telle forme est stable.

- L'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{K}^2$ est une algèbre de Lie stable (voir ci-après).

Remarque Beaucoup d'algèbres de Lie unipotentes ne sont pas quasi-réductives, mais le premier exemple d'algèbre de Lie unipotente non stable est donné dans [12].

8 Relation entre la stabilité et la quasi-réductivité

Lemme 9. *Une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ est régulière de type réductif si, et seulement si, la sous-algèbre $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$ est un tore de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Si $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$ est un tore de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, on a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) = \{0\}$ de sorte que, compte tenu de l'assertion (i) du théorème 7, g est une forme linéaire stable sur $\mathfrak{g}$ et donc elle est régulière. De plus, il est clair que g est de type réductif.

Réciproquement, si g est régulière et de type réductif, alors la sous-algèbre $\mathfrak{g}(g)$ est commutative, d'après [8]. Il est alors bien connu (voir par exemple [20, Théorème 20.5.10]) que l'image de $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ par la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre réductive si, et seulement si, elle est formée d'éléments semi-simples. Ainsi, $\mathfrak{g}(g)/\mathfrak{z}$ est une sous-algèbre commutative et formée d'éléments semi-simples. D'où le résultat. $\square$

Lemme 10. *(voir par exemple [7]) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, l'ensemble des formes linéaires régulières de type réductif sur $\mathfrak{g}$ est l'ensemble des formes linéaires stables, et c'est un ouvert dense de $\mathfrak{g}^*$.*

En particulier, une algèbre de Lie quasi-réductive possède une forme linéaire stable.

Remarque IL résulte des assertions (i) et (ii) du lemme 4 que si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quasi-réductive, l'ensemble des formes fortement régulières est exactement l'ensemble des $g \in \mathfrak{g}^*$ telles que $\mathfrak{g}(g) = \mathfrak{j} \oplus {}^u\mathfrak{z}$, avec $\mathfrak{j}$ un tore et $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. Il est alors clair que ces formes linéaires sont stables. Par suite, il résulte que toute algèbre de Lie quasi-réductive est stable. Cependant, il existe des algèbres de Lie stables qui ne sont pas quasi-réductives.

Exemple 11. *Voici un exemple d'algèbre de Lie stable qui n'admet aucune forme linéaire de type réductif.*

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie produit semi-direct de $\mathfrak{so}(2)$ par $\mathbb{K}^2$ de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathbb{K}^2$, le crochet étant donné par

$$[tW + v, zW + v'] = tW.v' - zW.v, \quad t, z \in \mathbb{K}, \quad v, v' \in \mathbb{K}^2,$$

où $\mathfrak{so}(2) = \mathbb{K}W$, avec $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie aisément que le centre de $\mathfrak{g}$ est trivial. Par suite, $\mathfrak{g}$ est quasi-réductive si et seulement si $\text{ind } \mathfrak{g} = \text{rang } \mathfrak{g}$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^$, n la restriction de g au radical unipotent ${}^u\mathfrak{g} = \mathbb{K}^2$ de $\mathfrak{g}$. On suppose que $n \neq 0$.*

Chapitre I. Définitions et résultats généraux

Alors, on a $X = tW + v \in \mathfrak{g}(g)$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{K}$ et $v' \in \mathbb{K}^2$, $\langle n, tW.v' - zW.v \rangle = 0$.

Faisant $z = 0$, on voit que si $X \in \mathfrak{g}(g)$, alors pour tout $v' \in \mathbb{K}^2$, on a

$$t \langle n, W.v' \rangle = 0.$$

Il suit alors de ce qui précède que

$$X = tW + v \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } t = 0 \text{ et } \langle n, zW.v \rangle = 0 \text{ pour tout } z \in \mathbb{K}.$$

Par suite, $\mathfrak{g}(g) = (W.n)^\perp \subset {}^u\mathfrak{g}$. Ceci montre que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est non quasi-réductive.

D'autre part, soit $O = \{n \in ({}^u\mathfrak{g})^* / \langle n, e_1 \rangle^2 + \langle n, e_2 \rangle^2 \neq 0\}$, avec (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On vérifie aisément que O est un ouvert de Zariski non vide. Si $n, n' \in O$, il existe $k \in \mathbf{SO}(2)$ tel que $k.n = n'$. Ceci montre que $\mathfrak{g}$ est stable.

Remarque - Toutes les sous-algèbres de Borel d'une algèbre de Lie simple sont quasi-réductives (Kostant [13], non publié, voir [11]).

- Les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple $\mathfrak{s}$ de type A et C sont quasi-réductives d'après un résultat de Panyushev (voir [17]). Par contre, ceci n'est plus vrai pour les sous-algèbres paraboliques pour $\mathfrak{s} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ avec $n \geq 7$. D'une part, Panyushev dans [17] et Dvorsky dans [9] présentent de nombreux exemples de sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives. D'autre part, Tauvel et Yu dans [19] ont montré qu'il existe des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui ne sont pas quasi-réductives. Récemment, Duflo, Khalgui et Torasso ont donné une caractérisation des sous-algèbres de Lie paraboliques de $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K})$ qui sont quasi-réductives (voir [7]). De plus, les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle $\mathfrak{s}$ ne sont pas toujours quasi-réductives. Dans [1], Baur et Moreau ont terminé la classification des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives dans le cas des algèbres de Lie simples.

12 Conjecture de Panyushev

On dit que l'action coadjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}^*$, qu'on note $(\mathfrak{g} : \mathfrak{g}^*)$, admet un stabilisateur générique stationnaire s'il existe un ouvert $\Omega \subset \mathfrak{g}^*$ tel que, pour tout $g, f \in \Omega$, les stabilisateurs $\mathfrak{g}(f)$ et $\mathfrak{g}(g)$ soient conjugués sous l'action de $\mathbf{G}$. Le stabilisateur $\mathfrak{g}(g)$, pour $g \in \Omega$,

est dit stabilisateur générique stationnaire. Dans son article "An extension of Raïs' theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras", Panyushev conjecture le résultat suivant :

Conjecture 13. *Soient $\mathfrak{s}$ une algèbre de Lie simple et $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre biparabolique de $\mathfrak{s}$. Alors*

Si l'action $(\mathfrak{g} : \mathfrak{g}^)$ admet un stabilisateur générique stationnaire, alors ce stabilisateur est un tore.*

Comme toute algèbre de Lie quasi-réductive admet une forme linéaire stable dont le stabilisateur est un tore modulo son centre. On peut alors reformuler cette conjecture comme suit : *une sous-algèbre de Lie biparabolique est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.*

Remarque - Plus généralement, les sous-algèbres biparaboliques forment une classe très intéressante (incluant la classe des sous-algèbres paraboliques et de Levi) d'algèbres de Lie qui ne sont pas toutes réductives.

- Dans [7], Duflo, Khalgui et Torasso, ont posé également la question de savoir l'équivalence entre la stabilité et la quasi-réductivité dans le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple.

14 Réduction au cas de rang nul

Nous allons maintenant énoncer le résultat suivant qui permet de ramener l'étude de la stabilité des algèbres de Lie algébriques aux algèbres de Lie algébriques de rang nul.

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$. On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \oplus [\mathfrak{j}, \mathfrak{g}]$, où $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ désigne le centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$. On identifie le dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ à l'orthogonal de $[\mathfrak{j}, \mathfrak{g}]$ dans $\mathfrak{g}^*$ qui n'est autre que $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$, l'ensemble des point fixes de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}^*$.

Proposition 15. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique, $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ le centralisateur de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors*

$$\mathfrak{g} \text{ est stable si et seulement si } \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} \text{ est stable .}$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique admettant des formes stables. Alors l'ensemble $\mathfrak{g}_s^*$ des formes stables est un ouvert de Zariski non vide. Par suite, $\mathfrak{g}_s^* \cap \mathfrak{g}_r^*$ est un ouvert de Zariski non vide, où $\mathfrak{g}_r^*$ est l'ouvert de Zariski des formes fortement régulières.

Chapitre I. Définitions et résultats généraux

Soit $g \in \mathfrak{g}_s^* \cap \mathfrak{g}_r^*$ et $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}(g)$ le facteur réductif de $\mathfrak{g}(g)$. Alors $g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ et g est une forme stable dans $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. En effet :

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}(g) = \mathfrak{g}(g) \text{ et } [\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}, \mathfrak{g}(g)] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)].$$

Réciproquement, soit $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et supposons que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ admette des formes stables. Alors $(\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}})_s \cap \mathfrak{g}_r^*$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$. Soit $g \in (\mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}})_s \cap \mathfrak{g}_r^*$. Alors on a

$$\mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] = \mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)]^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}, \mathfrak{g}(g)] = \{0\},$$

de sorte que g est stable pour $\mathfrak{g}$. D'où la proposition □

Corollaire 16. *Soit maintenant $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ l'idéal orthogonal de $\mathfrak{j}$ pour la forme $(X, Y) \mapsto \text{tr}(XY)$. Alors $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$ et il est clair que $g \in \mathfrak{g}^{*\mathfrak{j}}$ est une forme stable si et seulement si $g' = g|_{\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}}$ est une forme stable pour $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$.*

Il suit de ce qui précède que

$$\mathfrak{g} \text{ est stable si et seulement si } \mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1} \text{ est stable}$$

Remarque Comme $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j},1}$ est de rang nul, on se ramène donc à étudier la stabilité pour les algèbres de Lie de rang nul.

Références bibliographiques

- [1] K. BAUR et A. MOREAU – « Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras in reductive Lie algebras », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **61** (2011), no. 2, p. 417–451. [16](#)
- [2] J.-Y. CHARBONNEL – « Sur les orbites de la représentation coadjointe. », *Compositio Math.* **46** (1982), p. 273–305. [11](#)
- [3] V. DERGACHEV et A. KIRILLOV – « Index of Lie algebras of seaweed type », *J. Lie Theory* **10** (2000), no. 2, p. 331–343. [10](#)
- [4] J. DIXMIER – *Enveloping algebras*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 11, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, Revised reprint of the 1977 translation. [9](#)
- [5] M. DUFLO – « Construction de représentations unitaires d’un groupe de Lie », *Harmonic Analysis and Group Representations* (A. F. Talamanca, éd.), CIME, 1980, Liguori Editori, Napoli, 1982, p. 129–221. [11](#)
- [6] — , « Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques », *Acta. Math.* **149** (1982), p. 153–213. [10](#), [11](#), [12](#)
- [7] M. DUFLO, M. S. KHALGUI et P. TORASSO – « Algèbres de Lie quasi-réductives », *Transformation Groups* **17** (2012), no. 2, p. 417–470. [12](#), [15](#), [16](#), [17](#)
- [8] M. DUFLO et M. VERGNE – « Une propriété de la représentation co-adjointe d’une algèbre de Lie », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **268** (1969), p. A583–A585. [10](#), [15](#)
- [9] A. DVORSKY – « Index of parabolic and seaweed subalgebras of $\mathfrak{so}_n$ », *Linear Algebra Appl.* **374** (2003), p. 127–142. [10](#), [16](#)
- [10] A. ELASHVILI – « On the index of parabolic subalgebras of semisimple lie algebras », preprint (1990). [10](#)
- [11] A. JOSEPH – « A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra », *J. Algebra* **48** (1977), no. 2, p. 241–289. [16](#)

Références bibliographiques

- [12] Y. KOSMANN et S. STERNBERG – « Conjugaison des sous-algèbres d’isotropie », C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **279** (1974), p. 777–779. [14](#)
- [13] B. KOSTANT – « The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group », preprint arXiv :1101.5382 (2011). [16](#)
- [14] A. MOREAU – « Indice du normalisateur du centralisateur d’un élément nilpotent dans une algèbre de Lie semi-simple », Bull. soc. Math. France **134** (2006), no. 1, p. 83–117. [10](#)
- [15] D. I. PANYUSHEV – « Inductive formulas for the index of seaweed Lie algebras », Mosc. Math. J. **1** (2001), no. 2, p. 221–241, 303. [10](#)
- [16] — , « The index of a Lie algebra, the centralizer of a nilpotent element, and the normalizer of the centralizer », Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), no. 1, p. 41–59. [10](#)
- [17] — , « An extension of Raïs’ theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 3, p. 693–715. [16](#)
- [18] P. TAUVEL et R. W. T. YU – « Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie », J. Algebra **273** (2004), no. 2, p. 507–516. [14](#)
- [19] — , Lie algebras and algebraic groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005. [10](#), [14](#), [16](#)
- [20] — , « Sur l’indice de certaines algèbres de Lie », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2005), no. 6, p. 1793–1810. [14](#), [15](#)
- [21] O. S. YAKIMOVA – « The index of centralizers of elements in classical Lie algebras », Funktsional. Anal. i Prilozhen. **40** (2006), no. 1, p. 52–64, 96. [10](#)

Chapitre II

Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

1 Cas des algèbres de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$

On garde les notations du chapitre précédent. Rappelons le résultat suivant pour la stabilité et qui nous sera utile pour la suite :

Lemme 2. *Soit f un élément de $\mathfrak{g}^*$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie algébrique,*

$$f \text{ est stable si et seulement si } [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(f)] \cap \mathfrak{g}(f) = \{0\}.$$

Dans [1], Duflo, Khalgui et Torasso constatent que la classification des sous-algèbres paraboliques quasi-réductives des algèbres de Lie simples classiques se ramène à déterminer parmi les algèbres de Lie qui stabilisent une forme bilinéaire alternée de rang maximal et un drapeau en position générique, celles qui sont quasi-réductives. Le but de ce numéro est de caractériser parmi ces sous-algèbres celles qui sont stables.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et soit

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau de V . On désigne par $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(V)$ constituée des endomorphismes qui laissent invariant $\mathcal{V}$ et par $\mathbf{Q}_{\mathcal{V}}$ le sous-groupe algébrique connexe de $\mathbf{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$.

Définition Soient V un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de V et ξ une forme bilinéaire alternée sur V . On dit que le drapeau $\mathcal{V}$ est générique relativement à ξ ou que la forme ξ est générique

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

relativement à $\mathcal{V}$, si pour $1 \leq i \leq t$, la restriction de ξ à V_i est de rang maximum, à savoir $2[\frac{1}{2} \dim V_i]$, et $V_i^{\perp_\xi} \cap V_{i-1} = \{0\}$ où $V_i^{\perp_\xi}$ désigne l'orthogonal de V_i dans V relativement à ξ .

Définition Soient V un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $b = (e_1, \dots, e_r)$ une base de V et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau de V . On dit que la base b est adaptée au drapeau $\mathcal{V}$, si pour tout $1 \leq i \leq t$ l'espace V_i est engendré par la famille $(e_1, \dots, e_{\dim V_i})$.

Lemme 3. (Voir [1, Lemme 4.2.1]) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de V . Alors*

(i) *une forme $\xi \in \bigwedge^2 V^*$ est générique relativement à $\mathcal{V}$, si et seulement s'il existe une base $e_1, \dots, e_r$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que, notant $e_1^*, \dots, e_r^*$ la base duale, on ait $\xi = \sum_{1 \leq 2i \leq r} e_{2i-1}^* \wedge e_{2i}^*$.*

(ii) *l'ensemble des formes bilinéaires alternées ξ sur V qui sont génériques relativement à $\mathcal{V}$ est une orbite ouverte sous l'action de $\mathbf{Q}_{\mathcal{V}}$ dans $\bigwedge^2 V^*$.*

Définition Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau. On note $h = h(\mathcal{V})$ le nombre d'indices i tels que $1 \leq i \leq t-1$ et $\dim V_i$ et $\dim V_{i+1}$ soient tous deux impairs. On dit que le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$, si deux espaces consécutifs de la suite $\mathcal{V}$ ne peuvent être tous deux de dimension impaire, c'est à dire $h(\mathcal{V}) = 0$.

Définition Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de V . On dit que le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$, si, pour $1 \leq i \leq t-1$, entre deux sous-espaces consécutifs V_i et V_{i+1} le saut de dimension est 2 s'ils sont tous deux de dimension impaire et 1 sinon.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal. On désigne par $\mathfrak{gl}(V)(\xi)$ l'annulateur de ξ dans $\mathfrak{gl}(V)$. Lorsque ξ est symplectique, $\mathfrak{gl}(V)(\xi)$ est noté $\mathfrak{sp}(V, \xi)$ ou simplement $\mathfrak{sp}(V)$ et c'est l'algèbre de Lie du groupe symplectique correspondant. On se donne un drapeau $\mathcal{V}$ de V générique relativement à ξ et on désigne par $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)(\xi)$ constituée des endomorphismes stabilisant $\mathcal{V}$ qui est aussi la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}(\xi)$ de $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ stabilisant ξ .

Proposition 4. (Voir [1, Proposition 5.3.1]) *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq$*

$\cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V$ un drapeau générique relativement à ξ .

(a) Supposons que $\dim V$ est pair, de sorte que ξ est symplectique. Alors,

(i) on a $\text{ind}(\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}) = \sum_{i=1}^t [\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})]$,

(ii) la dimension du radical unipotent d'un stabilisateur générique de la représentation coadjointe de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est $h(\mathcal{V})$,

(iii) l'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

(b) Supposons que $\dim V$ est impair et désignons par $\mathcal{V}'$ le drapeau du sous-espace V_{t-1} obtenu en supprimant l'espace V du drapeau $\mathcal{V}$. Alors,

(iv) on a

$$\text{ind}(\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^t [\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})] - 1 & \text{si } \dim V_{t-1} < \dim V - 1, \\ \sum_{i=1}^t [\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})] + 1 & \text{si } \dim V_{t-1} = \dim V - 1, \end{cases}$$

(v) La dimension du radical unipotent d'un stabilisateur générique de la représentation coadjointe de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est $h(\mathcal{V}')$.

(vi) L'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}'$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Remarque Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau générique relativement à ξ .

Supposons qu'il existe un sous-espace V_i du drapeau $\mathcal{V}$ tel que $\dim V_i$ soit pair. Alors ξ induit une forme symplectique sur le sous-espace $U = V_i$ de sorte que V est somme directe de U et de son orthogonal W relativement à ξ . On désigne par $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{W}$) le drapeau $\mathcal{U} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{i-1} \subsetneq V_i = U\}$ (resp. $\mathcal{W} = \{\{0\} = W_0 \subsetneq W_1 = V_{i+1} \cap W \subsetneq \cdots \subsetneq V_j = V_{i+j} \cap W \subsetneq \cdots \subsetneq W_{t-i} = W\}$). Comme $\mathcal{V}$ est générique relativement à ξ , il est clair que $\mathcal{U}$ (resp. $\mathcal{W}$) est générique relativement à $\xi|_U$ (resp. $\xi|_W$). Par suite, la sous-algèbre $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ s'identifie au produit direct $\mathfrak{r}_{\mathcal{U}} \times \mathfrak{r}_{\mathcal{W}}$. En particulier, $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive (resp. stable) si et seulement si $\mathfrak{r}_{\mathcal{U}}$ et $\mathfrak{r}_{\mathcal{W}}$ le sont. De plus, on a

$$\text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{U}} + \text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{W}} \quad \text{et} \quad \text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{U}} + \text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{W}}.$$

D'autre part, $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$ si et seulement s'il en est de même de $\mathcal{U}$ et de $\mathcal{W}$.

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

Proposition 5. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau de V générique relativement à ξ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul.
- (ii) $\mathcal{V}$ vérifie la condition (*) et si $\dim V$ est impair, il en est de même de $\dim V_{t-1}$.

Démonstration. D'après la remarque précédente, on se ramène à démontrer la proposition dans l'un des cas suivants :

- $\dim V$ est pair, $t \geq 2$ et pour $1 \leq i \leq t-1$, $\dim V_i$ est un nombre impair,
- $\dim V_i$ impair pour $1 \leq i \leq t$.

On pose $\dim V_i = 2p_i + 1$, $1 \leq i \leq t-1$ et $a_i = \dim V_i - \dim V_{i-1}$, $1 \leq i \leq t$. Alors $a_1 = 2p_1 + 1 = 2q_1 + 1$ est impair et $a_i = 2(p_i - p_{i-1}) = 2(q_i + 1)$, $2 \leq i \leq t-1$ est pair.

On se place dans le premier cas et on pose $\dim V_t = 2p_t$. Alors $a_t = 2(p_t - p_{t-1}) - 1 = 2q_t + 1$ est impair. D'après la proposition 4,

$$\text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^t q_i.$$

Ainsi, $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si $q_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq t$. D'où la proposition dans ce cas. On se place dans le deuxième cas. On pose $\dim V = 2p_t + 1$. Alors $a_t = 2(p_t - p_{t-1}) = 2(q_t + 1)$ est pair. D'après la proposition 4, on a

$$\text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^t q_i.$$

La proposition est alors claire dans ce cas. □

Théorème 6. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire alternée ξ de rang maximal et

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$$

un drapeau générique relativement à ξ .

Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ admet une forme linéaire stable.
- (ii) $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive.

Démonstration. Seule l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) mérite démonstration. D'après la remarque précédente, on se ramène au cas où aucun des éléments du drapeau $\mathcal{V}$, à l'exception de $\{0\}$ et V , est de dimension paire. On pose $d = \dim V$ et $\dim V_i = 2p_i + 1$, $1 \leq i \leq t$, $p_t = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$. On choisit une base $e_1, \dots, e_d$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ et telle que $\xi = \sum_{1 \leq i \leq p_t} e_{2i-1}^* \wedge e_{2i}^*$ et on pose $W_i = \mathbb{K}e_{2p_{i-1}+3} \oplus \mathbb{K}e_{2p_{i-1}+4} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_{2p_i}$, $1 \leq i \leq t$ (on convient que $p_0 = -1$). Alors les W_i , $1 \leq i \leq t$, sont des sous-espaces symplectiques deux à deux orthogonaux et il suit de [1, lemme 26 et paragraphes 5.4, 5.5] que les sous-algèbres de Cartan de $\prod_{1 \leq i \leq t} \mathfrak{sp}(W_i)$ sont des sous-algèbres de Cartan-Duflo de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$.

Soit donc $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\prod_{1 \leq i \leq t} \mathfrak{sp}(W_i)$. Le sous-espace V^0 de V constitué des vecteurs $\mathfrak{j}$ -invariants n'est autre que $(\oplus_{1 \leq i \leq t} W_i)^\perp$. On considère $\mathfrak{gl}(V^0)$ comme une sous-algèbre de $\mathfrak{gl}(V)$ en identifiant un élément $X \in \mathfrak{gl}(V^0)$ avec l'endomorphisme linéaire de V agissant comme X dans V^0 et trivialement dans son supplémentaire $\oplus_{1 \leq i \leq t} W_i$. Alors, on vérifie que le commutant de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{gl}(V)$ est $\mathfrak{j} \oplus \mathfrak{gl}(V^0)$. Il est alors clair que $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{r}_{\mathcal{V}^0}$, où $\mathcal{V}^0$ est la trace du drapeau $\mathcal{V}$ sur le sous-espace V^0 .

D'autre part, remarquons que $\xi_0 = \xi|_{V^0}$ est de rang maximal et $\mathcal{V}^0$ est en position générique par rapport à ξ_0 (i.e $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}^0}$ est de même type que $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$). Compte tenu de la proposition 15 et comme $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}^0}$ est de rang nul, on se ramène à traiter le cas de rang nul pour $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$.

Il s'agit donc de montrer que si $\text{rang} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est nul et $\text{ind} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ est strictement positif, alors $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ n'admet pas de forme stable.

Compte tenu de ce qui précède, il suffit d'étudier les deux cas suivants :

- (a) $\dim V = 2p$, $p \geq 2$ et $\dim V_i = 2i - 1$ pour tout $1 \leq i \leq t - 1$ de sorte que $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_{2p})$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que $V_j = \mathbb{K}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{K}e_{2j-1}$, $1 \leq j \leq p$ et $\xi = \sum_{j=1}^p e_{2j-1}^* \wedge e_{2j}^*$. On note $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2p}$ la base de $\mathfrak{gl}(V)$ canoniquement associée à la base $(e_1, \dots, e_{2p})$ de V .

Dans ces conditions, il résulte de [1, 5.4] que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \mathfrak{l}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}, \quad (\text{II.1})$$

où

$$\mathfrak{l}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{j=1}^p \mathbb{K}H_j, \quad (\text{II.2})$$

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

avec

$$H_j = E_{2j-1,2j-1} - E_{2j,2j},$$

est un facteur réductif de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$, commutatif dans ce cas, et

$$\mathfrak{n}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{j=1}^p \mathbb{K}Z_j \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{p-1} \mathbb{K}T_j \right), \quad (\text{II.3})$$

avec

$$Z_j = 2E_{2j-1,2j} \text{ et } T_j = E_{2j-1,2j+2} + E_{2j+1,2j},$$

est le radical unipotent de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$, également commutatif dans ce cas.

On a alors :

$$\begin{aligned} [H_j, Z_l] &= 2\delta_{l,j}Z_j \\ [H_j, T_l] &= \delta_{l,j}T_j + \delta_{l,j-1}T_{j-1} = (\delta_{j,l} + \delta_{j,l+1})T_l. \end{aligned}$$

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$. On pose $n = g|_{\mathfrak{n}_{\mathcal{V}}}$, $g(Z_j) = \zeta_j$ et $g(T_j) = \tau_j$.

Supposons que $\prod_{j=1}^p \zeta_j \neq 0$. Alors, on a

$$\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{n}_{\mathcal{V}} \text{ et } \mathfrak{g}(g) = \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}(g).$$

Par suite et compte tenu du lemme 2, on a $\mathbf{N}_{\mathcal{V}}.g = g + \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}^{\perp}$, où $\mathbf{N}_{\mathcal{V}}$ désigne le radical unipotent du sous-groupe algébrique connexe $\mathbf{R}_{\mathcal{V}}$ de $\mathbf{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$. Ainsi, on peut supposer que $g|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = 0$.

Soit

$$X = \sum_{i=1}^p z_i Z_i + \sum_{i=1}^{p-1} t_i T_i \in \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}.$$

On a

$$\begin{aligned} [H_1, X] &= 2z_1Z_1 + t_1T_1, \\ [H_i, X] &= 2z_iZ_i + t_iT_i + t_{i-1}T_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq p-1, \\ [H_p, X] &= 2z_pZ_p + t_{p-1}T_{p-1}. \end{aligned}$$

Alors, on a $X \in \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}(g)$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 2\zeta_1 z_1 + \tau_1 t_1 = 0 \\ 2\zeta_i z_i + \tau_i t_i + \tau_{i-1} t_{i-1} = 0, \quad 2 \leq i \leq p-1 \\ 2\zeta_p z_p + \tau_{p-1} t_{p-1} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{K}W_i,$$

avec

$$W_i = T_i - \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{1}{\zeta_i} Z_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}} Z_{i+1} \right) = E_{2i-1, 2i+2} + E_{2i+1, 2i} - \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{1}{\zeta_i} E_{2i-1, 2i} + \frac{1}{\zeta_{i+1}} E_{2i+1, 2i+2} \right).$$

Soit $H = \sum_{i=1}^p H_i$. Alors, on a

$$[H, Z_l] = 2Z_l \quad \text{et} \quad [H, T_l] = 2T_l$$

et donc

$$[H, W_l] = 2W_l, \quad 1 \leq l \leq p-1.$$

Il en résulte que

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Compte tenu du lemme 2 et du fait que g est générique, il résulte que $\mathfrak{g}$ n'admet pas de forme linéaire stable.

(b) $\dim V = 2p + 1$, $p \geq 2$ et $\dim V_i = 2i - 1$ pour tout $1 \leq i \leq t - 1$ de sorte que $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$. On choisit une base $(e_1, \dots, e_{2p+1})$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que $V_j = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_{2j-1}$, $1 \leq j \leq p+1$ et $\xi = \sum_{j=1}^p e_{2j-1}^* \wedge e_{2j}^*$.

Dans ces conditions et compte tenu de [1, 5.6], les matrices des éléments de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ dans la base $e_1, \dots, e_{2p+1}$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & z_1 & 0 & t_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & a_2 & z_2 & 0 & t_2 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & a_3 & z_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix}$$

On voit alors que si l'on pose $V' = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_{2p}$, et

$$\mathcal{V}' = \{\{0\} = V'_0 \subsetneq V'_1 = V_1 \subsetneq V'_2 = V_2 \subsetneq V'_p = V_p \subsetneq V'_{p+1} = V'\},$$

$\xi|_{V'}$ est symplectique et $\mathcal{V}'$ est en position générique par rapport à $\xi|_{V'}$ tandis que

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \mathfrak{l}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{V}} \quad (\text{II.4})$$

où $\mathfrak{l}_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{l}_{\mathcal{Y}'} \oplus \mathbb{K}H_{p+1}$ est un facteur réductif de $\mathfrak{r}_{\mathcal{Y}}$ qui est un tore dans ce cas, et $\mathfrak{n}_{\mathcal{Y}} = \mathfrak{n}_{\mathcal{Y}'} \oplus \mathbb{K}T_p$ son radical unipotent, avec

$$H_{p+1} = E_{2p+1,2p+1} \text{ et } T_p = E_{2p+1,2p}. \quad (\text{II.5})$$

Dans ce cas, on a les crochets supplémentaires

$$[H_{p+1}, Z_j] = 0 \quad 1 \leq j \leq p \quad , \quad [H_{p+1}, T_j] = 0 \quad 1 \leq j \leq p-1$$

$$[H_j, T_p] = \delta_{jp} T_p \quad 1 \leq j \leq p, \quad [H_{p+1}, T_p] = T_p.$$

Soit g une forme fortement régulière sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$. On pose $n = g|_{\mathfrak{n}_{\mathcal{V}}}$, $\zeta_j = g(Z_j)$ et $\tau_j = g(T_j)$. Supposons que $\tau_p \prod_{j=1}^p \zeta_j \neq 0$. Alors, on a $\mathfrak{g}(n) = \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}$ de sorte que, compte tenu du lemme 2, $\mathbf{N}_{\mathcal{V}}.g = g + \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}^{\perp}$, où $\mathbf{N}_{\mathcal{V}}$ désigne le radical unipotent du sous-groupe algébrique connexe $\mathbf{R}_{\mathcal{V}}$ de $\mathbf{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$, et qu'on peut supposer que $g|_{\mathfrak{t}_{\mathcal{V}}} = 0$.

II.7 Réduction au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale

D'autre part, si $X = \sum_{l=1}^p z_l Z_l + \sum_{l=1}^p t_l T_l$, on a

$$\begin{aligned} [H_1, X] &= 2z_1 Z_1 + t_1 T_1 \\ [H_i, X] &= 2z_i Z_i + t_{i-1} T_{i-1} + t_i T_i, \quad 2 \leq i \leq p, \\ [H_{p+1}, X] &= t_p T_p \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $X \in \mathfrak{g}(g) = \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}(g)$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2\zeta_1 z_1 + \tau_1 t_1 = 0, \\ 2\zeta_i z_i + \tau_{i-1} t_{i-1} + \tau_i t_i = 0, & 2 \leq i \leq p-1 \\ \tau_p t_p = 0, \end{cases}.$$

On en déduit que $\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{i=1}^{p-1} \mathbb{K} W_i$, avec

$$W_i = T_i - \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{1}{\zeta_i} Z_i + \frac{1}{\zeta_{i+1}} Z_{i+1} \right) = E_{2i-1, 2i+2} + E_{2i+1, 2i} - \frac{\tau_i}{2} \left(\frac{1}{\zeta_i} E_{2i-1, 2i} + \frac{1}{\zeta_{i+1}} E_{2i+1, 2i+2} \right).$$

Si $H = \sum_{i=1}^{p+1} H_i$, on a

$$[H, W_i] = 2W_i \text{ pour } 1 \leq i \leq p-1.$$

Par suite, on a

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Comme g est générique, ceci achève la démonstration dans ce cas. □

7 Réduction au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale

Le but de ce numéro est de ramener l'étude de la stabilité au cas de rang nul pour les sous-algèbres paraboliques et qui nous sera utile pour la suite :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B . On désigne par $\mathfrak{so}(E)$ l'algèbre de Lie du groupe orthogonal correspondant. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces totalement isotropes de E avec $\dim V \geq 1$. On désigne par $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{so}(E)$ constituée des endomorphismes de E stabilisant le drapeau $\mathcal{V}$: c'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(E)$ et les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$ sont toutes obtenues ainsi.

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

Soit maintenant $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$. Supposons que $\mathfrak{g}$ ne soit pas quasi-réductive et donc que $\text{rang } \mathfrak{g} < \text{ind } \mathfrak{g}$.

On cherche à savoir si $\mathfrak{g}$ admet ou non des formes stables.

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{g}$ et Π l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{j}$ dans E . Si $\alpha \in \Pi \cup \{0\}$, on note E^α le sous-espace poids correspondant. Si $\alpha \in \Pi$, $-\alpha \in \Pi$, de plus E^α et $E^{-\alpha}$ sont des sous-espaces totalement isotropes mis en dualité par B . Si $\alpha, \beta \in \Pi$ sont tels que $\alpha + \beta \neq 0$, alors E^α et E^β sont orthogonaux.

Soit $\Pi^+ \subset \Pi$ une partie telle que $\Pi = \Pi^+ \amalg \Pi^-$ où $\Pi^- = -\Pi^+$.

Alors, on a

$$\mathfrak{so}(E)^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{so}(E^0) \times \prod_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{gl}(E^\alpha).$$

Pour $\alpha \in \Pi \cup \{0\}$, soit $\mathcal{V}^\alpha$ le drapeau de E^α dont les éléments sont ceux de $U \cap E^\alpha$, $U \in \mathcal{V}$ rangés dans l'ordre strictement croissant, auxquels on adjoint E^α si $\alpha \neq 0$. Alors, on a

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}^0} \times \prod_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}^\alpha}$$

où avec les notations du numéro précédent $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}^\alpha}$ désigne la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(E^\alpha)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}^\alpha$. D'autre part, d'après Panyushev (voir [2]) les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}^\alpha}$ sont stables. Il s'ensuit que $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ admet des formes stables si et seulement si $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}^0}$ admet des formes stables. Or d'après le corollaire 16 et comme son centre est trivial, $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}^0}$ est de rang nul. Ainsi et compte tenu de la proposition 15, pour démontrer l'équivalence entre la quasi-réductivité et la stabilité dans le cas considéré, on se ramène à montrer que les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$ qui sont de rang nul et d'indice strictement positif ne sont pas stables.

8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

Dans ce numéro, on va étudier la stabilité des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie orthogonales. Exactement, on va montrer l'assertion (ii) de la conjecture de Panyushev [2, conjecture 5.6] pour le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie orthogonale.

Théorème 9. (Voir [1, 5.15]) Soit E un espace vectoriel de dimension $q \geq 3$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B , $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E avec $r = \dim V \geq 1$. On note $\mathcal{V}'$ le drapeau tel que $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \setminus \{V\}$, si r est impair égal à $\frac{q}{2}$, et $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$, sinon.

(i) On a les formules suivantes pour l'indice de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$:

$$\text{ind}(\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \left[\frac{q}{2}\right] - r + \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \left[\frac{q-1}{2}\right] - r + \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] & \text{si } r \text{ est impair, et } r < \frac{q}{2}, \\ \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] - 1 & \text{si } r \text{ est impair, } r = \frac{q}{2} \text{ et } \dim V_{t-1} < r - 1, \\ \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] + 1 & \text{si } r \text{ est impair, } r = \frac{q}{2} \text{ et } \dim V_{t-1} = r - 1. \end{cases}$$

(ii) La dimension du radical unipotent d'un stabilisateur générique de la représentation coadjointe de $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est $h(\mathcal{V}')$.

(iii) L'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive si et seulement si le drapeau $\mathcal{V}'$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Proposition 10. Soit $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E et $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}$. On pose $q = \dim E$ et $r = \dim V$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul.

(ii) La condition $(*)$ est satisfaite par $\mathcal{V}$ et (q, r) vérifie l'une des conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & q \in \{2r, 2r + 1\}. \\ \text{(b)} \quad & r \text{ est impair et } q = 2r + 2. \end{aligned} \tag{II.6}$$

Démonstration. : Remarquons tout d'abord que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si le nombre $h(\mathcal{V}')$ est égal à l'indice de $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$. D'après le théorème 9, il suffit de considérer les cas suivants :

On suppose que $\dim V = r$ est pair de sorte que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$. Dans ce cas, on a

$$\text{ind}(\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}) = \left[\frac{q}{2}\right] - r + \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right].$$

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

Par suite, on a

$$\text{rang } \mathfrak{p}_{\mathcal{V}} = 0 \text{ si et seulement si } \left[\frac{q}{2}\right] - r = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] = h(\mathcal{V}).$$

Ainsi, $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si $q \in \{2r, 2r+1\}$ et le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition (*).

On suppose que $\dim V = r$ est impair et $r < \frac{q}{2}$ de sorte que $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$. Dans ce cas, on a

$$\text{ind}(\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}) = \left[\frac{q-1}{2}\right] - r + \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right].$$

Par suite, on a

$$\text{rang } \mathfrak{p}_{\mathcal{V}} = 0 \text{ si et seulement si } \left[\frac{q-1}{2}\right] - r = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] = h(\mathcal{V}).$$

Ainsi, $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul si et seulement si $q \in \{2r+1, 2r+2\}$ et le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition (*).

On suppose maintenant que $\dim V = r$ est impair, $r = \frac{q}{2}$. Dans ces conditions et compte tenu du théorème 9, on a

$$\text{ind}(\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] - 1 & \text{si } \dim V_{t-1} < r - 1, \\ \sum_{i=1}^t \left[\frac{1}{2}(\dim V_i - \dim V_{i-1})\right] + 1 & \text{si } \dim V_{t-1} = r - 1. \end{cases}$$

La proposition est alors claire dans ce cas. □

On garde les notations de 7. Si $u, v \in E$, on définit l'élément $u \wedge_B v$ de $\mathfrak{so}(E)$ en posant, pour $x \in E$:

$$u \wedge_B v(x) = B(x, u)v - B(x, v)u.$$

Il existe une unique application linéaire $\wedge_B : E \otimes E \mapsto \mathfrak{so}(E)$ telle que $\wedge_B(u \otimes v) = u \wedge_B v$, laquelle passe au quotient en un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\wedge^2 E$ sur $\mathfrak{so}(E)$. Plus généralement, si V, W sont des sous-espaces de E tels que $V \cap W = \{0\}$, $\wedge_B$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\wedge^2 V$ (resp. $V \otimes W$) sur un sous-espace de $\mathfrak{so}(E)$ noté $\Lambda_B^2 V$ (resp. $V \wedge_B W$).

II.8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

Si $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$, on a

$$\begin{aligned} [u_1 \wedge_B v_1, u_2 \wedge_B v_2] = & B(u_1, u_2)v_1 \wedge_B v_2 + B(u_1, v_2)u_2 \wedge_B v_1 \\ & + B(v_1, u_2)u_1 \wedge_B v_2 + B(v_1, v_2)u_1 \wedge_B u_2. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

On munit $\mathfrak{so}(E)$ de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante $L(X, Y) = -\frac{1}{2}\text{Tr}XY$. Si $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$, on a

$$L(u_1 \wedge_B v_1, u_2 \wedge_B v_2) = \det \begin{pmatrix} B(u_1, u_2) & B(u_1, v_2) \\ B(v_1, u_2) & B(v_1, v_2) \end{pmatrix}.$$

Soit V un sous-espace isotrope non nul de E et W un supplémentaire dans E de l'orthogonal $V^{\perp_B}$ de V pour B . Alors B induit une dualité entre V et W , la restriction de B à $F = (V \oplus W)^{\perp_B}$ est non dégénérée et on a $E = V \oplus F \oplus W$ de sorte que $V^{\perp_B} = V \oplus F$. On identifie les algèbres de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ et $\mathfrak{so}(F)$ à des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{so}(E)$ de la manière suivante :

- si $X \in \mathfrak{gl}(V)$, on l'étend en un élément encore noté X de $\mathfrak{so}(E)$ en décidant que $X|_F = 0$ et, si $y \in W$, $X.y$ est l'élément de W tel que

$$B(X.x, y) + B(x, X.y) = 0, x \in V,$$

- si $X \in \mathfrak{so}(F)$, on l'étend en un élément encore noté X de $\mathfrak{so}(E)$ en décidant que $X|_{F^{\perp_B}} = 0$. De plus, si $X \in \mathfrak{gl}(V)$, $Y \in \mathfrak{so}(F)$, $u \in F$, $v, v' \in V$, on a

$$\begin{aligned} [X, u \wedge_B v] &= u \wedge_B X.v, \\ [Y, u \wedge_B v] &= Y.u \wedge_B v, \\ [Y, v \wedge_B v'] &= 0, \\ [X, v \wedge_B v'] &= X.v \wedge_B v' + v \wedge_B X.v'. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

- La forme L permet d'identifier $\wedge_2^B V^*$ (rep. $(F \wedge_B V)^*$) avec $\wedge_2^B W$ (resp. $F \wedge_B V$).

Le théorème suivant est le résultat principal de ce travail.

Théorème 11. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $q \geq 3$ sur $\mathbb{K}$ muni d'une forme bilinéaire symétrique B non dégénérée et $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes de E avec $\dim V \geq 1$. On note $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{so}(E)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ admet une forme linéaire stable.

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

(ii) $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est quasi-réductive.

Démonstration. On pose $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ et $\dim V = r$. D'après 7, on peut supposer que l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est de rang nul c'est à dire que $\mathcal{V}$ vérifie la condition (*) et (q, r) vérifie (II.6). Il s'agit de montrer que si l'indice de $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est strictement positif, alors $\mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ n'admet pas de formes stables. On garde les notations précédentes et on commence par étudier un cas particulier : on suppose que $t \geq 2$ et pour $1 \leq i \leq t - 1$, $\dim V_i$ est impair avec $\dim V_i = 2i - 1$, de sorte que $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$, avec $t = p + 1$ et $r \in \{2p, 2p + 1\}$.

D'après [1, 5.15], on a

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_V & \text{si } r = \dim V \text{ est pair ou } F = 0, \\ \mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \times \mathfrak{so}(F) \oplus \mathfrak{n}_V & \text{si } r = \dim V \text{ est impair et } F \neq 0. \end{cases}$$

avec $\mathfrak{n}_V = F \wedge_B V \oplus \mathfrak{z}_V$, $\mathfrak{z}_V = \Lambda^2 V$ (le centre de $\mathfrak{n}_V$), où $\mathfrak{n}_V$ est un idéal unipotent de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(V)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}$.

Soit g une forme linéaire générique sur $\mathfrak{g}$ et n (resp. ξ) sa restriction à $\mathfrak{n}_V$ (resp. $\mathfrak{z}_V$). Par généricité de g , on peut supposer que ξ est une forme bilinéaire alternée sur V générique relativement au drapeau $\mathcal{V}$. On choisit une base $e_1, \dots, e_r$ de V adaptée au drapeau $\mathcal{V}$ telle que, notant $e_1^*, \dots, e_r^*$ la base duale, on ait $\xi = \sum_{1 \leq 2i \leq r} e_{2i-1}^* \wedge e_{2i}^*$. On identifie F et F^* au moyen de la forme bilinéaire symétrique non dégénérée induite par la restriction à F de celle de B . Compte tenu des numéros 5.16, 5.18 et 5.19 de [1], on peut supposer que $n|_{F \wedge_B V} = 0$ si r est pair ou $F = 0$ et $n = \xi + u^* \wedge e_r^*$, avec $u \in F$ non isotrope, si r est impair et $F \neq 0$. On note $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq r}$ la base de $\mathfrak{gl}(V)$ telle que $E_{ij}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$, $1 \leq k \leq r$.

Soit $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$ qui stabilise la forme bilinéaire ξ sur V . Compte tenu des formules (II.2), (II.3) et (II.5) de la démonstration du théorème 6 dont on reprend les notations, on a

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{V}} = \mathfrak{l}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{n}_{\mathcal{V}}. \tag{II.9}$$

avec

$$\mathfrak{l}_{\mathcal{V}} = \bigoplus_{j=1}^s \mathbb{K}H_j \text{ et } \mathfrak{n}_{\mathcal{V}} = \left(\bigoplus_{j=1}^p \mathbb{K}Z_j \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{s-1} \mathbb{K}T_j \right),$$

où $s = p$ si $r = 2p$ et $s = p + 1$ si $r = 2p + 1$.

II.8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

Alors

$$\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} = \left(\bigoplus_{i=1}^p \mathbb{K}S_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s-1} \mathbb{K}E_{2i,2i+1} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j>i+1} \mathbb{K}E_{i,j} \right), \quad (\text{II.10})$$

où

$$S_i = E_{2i-1,2i-1} + E_{2i,2i},$$

est un supplémentaire de $\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}$ dans $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}}$.

D'une part et compte tenu des numéros 5.16 et 5.18 de [1], si $r = 2p$ ou $F = 0$, on a

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} \oplus \mathfrak{z}_V.$$

D'autre part et compte tenu du numéro 5.19 de [1], si $r = 2p + 1$ et $F \neq 0$, on a

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}(n) = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}'} \oplus \mathfrak{t}_{V'} \oplus \mathfrak{n}_V(n),$$

où $V' = \mathbb{K}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}e_{2p}$, $\mathcal{V}' = \{\{0\} = V'_0 \subsetneq V'_1 = V_1 \subsetneq V'_2 = V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V'_p = V_p \subsetneq V'_{p+1} = V'\}$ le drapeau obtenu en remplaçant l'espace V par V' ($\xi|_{V'}$ est symplectique et $\mathcal{V}'$ est en position générique par rapport à $\xi|_{V'}$), $\mathfrak{t}_{V'} = \mathbb{K}(T_p - u \wedge_B e_{2p-1})$ et $\mathfrak{n}_V(n) = F \wedge_B e_{2p+1} \oplus \mathfrak{z}_V$. De plus, on a $\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_V = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}'} \oplus \mathbb{K}T_p \oplus \mathfrak{n}_V$.

Quitte alors à traduire g par un élément de $\exp \mathfrak{n}_V$, on peut supposer que, compte tenu du lemme 2, $g|_{\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}} = 0$ dans les deux cas traités.

On pose $\zeta_i = g(Z_i)$, $1 \leq i \leq p$, $\tau_i = g(T_i)$, $1 \leq i \leq s - 1$. Par généricité de g , on peut supposer que $\prod_{i=1}^p \zeta_i \neq 0$ si r est pair et $\tau_p \prod_{i=1}^p \zeta_i \neq 0$ si r est impair. Soit $\lambda = g|_{\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}}$. Dans ces conditions et compte tenu de la démonstration du théorème 6, on peut également supposer que $g|_{\mathfrak{t}_{\mathcal{V}}} = \lambda|_{\mathfrak{t}_{\mathcal{V}}} = 0$. De plus et comme λ est générique, il suit des calculs de la démonstration du théorème 6 que

$$\mathfrak{r}_{\mathcal{V}}(\lambda) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}W_k,$$

avec

$$W_k = E_{2k-1,2k+2} + E_{2k+1,2k} - \frac{\tau_k}{2} \left(\frac{1}{\zeta_k} E_{2k-1,2k} + \frac{1}{\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2k+2} \right), \quad 1 \leq k \leq p-1.$$

Avec ces hypothèses sur la forme linéaire g et ces notations, nous allons démontrer les deux lemmes qui suivent.

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

Lemme 12. *On suppose que $r = 2p$ ou $F = 0$. Alors, on a*

(i) $\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k$, avec

$$C_k = W_k + \frac{1}{2}\tau_k(e_{2k-1} \wedge e_{2k} - e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}) + \frac{1}{2}\zeta_{k+1}e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}.$$

(ii) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$.

Démonstration. Rappelons que l'on a $g|_{\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}} = g|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = 0$.

Considérons, pour $1 \leq k \leq p-1$, les vecteurs C_k avec

$$C_k = W_k + \frac{1}{2}\tau_k(e_{2k-1} \wedge e_{2k} - e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}) + \frac{1}{2}\zeta_{k+1}e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}.$$

Remarquons tout d'abord que $C_k \in \mathfrak{h}(h) = \mathfrak{r}_{\mathcal{V}}(\lambda) \oplus \mathfrak{z}_V$ avec $h = g|_{\mathfrak{h}}$, de sorte que

$$C_k \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } \langle g, [C_k, Y] \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}.$$

Compte tenu de (II.10), on a

$$C_k \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [S_j, C_k] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [E_{2j, 2j+1}, C_k] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq s-1, \\ \langle g, [E_{i, j}, C_k] \rangle = 0, & 2 \leq i+1 < j \leq r. \end{cases}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned} [S_j, C_k] &= \delta_{k,j}(E_{2k-1, 2k+2} - E_{2k+1, 2k} + \tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2k} + \frac{1}{2}\zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}) + \delta_{k+1,j}(-E_{2k-1, 2k+2} + E_{2k+1, 2k} - \tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2k+2} \\ &\quad + \frac{1}{2}\zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2}\zeta_k e_{2k} \wedge e_{2k+1}) \\ &= \delta_{k,j}(-T_k + \tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2k}) + \delta_{k+1,j}(T_k - \tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2k+2}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)), \end{aligned}$$

de sorte que, compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g ,

$$\langle g, [S_j, C_k] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
[E_{2j,2j+1}, C_k] &= \delta_{k-1,j} (E_{2k-2,2k+2} - \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-2,2k} + \frac{1}{2} \tau_k e_{2k-2} \wedge e_{2k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2k-2} \wedge e_{2k+2}) + \delta_{k,j} (-E_{2k+1,2k+1} + E_{2k,2k} \\
&\quad + \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-1,2k+1} - \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k,2k+2} - \frac{1}{2} \tau_k e_{2k} \wedge e_{2k+2}) \\
&\quad + \delta_{k+1,j} (-E_{2k-2,2k+3} + \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2k+3}) \\
&= \delta_{k,j} (H_k - H_{k+1}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)).
\end{aligned}$$

Comme on a $g(H_{k+1}) = g(H_k) = 0$, il suit de nos hypothèses sur la forme linéaire g , que

$$\langle g, [E_{2j,2j+1}, C_k] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq s-1.$$

Enfin, pour calculer le crochet $[E_{i,j}, C_k]$ avec $2 \leq i+1 < j \leq r$, on distingue suivant la parité de i et j :

(i) Pour $i = 2l$ et $j = 2l'$ avec $l+1 \leq l'$, on a

$$\begin{aligned}
[E_{2l,2l'}, C_k] &= \delta_{k+1,l} (-E_{2k-1,2l'} + \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2l'}) + \delta_{k,l} (-E_{2k+1,2l'} + \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-1,2l'}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta_{k,l'} (\tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2l} + \zeta_k e_{2l} \wedge e_{2k+1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta_{k+1,l'} (-\tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2l} + \zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2l}) \\
&= \delta_{k,l} \delta_{k+1,l'} (-\frac{1}{2} Z_{k+1} + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2k}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)),
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\langle g, [E_{2l,2l'}, C_k] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } 1 \leq l < l'.$$

(ii) Pour $i = 2l$ et $j = 2l' + 1$ avec $1 \leq l < l'$, on a

$$\begin{aligned}
[E_{2l,2l'+1}, C_k] &= \delta_{k+1,l}(-E_{2k-1,2l'+1} + \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2k+1,2l'+1}) \\
&\quad + \delta_{k,l}(-E_{2k+1,2l'+1} + \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2k-1,2l'+1}) \\
&\quad + \delta_{k-1,l'}(E_{2l,2k+2} - \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2l,2k} + \frac{1}{2} \tau_k e_{2l} \wedge e_{2k} + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2l} \wedge e_{2k+2}) \\
&\quad + \delta_{k,l'}(E_{2l,2k} - \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2l,2k+2} - \frac{1}{2} \tau_k e_{2l} \wedge e_{2k+2} + \frac{1}{2} \zeta_k e_{2k} \wedge e_{2l}).
\end{aligned}$$

Remarquons que, pour $1 \leq l < l'$, $[E_{2l,2l'+1}, C_k] \in \ker(n) + \mathfrak{m}_{\mathcal{V}}$ de sorte que

$$\langle g, [E_{2l,2l'+1}, C_k] \rangle = 0.$$

(iii) Pour $i = 2l + 1$ et $j = 2l'$ avec $1 \leq l + 1 < l'$, on a

$$\begin{aligned}
[E_{2l+1,2l'}, C_k] &= \frac{1}{2} \delta_{k,l'}(\tau_k e_{2k-1} \wedge e_{2l+1} + \zeta_k e_{2l+1} \wedge e_{2k+1}) \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta_{k+1,l'}(-\tau_k e_{2k+1} \wedge e_{2l+1} + \zeta_{k+1} e_{2k-1} \wedge e_{2l+1}).
\end{aligned}$$

On voit donc que, pour $1 \leq l + 1 < l'$, $[E_{2l,2l'+1}, C_k] \in \ker(n)$. Par suite

$$\langle g, [E_{2l,2l'+1}, C_k] \rangle = 0.$$

(iv) Pour $i = 2l + 1$ et $j = 2l' + 1$ avec $0 \leq l < l'$, on a

$$\begin{aligned}
[E_{2l+1,2l'+1}, C_k] &= \delta_{k-1,l'}(E_{2l+1,2k+2} - \frac{\tau_k}{2\zeta_k} E_{2l+1,2k} + \frac{1}{2} \tau_k e_{2l+1} \wedge e_{2k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \zeta_{k+1} e_{2l+1} \wedge e_{2k+2}) + \delta_{k,l'}(E_{2l+1,2k} - \frac{\tau_k}{2\zeta_{k+1}} E_{2l+1,2k+2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \tau_k e_{2l+1} \wedge e_{2k+2} - \frac{1}{2} \zeta_k e_{2l+1} \wedge e_{2k}) \\
&= \delta_{k-1,l} \delta_{k,l'} (\frac{1}{2} Z_k - \frac{1}{2} \zeta_k e_{2k-1} \wedge e_{2k}) \bmod(\mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)),
\end{aligned}$$

de sorte que, compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g ,

$$\langle g, [E_{2l+1,2l'+1}, C_k] \rangle = 0 \text{ pour tout } 0 \leq l < l'.$$

II.8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

Par suite, pour $1 \leq k \leq p-1$, on a

$$\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0 \quad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

On a donc

$$C_k \in \mathfrak{g}(g) \text{ pour tout } 1 \leq k \leq p-1.$$

D'autre part, remarquons que la famille $\{C_k, 1 \leq k \leq p-1\}$ est une famille libre de $\mathfrak{g}(g)$. De plus, comme $\dim(\mathfrak{g}(g)) = h(\mathcal{V}) = p-1$, cette famille est maximale et donc elle forme une base de $\mathfrak{g}(g)$. On a donc

$$\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k.$$

On pose $R_k = E_{2k-1, 2k-1} + E_{2k+1, 2k+1}$. On a $R_k \in \mathfrak{g}$ et

$$[R_k, C_k] = C_k \text{ pour } 1 \leq k \leq p-1,$$

ceci montre alors que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$ de sorte que, compte tenu du lemme 2 et du fait que la forme linéaire g est générique, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est non stable. $\square$

Lemme 13. *On suppose que $\dim V = 2p+1$ et $F \neq \{0\}$. Ici $\dim F \in \{1, 2\}$, $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_p \subsetneq V_{p+1} = V\}$ et $n = \xi + u^* \wedge e_{2p+1}^*$, avec $u \in F$ non isotrope. On rappelle les vecteurs C_k du lemme 12. Alors, on a*

$$(i) \quad \mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k \oplus \mathbb{K}D_p, \text{ avec}$$

$$D_p = T_p - u \wedge_B e_{2p-1} - \tau_p u \wedge_B e_{2p+1} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} Z_p + \frac{1}{2} \tau_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p} \wedge e_{2p+1}.$$

$$(ii) \quad [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}.$$

Démonstration. Rappelons dans ce cas que l'on a $g|_{\mathfrak{m}_{\mathcal{V}}} = g|_{\mathfrak{so}(F)} = g|_{\mathfrak{l}_{\mathcal{V}}} = 0$.

Remarquons tout d'abord que dans ce cas les vecteurs C_k appartiennent à $\mathfrak{h}$. De plus, on a

$$\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} \text{ et } [C_k, \mathfrak{so}(F)] = 0.$$

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

D'autre part et compte tenu des calculs du cas précédent, on a

$$\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{m}_\gamma,$$

de sorte que $\langle g, [C_k, Y] \rangle = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$. On a donc $C_k \in \mathfrak{g}(g)$.

Considérons le vecteur D_p avec

$$D_p = T_p - u \wedge_B e_{2p-1} - \tau_p u \wedge_B e_{2p+1} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} Z_p + \frac{1}{2} \tau_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p} \wedge e_{2p+1}.$$

Remarquons tout d'abord que $D_p \in \mathfrak{h}$ de sorte que

$$D_p \in \mathfrak{g}(g) \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, & \forall Y \in \mathfrak{r}_\gamma, \\ \langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, & \forall Y \in \mathfrak{so}(F), \\ \langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, & \forall Y \in \mathfrak{m}_\gamma. \end{cases}$$

Compte tenu de (II.9), on a

$$\langle g, [D_p, \mathfrak{r}_\gamma] \rangle = 0 \text{ si et seulement si } \begin{cases} \langle g, [Z_j, D_p] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p+1, \\ \langle g, [T_j, D_p] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [H_j, D_p] \rangle = 0, & 1 \leq j \leq p. \end{cases}$$

On a, pour $1 \leq j \leq p+1$,

$$[H_j, D_p] = \begin{cases} T_p - \tau_p u \wedge_B e_{2p+1} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p+1, \\ T_p - \frac{\tau_p}{\zeta_p} Z_p \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{si } j \leq p-2. \end{cases}$$

De plus, pour $1 \leq j \leq p$, on vérifie aisément que

$$[D_p, Z_j] = \begin{cases} 0 \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$[D_p, T_j] = \begin{cases} 0 \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p \text{ ou } j = p-1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

II.8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

de sorte que, compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g ,

$$\langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, \text{ pour tout } Y \in \mathfrak{r}_\gamma.$$

De plus, il est clair que, pour tout $Y \in \mathfrak{so}(F)$, on a $[Y, D_p] \in \ker(n)$ de sorte que $\langle g, [D_p, \mathfrak{so}(F)] \rangle = \{0\}$.

Par suite et compte tenu de (II.10), on a $D_p \in \mathfrak{g}(g)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \langle g, [S_j, D_p] \rangle = 0, & \text{pour } 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [E_{2j, 2j+1}, D_p] \rangle = 0, & \text{pour } 1 \leq j \leq p, \\ \langle g, [E_{i, j}, D_p] \rangle = 0, & \text{pour } 2 \leq i+1 < j \leq 2p+1. \end{cases}$$

D'une part, on a

$$[S_j, D_p] = \begin{cases} -T_p + \tau_p e_{2p-1} \wedge_B e_{2p} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ 0 & \text{si } j \leq p-1, \end{cases}$$

de sorte que, pour $1 \leq k \leq p$,

$$\langle g, [S_j, D_p] \rangle = 0.$$

D'autre part, on a

$$[E_{2j, 2j+1}, D_p] = \begin{cases} E_{2p, 2p} - E_{2p+1, 2p+1} + \frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2p-1, 2p+1} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p, \\ -\frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2p-2, 2p} \bmod(\ker(n)) & \text{si } j = p-1, \\ 0 & \text{si } j \leq p-2. \end{cases}$$

Comme $E_{2p, 2p} - E_{2p+1, 2p+1} \in \mathfrak{l}_\gamma + \mathfrak{m}_\gamma$ et $E_{2p-1, 2p+1}, E_{2p-2, 2p} \in \mathfrak{m}_\gamma$, on voit alors que, pour $1 \leq j \leq p$,

$$\langle g, [E_{2j, 2j+1}, D_p] \rangle = 0.$$

Enfin, pour calculer le crochet $[E_{i, j}, D_p]$ avec $2 \leq i+1 < j \leq 2p+1$, on distingue suivant la parité de i et j .

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

(i) Pour $i = 2k'$ et $j = 2l'$ avec $k' + 1 \leq l' \leq p$, on a

$$[E_{2k', 2l'}, D_p] = \begin{cases} -\frac{1}{2} \tau_p e_{2k'} \wedge e_{2p-1} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'} \wedge e_{2p+1} = 0 \pmod{\ker(n)} & \text{si } l' = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$\langle g, [E_{2k', 2l'}, D_p] \rangle = 0.$$

(ii) Pour $i = 2k'$ et $j = 2l' + 1$ avec $1 \leq k' < l' \leq p$, on a

$$[E_{2k', 2l'+1}, D_p] = \begin{cases} E_{2k', 2p} - \tau_p u \wedge_B e_{2k'} - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p, \\ -u \wedge_B e_{2k'} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2k', 2p} + \frac{1}{2} \tau_p e_{2k'} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que $[E_{2k', 2l'+1}, D_p] \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n)$ de sorte que

$$\langle g, [E_{2k', 2l'+1}, D_p] \rangle = 0.$$

(iii) Pour $i = 2k' + 1$ et $j = 2l'$ avec $1 \leq k' + 1 < l' \leq p$, on a

$$[E_{2k'+1, 2l'}, D_p] = \begin{cases} -\frac{1}{2} \tau_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p-1} + \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p+1} & \text{si } l' = p, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit alors que

$$[E_{2k'+1, 2l'}, D_p] = \begin{cases} 0 \pmod{\ker(n)} & \text{si } l' = p, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que

$$\langle g, [E_{2k'+1, 2l'}, D_p] \rangle = 0.$$

(iv) Pour $i = 2k' + 1$ et $j = 2l' + 1$ avec $0 \leq k' < l' \leq p$, on a

$$[E_{2k'+1, 2l'+1}, D_p] = \begin{cases} E_{2k'+1, 2p} - \tau_p u \wedge_B e_{2k'+1} - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p, \\ -u \wedge_B e_{2k'+1} - \frac{\tau_p}{2\zeta_p} E_{2k'+1, 2p} + \frac{1}{2} \tau_p e_{2k'+1} \wedge e_{2p} & \text{si } l' = p - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par suite, on a les résultats suivants :

II.8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

- Pour $l' < p - 1$, on a

$$[E_{2k'+1, 2l'+1}, D_p] = 0.$$

- Pour $l' = p - 1$, on a

$$[E_{2k'+1, 2l'+1}, D_p] \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n).$$

- Pour $l' = p$ et $k' < p - 1$

$$[E_{2k'+1, 2l'+1}, D_p] \in \mathfrak{m}_{\mathcal{V}} + \ker(n).$$

- Pour $l' = p$ et $k' = p - 1$, on a

$$\begin{aligned} [E_{2k'+1, 2l'+1}, D_p] &= E_{2p-1, 2p} - \tau_p u \wedge_B e_{2p-1} - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} \\ &= \frac{1}{2} Z_p - \frac{1}{2} \zeta_p e_{2p-1} \wedge e_{2p} \pmod{\ker(n)}. \end{aligned}$$

Compte tenu de nos hypothèses sur la forme linéaire g , il suit que

$$\langle g, [E_{2k'+1, 2l'+1}, D_p] \rangle = 0, \quad 0 \leq k' < l' \leq p.$$

D'après ce qui précède, on voit que

$$\langle g, [D_p, Y] \rangle = 0, \quad \text{pour tout } Y \in \mathfrak{g}.$$

On a donc $D_p \in \mathfrak{g}(g)$.

Remarquons que la famille $\{C_k, 1 \leq k \leq p - 1, D_p\}$ est une famille libre de $\mathfrak{g}(g)$. De plus, comme $\dim(\mathfrak{g}(g)) = h(\mathcal{V}) = p$, cette famille est maximale et donc elle forme une base de $\mathfrak{g}(g)$.

On a donc

$$\mathfrak{g}(g) = \bigoplus_{k=1}^{p-1} \mathbb{K}C_k \oplus \mathbb{K}D_p.$$

On pose $R_k = E_{2k-1, 2k-1} + E_{2k+1, 2k+1}$. On a $R_k \in \mathfrak{g}$ pour tout $1 \leq k \leq p$ et on a

$$[R_k, C_k] = C_k, \quad 1 \leq k \leq p - 1 \text{ et } [R_p, D_p] = D_p,$$

de sorte que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(g)] \cap \mathfrak{g}(g) \neq \{0\}$. Ceci montre alors que, compte tenu du lemme 2 et du fait que la forme linéaire g est générique, $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ est non stable. $\square$

Pour achever la démonstration du théorème, on considère le cas où (q, r) vérifie (II.6) et le drapeau $\mathcal{V}$ vérifie la condition $(*)$ sans que les sous-espaces V_i du drapeau soient tous de

Chapitre II. Stabilité pour le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples classiques

dimension impaire pour $1 \leq i \leq t-1$. On reprend les notations des cas précédents.

Soit donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\mathcal{V}}$ avec $\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_{t-1} \subsetneq V_t = V\}$ un drapeau de sous-espaces isotropes vérifiant la condition $(*)$ et (q, r) la condition (II.6). En particulier $\dim F \leq 2$ et si $\dim F = 2$, $r = \dim V$ est impair.

On a $\mathfrak{g} = (\mathfrak{q}_{\mathcal{V}} \times \mathfrak{so}(F)) \oplus \mathfrak{n}_V$ avec $\mathfrak{n}_V = F \wedge_B V \oplus \mathfrak{z}_V$ et $\mathfrak{z}_V = \Lambda_B^2 V$.

Soit $g \in \mathfrak{g}^*$ générique. On peut supposer que $\xi = g|_{\mathfrak{z}_V} \in \Lambda_B^2 V^*$ est générique relativement à $\mathcal{V}$. On considère ξ comme un élément de $\mathfrak{n}_V^*$ noté alors n_{ξ} . Par généricité de g et compte tenu des numéros 5.16, 5.18 et 5.19 de [1], on peut supposer que $n = g|_{\mathfrak{n}_V} = n_{\xi}$ si r est pair et $n = n_{\xi} + l \wedge e_r^*$, avec $l \in F^*$ non isotrope, si r est impair.

Soit $k_0 = 0 < k_1 < \cdots < k_{s-1} < k_s = t$ ceux des indices $j \in 0, \dots, t$ tels que $\dim V_j$ soit pair ou $j = t$. Pour $1 \leq i \leq s$, on pose $W_i = V_{k_i} \cap V_{k_{i-1}}^{\perp_{\xi}}$ et on désigne par $\mathcal{V}_i$ la trace du drapeau $\mathcal{V}$ sur le sous-espace W_i . On a $V = \bigoplus_{i=1}^s W_i$.

Soit $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ le sous-drapeau constitué des espaces V_{k_i} , $0 \leq i \leq s$. On a

$$\mathfrak{q}_{\mathcal{V}} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_i} \oplus {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$$

où $\mathfrak{q}_{\mathcal{V}_i}$ désigne la sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{gl}(W_i)$ qui stabilise le drapeau $\mathcal{V}_i$ et ${}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ le radical unipotent de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$. Comme

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_V = \begin{cases} \mathfrak{r}_{\mathcal{V}} + \mathfrak{n}_V & \text{si } r \text{ est pair ou } F = 0, \\ \mathfrak{r}_{\mathcal{V}'} \oplus \mathbb{K}T_p + \mathfrak{n}_V & \text{si } r \text{ est impair et } F \neq 0. \end{cases}$$

et $\exp(\mathfrak{n}_V(n)).g = g + (\mathfrak{h} + \mathfrak{n}_V)^{\perp}$, on peut supposer que $g|_{{}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}} = 0$.

On pose $\tilde{s} = s$, si $F = 0$ ou r est pair, et $\tilde{s} = s-1$, si $F \neq 0$ et r est impair. On considère les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_i} \oplus \mathfrak{z}_{W_i}$, pour $1 \leq i \leq \tilde{s}$ et, si $F \neq 0$ et r est impair, $\mathfrak{g}_s = \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_s} \times \mathfrak{so}(F) \oplus \mathfrak{n}_{W_s}$ (en convenant que $\mathfrak{n}_{W_s} = F \wedge_B W_s \oplus \mathfrak{z}_{W_s}$). Enfin, on note $g_i = g|_{\mathfrak{g}_i}$, $1 \leq i \leq \tilde{s}$. Alors, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_i \oplus \left(\prod_{j \neq i} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_j} \right) \oplus {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}} \oplus F \wedge_B V \oplus (\bigoplus_{k < l} W_k \wedge_B W_l) \oplus (\bigoplus_{j \neq i} \wedge_B^2 W_j), \quad 1 \leq i \leq \tilde{s},$$

II.8 Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(E)$

et si $F \neq 0$ et r est impair, on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \left(\prod_{j < s} \mathfrak{q}_{\mathcal{V}_j} \right) \oplus {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}} \oplus \left(\oplus_{j < s} F \wedge_B W_j \right) \oplus \left(\oplus_{k < l} W_k \wedge_B W_l \right) \oplus \left(\oplus_{j < s} \wedge_B^2 W_j \right).$$

En regardant les crochets de $\mathfrak{g}_i$ avec les différents autres sous-espaces apparaissant dans cette décomposition de $\mathfrak{g}$ en somme directe, on peut montrer que $\mathfrak{g}_i(g_i) \subset \mathfrak{g}(g)$.

Compte tenu de nos hypothèses, il existe deux sous-espaces consécutifs du drapeau $\mathcal{V}$ qui sont tous deux de dimension impaire. Ainsi l'une au moins des $\mathfrak{g}_i$ n'est pas stable d'après le cas précédent. Comme $\mathfrak{g}_i(g_i) \subset \mathfrak{g}(g)$, il résulte alors du lemme 2 que $\mathfrak{g}$ n'est pas stable. $\square$

Remarque On garde les notations précédentes. Comme la forme linéaire g est générique, il existe un ouvert de Zariski U G -invariant contenant g . Ainsi et comme $g \in {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}^\perp$, où ${}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}^\perp$ désigne l'orthogonal de ${}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ dans $\mathfrak{g}^*$, $U \cap {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}^\perp$ est un ouvert de Zariski non vide de ${}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}^\perp$. Soit φ la projection de ${}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}^\perp$ dans $\mathfrak{g}_i^*$. Comme $\varphi(U \cap {}^u \mathfrak{q}_{\tilde{\mathcal{V}}}^\perp)$ est un ouvert de Zariski non vide de $\mathfrak{g}_i^*$, on voit alors que $g_i = g|_{\mathfrak{g}_i}$ est générique. Ainsi et compte tenu du cas précédent, on a une formule explicite pour le stabilisateur $\mathfrak{g}_i(g_i)$.

Lorsque $\mathfrak{g}$ est de rang nul, en utilisant le résultat qui donne l'indice de $\mathfrak{g}$ et des $\mathfrak{g}_i$ dans le théorème 9, on déduit que $\mathfrak{g}(g) = \oplus_i \mathfrak{g}_i(g_i)$. Comme on a déterminé explicitement $\mathfrak{g}_i(g_i)$ dans le cas précédent, on a alors une formule explicite pour le stabilisateur d'une forme linéaire générique.

Références bibliographiques

- [1] M. DUFLO, M. S. KHALGUI et P. TORASSO – « Algèbres de Lie quasi-réductives », *Transformation Groups* **17** (2012), no. 2, p. 417–470. [21](#), [22](#), [25](#), [27](#), [30](#), [34](#), [35](#), [44](#)
- [2] D. I. PANYUSHEV – « An extension of Raïs’ theorem and seaweed subalgebras of simple Lie algebras », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **55** (2005), no. 3, p. 693–715. [30](#)

Références bibliographiques

Chapitre III

Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

1 Notations et rappels

Dans cette partie, on renvoie à [8] et [2] pour les concepts généraux utilisés.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{K}$, G son groupe adjoint, K sa forme de Killing, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, et Δ le système de racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. On fixe une base Π de Δ (que l'on notera Δ_Π), et on désigne par Δ_Π^+ (resp. Δ_Π^-) l'ensemble des racines positives (resp. négatives) associé. Pour toute partie Π' de Π , on note $\mathbb{Z}\Pi'$ (resp. $\mathbb{N}\Pi'$) l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{N}$) des éléments de Π' . On pose

$$\Delta_{\Pi'} = \Delta_\Pi \cap \mathbb{Z}\Pi', \quad \Delta_{\Pi'}^+ = \Delta_\Pi^+ \cap \mathbb{N}\Pi' = \Delta_\Pi^+ \cap \Delta_{\Pi'}.$$

Si $\alpha \in \Delta_\Pi$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est le sous-espace radiciel associé à α . On pose

$$\mathfrak{n}^\pm = \sum_{\alpha \in \Delta_\Pi^\pm} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\pm.$$

Soit $\{h_\alpha, \alpha \in \Pi; x_\alpha, \alpha \in \Delta_\Pi\}$ une base de Chevalley et $\{h_\alpha^*, \alpha \in \Pi; x_\alpha^*, \alpha \in \Delta_\Pi\}$ la base duale associée.

On a alors (cf [8], 20.6)

- $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-$ avec $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$.
- Si $\alpha, \beta \in \Delta_\Pi$, alors $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
- $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] = \mathbb{K}h_\alpha$, $\alpha(h_\alpha) = 2$.

Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

Soit S une partie de Π . Par récurrence sur le cardinal de S , on définit un sous-ensemble $\mathcal{K}(S)$ de l'ensemble des parties de S de la manière suivante (la notion de connexité est relative au diagramme de Dynkin) :

- (i) $\mathcal{K}(\emptyset) = \emptyset$.
- (ii) Si $S_1, S_2, \dots, S_r$ sont les composantes connexes de S , on a :

$$\mathcal{K}(S) = \mathcal{K}(S_1) \cup \dots \cup \mathcal{K}(S_r)$$

- (iii) Si S est connexe, alors :

$$\mathcal{K}(S) = \{S\} \cup \mathcal{K}(\{\alpha \in S; \langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle = 0\}),$$

ε_S étant la plus grande racines de Δ_S et $\langle \alpha, \varepsilon_S^\vee \rangle = \alpha(h_{\varepsilon_S})$.

Cette construction est due à Kostant (voir [5] et [6]).

On a les résultats suivant :

Lemme 2. (voir [8, ch.40])

- i) Tout $K \in \mathcal{K}(S)$ est une partie connexe de Π .
- ii) Si $K, K' \in \mathcal{K}(S)$, alors ou $K \subset K'$, ou $K' \subset K$, ou K et K' sont des parties disjointes de S telles que $\alpha + \beta \notin \Delta_\Pi$ si $\alpha \in \Delta_K$ et $\beta \in \Delta_{K'}$.
- iii) $\{\varepsilon_K; K \in \mathcal{K}(S)\}$ est un ensemble de racines deux à deux fortement orthogonales de Δ_Π .

Conservons les notations précédentes. Si $K \in \mathcal{K}(\Pi)$, on pose

$$\Gamma^K = \{\alpha \in K; \langle \alpha, \varepsilon_K^\vee \rangle > 0\}, \quad \mathfrak{a}_K = \sum_{\alpha \in \Gamma^K} \mathfrak{g}^\alpha.$$

Lemme 3. (voir [8, ch.40])

Soient $K, K' \in \mathcal{K}(\Pi)$, $\alpha, \beta \in \Gamma^K$, et $\gamma \in \Gamma^{K'}$.

- (i) On a $\Gamma^K = \Delta_K^+ \setminus \{\delta \in \Delta_K^+; \langle \delta, \varepsilon_K^\vee \rangle = 0\}$.
- (ii) L'ensemble Δ_Π^+ est réunion disjointe des $\Gamma^{K''}$ pour $K'' \in \mathcal{K}(\Pi)$, et $\mathfrak{a}_{K''}$ est une algèbre de Heisenberg, de centre $\mathfrak{g}^{\varepsilon_{K''}}$.
- (iii) Si $\alpha + \beta \in \Delta_\Pi$, on a $\alpha + \beta = \varepsilon_K$.
- (iv) Si $\alpha + \gamma \in \Delta_\Pi$, alors ou $K \subset K'$ et $\alpha + \gamma \in \Gamma^{K'}$, ou $K' \subset K$ et $\alpha + \gamma \in \Gamma^K$.

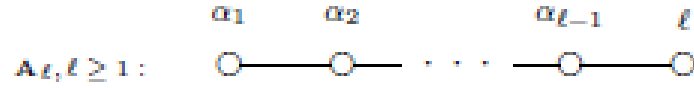
On note k_Π le cardinal de $\mathcal{K}(\Pi)$ qui ne dépend que de $\mathfrak{g}$. On donne dans le tableau ci-dessous la valeur de k_Π pour les différents types d'algèbres de Lie simples. Si r est un nombre rationnel, $[r]$ désigne sa partie entière.

k_{Π}	A_l	B_l	C_l	D_l	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
	$\lceil \frac{l+1}{2} \rceil$	l	l	$2\lceil \frac{l}{2} \rceil$	4	7	8	4	2

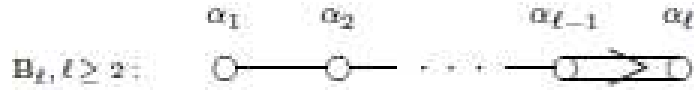
Tableau III.1 – k_{Π} pour les différents types d'algèbres de Lie simples.

Pour Π' une partie de Π , on note $\mathcal{E}_{\Pi'}$ l'ensemble des racines ε_K , avec $K \in \mathcal{K}(\Pi')$ et on note $k_{\Pi'}$ son cardinal.

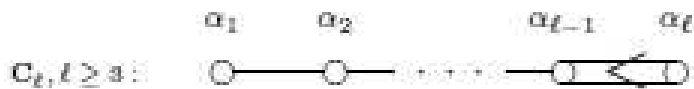
On décrit ci-dessous $\mathcal{E}_{\Pi}$ dans le cas des algèbres de Lie simples classiques :



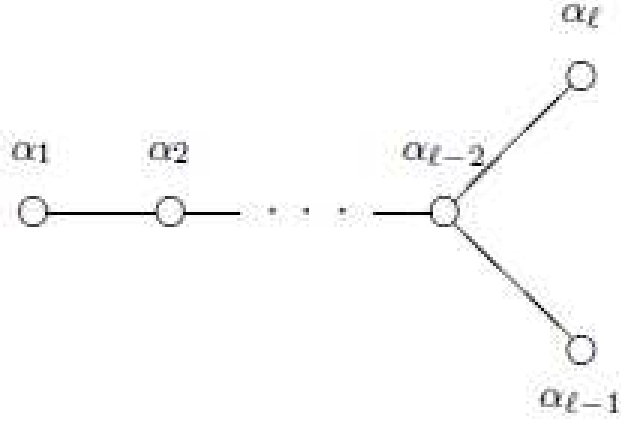
$$\mathcal{E}_{\Pi} = \left\{ \varepsilon_i = \alpha_i + \cdots + \alpha_{i+(\ell-2i+1)}, \quad i \leq \left\lceil \frac{\ell+1}{2} \right\rceil \right\}$$



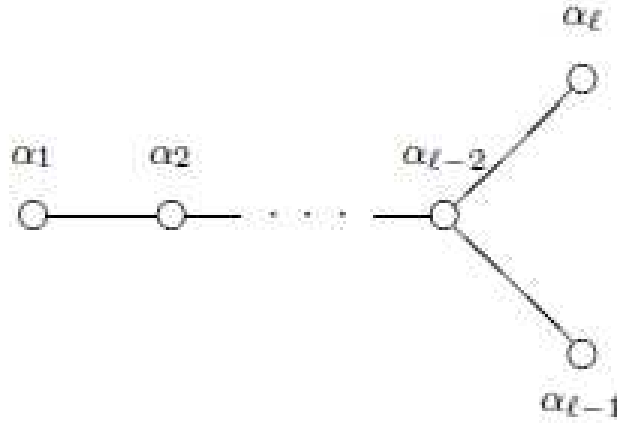
$$\mathcal{E}_{\Pi} = \{ \varepsilon_i = \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{\ell}, \quad i \text{ pair}, \quad i \leq \ell \} \cup \{ \varepsilon_i = \alpha_i, \quad i \text{ impair}, \quad i \leq \ell \}$$



$$\mathcal{E}_{\Pi} = \{ \varepsilon_i = 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{\ell-1} + \alpha_{\ell}, \quad i \leq \ell - 1 \} \cup \{ \varepsilon_{\ell} = \alpha_{\ell} \}$$



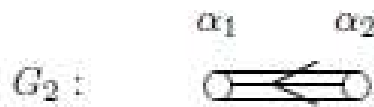
$$\mathcal{E}_{\Pi} = \{\varepsilon_i = \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l, i \text{ pair}, i < l-1\} \cup \{\varepsilon_i = \alpha_i, i \text{ impair}, i < l\} \cup \{\varepsilon_l = \alpha_l\}$$



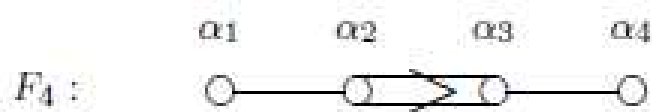
$$\mathcal{E}_{\Pi} = \{\varepsilon_i = \alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l, i \text{ pair}, i < l-1\} \cup \{\varepsilon_i = \alpha_i, i \text{ impair}, i < l\} \cup \{\varepsilon_{l-1} = \alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l\}$$

Fig1 : $\mathcal{E}_{\pi}$ dans le cas classique.

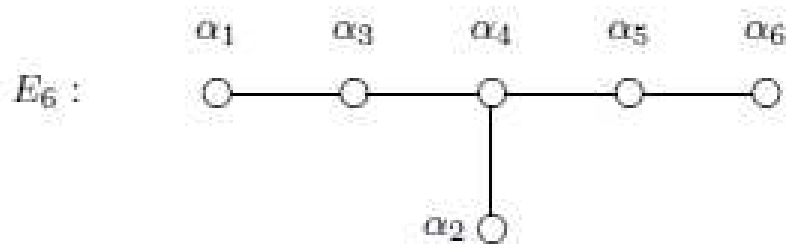
On décrit ci-dessous $\mathcal{E}_{\Pi}$ dans le cas des algèbres de Lie simples exceptionnelles qui nous sera utile pour la suite :



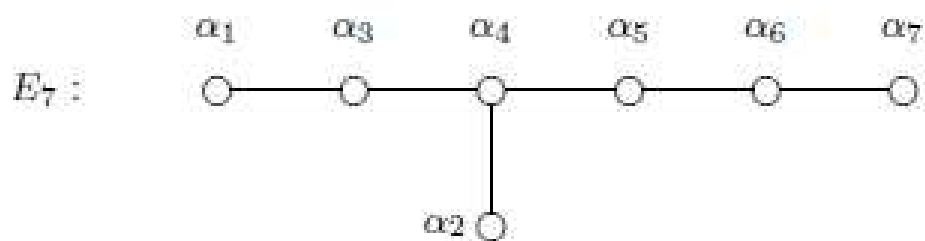
$$\mathcal{E}_{\pi} = \{\epsilon_1 = 32, \epsilon_2 = 10\}$$



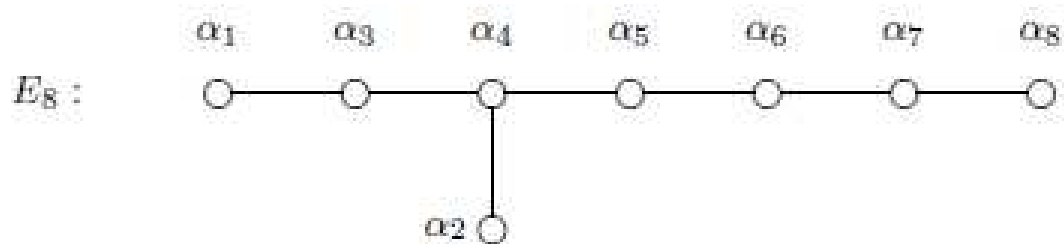
$$\mathcal{E}_\pi = \{\epsilon_1 = 2342, \epsilon_2 = 0122, \epsilon_3 = 0120, \epsilon_4 = 0100\}$$



$$\mathcal{E}_\pi = \{\epsilon_1 = \begin{matrix} 12321 \\ 2 \end{matrix}, \epsilon_2 = \begin{matrix} 11111 \\ 0 \end{matrix}, \epsilon_3 = \begin{matrix} 01110 \\ 0 \end{matrix}, \epsilon_4 = \begin{matrix} 00100 \\ 0 \end{matrix}\}$$



$$\mathcal{E}_\pi = \{\epsilon_1 = \begin{matrix} 234321 \\ 2 \end{matrix}, \epsilon_2 = \begin{matrix} 012221 \\ 1 \end{matrix}, \epsilon_3 = \begin{matrix} 012100 \\ 1 \end{matrix}, \epsilon_4 = \begin{matrix} 000001 \\ 0 \end{matrix}, \epsilon_5 = \begin{matrix} 000000 \\ 0 \end{matrix}, \epsilon_6 = \begin{matrix} 010000 \\ 0 \end{matrix}, \epsilon_7 = \begin{matrix} 000100 \\ 0 \end{matrix}\}$$



$$\begin{array}{ccc} 0000010, & \epsilon_7 = & 0100000, & \epsilon_8 = & 0001000 \} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

Fig2 : $\mathcal{E}_\pi$ dans le cas exceptionnel.

4 Caractérisation des sous-algèbres paraboliques en terme de système de racines

On garde les notations précédentes et on désigne par $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{b}^+$ et les $\mathfrak{g}^{-\alpha}$, $\alpha \in \Pi'$: c'est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et toutes les sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{g}$ sont à conjugaison près obtenues ainsi. On note $\mathfrak{p}_{\Pi'}^-$ la sous-algèbre parabolique opposée à $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$, i.e, la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{b}^- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^-$ et les $\mathfrak{g}^{\alpha}$, $\alpha \in \Pi'$. Si $\Pi' = \{\alpha\}$, on note $\mathfrak{p}_{\Pi'}^{\pm}$ plus simplement $\mathfrak{p}_{\alpha}^{\pm}$. On a $\mathfrak{b}^{\pm} = \mathfrak{p}_{\emptyset}^{\pm}$.

Si $v \in \mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on note φ_v la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ définie par $\varphi_v(x) = K(v, x)$ pour tout $x \in \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}_{\Pi'}^+$, l'application $v \rightarrow \varphi_v$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathfrak{p}_{\Pi'}^-$ sur $(\mathfrak{p}_{\Pi'}^+)^*$.

Soient Π' , Π'' deux parties de Π . On note $\mathfrak{q}_{\Pi', \Pi''}$ l'intersection de deux sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ et $\mathfrak{p}_{\Pi''}^-$. La sous-algèbre $\mathfrak{q}_{\Pi', \Pi''}$ est dite sous-algèbre biparabolique associée à Π' et Π'' . En particulier, lorsque $\Pi' = \Pi$ ou $\Pi'' = \Pi$, $\mathfrak{q}_{\Pi', \Pi''}$ est une sous-algèbre parabolique.

On note $E_{\Pi', \Pi''}$ (resp. $E_{\Pi'}$) le sous-espace de $\mathfrak{h}^*$ engendré par $\{\epsilon_K, K \in \mathcal{K}(\Pi') \cup \mathcal{K}(\Pi'')\}$ (resp. $\{\epsilon_K, K \in \mathcal{K}(\Pi')\}$). Ainsi, $\dim E_{\Pi', \Pi''} = k_{\Pi'} + k_{\Pi''} - \dim(E_{\Pi'} \cap E_{\Pi''})$. D'après [4], on a

$$\text{ind } \mathfrak{q}_{\Pi', \Pi''} = (\text{rang } \mathfrak{g} - \dim E_{\Pi', \Pi''}) + (k_{\Pi'} + k_{\Pi''} - \dim E_{\Pi', \Pi''}). \quad (\text{III.1})$$

Remarque D'après (III.1), on a $\text{ind } \mathfrak{p}_{\Pi'}^+ = 0$ si et seulement si $E_{\Pi'} \cap E_{\Pi} = \{0\}$ et $k_{\Pi'} + k_{\Pi} = \text{rang } \mathfrak{g}$.

Définition Soient Π', Π'' deux parties de Π . On dit que Π' est non liée à Π'' si α est orthogonal à β , pour tout $(\alpha, \beta) \in \Pi' \times \Pi''$.

Pour une racine positive α , on note $K_{\Pi}^+(\alpha)$ l'unique élément $L \in \mathcal{K}(\Pi)$ tel que $\epsilon_L - \alpha \in \Delta_{\Pi}^+$.

III.4 Caractérisation des sous-algèbres paraboliques en terme de système de racines

Définition On dit que deux parties non liées Π' et Π'' vérifient la condition $(*)$ si :

$$K_{\Pi}^+(\alpha) \neq K_{\Pi}^+(\beta) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \Pi' \times \Pi''.$$

Remarque La condition $(*)$ est toujours vérifiée si $\text{rang } \mathfrak{g} = k_{\Pi}$.

Lemme 5. (Voir [8, Proposition 40.6.3]) Soit $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{n}^+$ un idéal de $\mathfrak{b}^+$. On pose $u^- = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{-\epsilon_K}$. Alors la B -orbite de $(\varphi_{u^-}|_{\mathfrak{m}})$ est ouverte dans $\mathfrak{m}^*$ où B désigne le sous-groupe de Borel d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}^+$.

Lemme 6. (Voir [7]) Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple, $\text{rg}(\mathfrak{g})$ son rang, k_{Π} le cardinal de $\mathcal{K}(\pi)$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Alors

- (i) L'espace $\mathfrak{b}^*$ contient un élément stable.
- (ii) L'indice de $\mathfrak{b}$ est égal $\text{rg}(\mathfrak{g}) - k_{\Pi}$.

Soit Π' une partie de Π . On note $\mathfrak{n}_{\Pi'}^{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\Pi'}^{\pm}} \mathfrak{g}^{\alpha}$. On a $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+ = \mathfrak{l}_{\Pi'} \oplus \mathfrak{m}_{\Pi'}^+$, avec $\mathfrak{l}_{\Pi'} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_{\Pi'}^+ \oplus \mathfrak{n}_{\Pi'}^-$, un facteur réductif de $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ et $\mathfrak{m}_{\Pi'}^+ = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{\Pi'}^+ \setminus \Delta_{\Pi'}^+} \mathfrak{g}^{\alpha}$ son radical unipotent. On note $\mathfrak{g}_{\Pi'}$ l'algèbre dérivée de $\mathfrak{l}_{\Pi'}$ et $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_{\Pi'})$ son centre. D'après le lemme précédent, on peut choisir $w' \in \mathfrak{l}_{\Pi'}$ tel que la forme linéaire φ_w soit régulière sur $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$, avec $w = w' + u_{\Pi'}^-$ et $u_{\Pi'}^- = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi) \setminus \mathcal{K}(\Pi')} x_{-\epsilon_K}$. On note $\mathfrak{s}'$ l'image de $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+(\varphi_w)$ par la projection de $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ sur son algèbre dérivée $\mathfrak{g}_{\Pi'} \oplus \mathfrak{m}_{\Pi'}^+$, parallèlement à $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_{\Pi'})$. Enfin, on note $\mathfrak{l}'$ l'intersection de $\mathfrak{z}(\mathfrak{l}_{\Pi'})$ avec $\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi) \setminus \mathcal{K}(\Pi')} \ker \epsilon_K$.

Avec ces hypothèses et ces notations, on a le résultat suivant :

Lemme 7. (Voir [2, Lemme 2.9]) Soit Π' une partie de Π . Alors

- (i) $\text{ind } \mathfrak{p}_{\Pi'}^+ = \dim \mathfrak{s}' + \dim \mathfrak{l}'$.
- (ii) Soit $\Pi'' \subset \Pi$ tel que Π' et Π'' ne sont pas liées et vérifient $(*)$. On a $[\mathfrak{s}', \mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}^+] \subset \mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ et $\varphi_w([\mathfrak{s}', \mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}^+]) = \{0\}$.

Remarque Soient Π', Π'' deux parties non liées de Π . Alors, $E_{\Pi' \cup \Pi'', \Pi} = E_{\Pi', \Pi} + E_{\Pi'', \Pi}$. Ainsi et compte tenu de la formule (III.1), on a

$$\text{ind } \mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}^+ = \text{ind } \mathfrak{p}_{\Pi'}^+ + \text{ind } \mathfrak{p}_{\Pi''}^+ - (\text{rang } \mathfrak{g} + k_{\Pi} - 2 \dim(E_{\Pi', \Pi} \cap E_{\Pi'', \Pi})). \quad (\text{III.2})$$

Proposition 8. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle et Π', Π'' deux parties non liées de Π . On suppose que $\text{rang } \mathfrak{g} = k_{\Pi}$. Si $\mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}^+$ est stable alors $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ et $\mathfrak{p}_{\Pi''}^+$ le sont.

Démonstration. On garde les notations précédentes. D'après le lemme 5, il existe $f \in (\mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}^+)^*$ stable telle que $f|_{\mathfrak{p}_{\Pi'}^+} = \varphi_w$ avec $w = w' + u_{\Pi'}^-$ et la forme linéaire φ_w est régulière dans $(\mathfrak{p}_{\Pi'}^+)^*$.

Comme $\text{rang } \mathfrak{g} = k_\Pi$ (ie. l'ensemble des $\epsilon_K, K \in \mathcal{K}(\Pi)$ forme une base de $\mathfrak{h}^*$), il vient avec les notations du lemme 7 que $\mathfrak{l}' = \{0\}$ et $\mathfrak{s}' = \mathfrak{p}_{\Pi'}^+(\varphi_w)$. En effet, si $h \in \mathfrak{l}'$, on a d'une part $\epsilon_K(h) = 0$ pour tout $K \in \mathcal{K}(\Pi) \setminus \mathcal{K}(\Pi')$ puisque $h \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi) \setminus \mathcal{K}(\Pi')} \ker \epsilon_K$. D'autre part, le fait que $h \in \mathfrak{z}(\mathfrak{l}_{\Pi'})$ implique que $\epsilon_K(h) = 0$ pour tout $K \in \mathcal{K}(\Pi')$. Ceci montre alors que $h \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \epsilon_K = \{0\}$. Ainsi et compte tenu du lemme 7, on a $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+(\varphi_w) \subset \mathfrak{p}_{\Pi' \cup \Pi''}(f)$. Par suite et comme la forme linéaire f est stable, il résulte du lemme 2 que la forme linéaire φ_w est stable sur $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$. D'où la proposition. $\square$

Les paragraphes qui suivent sont essentiellement consacrés à la démonstration du

Théorème 9. *Une sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie simple de type exceptionnel est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.*

10 Cas des sous-algèbres paraboliques minimales

Dans la suite $\mathfrak{g}$ désigne une algèbre de Lie simple de type exceptionnel. On numérote les racines de Π comme dans le premier paragraphe. Compte tenu de la proposition précédente, dans le cas où $\text{rang } \mathfrak{g} = k_\Pi$, i.e. $\mathfrak{g}$ non de type E_6 , l'étude de la stabilité des sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ se ramène au cas où Π' est connexe. On commence par le cas où $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est minimale, i.e Π' est un singleton.

Définition Une algèbre de Lie algébrique $\mathfrak{g}$ est dite de Frobenius s'il existe une forme linéaire $g \in \mathfrak{g}^*$ telle que $\mathfrak{g}(g) = \{0\}$.

De manière équivalente, cela revient à demander que l'espace dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ admette une orbite coadjointe ouverte.

Proposition 11. *Soit $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique minimale d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type G_2, F_4, E_7, E_8 . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathfrak{p}$ admet une forme linéaire stable.
- (ii) $\mathfrak{p}$ est quasi-réductive.

Démonstration. On commence par le lemme suivant qui nous a été suggéré par Duflo :

Lemme 12. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ une sous-algèbre algébrique. On suppose que $\mathfrak{b}$ est une algèbre de Frobenius et que $\dim \mathfrak{g}/\mathfrak{b} = 1$. Soit $\lambda \in \mathfrak{b}^*$ une forme régulière et $h \in \mathfrak{b}$ l'unique élément tel que $h.\lambda = -\lambda$. Alors si $\text{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}} h = \text{Id}$, $\mathfrak{g}$ n'est pas stable.*

III.10 Cas des sous-algèbres paraboliques minimales

Démonstration. Supposons que $\mathfrak{g}$ est stable. Alors il existe une forme linéaire g stable telle que $g|_{\mathfrak{b}} = \lambda$. Soit $x \in \mathfrak{g}(g)$ non nul. On a $\mathfrak{g}(g) = \mathbb{K}x$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{g}(g)$. Comme $h.\lambda = -\lambda$ et $ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}h = Id$, il résulte que $h.g = -g$ de sorte que $[h, x].g = 0$. Par suite, on a $[h, x] = x$ et donc $\mathfrak{g}(g) \cap [\mathfrak{g}(g), \mathfrak{g}] \neq \{0\}$. Ceci et compte tenu du lemme 2 contredit le fait que la forme linéaire g est stable. $\square$

Soient $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique minimale et non quasi-réductive d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type G_2, F_4, E_7, E_8 et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{p}$ une sous-algèbre de Borel. D'après le lemme 6, $\mathfrak{b}$ est une algèbre de Frobenius et $\lambda = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{\epsilon_K}^*$ est une forme régulière sur $\mathfrak{b}$ ([7, théo 2.7]). L'élément h tel que $h.\lambda = -\lambda$ est semi-simple et vérifie $\epsilon_K(h) = 1$ pour tout $K \in \mathcal{K}(\Pi)$. D'après le lemme précédent, il nous suffit de vérifier que $ad_{\mathfrak{p}/\mathfrak{b}}h = Id$. Cela résulte des calculs qui suivent.

Pour G_2 , on a $\mathcal{E}_{\Pi} = \{3\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1\}$ et donc $h = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2}$. D'autre part et d'après [2], $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+ = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{K}x_{-\alpha_2}$ est l'unique parabolique minimale non quasi-réductive et on a $\alpha_2(h) = -1$.

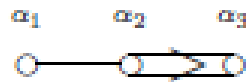
Pour F_4 , on a $\mathcal{E}_{\Pi} = \{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2\}$ et donc $h = h_{\alpha_1} + 3h_{\alpha_2} + 2h_{\alpha_3} + h_{\alpha_4}$. D'autre part et d'après [2], $\mathfrak{p}_{\alpha_1}^+ = \mathfrak{b} \oplus \mathbb{K}x_{-\alpha_1}$ est l'unique parabolique minimale non quasi-réductive et on a $\alpha_1(h) = -1$.

Pour E_7 , on a $\mathcal{E}_{\Pi} = \{2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_7, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ et donc $h = h_{\alpha_1} + \frac{5}{2}h_{\alpha_2} + 3h_{\alpha_3} + 4h_{\alpha_4} + \frac{7}{2}h_{\alpha_5} + 2h_{\alpha_6} + \frac{3}{2}h_{\alpha_7}$. D'autre part et d'après [2], $\mathfrak{p}_{\alpha_1}^+, \mathfrak{p}_{\alpha_4}^+$ et $\mathfrak{p}_{\alpha_6}^+$ sont les sous-algèbres paraboliques minimales non quasi-réductives. On a $\alpha_1(h) = \alpha_4(h) = \alpha_6(h) = -1$.

Pour E_8 , on a $\mathcal{E}_{\Pi} = \{2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 6\alpha_4 + 5\alpha_5 + 4\alpha_6 + 3\alpha_7 + 2\alpha_8, 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + 2\alpha_6 + \alpha_7, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_7, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$ et donc $h = 2h_{\alpha_1} + 4h_{\alpha_2} + 5h_{\alpha_3} + 7h_{\alpha_4} + 6h_{\alpha_5} + 4h_{\alpha_6} + 3h_{\alpha_7} + h_{\alpha_8}$. D'autre part et d'après [2], $\mathfrak{p}_{\alpha_1}^+, \mathfrak{p}_{\alpha_4}^+, \mathfrak{p}_{\alpha_6}^+$ et $\mathfrak{p}_{\alpha_8}^+$ sont les sous-algèbres paraboliques minimales non quasi-réductives et on a $\alpha_1(h) = \alpha_4(h) = \alpha_6(h) = \alpha_8(h) = -1$. $\square$

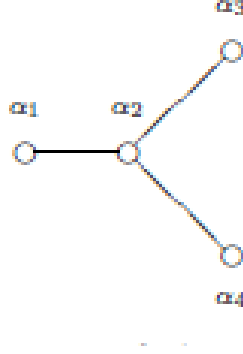
Remarque Lorsque l'algèbre de Lie simple $\mathfrak{g}$ est de type B_n ou D_{2n} , la sous-algèbre de Borel associée est une algèbre de Frobenius. Ainsi, on peut utiliser également le lemme 12 pour démontrer l'équivalence entre la stabilité et la quasi-réductivité dans le cas des sous-algèbres paraboliques minimales :

On reprend les exemples de rang nul et d'indice 1 en dimension 7 et 8 :



Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

Ici $\mathcal{E}_\Pi = \{\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1, \alpha_3\}$ (voir Fig1) et donc $h = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} + h_{\alpha_3}$. D'après [3] $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est l'unique sous-algèbre parabolique minimale non quasi-réductive dans le cas considéré. Comme $\alpha_2(h) = -1$, il suit du lemme 12 que la sous-algèbre $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est non stable.



Ici $\mathcal{E}_\Pi = \{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$ (voir Fig1) et donc $h = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} + h_{\alpha_3} + h_{\alpha_4}$. D'après [3] $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est l'unique sous-algèbre parabolique minimale non quasi-réductive dans ce cas. Comme $\alpha_2(h) = -1$, il suit du lemme 12 que la sous-algèbre $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est non stable.

Ce qui précède et compte tenu des résultats trouvés dans le chapitre 2 est une autre démonstration du théorème 11 dans le cas considéré.

Dans le cas de E_6 , la sous-algèbre de Borel n'est pas une algèbre de Frobenius.

Proposition 13. *Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_6 et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique minimale de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{p}$ est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.*

Démonstration. D'après les résultats de [2], $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+ = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}x_{\alpha_2} \oplus \mathbb{K}x_{-\alpha_2} \oplus \mathfrak{m}_{\alpha_2}^+$ est l'unique sous-algèbre parabolique minimale non quasi-réductive. On suppose que $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est stable. D'après le lemme 5 et par genericité, on peut choisir $w = h + \lambda x_{\alpha_2} + \mu x_{-\alpha_2} + u^- \in \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$, avec $h \in \mathfrak{h}$, $\lambda \neq 0$, et $u^- = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{-\epsilon_K}$, telle que $\varphi_w|_{\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+}$ soit une forme linéaire stable. Comme $\alpha_2 \in E_\Pi$, il vient que $[\mathfrak{b}^+(\varphi_{u^-}), w] = [\cap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \epsilon_K, w] = \{0\}$ de sorte que $\mathfrak{b}^+(\varphi_{u^-}) \subset \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(\varphi_w)$. D'autre part et d'après (III.1), on a $\text{ind } \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+ = \text{ind } \mathfrak{b}^+ + 1$. Ainsi $\mathfrak{b}^+(\varphi_{u^-})$ est un hyperplan de $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(\varphi_w)$. Avec ces hypothèses, on vérifie par un calcul direct que

$$\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(\varphi_w) = \mathbb{K}x \oplus \bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \epsilon_K,$$

avec

$$\begin{aligned}
 x = & x_{\alpha_4} + x_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5} + x_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6} - \frac{2}{\lambda}x_{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5} - \frac{2}{\lambda}x_{-\alpha_2} \\
 & - \frac{2}{\lambda}x_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6} - \frac{2}{\lambda}x_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6} \\
 & + \frac{2}{\lambda}\alpha_2(h)x_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6} - x_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}.
 \end{aligned} \tag{III.3}$$

Soit $y = a_1h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} + a_3h_{\alpha_3} + 3h_{\alpha_4} + (4-a_3)h_{\alpha_5} + (-a_1+2)h_{\alpha_6} - \frac{2}{\lambda}\alpha_2(h)x_{-\alpha_2}$ avec $(a_1, a_3) \in (\mathbb{K})^2$. On a $y \in \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ et $[y, x] = x$, contredisant le fait que la forme linéaire φ_w est stable. Ainsi $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est non stable. $\square$

Remarque Compte tenu de la proposition 8 et des résultats dans [2], on a une équivalence entre la stabilité et la quasi-réductivité pour le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type G_2 et F_4 .

14 Cas des sous-algèbres paraboliques non minimales

On commence par le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie exceptionnelle de type E_6 qui nous sera utile pour la suite :

Remarque D'après [2], les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\{\alpha_2\} \cup \Pi'}$, avec Π' une partie de Π non liée à $\{\alpha_2\}$, sont toutes non quasi-réductives. Remarquons tout d'abord que $K_{\Pi}^+(\alpha_2) \neq K_{\Pi}^+(\beta)$ pour tout $\beta \in \Pi'$. Ceci et compte tenu du lemme 7, montre que l'élément x de (III.3) est dans le stabilisateur d'une forme linéaire générique $f \in (\mathfrak{p}_{\{\alpha_2\} \cup \Pi'})^*$ telle que $f|_{\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+} = \varphi_w$, avec $w = h + \lambda x_{\alpha_2} + \mu x_{-\alpha_2} + \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{-\epsilon_K}$, $h \in \mathfrak{h}$. Ainsi et compte tenu de la démonstration de la proposition 13, il résulte que les sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_{\{\alpha_2\} \cup \Pi'}$, avec Π' une partie de Π non liée à $\{\alpha_2\}$, sont toutes non stables.

D'après les résultats de [2] et compte tenu de la remarque précédente, pour montrer l'équivalence entre la stabilité et la quasi-réductivité dans le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie de type E_6 , il suffit de prouver que $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}}$ et $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}}$ sont non stables.

Proposition 15. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_6 et $\Pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$ (resp. $\Pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$) une partie de Π . Alors la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est non stable.

Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

Démonstration. Par symétrie du diagramme de Dynkin, il suffit de traiter le cas $\Pi' = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$. D'après la formule (III.1), $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}^+$ est une algèbre de Frobenius qui est de codimension 1 dans $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$. D'après [8], $f = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{\epsilon_K}^* + \sum_{L \in \mathcal{K}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\})} x_{-\epsilon_L}^*$ est une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}^+$. Soit alors h l'unique élément de $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}}^+$ tel que $h.f = -f$. L'élément h est semi-simple et vérifie $\epsilon_K(h) = 1$ pour tout $K \in \mathcal{K}(\Pi)$ et $\epsilon_L(h) = -1$ pour tout $L \in \mathcal{K}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\})$. Ainsi, on a $h = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} + h_{\alpha_3} + 3h_{\alpha_4} + 3h_{\alpha_5} + h_{\alpha_6}$. Comme $\alpha_6(h) = -1$, il résulte du lemme 12 que la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}}$ est non stable. $\square$

Proposition 16. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_7, E_8 et $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique non minimale de $\mathfrak{g}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathfrak{p}$ admet une forme linéaire stable.
- (ii) $\mathfrak{p}$ est quasi-réductive.

Démonstration. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_n avec $n = 7, 8$, $\mathfrak{p}$ une sous-algèbre parabolique non minimale de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{j}$. On a $\dim \mathfrak{j} > 0$ (voir [2]), $\mathfrak{j} \subset \mathfrak{h} \subset \mathfrak{p}^{\mathfrak{j}} \subset \mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ et $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Delta, \alpha|_{\mathfrak{j}}=0} \mathfrak{g}_{\alpha})$.

Soit $\mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}} = \{\mathfrak{h} \cap (\cap_{\alpha|_{\mathfrak{j}}=0} \ker \alpha)\}$ qui n'est autre que le centre de $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$. Ainsi, on a

$$\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}} \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_k,$$

où les $\mathfrak{g}_i$, pour $1 \leq i \leq k$, sont des algèbres de Lie simples puisque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathfrak{j}}$ est réductive. Ainsi, on a $\mathfrak{p}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{z}_{\Delta^{\mathfrak{j}}} \oplus \mathfrak{p}^{\mathfrak{j},1}$ avec $\mathfrak{p}^{\mathfrak{j},1}$ produit direct des sous-algèbres paraboliques $\mathfrak{p}_l^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{p}^{\mathfrak{j}} \cap \mathfrak{g}_l$ des $\mathfrak{g}_l$, $1 \leq l \leq k$. Comme la sous-algèbre $\mathfrak{p}$ est non quasi-réductive, au moins l'une de ces paraboliques est non nulle et non quasi-réductive. C'est une parabolique d'une algèbre de Lie simple orthogonale ou bien d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_k avec $k \leq n - 1$. Compte tenu de [1], toutes les paraboliques non quasi-réductives d'une algèbre de Lie simple orthogonale sont non stables. Le cas E_7 se déduit donc du cas E_6 puis le cas E_8 du cas E_7 . Ceci montre que $\mathfrak{p}^{\mathfrak{j}}$ est non stable. Compte tenu de la proposition 15 du premier chapitre, $\mathfrak{p}$ est non stable. Ceci achève la démonstration du théorème 9. $\square$

Exemple Nous allons donner deux exemples permettant au lecteur d'illustrer la démonstration de la proposition précédente.

- On prend pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_7 et la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}^+$. D'après [2], $\mathfrak{p}$ est de rang 1. La forme linéaire $f = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{\epsilon_K}^* + x_{-\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4}^* + x_{-\alpha_3}^*$ est régulière sur $\mathfrak{p}$ (voir [8]). Ici on a $\mathfrak{j} = \mathbb{K}(x_{\alpha_3} + x_{-\alpha_3}) \subset \mathfrak{g}(f)$ de sorte que

III.14 Cas des sous-algèbres paraboliques non minimales

$\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan-Duflo de $\mathfrak{p}$. On vérifie que

$$\mathfrak{z}_{\Delta^+} = \mathfrak{j} \text{ et } \mathfrak{p}^{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j} \oplus \mathfrak{h}_{\Pi'} \oplus \left(\sum_{\alpha \in \Delta_{\Pi'}^+} \mathbb{K}x_{\alpha} \right) \oplus \mathbb{K}x_{-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4},$$

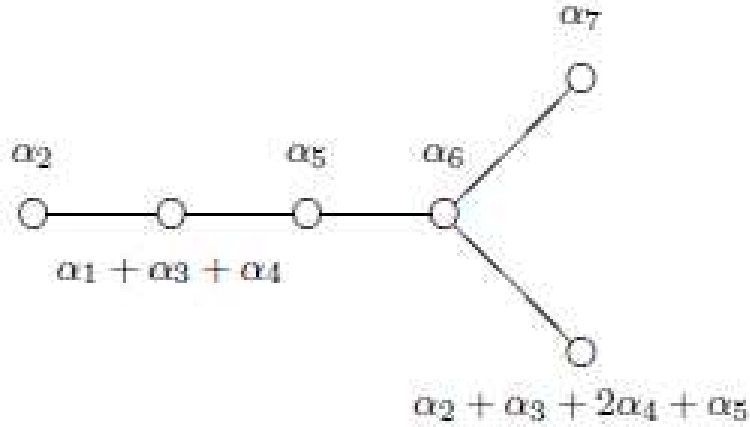
avec

$$\Pi' = \{\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_3 = \alpha_5, \beta_4 = \alpha_6, \beta_5 = \alpha_7, \beta_6 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5\},$$

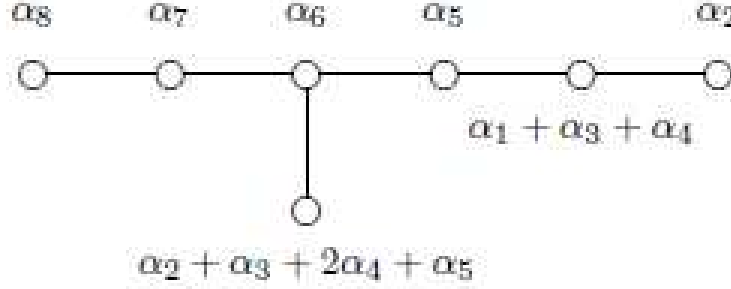
et

$\mathfrak{h}_{\Pi'}$ le sous-espace de $\mathfrak{h}$ engendré par les h_{α} , $\alpha \in \Pi'$.

Remarquons que $\mathfrak{p}^{\mathfrak{j},1} = \mathfrak{h}_{\Pi'} \oplus \left(\sum_{\alpha \in \Delta_{\Pi'}^+} \mathbb{K}x_{\alpha} \right) \oplus \mathbb{K}x_{-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4}$ est une sous-algèbre parabolique minimale d'une algèbre de Lie orthogonale de type D_6 associée à la racine β_2 (qui est non quasi-réductive d'après [3] et donc non stable d'après [1]) dont le graphe de Dynkin associé est le suivant :



- On prend pour $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_8 et la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}}^+$. Dans ce cas $\mathfrak{p}^{\mathfrak{j},1} = \mathfrak{h}_{\Pi'} \oplus \left(\sum_{\alpha \in \Delta_{\Pi'}^+} \mathbb{K}x_{\alpha} \right) \oplus \mathbb{K}x_{-\alpha_1-\alpha_3-\alpha_4}$, $\Pi' = \{\beta_1 = \alpha_8, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \beta_3 = \alpha_7, \beta_4 = \alpha_6, \beta_5 = \alpha_5, \beta_6 = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \beta_7 = \alpha_2\}$ est une sous-algèbre parabolique minimale d'une algèbre de Lie simple exceptionnelle de type E_7 associée à la racine β_6 (qui est non quasi-réductive d'après [2] et donc non stable d'après ce qui précède) dont le graphe de Dynkin associé est le suivant



Remarque Soient π', π'' deux parties de π . On suppose que $\pi'' \subset \pi'$ et $\mathcal{K}(\pi') \subset \mathcal{K}(\pi)$. Alors, on a

$$\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'} \text{ est stable si et seulement si } \mathfrak{p}_{\pi''}^+ \text{ est stable .}$$

En effet, comme $\mathcal{K}(\pi') \subset \mathcal{K}(\pi)$, on a $\dim E_{\pi'', \pi} = \dim E_{\pi'', \pi'} + (k_\pi - k_{\pi'})$ de sorte que, compte tenu de la formule (III.1), $\text{ind } \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'} = \text{ind } \mathfrak{p}_{\pi''}^+ + (k_\pi - k_{\pi'})$. D'après le lemme 5 et avec les notations de la section 3, on peut choisir $w' \in \mathfrak{l}_{\pi'}$ tel que $\varphi_{w'+u_{\pi'}^-}|_{\mathfrak{p}_{\pi''}^+}$ (resp. $\varphi_{w'}|_{\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}}$) soit une forme linéaire régulière sur $\mathfrak{p}_{\pi''}^+$ (resp. sur $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$). Par suite, on montre que $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}(\varphi_{w'}) = \mathfrak{p}_{\pi''}^+(\varphi_{w'+u_{\pi'}^-}) \oplus \sum_{K \in \mathcal{K}(\pi) \setminus \mathcal{K}(\pi')} \mathbb{K} h_{\epsilon_K}$ de sorte que la forme linéaire $\varphi_{w'+u_{\pi'}^-}$ est de type réductif sur $\mathfrak{p}_{\pi''}^+$ si et seulement si la forme linéaire $\varphi_{w'}$ est de type réductif sur $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$. Ce résultat est énoncé sous forme d'un théorème dit de transitivité (voir [2, Théorème 2.1]). De plus, on peut vérifier que

$$\mathfrak{p}_{\pi''}^+(\varphi_{w'+u_{\pi'}^-}) \cap [\mathfrak{p}_{\pi''}^+(\varphi_{w'+u_{\pi'}^-}), \mathfrak{p}_{\pi''}^+] = \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}(\varphi_{w'}) \cap [\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}(\varphi_{w'}), \mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}].$$

Ceci montre que $\varphi_{w'+u_{\pi'}^-}$ est une forme linéaire stable sur $\mathfrak{p}_{\pi''}^+$ si et seulement la forme linéaire $\varphi_{w'}$ est stable sur $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'}$.

D'après [2] et dans le cas où l'algèbre de Lie est de type E_7 , la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}}$ est non quasi-réductive. Soient $\pi'' = \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ et $\pi' = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$. On a bien $\pi'' \subset \pi'$ et $\mathcal{K}(\pi') \subset \mathcal{K}(\pi)$. De plus, on a $\mathfrak{q}_{\pi'', \pi'} = \mathbb{K}h_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ désigne la sous-algèbre parabolique d'une algèbre de Lie orthogonale de type D_6 qui stabilise le drapeau suivant

$$\mathcal{V} = \{\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq V_3 = V\},$$

avec $\dim V_1 = 1$, $\dim V_2 = 5$ et $\dim V_3 = \dim V = 6$. Remarquons que la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ contient deux sous-espace consécutifs qui sont tous deux de dimension impaire et que α_1 est l'unique racine simple tel que $\langle \alpha_1, \epsilon_K^\vee \rangle = \alpha_1(h_{\epsilon_K}) > 0$. Cette sous-algèbre parabolique est non quasi-réductive d'après [3] et donc elle est non stable d'après [1]. Ceci et compte tenu

III.14 Cas des sous-algèbres paraboliques non minimales

de ce qui précède, montre que la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\pi''}^+$ est non stable. On obtient ainsi une autre démonstration de la proposition précédente dans le cas considéré.

Compte tenu des résultats trouvés dans [2] concernant la classification des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles qui sont quasi-réductives et de ce qui précède, on a le résultat suivant :

Théorème 17. *On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de type G_2, F_4, E_7, E_8 . Soit Π' une partie de Π et $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ la sous-algèbre parabolique associée.*

- (i) *Si $\mathfrak{g}$ est de type G_2 , alors $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est stable si et seulement si Π' est différent de $\{\alpha_2\}$.*
- (ii) *Si $\mathfrak{g}$ est de type F_4 , alors $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est stable si et seulement toute composante connexe de Π' est différente de $\{\alpha_1\}$.*
- (iii) *Si $\mathfrak{g}$ est de type E_7 , alors $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est stable si et seulement toute composante connexe de Π' est différente des sous-ensembles $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_4\}$, $\{\alpha_6\}$, $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ et $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$.*
- (iv) *Si $\mathfrak{g}$ est de type E_8 , alors $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est stable si et seulement toute composante connexe de Π' est différente des sous-ensembles $\{\alpha_1\}$, $\{\alpha_4\}$, $\{\alpha_6\}$, $\{\alpha_8\}$, $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, $\{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$, $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, $\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$ et $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$.*

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie exceptionnelle telle que $\text{rang } \mathfrak{g} = k_\pi$, i.e $\mathfrak{g}$ n'est pas de type E_6 . On décrit dans le tableau ci-après les parties connexes $\Pi' \subset \Pi$ telles que $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est non stable

Type F_4 :	<table> <tr><td>$\Pi' \subset \Pi$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1\}$</td></tr> </table>	$\Pi' \subset \Pi$	$\{\alpha_1\}$									
$\Pi' \subset \Pi$												
$\{\alpha_1\}$												
Type E_7 :	<table> <tr><td>$\Pi' \subset \Pi$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_4\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_6\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$</td></tr> </table>	$\Pi' \subset \Pi$	$\{\alpha_1\}$	$\{\alpha_4\}$	$\{\alpha_6\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$	$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$				
$\Pi' \subset \Pi$												
$\{\alpha_1\}$												
$\{\alpha_4\}$												
$\{\alpha_6\}$												
$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$												
$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$												
$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$												
Type E_8 :	<table> <tr><td>$\Pi' \subset \Pi$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_4\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_6\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_8\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$</td></tr> <tr><td>$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$</td></tr> </table>	$\Pi' \subset \Pi$	$\{\alpha_1\}$	$\{\alpha_4\}$	$\{\alpha_6\}$	$\{\alpha_8\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$	$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	$\{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$	$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$	$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$
$\Pi' \subset \Pi$												
$\{\alpha_1\}$												
$\{\alpha_4\}$												
$\{\alpha_6\}$												
$\{\alpha_8\}$												
$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4\}$												
$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$												
$\{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$												
$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$												
$\{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$												
$\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$												

Tableau III.2 – Les parties connexes $\Pi' \subset \Pi$ pour laquelle la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est non stable

L'algèbre de Lie de type E_6 est la seule algèbre de Lie de type exceptionnel pour laquelle on ne peut pas ramener l'étude de la stabilité d'une sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\Pi'}$ au cas où

Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

Π' est connexe. On décrit dans le tableau ci-après les différentes parties $\Pi' \subset \Pi$ telles que la sous-algèbre parabolique associée $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ est non stable

$\Pi' \subset \Pi$
$\{\alpha_2\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2\}, \{\alpha_2, \alpha_6\}$
$\{\alpha_3, \alpha_2\}, \{\alpha_2, \alpha_5\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6\}$
$\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \{\alpha_2, \alpha_5, \alpha_6\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}, \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_6\}, \{\alpha_2, \alpha_1, \alpha_5, \alpha_6\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6\}$
$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$

Tableau III.3 – Les parties $\Pi' \subset \Pi$ pour laquelle la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ associée est non stable.

18 Présentation des calculs avec GAP4

On reprend le cas de la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ dans G_2 . Soit u^- l'élément de $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^-$ défini par

$$u^- = \sum_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} x_{-\epsilon_K} = X_{-3\alpha_1-2\alpha_2} + X_{-\alpha_1}, \quad g = \varphi_{\mathfrak{b}}(u^-).$$

D'après la démonstration du [7, theo 2.9], g est un élément stable de $(\mathfrak{b})^*$. Supposons que l'ensemble $(\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+)_s^*$ des formes linéaires stables sur $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ soit non vide. Il existe donc $f \in (\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+)_s^*$ tel que $f|_{\mathfrak{b}}$ soit régulière sur $\mathfrak{b}$. On peut alors supposer f de la forme $f = \varphi_v$, avec $v = \lambda X_{\alpha_2} + u^-$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\lambda \neq 0$, on a $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(f) = \mathbb{K}x$, avec

$$x = X_{\alpha_1} + \mu_1 X_{2\alpha_1+\alpha_2} + \mu_2 X_{3\alpha_1+2\alpha_2} + \mu_3 X_{-\alpha_2},$$

où μ_1, μ_2, μ_3 sont des scalaires non nuls (dépendant, par exemple, du choix d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$).

Grâce à GAP4, on peut vérifier le calcul du stabilisateur $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(f)$ et son intersection avec le crochet $[\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+, \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(f)]$ afin de vérifier la stabilité de la forme linéaire f .

La démarche générale est la suivante : on définit l'algèbre de Lie $\mathbf{L}$ dans laquelle on veut travailler grâce à la commande "SimpleLieAlgebra", on définit un système de racines "Root-System", un système de racines positives correspondant "PositiveRoots" puis des systèmes de vecteurs positifs et négatifs associés "PositiveRootVectors" et "NegativeRootVectors". La commande "CanonicalGenerators" donne une base de la sous-algèbre de Cartan. On peut désormais

faire des calculs dans l'algèbre de Lie L .

Pour définir la sous-algèbre parabolique $P := \mathfrak{p}_{\Pi'}^+$ et ces générateurs, on utilise les commandes "Concatenation" et "Subalgebra". La commande "List(Basis(P))" donne une base de la sous-algèbre parabolique P , que l'on note bP . Ensuite, on définit l'élément $v = u^- + \lambda x_{\alpha_2}$ de $\mathfrak{p}_{\Pi'}^-$. Notons ici que GAP4 n'est pas adapté au calcul formel (il faut donner donc une valeur pour λ). Les étapes suivantes permettent de calculer le stabilisateur de $f = \varphi_v$ dans P : On calcule tout d'abord l'espace V engendré par les crochets $v * bP[i]$, pour $i = 1, \dots, dp$, dp désigne la dimension de la sous-algèbre parabolique P . On obtient l'orthogonal K de l'espace V pour la forme de Killing avec la commande "KappaPerp". Ainsi, le stabilisateur de f sur P , que l'on note S , n'est autre que l'intersection de K et P . La commande "List(Basis(S))" donne une base du stabilisateur S . Pour vérifier la stabilité de la forme linéaire f , on définit tout d'abord l'espace W engendré par les crochets des éléments de la base du stabilisateur S par les éléments de bP , on calcule ensuite l'intersection de W avec S par la commande "Intersection(W,S)", que l'on note A . Alors, si A est un espace de dimension 0 "vector space of dimension 0 over rationals", la forme linéaire f est stable sinon elle est non stable.

```
> L := SimpleLieAlgebra("G",2,Rationals);
< Lie algebra of dimension 14 over rationals >
> R := RootSystem(L);
< root system of rank 2 >
> x := PositiveRootVectors(R);
[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6]
> y := NegativeRootVectors(R);
[v.7, v.8, v.9, v.10, v.11, v.12]
> g := CanonicalGenerators(R);
[[v.1, v.2], [v.7, v.8], [v.13, v.14]]
> h := g[3];
[v.13, v.14]
> gP := Concatenation(g[1], h, y[2]);
[v.1, v.2, v.13, v.14, v.8]
> P := Subalgebra(L, gP);
< Lie algebra over rationals, with 5 generators >
> dp := Dimension(P);
9
> a := 1; ; lambda := 2; ;
> u2 := a * y[6] + a * y[1]; ; u1 := lambda * x[2]; ; v := u1 + u2;
```

Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

```

2 * v.2 + v.7 + v.12
> bP := List(Basis(P));
[v.1, v.2, v.13, v.14, v.8, v.3, v.4, v.5, v.6]
> l := []; for i in [1..dp] do l[i] := v * bP[i]; od; l;
[(2) * v.3 + (-1) * v.13, (-1) * v.11, (6) * v.2 + (2) * v.7, (-4) * v.2 + (-1) * v.7 + v.12, v.9 + (2) *
v.14, (-3) * v.2 + v.10, (-2) * v.3 + (-1) * v.9, (-1) * v.4 + (-2) * v.6 + v.8, (-1) * v.13 + (-2) * v.14]
> V := Subspace(L, l); K := KappaPerp(L, V);
<vector space of dimension 5 over Rationals>
> S := Intersection(K, P);
<vector space of dimension 1 over Rationals>
> bS := List(Basis(S));
[v.1 + (-1) * v.4 + (-1) * v.6 + (-1) * v.8]
> J := []; for i in [1..dp] do J[i] := bP[i] * bS[1]; od; J;
[(3) * v.5, v.3 + (-1) * v.14, (2) * v.1 + (-1) * v.4 + (-3) * v.8, (-1) * v.1 + (-1) * v.6 + (2) *
v.8, v.5, v.1 + (2) * v.4 + (-3) * v.6, (3) * v.5, 0 * v.1, (-1) * v.5]
> W := Subspace(L, J);
<vector space over Rationals, with 9 generators>
> A := Intersection(S, W);
<vector space of dimension 1 over Rationals>

```

Vérification :

- $v.1$ correspond au vecteur X_{α_1} .
- $v.4$ correspond au vecteur $X_{2\alpha_1 + \alpha_2}$.
- $v.6$ correspond au vecteur $X_{3\alpha_1 + 2\alpha_2}$.
- $v.8$ correspond au vecteur $X_{-\alpha_2}$.

Le sous-espace A n'est autre que $[\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+, \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(f)] \cap \mathfrak{p}_{\alpha_2}^+(f)$. Comme la dimension de A est non nulle, on en déduit, compte tenu du lemme 2, que la forme linéaire f n'est pas stable. Par suite, la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\alpha_2}^+$ est non stable.

Cas de sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}_{\alpha_1}^+$ dans E_7 :

```

> L := SimpleLieAlgebra("E", 7, Rationals);
< Lie algebra of dimension 133 over rationals >
> R := RootSystem(L);
< root system of rank 7 >
> x := PositiveRootVectors(R);
[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7, v.8, v.9, v.10, v.11, v.12, v.13, v.14, v.15, v.16,

```

```

v.17, v.18, v.19, v.20, v.21, v.22, v.23, v.24, v.25, v.26, v.27, v.28, v.29, v.30, v.31,
v.32, v.33, v.34, v.35, v.36, v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42, v.43, v.44, v.45, v.46,
v.47, v.48, v.49, v.50, v.51, v.52, v.53, v.54, v.55, v.56, v.57, v.58, v.59,
v.60, v.61, v.62, v.63]
> y := NegativeRootVectors(R);
[v.64, v.65, v.66, v.67, v.68, v.69, v.70, v.71, v.72, v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78,
v.79, v.80, v.81, v.82, v.83, v.84, v.85, v.86, v.87, v.88, v.89, v.90, v.91, v.92, v.93,
v.94, v.95, v.96, v.97, v.98, v.99, v.100, v.101, v.102, v.103, v.104, v.105, v.106,
v.107, v.108, v.109, v.110, v.111, v.112, v.113, v.114, v.115, v.116, v.117, v.118,
v.119, v.120, v.121, v.122, v.123, v.124, v.125, v.126]
> g := CanonicalGenerators(R);
[[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7], [v.64, v.65, v.66, v.67, v.68, v.69, v.70]
, [v.127, v.128, v.129, v.130, v.131, v.132, v.133]]
> h := g[3];
[v.127, v.128, v.129, v.130, v.131, v.132, v.133]
> gP := Concatenation(g[1], h, y[1]);
[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7, v.127, v.128, v.129, v.130, v.131, v.132, v.133, v.64]
> P := Subalgebra(L, gP);
<Lie algebra over rationals, with 15 generators>
> dp := Dimension(P);
71
> a := 1;; λ := 3;;
> u2 := a*y[63] + a*y[49] + a*y[28] + a*y[7] + a*y[2] + a*y[3] + a*y[5];; u1 := λ*x[1];; v := u1 + u2;
(3) * v.1 + v.65 + v.66 + v.68 + v.70 + v.91 + v.112 + v.126
> bP := List(Basis(P));
[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7, v.127, v.128, v.129, v.130, v.131, v.132, v.133,
v.64, v.8, v.9, v.10, v.15, v.11, v.14, v.12, v.16, v.17, v.22, v.21, v.13, v.18,
v.23, v.24, v.29, v.27, v.19, v.25, v.30, v.31, v.36, v.34, v.20, v.26, v.33, v.39,
v.28, v.35, v.41, v.32, v.38, v.44, v.40, v.45, v.43, v.48, v.49, v.52, v.37, v.42,
v.47, v.46, v.51, v.55, v.50, v.54, v.57, v.59, v.53, v.56, v.58, v.60, v.61, v.62, v.63]
> l := [];; for i in [1..dp] do l[i] := v * bP[i]; od;; l;
[v.125, (-1) * v.128, (-3) * v.8 + (-1) * v.129, v.85, (-1) * v.131, v.108, (-1) * v.133, (-6) * v.1 +
(-1) * v.66 + (-1) * v.91 + (-1) * v.112 + v.126, (2) * v.65, (3) * v.1 + (2) * v.66, (-1) * v.65 + (-1) *
v.66 + (-1) * v.68 + v.91, (2) * v.68, (-1) * v.68 + (-1) * v.70 + (-1) * v.91 + v.112, (2) * v.70, (-1) *
v.71 + (-1) * v.95 + (-1) * v.115 + (3) * v.127, v.1 + (-1) * v.124, (-1) * v.4 + (-1) * v.80, (-1) * v.4 +

```

Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

```

(-3)*v.14+(-1)*v.79, (-1)*v.9+(-1)*v.10+(-3)*v.20+v.74, v.4+(-1)*v.78, v.123, (-1)*
v.6+v.104, v.9+(-1)*v.11+v.73, v.10+(-1)*v.11+(-3)*v.21+v.72, v.15+(-1)*v.16+(-1)*
v.17+(-3)*v.26+(-1)*v.67, v.14+(-1)*v.121, v.6+(-1)*v.103, v.99, (-1)*v.18+(-1)*
v.94, (-1)*v.18+(-3)*v.27+(-1)*v.93, (-1)*v.23+(-1)*v.24+(-3)*v.33+v.88, v.119, v.12+
(-1)*v.13+(-1)*v.98, v.18+(-1)*v.92, v.23+(-1)*v.25+v.87, v.24+(-1)*v.25+(-3)*v.34+
v.86, v.29+(-1)*v.30+(-1)*v.31+(-3)*v.39+(-1)*v.81, v.27+(-1)*v.116, (-1)*v.14+
v.122, v.20+(-1)*v.21+(-1)*v.120, (-1)*v.27+v.117, v.33+(-1)*v.34+(-1)*v.113, (-3)*
v.32+(-1)*v.128+(-1)*v.129+(-2)*v.130+(-1)*v.131, (-1)*v.6+(-3)*v.38+v.82, (-1)*
v.13+v.35+(-3)*v.44+(-1)*v.75, v.1+v.118, (-1)*v.114, v.38+v.109, v.12+v.35+(-3)*
v.43+v.76, v.19+v.40+v.41+(-3)*v.48+(-1)*v.69, v.38+v.110, v.43+v.44+(-1)*
v.105, (-3)*v.52+(-1)*v.128+(-1)*v.129+(-2)*v.130+(-2)*v.131+(-2)*v.132+(-1)*
v.133, v.1+v.100, (-1)*v.8+(-1)*v.32+(-1)*v.115, (-1)*v.38+v.111, v.42+(-1)*v.44+
(-1)*v.106, v.42+(-1)*v.43+(-1)*v.107, v.46+v.47+(-1)*v.48+v.101, (-1)*v.8+(-1)*
v.52+(-1)*v.95, (-1)*v.27+v.102, (-1)*v.34+v.50+(-1)*v.96, (-1)*v.14+v.89, (-1)*v.21+
v.57+(-1)*v.83, v.33+v.50+v.97, v.39+v.53+v.54+(-1)*v.90, v.20+v.57+v.84, v.26+v.58+
v.59+(-1)*v.77, v.32+v.52+v.71, (-1)*v.37+(-1)*v.55+v.61+(3)*v.63+(-1)*v.64, (-2)*
v.127+(-2)*v.128+(-3)*v.129+(-4)*v.130+(-3)*v.131+(-2)*v.132+(-1)*v.133]
> V :=Subspace(L,l); ;K :=KappaPerp(L,V);
<vector space of dimension 62 over Rationals>
> S :=Intersection(K,P);
<vector space of dimension 1 over Rationals>
> bS := List(Basis(S));
[v.3+v.28+(2/3)*v.37+v.49+(2/3)*v.55+(-2/3)*v.61+(-1)*v.63+(-2/3)*v.64]
> J :=[]; ;for i in [1..dp] do J[i] :=bP[i]*bS[1];od; ;J;
[(-1)*v.8+(-1)*v.32+(-1)*v.52+(-2/3)*v.127, 0*v.1, (-2/3)*v.62, v.10+(2/3)*v.57, 0*
v.1, v.35+(2/3)*v.42, 0*v.1, (-1)*v.3+(-1)*v.28+(-1)*v.49+(-1)*v.63+(4/3)*v.64, 0*
v.1, (2)*v.3+(2/3)*v.37+(2/3)*v.55+(2/3)*v.61+(-2/3)*v.64, (-1)*v.3+v.28+(-2/3)*v.55+
(-2/3)*v.61, 0*v.1, (-1)*v.28+(-2/3)*v.37+v.49+(2/3)*v.55, 0*v.1, (-1)*v.62, (-2/3)*
v.3+v.37+v.55+(2/3)*v.63, v.15+(-2/3)*v.58, 0*v.1, 0*v.1, v.17+(2/3)*v.59, (-2/3)*v.10+
v.57, (-1)*v.40+(-2/3)*v.46, v.22+(-2/3)*v.60, 0*v.1, 0*v.1, (-2/3)*v.17+v.59, v.41+
(2/3)*v.47, v.24+(2/3)*v.50, v.29+(-2/3)*v.53, 0*v.1, 0*v.1, (-2/3)*v.24+v.50, (-1)*
v.45+(-2/3)*v.51, v.31+(2/3)*v.54, v.36+(-2/3)*v.56, 0*v.1, 0*v.1, (-2/3)*v.31+
v.54, (-2/3)*v.15+(-1)*v.58, (-2/3)*v.22+(-1)*v.60, (-2/3)*v.29+(-1)*v.53, (-2/3)*
v.36+(-1)*v.56, (-2/3)*v.62, 0*v.1, 0*v.1, (-2/3)*v.28+v.37+(-1)*v.61+(2/3)*
v.63, (-2/3)*v.35+v.42, (-2/3)*v.41+v.47, 0*v.1, 0*v.1, (-2/3)*v.40+v.46, (-2/3)*v.45+

```

```
v.51, (-2/3)*v.62, (-2/3)*v.49+v.55+(-1)*v.61+(2/3)*v.63, v.62, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, 0*
v.1, v.62, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, 0*v.1, (-1)*v.62, 0*v.1, (2/3)*v.62]
> W :=Subspace(L,J);
<vector space over Rationals, with 71 generators>
> A :=Intersection(S,W);
<vector space of dimension 1 over Rationals>.
```

Vérification du calcul effectué dans la démonstration de la proposition 13 :

```
> L :=SimpleLieAlgebra("E",6,Rationals);
< Lie algebra of dimension 78 over rationals >
> R :=RootSystem(L);
< root system of rank 6 >
> x :=PositiveRootVectors(R);
[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.7, v.8, v.9, v.10, v.11, v.12, v.13, v.14, v.15, v.16, v.17,
v.18, v.19, v.20, v.21, v.22, v.23, v.24, v.25, v.26, v.27, v.28, v.29, v.30, v.31, v.32,
v.33, v.34, v.35, v.36]
> y :=NegativeRootVectors(R);
[v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42, v.43, v.44, v.45, v.46, v.47, v.48, v.49, v.50, v.51,
v.52, v.53, v.54, v.55, v.56, v.57, v.58, v.59, v.60, v.61, v.62, v.63, v.64, v.65, v.66,
v.67, v.68, v.69, v.70, v.71, v.72]
> g :=CanonicalGenerators(R);
[[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6], [v.37, v.38, v.39, v.40, v.41, v.42],
[v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78]]
> h := g[3];
[v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78]
> gP := Concatenation(g[1], h, y[2]);
[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78, v.38]
> P :=Subalgebra(L,gP);
<Lie algebra over rationals, with 13 generators>
> dp :=Dimension(P);
43
> a := 1;; λ := 3;; μ = 5;;
> u4 := a * h[1] + a * h[2] + a * h[3] + a * h[4] + a * h[5] + a * h[6];; u3 := a * y[36] + a * y[23] +
a * y[15] + a * y[4];;
> u2 := λ * x[2];; u1 := μ * y[2];; w := u1 + u2 + u3 + u4;;
> bP :=List(Basis(P));
```

Chapitre III. Stabilité pour Le cas des sous-algèbres paraboliques des algèbres de Lie simples exceptionnelles

```

[v.1, v.2, v.3, v.4, v.5, v.6, v.73, v.74, v.75, v.76, v.77, v.78, v.38, v.7, v.8, v.9, v.13,
v.10, v.12, v.11, v.14, v.15, v.19, v.18, v.16, v.20, v.21, v.25, v.23, v.17, v.22, v.27,
v.24, v.28, v.26, v.30, v.31, v.33, v.29, v.32, v.34, v.35, v.36]
> l := []; for i in [1..dp] do l[i] := w * bP[i]; od; ; l;
[v.1+(-1)*v.57, v.2+v.71+(-2)*v.74, (-1)*v.46, (-1)*v.4+(-3)*v.8+(-1)*v.76, v.45, v.6+
v.54, (-1)*v.51+v.59, (-6)*v.2+(4)*v.38+(-1)*v.40+(-1)*v.51+(-1)*v.59+v.72, (-1)*
v.40+v.51, (3)*v.2+(-2)*v.38+(2)*v.40, (-1)*v.40+v.51, (-1)*v.51+v.59, (-1)*v.38+
(-1)*v.44+(-1)*v.55+(-1)*v.63+(3)*v.74, v.7+(-1)*v.52, v.2+(-2)*v.4+(-1)*
v.70, v.3+(-1)*v.9+(-3)*v.13+(-1)*v.41, (-2)*v.9+v.69, (-1)*v.5+(-1)*v.10+(-3)*
v.14+v.39, v.7+(-3)*v.17+(-1)*v.47, v.11+v.48, (-2)*v.10+v.68, (-1)*v.15+(-3)*
v.19+(-1)*v.75+(-1)*v.76+(-1)*v.77, v.2+(-2)*v.15+(-1)*v.66, v.1+(-3)*v.22+
(-1)*v.42, (-1)*v.11+(-3)*v.20+v.43, (-2)*v.16+v.20+(-1)*v.65, (-1)*v.6+(-3)*
v.25+v.37, (-2)*v.21+v.25+v.62, v.23+(-3)*v.27+(-1)*v.73+(-1)*v.75+(-1)*v.76+
(-1)*v.77+(-1)*v.78, (-2)*v.12+v.17+(-1)*v.67, (-2)*v.18+v.22+v.64, v.2+(-2)*
v.23+(2)*v.27+(-1)*v.60, v.8+v.19+(-1)*v.24+v.63, v.25+(-1)*v.58, v.22+(-1)*
v.61, v.8+v.27+v.30+v.55, (-1)*v.20+v.53, v.14+v.33+(-1)*v.49, (-1)*v.17+v.56, v.13+
v.32+(-1)*v.50, v.19+v.27+v.34+v.44, v.24+v.30+v.34+(3)*v.36+(-1)*v.38, (2)*
v.35+v.36+(-1)*v.73+(-2)*v.74+(-2)*v.75+(-3)*v.76+(-2)*v.77+(-1)*v.78]
> V := Subspace(L, l); ; K := KappaPerp(L, V);
<vector space of dimension 37 over Rationals>
> S := Intersection(K, P);
<vector space of dimension 3 over Rationals>
> bS := List(Basis(S));
[v.4+v.15+v.23+(-2/3)*v.24+(-2/3)*v.30+(-2/3)*v.34+(2/3)*v.35+(-1)*v.36+
(-2/3)*v.38, v.73+(-1)*v.78, v.75+(-1)*v.77].
Ici

```

$$\begin{aligned}
\bigcap_{K \in \mathcal{K}(\Pi)} \ker \epsilon_K &= \mathbb{K}(v.73 + (-1) * v.78) \oplus \mathbb{K}(v.75 + (-1) * v.77) \\
&= \mathbb{K}(h_{\alpha_1} - h_{\alpha_6}) \oplus \mathbb{K}(h_{\alpha_3} - h_{\alpha_5})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
x = & v.4 + v.15 + v.23 + (-2/3) * v.24 + (-2/3) * v.30 + (-2/3) * v.34 + \\
& (2/3) * v.35 + (-1) * v.36 + (-2/3) * v.38.
\end{aligned}$$

- $v.4$ correspond au vecteur X_{α_4} .
- $v.15$ correspond au vecteur $X_{\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}$.
- $v.23$ correspond au vecteur $X_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}$.
- $v.24$ correspond au vecteur $X_{\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5}$.
- $v.30$ correspond au vecteur $X_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}$.
- $v.34$ correspond au vecteur $X_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}$.
- $v.35$ correspond au vecteur $X_{\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}$.
- $v.36$ correspond au vecteur $X_{\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6}$.
- $v.35$ correspond au vecteur $X_{-\alpha_2}$.

Références bibliographiques

- [1] K. AMMARI – « Stabilité des sous-algèbres paraboliques de $\mathfrak{so}(n)$ », J. Lie Theory **24** (2013), p. 97–122. [60](#), [61](#), [62](#)
- [2] K. BAUR et A. MOREAU – « Quasi-reductive (bi)parabolic subalgebras in reductive Lie algebras », Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **61** (2011), no. 2, p. 417–451. [49](#), [55](#), [57](#), [58](#), [59](#), [60](#), [61](#), [62](#), [63](#)
- [3] M. DUFLO, M. S. KHALGUI et P. TORASSO – « Algèbres de Lie quasi-réductives », Transformation Groups **17** (2012), no. 2, p. 417–470. [58](#), [61](#), [62](#)
- [4] A. JOSEPH – « On semi-invariants and index for biparabolic (seaweed) algebras. I », J. Algebra **305** (2006), no. 1, p. 487–515. [54](#)
- [5] B. KOSTANT – « The cascade of orthogonal roots and the coadjoint structure of the nilradical of a Borel subgroup of a semisimple Lie group », preprint arXiv :1101.5382 (2011). [50](#)
- [6] — , « Center of $u(n)$, cascade of orthogonal roots, and a construction of lipsman-wolf », preprint arXiv :1201.4494 (2012). [50](#)
- [7] P. TAUVEL et R. W. T. YU – « Indice et formes linéaires stables dans les algèbres de Lie », J. Algebra **273** (2004), no. 2, p. 507–516. [55](#), [57](#), [64](#)
- [8] — , Lie algebras and algebraic groups, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005. [49](#), [50](#), [55](#), [60](#)

Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Il est bien connu, d'après un résultat de Duflo, Khalgui et Torasso, qu'une algèbre de Lie algébrique quasi-réductive (définie sur $\mathbb{K}$) est stable. La réciproque est fausse en général. Se pose la question de savoir, si pour certaines classes particulières d'algèbres de Lie non réductives, il y a équivalence entre ces deux notions. Plus généralement, les sous-algèbres biparaboliques forment une classe très intéressante (incluant la classe des sous-algèbres paraboliques et de Levi) d'algèbres de Lie qui ne sont pas toutes réductives. Panyushev conjecture que si une sous-algèbre biparabolique est stable, alors son stabilisateur générique est un tore. Cette conjecture peut être reformulée ainsi : *une sous-algèbre de Lie biparabolique est stable si et seulement si elle est quasi-réductive*. Compte tenu des résultats obtenus par ce dernier pour le cas des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple de type A et C, on donne dans cette thèse une réponse positive à cette conjecture pour la classe des sous-algèbres paraboliques d'une algèbre de Lie simple. Au passage, nous montrons également qu'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ qui stabilise une forme bilinéaire alternée de rang maximal et un drapeau en position générique est stable si et seulement si elle est quasi-réductive.

Mots clés : Algèbre de Lie simple, sous-algèbres paraboliques, indice d'une algèbre de Lie, forme linéaire régulière, algèbre de Lie quasi-réductive, algèbre de Lie stable.

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic 0. It is well known by work of Duflo, Khalgui and Torasso that any quasi-reductive algebraic Lie algebra (defined over $\mathbb{K}$) is stable. However, there are stable Lie algebras which are not quasi-reductive. This raises the question, if for some particular class of non-reductive Lie algebras, there is equivalence between stability and quasi-reductivity. More generally, biparabolic subalgebras form a very interesting class (including the class of parabolic subalgebras and of Levi subalgebras) of non-reductive Lie algebras. It was conjectured by Panyushev that these two notions are equivalent for biparabolic subalgebras of a reductive Lie algebra. In this thesis, we give by considering the results of Panyushev for parabolic subalgebras of simple Lie algebra of type A and C a positive answer to this conjecture in the case of parabolic subalgebras. In passing, we prove that these two notions are equivalent for certain subalgebras of $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ which stabilize an alternating bilinear form of maximal rank and a flag in generic position.

Keywords : Simple Lie algebras, parabolic Lie algebras, index, regular linear forms, quasi-reductive Lie algebras, stable Lie algebras.